Étude dynamique des systèmes multiples de petits corps : application au système de Pluton

Laurène Beauvalet

▶ **To cite this version:**

Laurène Beauvalet. Étude dynamique des systèmes multiples de petits corps : application au système de Pluton. Planétologie et astrophysique de la terre [astro-ph.EP]. Observatoire de Paris, 2011. Français. NNT : . tel-00689508

HAL Id: tel-00689508

https://theses.hal.science/tel-00689508

Submitted on 19 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

OBSERVATOIRE DE PARIS

ÉCOLE DOCTORALE
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE D'ILE-DE-FRANCE

Doctorat
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE

Dynamique des Systèmes Gravitationnels

Laurène BEAUVALET

Étude dynamique des sytèmes multiples de petits corps

Application au système de Pluton

Thèse dirigée par Valéry LAINEY et Jean-Eudes ARLOT

Soutenue le 14 décembre 2011 devant un jury composé de :

Bruno Sicardy	Président du Jury
Carl D. Murray	Rapporteur
Pascal Rosenblatt	Rapporteur
Anne Lemaitre	Examinateur
Gabriel Tobie	Examinateur
Jean-Eudes Arlot	Directeur de thèse
Valéry Lainey	Directeur de thèse

Lune et soleil, vite, à mon aide,
Grande Ourse, sois-moi bonne guide
que je passe la porte obscure,
loin de la barrière étrangère,
le petit nid de maigre couche,
ma demeure voûtée d'angoisse !

Tire à terre l'homme de route,
l'enfant de l'homme, sous le ciel,
qu'il regarde la lune au ciel,
le soleil aux rayons de joie,
qu'il vienne apprendre la Grande Ourse
et reguigner vers les étoiles !

Elias Lönnrot, *Le Kalevala*, Chant I,
traduction de Gabriel Rebourcet,
éditions Gallimard, juin 2010

Remerciements

Comme il se doit dans tous remerciements présents dans une thèse, il convient d'adresser sa reconnaissance en premier lieu à ses directeurs. En ce qui me concerne, c'est avec joie que je me plie à cette tradition dictée par l'usage et la raison. Je remercie donc infiniment Valéry Lainey et Jean-Eudes Arlot de m'avoir proposé ce sujet, de m'avoir acceptée comme doctorante pour l'étudier et de m'avoir encadré pendant ces années de thèse (après tout, combien de doctorants ont pû étudier un objet portant le nom de leur divinité préférée du panthéon gréco-latin ?). Je les remercie de leur présence, de leur patience et de leur confiance.

Je souhaite remercier William Thuillot, directeur de l'IMCCE lors de mon arrivée, ainsi que son successeur, Daniel Hestroffer, pour m'avoir tous deux permis d'effectuer ma thèse dans le laboratoire. Je tiens également à exprimer ma gratitude envers Bruno Sicardy pour avoir accepté d'être le président de mon jury de thèse, ainsi que Anne Lemaitre, Carl Murray, Pascal Rosenblatt et Gabriel Tobie, pour avoir accepté d'être membres du dit-jury. Je remercie Richard Binzel pour sa disponibilité et l'attention portée à mes travaux, ainsi que Franck Marchis pour les mêmes raisons. Je remercie Patrick Rocher pour sa gentillesse et sa rayonnante générosité dont j'ai pû me rendre compte dès mon premier jour de stage de méthodologie en M2, pour ses discussions passionnantes et érudites, ses caramels au beurre salé, ses photos de Vendée et sa bibliothèque impressionnante. Merci aussi à Vincent Robert pour tous les thés offerts, pour m'avoir aidé entre deux réunions le jour où j'ai rendu mon manuscript, et pour l'aide et les explications que tu m'as donné en tant que précédent thésard de Jean-Eudes et Valéry. Ma reconnaissance va également à tous les autres membres de l'IMCCE, qui m'ont permis d'effectuer ma thèse dans de très bonnes conditions et une très bonne ambiance.

Je remercie aussi sincèrement Benjamin Levrard pour m'avoir fait découvrir la Mécanique Céleste lors de mon stage de M1 et avoir soutenu mon entrée en M2, ainsi qu'Ana Gomez pour m'avoir acceptée en M2 DSG et avoir suivi mon parcours avec attention et bienveillance par la suite. Je remercie Benoît Mosser de m'avoir acceptée parmi les moniteurs de l'Observatoire de Paris, une expérience essentielle et profondément enrichissante. Je n'oublie pas ma merveilleuse marraine de thèse, Audrey Delsanti, pour son attention, son impressionnante bonne humeur et sa capacité sans fin au bavardage. Je consacre enfin une pensée émue et chaleureuse à ceux qui ont vécu avec moi ce terrible week-end du train des étoiles (ainsi qu'à tous ceux qui ont subi le récit de cet évènement).

Je remercie aussi tous mes amis pour m'avoir soutenue, réconfortée, écoutée, aidée, distraite, s'être inquiétés, m'avoir fait rire et mille autres choses que seuls des amis savent faire. Maia, Dorothée, Sylvie, Mouton, Zazou, Seb, Boulou, Nora, Céline et tous les autres, merci pour tout, sans vous je ne serai pas allée aussi loin.

Enfin, je remercie mes parents, mon frère et toute ma famille pour leur soutien indéfectible et leur chaleureuse affection.

Résumé

Un système multiple est un ensemble de petits corps du Système solaire en interaction gravitationnelle et orbitant autour de leur barycentre, lui-même en révolution autour du Soleil. L'observation astrométrique de ces systèmes permet d'avoir accès à des paramètres physiques plus difficilement accessibles par d'autres techniques, en premier lieu la masse des composantes du système. Pour déduire des observations la valeur de ces paramètres, nous avons créé un modèle numérique à N-corps . Notre modèle intègre les équations variationnelles associées aux mouvements orbitaux pour permettre un ajustement du modèle par la méthode des moindres carrés.

Notre modèle a par la suite été appliqué au système de Pluton, le système multiple pour lequel on dispose de la plus longue période d'observations. Ce système s'apparente aussi bien aux systèmes planétaires classiques, Pluton étant un objet en équilibre hydrostatique et Nix, Hydra et S2011(134340)1 ayant des masses négligeables face à lui, qu'à un système de petits corps, le principal satellite du système, Charon, étant suffisamment massif pour faire de Pluton/Charon un objet binaire.

De manière à modéliser aussi bien le mouvement héliocentrique de Pluton, fortement perturbé par ses satellites, que le mouvement des dits-satellites, nous avons intégré les équations du mouvement dans un repère d'axes fixes centrés sur le barycentre du Système Solaire, en prenant en compte l'influence des planètes et des aplatissements polaires au second ordre de Pluton et Charon. Le modèle numérique ainsi obtenu est ajusté par la méthode des moindres carrés à des observations simulées ou réelles.

Dans un premier temps, en ajustant notre modèle à des observations simulées, nous avons étudié l'évolution de l'incertitude des masses de Nix et Hydra. Nous avons montré que leurs masses ne seront probablement réellement contraintes que grâce aux observations de New Horizons. Nous avons également montré que l'effet de l'aplatissement de Pluton et Charon sur les mouvements orbitaux n'est pas assez important pour pouvoir être déduit des observations astrométriques seules. Nous avons également utilisé cette méthode pour quantifier le futur apport de Gaia à notre connaissance du système.

Par la suite, nous avons ajusté notre modèle aux observations réelles du système de Pluton. Nous avons obtenu des résidus astrométriques proches de ceux obtenus par de précédents modèles, malgré des valeurs des masses de Nix et Hydra très différentes de celles obtenues par ces précédentes études. Néanmoins, les masses de ces derniers étant très faiblement contraintes actuellement, nos estimations et celles obtenues par d'autres restent cohérentes. La solution du mouvement des satellites ainsi obtenue a été utilisée lors de notre ajustement de manière à reproduire de la façon la plus exacte possible le mouvement de Pluton autour du barycentre de son système.

Finalement, nous avons adapté notre modèle au système d'Eugénia pour lequel nous avons trouvé des résultats compatibles avec ceux des études précédentes du système. Néanmoins, notre solution dérivant d'un ajustement sur une plus longue plage d'observations, notre modélisation du système sera valide sur une plus grande période de temps.

Mots-clés : Modélisation numérique, Pluton, Satellites de Pluton, Dynamique, systèmes multiples

Abstract

Dynamical study of multiple systems
Application to Pluto's system

A multiple system refers to a set of small bodies tied by gravitation and orbiting around their common center of mass, which orbits around the Sun. Astrometric observations of those systems grant us access to parameters which would be harder to determine through other methods, more specifically the masses of the system's componants. In order to deduce the value of those parameters from astrometric observations of those objects, we have created an N-bodies numerical model. Our model includes the integration o orbital motion's variationnal equations, a key feature for least-square method fitting.

We applied our model to Pluto's system, the multiple system with the longest observationnal timespan. Pluto's sytem possesses features of both classical planetary system and multiple system. Indeed, Pluto is in hydrostatic equilibrium and its smallest satellites have a negligible mass compared to its, a trait which is shared by planetary systems. But its most massive satellite, Charon, is massive enough to consider Pluto/Charon to be a binary object.

In order to reproduce both the heliocentric motion of Pluto, disturbed by the influence of its satellites, and the motion of said satellites, we have integrated the equations of motions in a reference frame centered on the Solar System barycenter. We have included the perturbations from the planets and the second order polar oblateness of Pluto and Charon. The obtained model is then fitted to observations or simulated data thanks to least-square method.

First, we have fitted our model to simulated data in order to study the evolution of the uncertainty on Nix's and Hydra's mass. We show that their mass will most probably remain unconstrained until the arrival of New Horizons probe in the system. We also show that the effect of the polar oblateness on the orbits is negligible considering the uncertainty of the observations. We used this method to determine the future contribution of GAIA to our knowledge of the system.

Then, we have fitted our model to astrometric observations of the system. The fitting of the model to the observations has given post-fit residuals close to those of previous studies while giving very different masses for Nix and Hydra. Nonetheless, both in our study and the previous ones, the said masses are unconstrained enough for the results to remain coherent. The solution for the satellites' motion we then obtained has been used during our fitting of Pluto's heliocentric motion, in order to reproduce as accurately as possible Pluto's motion around its system barycenter.

At last, we have adapted our model to (45)Eugenia's system and have found results compatible with previous studies. As our results are based on a larger timespan than before, with new observations, our modelization of the satellites' motion should remain accurate on a longer timespan.

Key words : numerical modelisation, Pluto, Pluto's satellites, multiple systems dynamics

Table des matières

Introduction **5**

I Modélisation d'un système multiple **7**

1 Présentation du système de Pluton **9**
1.1 Généralités . . . 9
1.1.1 Pluton . . . 9
1.1.2 Charon . . . 10
1.1.3 Nix et Hydra . . . 12
1.1.4 S/2011(134340)1 . . . 13
1.2 Caractéristiques dynamiques du système . . . 15
1.2.1 Mouvement héliocentrique de Pluton . . . 15
1.2.2 Caractéristiques des satellites . . . 17
1.3 New Horizons . . . 18
1.4 Autres systèmes multiples . . . 19

2 Modèle dynamique **23**
2.1 Caractéristiques du modèle . . . 23
2.1.1 Repère utilisé . . . 23
2.1.2 Un modèle double . . . 24
2.2 Équations du mouvement . . . 24
2.2.1 Notations . . . 24
2.2.2 Les harmoniques sphériques du champ de gravité . . . 25
2.2.3 Équations du mouvement non-développées . . . 27
2.2.4 Expression des forces d'aplatissement . . . 27
2.2.5 Cas particulier de Pluton et Charon . . . 29

3 Intégration numérique **31**
3.1 Description de l'intégration . . . 31
3.1.1 Conditions initiales . . . 31
3.1.2 Valeurs numériques des harmoniques du champ de gravité . . . 32
3.2 Contrôles de l'intégration . . . 33
3.2.1 Aller-retour . . . 33
3.2.2 Conservation de l'énergie . . . 34
3.2.3 Conservation du moment cinétique . . . 35
3.2.4 Précession des orbites des satellites . . . 37

II Ajustement et simulations de données 49

4 Ajustement par moindres carrés 51
4.1 Théorie des moindres carrés . . . 51
4.1.1 Méthode . . . 51
4.1.2 Équations variationnelles . . . 54
4.2 Calcul des équations variationnelles . . . 55
4.2.1 Interactions entre les centres de masses . . . 55
4.2.2 Dérivées des forces d'aplatissement . . . 57
4.3 Changement d'observables et de paramètres ajustables . . . 60
4.3.1 Changement d'observables : coordonnées équatoriales . . . 60
4.3.2 Changement de paramètres ajustables : éléments elliptiques . . . 62
4.3.3 Intégration des équations variationnelles . . . 67

5 Observations simulées et paramètres estimables 69
5.1 Principe . . . 69
5.2 Discrimination des paramètres estimables . . . 70
5.2.1 Secondes harmoniques du champ de gravité . . . 70
5.2.2 Masses de Nix et Hydra . . . 73
5.3 Fonction de sensibilité . . . 77
5.4 Évolution de la précision des masses . . . 78
5.4.1 Dates des simulations . . . 79
5.4.2 Résultats . . . 81

III Ajustement aux observations réelles 85

6 Pluton 87
6.1 Présentation des observations . . . 87
6.1.1 Observations de Pluton . . . 87
6.1.2 Observations des satellites . . . 91
6.2 Particularités des observations réelles . . . 92
6.2.1 Systèmes de référence de temps et d'espace . . . 92
6.2.2 Observations à partir de la Terre . . . 93
6.2.3 Correction de la phase . . . 94
6.3 Ajustement . . . 97
6.3.1 Incompatibilité entre les jeux d'observations . . . 97
6.3.2 Pondération des observations . . . 99
6.3.3 Résidus . . . 99
6.4 Conclusion . . . 111

7 Eugenia 113
7.1 Présentation du système . . . 113
7.2 Adaptation du modèle . . . 114
7.3 Description des observations . . . 116
7.4 Ajustement aux observations . . . 117
7.4.1 Ajustement initial . . . 117
7.4.2 Réévaluation des incertitudes . . . 117

7.4.3 Ajustement sans les observations du Gemini Telescope 120
7.5 Discussion 122
7.5.1 Aplatissement dynamique 124
7.5.2 Mouvement des satellites 124
7.6 Apport du satellite GAIA 127
7.6.1 Simulation de données 128
7.6.2 Résultats 128
7.7 Conclusion 128

Conclusion **131**

Annexes **134**

A Dates utilisées pour les simulations **135**
A.1 Système de Pluton 135
A.2 Système d'Eugenia 140

B Réduction astrométrique des images du Pic du Midi **143**
B.1 Présentation des observations 143
B.2 Réduction astrométrique des images 144
B.2.1 Traitement des images 144
B.2.2 Principe de la réduction astrométrique 144
B.2.3 PRISM 145

C Résultats préliminaires pour le système de (87)Sylvia **149**
C.1 Présentation du système 149
C.2 Description des observations 149
C.3 Premiers résultats de l'ajustement 151
C.4 Pistes d'amélioration et perspectives 151

D Articles acceptés **155**

E Origine des noms de Pluton et de ses satellites **171**
E.1 Origine des noms des planètes et *Interpretatio* 171
E.2 Pluton : un cas particulier 173
E.3 Satellites de Pluton 174
E.3.1 Charon 174
E.3.2 Nix 174
E.3.3 Hydra 175

Bibliographie **177**

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude de la dynamique des systèmes multiples de petits corps dans le Système solaire. Un système multiple de petits corps est constitué d'au moins deux objets considérés comme astéroïdes. Ces objets orbitent autour de leur barycentre, qui, lui-même, est en orbite autour du Soleil. Les systèmes multiples ont été découverts depuis peu de temps et de nombreux paramètres physiques de base demeurent méconnus pour la majorité d'entre eux, malgré l'aide des plus puissants télescopes actuels. Toutefois, l'ajustement d'un modèle dynamique aux observations astrométriques de ces systèmes permet justement, lorsque l'on dispose de suffisamment d'observations, de déterminer certains des paramètres inconnus, au premier rang desquels se trouve la masse, essentielle pour retracer l'évolution dynamique passée et future du système. Pour ce faire, nous avons développé un modèle numérique permettant de représenter le mouvement des objets de ces systèmes. Contrairement aux autres modèles dynamiques existants qui modélisent soit le mouvement de l'objet principal autour du Soleil, soit celui de ses satellites, le modèle présenté ici permet de représenter les deux mouvements simultanément et surtout de les ajuster à des observations aussi bien absolues que relatives.

Le premier système multiple de petits corps qui sera présenté et étudié dans cette thèse est le système de Pluton, intermédiaire entre système planétaire *classique* (c'est à dire avec un objet central très massif entouré de satellites de masse négligeable) et système d'astéroïdes multiple. En effet, son plus grand satellite, Charon, possède une masse non-négligeable par rapport à celle de Pluton, faisant de Pluton/Charon un objet binaire. Le système est constitué aussi de trois autres satellites de masse négligeable par rapport à Pluton, se rapprochant par cet aspect d'un système planétaire. C'est à partir de ce cas que nous avons élaboré notre modèle numérique qui sera présenté dans le chapitre 2 et qui consiste en l'intégration des équations du mouvement des quatre principaux objets du système (le quatrième et plus petit satellite connu n'ayant été découvert que très récemment) dans le Système solaire, perturbés par l'influence des planètes.

Ensuite, nous nous intéresserons au principe de l'ajustement du modèle aux observations en expliquant la méthode de l'ajustement par moindres carrés et en explicitant l'expression des équations variationnelles (équations différentielles fournissant les dérivées partielles nécessaires à l'ajustement). Pour le système de Pluton, les études précédentes ont fourni des estimations des masses pour les quatre objets alors connus du système, mais les barres d'erreurs de ces estimations sont très importantes. Nous avons cherché à déterminer quels sont les paramètres dynamiques que nous pouvions réellement déterminer avec notre modèle. En simulant des observations futures que nous obtiendrons à partir de télescopes au sol, du Hubble Space Telescope et des missions New Horizons et GAIA, nous avons également étudié l'évolution de la précision que nous obtiendrons sur les masses des objets du système de Pluton. Puis, nous présentons le résultat de l'ajustement de notre modèle aux observations astrométriques de Pluton et de ses satellites dont nous disposons.

Enfin, l'étude du système d'Eugenia, un astéroïde multiple ayant deux satellites, pour lequel nous adaptons notre modèle numérique, occupe le dernier chapitre. En annexe

se trouvent le début de notre travail sur l'ajustement de notre modèle aux observations astrométriques du système de (87) Sylvia, certaines données utilisées, les articles soumis en rapport avec ce travail, et des explications sur l'origine des noms des planètes et des objets du système de Pluton.

Première partie

Modélisation d'un système multiple

Chapitre 1

Présentation du système de Pluton

Sommaire

1.1 Généralités 9
1.1.1 Pluton 9
1.1.2 Charon 10
1.1.3 Nix et Hydra 12
1.1.4 S/2011(134340)1 13
1.2 Caractéristiques dynamiques du système 15
1.2.1 Mouvement héliocentrique de Pluton 15
1.2.2 Caractéristiques des satellites 17
1.3 New Horizons 18
1.4 Autres systèmes multiples 19

Dans ce premier chapitre, nous allons présenter les caractéristiques du système de Pluton, ainsi que les inconnues qui y sont attachées. Ce système sera exploré en 2015 par la mission New Horizons que nous décrivons brièvement. Pluton n'est pas le seul petit corps *du Système solaire doté de satellites, et nous présenterons également certaines particularités de ces systèmes.*

1.1 Généralités

1.1.1 Pluton

Pluton fut découvert en 1929 par Clyde Tombaugh, au Lowell Observatory. Considérée lors de sa découverte comme la neuvième planète du Système Solaire, ou "Planète X", Pluton a conservé le statut d'objet le plus lointain orbitant autour du Soleil jusqu'en 1992 et la découverte de (15760) 1992 QB1 (Jewitt et al., 1992). Aujourd'hui, s'il a perdu son statut de planète et est considéré comme une planète naine, il demeure le premier objet transneptunien (TNO) jamais découvert et a donné son nom à deux catégories d'objets : les *plutoïdes* et les *plutinos*. Les premiers désignent les objets transneptuniens pouvant être qualifiés de planètes naines (quatre objets reconnus officiellement : Pluton, Eris, Haumea et Makemake). Les plutinos sont les objets transneptuniens en résonance $2:3$ avec Neptune et constituent la plus grande population d'objets résonants dans la

ceinture de Kuiper.

Situé actuellement à environ 30 unités astronomiques, Pluton effectue une révolution autour du Soleil en 248 ans. Sa découverte ne datant que de 1929, la planète naine n'a parcouru qu'un tiers de son orbite depuis lors, d'où une grande incertitude quant à sa distance héliocentrique. Malgré le fait que sa découverte remonte à plus de 80 ans, elle demeure largement méconnue d'un point de vue scientifique. En effet, elle n'a jamais été observée par une sonde et seuls les développements les plus avancés des moyens d'observations ont permis d'obtenir quelques détails de sa surface. Ce n'est que dans les années 1950 que l'apparition des photo-multiplicateurs a permis de mettre en évidence les variations saisonnières de sa surface et sa période de rotation anormalement lente comparée aux autres planètes, à l'exception de Mercure piégée en résonance spin-orbite et de Vénus dotée d'une rotation rétrograde. La découverte du satellite le plus massif de Pluton, Charon, en 1978 (Christy and Harrington, 1978) permit d'élucider ce dernier point.

L'une des particularités de Pluton, pour un objet de cette taille, est de posséder une atmosphère. Cette caractéristique fut découverte suite à l'étude des courbes de lumière issues des occultations stellaires observées. Les variations saisonnières de sa surface s'expliquent par l'existence d'un cycle du méthane à sa surface, lié à la grande variation de sa distance héliocentrique au cours de son orbite (entre 29.6 et 49.3 Unités Astronomiques). Lorsque Pluton est au plus proche du Soleil, le méthane présent à sa surface se sublime et constitue son atmosphère. Lorsque Pluton s'éloigne de nouveau du Soleil, sa température baisse également, au point que son atmosphère se met à geler et se dépose à sa surface.

À ce jour, la carte de Pluton la plus précise qui ait été effectuée est celle reconstituée à partir des observations du Hubble Space Telescope (Buie et al., 2010). Des mesures effectuées dans différents filtres ont permis de déterminer que la surface de Pluton est plus rouge que celle de la plupart des TNOs connus. La figure (1.1) montre la carte obtenue. La première observation vraiment précise de Pluton n'aura lieu qu'en 2015, avec l'arrivée de la sonde américaine New Horizons qui traversera le système sans pouvoir se mettre en orbite autour de Pluton ou de l'un de ses satellites.

1.1.2 Charon

Charon est le plus massif des satellites de Pluton. Il fut découvert en 1978 par Christy et Harrington (Christy and Harrington, 1978). Ils avaient découvert que des images de Pluton présentaient un bourrelet évoluant autour de la planète de manière périodique (cf Figure 1.2), et avec la même période de 6 jours que sa rotation. Les étoiles du champ d'observations restant parfaitement sphériques, ils en déduisirent l'existence d'un satellite, nommé par la suite Charon. Charon a un diamètre d'environ la moitié de celui de Pluton, ce qui en fait le satellite le plus massif par rapport à sa planète. L'une des conséquences de cette situation est que le centre de masse du système constitué par

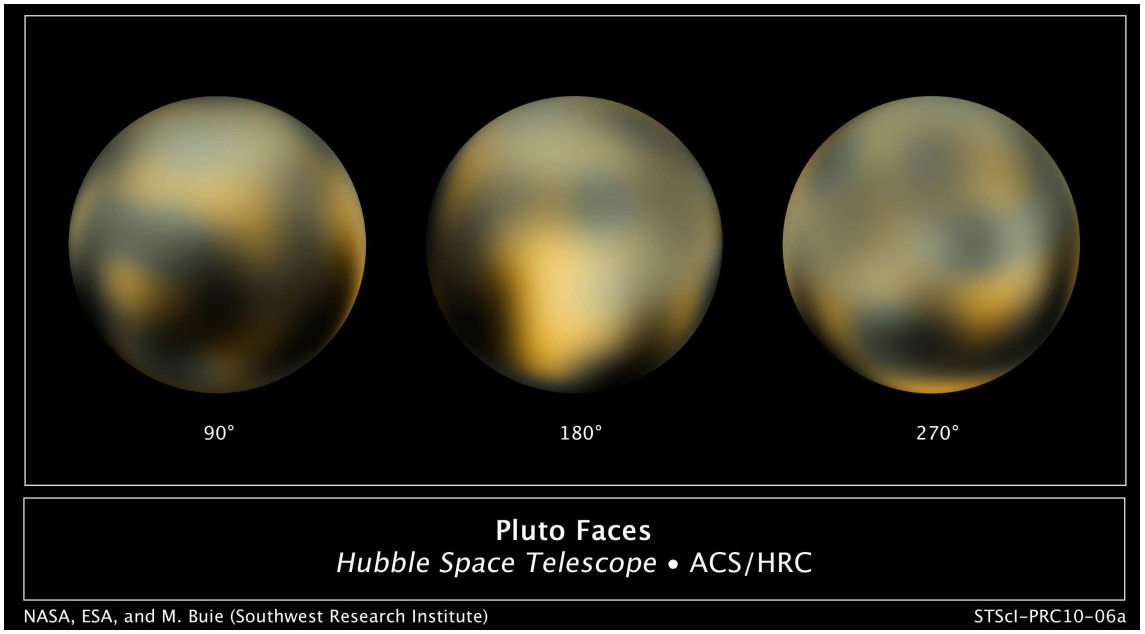

Figure 1.1 – Reconstitution de la surface de Pluton effectuée grâce aux images du Hubble Space Telescope.

Pluton et Charon se trouve en dehors des deux corps. Pluton et Charon forment donc un objet binaire, tournant autour de leur barycentre.

La découverte de Charon a permis de déterminer la masse de Pluton de manière relativement précise, et non plus en se fondant sur la masse qu'elle devrait avoir pour expliquer les perturbations de Neptune et Uranus, procédé qui ne menait qu'à la diminution de la masse estimée. Sa période de révolution est égale à celle trouvée pour la rotation de Pluton, même une fois que des courbes de lumière séparées pour les deux objets ont pu être effectuées. Ceci a conduit à la conclusion que Pluton et Charon sont dans une double résonance spin-orbite. Ceci signifie que les périodes de rotation de Pluton et Charon sont identiques et elles-mêmes égales à la période de révolution de Charon. Ainsi, un observateur à la surface de Pluton verrait Charon pratiquement immobile dans le ciel de Pluton, et réciproquement.

Dans le Système Solaire, la plupart des satellites sont bien moins massifs que leur planète. Le seul couple planète/satellite dont le rapport de masse se rapproche de celui de Pluton/Charon est le couple Terre/Lune. Ceci a conduit à un scénario de formation pour la planète naine binaire Pluton/Charon similaire à celui de la Terre et de la Lune (Canup, 2005). Suivant ce scénario, deux objets de masses comparables de la ceinture de Kuiper seraient entrés en collision. L'un des corps se serait alors désagrégé et les débris restants en orbite auraient formé Charon alors que les matériaux les plus lourds auraient été attirés par Pluton. Ainsi, une densité supérieure à celle de Charon pour l'un des autres satellites indiquerait une origine extérieure à cet objet (Canup, 2011). Les déterminations de densités des deux corps semblent corroborer ce scénario, Pluton ayant une densité supérieure à celle de Charon.

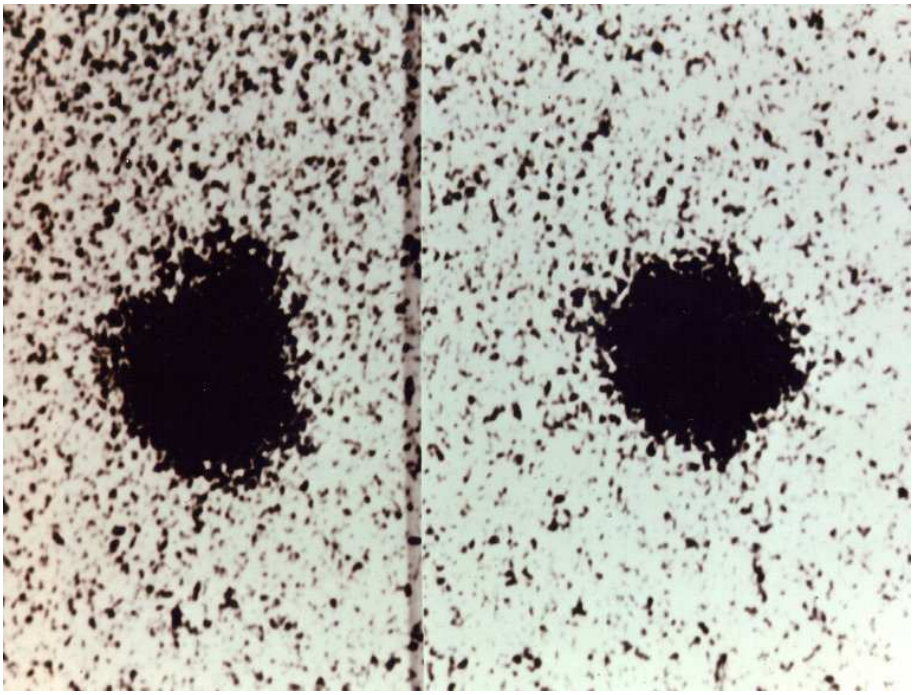

Figure 1.2 – Images de la découverte de Charon.

Charon ne possède pas d'atmosphère et sa surface aurait une couleur plus neutre que celle de Pluton. Étant donné qu'il est moins dense que Pluton, cela signifie qu'il est constitué de davantage de glace que ce dernier.

1.1.3 Nix et Hydra

Ceux qui furent il y a encore peu de temps considérés comme les plus petits satellites de Pluton, Nix et Hydra, furent découverts en 2005 grâce à des observations de Pluton par le Hubble Space Telescope pour préparer la mission New Horizons (pour une image plus récente du système par le Hubble Space Telescope cf Figure 1.3). Ces objets sont bien plus petits que Pluton et Charon. La différence de magnitude entre Pluton (V=14) et ces satellites ($V \approx 22$), combinée à leur relative proximité avec la planète naine, fait que seuls des télescopes équipés d'optique adaptative ou le HST sont capables de les observer. Nix a une magnitude moindre que celle de Hydra, ce qui laisse supposer qu'il est plus petit que ce dernier si tous les deux ont le même albédo, même si les estimations actuelles de leurs masses ne vont pas dans ce sens (cf Table 1.1).

Il existe deux scénarios différents quant à leur formation. Ils pourraient être issus de l'accrétion de résidus de la formation de Charon (Canup, 2011), ou d'un processus de capture. Leur couleur serait assez proche de celle de Charon, renforçant la première hypothèse (Stern et al., 2007). Pour discriminer lequel des deux scénarios est le plus crédible, il faudrait avoir accès à la densité des deux satellites. Si l'on dispose aujourd'hui d'un ordre de grandeur de leur masse, ce n'est pas le cas pour leur taille, ni, donc, pour leur densité. Seules des occultations stellaires par Nix ou Hydra pourraient nous fournir des indications sur leur taille mais aucune tentative n'a été fructueuse jusqu'à maintenant.

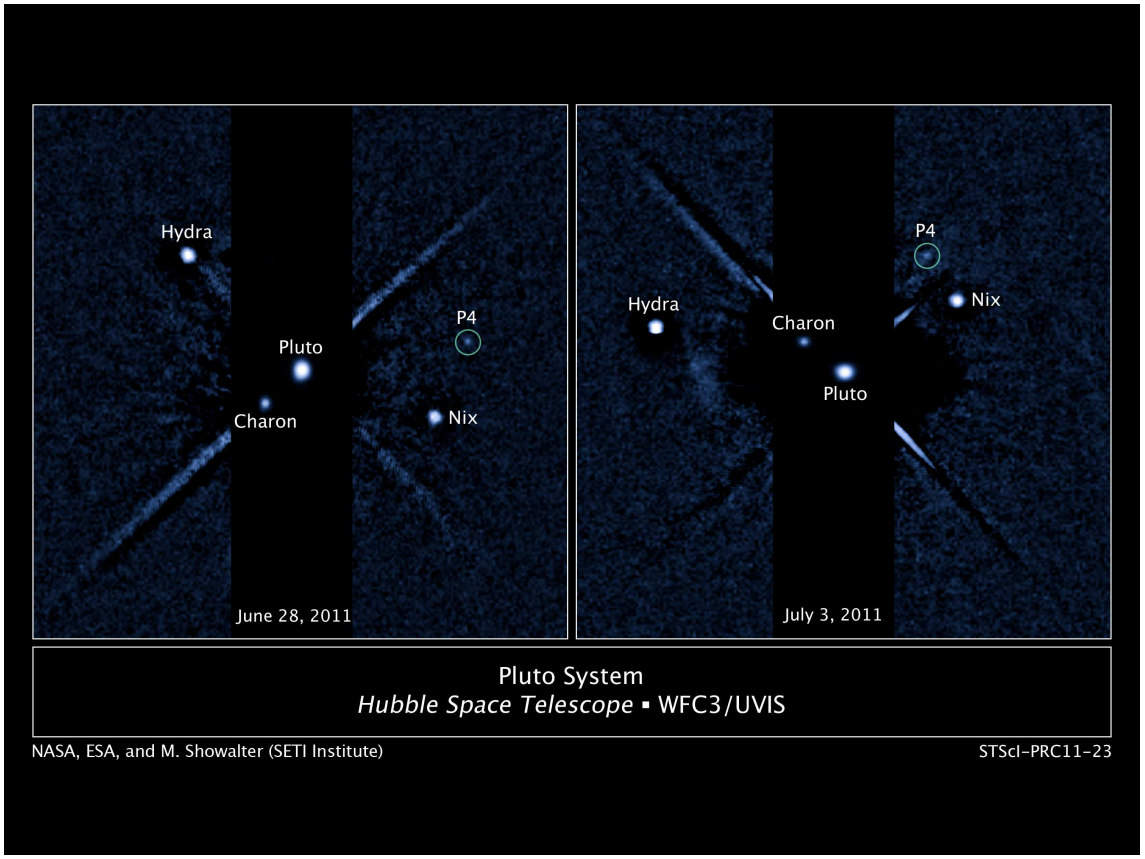

Figure 1.3 – Images de la découverte du satellite S 2011 (134340) 1

1.1.4 S/2011(134340)1

Le plus petit satellite de Pluton connu à ce jour fut annoncé le 21 juillet 2011 (Showalter et al., 2011), il est connu sous les dénominations provisoires S/2011(134340)1 et P4. Il orbite autour de Pluton sur une orbite équatoriale située entre celles de Nix et Hydra avec un demi grand-axe d'environ 59000 ± 2000 km et une période d'environ 32 jours. Ayant une magnitude de seulement 26, sa taille, déduite de cette magnitude en supposant un albédo similaire à Charon, serait entre 13 et 34 km. Seulement trois observations de ce satellite ont été effectuées par le Hubble Space Telescope : les 28 juin, 3 et 18 juillet 2011 (cf figure 1.3).

En raison de sa découverte très récente, il n'a pas été inclus dans notre modèle. Néanmoins, en raison du très faible nombre d'observations déjà disponibles, et de la difficulté à obtenir des images, il est probable que très peu d'observations de ce satellite auront été faites d'ici l'arrivée de la sonde New Horizons dans le système de Pluton. La découverte de ce satellite semble en tout cas indiquer que nous ne connaissons pas encore tous les corps du système de Pluton, et qu'il existe sans doute d'autres satellites plus petits.

Table 1.1 – Élements elliptiques moyens, masses et diamètres de Pluton et de ses satellites, plan de référence : écliptique et équinoxe moyen J2000.

	Pluton	Charon	Nix	Hydra
GM($km^3.s^{-2}$)	870.3 ±3.7	101.4 ±2.8	0.039 ±0.034	0.021 ±0.042
a	39.48168677 (UA)	19570.45 (km) ±0.44	49242. (km) ±12.	65082. (km) ±9.
e	0.24880766	3.484×10^{-3} $\pm 0.036 \times 10^{-3}$	1.504×10^{-2} $\pm 0.014 \times 10^{-2}$	8.70×10^{-3} $\pm 0.27 \times 10^{-3}$
i(deg)	17.14175	96.1680 ±0.0028	Charon±0.15	
Ω(deg)	110.30347	223.0539 ±0.0032	Charon±0.15	
ω(deg)	113,76329	157.92 ±0.32	-	-
P(days)	248.09(years)	6.387206 ±0.000007	25.492	38.734
D(km)	2322	1207 ±3	23-68	30-84

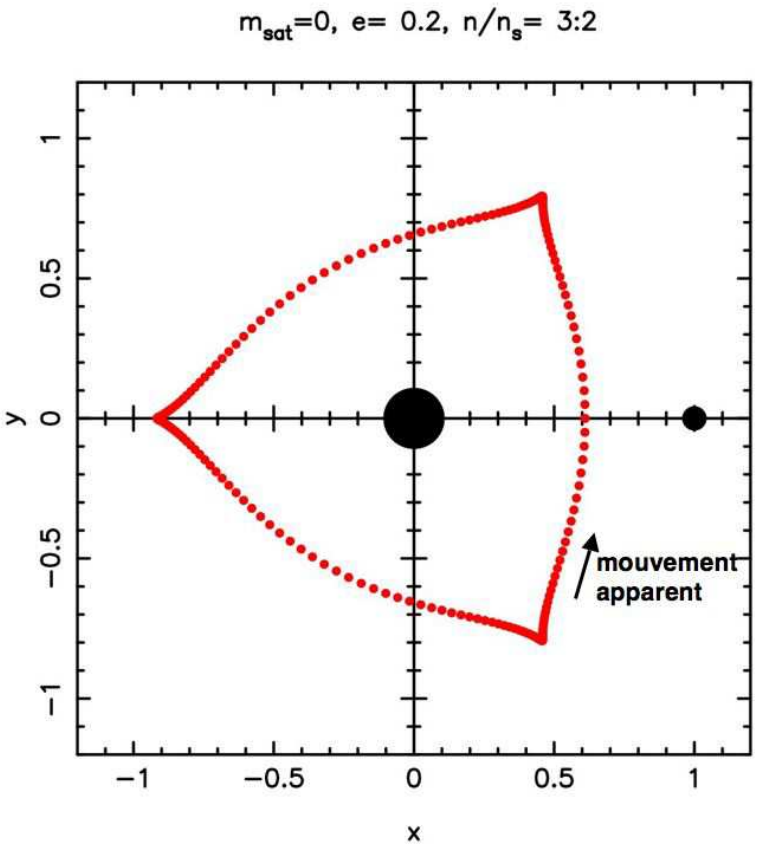

Figure 1.4 – Illustration d'un mécanisme de résonance 3 : 2. Par analogie avec le Système Solaire, le corps central serait le Soleil, l'autre corps unique à droite serait Pluton, et l'orbite rouge correspond à l'orbite de Neptune autour du Soleil vue dans le repère mobile attaché à Pluton et dirigé vers le Soleil. (source : cours de Bruno Sicardy)

1.2 Caractéristiques dynamiques du système

1.2.1 Mouvement héliocentrique de Pluton

Contrairement à tous les corps correspondant à la définition de planète donnée par l'assemblée générale de l'IAU en 2006, Pluton possède une forte inclinaison sur l'écliptique et une forte excentricité. Cette excentricité a pour conséquence que son périhélie est situé plus proche du Soleil que celui de Neptune. Ainsi, périodiquement, Pluton est plus proche du Soleil que ne l'est Neptune, comme ce fut le cas de 1979 à 1999. Néanmoins, l'inclinaison respective des deux trajectoires et la résonance avec Neptune dans laquelle est piégé Pluton empêche toute rencontre proche entre les deux objets (Wan et al., 2001; Cohen and Hubbard, 1965).

Résonances

Pluton et de nombreux autres objets transneptuniens sont dans la résonance 3 : 2 avec Neptune, on les appelle des plutinos. Néanmoins, Pluton est le seul dont l'orbite est protégée des collisions avec Neptune par trois résonances : la résonance 3 : 2 déjà évoquée

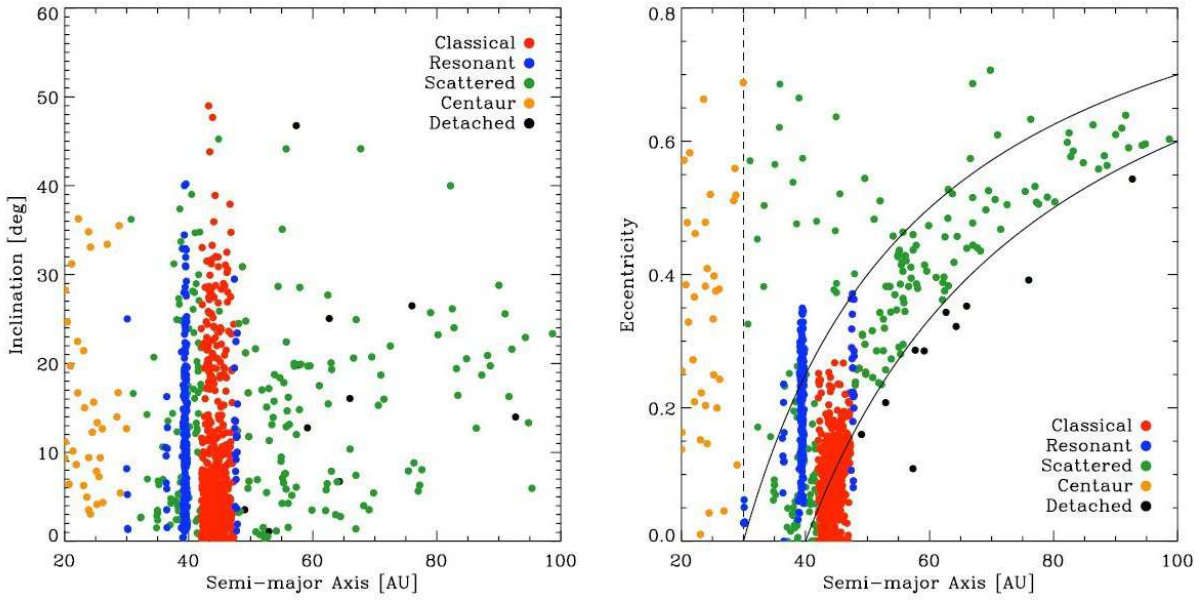

Figure 1.5 – Diagramme inclinaison/demi grand-axe des TNOS connus. Les objets résonants possédant un demi-grand axe d'environ 39 UA sont les plutinos. Source : David Jewitt `http://www2.ess.ucla.edu/~jewitt/kb/plutino.html`

(cf figure 1.4), la résonance de Kozai et la super résonance 1 : 1.
L'angle critique de la résonance 3 : 2 est (Cohen and Hubbard, 1965) $3\lambda_P - 2\lambda_N - \varpi_P$, où λ_P est la longitude moyenne de Pluton, λ_N celle de Neptune et ϖ_P la longitude du périhélie de Pluton. Cet angle oscille autour de 180 ° avec une amplitude de 76 °.
La résonance de Kozai a pour conséquence que l'argument de son périhélie ω_P oscille autour de 90 ° (Williams and Benson, 1971), empêchant ainsi son périhélie de se trouver dans le plan de l'écliptique, et donc limitant encore la distance pendant les rencontres proches entre Neptune et Pluton.
Enfin, la superrésonance 1 : 1 (Milani et al., 1989) indique que la quantité $\Omega_P - \Omega_N$ est en résonance avec l'argument du périhélie de Pluton. Chacune de ces résonances concourt à augmenter la distance possible lors des rapprochements entre Pluton et Neptune.

Les perturbations que les autres objets transneptuniens exercent sur l'orbite de Pluton sont négligeables par rapport à celles des planètes externes. Aucun des autres plutinos connus n'est dans la superrésonance 1 : 1, pour autant que l'on puisse en juger compte tenu de la précision de leur orbite (Wan et al., 2001). Néanmoins, un certain nombre d'entre eux partagent avec Pluton une forte excentricité et une forte inclinaison (cf figure 1.5). L'un des scénarios les plus probables est que ces objets aient acquis ces caractéristiques lors de leur capture (Malhotra, 1995).

Couplage avec Charon

La présence de Charon a pour conséquence un couplage entre le mouvement héliocentrique de Pluton et le mouvement orbital de Charon. Ainsi, si le barycentre du

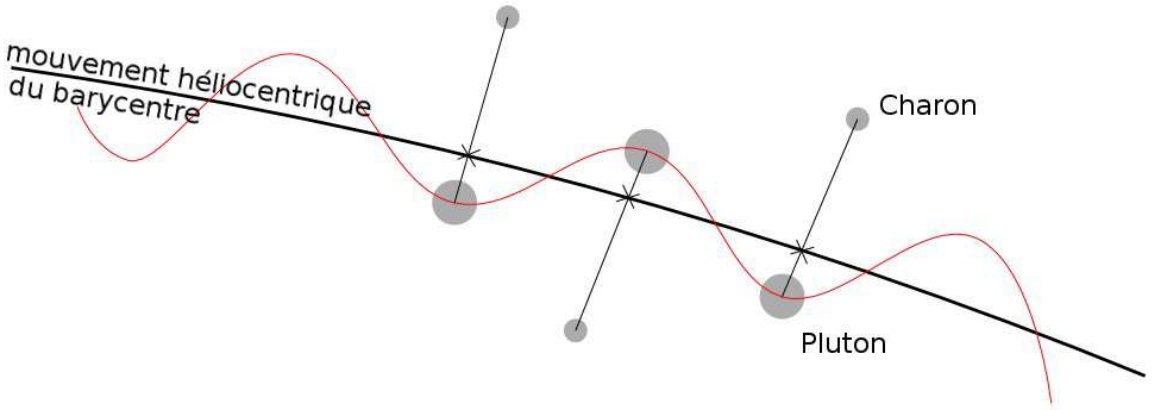

Figure 1.6 – Modélisation du mouvement apparent de Pluton, Charon et du barycentre du système.

système a un mouvement héliocentrique "classique", perturbé par les planètes et les corps alentour, Pluton, lui, va osciller autour de cette trajectoire. Cette situation est présente en fait pour tous les systèmes planétaires, mais les masses de Pluton et Charon étant proches, le phénomène est accentué (le centre de masse se trouvant en dehors de Pluton). La représentation schématique de cette situation est présentée dans la figure 1.6.

1.2.2 Caractéristiques des satellites

Comme il a déjà été dit, Pluton et Charon sont en double résonance spin-orbite. Cette position d'équilibre laisse à penser que le système a fini d'évoluer sous l'influence des effets de marées. On admet donc que les pôles de rotation de Pluton et Charon sont alignés, même si cet alignement n'est pas encore observable ; les premières cartes des deux astres étant assez récentes et peu détaillées pour le cas de Charon. L'orbite de Charon est assez bien connue par rapport à celles de Nix et Hydra, de même que sa masse. Malgré tout, il existe une ambiguïté quant à la valeur de son demi-grand axe, deux jeux d'observations provenant d'instruments différents donnant deux résultats incompatibles entre eux.

La meilleure estimation à ce jour des masses et des orbites de Nix et Hydra provient de Tholen et al. (2008). Ces deux satellites n'ayant été découverts qu'en 2005 et les pré-découvertes les plus anciennes ne datant que de 2002, les masses estimées sont fortement incertaines. D'après ces premières estimations, leurs inclinaisons sont très faibles. Dans la table 1.1, l'argument du périapse n'est pas précisé, Charon entraînant un mouvement de précession de l'orbite képlérienne (cf 3.2.4) de Nix et Hydra.

Charon, Nix et Hydra sont très proches de la résonance triple 1 : 4 : 6. D'après Tholen et al. (2008), les satellites ne seraient pas piégés dans la résonance. Seul le cas où les masses de Nix et Hydra seraient très élevées par rapport aux masses estimées actuellement permettrait une résonance entre Nix et Hydra (Lee and Peale, 2006). L'une

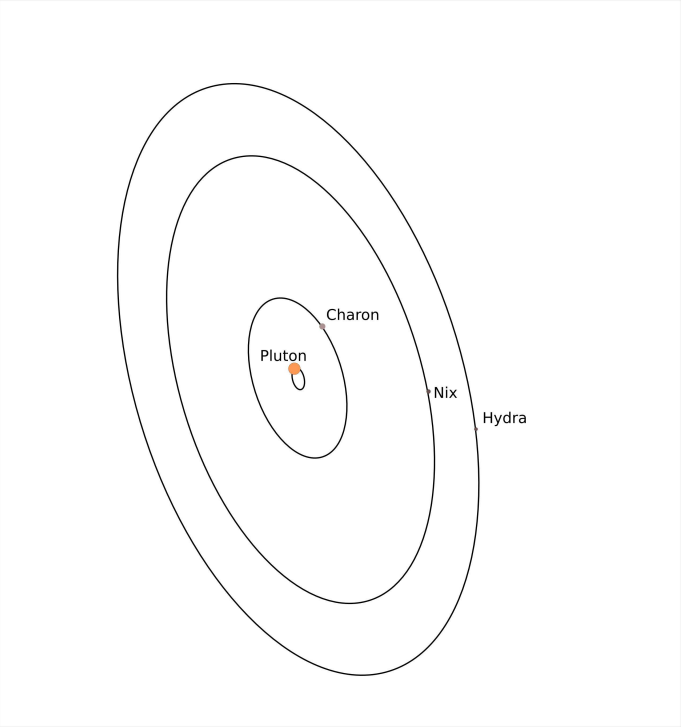

Figure 1.7 – Mouvement de Pluton et de ses satellites autour du barycentre du système vu depuis la Terre au 22/11/2002. Pluton et Charon sont représentés à l'échelle, Nix et Hydra ont été agrandis, leur diamètre étant au maximum quinze fois moindre que celui de Charon.

des questions qui se pose alors est : comment ces deux satellites ont-ils pû échapper aux résonances ? Les satellites sont situés très profondément dans le champ gravitationnel de Pluton, le satellite le plus lointain, Hydra, orbite ainsi à seulement 3% du rayon de Hill de Pluton, en faisant ainsi le plus compact des systèmes planétaires connus à ce jour (Stern et al., 2006a). Reste alors à savoir si Nix et Hydra se sont formés à une orbite proche de celles qu'ils occupent actuellement (Lithwick and Wu, 2008b), ou s'ils se sont formés dans des sites de résonance (Lithwick and Wu, 2008a). Il est plus difficile de penser qu'une rencontre proche entre Pluton et un autre objet transneptunien ait pû être l'origine d'une perturbation suffisante pour agir sur les demi-grands axes des satellites mais pas sur leur inclinaison.

Des phénomènes mutuels entre Pluton et Charon ont été observés en 1985. Actuellement, le système s'éloigne de son équinoxe et il nous apparaît de plus en plus ouvert, au point qu'aujourd'hui, plus un seul des satellites n'effectue un transit devant Pluton (cf figure 1.7). En effet, l'obliquité de Pluton est très forte, environ 120 $^\circ$, c'est-à-dire que sa rotation et le mouvement de ses satellites sont rétrogrades.

1.3 New Horizons

New Horizons est la première mission du programme New Frontiers de la NASA, ayant pour but l'exploration des planètes du Système Solaire à l'aide de missions de classe moyenne. Son but est d'étudier le système de Pluton et d'autres objets, pour l'instant

non-définis, de la ceinture de Kuiper. Proposée par Alan Stern, elle a été lancée en janvier 2006, quelques mois avant l'assemblée générale de l'IAU ayant fixé une définition au terme *planète* et déclassant Pluton par la même occasion. Elle n'atteindra le système qu'en juillet 2015 et n'aura pas la puissance nécessaire pour se mettre en orbite autour de l'un des corps du système, sa vitesse étant trop importante. Elle ne fera que le traverser avant de se diriger vers d'autres objets de la ceinture de Kuiper.

La mission est dotée des instruments suivants :
- ALICE : un spectromètre ultraviolet
- Ralph : un spectro-imageur infrarouge
- REX : un instrument radio
- LORRI : un imageur panchromatique à longue focale
- SWAP : un instrument capable de mesurer le taux de disparition de l'atmosphère de Pluton
- PEPSSI : un spectromètre pour les particules de hautes énergies
- VP (Venetia Burney) : un collecteur de poussières

Les principaux objectifs scientifiques de la mission sont de caractériser la géologie et la morphologie de Pluton et Charon, leur composition de surface et l'atmosphère de Pluton. Elle devrait également permettre d'étudier Nix et Hydra. Le programme prévisionnel d'observations du système par l'instrument LORRI est donné dans l'annexe A. Ce planning sera très certainement modifié en raison de la découverte de P4.

1.4 Autres systèmes multiples

Il n'existe pas actuellement de définition officielle de ce qu'est un astéroïde multiple. Dans cette thèse, nous appellerons système multiple d'astéroïdes un ensemble d'au moins deux corps orbitant autour de leur centre de masse, de manière analogue à un système planétaire. Comme dans le cas d'un système planétaire, la masse du corps central peut dominer largement celle de ses satellites, mais ce n'est pas le cas de la majorité de ces systèmes. En effet, il existe des systèmes multiples où les deux objets les plus massifs ont des masses équivalentes. Le ratio masse du primaire/masse du satellite est ainsi beaucoup plus proche de 1 que dans le cas planétaire pour la majorité des systèmes.

Le premier satellite d'astéroïde connu, si l'on excepte le cas de Charon, est Dactyl, orbitant autour de (243)Ida (Belton and Carlson, 1994), et découvert en 1994 sur des images de la sonde Galileo. Depuis, ce sont presque 200 systèmes multiples qui ont été découverts. La majorité des satellites (44%) ont été découverts en observant des anomalies sur la courbe de lumière de l'objet principal du système. Les mesures radar ont permis de détecter des satellites autour d'astéroïdes géocroiseurs. Ceux qui vont nous intéresser plus particulièrement seront les systèmes observés en optique adaptative par de grands télescopes (16%) et le télescope spatial Hubble.

Pour la majorité des systèmes multiples, un seul satellite a actuellement été découvert, mais il existe aussi des astéroïdes triples comme (45)Eugenia ou (87)Sylvia. À ce jour, on a découvert des systèmes multiples aussi bien parmi les objets de la ceinture principale que parmi les objets transneptuniens ou les astéroïdes géocroiseurs. Un tableau récapitulatif

de la répartition des systèmes multiples suivant leur famille est donnée dans la table 1.2.

Table 1.2 – Petits corps dotés d'un ou plusieurs satellites suivant leur famille, le nombre de satellites est indiqué entre parenthèses. Source : `http://www.johnstonsarchive.net/astro/asteroidmoons.html`

type	confirmé	probable	total
géocroiseur	31 (33)	6 (6)	37 (39)
aréocroiseur	3(3)	11 (11)	14 (14)
ceinture principale	46 (51)	30 (30)	76 (81)
troyen de Jupiter	2 (2)	2 (2)	4 (4)
objet transneptunien	44 (47)	23 (25)	67 (72)
total	127 (136)	72 (74)	198 (210)

À l'exception des planètes naines, ces objets ne sont pas en équilibre hydrostatique. En conséquence, leur écart à la sphère peut être très important. Il devient donc nécessaire de prendre en compte ces irrégularités de la forme pour modéliser le mouvement de leurs satellites. La principale modification qui va intervenir dans le cas d'Eugenia est son fort aplatissement polaire (cf chapitre 2.2.2). À la différence des planètes, les astéroïdes peuvent aussi être poreux (structure de "rubble pile"), c'est à dire qu'ils sont constitués d'un agglomérat plus ou moins lâche de matériaux autogravitants. Les conséquences sur la dynamique à long terme des satellites commencent seulement à être étudiées (Goldreich and Sari, 2009).

La plupart des satellites d'astéroïdes doivent être observés à l'aide de télescopes munis d'optique adaptative ou du Hubble Space Telescope. Dans ce cas, il est exceptionnellement possible de résoudre la forme de l'objet principal du système, et donc d'avoir accès à une première valeur approchée de son aplatissement. Pour les astéroïdes de la ceinture principale, la plupart des satellites orbitent à une distance de seulement quelques centaines de kilomètres de l'objet primaire du système, ce qui en fait des systèmes assez compacts et donc peu sensibles aux perturbations, une propriété sans doute garante de leur stabilité dans le temps.

L'étude dynamique des satellites d'astéroïdes permet de contraindre différentes propriétés dynamiques. En premier lieu, elle permet de déterminer la masse de l'objet primaire, mais aussi la direction de son pôle de rotation ou la répartition de sa masse. Par exemple, si l'on prend le cas d'un astéroïde poreux, il est probable que sa densité ne soit pas homogène. Si l'astéroïde a un centre plus dense et que ses couches externes sont poreuses, alors l'essentiel de la masse sera plus concentrée que ce que l'on peut attendre de sa forme. Par conséquent, les satellites se comporteront comme si l'aplatissement du satellite était moindre que celui que l'on peut déduire de son aspect. De même, en effectuant des études sur la stabilité du système, il est possible de déterminer un âge maximal possible du système.

L'étude de la formation de ces systèmes n'en est encore qu'à ses débuts, la variété des scénarios reflétant la variété des systèmes eux-mêmes, entraînant une possibilité de

formation par accrétion des débris d'une collision, par rupture de la cohésion d'un rubble pile ou encore par capture. La modélisation de tels systèmes permet donc de contraindre les propriétés physiques des objets du système ainsi que leur trajectoire, et donc à terme, une fois une trajectoire suffisamment précise obtenue, de prédire des occultations stellaires permettant de reconstituer la forme de ces corps avec une précision inégalée par les grands télescopes actuels. Une fois la masse et la forme obtenues, la densité des objets pourra nous éclairer sur leur ressemblance ou différence avec leur primaire, et donc sur leur origine. Pour résumer, l'étude dynamique de ces corps nous donne des informations sur leur masse, leur forme, leur évolution et leur origine.

Chapitre 2

Modèle dynamique

Sommaire

2.1 Caractéristiques du modèle 23
2.1.1 Repère utilisé 23
2.1.2 Un modèle double 24
2.2 Équations du mouvement 24
2.2.1 Notations 24
2.2.2 Les harmoniques sphériques du champ de gravité 25
2.2.3 Équations du mouvement non-développées 27
2.2.4 Expression des forces d'aplatissement 27
2.2.5 Cas particulier de Pluton et Charon 29

Nous présenterons ici les caractéristiques de notre modèle dynamique, c'est-à-dire le nombre d'objets pris en compte, le repère utilisé ... Nos équations du mouvement sont présentées en coordonnées cartésiennes. Les termes les constituant sont explicités dans ce chapitre.

2.1 Caractéristiques du modèle

Avant de commencer la présentation du modèle dynamique développé, il est nécessaire de rappeler quelques aspects essentiels qui donnent sa particularité au système constitué par Pluton et ses satellites. Comme il a été dit dans la section précédente, le couple Pluton/Charon forme un objet binaire. À partir de là, toutes modélisations considérant indépendamment le mouvement de Pluton autour du Soleil, et celui de Charon autour de Pluton, souffrent d'une incohérence plus ou moins grande dans le traitement des mouvements de ces derniers autour du barycentre Pluton/Charon.

Nous avons donc cherché à créer un modèle qui prenne en compte simultanément le mouvement de Pluton et de ses satellites autour du Soleil.

2.1.1 Repère utilisé

Nous avons ici deux choix pour le centre du repère que nous allons utiliser :

- le barycentre du système Pluton/Charon : le centre le plus naturel pour décrire le mouvement des satellites. Le problème sera alors que nous allons être confrontés à des perturbations indirectes étant donné que notre repère ne sera pas galiléen,
- le barycentre du Système Solaire : le centre le plus naturel pour décrire le mouvement de Pluton dans le Système Solaire.

De manière à éviter les perturbations indirectes, nous avons pris le barycentre du Système Solaire comme centre du repère dans lequel nous allons développer le système dynamique. Dans un même souci de simplicité, nous avons choisi de développer notre modèle dans un repère d'axes fixes. Seules les interactions dues aux aplatissements des corps n'ont pas une expression immédiate dans ce repère.

2.1.2 Un modèle double

Comme il sera vu plus loin, nous devons souvent différencier ce qui tient de la modélisation du mouvement héliocentrique, et ce qui tient du mouvement des satellites. Cette distinction viendra essentiellement des différences d'échelles à prendre en compte, notamment pour les tests du modèle numérique. De plus, si les interactions entre les objets du système de Pluton s'expriment naturellement dans le repère équatorial de ce dernier, les interactions dues au reste du Système solaire s'expriment plus facilement dans le repère barycentrique que nous avons choisi.

2.2 Équations du mouvement

2.2.1 Notations

Nous allons utiliser les notations suivantes :

i et l	Pluton ou l'un de ses satellites
j	le Soleil ou une planète
M_j	la masse de l'objet j n'appartenant pas au système de Pluton
m_i	la masse de l'objet i appartenant au système de Pluton
$\vec{r}_j$	le vecteur position du corps j par rapport au barycentre du Système Solaire
r_{ij}	la distance entre les objets i et j
R_l	le rayon équatorial du corps l
$J_2^{(l)}$	le coefficient zonal d'ordre 2 du corps l
$c_{22}^{(l)}$	le coefficient tesseral d'ordre 2 du corps l, caractérisant le bourrelet statique de marées
$U_{\bar{l}\hat{i}}$	potentiel que l'aplatissement du corps i exerce sur le centre de masse du corps l

Dans le cas de la représentation des potentiels d'aplatissement, les indices surmontés d'une barre (par ex : $\bar{l}$) désigneront un corps considéré à ce moment comme ponctuel. Ceux dont l'indice sera marqué d'un accent circonflexe seront considérés comme aplatis.

Notons $\mathcal{R}$ le repère d'axes fixes, centré sur le barycentre du Système Solaire. On considère un système de $\mathcal{N}+4$ corps en interaction gravitationnelle. Le nombre $\mathcal{N}$ désigne les corps qui ne font pas partie du système de Pluton, c'est à dire le Soleil et les planètes. Les quatre corps restants désignent bien-sûr Pluton, Charon, Nix et Hydra.

Malgré une précision astrométrique plus faible que pour les systèmes de planètes géantes, nous prenons en compte les secondes harmoniques du champ de gravité de Pluton et Charon. Ceci peut se justifier par le fait que le système de Pluton est l'un des plus compacts du Système Solaire, d'où un possible effet important de ces coefficients. L'interaction entre Pluton et Charon en tant que corps aplatis peut être exprimée comme :

$$U_{\hat{P}\hat{C}} = U_{\bar{P}\hat{C}} + U_{\hat{P}\bar{C}} + \text{termes mixtes d'ordre supérieurs} \tag{2.1}$$

Nous négligeons les termes mixtes qui sont d'ordre égal ou supérieur au produit $J_2^{(P)} J_2^{(C)}$ (Krivov, 1994).

2.2.2 Les harmoniques sphériques du champ de gravité

Le but de ce paragraphe n'est pas de faire un rappel de toutes les propriétés des harmoniques sphériques, mais uniquement une brève présentation destinée à expliquer leur utilisation dans la représentation du champ de gravité d'un objet. Les harmoniques sphériques permettent de modéliser le champ gravitationnel d'un corps lorsque sa représentation comme un point doté d'une masse n'est pas suffisante, c'est à dire lorsqu'il est trop différent d'un corps parfaitement sphérique de densité homogène. Ainsi, ces fonctions mathématiques permettent de modéliser l'effet d'une déformation géométrique (aplatissement, bosse ...) ou d'une anomalie de densité (cavité, zone à forte densité ...), dans le cadre du problème des deux corps.

La représentation spatiale de ces perturbations est effectuée par des polynômes des fonctions trigonométriques. Les coefficients affectés à chacun de ces polynômes sont les coefficients c_{lm} et s_{lm}. Plus les indices d'un polynôme sont élevés, plus la période associée à ce polynôme est petite. Si l'on pose (r, ϕ, λ) les coordonnées sphériques d'un point situé dans le champ de gravité d'un objet de masse M et de rayon R, avec ϕ la latitude du corps et λ sa longitude, le potentiel en ce point sera :

$$U = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} \left(\frac{R}{r}\right)^l P_{l,m}[\sin(\phi)][c_{lm}\cos(m\lambda) + s_{lm}\sin(m\lambda)] \tag{2.2}$$

En toute rigueur, ce qui est écrit à l'équation ci-dessus est la fonction de force, correspondant à $-U$. Par abus de langage, nous allons continuer à utiliser le terme *potentiel*. On remarque que dans le cas où $l = 0$, on a bien le potentiel produit par une masse ponctuelle. Lorsque $m = 0$, le coefficient c_{l0} est appelé coefficient zonal, est souvent noté $-J_l$ et la perturbation qu'il entraîne sera uniforme pour une latitude donnée. La figure 2.1 montre la représentation des harmoniques zonales des degrés deux à quatre. Les harmoniques sectorielles sont les termes pour lesquels $l = m$. Ces termes ne dépendent que de la longitude du satellite. La figure 2.2 montre la représentation des harmoniques sectorielles de 2 à 4. Les harmoniques tesserales sont tous les autres termes, dépendant à la fois de la latitude et de la longitude.

Pour cette étude, Pluton et Charon sont assez grands et massifs pour être en équilibre hydrostatique, c'est à dire que leur forme vient de leur potentiel de gravitation. Dans le système solaire, le plus petit objet suffisament *rond* pour être supposé en équilibre hydrostatique est Mimas, avec un diamètre de 400 km. On suppose donc que les objets

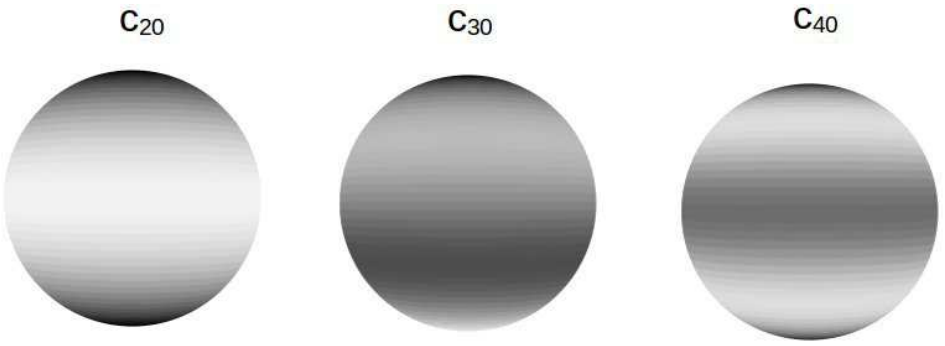

Figure 2.1 – Harmoniques zonales de degré 2 à 4. Les zones claires représentent les valeurs négatives des harmoniques, les zones foncées les valeurs positives.

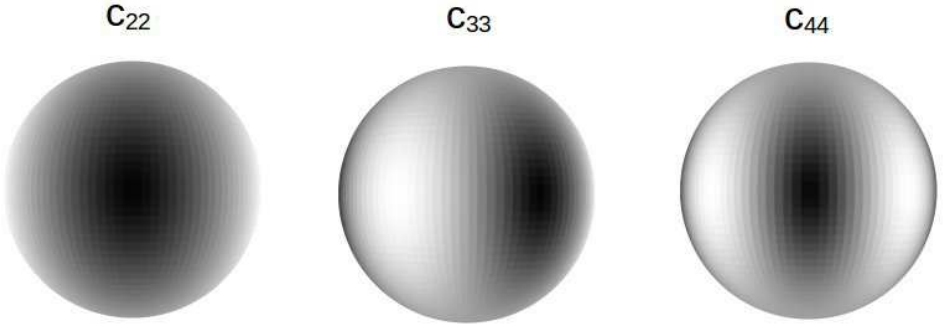

Figure 2.2 – Harmoniques sectorielles de degré 2 à 4. Les zones claires représentent les valeurs négatives des harmoniques, les zones foncées les valeurs positives.

constitués en majorité de glace de diamètre supérieur à 400 km sont généralement en équilibre hydrostatique (Basri and Brown, 2006). En conséquence, les écarts à la sphère parfaite sont assez réduits. Nous ne nous intéresserons qu'à deux déformations : l'aplatissement polaire d'ordre 2 et le bourrelet statique de marées. L'aplatissement polaire, caractérise la déformation d'un corps en rotation, et sera représenté par le terme en J_2. Le bourrelet statique de marées est, comme son nom l'indique, la partie de la déformation due aux effets de marées qui accompagne la rotation. Ce terme sera caractérisé par le terme c_{22}. Les autres perturbations sont généralement beaucoup plus faibles.

Les effets de marées provoquent une déformation des corps et donc une nouvelle répartition de leur masse. L'influence de cette nouvelle répartition sur le potentiel gravitationnel généré est aussi représentée sous la forme d'un développement en harmoniques sphériques, caractérisée par les nombres de Love h_n, k_n et l_n. La différence entre ces coefficients et ceux décrits au-dessus est qu'ils ne représentent pas simplement une déformation statique du corps, mais bien une déformation dynamique, évoluant au cours du temps.

2.2.3 Équations du mouvement non-développées

Au bout du compte, pour un corps i, en interaction gravitationnelle avec le Soleil, les planètes et le reste du système de Pluton, nous obtenons l'équation du mouvement :

$$\ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{-\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} GM_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}^3}}_{\substack{\text{interactions avec le reste} \\ \text{du Système Solaire}}} + \underbrace{\sum_{l=1, l\neq i}^{4} \left[-Gm_l \frac{\vec{r}_l - \vec{r}_i}{r_{il}^3} \right.}_{\substack{\text{interactions entre les centres de} \\ \text{masses dans le système de Pluton}}} \left. + Gm_l \nabla U_{\hat{i}\bar{l}} + Gm_l \nabla U_{\bar{i}\hat{l}} \right] \tag{2.3}$$

Nous ne prenons pas en compte des termes de relativité générale. En effet, le seul satellite dont l'on connaisse la position avec une précision suffisante pour devoir prendre en compte les effets de relativité générale est Phobos, l'un des satellites de Mars, dont l'on estime la position à 500m près. En ce qui concerne les objets du système de Pluton, ils sont à la fois trop loin du Soleil et leur position est trop imprécise. Par conséquent, les effets séculaires dû à la relativité générale seront très facilement absorbés, et les effets non-séculaires totalement indétectables dans le bruit des observations.

Il nous faut encore expliciter les deux derniers termes de cette équation.

2.2.4 Expression des forces d'aplatissement

Nous allons nous intéresser au terme $\nabla_l U_{\bar{l}\hat{i}}$, représentant l'effet de l'aplatissement de i sur le centre de masse de l. Les forces d'aplatissement s'expriment naturellement dans le repère sphérique équatorial (r_l, Φ_l, λ_l) centré sur le corps i (cf figure 2.3).

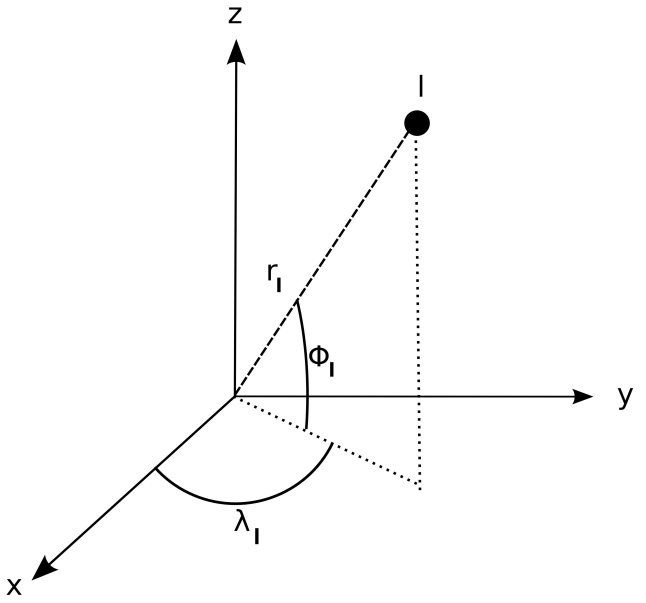

Figure 2.3 – repère sphérique centré sur le corps i, et coordonnées sphériques du corps l

La fonction de force $U_{\widehat{li}}$ s'exprime comme :

$$U_{\widehat{li}} = -\frac{R_i^2}{r_{il}^3}\left[J_2^{(i)}\left(\frac{3}{2}\sin^2(\Phi_l) - \frac{1}{2}\right) - 3c_{22}^{(i)}\cos^2(\Phi_l)\cos(2\lambda_l)\right] \tag{2.4}$$

Nous allons en premier lieu exprimer les forces d'aplatissement dans le repère cartésien (x, y, z) centré sur i, donc l'axe portant z est aligné avec le pôle de rotation de i, et l'axe portant x dirigé vers son méridien de référence, cf figure 2.4. Les quantités $\sin\Phi_l$ et $\cos(\Phi_l)\cos(2\lambda_l)$ peuvent facilement s'exprimer dans le repère (x, y, z) :

$$\begin{aligned} \sin\Phi_l &= \frac{z_l}{r_{il}} \\ \cos\Phi_l\cos(2\lambda_l) &= \cos\Phi_l(\cos^2\lambda_l - \sin^2\lambda_l) = \frac{x_l^2 - y_l^2}{r_{il}^2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

La fonction de force $U_{\widehat{li}}$ s'écrit alors :

$$U_{\widehat{li}} = -\frac{R_i^2}{r_{il}^3}\left[J_2^{(i)}\left(\frac{3}{2}\frac{z_l^2}{r_{il}^2} - \frac{1}{2}\right) - 3c_{22}^{(i)}\,\frac{x_l^2 - y_l^2}{r_{il}^2}\,\right] \tag{2.6}$$

Et les composantes, dans le référentiel équatorial de i, des forces d'aplatissements seront donc :

$$\frac{\partial U_{\widehat{li}}}{\partial x_l} = -\frac{R_i^2}{r_{il}^5}\left[J_2^{(i)}\left(-\frac{15}{2}\frac{x_l z_l^2}{r_{il}^2} + \frac{3}{2}x_l\right) - 3c_{22}^{(i)}\left(2x_l - 5\frac{x_l(x_l^2 - y_l^2)}{r_{il}^2}\right)\right] \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial U_{\widehat{li}}}{\partial y_l} = -\frac{R_i^2}{r_{il}^5}\left[J_2^{(i)}\left(-\frac{15}{2}\frac{y_l z_l^2}{r_{il}^2} + \frac{3}{2}y_l\right) - 3c_{22}^{(i)}\left(2y_l - 5\frac{y_l(x_l^2 - y_l^2)}{r_{il}^2}\right)\right] \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial U_{\widehat{li}}}{\partial z_l} = -\frac{R_i^2}{r_{il}^5}\left[J_2^{(i)}\left(-\frac{15}{2}\frac{z_l^3}{r_{il}^2} + \frac{9}{2}z_l\right) - 3c_{22}^{(i)}\left(-5\frac{z_l(x_l^2 - y_l^2)}{r_{il}^2}\right)\right] \tag{2.9}$$

Ces forces doivent maintenant être exprimées dans notre repère cartésien d'axes (X, Y, Z). Suivant les conventions données par l'IAU, posons (α_i, δ_i) la direction du pôle de rotation du corps i dans le repère J2000 et W_i l'angle repérant son méridien d'origine. Posons encore $\Psi_i = \alpha_i + \pi/2$ et $\phi_i = \pi/2 - \delta_i$, la représentation de ces différents angles est donnée dans la figure 2.4.

Nous allons alors utiliser les matrices de rotation :

$$\begin{aligned} R_3(\Psi_i) &= \begin{pmatrix} \cos\Psi_i & \sin\Psi_i & 0 \\ -\sin\Psi_i & \cos\Psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_1(\phi_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_i & \sin\phi_i \\ 0 & -\sin\phi_i & \cos\phi_i \end{pmatrix}, \\ R_3(W_i) &= \begin{pmatrix} \cos W_i & \sin W_i & 0 \\ -\sin W_i & \cos W_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Nous avons alors :

$$\nabla_{X,Y,Z}U_{\widehat{li}} = R_3(-\Psi_i)R_1(-\phi_i)R_3(-W_i)\nabla_{x,y,z}U_{\widehat{li}} \tag{2.11}$$

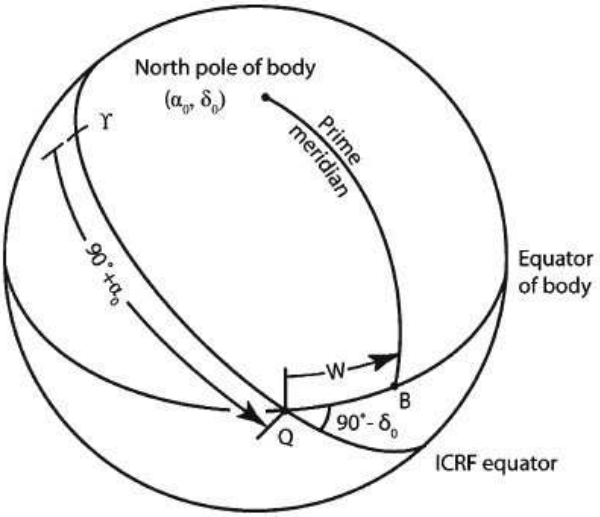

Figure 2.4 – Représentation des angles de références de l'orientation du pôle, source : Seidelmann et al. (2007).

2.2.5 Cas particulier de Pluton et Charon

Pluton et Charon sont ici supposés être en résonance synchrone. L'axe de rotation de Charon est parallèle à celui de Pluton. La hauteur de Charon par rapport à l'équateur de Pluton sera donc l'opposée de la hauteur de Pluton par rapport à l'équateur de Charon, nous aurons donc l'égalité $\Phi_P^{(C)} = -\Phi_C^{(P)}$, où $\Phi_P^{(C)}$ est la latitude de Pluton dans le repère sphérique attaché à Charon, et réciproquement. De plus, le méridien de référence à la surface de Pluton est défini comme étant toujours suivant la direction de Charon en raison de la résonance spin-orbite, et réciproquement, d'où, en négligeant la libration due à l'excentricité : $\lambda_P^{(C)} = \lambda_C^{(P)} = 0$.

Si l'on prend le cas de Pluton, la fonction de force qu'il subit sera :

$$\begin{aligned} U_{\bar{P}\hat{C}} + U_{\hat{P}\bar{C}} = &- \frac{R_C^2}{r_{PC}^3}\left[J_2^{(C)}\left(\frac{3}{2}\sin^2\Phi_C^{(P)} - \frac{1}{2}\right) - 3c_{22}^{(C)}\cos^2\Phi_C^{(P)}\cos(2\lambda_C^{(P)})\right] \\ &- \frac{R_P^2}{r_{PC}^3}\left[J_2^{(P)}\left(\frac{3}{2}\sin^2\Phi_P^{(C)} - \frac{1}{2}\right) - 3c_{22}^{(C)}\cos^2\Phi_P^{(C)}\cos(2\lambda_P^{(C)})\right] \end{aligned} \tag{2.12}$$

En utilisant les propriétés de symétries exposées plus haut, il est possible de regrouper les interactions d'aplatissement pour finalement obtenir :

$$U_{\bar{P}\hat{C}} + U_{\hat{P}\bar{C}} = -\frac{Gm_C R_C^2}{r_{PC}^3}\left[\left(J_2^{(C)} + \frac{R_P^2}{R_C^2}J_2^{(P)}\right)\left(\frac{3}{2}\sin^2\Phi_C^{(P)}\right) + 3\left(c_{22}^{(C)} + \frac{R_P^2}{R_C^2}c_{22}^{(P)}\right)\cos^2\Phi_C^{(P)}\right] \tag{2.13}$$

La fonction de force subie par Charon dû à son propre aplatissement et à celui de Pluton sera identique à celle développée ci-dessus. Les forces d'aplatissement subies par ces deux objets seront donc égales à un facteur $-m_P/m_C$ près. Ce résultat permet de prendre en compte plus facilement ces forces s'exerçant sur Pluton et Charon.

Néanmoins, en ce qui concerne Nix et Hydra, il n'existe pas de relation remarquable entre les expressions de leur position dans l'un ou l'autre repère.

Nous épargnerons au lecteur l'expression complète des équations du mouvement s'appliquant sur nos quatre objets, chaque terme ayant été développé.

Chapitre 3

Intégration numérique

Sommaire

3.1 Description de l'intégration 31
3.1.1 Conditions initiales 31
3.1.2 Valeurs numériques des harmoniques du champ de gravité . . . 32
3.2 Contrôles de l'intégration 33
3.2.1 Aller-retour 33
3.2.2 Conservation de l'énergie 34
3.2.3 Conservation du moment cinétique 35
3.2.4 Précession des orbites des satellites 37

Dans ce chapitre, nous présenterons les conditions initiales que nous avons utilisées pour représenter le système de Pluton. Nous allons également expliquer l'origine des valeurs que nous avons utilisées pour les harmoniques du champ de gravité de Pluton et Charon. Ensuite, nous présenterons les différents contrôles effectués pour nous assurer de la conformité de notre modèle numérique, comme la conservation d'énergie, ou encore la vérification des taux de précession des satellites sous l'effet des applatissements.

3.1 Description de l'intégration

3.1.1 Conditions initiales

Étant donné que nous n'intégrons pas le mouvement du Soleil et des planètes, les positions et vitesses de ces objets seront donnés par l'éphéméride DE406 (Standish, 1998) à chaque étape de l'intégration [1]. Les propriétés de cette éphéméride vont conditionner notre propre modèle dynamique. Ainsi, cette éphéméride étant exprimée dans le repère de référence ICRF/J2000, nous avons suivi cette convention, les axes du repère $\mathcal{R}$ étant ceux de l'ICRF. De plus, l'unité de temps utilisée par cette éphéméride est T_{eph}, d'où le fait que notre propre modèle hérite de cette convention. T_{eph} est un temps dynamique évoluant pratiquement en même temps que le Temps Dynamique Barycentrique et le Temps Coordonnée Barycentrique.

1. Le choix de l'éphéméride utilisée n'est pas d'une importance capitale dans le cas du système de Pluton. En effet, le système est très compact et les perturbations issues du reste du système solaire sont très faibles.

Les masses du Soleil et des planètes, la valeur de l'Unité Astronomique, ainsi que les positions et vitesses initiales de Pluton, proviennent de DE406. La masse de ce dernier est issue de Tholen et al. (2008), de même que les masses et positions-vitesses de ses satellites. Les rayons de Pluton et Charon viennent des occultations stellaires (Sicardy et al., 2006b). L'instant initial de l'intégration est le jour julien 2452600.5, soit le 22 novembre 2002 à minuit, le même jour que les conditions initiales donnés dans Tholen et al. (2008). Les valeurs des harmoniques du champ de gravité utilisées sont données dans 3.1.2

Nous intégrons les équations du mouvement développées dans le chapitre précédent (équation 2.3) grâce à l'intégrateur numérique RADAU (Everhart, 1985), basé sur la méthode de Gauss-Radau. Pour intégrer notre système, nous utilisons un pas constant de 0.1 jour, déduit de la procédure de test décrite dans la partie 3.2. Les unités de distance, masse et temps utilisées sont respectivement l'Unité Astronomique, la masse solaire et le jour solaire moyen.

3.1.2 Valeurs numériques des harmoniques du champ de gravité

À ce jour, aucune sonde ou observation n'a permis de déterminer la valeur des coefficients J_2 et c_{22}. Pour notre modèle, nous avons besoin d'une valeur probable de ces coefficients pour déterminer leur influence sur la dynamique du système. Pluton et Charon sont constitués en majorité de glace. Néanmoins, en raison de leur éloignement du Soleil, nous allons utiliser une approche valable pour les planètes telluriques. Cette approche se justifie par le fait que nous n'avons besoin que d'une valeur approchée de ces coefficients, une valeur plus précise pouvant être déterminée par l'ajustement.

D'après Turcotte and Schubert (2002), si l'on suppose que Pluton et Charon sont homogènes et ont une densité constante, l'aplatissement polaire dû à la rotation est donné par :

$$J_{2_r}^{(l)} = \frac{1}{2}\frac{R_l^3 \omega_l^2}{G m_l} \tag{3.1}$$

où ω_l est la vitesse angulaire de rotation du corps l désignant Pluton ou Charon. On comprend bien que plus un objet tournera rapidement sur lui-même, plus il sera aplati, et qu'au contraire plus un objet sera dense, moins il se déformera sous l'effet de la rotation. Par exemple, dans le cas des planètes géantes, la densité est moindre que dans le cas des planètes telluriques, et la rotation plus rapide, d'où un aplatissement plus marqué que celui des planètes telluriques. L'application numérique de l'équation précédente nous donne : $J_{2_r}^{(P)} = 9.01 \times 10^{-4}$ et $J_{2_r}^{(C)} = 1.14 \times 10^{-3}$.

Ici, en raison des effets de marées s'exerçant entre Pluton et Charon, ces deux objets vont être déformés. La déformation due aux effets de marées va se traduire par un terme supplémentaire $J_{2_t}^{(C)}$ tel que :

$$J_{2_t}^{(l)} = \frac{3}{2} J_{2_r}^{(l)} \tag{3.2}$$

L'aplatissement polaire total $J_2^{(l)}$ sera alors la somme de $J_{2_r}^{(C)}$ et $J_{2_t}^{(C)}$.

Pour la valeur du coefficient de marée statique, nous supposons que Pluton et Charon sont en équilibre hydrostatique, hypothèse en partie justifiée par le fait que Pluton et

Charon sont dans une double résonance spin-orbite. Cette configuration ne permet plus la dissipation d'énergie par effets de marées, on suppose donc que le système a atteint un équilibre. Nous avons alors la relation (Zharkov et al., 1985) :

$$c_{22}^{(l)} = \frac{3}{10} J_2^{(l)} \tag{3.3}$$

Ceci nous conduit à des valeurs de $c_{22}^{(P)} = 6.76 \times 10^{-4}$ et $c_{22}^{(C)} = 8.55 \times 10^{-4}$. Les valeurs que l'on obtient ainsi sont comparables à celles des planètes telluriques.

3.2 Contrôles de l'intégration

Pour vérifier la cohérence du modèle numérique, différentes procédures ont été utilisées. Ces procédures nous permettent d'estimer l'erreur induite par un codage en double précision où les variables réelles sont codées sur 64 bits.

3.2.1 Aller-retour

En tout premier lieu, il fallait vérifier une utilisation adéquate de l'intégrateur numérique. Pour ce faire, on effectue un *aller-retour* de l'intégration numérique (cf figure 3.1). L'écart obtenu entre les conditions initiales et les positions-vitesses obtenues à la fin de notre aller-retour, nous donne la précision numérique d'une simulation, dégradée par une possible non-optimisation de la programmation. Ainsi, après une première intégration vers le futur, lorsque l'on commence à revenir en arrière, l'écart entre nos deux simulations sera très faible, mais l'accumulation des erreurs de calcul au fur et à mesure de l'intégration vers le passé va augmenter l'écart entre l'intégration aller et l'intégration retour.

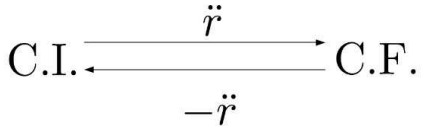

Figure 3.1 – Principe de l'aller-retour : à partir de conditions initiales données, on fait évoluer le système en intégrant les équation du mouvement, puis on le fait évoluer en sens inverse, à partir des conditions finales, jusqu'à retrouver les conditions initiales.

L'écart en kilomètres entre un aller et un retour pour la position de Pluton sur un siècle est représenté sur la figure 3.2. Nous avons donc sur un siècle une précision d'environ 1.5 km sur la position de Pluton, situé en moyenne à plus de 30 Unités Astronomiques.

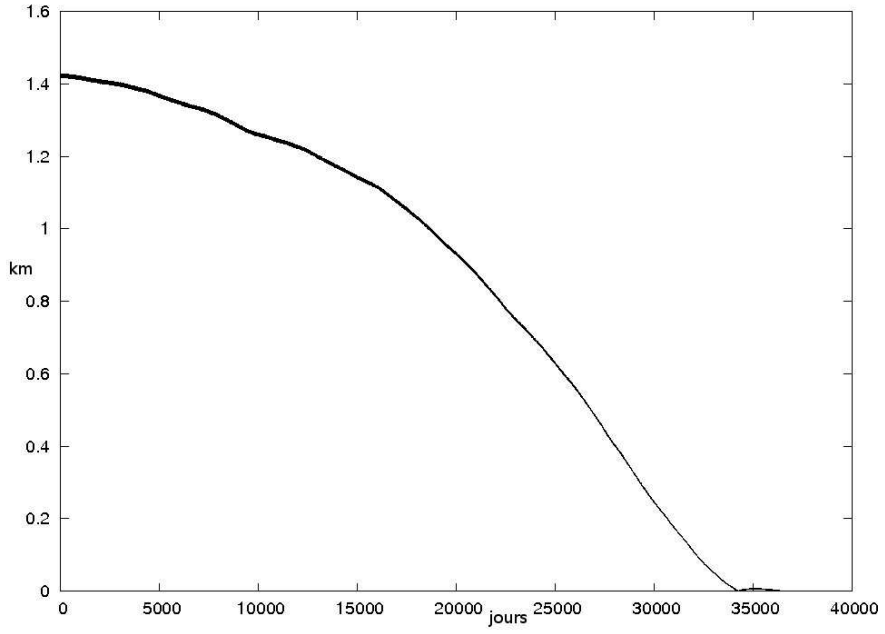

Figure 3.2 – Aller-retour sur un siècle pour le mouvement de Pluton autour du Soleil : écart de position entre l'aller et le retour.

3.2.2 Conservation de l'énergie

Si l'aller-retour permet de tester l'utilisation du RADAU et la précision de l'intégration, la conservation des invariants du système nous permet de contrôler l'exactitude des équations du mouvement. En effet, nous avons ici un système non-dissipatif, par conséquent nous pouvons en contrôler la conservation d'énergie. L'expression de l'énergie d'un système étant généralement plus simple que celle des équations du mouvement, son calcul a moins de chance d'être entaché d'erreurs. De manière générale, dans le cas d'un système non-dissipatif :

$$E = U + T \tag{3.4}$$

où E désigne l'énergie totale du système, U son énergie potentielle et T son énergie cinétique. Nous considérons que nos corps ne sont pas ponctuels, mais nous ne prenons pas en compte leur forme et leur rotation, par conséquent les moments d'inertie de nos objets n'interviendront pas dans notre énergie cinétique et nous aurons :

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \vec{r_i}^2 \tag{3.5}$$

L'énergie potentielle sera, elle, constituée de deux types de termes : les interactions entre les centres de masses d'une part, et les interactions des corps étendus d'autre part. Ainsi, on arrive pour l'énergie potentielle à l'expression :

$$U = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}+3}\sum_{k=i+1}^{\mathcal{N}+4} -\frac{Gm_k m_i}{r_{ik}} + U_{\bar{C}\hat{P}} + U_{\bar{P}\hat{C}} + U_{\bar{N}\hat{P}} + U_{\bar{N}\hat{C}} + U_{\bar{H}\hat{P}} + U_{\bar{H}\hat{C}} \tag{3.6}$$

Nous nous trouvons alors confrontés à un problème numérique. Nous ne pouvons pas évaluer de manière fiable la conservation d'énergie du système avec l'expression ci-dessus.

En effet, comme il a été dit précédemment, les positions du Soleil et des planètes par rapport au barycentre du Système Solaire sont données par l'éphéméride DE406. Par conséquent, l'énergie du système telle qu'elle sera calculée d'après l'expression 3.4 ne sera pas conservée, notre modèle et celui du JPL ne prenant pas en compte les mêmes effets.

Pour estimer la précision et vérifier l'exactitude des interactions des centres de masses de notre système, nous en avons donc fait une version intégrant le mouvement du Soleil et des planètes. Nous sommes alors confrontés à un autre problème : la disparité des ordres de grandeur des différents termes de l'énergie. Pour s'en rendre compte, effectuons quelques estimations des ordres de grandeurs des énergies en jeu. Comparons l'énergie potentielle moyenne de l'interaction entre Jupiter et le Soleil d'une part, et celle entre Pluton et Hydra d'autre part.

$$U_{PH} = -G\frac{m_P m_H}{a_H} \tag{3.7}$$

$$U_{♇\odot} = -G\frac{M_{♇} M_\odot}{a_{♇}} \tag{3.8}$$

$$\frac{U_{PH}}{U_{♇\odot}} = \frac{m_P m_H}{M_{♇} M_\odot}\frac{a_{♇}}{a_H} = 2 \times 10^{-14} \tag{3.9}$$

La précision relative maximale, pour un programme codé en précision double, est de 10^{-16}. Cela signifie que nous ne pourrons pas déterminer d'effet inférieur de deux ordres de grandeur à l'interaction Pluton/Hydra. Or, des incohérences entre les équations du mouvement et l'énergie codée peuvent avoir des effets bien plus petits. Il nous faut donc séparer ce modèle en deux composantes : le Système Solaire en interaction avec Pluton, et le système de Pluton. La figure 3.3 présente la variation relative sur un siècle de l'énergie totale. L'ordre de grandeur maximal de cette variation est de 9×10^{-14}, soit le même ordre de grandeur que pour l'aller-retour.

Dans un second temps, on vérifie les interactions dans le système de Pluton. La valeur des coefficients $J_{2♇}$ et $c_{22♇}$ est la valeur obtenue dans la section 3.1.2. Le résultat sur un siècle est présenté sur la figure 3.4. L'ordre de grandeur du maximum de cette variation relative est de 1.8×10^{-13}, confirmant la conservation d'énergie à l'échelle du système de Pluton.

La variation d'énergie n'est pas nécessairement une garantie de l'exactitude de la programmation du modèle. L'énergie n'est qu'un invariant du système. De manière à consolider notre modélisation, nous allons maintenant nous intéresser à la conservation du moment cinétique dont les trois composantes sont autant d'invariants du système.

3.2.3 Conservation du moment cinétique

Toutes les forces de notre système sont conservatives, d'où notre possibilité d'exploiter le moment cinétique. Néanmoins, les rotations de Pluton et Charon sont forcées pour reproduire la résonance spin-orbite, de même que la direction du pôle de rotation. Ce

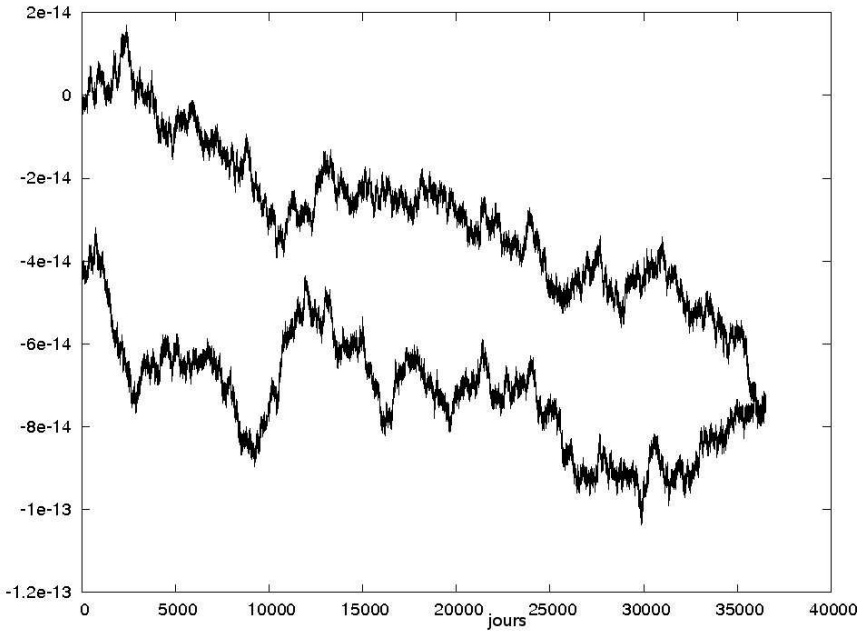

Figure 3.3 – Variation relative d'énergie pour l'ensemble du système solaire sur un siècle pour un aller-retour de l'intégration

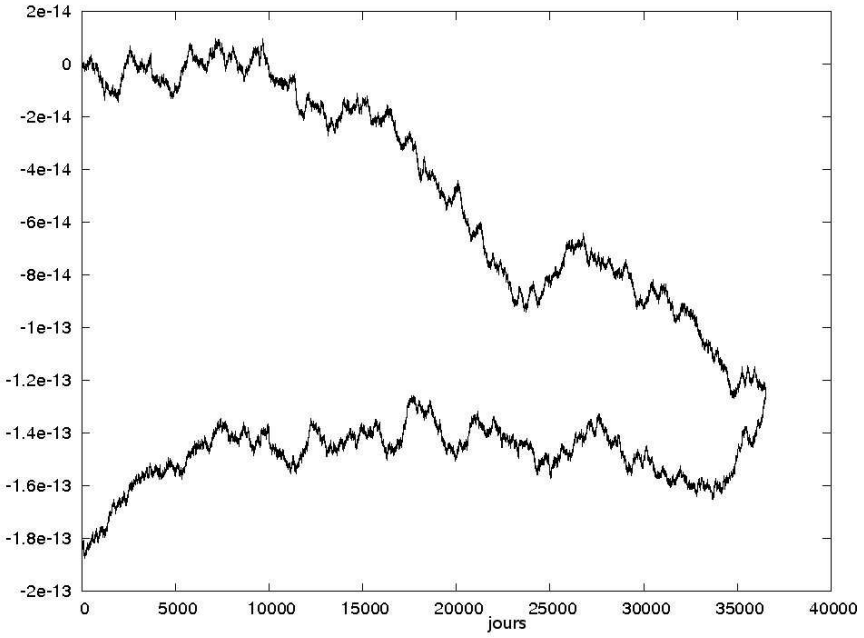

Figure 3.4 – Variation relative d'énergie pour le système de Pluton sur un siècle pour un aller-retour de l'intégration.

forçage a pour conséquence de ne pas conserver le moment cinétique. En effet, les effets de précession et nutation des pôles sont impossibles ici. Pour tester la conservation du moment cinétique, il nous faudrait alors libérer la direction des pôles de rotation de Pluton et Charon, et modéliser leur rotation en intégrant les équations d'Euler. Comme il existe un autre moyen pour évaluer l'exactitude de nos termes d'aplatissement, nous allons pour cette partie, fixer les secondes harmoniques des champs de gravité à une valeur nulle.

Nous allons être obligés de recourir à la même démarche que pour la conservation d'énergie à cause des différents ordres de grandeurs en jeu, soit un modèle intégrant le mouvement du Soleil, des planètes et de Pluton, et un autre intégrant uniquement le mouvement de Charon, Nix et Hydra autour de Pluton.

Le moment cinétique de la première version de notre modèle sera :

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} M_i \vec{r_i} \wedge \vec{v_i} + m_P \vec{r_P} \wedge \vec{v_P} \tag{3.10}$$

et celui de la seconde version :

$$\vec{L} = \sum_{l=1}^{4} m_l \vec{r_l} \wedge \vec{v_l} \tag{3.11}$$

La conservation des composantes du moment cinétique du Système Solaire est présentée à la figure 3.5, et à la figure 3.6 pour le système de Pluton. Tout comme pour la conservation de l'énergie cinétique, la conservation du moment cinétique n'est pas une garantie absolue de l'exactitude de notre représentation, mais l'évaluation de la conservation de ces intégrales premières du mouvement réduit fortement les possibilités d'erreur. Ces tests ne peuvent vérifier que la validité des interactions entre les centres de masse de notre système, pour vérifier la validité des forces d'aplatissement, nous allons utiliser une autre méthode.

3.2.4 Précession des orbites des satellites

Pour décrire des orbites, nous utilisons des variables appelées éléments osculateurs. Sous l'influence de l'aplatissement de Pluton et Charon, les éléments osculateurs des satellites du système vont varier. Pour vérifier l'expression de nos forces d'aplatissement, nous allons donc comparer leur variation théorique et celle que nous obtenons lors de nos simulations.

Description des orbites

L'un des systèmes de variables dont nous disposons pour décrire le mouvement des satellites est celui des éléments osculateurs. Dans le cas du problème à deux corps, la trajectoire de l'un des objets par rapport à l'autre est une conique. Dans le cas où la trajectoire est elliptique, cette conique peut être décrite par un ensemble de variables appelées éléments képlériens (cf figure 3.7) :

– a : le demi-grand axe

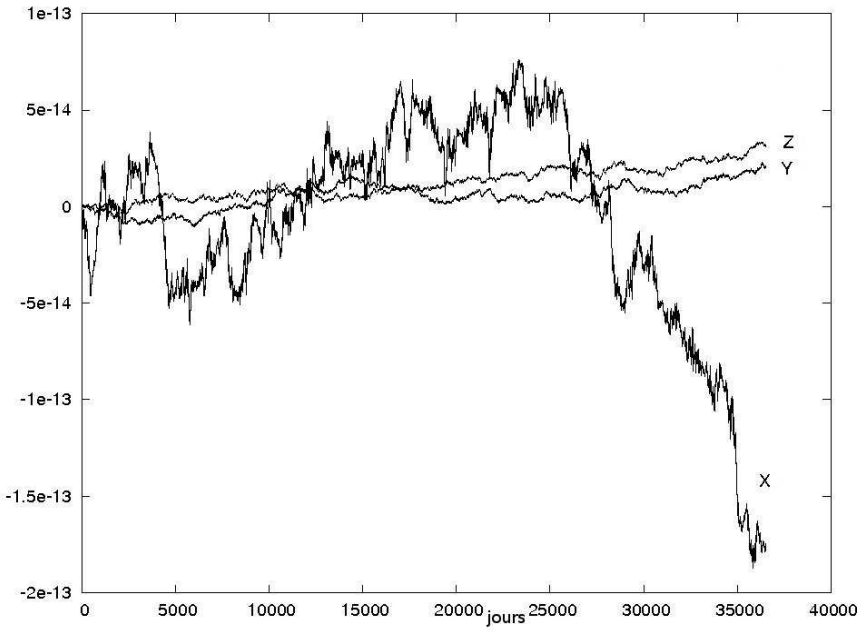

Figure 3.5 – Variation relative des composantes du moment cinétique pour le Système Solaire sur un siècle.

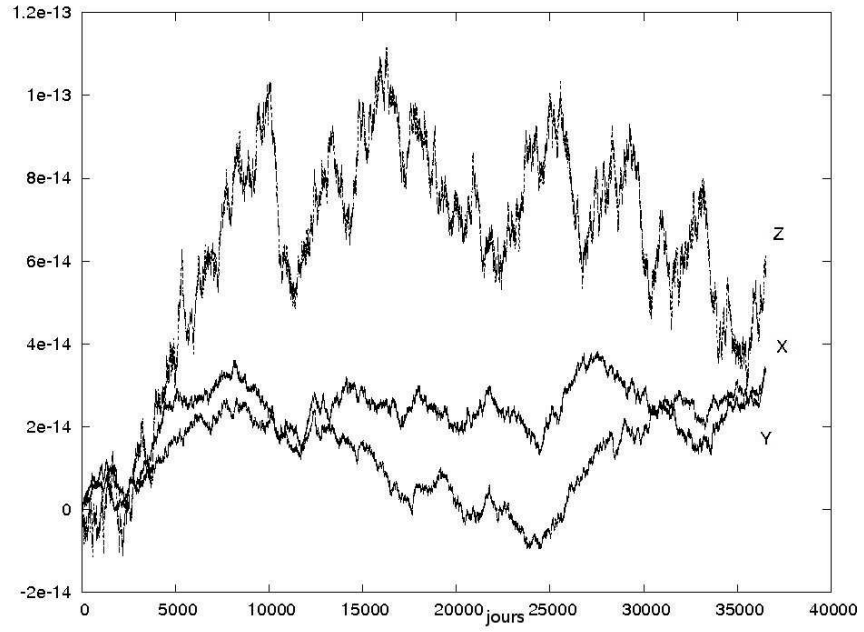

Figure 3.6 – Variation relative des composantes du moment cinétique pour le système de Pluton sur un siècle.

– e : l'excentricité
– i : l'inclinaison
– Ω : la longitude du noeud ascendant
– ω : l'argument du périastre
– v : l'anomalie vraie, ou M : l'anomalie moyenne

Les deux premiers décrivent la forme de la trajectoire, les trois suivants son orientation dans l'espace, le dernier, à tout instant, la position du corps parcourant la trajectoire. Dans le cas du problème à deux corps, les cinq premiers éléments sont constants et le dernier varie de manière périodique. Ces six éléments sont équivalents aux positions-vitesses de l'objet. Dans le cas particulier d'une trajectoire circulaire, l'argument du périastre n'est pas défini, de même pour la longitude du noeud ascendant lorsque la trajectoire est dans le plan de référence [2]. Dans ce cas, on peut utiliser d'autres éléments, résultant de la combinaison des précédents, et ne souffrant pas d'indétermination.

Dans le cas du problème à deux corps perturbé, ces éléments vont varier dans le temps en fonction de la perturbation. Malgré tout, le changement de variables des positions-vitesses aux éléments képlériens reste applicable. Nous ne sommes bien-sûr pas dans le cas d'un problème des deux corps, mais le mouvement de chaque satellite peut être considéré avantageusement comme un mouvement képlérien perturbé lorsque les perturbations restent faibles face au terme képlérien du problème des deux corps. Il existe ainsi à chaque instant une orbite képlérienne tangente à la trajectoire réelle. Cette trajectoire képlerienne est celle que suivrait le corps si les perturbations devenaient soudain nulles. Ainsi, les éléments, appelés alors osculateurs, définissent de manière instantanée la position et la vitesse de l'objet. La variation des éléments osculateurs dépend du potentiel perturbateur suivant des lois d'évolution appelées équations planétaires de Lagrange. Notons $\mathcal{R}$ la fonction perturbatrice subie par le corps, les équations planétaires de Lagrange gouvernant l'évolution des éléments osculateurs seront alors :

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \dfrac{2}{na}\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} \\ \dfrac{de}{dt} = -\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} + \dfrac{1-e^2}{na^2 e}\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} \\ \dfrac{di}{dt} = \dfrac{-1}{na^2 \sin i\sqrt{1-e^2}}\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} + \dfrac{\cos i}{na^2 \sin i\sqrt{1-e^2}}\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \\ \dfrac{d\Omega}{dt} = \dfrac{1}{na^2 \sin i\sqrt{1-e^2}}\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \\ \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \dfrac{\cos i}{na^2 \sin i\sqrt{1-e^2}}\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \\ \dfrac{dM}{dt} = n - \dfrac{2}{na}\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \dfrac{1-e^2}{na^2 e}\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \end{cases} \tag{3.12}$$

2. Le plan de référence n'est pas nécessairement le plan équatorial du corps central, ainsi, pour les systèmes multiples, il est courant de donner les inclinaisons par rapport à l'écliptique J2000, le pôle de rotation du primaire n'étant pas forcément connu.

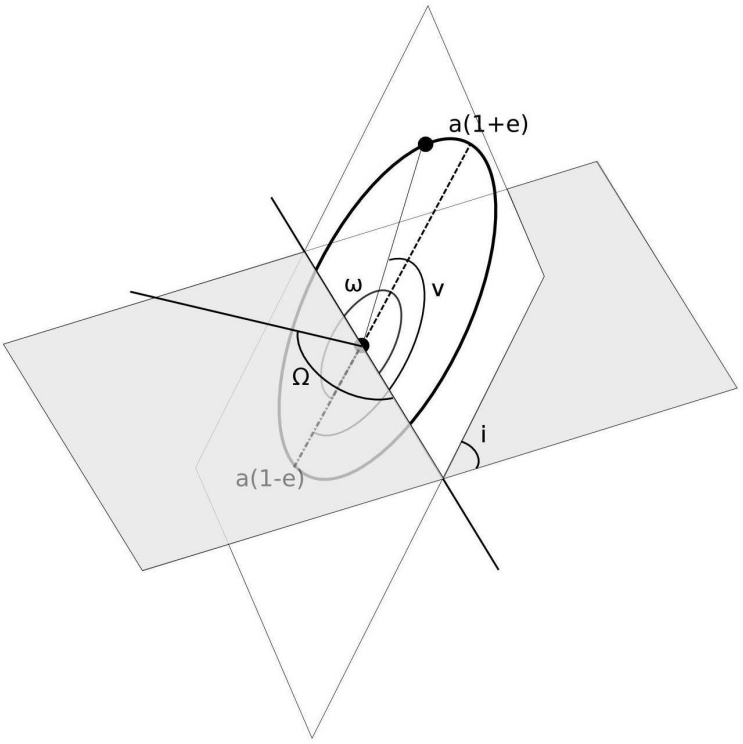

Figure 3.7 – Description de la trajectoire dans l'espace à l'aide des éléments képlériens.

Taux de précession des orbites

Dans notre cas, le potentiel perturbateur $\mathcal{R}$ est le potentiel d'aplatissement des deux corps et les interactions gravitationnelles avec les autres corps. Chacun de ces deux termes va avoir un effet sur la variation des éléments osculateurs. Notre but est de vérifier que nous avons effectué correctement le codage des forces d'aplatissement, et pour cela, nous avons comparé l'expression analytique de la variation des éléments elliptiques de Charon sous l'effet de l'aplatissement de Pluton et la valeur de cette même variation obtenue dans notre modèle. Nix et Hydra sont, quant à eux, fortement perturbés par Charon, et de ce fait, ne nous permettent pas de les utiliser pour vérifier l'expression des forces d'aplatissement. Nous allons dans un premier temps expliciter les perturbations de Charon sur les éléments elliptiques de Nix et Hydra, puis vérifier les forces d'aplatissement subies par Charon.

Perturbations dues à un satellite intérieur Nous allons tout d'abord estimer quelle est la perturbation que subit un satellite perturbé par un autre satellite situé plus proche que lui de Pluton. Pour ce faire, considérons le cas général de deux satellites S_1 et S_2 en orbite autour d'une planète P dans un repère galiléen centré sur O. Notons m_0 la masse de la planète, m_1 et m_2 les masses des satellites, $\vec{R_0}$, $\vec{R_1}$ et $\vec{R_2}$ les vecteurs position de la planète et des satellites par rapport à O, $\vec{r_1}$ et $\vec{r_2}$ les vecteurs position des satellites par rapport à la planète (cf figure 3.8). Nous allons supposer en première approximation que les deux satellites ont des trajectoires circulaires et sont coplanaires.

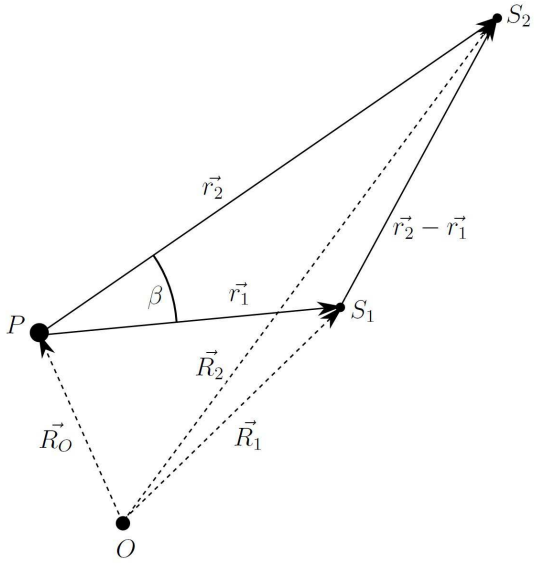

Figure 3.8 – Satellite perturbé par un satellite intérieur

L'accélération subie par ces trois corps par rapport à O est donnée par :

$$\begin{aligned} m_0\ddot{\vec{R}}_O &= Gm_0\left(\frac{m_1\vec{r_1}}{r_1^3} + \frac{m_2\vec{r_2}}{r_2^3}\right) \\ m_1\ddot{\vec{R}}_1 &= Gm_1\left(-\frac{m_0\vec{r_1}}{r_1^3} + \frac{m_2(\vec{r_2}-\vec{r_1})}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|^3}\right) \\ m_2\ddot{\vec{R}}_2 &= Gm_2\left(-\frac{m_0\vec{r_2}}{r_2^3} - \frac{m_1(\vec{r_2}-\vec{r_1})}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|^3}\right) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Or, $\vec{r_2} = \vec{R_2} - \vec{R_0}$, la même composition appliquée aux accélérations nous donne :

$$\ddot{\vec{r_2}} = \ddot{\vec{R}}_2 - \ddot{\vec{R}}_0 = -\frac{G(m_0+m_2)\vec{r_2}}{r_2^3} - \frac{m_1(\vec{r_2}-\vec{r_1})}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|^3} - \frac{m_1\vec{r_1}}{r_1^3} \tag{3.14}$$

L'accélération subie par le corps S_2 dérive d'un potentiel central que nous allons noter U_2, et d'un potentiel perturbateur $\mathcal{R}_2$ tels que :

$$U_2 = \frac{G(m_0+m_2)}{r_2} \tag{3.15}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{Gm_1}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|^3} - \frac{Gm_1\vec{r_2}.\vec{r_1}}{r_1^3} \tag{3.16}$$

Posons β l'angle entre les vecteurs $\vec{r_1}$ et $\vec{r_2}$ (cf figure 3.8). Comme les deux satellites sont coplanaires et possèdent une orbite circulaire, nous avons $\beta = M_1 - M_2$, où M_1 et M_2 désignent les anomalies moyennes des deux satellites. Nous avons alors :

$$\frac{1}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|} = \frac{1}{r_1}\left[1 - 2\frac{r_2}{r_1}\cos(\omega_2 t) + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{3.17}$$

Cette quantité peut être exprimée en fonction des polynômes de Legendre (Murray and Dermott, 2000), ce qui nous donne :

$$\frac{1}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|} = \frac{1}{r_1} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^l P_l(\cos\beta) \tag{3.18}$$

Le potentiel perturbateur $\mathcal{R}_2$ peut alors s'exprimer comme :

$$\mathcal{R}_2 = \frac{Gm_1}{r_2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^l P_l(\cos\beta) - \frac{Gm_1 r_2}{r_1^2} \cos\beta \tag{3.19}$$

Or $P_0(\cos\beta) = 1$, par conséquent, le terme correspondant à $l = 0$ est Gm_1/r_2. Ce terme correspond à la situation où la masse m_1 est ajoutée à la masse de la planète centrale, nous allons donc le rattacher à notre potentiel central U_2 qui deviendra alors :

$$U_2 = \frac{G(m_0 + m_2 + m_1)}{r_2} \tag{3.20}$$

En ce qui concerne notre potentiel perturbé $\mathcal{R}_2$, nous allons le développer en nous limitant à l'ordre deux en (r_1/r_2). Sachant que $P_1(\cos\beta) = \cos\beta$ et $P_2(\cos\beta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\beta - 1)$, on obtient :

$$\mathcal{R}_2 = \frac{Gm_1}{r_2} \left[\frac{r_1}{r_2}\cos\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \left(3\cos^2\beta - 1\right)\right] - \frac{Gm_1 r_2}{r_1^2}\cos\beta \tag{3.21}$$

Une fois moyennée sur la période synodique de S_2 par rapport à S_1, l'équation précédente devient :

$$\bar{\mathcal{R}}_2 = \frac{1}{4} G m_1 \frac{r_1^2}{r_2^3} \tag{3.22}$$

Le potentiel total moyen subi par le satellite S_2 sera donc :

$$U_{tot} = U_2 + \bar{\mathcal{R}}_2 = \frac{G(m_o + m_1 + m_2)}{r_2} + \frac{Gm_1}{4}\frac{r_1^2}{r_2^3} \tag{3.23}$$

Notre potentiel moyen est une quantité strictement radiale, par conséquent $\nabla_\theta U_{tot} = 0$. Ainsi, notre accélération radiale $n_2^2 r_2$ sera égale au gradient du potentiel moyenné.

$$\begin{aligned} n_2^2 r_2 &= -\nabla_r U_{tot} \\ &= \frac{G(m_o + m_1 + m_2)}{r_2^2} + \frac{9}{4} G m_1 \frac{r_1^2}{r_2^4} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Rappelons que nous considérons que l'effet de S_1 à l'ordre 0 peut être considéré comme une simple masse supplémentaire ajoutée à m_0. Pour trouver l'équivalence entre la perturbation par un satellite intérieur et un aplatissement du corps central, nous considérons donc que notre planète a une masse $m_0 + m_1$. Si notre satellite S_2 avait été perturbé par l'aplatissement polaire J_2 de la planète P de rayon R et de masse $m_0 + m_1$, l'expression de son accélération radiale serait égale à (Greenberg, 1981) :

$$n_2^2 r_2 = \frac{G(m_0 + m_1 + m_2)}{r_2^2} \left(1 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{R}{r_2}\right)^2\right) \tag{3.25}$$

L'effet d'un satellite intérieur de masse m_1 est donc comparable à une masse supplémentaire m_1 pour le corps central, et à un aplatissement polaire du second ordre égal à :

$$J_2 = \frac{m_1}{m_0 + m_1 + m_2} \frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{R}\right)^2 \tag{3.26}$$

Comme on peut le voir, cet 'aplatissement équivalent' va dépendre du rapport de masse entre le perturbateur et le corps central, et le rapport entre le rayon du corps central et la distance du perturbateur. Ce J_2 équivalent à l'influence d'un satellite n'a pas véritablement de sens physique lorsque la distance à laquelle le satellite orbite est grande par rapport au rayon de la planète. En effet, l'effet de l'aplatissement d'un corps est fonction de J_2 et de son rayon équatorial. Dans le cas d'une orbite éloignée, on cherche alors à représenter une masse éloignée comme une déformation du corps central. Par conséquent, il est possible d'avoir des valeurs aberrantes physiquement ; ainsi dans le cas du système de Pluton, la présence de Charon agit comme un J_2 valant environ 15. Comme dit précédemment, cette valeur n'a pas de sens physique, mais tout va se passer comme si les satellites agissaient sous l'influence d'un aplatissement de cette valeur. Par conséquent, lorsque l'on modélise le système, la précession due à la présence de Charon va largement dominer le terme dû à l'aplatissement des deux plus grands corps. Ceci nous pousse à ne pas considérer le mouvement de Nix et Hydra pour vérifier l'expression correcte des forces d'aplatissement.

Perturbations dues à l'aplatissement de Pluton Les raisons exposées à la fin du précédent paragraphe nous incitent à utiliser le mouvement de Charon pour tester l' expression des forces d'aplatissement. Considérons la fonction perturbatrice que subit Charon $\mathcal{R}_{\bar{C}\hat{P}}$ à cause de l'aplatissement de Pluton :

$$\mathcal{R}_{\bar{C}\hat{P}} = -Gm_P \frac{R_P^2}{r_{PC}^3} \left[J_2^{(P)} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \Phi_C - \frac{1}{2} \right) - 3c_{22}^{(P)} \cos^2(\Phi_C) \cos(2\lambda_C) \right] \tag{3.27}$$

Comme nous considérons le cas du mouvement de Charon, nous utilisons le fait que dans le cas de la résonance spin-orbite exacte : $\lambda_C = 0$. Le potentiel devient alors :

$$\mathcal{R}_{\overline{C}\hat{P}} = -Gm_P \frac{R_P^2}{a_{PC}^3} \left(\frac{a_{PC}^3}{r_{PC}^3}\right) \left[J_2^{(P)} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \Phi_C - \frac{1}{2} \right) - 3c_{22}^{(P)} \cos^2(\Phi_C) \right] \tag{3.28}$$

Considérons alors le triangle sphérique constitué par le noeud ascendant de l'orbite de Charon, Charon lui-même, et l'intersection entre l'équateur de Pluton et le grand cercle méridien (cf figure 3.9). En utilisant la relation de Neper dans ce triangle, on obtient :

$$\sin^2 \Phi_C = \sin^2 i_C \frac{1 - \cos(2\omega_C + 2v_C)}{2} \tag{3.29}$$

L'expression du potentiel moyenné obtenu peut être trouvée dans Morando (1974), p. 119. Le potentiel moyenné associé $\overline{\mathcal{R}_{\overline{C}\hat{P}}}$ que l'on obtient est alors :

$$\overline{\mathcal{R}_{\overline{C}\hat{P}}} = -Gm_P \frac{R_P^2}{\overline{a_C}^3} (1 - \overline{e_C}^2)^{-3/2} \left[J_2^{(P)} \left(\frac{3}{4} \sin^2 \overline{i_C} - \frac{1}{2} \right) - 3c_{22}^{(P)} \left(1 - \frac{\sin^2 \overline{i_C}}{2} \right) \right] \tag{3.30}$$

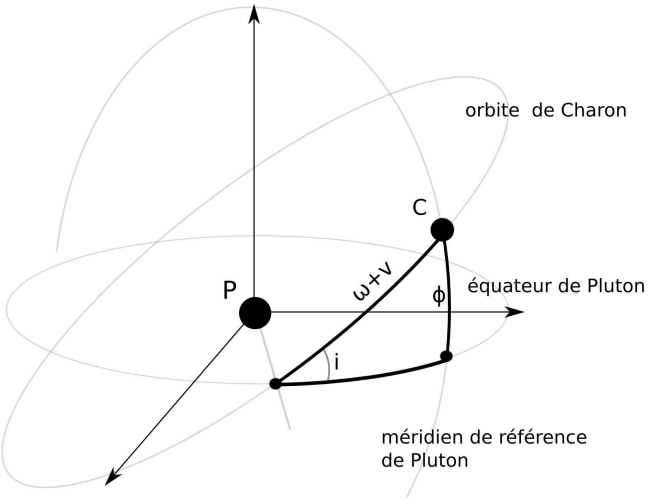

Figure 3.9 – Triangle sphérique liant l'inclinaison, la position sur l'orbite et la hauteur de Charon sur l'équateur de Pluton

On peut voir que le potentiel moyenné ne dépend plus des variables angulaires à l'exception de l'inclinaison. Les équations planétaires de Lagrange deviennent donc :

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{a_C}}{dt} = 0 \\ \dfrac{d\overline{e_C}}{dt} = 0 \\ \dfrac{d\overline{i_C}}{dt} = 0 \\ \dfrac{d\overline{\Omega_C}}{dt} = \dfrac{1}{n\overline{a_C}^2 \sin\overline{i_C}\sqrt{1-\overline{e_C}^2}} \dfrac{\partial\overline{\mathcal{R}_{\overline{C}\hat{P}}}}{\partial\overline{i_C}} \\ \dfrac{d\overline{\omega_C}}{dt} = \dfrac{\sqrt{1-\overline{e_C}^2}}{n\overline{a_C}^2\overline{e_C}} \dfrac{\partial\overline{\mathcal{R}_{\overline{C}\hat{P}}}}{\partial\overline{e_C}} - \dfrac{\cos\overline{i_C}}{n\overline{a_C}^2 \sin\overline{i_C}\sqrt{1-\overline{e_C}^2}} \dfrac{\partial\overline{\mathcal{R}_{\overline{C}\hat{P}}}}{\partial\overline{i_C}} \\ \dfrac{d\overline{M_C}}{dt} = n - \dfrac{2}{n_C\overline{a_C}} \dfrac{\partial\overline{\mathcal{R}_{\overline{C}\hat{P}}}}{\partial\overline{a_C}} - \dfrac{1-\overline{e_C}^2}{n\overline{a_C}^2\overline{e_C}} \dfrac{\partial\overline{\mathcal{R}_{\overline{C}\hat{P}}}}{\partial\overline{e_C}} \end{cases} \tag{3.31}$$

Dans les équations de Lagrange, la variable M joue implicitement le rôle du temps, moyenner permet de faire disparaître cette variable périodique. En moyennant ces équations, on peut voir que le demi-grand axe, l'excentricité et l'inclinaison sont constants et sont les seules variables intervenant dans les équations gouvernant l'évolution des autres variables angulaires, ces dernières devenant alors intégrables. La résolution du système d'équation nous donnera une solution de la forme

$$\begin{cases} \overline{a_C} &= \overline{a_{C0}} \\ \overline{e_C} &= \overline{e_{C0}} \\ \overline{i_C} &= \overline{i_{C0}} \\ \overline{\Omega_C} &= \overline{\Omega_{C0}} + \Delta\Omega_C t \\ \overline{\omega_C} &= \overline{\omega_{C0}} + \Delta\omega_C t \\ \overline{M_C} &= \overline{M_{C0}} + \Delta M_C t \end{cases} \tag{3.32}$$

Pour expliciter les coefficients $\Delta\Omega_C$, $\Delta\omega_C$ and ΔM_C, il nous faut les dérivées partielles du potentiel moyenné :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\overline{\mathcal{R}_{\overline{C}\hat{P}}}}{\partial\overline{a_C}} &= 3Gm_P\frac{R_P^2}{\overline{a_l}^4}(1-\overline{e_C}^2)^{-3/2}\left[J_2^{(P)}\left(\frac{3}{4}\sin^2\overline{i_C}-\frac{1}{2}\right)-3c_{22}^{(P)}\left(1-\frac{\sin^2\overline{i_C}}{2}\right)\right] \\ \frac{\partial\overline{\mathcal{R}_{\overline{l}\hat{P}}}}{\partial\overline{e_C}} &= -3Gm_P\frac{R_P^2}{\overline{a_l}^3}(1-\overline{e_C}^2)^{-5/2}\overline{e_C}\left[J_2^{(P)}\left(\frac{3}{4}\sin^2\overline{i_C}-\frac{1}{2}\right)-3c_{22}^{(P)}\left(1-\frac{\sin^2\overline{i_C}}{2}\right)\right] \\ \frac{\partial\overline{\mathcal{R}_{\overline{l}\hat{P}}}}{\partial\overline{i_C}} &= -Gm_P\frac{R_P^2}{\overline{a_l}^3}(1-\overline{e_C}^2)^{-3/2}\left[J_2^{(P)}\left(\frac{3}{2}\sin\overline{i_C}\cos\overline{i_C}\right)+3c_{22}^{(P)}\sin\overline{i_C}\cos\overline{i_C}\right] \end{aligned} \tag{3.33}$$

En utilisant l'approximation $n_C^2 a_C^3 \approx Gm_P$, il vient naturellement :

$$\begin{aligned} \Delta\Omega_C &= -\frac{n_C R_P^2}{a_C^2(1-e^2)^2}\left[J_2^{(P)}\left(\frac{3}{2}\cos\overline{i_C}\right)+3c_{22}^{(P)}\cos\overline{i_C}\right] \\ \Delta\omega_C &= \frac{n_C R_P^2}{a_C^2(1-e^2)^2}\left[J_2^{(P)}\left(3-\frac{15}{4}\sin^2\overline{i_C}\right)+3c_{22}^{(P)}\left(4-\frac{5}{2}\sin^2 i_C\right)\right] \\ \Delta M_C &= n_C - \frac{3n_C R^2(1-e_C^2)^{-3/2}}{a_C^2}\left[J_2^{(P)}\left(\frac{3}{4}\sin^2\overline{i_C}-\frac{1}{2}\right)-3c_{22}^{(P)}\left(1-\frac{\sin^2\overline{i_C}}{2}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.34}$$

Il suffit alors, pour vérifier l'expression des forces d'aplatissement dans le modèle numérique, de comparer la valeur de la précession théorique et celle obtenue par l'intégration. La figure 3.10 illustre cette situation pour la longitude du noeud ascendant et l'argument du périastre de Charon. D'après les formules ci-dessus, on s'attendrait à avoir des sens de variations différents pour Ω et ω, ceci vient du fait que les satellites sont rétrogrades par rapport au mouvement héliocentrique direct de Pluton, ce qui a pour effet d'inverser le sens de variation de Ω. Dans cette simulation, les masses de Nix et Hydra ne sont pas prises en compte de manière à ne pas avoir l'effet que ces deux satellites auraient sur la trajectoire. En effet, si l'on compare cette simulation avec celle de la figure 3.11 où les masses de Nix et Hydra ne sont pas nulles, on peut voir, essentiellement sur l'argument du périhélie, que la pente de la variation ne correspond plus. Ceci vient de l'influence de ces deux petits satellites.

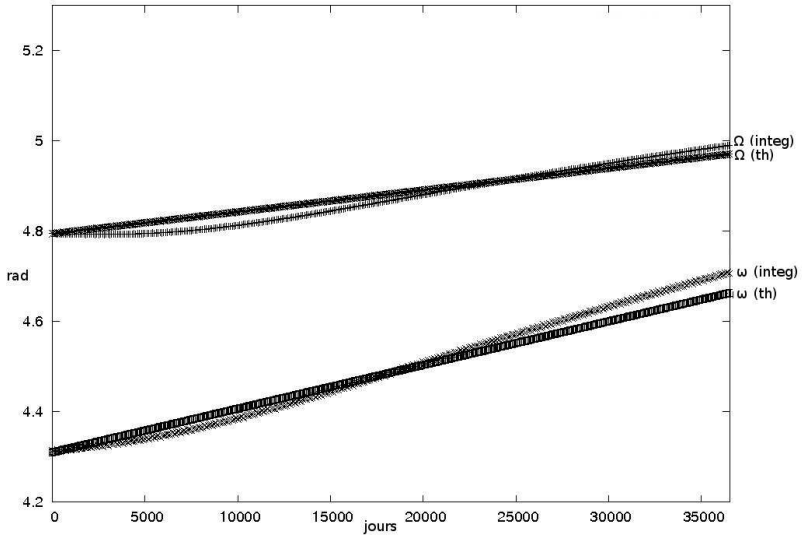

Figure 3.10 – Comparaison entre valeur théorique et obtenue par intégration de la longitude du noeud ascendant et de l'argument du périastre de Charon. Les masses de Nix et Hydra sont fixées nulles.

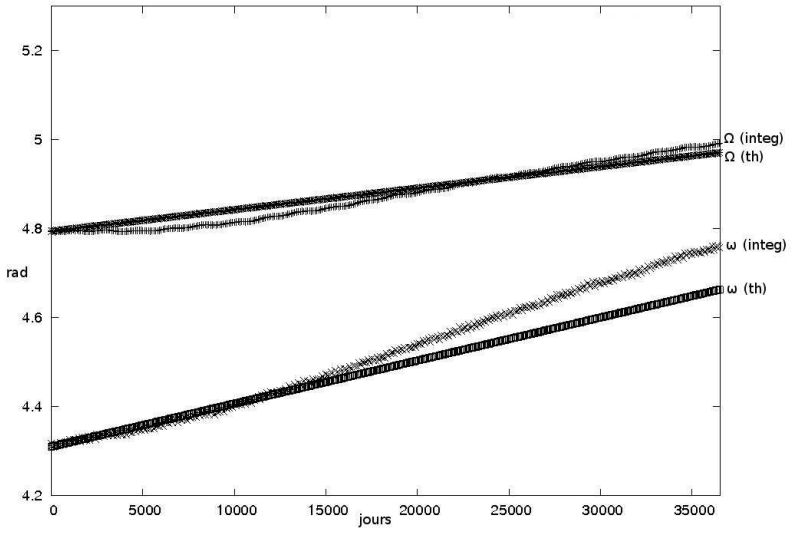

Figure 3.11 – Comparaison entre valeur théorique et obtenue par intégration de la longitude du noeud ascendant et de l'argument du périastre de Charon. Les masses de Nix et Hydra sont non-nulles.

Une fois notre modèle numérique élaboré et vérifié, il nous faut développer les procédures permettant de l'ajuster. En effet, c'est l'ajustement du système à des données simulées et réelles qui nous permettra d'étudier la pertinence de l'ajustement de certaines variables et de déterminer leur valeur.

Deuxième partie

Ajustement et simulations de données

Chapitre 4

Ajustement par moindres carrés

Sommaire

4.1 Théorie des moindres carrés 51
4.1.1 Méthode 51
4.1.2 Équations variationnelles 54
4.2 Calcul des équations variationnelles 55
4.2.1 Interactions entre les centres de masses 55
4.2.2 Dérivées des forces d'aplatissement 57
4.3 Changement d'observables et de paramètres ajustables . . . 60
4.3.1 Changement d'observables : coordonnées équatoriales 60
4.3.2 Changement de paramètres ajustables : éléments elliptiques . . 62
4.3.3 Intégration des équations variationnelles 67

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la façon d'utiliser les moindres carrés qui nous permettra d'ajuster notre modèle aux observations. Les coefficients nécessaires sont obtenus en intégrant des équations différentielles appelées équations variationnelles. Nous présenterons ensuite les modifications effectuées pour ajuster les éléments elliptiques initiaux de nos corps à des observations en coordonnées équatoriales de ces mêmes corps.

4.1 Théorie des moindres carrés

Nous allons présenter ici le principe sur lequel repose les moindres carrés et les équations variationnelles.

4.1.1 Méthode

Préliminaire

Considérons un modèle dynamique à N-corps, dépendant d'un jeu de constantes $\boldsymbol{c} = (\overrightarrow{r_{0i}}, \dot{\overrightarrow{r_{0i}}}, p_k)_{i=1,N;k=1,N'}$. Les paramètres $(\overrightarrow{r_{0i}}, \dot{\overrightarrow{r_{0i}}})_{i=1,N}$ désignent les positions et vitesses initiales des N corps du système. Les paramètres $(p_k)_{k=1,N'}$ désignent les autres constantes dont peuvent dépendre le modèle, comme les masses, les coefficients d'aplatissement, les

directions des pôles de rotation ... On dispose d'un nombre L d'observations du système, que nous allons noter $(\overrightarrow{r_{li}^o})_{l=1,L;i=1,N}$). De même, $(\overrightarrow{r_{li}^c})_{l=1,L;i=1,N}$) désignera l'ensemble des positions données par le modèle pour ces mêmes instants.

Ces L observations nous permettent d'évaluer $3L$ différences entre notre modèle et les observations. Ces différences, que l'on désigne aussi sous le nom 'O-C' (positions observées-positions calculées), seront notées $\Delta\overrightarrow{r_{li}}$ et sont égales par définition à : $\Delta\overrightarrow{r_{li}} = \overrightarrow{r_{li}^o} - \overrightarrow{r_{li}^c}$.

Il nous faut alors faire l'hypothèse très importante que notre modèle décrit parfaitement le système. Les positions calculées dépendent des conditions initiales et paramètres estimés à tout instant t_l par l'intermédiaire d'une fonction $\boldsymbol{f}^i$ telle que

$$\overrightarrow{r_{li}^c} = \boldsymbol{f}^i(t_l, \boldsymbol{c}) \tag{4.1}$$

En raison de l'hypothèse faite juste avant, on considère que les positions observées dépendent des conditions initiales réelles et de la valeur réelle des paramètres par l'intermédiaire de la même fonction f. En notant $\boldsymbol{c'} = (\overrightarrow{r_{0i}}', \overrightarrow{r_{0i}}', p'_k)_{i=1,N;k=1,N'}$ les conditions initiales et paramètres réels, on obtient :

$$\overrightarrow{r_{li}^o} = \boldsymbol{f}^i(t_l, \boldsymbol{c'}) \tag{4.2}$$

Si l'on est proche de la solution réelle du système, c'est à dire que les constantes estimées sont proches de leur valeur réelle, on peut se contenter d'un développement de Taylor à l'ordre 1 de $\overrightarrow{r_{li}^c}$ au voisinage de cette solution réelle :

$$\overrightarrow{r_{li}^o} = f^i(t_l, \boldsymbol{c}) + \sum_{k=1}^{6N+N'} \left.\frac{\partial f^i}{\partial {c'}_k}\right|_{t_l,c_k} ({c'}_k - c_k) + \mathcal{O}({c'}_k - c_k)^2 \tag{4.3}$$

On obtient alors une expression liant les O-C du systèmes aux écarts entre les valeurs estimées des constantes et leurs valeurs réelles que nous allons noter $\Delta c_k = c_k - {c'}_k$, que l'on appelle équation de condition :

$$\Delta\overrightarrow{r_{li}} \approx \sum_{k=1}^{6N+N'} \left.\frac{\partial f^i}{\partial c_k}\right|_{t_l,c_k} ({c'}_k - c_k) = \sum_{k=1}^{6N+N'} \left.\frac{\partial f^i}{\partial c_k}\right|_{t_l,c_k} \Delta c_k \tag{4.4}$$

Ceci correspond à un système de $3N * L$ équations à $6N + N'$ inconnues. Le but de la méthode des moindres carrés est d'estimer la valeur des paramètres qui permet de minimiser les O-C du système. Il est évident que dans le cas général, la dépendance entre Δc_k et les O-C n'est pas linéaire. L'une des conditions essentielles à la validité de cette approximation est de se trouver dans un voisinage de la solution réelle.

Notation matricielle

Nous pouvons reformuler l'équation 4.4 sous forme matricielle, pour cela, nous allons utiliser les notations suivantes :

$$Y^i = \begin{pmatrix} \Delta\overrightarrow{r_{1i}} \\ \vdots \\ \Delta\overrightarrow{r_{Li}} \end{pmatrix}, X^i = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f^i}{\partial c_1}\right|_{t_1,c_1} & \cdots & \left.\frac{\partial f^i}{\partial c_{6N+N'}}\right|_{t_1,c_{6N+N'}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left.\frac{\partial f^i}{\partial c_1}\right|_{t_L,c_1} & \cdots & \left.\frac{\partial f^i}{\partial c_{6N+N'}}\right|_{t_L,c_{6N+N'}} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \Delta c_1 \\ \vdots \\ \Delta c_{6N+N'} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Pour chaque corps i du système, nous allons alors avoir une équation matricielle du type $Y^i = X^i A$. Nous cherchons alors les composantes de la matrice A qui permettent de minimiser celle de la matrice globale Y regroupant toutes les matrices Y^i.

Résolution

Dans le cas idéal :
- le développement présenté dans l'équation 4.3 est exact à l'ordre 1,
- la fonction f^i représente exactement le comportement du système,
- les résidus Y ne sont pas entâchés d'erreurs de mesures,

il est alors possible de trouver des composantes de A qui rendent nuls les résidus Y. En raison du fait que les hypothèses présentées ci-dessus ne sont pas vérifiées, le système d'équations $Y = XA$ n'admet pas de solution exacte. La résolution approchée de $Y = XA$ nous donnera donc une première solution approchée. Il faudra donc itérer le processus jusqu'à la convergence vers une valeur la plus petite possible des résidus. En particulier, les observations sont des mesures dont l'on ne connaît pas a priori la loi des erreurs. Néanmoins, comme les observations sont a priori indépendantes entre elles, nous allons supposer que leur loi des erreurs est gaussienne. Pour trouver la valeur de A qui permet de minimiser les résidus, considérons l'application

$$\mathcal{F} : A \mapsto \|Y - XA\|^2 \tag{4.6}$$

On cherche un minimum de cette application $\mathcal{F}$, donc une matrice A telle que $d\mathcal{F} = 0$. C'est de ce principe que vient le nom *moindres carrés*, puisque l'on cherche à minimiser l'écart quadratique entre les résidus et la matrice XA. La méthode des moindres carrés est l'estimateur le plus efficace dans le cas d'une loi des erreurs gaussienne.

Si les colonnes de la matrice X sont linéairement indépendantes, alors le système $d\mathcal{F} = 0$ admet une unique solution.

Par définition :

$$\begin{aligned} \|Y - AX\|^2 &= \sum_{l=1}^{L} \left(\Delta\overrightarrow{r_{li}} - \sum_{k=1}^{6N+N'} \left.\frac{\partial f^i}{\partial c_k}\right|_{t_l, c_k} \Delta c_k \right)^2 \\ &= \sum_{l=1}^{L} \left(Y_l - \sum_{k=1}^{6N+N'} X_{lk} A_l \right)^2 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Il nous faut alors calculer le gradient de cette expression par rapport aux variables A_l

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A_m}\|Y - AX\|^2 &= \sum_{l=1}^{L} \frac{\partial}{\partial A_m} \left(Y_l - \sum_{k=1}^{6N+N'} X_{lk} A_l \right)^2 \\ &= 2\sum_{l=1}^{L} \left(Y_l - \sum_{k=1}^{6N+N'} X_{lk} A_l \right) (-X_{lm}) \\ &= 2\sum_{l=1}^{L} \left(-X_{lm} Y_l + \sum_{k=1}^{6N+N'} X_{lm} X_{lk} A_l \right) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Un gradient nul peut donc se réécrire comme un système de $6N + N'$ équations de la forme :

$$\sum_{l=1}^{L} \left(X_{lm} Y_l - \sum_{k=1}^{6N+N'} X_{lm} X_{lk} A_l \right) = 0 \tag{4.9}$$

Ou encore sous la forme matricielle :

$$^tXY = {}^tXXA \tag{4.10}$$

La matrice A permettant de minimiser les résidus sera donc la matrice $A = ({}^tXX)^{-1}\,{}^tXY$. La principale difficulté viendra de l'inversion de la matrice ${}^tXX$ qui peut se révéler impossible, ou du moins numériquement difficile lorsque des observations sont non-indépendantes. Par exemple, des observations obtenues au cours d'une même nuit, pour un objet lointain dont le mouvement est faiblement ou non décelable sur une nuit pour une précision donnée de l'observation, correspondront à des équations de condition presque identiques. Dans ce cas, même si notre programme parvient à inverser la matrice ${}^tXX$, les équations de condition n'étant pas linéairement indépendantes, la correction des paramètres n'aura pas de signification réelle. Une autre source possible d'erreur sur la correction obtenue par les moindres carrés est la corrélation trop forte entre deux paramètres. Dans ce cas, il est impossible de séparer l'influence des deux paramètres et les corrections proposées peuvent ne pas avoir de signification physique. Par exemple, si l'on considère le cas d'un satellite en orbite et doté d'une inclinaison nulle autour d'une planète aplatie. Dans ce cas, il est impossible de séparer l'influence de l'aplatissement dynamique et la masse du corps central.

Un autre problème qui risque de survenir est la commensurabilité des différents paramètres à ajuster. En effet, dans le cas où les paramètres à ajuster ont des valeurs trop dissemblables (par exemple, le demi-grand axe de Pluton a une valeur d'environ 39 UA, alors que la masse de Nix est au maximum de 10^{-12} masse solaire), l'inversion de A peut alors poser problème en raison de l'incapacité de l'ordinateur à comparer des nombres si différents en double précision.

4.1.2 Équations variationnelles

Dans cette partie, nous allons nous intéresser plus particulièrement à la manière dont on peut obtenir la valeur des coefficients de la matrice X. En effet, il est nécessaire de pouvoir obtenir, pour tout instant t_l et pour tout corps i du système la valeur des coefficients $\left.\dfrac{\partial \boldsymbol{f}^i}{\partial c_k}\right|_{t_l, c_k}$. Pour cela, rappelons que nous avons :

$$\frac{d^2\overrightarrow{r_{li}}}{dt^2}(t_l) = \frac{\overrightarrow{F}}{m_i}(t_l, \overrightarrow{r_{l1}}, \dot{\overrightarrow{r_{l1}}}, \ldots, \overrightarrow{r_{lN}}, \dot{\overrightarrow{r_{lN}}}, \boldsymbol{p}) \tag{4.11}$$

La dérivée de l'équation précédente par rapport à une constante quelconque c_k donnera :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_k}\frac{d^2\overrightarrow{r_{li}}}{dt^2}(t_l) &= \frac{\partial}{\partial c_k}\frac{\overrightarrow{F}}{m_i}(t_l, \overrightarrow{r_{l1}}, \dot{\overrightarrow{r_{l1}}}, \ldots, \overrightarrow{r_{lN}}, \dot{\overrightarrow{r_{lN}}}, \boldsymbol{p}) \\ &= \frac{1}{m_i}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial\overrightarrow{r_{lj}}}\frac{\partial\overrightarrow{r_{lj}}}{\partial c_k} + \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial\dot{\overrightarrow{r_{lj}}}}\frac{\partial\dot{\overrightarrow{r_{lj}}}}{\partial c_k}\right) + \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial\boldsymbol{p}}\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial c_k}\right] \end{aligned} \tag{4.12}$$

La constante c_k étant indépendante du temps, il est possible d'inverser la dérivation par rapport à c_k et par rapport au temps, on aboutit alors à

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r_{li}}}{\partial c_k}\right) = \frac{1}{m_i}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \overrightarrow{r_{lj}}}\frac{\partial \overrightarrow{r_{lj}}}{\partial c_k} + \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \dot{\overrightarrow{r_{lj}}}}\frac{\partial \dot{\overrightarrow{r_{lj}}}}{\partial c_k}\right) + \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial c_k}\right] \tag{4.13}$$

Qui peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}^i}{\partial c_k}\right|_{t_l,c_k}\right) = \frac{1}{m_i}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \overrightarrow{r_{lj}}}\frac{\partial \boldsymbol{f}^j(t_l)}{\partial c_k} + \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \dot{\overrightarrow{r_{lj}}}}\frac{\partial \dot{\overrightarrow{r_{lj}}}}{\partial c_k}\right) + \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial c_k}\right] \tag{4.14}$$

Nous nous retrouvons alors à intégrer $6N + N'$ systèmes différentiels d'ordre deux (un pour chaque constante du modèle), de $3N$ équations chacun. Ces équations seront intégrées numériquement en même temps que les équations du mouvement. Les conditions initiales de ces systèmes seront sous la forme (0, …, 0, 1, 0, …, 0), où le 1 sera au rang k. Dans le cas de notre système, les forces modélisées ne tiennent pas compte de la vitesse. Par conséquent, l'avant dernier terme de nos équations variationnelles est nul.

4.2 Calcul des équations variationnelles

Dans cette partie, nous allons présenter les équations variationnelles qui nous ont été nécessaires pendant notre ajustement. Nous allons décomposer ces équations suivant les paramètres qui nous intéressent et suivant l'interaction qu'elles représentent. Par la suite, nous allons devoir modifier ces équations pour qu'elles puissent être utilisées dans l'ajustement de notre modèle. En effet, notre modèle est exprimé en coordonnées cartésiennes, et les constantes dont il dépend sont les positions-vitesses initiales et les paramètres physiques des corps. Or, nos observations sont en coordonnées équatoriales et nous allons devoir ajuster en éléments elliptiques.

4.2.1 Interactions entre les centres de masses

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à la partie la plus simple des interactions du système : les interactions entre les centres de masses et leurs dérivées par rapport aux positions et vitesses initiales et aux masses. Ainsi, dans l'équation 4.14, les termes de la forme $\partial \boldsymbol{f}^j(t_l)/\partial c_k$, $\partial \dot{\overrightarrow{r_{lj}}}/\partial c_k$ et $\partial \boldsymbol{p}/\partial c_k$ sont donnés par l'intégration de ces équations au cours du temps dont les conditions initiales seront de la forme (0, …, 0, 1, 0, …, 0), où le 1 sera au rang k, il ne nous reste donc plus qu'à expliciter les termes de la forme $\partial \overrightarrow{F}/\partial \dot{\overrightarrow{r_{lj}}}$, $\partial \overrightarrow{F}/\partial \dot{\overrightarrow{r_{lj}}}$ et $\partial \overrightarrow{F}/\partial \boldsymbol{p}$.

Dérivées par rapport aux vitesses

Les forces prises en compte ne dépendent pas des vitesses des corps, par conséquent, tous les termes de la forme $\partial \overrightarrow{F}/\partial \dot{\overrightarrow{r_{lj}}}$ seront nuls.

Dérivées par rapport aux positions

Explicitons maintenant les termes de la forme $\partial\overrightarrow{F}/\partial\overrightarrow{r_{ij}}$. Considérons les interactions subies par le corps i sous l'influence des autres objets du système :

$$\frac{\vec{F_i}}{m_i} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} -GM_j\frac{\vec{r_j}-\vec{r_i}}{r_{ij}^3} + \sum_{l=1,i\neq l}^{4} -Gm_l\frac{\vec{r_l}-\vec{r_i}}{r_{il}^3} \tag{4.15}$$

Une fois projeté sur un axe γ, on obtient :

$$\frac{F_{i\gamma}}{m_i} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} -GM_j\frac{\gamma_j-\gamma_i}{r_{ij}^3} + \sum_{l=1,i\neq l}^{4} -Gm_l\frac{\gamma_l-\gamma_i}{r_{il}^3} \tag{4.16}$$

Nous allons alors nous trouver face à quatre cas de figures lorsque l'on dérive :

1. on dérive $F_{i\gamma}$ par rapport à la position initiale du même corps i, située sur le même axe γ
2. on dérive $F_{i\gamma}$ par rapport à la position initiale d'un autre corps j, située sur le même axe γ
3. on dérive $F_{i\gamma}$ par rapport à la position initiale du même corps i, située sur un autre axe ζ
4. on dérive $F_{i\gamma}$ par rapport à la position initiale d'un autre corps j, située sur un autre axe ζ

Dans le premier cas, nous aurons alors :

$$\frac{1}{m_i}\frac{\partial F_{i\gamma}}{\partial\gamma_i} = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}}\frac{GM_k}{r_{ik}^3}\left(1-\frac{3(\gamma_k-\gamma_i)^2}{r_{ik}^2}\right) + \sum_{l=1,i\neq l}^{4}\frac{Gm_l}{r_{il}^3}\left(1-\frac{3(\gamma_l-\gamma_i)^2}{r_{il}^2}\right) \tag{4.17}$$

Dans le deuxième cas :

$$\frac{1}{m_i}\frac{\partial F_{i\gamma}}{\partial\gamma_j} = \frac{Gm_j}{r_{ij}^3}\left(1-\frac{3(\gamma_j-\gamma_i)^2}{r_{ij}^2}\right) \tag{4.18}$$

Dans le troisième cas :

$$\frac{1}{m_i}\frac{\partial F_{i\gamma}}{\partial\zeta_i} = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}}\frac{GM_k}{r_{ik}^3}\frac{3(\gamma_k-\gamma_i)(\zeta_k-\zeta_i)}{r_{ik}^2} + \sum_{l=1,i\neq l}^{4}\frac{Gm_l}{r_{il}^3}\frac{3(\gamma_l-\gamma_i)(\zeta_l-\zeta_i)}{r_{il}^2} \tag{4.19}$$

Dans le quatrième cas :

$$\frac{1}{m_i}\frac{\partial F_{i\gamma}}{\partial\zeta_j} = -\frac{Gm_j}{r_{ij}^3}\frac{3(\gamma_j-\gamma_i)(\zeta_j-\zeta_i)}{r_{ij}^2} \tag{4.20}$$

Dérivées par rapport aux masses

En ce qui concerne les dérivées par rapport aux masses du système, la dérivée de $\vec{F}_i$ est bien sûr indépendante de m_i. Nous aurons donc, pour la masse m_j :

$$\frac{1}{m_i}\left.\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial m_j}\right|_{\gamma} = -G\frac{\gamma_j - \gamma_i}{r_{ij}^3} \tag{4.21}$$

4.2.2 Dérivées des forces d'aplatissement

Nous ne prendrons ici en compte que l'effet de l'aplatissement polaire J_2 pour des raisons expliquées dans le chapitre suivant. L'expression de cette force ne dépendant pas de la vitesse, nous ne considérerons les dérivées que par rapport aux masses, aux coefficients d'aplatissement, aux positions des corps, et aux coordonnées des pôles de rotation, les termes de la forme $\partial \overrightarrow{F}/\partial \dot{\overrightarrow{r_{lj}}}$ étant, comme pour les interactions entre les centres de masse, nuls.

Dérivées par rapport à la masse

De manière générale, les forces subies par le corps i sous l'effet de l'aplatissement du corps l sont sous la forme (cf chapitre 2) :

$$\frac{1}{m_i}\vec{F}_{\bar{i}\hat{l}} = -Gm_l R_l^2 \nabla_{X,Y,Z}\left(\frac{J_2^{(l)}}{r_{il}^3}\left(\frac{3}{2}\frac{z_i^2}{r_{il}^2} - \frac{1}{2}\right)\right) \tag{4.22}$$

où (x_i, y_i, z_i) désigne les coordonnées de i dans le repère équatorial de l et (X, Y, Z) le repère inertiel dans lequel a été développé le modèle. La seule masse qui intervient dans l'expression de la force d'aplatissement présentée ci-dessus est m_l, et il vient naturellement que :

$$\frac{1}{m_i}\frac{\partial \vec{F}_{\bar{i}\hat{l}}}{\partial m_l} = -GR_l^2 \nabla_{X,Y,Z}\left(\frac{J_2^{(l)}}{r_{il}^3}\left(\frac{3}{2}\frac{z_i^2}{r_{il}^2} - \frac{1}{2}\right)\right) \tag{4.23}$$

Le corps i subit également l'influence que le centre de masse du corps l exerce sur son aplatissement, et cette interaction est :

$$\frac{1}{m_i}\vec{F}_{\hat{i}\bar{l}} = -Gm_l R_i^2 \nabla_{X,Y,Z}\left(\frac{J_2^{(i)}}{r_{il}^3}\left(\frac{3}{2}\frac{z_i^2}{r_{il}^2} - \frac{1}{2}\right)\right) \tag{4.24}$$

Tout comme dans le cas précédent, la seule masse qui intervient dans la force d'aplatissement est la masse m_l, et par conséquent :

$$\frac{1}{m_i}\frac{\partial \vec{F}_{\hat{i}\bar{l}}}{\partial m_l} = -GR_i^2 \nabla_{X,Y,Z}\left(\frac{J_2^{(i)}}{r_{il}^3}\left(\frac{3}{2}\frac{z_i^2}{r_{il}^2} - \frac{1}{2}\right)\right) \tag{4.25}$$

Dérivées par rapport au coefficient d'aplatissement

De la même manière que précédemment, nous aurons :

$$\frac{1}{m_i}\frac{\partial \vec{F}_{\bar{i}\hat{l}}}{\partial J_2^{(l)}} = -Gm_l R_l^2 \nabla_{X,Y,Z}\left(\frac{1}{r_{il}^3}\left(\frac{3}{2}\frac{z_i^2}{r_{il}^2} - \frac{1}{2}\right)\right) \tag{4.26}$$

Dérivées par rapport à une position

Comme vu dans le chapitre 2, les forces d'aplatissement s'expriment naturellement dans le repère équatorial des corps. En utilisant les mêmes notations que dans ce chapitre, le changement de variables exprimant les coordonnées équatoriales (x, y, z) en fonction des coordonnées inertielles (X, Y, Z) est donné par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_3(W)R_1(\phi)R_3(\Psi) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

Posons alors : $R = R_3(W_i)R_1(\phi_i)R_3(\Psi_i)$ qui permet de passer des coordonnées inertielles à équatoriales pour le corps i. Cette matrice R peut dépendre des coordonnées des corps par la matrice $R_3(W)$. Par exemple, dans le cas de Pluton, cette matrice $R_3(W)$ pour exprimer les coordonnées des objets dans le repère équatorial de Pluton va dépendre des coordonnées de Charon et de Pluton. Néanmoins, cette matrice ne sert qu'à exprimer le décalage en longitude entre le méridien de référence et la direction de "X" obtenue après le produit par les deux autres matrices. Par conséquent, elle est inutile pour l'expression de l'effet de l'aplatissement polaire, indépendant de la longitude. Pour économiser le calcul de la dérivée de cette matrice par rapport aux positions, nous redéfinirons la matrice R comme $R = R_1(\phi_i)R_3(\Psi_i)$. Les forces subies par le corps i sous l'effet de l'aplatissement du corps l peuvent donc être exprimées comme :

$$\frac{1}{m_i}\vec{F}_{\vec{i}\vec{l}} = -Gm_l R_l^2 J_2^{(l)} R^{-1} \vec{f}(R(X, Y, Z)) \tag{4.28}$$

où, P_2 étant le polynôme de Legendre d'ordre 2

$$\vec{f} = \nabla_{x,y,z}\left(\frac{1}{r_{il}^3} P_2\left(\frac{z_l}{r_{il}}\right)\right) \tag{4.29}$$

et

$$R = R_1(\phi_i)R_3(\Psi_i) = \begin{pmatrix} \cos\Psi_i & \sin\Psi_i & 0 \\ -\cos\phi_i \sin\Psi_i & \cos\phi_i\cos\Psi_i & \sin\phi_i \\ \sin\phi_i\sin\Psi_i & -\sin\phi_i\cos\Psi_i & \cos\phi_i \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

Par conséquent, la dérivée de la force d'aplatissement par l'une des positions-vitesses dans le repère inertiel sera :

$$\frac{1}{m_i}\frac{\partial \vec{F}_{\vec{i}\vec{l}}}{\partial \gamma_l} = -Gm_l R_l^2 J_2^{(l)} R^{-1} \sum_{j=1}^{3(N-1)} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \zeta_j}\frac{\partial \zeta_j}{\partial \gamma_l} \tag{4.31}$$

où ζ désigne l'ensemble des coordonnées dans le repère équatorial lié à i. Les coefficients $\partial\zeta_j/\partial\gamma_l$ ne sont pas simplement les éléments de la matrice R. En effet, les coordonnées (X, Y, Z) utilisées ci-dessus sont des coordonnées cartésiennes relatives données dans un système d'axes inertiels, quand nous avons besoin des coordonnées inertielles absolues. Un coefficient $\partial\zeta_j/\partial\gamma_l$ peut donc être égal à un élément de la matrice R, à son opposé, ou être nul suivant le cas considéré.

En ce qui concerne les coefficients $\dfrac{\partial f}{\partial \zeta}$, leurs expressions sont données par les équations suivantes :

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} = -5\frac{x}{r^7}\left(-\frac{15}{2}\frac{xz^2}{r^2}+\frac{3}{2}x\right)+\frac{1}{r^5}\left(\frac{15x^2z^2}{r^4}-\frac{15}{2}\frac{z^2}{r^2}\right) \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = -5\frac{x}{r^7}\left(-\frac{15}{2}\frac{yz^2}{r^2}+\frac{3}{2}y\right)+\frac{1}{r^5}\left(\frac{15xyz^2}{r^4}\right) \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial f_z}{\partial x} = -5\frac{x}{r^7}\left(-\frac{15}{2}\frac{z^3}{r^2}+\frac{9}{2}z\right)+\frac{1}{r^5}\left(\frac{15xz^3}{r^4}\right) \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = -5\frac{y}{r^7}\left(-\frac{15}{2}\frac{xz^2}{r^2}+\frac{3}{2}x\right)+\frac{1}{r^5}\left(\frac{15xyz^2}{r^4}\right) \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial y} = -5\frac{y}{r^7}\left(-\frac{15}{2}\frac{yz^2}{r^2}+\frac{3}{2}y\right)+\frac{1}{r^5}\left(\frac{15y^2z^2}{r^4}-\frac{15}{2}\frac{z^2}{r^2}\right) \tag{4.36}$$

$$\frac{\partial f_z}{\partial y} = -5\frac{y}{r^7}\left(-\frac{15}{2}\frac{z^3}{r^2}+\frac{9}{2}z\right)+\frac{1}{r^5}\left(\frac{15yz^3}{r^4}\right) \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial z} = -5\frac{z}{r^7}\left(-\frac{15}{2}\frac{xz^2}{r^2}+\frac{3}{2}x\right)+\frac{1}{r^5}\left(\frac{15xz^3}{r^4}-15\frac{xz}{r^2}\right) \tag{4.38}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial z} = -5\frac{z}{r^7}\left(-\frac{15}{2}\frac{yz^2}{r^2}+\frac{3}{2}y\right)+\frac{1}{r^5}\left(\frac{15yz^3}{r^4}-15\frac{yz}{r^2}\right) \tag{4.39}$$

$$\frac{\partial f_z}{\partial z} = -5\frac{z}{r^7}\left(-\frac{15}{2}\frac{z^3}{r^2}+\frac{9}{2}z\right)+\frac{1}{r^5}\left(\frac{15z^4}{r^4}-\frac{45}{2}\frac{z^2}{r^2}+\frac{9}{2}\right) \tag{4.40}$$

Dérivées par rapport aux coordonnées du pôle

Nous allons réutiliser les notations développées au paragraphe précédent. Soit Φ_i l'une quelconque des coordonnées du pôle du corps i. La dérivée de la force $\vec{F}_{\vec{i}\vec{l}}$ sera donc donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial\Phi_i}\left(\frac{1}{m_i}\vec{F}_{\vec{i}\vec{l}}\right) = -GR_i^2 m_i J_2^{(i)}\left[\frac{\partial R^{-1}}{\partial\Phi_i}\vec{f}(R(X,Y,Z))+R^{-1}\frac{\partial}{\partial\Phi_i}\left(\vec{f}(R(X,Y,Z))\right)\right] \tag{4.41}$$

Le second terme peut être explicité par la même démarche que précédemment, on obtient alors :

$$\frac{\partial}{\partial\Phi_i}\left(\vec{f}(R(X,Y,Z))\right) = \sum\frac{\partial f}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\Phi_i} \tag{4.42}$$

Les termes $\partial f/\partial\zeta$ ont déjà été développés au paragraphe précédent. Le second terme de l'expression précédente peut s'écrire comme

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\Phi_i} = \left.\frac{\partial R}{\partial\Phi_i}\overrightarrow{(X,Y,Z)}\right|_\zeta \tag{4.43}$$

Il nous reste donc à expliciter les matrices $\frac{\partial R}{\partial \Phi_i}$ et $\frac{\partial R^{-1}}{\partial \Phi_i}$ (cf équation 4.41) :

$$\frac{\partial R}{\partial \phi_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sin\phi_i \sin\Psi_i & -\sin\phi_i \cos\Psi_i & -\cos\phi_i \\ -\cos\phi_i \sin\Psi_i & -\cos\phi_i \cos\Psi_i & \sin\phi_i \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Psi_i} = \begin{pmatrix} -\sin\Psi_i & \cos\Psi_i & 0 \\ -\cos\phi_i \cos\Psi_i & -\cos\phi_i \sin\Psi_i & 0 \\ \sin\phi_i \cos\Psi_i & \sin\phi_i \sin\Psi_i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

$$\frac{\partial R^{-1}}{\partial \phi_i} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\phi_i \sin\Psi_i & \cos\phi_i \sin\Psi_i \\ 0 & -\sin\phi_i \cos\Psi_i & -\cos\phi_i \cos\Psi_i \\ 0 & \cos\phi_i & \sin\phi_i \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

$$\frac{\partial R^{-1}}{\partial \Psi_i} = \begin{pmatrix} -\sin\Psi_i & -\cos\phi_i \cos\Psi_i & \sin\phi_i \cos\Psi_i \\ \cos\Psi_i & -\cos\phi_i \sin\Psi_i & -\sin\phi_i \sin\Psi_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

4.3 Changement d'observables et de paramètres ajustables

Le modèle présenté jusqu'ici décrit les positions cartésiennes des objets du système de Pluton. Tel quel, il peut ajuster les paramètres inconnus du système à partir des observations en positions cartésiennes de ces mêmes corps. Or, les observations dont nous allons disposer sont données en coordonnées équatoriales (α, δ) absolues ou relatives à l'un des corps du système. Il nous faut donc effectuer un changement de variables pour exprimer les positions calculées de Pluton et ses satellites en coordonnées équatoriales, absolues ou relatives selon l'observation, et pour exprimer les équations variationnelles dans ce même jeu de coordonnées.

Par la suite, nous allons également modifier le type de conditions initiales que nous allons utiliser. En effet, des conditions initiales cartésiennes peuvent poser problème lors de l'ajustement des satellites, la linéarité de l'équation 4.3 n'étant pas exacte. Dans le cas de l'ajustement des éléments képlériens initiaux, cette linéarité est mieux conservée (Taylor, 1998). Nous utiliserons donc les éléments elliptiques initiaux de Pluton autour du Soleil, et les éléments elliptiques des satellites autour de Pluton. Tout comme dans le cas des changements de variable, les équations variationnelles vont devoir être modifiées.

4.3.1 Changement d'observables : coordonnées équatoriales

coordonnées équatoriales absolues

Considérons le corps i du système, ses coordonnées cartésiennes par rapport à la Terre dans l'ICRF sont notées (X_i, Y_i, Z_i), ses coordonnées équatoriales (α_i, δ_i) et r_i sa distance à la Terre. Nous avons alors :

$$\begin{cases} X_i &= r_i \cos\delta_i \cos\alpha_i \\ Y_i &= r_i \cos\delta_i \sin\alpha_i \\ Z_i &= r_i \sin\delta_i \end{cases} \tag{4.48}$$

L'inversion de ce système nous permet alors de calculer nos coordonnées équatoriales. En ce qui concerne les équations variationnelles, l'utilisation des coordonnées équatoriales revient à modifier l'équation 4.4 comme suit :

$$\begin{cases} \Delta\alpha_i &= \displaystyle\sum_{k=1}^{6N+N'} \left.\frac{\partial\alpha_i}{\partial c_k}\right|_{c'_k} \Delta c_k = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\alpha_i}{\partial\gamma_j} \left(\sum_{k=1}^{6N+N'} \left.\frac{\partial\gamma_j}{\partial c_k}\right|_{c'_k} \Delta c_k \right) \\ \Delta\delta_i &= \displaystyle\sum_{k=1}^{6N+N'} \left.\frac{\partial\delta_i}{\partial c_k}\right|_{c'_k} \Delta c_k = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\delta_i}{\partial\gamma_j} \left(\sum_{k=1}^{6N+N'} \left.\frac{\partial\gamma_j}{\partial c_k}\right|_{c'_k} \Delta c_k \right) \end{cases} \tag{4.49}$$

En utilisant la notation matricielle et en posant $H = (\partial\alpha_i/\partial\gamma_j, \partial\delta_i/\partial\gamma_j)$ et $Z = (\Delta\alpha_i, \Delta\delta_i)$, on obtient $Z = HXA$, ou, pour un instant t_l donné :

$$\begin{pmatrix} \Delta\alpha_i(t_l) \\ \Delta\delta_i(t_l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\alpha_i}{\partial X_i}, & \dfrac{\partial\alpha_i}{\partial Y_i}, & \dfrac{\partial\alpha_i}{\partial Z_i} \\ \dfrac{\partial\delta_i}{\partial X_i}, & \dfrac{\partial\delta_i}{\partial Y_i}, & \dfrac{\partial\delta_i}{\partial Z_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X_i}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial X_i}{\partial c_{6N+N'}} \\ \dfrac{\partial Y_i}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial Y_i}{\partial c_{6N+N'}} \\ \dfrac{\partial Z_i}{\partial c_1} & \cdots & \dfrac{\partial Z_i}{\partial c_{6N+N'}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_1 \\ \vdots \\ \Delta c_{6N+N'} \end{pmatrix} \tag{4.50}$$

La matrice H, pour un instant t_l et pour le corps i sera :

$$H = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sin\alpha_i}{r_i\cos\delta_i}, & \dfrac{\cos\alpha_i}{r_i\cos\delta_i}, & 0 \\ -\dfrac{\sin\delta_i\cos\alpha_i}{r_i}, & -\dfrac{\sin\delta_i\sin\alpha_i}{r_i}, & \dfrac{\cos\delta_i}{r_i} \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

Cette transformation est valable pour les coordonnées équatoriales absolues, mais nous allons également devoir ajuster des observations des satellites relatives au centre de Pluton.

Coordonnées équatoriales relatives

Considérons un satellite i en orbite autour de Pluton. Ses coordonnées équatoriales relatives à Pluton (α_i^r, δ_i^r) seront alors :

$$\begin{cases} \alpha_i^r &= \alpha_i - \alpha_P \\ \delta_i^r &= \delta_i - \delta_P \end{cases} \tag{4.52}$$

Ce qui revient en notation vectorielle à utiliser une matrice M telle que $Z' =$

$M(HX)A$, avec :

$$\begin{pmatrix} \Delta\alpha_i^r(t_l) \\ \\ \Delta\delta_i^r(t_l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 1 & 0\dots \\ \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 1\dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\alpha_P}{\partial c_1} & \dots & \dfrac{\partial\alpha_P}{\partial c_{6N+N'}} \\ \\ \dfrac{\partial\delta_P}{\partial c_1} & \dots & \dfrac{\partial\delta_P}{\partial c_{6N+N'}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial\alpha_i}{\partial c_1} & \dots & \dfrac{\partial\alpha_i}{\partial c_{6N+N'}} \\ \\ \dfrac{\partial\delta_i}{\partial c_1} & \dots & \dfrac{\partial\delta_i}{\partial c_{6N+N'}} \\ \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_1 \\ \vdots \\ \Delta c_{6N+N'} \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

où, dans la matrice M, le 1 de la première ligne est à la colonne $2i-1$, et celui de la seconde à la colonne $2i$, tous les coefficients non-représentés de la matrice étant nuls.

4.3.2 Changement de paramètres ajustables : éléments elliptiques

Comme évoqué avant, le comportement de l'équation 4.3 devient rapidement non linéaire dans le cas d'un développement en fonction des positions et vitesses initiales, situation résolue lorsque l'on développe en fonction des éléments elliptiques initiaux. Il nous faut donc faire intervenir la transformation qui permet de passer des positions-vitesses initiales en coordonnées cartésiennes aux éléments osculateurs initiaux. Tout comme précédemment, nous pouvons utiliser la notation matricielle pour décrire la transformation effectuée. Nous allons maintenant chercher à exprimer l'équation 4.50 non plus en fonction d'un jeu de variables $(c_l)_{j=1,6N+N'}$, mais d'un jeu de variables $(q_l)_{j=1,6N+N'}$ où les $6N$ premiers paramètres sont les éléments elliptiques initiaux des corps du système. Ceci revient à une équation de la forme $Z = HXTA'$ où Z, H et X ont la même signification que précédemment et

$$T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial c_1}{\partial q_1} & \dots & \dfrac{\partial c_1}{\partial q_{6N+N'}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial c_{6N+N'}}{\partial q_1} & \dots & \dfrac{\partial c_{6N+N'}}{\partial q_{6N+N'}} \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} \Delta q_1 \\ \vdots \\ \Delta q_{6N+N'} \end{pmatrix} \tag{4.54}$$

La matrice T est donc la matrice de passage entre les coordonnées cartésiennes et les éléments elliptiques considérée au temps initial de notre système. Par la suite, pour expliciter les termes de cette matrice, nous noterons les éléments osculateurs initiaux du corps i : $(a_i, e_i, I_i, \Omega_i, \omega_i, v_i)$. Deux cas vont alors se présenter : celui du primaire du système, dont la relation entre éléments elliptiques autour du soleil et coordonnées cartésiennes dans un repère barycentrique est simple, et celui de ses satellites, pour lesquels les éléments elliptiques s'expriment en fonction de leurs coordonnées cartésiennes relatives au centre du premier corps.

Dans le cas du primaire, la partie de la matrice T concernée, c'est à dire les six premières lignes, sera tout simplement de la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial v_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial V_{Z1}}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial V_{Z1}}{\partial v_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial V_{Z1}}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial V_{Z1}}{\partial m_N} \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

dont les différents coefficients seront explicités plus loin et pour laquelle les 0 des colonnes 7 à $6N$ correspondent aux dérivées des coordonnées cartésiennes de Pluton par rapport aux éléments elliptiques de ses satellites. Dans la transformation qui lie les coordonnées cartésiennes et les éléments elliptiques, la masse des objets va intervenir dans l'expression des vitesses, d'où le fait que, même si les coefficients $\partial X_i/\partial m_j$ sont nuls, ce n'est pas le cas des coefficients de la forme $\partial V_i/\partial m_j$

Posons alors, dans le cas d'un satellite j : $X_j = X_p + x_j$ et $V_{Xj} = V_{Xp} + vx_j$ où x_j est la coordonnée cartésienne du satellite j par rapport au primaire et vx_j sa vitesse initiale par rapport au primaire, sur l'axe x. Le mouvement héliocentrique des satellites est en réalité celui du primaire, ce mouvement ne va dépendre que de ses éléments elliptiques et ne contiendra donc que les coefficients de la matrice précédente. Au contraire, les coordonnées cartésiennes relatives au primaire ne dépendront que des éléments des satellites eux-mêmes.

Par exemple, la partie de la matrice T transformant les coordonnées du premier satellite sera de la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial v_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial v_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial V_{X1}}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial V_{X1}}{\partial v_1} & \frac{\partial vx_2}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial vx_2}{\partial v_2} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial V_{X2}}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial V_{X2}}{\partial m_N} \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

où les 0 des colonnes 13 à $6N$ correspondent aux dérivées des coordonnées cartésiennes du premier satellite par rapport aux éléments elliptiques des autres satellites.

Enfin, les N' paramètres restants, parmi lesquels les masses, les aplatissements, ... resteront inchangés par le changement de coordonnées.

Nous allons maintenant détailler les termes $\partial c_i/\partial c'_j$ de la matrice T. Qu'il s'agisse des dérivées des coordonnées absolues du primaire par rapport à ses éléments elliptiques héliocentrique, ou des dérivées des coordonnées relatives des satellites par rapport à leurs éléments elliptiques relatifs au primaire, nous aurons les mêmes expressions. Intéressons nous d'abord aux dérivées des positions initiales. Considérons les coordonnées cartésiennes initiales du corps i, notées $(\vec{\gamma_i^0}, \dot{\vec{\gamma_i^0}})$. Nous avons alors :

$$\vec{\gamma_i^0} = \frac{a_i(1-e_i^2)}{1+e_i\cos v_i} \begin{pmatrix} \cos\Omega_i\cos(\omega_i+v_i) - \sin\Omega_i\sin(\omega_i+v_i)\cos I_i \\ \sin\Omega_i\cos(\omega_i+v_i) + \cos\Omega_i\sin(\omega_i+v_i)\cos I_i \\ \sin(\omega_i+v_i)\sin I_i \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{\partial \vec{\gamma_i^0}}{\partial a_i} = \frac{1-e_i^2}{1+e_i\cos v_i}\begin{pmatrix} \cos\Omega_i\cos(\omega_i+v_i) - \sin\Omega_i\sin(\omega_i+v_i)\cos I_i \\ \sin\Omega_i\cos(\omega_i+v_i) + \cos\Omega_i\sin(\omega_i+v_i)\cos I_i \\ \sin(\omega_i+v_i)\sin I_i \end{pmatrix} \tag{4.58}$$

$$\frac{\partial \vec{\gamma_i^0}}{\partial e_i} = \frac{a_i(-2e_i-\cos v_i - e^2\cos v_i)}{(1+e_i\cos v_i)^2}\begin{pmatrix} \cos\Omega_i\cos(\omega_i+v_i) - \sin\Omega_i\sin(\omega_i+v_i)\cos I_i \\ \sin\Omega_i\cos(\omega_i+v_i) + \cos\Omega_i\sin(\omega_i+v_i)\cos I_i \\ \sin(\omega_i+v_i)\sin I_i \end{pmatrix} \tag{4.59}$$

$$\frac{\partial \vec{\gamma_i^0}}{\partial I_i} = \frac{a_i(1-e_i^2)}{1+e_i\cos v_i}\begin{pmatrix} \sin\Omega_i\sin(\omega_i+v_i)\sin I_i \\ -\cos\Omega_i\sin(\omega_i+v_i)\sin I_i \\ \sin(\omega_i+v_i)\cos I_i \end{pmatrix} \tag{4.60}$$

$$\frac{\partial \vec{\gamma_i^0}}{\partial \Omega_i} = \frac{a_i(1-e_i^2)}{1+e_i\cos v_i}\begin{pmatrix} -\sin\Omega_i\cos(\omega_i+v_i) - \cos\Omega_i\sin(\omega_i+v_i)\cos I_i \\ \cos\Omega_i\cos(\omega_i+v_i) - \sin\Omega_i\sin(\omega_i+v_i)\cos I_i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

$$\frac{\partial \vec{\gamma_i^0}}{\partial \omega_i} = \frac{a_i(1-e_i^2)}{1+e_i\cos v_i}\begin{pmatrix} -\cos\Omega_i\sin(\omega_i+v_i) - \sin\Omega_i\cos(\omega_i+v_i)\cos I_i \\ -\sin\Omega_i\sin(\omega_i+v_i) + \cos\Omega_i\cos(\omega_i+v_i)\cos I_i \\ \cos(\omega_i+v_i)\sin I_i \end{pmatrix} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{\gamma_i^0}}{\partial v_i} =& \frac{a_i e_i(1-e_i^2)\sin v_i}{(1+e_i\cos v_i)^2}\begin{pmatrix} \cos\Omega_i\cos(\omega_i+v_i) - \sin\Omega_i\sin(\omega_i+v_i)\cos I_i \\ \sin\Omega_i\cos(\omega_i+v_i) + \cos\Omega_i\sin(\omega_i+v_i)\cos I_i \\ \sin(\omega_i+v_i)\sin I_i \end{pmatrix} \\ &+ \frac{a_i(1-e_i^2)}{1+e_i\cos v_i}\begin{pmatrix} -\cos\Omega_i\sin(\omega_i+v_i) - \sin\Omega_i\cos(\omega_i+v_i)\cos I_i \\ -\sin\Omega_i\sin(\omega_i+v_i) + \cos\Omega_i\cos(\omega_i+v_i)\cos I_i \\ \cos(\omega_i+v_i)\sin I_i \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.63}$$

Si l'on considère maintenant la vitesse initiale :

$$\dot{\vec{\gamma_i^0}} = \begin{pmatrix} \cos\Omega_i\left[V_r\cos(\omega_i+v_i) - V_\perp\sin(\omega_i+v_i)\right] - \sin\Omega_i\cos I_i\left[V_r\sin(\omega_i+v_i) + V_\perp\cos(\omega_i+v_i)\right] \\ \sin\Omega_i\left[V_r\cos(\omega_i+v_i) - V_\perp\sin(\omega_i+v_i)\right] - \cos\Omega_i\cos I_i\left[V_r\sin(\omega_i+v_i) + V_\perp\cos(\omega_i+v_i)\right] \\ \sin I_i\left[V_r\sin(\omega_i+v_i) + V_\perp\cos(\omega_i+v_i)\right] \end{pmatrix} \tag{4.64}$$

où :

$$V_r = \frac{\mu}{\sqrt{a_i}}\frac{e_i\sin v_i}{\sqrt{1-e_i^2}}, V_\perp = \frac{\mu}{\sqrt{a_i}}\frac{1+e_i\cos v_i}{\sqrt{1-e_i^2}}, \mu = \sqrt{G(M+m_i)}$$

On peut remarquer que l'expression de la vitesse en éléments elliptiques va dépendre de la masse des corps, contrairement au cas de la position. Il nous faudra donc calculer aussi la dérivée de la vitesse en fonction de la masse du corps considéré m_i et de la masse M

du corps central. Posons les notations suivantes :

$$dv_{ra} = \frac{\partial V_r}{\partial a_i} = -\frac{\mu}{2a_i^{3/2}} \frac{e_i \sin v_i}{\sqrt{1-e_i^2}} \tag{4.65}$$

$$dv_{oa} = \frac{\partial V_\perp}{\partial a_i} = -\frac{\mu}{2a_i^{3/2}} \frac{1+e_i \cos v_i}{\sqrt{1-e_i^2}} \tag{4.66}$$

$$dv_{re} = \frac{\partial V_r}{\partial e_i} = \frac{\mu}{\sqrt{a_i}} \left(\frac{\cos v_i}{\sqrt{1-e_i^2}} + e_i \frac{1+e_i \cos v_i}{(1-e_i^2)^{3/2}} \right) \tag{4.67}$$

$$dv_{oe} = \frac{\partial V_\perp}{\partial e_i} = \frac{\mu}{\sqrt{a_i}} \frac{\sin v_i \sqrt{1-e_i^2} + (1-e_i^2)^{-1/2} e_i^2 \sin v_i}{1-e_i^2} \tag{4.68}$$

$$dv_{rv} = \frac{\partial V_r}{\partial v_i} = \frac{\mu}{\sqrt{a_i}} \frac{(1-e_i^2)^{3/2} + e_i \sin v_i}{(1+e_i \cos v_i)^2} \tag{4.69}$$

$$dv_{ov} = \frac{\partial V_\perp}{\partial v_i} = \frac{\mu}{\sqrt{a_i}} \frac{-e_i \sin v_i}{\sqrt{1-e_i^2}} \tag{4.70}$$

$$dv_{rm} = \frac{\partial V_r}{\partial m_i} = \frac{\partial \mu}{\partial m_i} \frac{e_i \sin v_i}{\sqrt{a_i(1-e^2)}} \tag{4.71}$$

$$dv_{om} = \frac{\partial V_\perp}{\partial m_i} = \frac{\partial \mu}{\partial m_i} \frac{(1+e_i \cos v_i)}{\sqrt{a_i(1-e^2)}} \tag{4.72}$$

$$dv_{rM} = \frac{\partial V_r}{\partial M} = \frac{\partial \mu}{\partial M} \frac{e_i \sin v_i}{\sqrt{a_i(1-e^2)}} \tag{4.73}$$

$$dv_{oM} = \frac{\partial V_\perp}{\partial M} = \frac{\partial \mu}{\partial M} \frac{(1+e_i \cos v_i)}{\sqrt{a_i(1-e^2)}} \tag{4.74}$$

$$\theta_i = \omega_i + v_i \tag{4.75}$$

où $\dfrac{\partial \mu}{\partial m_i} = \dfrac{\partial \mu}{\partial M} = \dfrac{G}{2\sqrt{G(M+m_i)}}$

On obtient alors :

$$\frac{\partial \dot{\vec{\gamma}}_i}{\partial a_i} = \begin{pmatrix} \cos\Omega_i \left[dv_{ra}\cos\theta_i - dv_{oa}\sin\theta_i\right] - \sin\Omega_i \cos I_i \left[dv_{ra}\sin\theta_i + dv_{oa}\cos\theta_i\right] \\ \sin\Omega_i \left[dv_{ra}\cos\theta_i - dv_{oa}\sin\theta_i\right] - \cos\Omega_i \cos I_i \left[dv_{ra}\sin\theta_i + dv_{oa}\cos\theta_i\right] \\ \sin I_i \left[dv_{ra}\sin\theta_i + dv_{oa}\cos\theta_i\right] \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{\gamma}}_i}{\partial e_i} = \begin{pmatrix} \cos\Omega_i \left[dv_{re}\cos\theta_i - dv_{oe}\sin\theta_i\right] - \sin\Omega_i \cos I_i \left[dv_{re}\sin\theta_i + dv_{oe}\cos\theta_i\right] \\ \sin\Omega_i \left[dv_{re}\cos\theta_i - dv_{oe}\sin\theta_i\right] - \cos\Omega_i \cos I_i \left[dv_{re}\sin\theta_i + dv_{oe}\cos\theta_i\right] \\ \sin I_i \left[dv_{re}\sin\theta_i + dv_{oe}\cos\theta_i\right] \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{\gamma}}_i}{\partial I_i} = \begin{pmatrix} -\sin\Omega_i \sin I_i \left[V_r\sin\theta_i + V_\perp\cos\theta_i\right] \\ -\cos\Omega_i \sin I_i \left[V_r\sin\theta_i + V_\perp\cos\theta_i\right] \\ \cos I_i \left[V_r\sin\theta_i + V_\perp\cos\theta_i\right] \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{\gamma}}_i}{\partial \Omega_i} = \begin{pmatrix} -\sin\Omega_i \left[V_r\cos\theta_i - V_\perp\sin\theta_i\right] - \cos\Omega_i \cos I_i \left[V_r\sin\theta_i + V_\perp\cos\theta_i\right] \\ \cos\Omega_i \left[V_r\cos\theta_i - V_\perp\sin\theta_i\right] - \sin\Omega_i \cos I_i \left[V_r\sin\theta_i + V_\perp\cos\theta_i\right] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{\gamma}}_i}{\partial \omega_i} = \begin{pmatrix} \cos\Omega_i \left[-V_r\sin\theta_i - V_\perp\cos\theta_i\right] - \sin\Omega_i \cos I_i \left[V_r\cos\theta_i - V_\perp\sin\theta_i\right] \\ \sin\Omega_i \left[-V_r\sin\theta_i - V_\perp\cos\theta_i\right] - \cos\Omega_i \cos I_i \left[V_r\cos\theta_i - V_\perp\sin\theta_i\right] \\ \sin I_i \left[V_r\cos\theta_i + V_\perp\sin\theta_i\right] \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{\gamma}}_i}{\partial v_i} = \begin{pmatrix} \cos\Omega_i & \left[dv_{rv}\cos\theta_i - V_r\sin\theta_i - dv_{ov}\sin\theta_i - V_\perp\cos\theta_i\right] \\ & -\sin\Omega_i\cos I_i \left[dv_{rv}\sin\theta_i + V_r\cos\theta_i + dv_{ov}\cos\theta_i - V_\perp\sin\theta_i\right] \\ \sin\Omega_i & \left[dv_{rv}\cos\theta_i - V_r\sin\theta_i - dv_{ov}\sin\theta_i - V_\perp\cos\theta_i\right] \\ & +\cos\Omega_i\cos I_i \left[dv_{rv}\sin\theta_i + V_r\cos\theta_i + dv_{ov}\cos\theta_i - V_\perp\sin\theta_i\right] \\ \sin I_i & \left[dv_{rv}\sin\theta_i + V_r\cos\theta_i + dv_{ov}\cos\theta_i - V_\perp\sin\theta_i\right] \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{\gamma}}_i}{\partial m_i} = \begin{pmatrix} \cos\Omega_i \left[dv_{rm}\cos\theta_i - dv_{om}\sin\theta_i\right] - \sin\Omega_i \cos I_i \left[dv_{rm}\sin\theta_i + dv_{om}\cos\theta_i\right] \\ \sin\Omega_i \left[dv_{rm}\cos\theta_i - dv_{om}\sin\theta_i\right] - \cos\Omega_i \cos I_i \left[dv_{rm}\sin\theta_i + dv_{om}\cos\theta_i\right] \\ \sin I_i \left[dv_{rm}\sin\theta_i + dv_{om}\cos\theta_i\right] \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{\gamma}}_i}{\partial M_i} = \begin{pmatrix} \cos\Omega_i \left[dv_{rM}\cos\theta_i - dv_{oM}\sin\theta_i\right] - \sin\Omega_i \cos I_i \left[dv_{rM}\sin\theta_i + dv_{oM}\cos\theta_i\right] \\ \sin\Omega_i \left[dv_{rM}\cos\theta_i - dv_{oM}\sin\theta_i\right] - \cos\Omega_i \cos I_i \left[dv_{rM}\sin\theta_i + dv_{oM}\cos\theta_i\right] \\ \sin I_i \left[dv_{rM}\sin\theta_i + dv_{oM}\cos\theta_i\right] \end{pmatrix} \quad (4.83)$$

Il ne nous reste alors plus qu'à reconstituer la matrice T de la forme :

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial X_P}{\partial a_P} & \dots & \frac{\partial X_P}{\partial v_P} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial V_{XP}}{\partial a_P} & \dots & \frac{\partial V_{XP}}{\partial v_P} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial V_{XP}}{\partial m_P} & \dots & \frac{\partial V_{XP}}{\partial m_H} \\
\frac{\partial X_P}{\partial a_P} & \dots & \frac{\partial X_P}{\partial v_P} & \frac{\partial x_C}{\partial a_C} & \dots & \frac{\partial x_C}{\partial v_C} & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial V_{XP}}{\partial a_P} & \dots & \frac{\partial V_{XP}}{\partial v_P} & \frac{\partial vx_C}{\partial a_C} & \dots & \frac{\partial vx_C}{\partial v_C} & \dots & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial V_{XC}}{\partial m_P} & \dots & \frac{\partial V_{XC}}{\partial m_H} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial V_{XP}}{\partial a_P} & \dots & \frac{\partial V_{XP}}{\partial v_P} & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{\partial vx_H}{\partial a_H} & \dots & \frac{\partial vx_H}{\partial v_H} & \frac{\partial V_{XH}}{\partial m_P} & \dots & \frac{\partial V_{XH}}{\partial m_H} \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \tag{4.84}$$

Nous venons d'écrire explicitement l'ensemble des termes de nos équations variationnelles et des transformations effectuées. Pour obtenir les coefficients nécessaires à l'inversion par moindres carrés, nous devons maintenant intégrer les équations variationnelles obtenues (équation 4.14).

4.3.3 Intégration des équations variationnelles

Nous avons conçu notre programme pour qu'il intègre simultanément les équations variationnelles et les équations du mouvement. Dans le cas du système de Pluton, où nous nous limitons dans un premier temps à l'ajustement des éléments elliptiques initiaux et des masses, cela représente 336 équations supplémentaires. De manière à s'assurer de la validité de ces équations, nous allons utiliser une valeur approchée de leur solution et la comparer à notre valeur calculée.

En réutilisant les notations du chapitre précédent, par définition, pour un réel ϵ, pour la fonction f^i décrivant le mouvement du corps i, et pour une constante c_k dont dépend ce mouvement :

$$\frac{\partial f^i}{\partial c_k} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f^i(t_l, c_1, \dots c_k + \epsilon, \dots, c_{6N+N'}) - f^i(t_l, c_1, \dots c_k, \dots, c_{6N+N'})}{\epsilon} \tag{4.85}$$

Nous allons utiliser cette relation que l'on considérera valable pour une valeur de ϵ faible devant la valeur de la constante par rapport à laquelle on dérive. Avec une valeur finie de ϵ, les termes d'ordre 2 peuvent ne pas vraiment être négligeables. Pour éliminer les termes d'ordre 2, et donc obtenir une meilleure approximation de la dérivée, nous allons utiliser la relation :

$$f^i(\dots, c_k + \epsilon, \dots) - f^i(\dots, c_k - \epsilon, \dots) = 2\epsilon \frac{\partial f^i}{\partial c_k} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{4.86}$$

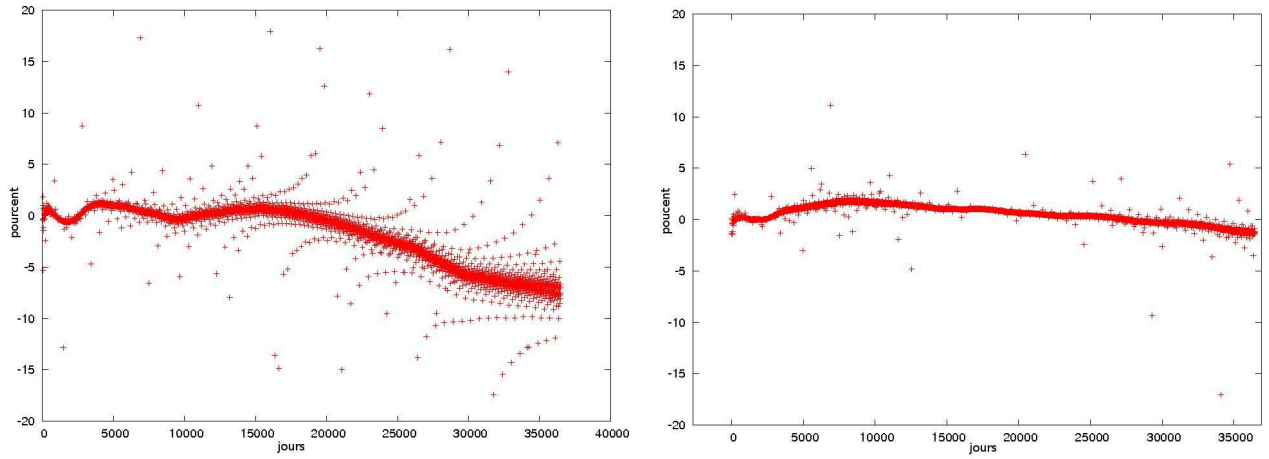

Figure 4.1 – Écart relatif en pourcentage pour $\partial X_C/\partial m_P$, entre une approximation à l'ordre 1 (équation 4.85) et l'intégration des équations variationnelles, puis entre une approximation à l'ordre 2 (équation 4.86) et l'intégration des équations variationnelles pour $\Delta m_P / m_P = 10^{-7}$.

Il nous suffit alors, pour vérifier les dérivées par rapport à une constante, d'effectuer deux intégrations numériques, où l'une présente une variation $-\epsilon$ et l'autre $+\epsilon$ sur le paramètre c_k, et de vérifier l'écart entre la valeur que l'on obtient et celle donnée par l'intégration des équations variationnelles. La figure 4.1 montre cet écart en pourcentage pour la dérivée de la coordonnée suivant l'axe X de Charon par rapport à la masse de Pluton. Cette figure montre également la valeur approchée de cette dérivée obtenue avec l'équation 4.85. Les différences entre les deux proviennent des termes d'ordre 2 en ϵ.

Cette méthode a été appliquée pour vérifier la validité des équations partielles pour chacun des paramètres à ajuster de notre modèle. Nous retrouvons toujours des écarts de l'ordre du pourcentage entre la valeur des dérivées partielles obtenues par différences centrées et celle des dérivées obtenues par intégration.

Chapitre 5

Observations simulées et paramètres estimables

Sommaire

5.1 Principe 69
5.2 Discrimination des paramètres estimables 70
5.2.1 Secondes harmoniques du champ de gravité 70
5.2.2 Masses de Nix et Hydra 73
5.3 Fonction de sensibilité 77
5.4 Évolution de la précision des masses 78
5.4.1 Dates des simulations 79
5.4.2 Résultats 81

Avant d'ajuster notre modèle aux observations du système de Pluton proprement dites, nous devons en premier lieu déterminer les paramètres que nous allons pouvoir ajuster. Cette étape nous permet d'économiser du temps de calcul, les équations variationnelles étant moins nombreuses, mais aussi d'avoir une meilleure précision statistique sur les paramètres estimables comme il sera montré plus tard. Cette partie a été reprise dans l'article Beauvalet et al. (2012b). L'apport de la mission spatiale Gaia est abordé dans l'article Beauvalet et al. (2012a).

5.1 Principe

Notre but est de déterminer les paramètres du système que nous pouvons évaluer avec confiance avec notre modèle. Le doute porte ici sur les coefficients des secondes harmoniques sphériques de Pluton et Charon qui n'ont encore jamais été estimées, et sur les masses de Nix et Hydra, dont l'incertitude dans Tholen et al. (2008) est suffisamment importante par rapport aux masses elles-mêmes pour que l'on redoute qu'il s'agisse d'artefacts numériques plus que d'une détection effective.

Avant de poursuivre plus avant, rappelons quelques notions. Considérons des observations d'un objet prises à des intervalles de temps courts par rapport au déplacement de notre cible sur le CCD. La mesure des positions de notre cible aura une certaine dispersion autour d'une valeur moyenne. Cette dispersion sera la valeur de notre précision/incertitude. Cette notion est liée aux erreurs aléatoires qui entachent nos

mesures. Supposons que le catalogue astrométrique utilisé pour la réduction des images présente des erreurs dans la zone du ciel qui nous intéresse. Alors la valeur moyenne de nos observations sera éloignée de la valeur qu'elle devrait avoir si notre catalogue était exact. Cet écart entre la valeur moyenne des observations et la valeur *réelle* que l'on devrait obtenir est l'exactitude de notre mesure, l'exactitude sera affectée par les erreurs systématiques. Ainsi, il est possible d'avoir une idée de la précision des observations astrométriques si l'on dispose d'un nombre suffisant d'entre elles, mais l'exactitude est bien plus difficile à déterminer étant donné que nous ignorons tout de la valeur réelle que nous devrions avoir *a priori* .

En raison de la grande distance entre Pluton et la Terre, l'incertitude des observations rapportée en kilomètres est très grande (10 mas est équivalent à environ 200 km). Cette incertitude va nous empêcher de détecter des effets ayant une influence trop faible sur la dynamique du système. De plus, des causes physiques différentes peuvent avoir des effets en partie similaires. Par exemple, l'aplatissement polaire au second ordre, J_2, va provoquer une avance sur la longitude du corps influencé, un effet qui peut aussi être causé par une masse plus importante du corps aplati. Dans le cas où l'orbite de l'autre corps a une inclinaison et une excentricité nulles, il est impossible de distinguer les deux cas. Les deux paramètres, J_2 et la masse du primaire, vont alors se retrouver corrélés. Dans le cas du système de Pluton, les satellites ont une inclinaison très faible sur son équateur, d'où le doute sur la détermination des J_2 de Pluton et Charon (puisque l'on suppose que leurs pôles de rotation ont la même orientation). À cause de cette situation, il nous faut déterminer la part de l'influence de ces paramètres qui ne peut pas être absorbée en changeant les autres paramètres du système.

Pour ce faire, nous allons travailler avec des observations simulées par notre modèle. Considérons un paramètre dont l'on souhaite savoir s'il peut être déterminé. Nous allons créer un jeu d'observations simulées prenant en compte cet effet. Nous ajusterons ensuite, sur ces données simulées, une version de notre modèle qui ne prend pas en compte l'effet en question et que nous n'ajusterons pas. Nous obtiendrons une solution qui nous donne un écart minimum par rapport aux simulations. Il nous restera alors à comparer cet écart avec la précision des observations (cf figure 5.1). Notre but étant d'essayer de savoir si nous devons prendre en compte certains effets dans notre modèle dans le cas où ils seraient les plus faciles à détecter, nous n'avons donc pas pris en compte les paramètres qui allaient présenter les plus fortes corrélations avec les paramètres à tester. Les aplatissements dynamiques étant corrélés aux masses, de même que les masses des deux plus petits satellites sont certainement corrélées entre elles et avec celle de Pluton et Charon, nous n'ajusterons que les positions-vitesses initiales de Pluton et de ses satellites, mais pas leurs masses.

5.2 Discrimination des paramètres estimables

5.2.1 Secondes harmoniques du champ de gravité

Nous allons appliquer la démarche présentée ci-dessus aux coefficients J_2 et c_{22} de Pluton et Charon. L'influence de ces coefficients sera essentiellement visible dans la précession de l'orbite des satellites (cf 3.2.4). D'après l'équation 3.34, on peut voir que l'effet sera

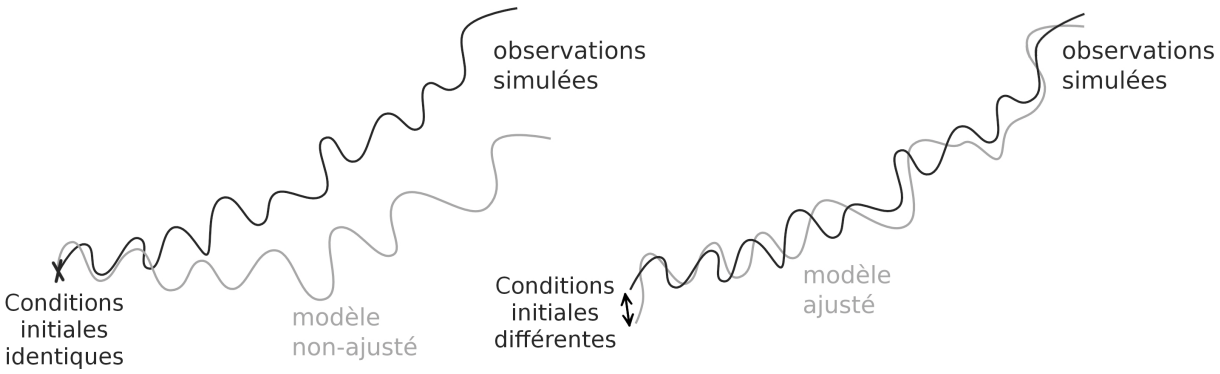

Figure 5.1 – Principe de la détermination de l'influence d'un paramètre

d'autant plus important que la distance entre les corps sera faible et leur trajectoire excentrique. La précession étant un effet séculaire, elle sera d'autant plus détectable que la période d'observation sera grande. Cet effet devrait donc se voir principalement sur la trajectoire de Charon, le satellite qui est le plus proche de Pluton.

En ce qui concerne Nix et Hydra, rappelons que Charon lui-même agit comme une sorte d'aplatissement supplémentaire. Par conséquent, il est possible que l'effet de l'aplatissement de Pluton et Charon puisse ne pas être visible, étant largement dominé par la masse de Charon, un paramètre généralement libéré lors de l'ajustement.

La découverte de Charon date de 1978, mais les premières observations résolues du système sont des observations speckle en 1985 (Baier and Weigelt, 1987). Malgré tout, nous avons simulé des données sur trente ans, ce qui correspond à la durée qui sépare les observations speckle des futures observations faites par New Horizons. Nous avons simulé les positions cartésiennes des quatre corps du système de Pluton considérés, avec un pas de dix jours entre chaque observation. Cet échantillonnage est très dense même si sa période est supérieure à celle de la révolution orbitale de Charon. Il n'est pas nécessaire d'avoir un pas d'échantillonnage encore inférieur dans notre cas, l'aplatissement agissant principalement comme une avance en longitude des satellites. Son effet se verra donc principalement sur le long terme, et non sur une période. Les valeurs des coefficients J_2 et c_{22} pour Pluton et Charon sont celles données dans la partie 3.1.2.

À ces observations simulées, nous avons ajusté une version de notre modèle qui ne prend pas en compte les harmoniques du champ de gravité. Les seuls paramètres ajustés sont les positions et vitesses initiales en coordonnées cartésiennes, nous n'ajustons ni les masses, ni les aplatissements. Les résidus post-ajustement en distance sont représentés en kilomètres sur la figure 5.2

Les résidus sont au plus de 17 km pour Pluton, 14 km pour Charon et Hydra, et 10 km pour Nix. Une fois ramené à la distance entre Pluton et la Terre, cela signifie un écart de 0.6 mas sur le ciel pour les satellites, et 0.75 mas pour Pluton. Les résidus ont un comportement globalement linéaire à l'exception d'Hydra. Pour Nix et Hydra, on ne dispose pas de trente années d'observations. Une fois ramené à un intervalle de 8 ans (les observations de prédécouverte datent de 2002-2003 (Buie et al., 2006)), on peut

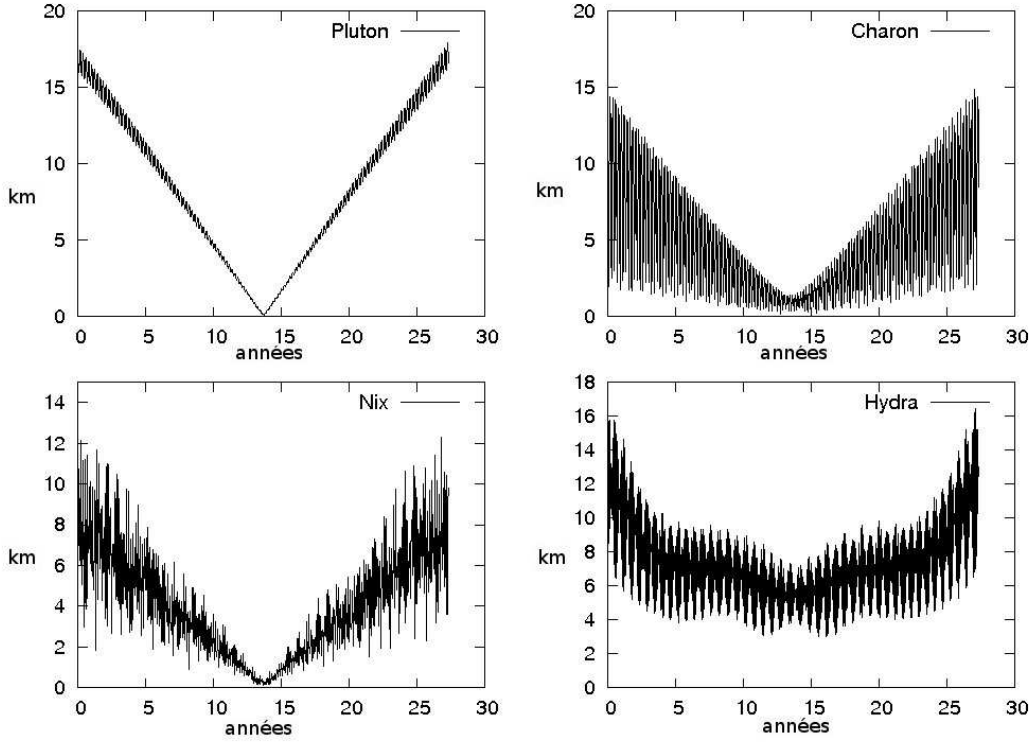

Figure 5.2 – Résidus post-ajustement d'un modèle sans les J_2 et c_{22} de Pluton et Charon ajusté à des observations simulées prenant en compte une valeur non-nulle de ces paramètres. Seules les positions et vitesses initiales ont été ajustées.

voir que l'effet n'atteint au plus que quatre kilomètres, soit 0.2 mas, un effet totalement indétectable lorsque l'on considère que les incertitudes sur la position atteignent environ une dizaine de mas pour ces satellites.

Pour une présentation détaillée des différentes observations de Pluton et ses satellites, on pourra se référer au chapitre 6.

Si l'on considère les plus anciennes observations de Charon de 1985, leur précision est estimée à environ 80 mas. En ce qui concerne les observations du Hubble Space Telescope, la précision atteint 3 mas. Les toutes dernières observations de Charon obtenues à l'aide du Hubble Space Telescope sont sans doute plus précises, mais cette précision ne devrait pas se trouver fortement modifiée. La mauvaise précision des observations anciennes nous empêcherait de détecter cet effet de 0.3 mas sur 30 ans, surtout si l'on prend en compte le fait qu'il n'y a aucune autre observation de Charon avant les observations de 1992 par Hubble (Tholen and Buie, 1997). Il est donc impossible à l'heure actuelle de déterminer les aplatissements dynamiques de Pluton et Charon par l'astrométrie.

Apport de New Horizons

En ce qui concerne la mission New Horizons, la précision des observations astrométriques prises par la sonde ne sera équivalente à celles du Hubble Space Telescope que quelques jours avant la traversée du système. Nous n'aurons donc des observations avec une précision supérieure à celle de Hubble que sur une très courte période. On peut ajouter à cela le fait que la détermination du centre de masse de Charon et Pluton ne

sera pas précise au pixel près. Or, l'effet de l'aplatissement est essentiellement un effet à longue période, il nous faudrait donc une précision de cet ordre sur un intervalle de temps plus grand. On peut en déduire que l'étude astrométrique des images de New Horizons ne nous permettra pas de déterminer les harmoniques du second ordre des champs de gravité de Pluton et Charon.

5.2.2 Masses de Nix et Hydra

Les masses de Pluton et Charon sont connues à quelques pour cent près, ce qui est très loin d'être le cas pour Nix et Hydra (cf Table 1.1). L'incertitude sur les masses étant pratiquement égale aux masses pour ces deux petits satellites, nous nous sommes intéressé aux perturbations mutuelles qu'ils exercent l'un sur l'autre.

Hydra

Pour ce faire, nous avons utilisé la même méthode que précédemment et avons simulé des observations du système où Nix et Hydra ont les masses obtenues dans Tholen et al. (2008). Les observations de pré-découverte de Nix et Hydra datent de 2002-2003 (Buie et al., 2006), par conséquent, nous avons simulé huit ans de données de manière à savoir si nous pouvions détecter les masses à partir des données actuelles. Nous avons alors ajusté une version de notre modèle où la masse d'Hydra est nulle en ne corrigeant que les positions et vitesses initiales cartésiennes des quatre corps. Cette méthode nous permet de savoir si l'effet d'Hydra sur Nix peut être absorbé en jouant simplement avec les positions des corps. Les résidus post-ajustement sont donnés dans la figure 5.3

Les résidus faibles pour Pluton et Charon sont dus à la faible influence qu'Hydra exerce sur leurs trajectoires. Les faibles résidus d'Hydra s'expliquent par le fait que le champ de gravité qu'il subit reste largement "inchangé" (Pluton+Charon+Nix). La principale influence s'exerçant sur Hydra étant celle de Pluton et Charon, le faible changement de la trajectoire de ces derniers n'affecte que faiblement son orbite. De plus, même si la position de Nix est légèrement modifiée, la force qu'il exerce sur Hydra reste proche de celle qu'il exerçait avant. Les résidus obtenus pour Nix sont beaucoup plus importants, avec une valeur moyenne de 40 km, ce qui équivaut à 2 mas (dus justement à la disparition de l'influence d'Hydra). Les positions astrométriques obtenues des images de pré-découverte en 2002-2003 ont une précision astrométrique estimée à 15 et 9 mas respectivement pour Nix et Hydra (Buie et al., 2006).

Nous aurons donc dans les résidus un effet de 2 mas sur 8 ans de données qu'il faut distinguer d'un bruit de 9 mas. Un tel effet devrait être détectable. Néanmoins, notre simulation utilise un grand nombre d'observations simulées réparties régulièrement. Dans la réalité, on ne dispose que d'un nombre très limité d'observations. Si l'on dispose de trop peu d'observations, l'incertitude dont elles sont dotées peut empêcher la détection de la masse d'Hydra.

Deux facteurs peuvent alors favoriser une possible détection de la masse : l'augmentation du nombre d'observations et l'amélioration de la précision astrométrique. En ce qui concerne l'augmentation du nombre de données disponibles, de nouvelles observations du système sont attendues pour préparer l'arrivée de New Horizons. Par contre, la précision des observations astrométriques des satellites ne devrait pas s'améliorer significativement, les observations actuelles utilisant déjà les meilleurs moyens technologiques disponibles

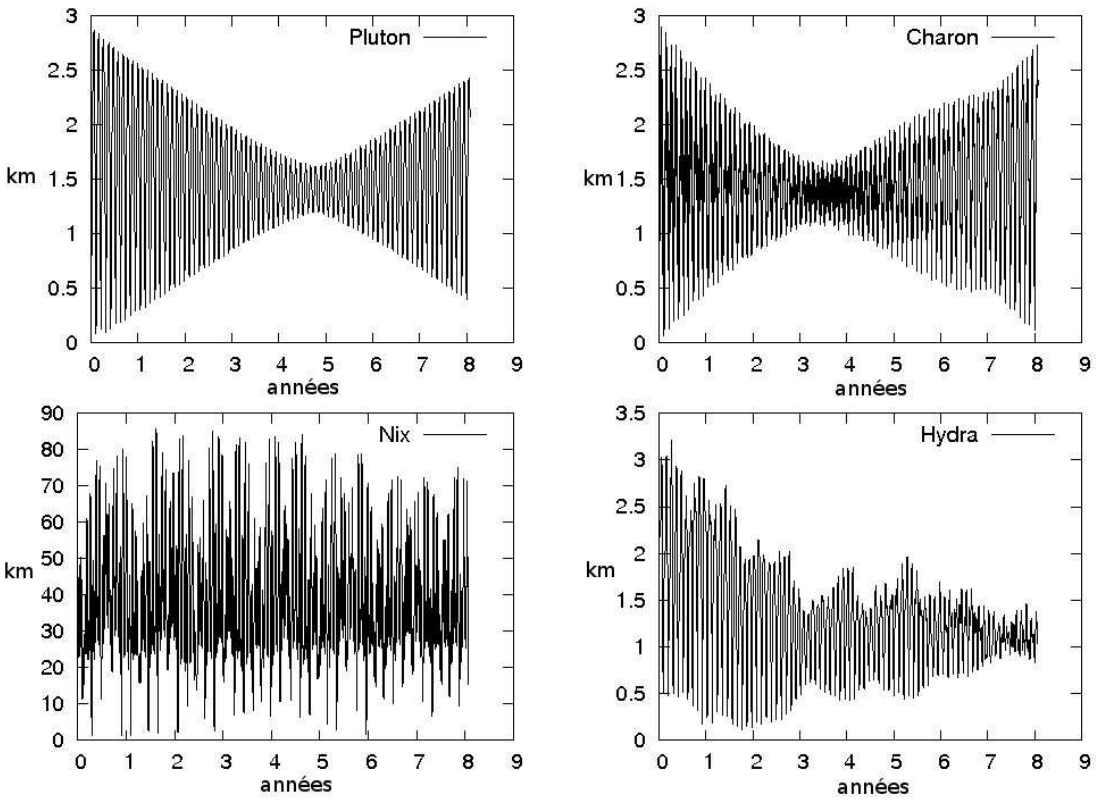

Figure 5.3 – Résidus de l'ajustement d'un modèle où la masse d'Hydra est nulle sur des observations simulées où $GM_4 = 0.021 \pm 0.042 \mathrm{km}^3\mathrm{s}^{-2}$. Seules les positions et vitesses initiales des quatre corps ont été ajustées.

(Hubble Space Telescope et grands télescopes munis d'optique adaptative). La détection de la masse de l'objet estimé comme étant actuellement le moins massif du système semble donc assez difficile.

Nix

Penchons-nous alors sur le cas de Nix. Aux observations simulées utilisées précédemment, nous avons ajusté une version de notre modèle pour lequel la masse de Nix est nulle, et pour lequel nous n'ajustons que les positions et vitesses initiales. Les résidus obtenus après ajustements sont présentés dans la figure 5.4.

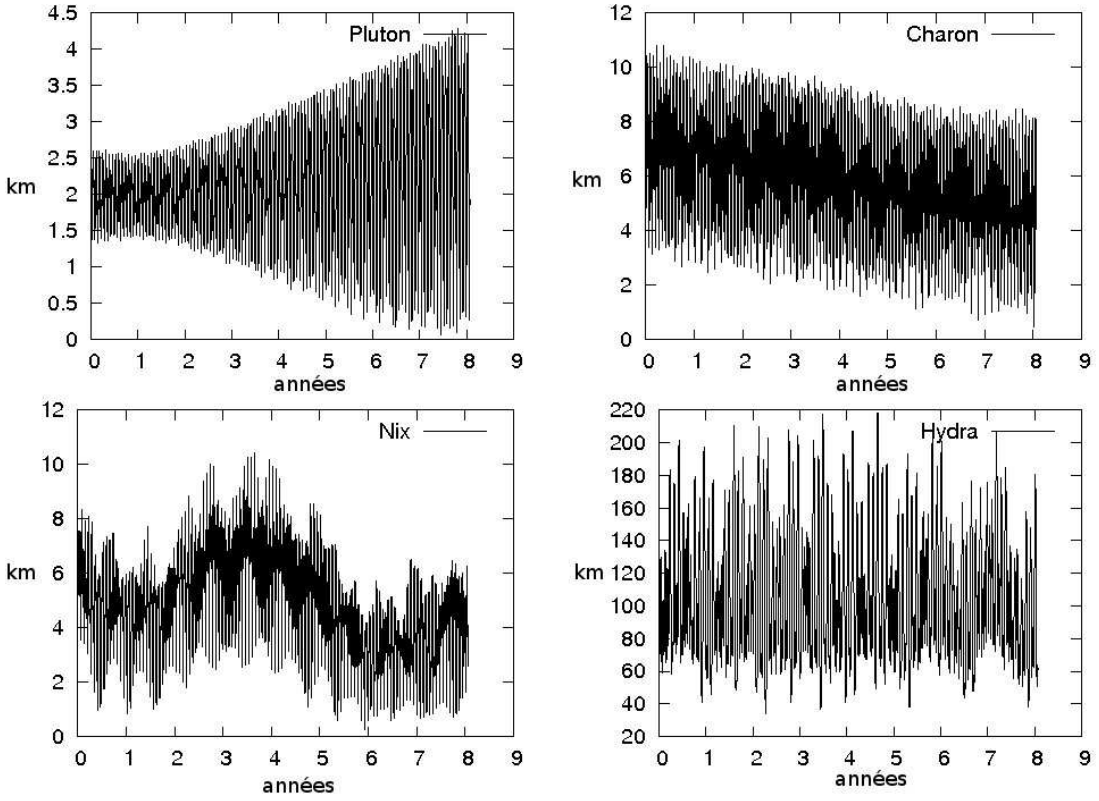

Figure 5.4 – Résidus de l'ajustement d'un modèle où la masse de Nix est nulle sur des observations simulées où $GM_3 = 0.039 \pm 0.034 \mathrm{km}^3\mathrm{s}^{-2}$. Seules les positions et vitesses initiales ont été ajustées.

Tout comme précédemment, les résidus pour Pluton, Charon et l'objet de masse nulle sont très faibles. Les résidus obtenus sur Hydra sont par contre en moyenne plus élevés que ceux obtenus dans le cas précédent. On peut remarquer que l'estimation de la masse de Nix est environ deux fois plus grande que l'estimation de celle d'Hydra, et qu'il en est de même des résidus occasionnés. La précision des positions astrométriques de Nix est légèrement meilleure que celle d'Hydra et les résidus post-ajustement plus importants pour la figure 5.4 que pour la figure 5.3. Nous avons donc une incertitude plus faible et un effet plus fort. On peut donc penser ici que l'influence de la masse de Nix peut être plus facilement détectée que celle d'Hydra.

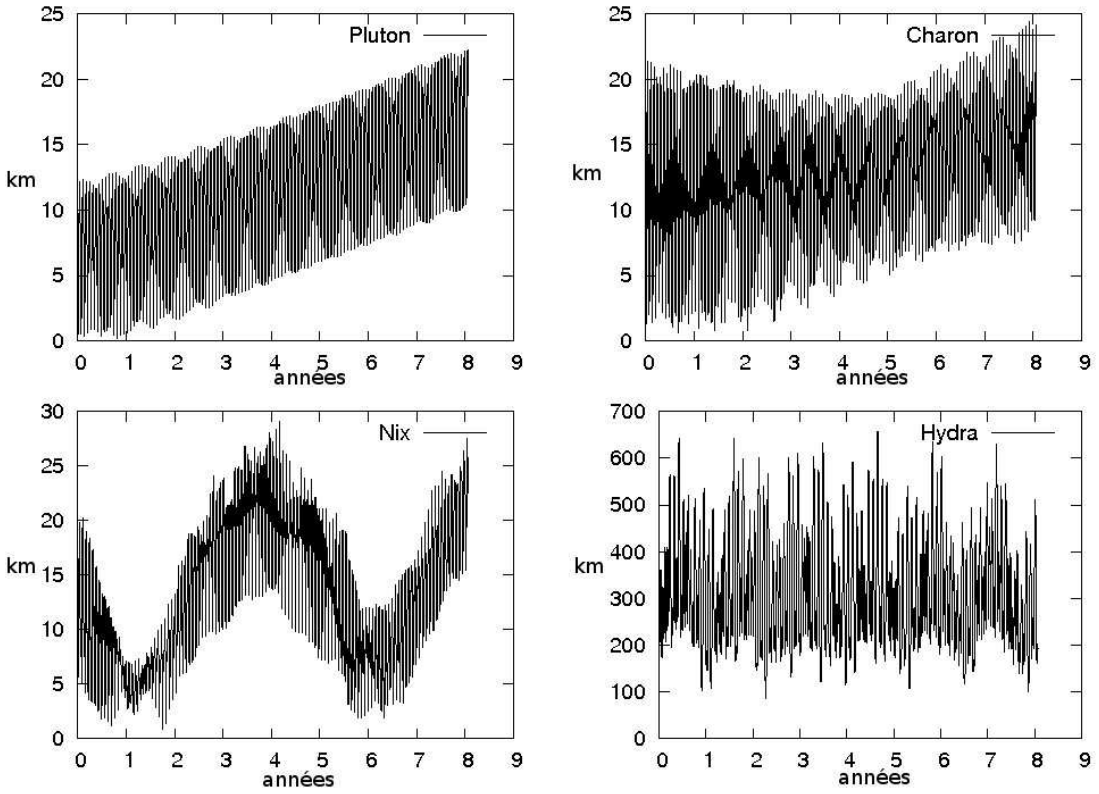

Figure 5.5 – Résidus de l'ajustement d'un modèle où la masse de Nix est nulle sur des observations simulées où $GM_3 = 0.107 \pm 0.034 \mathrm{km}^3\mathrm{s}^{-2}$. Seules les positions et vitesses initiales ont été ajustées.

Influence des incertitudes des masses sur les résidus

Comme le montrent les figures 5.3 et 5.4, la masse des satellites va avoir une certaine influence sur la taille des résidus. Le problème dans notre cas est que les masses de Nix et Hydra ne sont que faiblement contraintes. À cause de cela, les masses pourraient être largement supérieures à leurs estimations actuelles, sans toutefois atteindre l'ordre de grandeur de Charon, auquel cas leur influence aurait été assez forte pour qu'on les détecte effectivement et que l'incertitude relative les concernant soit raisonnable.

De manière à quantifier l'influence de la masse sur les résidus dans le cas où les masses ont des valeurs extrémales, nous avons utilisé la même méthode que précédemment, mais en simulant des observations pour lesquelles on considère que la masse de Nix est 2-σ plus élevée que son estimation, ce qui revient à la multiplier environ par trois. Par la suite, nous avons ajusté une version du modèle où la masse de Nix est nulle et pour laquelle nous n'ajustons que que les positions et vitesses initiales. Les résidus post-fit sont présentés dans la figure 5.5.

On peut voir que les résidus obtenus sont trois fois plus grands que précédemment, tout comme la masse de Nix utilisée. En considérant les incertitudes à 2-σ des masses, on obtient donc un effet de 12 mas pour la masse de Nix, et de 10 mas pour la masse de Hydra. Dans ces cas extrêmes, le nombre d'observations serait une difficulté moins importante. Mais, au contraire, si les masses devaient être plus faibles que celles déjà obtenues, l'effet des masses deviendrait encore plus difficile à obtenir, et le nombre

d'observations disponibles deviendrait le principal problème pour détecter les masses. Malheureusement, les estimations actuelles des masses donnent des effets qui sont à la limite de ce que l'on peut détecter avec la précision actuelle des positions astrométriques des objets du système, et que les observations ne sont pas du tout aussi nombreuses et régulières que ne le sont nos simulations. Néanmoins, l'effet des masses sera de plus en plus visible avec le temps, d'où une détection plus facile à l'avenir.

Les corrélations entre les masses seront probablement une difficulté supplémentaire à la détection effective des masses du système, mais pour résoudre ce point, il nous faut ajuster l'ensemble des paramètres à des observations simulées à des dates réalistes. Avant de traiter ce problème plus en détails, nous allons tenter de déterminer s'il existe des configurations particulières du système pour lesquelles le modèle est très sensible aux masses, configurations qui pourraient alors être utiles pour déterminer des instants privilégiés d'observations.

5.3 Fonction de sensibilité

Il existe dans certains systèmes de satellites des rencontres proches entre satellites, phénomènes qui permettent de déterminer les masses avec une plus grande précision (Emelyanov, 2005). Il n'existe pas de rencontres proches dans le cas du système de Pluton, mais il peut exister des instants où les interactions entre satellites sont suffisantes pour améliorer la précision des masses. Pour déterminer si de tels instants existent, nous allons utiliser la même approche que dans Emelyanov (2005) pour Himalia, un satellite irrégulier de Jupiter, et utiliser la fonction de sensibilité. La fonction de sensibilité est en fait la dérivée de la position d'un objet par rapport à un paramètre donné. Dans le cas d'une rencontre proche, la position d'un objet sera davantage modifiée par la masse de celui avec lequel a lieu la rencontre, la dérivée de la position par rapport à la masse sera alors plus importante à cet instant, et donc la détermination de la masse sera plus précise.

De manière générale, pour un objet i et une masse m_j dont on cherche à déterminer l'influence, la fonction de sensibilité sera de la forme :

$$\Phi_{m_j}^{(i)}(t) = m_j \sqrt{\left(\frac{\partial X_i}{\partial m_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial m_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_i}{\partial m_j}\right)^2} \tag{5.1}$$

où t est l'instant d'observation et (X_i, Y_i, Z_i) les coordonnées cartésiennes de l'objet i. Nous avons calculé la valeur de cette fonction toutes les cinq heures. La figure 5.6 montre l'évolution de la fonction de sensibilité associée aux positions de Charon et Hydra en fonction de la masse de Nix, et la figure 5.7 montre la fonction de sensibilité associée aux positions de Charon et Nix en fonction de la masse d'Hydra. Aucune de ces fonctions ne présente de comportement remarquable, si ce n'est des oscillations autour d'une valeur moyenne qui croît au cours du temps qui s'explique tout simplement comme l'effet de la masse de plus en plus marqué au cours du temps. On peut remarquer que l'amplitude des oscillations est cohérente avec les valeurs des masses de Nix et Hydra (c'est-à-dire que les oscillations de la fonction de sensibilité de Hydra sont environ deux fois plus grandes que celles de la fonction de sensibilité de Nix). Ces figures sont comparables aux résidus pré-ajustement que l'on obtient lors de la méthode développée en 5.2.2, les faibles différences

entre les deux cas de figure venant du fait que l'équation 5.1 ne prend en compte que le premier terme du développement.

Il n'y a donc pas exactement de moment fortement privilégié comme un rapprochement significatif entre Nix et Hydra. Toutefois, il est possible d'utiliser ces fonctions pour étudier quand a lieu le maximum des oscillations dès que notre modèle aura été ajusté aux observations. Par ailleurs, une première analyse en fréquence ne nous a pas montré de relation simple entre la période de ces oscillations et l'une des périodes du système.

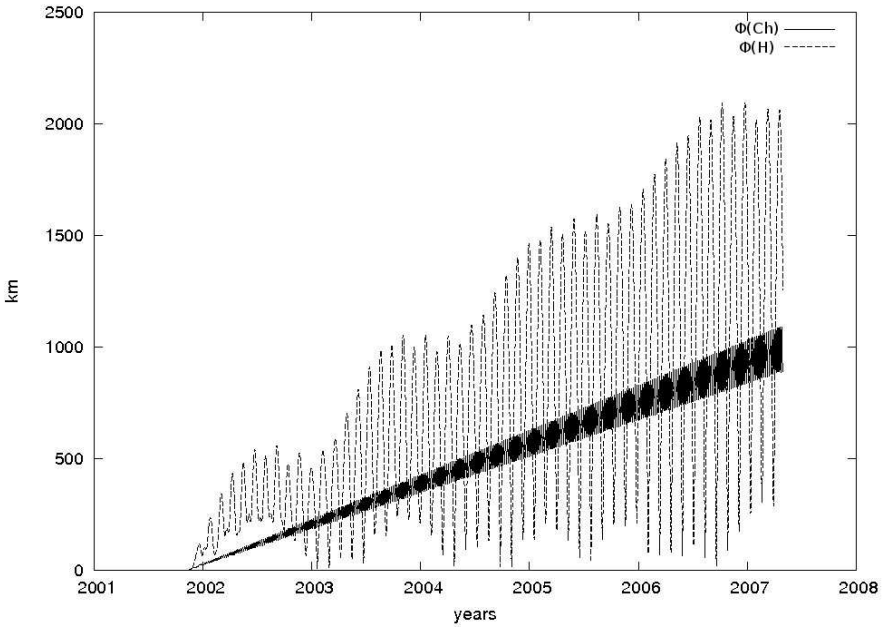

Figure 5.6 – Fonction de sensibilité des positions de Charon et Hydra par rapport à la masse de Nix.

Enfin, la fonction de sensibilité ne permet pas de prendre en compte les corrélations existant entre paramètres. Par conséquent, nous ne pouvons utiliser telles quelles ces fonctions pour quantifier l'effet que les masses de Nix et Hydra auront sur la dynamique des autres objets du système au cours du temps. Pour cela, il nous faut faire un ajustement complet de tous les paramètres que l'on cherche à déterminer (pour le système de Pluton : les masses et les positions-vitesses initiales de tous les corps du système).

5.4 Évolution de la précision des masses

Comme dit précédemment, les masses actuellement données par Tholen et al. (2008) peuvent être quantifiées avec certitude si le nombre d'observations est suffisant. Mais il nous faut maintenant déterminer si nous pouvons effectuer cette quantification à partir des observations actuelles, c'est-à-dire comparer la valeur de l'incertitude que l'on obtient et celle des masses. Nous nous intéresserons également à la manière dont ces incertitudes vont évoluer grâce à l'augmentation des observations du système à l'avenir.

Pour cela, nous allons utiliser des observations simulées, comme précédemment, mais nous allons ici simuler des observations aux instants des observations existantes et/ou des observations futures du système. Nous ajusterons ensuite notre modèle à ces simulations

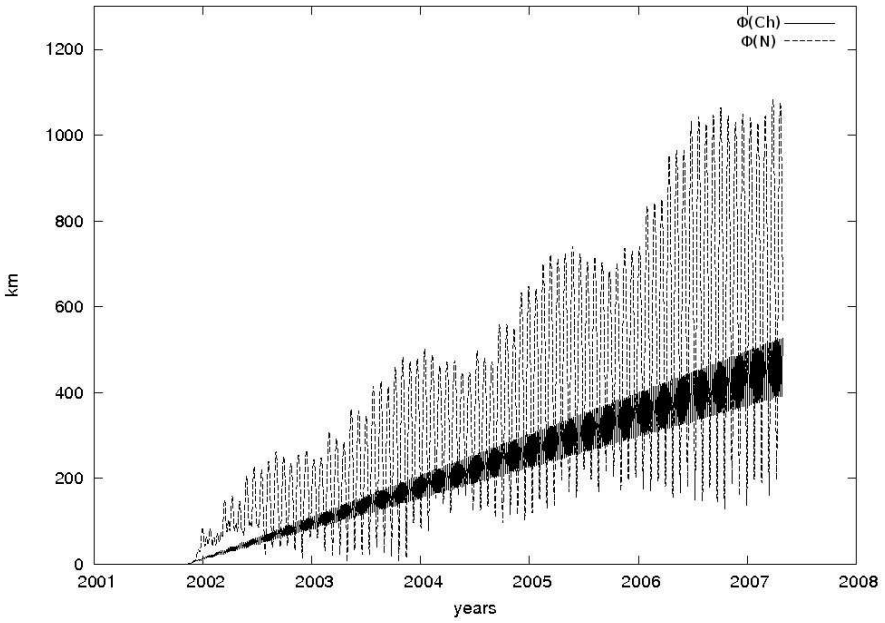

Figure 5.7 – Fonction de sensibilité des positions de Charon et Nix par rapport à la masse de Hydra.

en ajustant les masses et les positions et vitesses initiales, et obtiendrons de cet ajustement l'incertitude statistique à 1-σ donnée par les moindres carrés.

En ajustant tous les paramètres ensemble, les incertitudes liées aux corrélations et à la précision des observations vont apparaître. Comme nous étudions les masses du systèmes, nous ne simulerons des données que pour les observations des satellites, pas pour les observations absolues du système. Les observations simulées sont à présent en coordonnées équatoriales relatives à Pluton $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$, de manière à se rapprocher davantage d'un ajustement à des données réelles avec la perte d'une dimension et donc de nombreuses informations. Le but de notre démarche est uniquement d'étudier la précision des masses que l'on peut espérer obtenir à l'aide de notre modèle et des observations actuelles et futures, c'est la raison pour laquelle nous travaillons ici avec des observations simulées. En effet, l'incertitude donnée par les moindres carrés ne dépend que de la précision des observations, des corrélations entre les paramètres, et des dérivées partielles. Elle n'est donc que faiblement dépendante de la solution donnée par les moindres carrés. L'avantage principal de l'utilisation d'observations simulées est que nous n'avons pas à nous soucier d'éventuels soucis de convergence des moindres carrés associés à des observations aberrantes.

5.4.1 Dates des simulations

Observations au sol et HST

Nous avons utilisé les dates des observations de pré-découverte de Nix et Hydra (Buie et al., 2006), qui regroupent aussi des observations de Charon aux mêmes instants. Nous avons utilisé aussi les dates des images de la découverte de Nix et Hydra (Weaver et al., 2005), de l'observation de Charon et Hydra effectuée au VLT (Sicardy et al., 2006a), et enfin celles des premières observations de Charon effectuées par le Hubble Space Telescope

(Tholen and Buie, 1997). En ce qui concerne les futures observations du système que l'on espère, nous avons supposé que le système serait observé une dizaine de fois tous les ans aux alentours de l'opposition de Pluton, jusqu'à l'arrivée de la sonde New Horizons. Nous avons attribué à ces observations les mêmes incertitudes que celles de Buie et al. (2006), c'est à dire 3 mas pour Charon, 9 mas pour Nix, et 15 mas pour Hydra.

Normalement, les incertitudes astrométriques liées à un objet diminuent avec le temps, essentiellement en raison de l'ajustement des temps de pose, surtout si l'on considère que les futures observations auront été faites spécifiquement pour observer Nix et Hydra. Néanmoins, les incertitudes liées aux positions des satellites ont augmenté dans Tholen et al. (2008), alors qu'il s'agissait des mêmes observations. De plus, la taille du pixel des observations non-publiées est plus grande que celle issue des observations publiées.

Notons que les données du cycle 15 du Hubble Space Telescope n'ont pas été simulées. La raison première est que ces données n'ont toujours pas été publiées. Toutefois un jeu d'observations supplémentaire ne devrait pas modifier nos conclusions. Enfin, à la place des observations du cycle 17 effectué en 2010, nous avons simulé une dizaine d'observations, quand en réalité une douzaine ont été effectuées (Tholen et al., 2010). Pour information, l'ensemble des dates considérées dans cette partie est donné en Annexe A.

New Horizons

Les données de New Horizons ont été simulées à partir du planning prévisionnel provisoire donné par R. P. Binzel (Young et al., 2008, 2010) fournissant également la précision des observations. Nous avons simulé une possible extension de la mission en effectuant le symétrique de la fin de la phase d'approche de manière à connaître l'apport d'une possible extension. Seuls Nix et Hydra sont observés pendant cette partie de la mission. Une des difficultés qui se pose alors est la précision de la détermination des centres de masses des satellites. En effet, au moment où la sonde sera la plus proche du système, les satellites occuperont une grande part du champ, le centre de masse ne sera probablement pas connu au pixel près. Le diamètre estimé de Nix et Hydra est d'au plus 80 km, il est donc fortement probable que ces deux objets ne soient pas de forme ellipsoïdale. De plus, la présence possible de cratères aux limbes peut encore perturber la détermination du centre des objets.

En prenant le cas de l'observation des satellites de Mars par la sonde Mars Express comme référence (Oberst et al., 2006), l'incertitude sur le centre de figure de Deimos est un sixième de rayon, et 500 mètres sur Phobos (environ un vingtième). Pour la sonde New Horizons, les satellites seront plus sombres que dans le cas martien, d'où des temps de pose plus longs et peut-être quelques étoiles de champ à côté des satellites, tout ceci améliorerait ainsi la précision astrométrique des images par rapport à Mars Express. Malgré tout, par précaution, nous avons utilisé la valeur, sans doute légèrement pessimiste, de un huitième de diamètre, ne connaissant rien de la géométrie de ces corps.

Gaia

Le satellite Gaia devrait commencer sa mission en 2013, et la poursuivre pendant cinq ans. En conséquence, le système de Pluton sera observé à la fois par New Horizons et par Gaia en 2015. Gaia ne détectera que Pluton et Charon, Nix et Hydra étant trop faibles, mais il observera le système pendant cinq ans alors que New Horizons ne commencera

vraiment sa mission que six mois avant sa traversée du système. Un possible calendrier d'observations de Pluton par Gaia nous a été fourni par David Bancelin grâce au logiciel Rendez-Vous. Ce logiciel a été développé par C. Ordenovic et F. Mignard (OCA) pour Gaia DPAC. Nous avons attribué à ces observations une précision de 1 mas.

Gaia étant lancée deux ans avant l'arrivée de New Horizons dans le système de Pluton, le satellite sera pendant deux ans à l'origine des données les plus précises que l'on peut attendre du système. Nous avons donc cherché à savoir si Gaia pourrait nous permettre en seulement deux ans d'améliorer la précision des masses et des trajectoires des objets du système. Nous avons donc restreint notre dernier jeu d'observations aux observations effectuées avant l'arrivée de New Horizons.

En conséquence, nous avons différents jeux d'observations :
- **1992-2006** : reproduit les observations actuellement publiées
- **1992-2014** : reproduit les observations actuellement publiées et les futures observations avant l'arrivée de New Horizons
- **1992-2006+NH** : reproduit les observations actuellement publiées et les observations de New Horizons
- **1992-2014+NH** : reproduit les observations actuellement publiées, les futures observations et les observations de New Horizons
- **1992-2014+NH étendue** : reproduit les observations actuellement publiées, les futures observations et les observations de New Horizons si la mission est prolongée
- **1992-2014+NH+Gaia** : reproduit les observations actuellement publiées, les futures observations, les observations de New Horizons et celles de Gaia
- **1992-2015** : reproduit les observations actuellement publiées, les futures observations et les observations de Gaia jusqu'en 2015

5.4.2 Résultats

Évolution des incertitudes absolues

Les erreurs statistiques à 1-σ obtenues pour les différents jeux de simulations sont données dans la Table 5.1, de même que le nombre d'observations simulées pour chaque corps. Les barres d'erreurs trouvées pour le jeu 1992-2006 sont en accord avec celles de Tholen et al. (2008), avec notamment des barres d'erreurs sur les masses de Nix et Hydra du même ordre de grandeur que les estimations des masses. Lorsque l'on compare les jeux 1992-2006 et 1992-2014, on peut voir que l'incertitude sur les masses de Pluton et Charon diminue de manière moins significative que celle sur les masses des deux autres satellites, même si l'incertitude relative demeure très forte.

Lorsque l'on compare les différents jeux d'observations, on peut se rendre compte que l'amélioration majeure de la précision des masses viendra de New Horizons. L'observation du système avant l'arrivée de la sonde sera essentiellement de permettre de déterminer plus précisément l'orbite des satellites et contraindre la masse de Nix. Malgré cela, seule New Horizons nous permettra d'avoir des barres d'erreurs sur Nix et Hydra inférieures à l'ordre de grandeur de l'estimation actuelle des masses. La masse plus précise d'Hydra par rapport à celle de Nix après la mission New Horizons, alors que la situation est inversée aujourd'hui, provient de la différence dans le nombre total d'observations qui

auront été faites des deux satellites.

La précision que nous avons attribuée aux observations de New Horizons pourrait sans doute être améliorée. En effet, les satellites de Mars utilisés comme référence, Phobos et Deimos, sont loin d'être sphériques. Or, Nix et Hydra sont sans doute plus grands que ces satellites et donc probablement plus proches d'ellipsoïdes, d'où une détermination peut-être plus précise de leurs positions. Néanmoins, cette modification n'interviendrait que pour quelques observations, et donc la précision attendue sur les masses ne devrait pas se trouver fortement modifiée. La phase d'extension de la mission présentée ici étant proche de la traversée du système, la précision astrométrique de ses observations n'aura pas non plus la précision du pixel de LORRI[1]. C'est cette incertitude restant relativement forte malgré la distance qui fait que cette phase d'extension n'apporterait pas grand chose en ce qui concerne la précision des masses.

En ce qui concerne l'apport de Gaia, on peut voir que Gaia permettra d'améliorer les masses de Pluton et Charon. Les incertitudes sur les masses de Nix et Hydra vont, elles, se trouver légèrement modifiées. C'est-à-dire que contraindre les masses de Pluton et Charon va entraîner une décorrélation des masses entre elles. Autrement dit, si l'on contraint un paramètre, l'ajustement ne peut plus modifier autant ce paramètre pour tenter de réduire les résidus. Par conséquent, les autres paramètres seront davantage modifiés qu'ils ne l'auraient été, et leur influence ne sera plus "parasitée" par celle du paramètre contraint. Le fait que les masses de Pluton et Charon soient davantage contraintes par Gaia entraîne que nous nous attendions à avoir également une diminution des incertitudes sur les masses de Nix et Hydra. Or, ici seule l'incertitude sur la masse d'Hydra diminue. Ceci est dû au fait que les corrélations entre les paramètres ne décroissent pas linéairement avec le nombre d'observations disponibles.

En ce qui concerne l'apport de Gaia avant l'arrivée de New Horizons, les masses de Pluton et Charon se trouveraient fortement améliorées par ces observations, mais aussi celles de Nix et Hydra. Par conséquent, même si Nix et Hydra ne sont pas détectés, ces observations permettraient de poser des contraintes sur le système. Néanmoins, il est probable que ces données ne seront pas disponibles avant l'arrivée de New Horizons. Par conséquent, nous n'utiliserons plus ce résultat par la suite.

Évolution de l'incertitude relative

Considérons maintenant le problème que pose la valeur de la masse des objets eux-mêmes. L'incertitude statistique issue de la méthode des moindres carrés ne dépend que de la précision des observations, des dérivées partielles et des corrélations entre les paramètres. Lorsque l'on considère l'incertitude attachée à une masse fournie par les moindres carrés, cette incertitude ne dépend pas explicitement de la valeur de cette masse. Ainsi, dans le cas où les satellites sont plus massifs, l'erreur absolue n'est pas modifiée mais l'erreur relative diminuera.

Si l'on suppose que les satellites sont 2-σ plus massifs que leur estimation, et en utilisant l'estimation de la Table 5.1, on obtient : $m_N = 0.087$ km^3.s^{-2} et $m_H = 0.093$ km^3.s^{-2}. Cela signifie que les masses seraient connues à respectivement 11% et 20% en 2014 sans prendre en compte la contribution de Gaia. Si New Horizons ne diminuera pas

1. l'imageur panchromatique de New Horizons, cf 1.3.

Table 5.1 – Barres d'erreur à 1-σ sur les masses données par la méthode des moindres carrés à partir de différents jeux d'observations, avec $m_1 = 870.3$ km^3 s^{-2}, $m_2 = 101.4$ km^3 s^{-2}, $m_3 = 0.039$ km^3 s^{-2} et $m_4 = 0.021$ km^3 s^{-2}. Aucune nouvelle observation de Charon n'est faite pendant la phase étendue de New horizons.

jeux d'observations simulées	Barre d'erreur à 1-σ sur les masses (km^{3}s^{-2}) nombre d'observations simulées			
	Pluto	Charon	Nix	Hydra
1992-2006	1.28	0.51	0.024	0.036
		72	16	17
1992-2014	0.82	0.28	0.010	0.019
		125	68	69
1992-2006+NH	0.27	0.072	0.012	0.0028
		129	106	124
1992-2014+NH	0.25	0.045	0.0076	0.0026
		181	158	176
1992-2014+NH étendue	0.19	0.039	0.0070	0.0024
		181	186	233
1992-2014+NH+Gaia	0.17	0.014	0.0078	0.0024
	66	247	158	176
1992-2015	0.45	0.035	0.0086	0.016
	41	166	68	69

beaucoup cette incertitude relative pour Nix, ce ne sera pas le cas pour Hydra dont la masse serait alors connue à 3% près.

Établissons comme critère de référence que l'on considère que la masse du satellite est connue si l'incertitude à 2-σ est inférieure à la moitié de la masse. En 2014, l'incertitude sur la masse de Nix est de 0.010 km^3.s^{-2}. Lorsqu'on la compare avec la valeur de la masse estimée de Nix dans Tholen et al. (2008), on peut voir que notre critère de référence est rempli. Cela signifie que si la masse de Nix est environ égale ou supérieure à son estimation actuelle, nous pourrons la considérer comme connue avant l'arrivée de New Horizons. Si Nix est moins massif, il est toujours possible de déterminer quelle valeur de la masse il nous sera possible de détecter effectivement. L'incertitude sur la masse que nous donnera New Horizons devrait être 0.0076 km^3.s^{-2}, la masse minimale que l'on estimera connue sera donc 0.030 km^3.s^{-2}. Lorsque l'on effectue la même étude pour Hydra, on trouve que la masse en 2014 devrait être supérieure à 0.075 km^3.s^{-2} pour être estimée comme étant connue en 2014, et que la valeur la plus basse que New Horizons nous permettra de connaître sera 0.010 km^3.s^{-2}.

En définitive, si les masses de Nix et Hydra sont supérieures à leurs estimations actuelles, la précision de la masse de Nix obtenue grâce à New Horizons ne devrait pas être fortement améliorée par rapport aux observations effectuées au sol. En revanche, la mission devrait permettre de contraindre fortement la masse d'Hydra. Si les satellites sont moins massifs que dans l'estimation de Tholen et al. (2008), seule New Horizons permettra de les déterminer, ou du moins d'en donner une borne supérieure.

Troisième partie

Ajustement aux observations réelles

Chapitre 6

Pluton

Sommaire

6.1 Présentation des observations 87
6.1.1 Observations de Pluton 87
6.1.2 Observations des satellites 91
6.2 Particularités des observations réelles 92
6.2.1 Systèmes de référence de temps et d'espace 92
6.2.2 Observations à partir de la Terre 93
6.2.3 Correction de la phase 94
6.3 Ajustement 97
6.3.1 Incompatibilité entre les jeux d'observations 97
6.3.2 Pondération des observations 99
6.3.3 Résidus 99
6.4 Conclusion 111

Dans ce chapitre, nous présentons le résultat de l'ajustement de notre modèle au système de Pluton. En premier lieu, nous allons présenter les différents jeux d'observations utilisées. Ces observations ne peuvent être utilisées telles quelles pour notre ajustement et nous allons donc devoir effectuer certaines corrections pour que notre modèle puisse s'y adapter. Enfin, nous donnerons les conditions initiales et paramètres obtenus lors de notre ajustement.

6.1 Présentation des observations

6.1.1 Observations de Pluton

De manière générale, les observations que nous allons présenter ici sont en réalité des images de l'ensemble du système de Pluton non-résolu, obtenues à partir d'observations au sol. Comme il a été dit précédemment, Pluton n'a parcouru qu'un peu plus d'un tiers de son orbite autour du Soleil depuis sa découverte. Les plus anciennes plaques photographiques sur lesquelles Pluton a été identifié sont de l'année 1914. Ainsi, nous

disposons d'un peu moins d'un siècle d'observations. Au cours de cette période, les observations ont connu de profonds bouleversements avec l'arrivée des caméras CCD, l'augmentation de la taille des télescopes et l'optique adaptative. En conséquence, la précision des observations a énormément varié au cours de cette période. D'une précision sur Pluton d'une seconde de degré au début du siècle, nous en sommes maintenant au centième de seconde de degré pour la position des satellites.

observations anciennes sur plaques photographiques

La plupart de ces observations se trouvent sur le site de la commission 4 de l'Union Astronomique Internationale : `http://iau-comm4.jpl.nasa.gov/plan-eph-data/` .

Les observations les plus anciennes, jusqu'en 1965, ont toutes été publiées dans Cohen et al. (1967). Ces observations ont été réalisées entre autre aux Lowell Observatory, Yerkes (Chicago) Observatory et McDonald Observatory. Elles sont utilisées par le Jet Propulsion Laboratory dans leur ajustement de l'orbite de Pluton.

- nombre d'observations : 552
- repère : équateur B1950
- type d'observations : photographiques
- source : Cohen et al. (1967)

De 1971 à 1997, on dispose d'observations réalisées à l'Observatoire d'Asiago (Italie).

- nombre d'observations : 175
- repère : équateur B1950
- type d'observations : photographiques
- sources : Barbieri et al. (1972, 1975, 1979, 1988)

De 1965 à 1981, des observations du A. J. Dyer Observatory.

- nombre d'observations : 15
- repère : équateur B1950
- type d'observations : photographiques
- source : Hardie et al. (1985)

En 1980 et 1985, 45 observations de La Silla

- nombre d'observations : 45
- repère : équateur B1950
- type d'observations : photographiques
- sources : Debehogne et al. (1981); Debehogne and de Freitas Mourao (1988)

De 1973 à 1982, des observations de l'Observatoire de Turin

- nombre d'observations : 39
- repère : équateur B1950
- type d'observations : photographiques
- sources : Zappala et al. (1980, 1983)

De 1975 à 1978, des observations de l'Observatoire de l'Université de Copenhage à Brorfelde

- nombre d'observations : 15
- repère : équateur B1950
- type d'observations : photographiques
- source : Jensen (1979)

De 1980 à 1985 au Lick Observatory
- nombre d'observations : 11
- repère : équateur B1950
- type d'observations : photographiques
- sources : Klemola and Harlan (1982, 1984, 1986)

En 1980 et 1983, à l'observatoire de Flagstaff
- nombre d'observations : 5
- repère : équateur B1950
- type d'observations : photographiques
- source : Harrington and Walker (1984)

En 1985, 5 observations non-publiées par D. Mink, évoquées dans Standish (1994).
- nombre d'observations : 5
- repère : équateur B1950
- type d'observations : photographiques
- sources : Standish (1994), `http://iau-comm4.jpl.nasa.gov/plan-eph-data/`

En 1989 et 1990, 29 nouvelles observations à la Silla :
- nombre d'observations : 29
- repère : équateur J2000
- type d'observations : photographiques
- source : Gemmo and Barbieri (1994)

Et enfin, de 1930 à 1993, des observations ont été réalisées à l'astrographe de Pulkovo :
- nombre d'observations : 207
- repère : équateur J2000
- type d'observations : photographiques
- source : Rylkov et al. (1995)

Toutes ces observations ont été effectuées dans des conditions très diverses, et leurs précisions sont parfois très différentes.

Observations CCD

De 1995 à aujourd'hui, nous disposons d'observations effectuées au FASTT (Flagstaff Astrometric Scanning Transit Telescope), un télescope méridien automatique équipé d'une caméra CCD.
- nombre d'observations : 914
- repère : équateur J2000
- type d'observations : CCD

- sources :
  - http ://iau-comm4.jpl.nasa.gov/plan-eph-data/
  - http ://www.nofs.navy.mil/data/plansat.html

Entre 1997 et 2010, nous avons des observations du Table Mountain Observatory. Cet observatoire est propriété du Jet Propulsion Laboratory. Il est équipé de deux télescopes de 40 et 60 cm.
- nombre d'observations : 259
- repère : équateur J2000
- type d'observations : CCD
- source : http ://iau-comm4.jpl.nasa.gov/plan-eph-data/

Sur les périodes 1995 à 1997 et 2002 à 2005, des observations de l'observatoire de Bordeaux-Floirac, doté d'un télescope méridien muni d'une caméra CCD.
- nombre d'observations : 87
- repère : équateur J2000
- type d'observations : CCD
- source : Rapaport et al. (2002)

Des observations de Pluton ont été réalisées au télescope de 120 cm de l'Observatoire de Haute-Provence entre 1997 et 2010. Elles ne sont pas encore publiées et n'ont jamais été utilisées auparavant pour ajuster le système de Pluton.
- nombre d'observations : 242
- repère : équateur J2000
- type d'observations : CCD
- source : Jean-Eudes Arlot et Vincent Robert (communication privée)

Des observations ont été réalisées au télescope de 1 m de l'Observatoire du Pic du Midi en juillet 2011. Tout comme les observations de l'Observatoire de Haute-Provence, elles n'ont pas encore été publiées et n'ont pas encore été utilisées par quelqu'un d'autre pour produire une éphéméride de Pluton. J'ai effectué la réduction astrométrique de ces images et le détail de la procédure est donné en annexe B.
- nombre d'observations : 73
- repère : équateur J2000
- type d'observations : CCD
- source : François Colas

Occultations stellaires Si, à l'origine, les occultations stellaires dépendaient essentiellement des prévisions d'orbite pour pouvoir être effectuées, l'amélioration de ces prédictions a conduit à une inversion de cette situation. Désormais, le véritable facteur limitant la précision des positions fournies par les occultations stellaires est la précision que l'on peut avoir sur la position de l'étoile occultée. La campagne d'observations des occultations stellaires par des objets du Système Solaire, menée par Bruno Sicardy, nous a permis d'avoir des positions très précises de Pluton et de Charon (les campagnes d'observations d'occultations stellaires par Nix et Hydra ayant été jusqu'ici infructueuses). L'un des aspects les plus intéressants est l'existence d'occultation par Pluton puis par Charon de la même étoile. Dans ces conditions, il nous est possible d'obtenir une mesure

très précise de la distance entre les deux objets.

Le résultat de ces occultations est disponible sous la forme d'écarts entre la position de Pluton suivant la théorie DE413 et celle qui est donnée par l'occultation. Ces écarts après 2008 nous ont été fournis par Bruno Sicardy.

- plage d'observations : 2005-2010
- nombre d'observations : 14 (dont 2 de Charon)
- repère : équateur J2000
- type d'observations : occultations stellaires
- sources : Assafin et al. (2010), Bruno Sicardy (communication privée)

La figure 6.1 montre ces écarts pour la période 2005-2008. On peut observer une assez forte dispersion en α, mais surtout une dérive linéaire en δ.

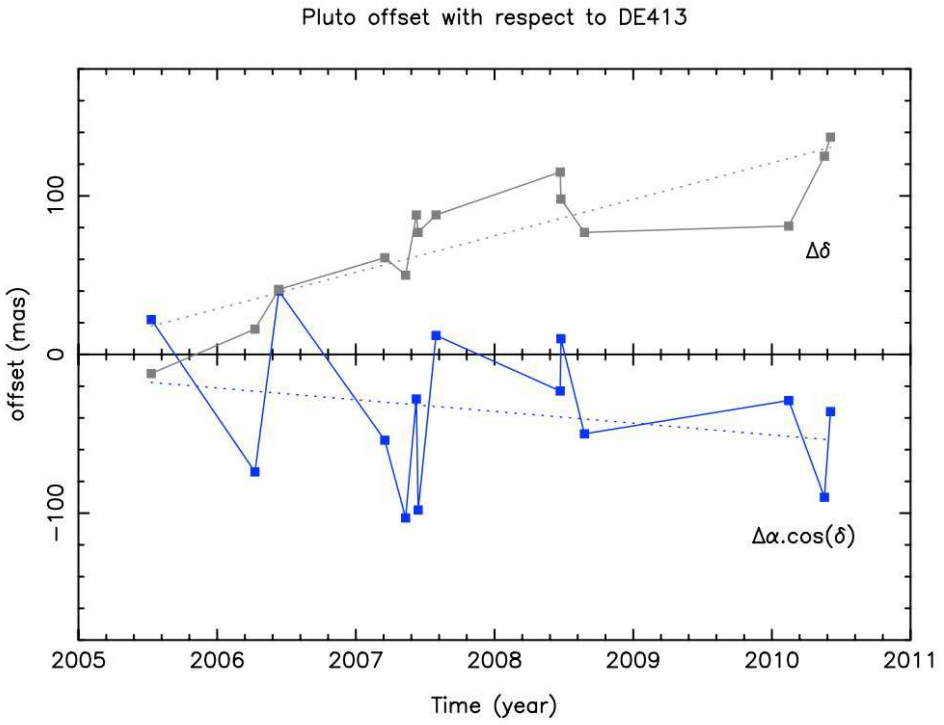

Figure 6.1 – Écarts entre les positions de Pluton prédites par la théorie DE413 et les positions obtenues par occultations stellaires.

6.1.2 Observations des satellites

Pluton et Charon sont séparés au maximum d'environ 0.9 arcsecondes. Cette situation entraîne qu'il a fallu attendre le lancement du Hubble Space Telescope (HST) avant d'avoir des images séparant Pluton et Charon. Les premières de ces images ont été obtenues en 1992 et 1993.

- nombre d'observations : 60
- repère : J2000
- type d'observations : CCD

– source : Tholen and Buie (1997)

Par la suite, la découverte de Nix et Hydra en 2005 a été également effectuée à partir des images du HST.
– nombre d'observations : 4 de Nix et 4 d'Hydra
– repère : J2000
– type d'observations : CCD
– source : Weaver et al. (2005)

Le traitement d'observations datant de 2002 et 2003 du HST a permis de détecter Nix et Hydra sur ces observations
– nombre d'observations : 12 de Charon, 12 de nix et 12 d'Hydra
– repère : J2000
– type d'observations : CCD
– source : Buie et al. (2006)

Enfin, nous avons utilisé l'observation du système effectuée par Bruno Sicardy au VLT en 2006 pour confirmer l'existence d'Hydra
– nombre d'observations : 1 de Charon et 1 d'Hydra
– repère : J2000
– type d'observations : CCD
– source : Sicardy et al. (2006a)

6.2 Particularités des observations réelles

6.2.1 Systèmes de référence de temps et d'espace

Comme vu dans la partie précédente, les observations du système sont nombreuses et ont des formes diverses. Il nous faut donc adapter notre programme à ces particularités.

Les équations du mouvement utilisent pour argument un temps uniforme, indépendant de tout phénomène physique. Bien sûr toute mesure du temps doit reposer sur un phénomène physique, et hérite donc des imprécisions de ce dernier. L'échelle de temps la plus précise actuellement est celle du temps atomique international (TAI), réalisé à partir de la transition hyperfine des atomes de césium 133.

Ainsi, l'échelle de temps dans laquelle sont datées nos observations est soit UT1 (Universal Time 1), suivant la rotation terrestre, soit UTC (Universal Time Coordinated), une échelle de temps possédant la même uniformité que le TAI par morceaux et qui conserve un écart inférieur à la seconde par rapport à UT1 grâce à des sauts de seconde. La différence entre les deux échelles étant faible, la seule échelle mentionnée pour les observations est UT, sans qu'il soit précisé la différence entre les deux.

Notre modèle est centré sur le barycentre du Système Solaire et utilise l'échelle de temps TDB (temps dynamique barycentrique), lié au TCB (temps dynamique coordonnée), l'échelle de temps recommandée par l'IAU pour les éphémérides, par une relation linéaire. Le TCB est le temps uniforme utilisé dans les équations du mouvement

des planètes, centré sur le barycentre du Système solaire, dans le cadre de la relativité générale.

La transformation entre les deux échelles de temps est assurée par la routine TTRANS de la bibliothèque de fonctions SPICE développée par l'équipe NAIF (Navigation and Ancillary Information Facility) du JPL.

Ensuite, nos observations s'étendant sur plus d'un siècle, le système de référence donné n'est pas forcément le même que celui de notre programme, de même que le catalogue de référence astrométrique. Les observations anciennes utilisent pour la plupart l'équateur B1950 comme plan de référence, il nous faut donc transformer les observations pour qu'elles soient exprimées par rapport à l'équateur de référence actuel : J2000.

La plupart des observations anciennes que nous avons fournissent les positions de Pluton par rapport aux étoiles du catalogue FK5. Or, nous utilisons maintenant la réalisation du repère ICRF (International Celestial Reference Frame) dont la contrepartie optique est le catalogue Hipparcos. Les étoiles de référence du catalogue FK5 en J2000 n'ont pas la même position que dans le catalogue Hipparcos. Il nous a donc fallu modifier nos positions obtenues en J2000 par rapport au catalogue FK5 pour obtenir des positions en J2000 par rapport au catalogue Hipparcos. Ces transformations ont été effectuées en utilisant un programme fortran basé sur Aoki et al. (1983) et fourni par Valéry Lainey.

Les observations dont on dispose sont soit en coordonnées équatoriales absolues, soit en coordonnées équatoriales relatives. La description des transformations nécessaires à effectuer sur les positions calculées et les équations variationnelles ont déjà été décrites dans la partie 4.3.1.

6.2.2 Observations à partir de la Terre

Calcul du temps lumière

La vitesse de la lumière étant finie, un objet observé sur Terre semblera être à la position qu'il occupait lorsqu'il a émis sa lumière. Il nous faut donc estimer le temps que la lumière a mis pour nous parvenir. Par définition, pour un instant t d'observation, le temps-lumière est donné par :

$$\tau = \frac{|\vec{r_T}(t) - \vec{r_i}(t-\tau)|}{c} \tag{6.1}$$

où c est la vitesse de la lumière. Une valeur approchée de τ peut être obtenue par la suite :

$$\tau_{n+1} = \frac{|\vec{r_T}(t) - \vec{r_i}(t-\tau_n)|}{c}, \tau_0 = 0 \tag{6.2}$$

qui est telle que $\lim_{n\to\infty} = \tau$. Pour obtenir le temps-lumière, on procède donc par itérations jusqu'à convergence. En ce qui nous concerne, nous avons itéré quatre fois le processus. En moyenne, Pluton se trouve à un peu plus de 4 heures-lumière de la Terre.

L'aberration

L'aberration est la différence entre la position réelle d'un objet et la position apparente pour un observateur en mouvement. Pour expliquer d'où vient le phénomène, supposons

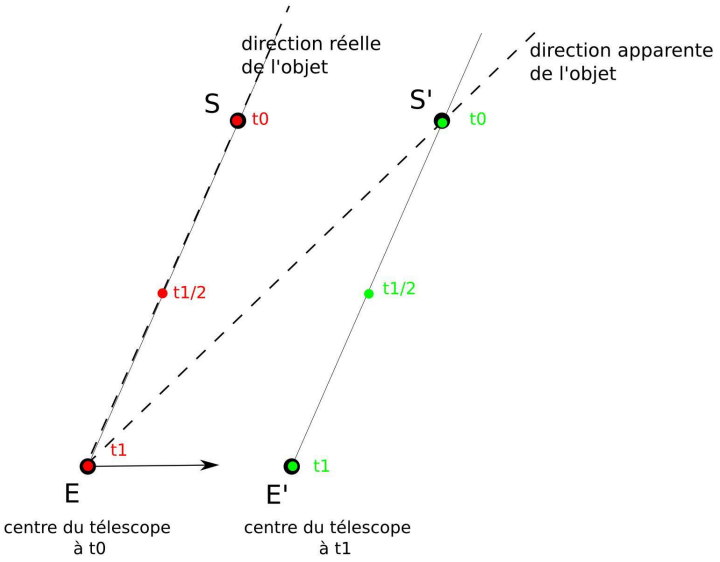

Figure 6.2 – Illustration du principe de l'aberration, la trajectoire du photon entrant dans le télescope en S à $t0$ lie le centre du télescope E à $t0$ et la position réelle de l'objet, celui entrant en S' à $t0$ sera celui qui arrivera au centre du télescope en $t1$, d'où une direction apparente $S'E$ de l'objet.

que tous les rayons lumineux issus d'un objet donné nous arrivent parallèles. Nous allons nous baser sur la figure 6.2. Soit E le centre du télescope. Le temps que la lumière parcourt la distance SE, le centre du télescope s'est déplacé en E'. Par conséquent, pour que la lumière qui entre dans le télescope à l'instant t_0 atteigne le centre du télescope à l'instant t_1, elle devra entrer dans le télescope au point S'. Il faut donc corriger l'orientation du télescope de l'angle $\widehat{SES'}$. Pour l'observateur, c'est comme si l'objet était dans la direction $\overrightarrow{ES'}$.

La direction réelle de l'objet sera $\overrightarrow{ES} = \overrightarrow{E'S'}$, sa direction apparente $\overrightarrow{ES'}$. En ce qui nous concerne, nous avons la position réelle de Pluton, c'est le vecteur $\vec{r_T}(t) - \vec{r_i}(t-\tau)$, il nous faut alors sa direction apparente pour pouvoir comparer notre position calculée aux observations. Par analogie avec la situation décrite ci-dessus, on peut en déduire que la direction apparente de Pluton sera $\vec{r_T}(t-\tau) - \vec{r_i}(t-\tau)$. Ceci revient à corriger le temps de référence t par $t-\tau$ lors du calcul de la position de la Terre dans la transformation des positions cartésiennes en positions équatoriales, ainsi que dans l'expression du temps-lumière qui devient alors :

$$\tau = \frac{|\vec{r_T}(t-\tau) - \vec{r_i}(t-\tau)|}{c} \tag{6.3}$$

6.2.3 Correction de la phase

Comme abordé précédemment pour l'ajustement du modèle aux observations simulées, la détermination du centre photométrique d'une cible peut être difficile dans le cas où l'objet n'est pas sphérique. À cela s'ajoute une difficulté supplémentaire : que l'objet n'ait

pas une surface uniforme, ce qui aura pour effet d'introduire un décalage entre le centre de masse et le photocentre. Pour les observations au sol, nous allons négliger les possibles écarts à la sphère de Pluton et Charon en raison de leur taille suffisante pour que ces objets soient proches de l'équilibre hydrostatique. En ce qui concerne Nix et Hydra, n'étant pas résolus sur les observations, nous n'avons aucune idée de leur géométrie, et la modification occasionnée serait bien inférieure à la taille d'un pixel. Nous négligerons également les variations d'albedo de Pluton et Charon, le déplacement du photocentre attendu étant sans doute négligeable par rapport au photocentre total du système.

Par contre, nous allons prendre en compte l'effet des phases lors de l'observation de ces objets. Suivant un processus analogue à celui des phases de la Lune, la portion éclairée d'un objet vu depuis la Terre va varier en fonction des positions relatives de l'objet, de la Terre et du Soleil.

Pluton est situé loin de la Terre, par conséquent, l'angle de phase sous lequel il apparaît est assez faible (au plus 1.7 degré en 2011). Le décalage du photocentre dû à la phase est donc très faible également puisqu'il sera situé à la surface de Pluton entre le point sub-solaire et le point sub-terrestre (cf figure 6.3). Néanmoins, nous avons effectué une correction de la phase de Pluton et de Charon suivant la méthode de Lindegren (Lindegren, 1977).

Considérons une sphère de surface homogène. La manière dont la surface de cette sphère va réfléchir la lumière est caractérisée par la fonction de diffusion S. Soit F la densité du flux incident et I l'intensité du flux reflété, nous avons alors :

$$I(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0) = \frac{F}{4\mu} S(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0) \tag{6.4}$$

où μ est le cosinus de l'angle de réflection, ϕ le cosinus de l'azimut des rayons réfléchis, et μ_0 et ϕ_0 l'équivalent de ces quantités pour les rayons incidents. Pour des raisons de symétrie, le photocentre doit être localisé sur l'équateur d'intensité lumineuse (cf figure 6.3). De plus, la fonction de diffusion S est symétrique pour les rayons incidents et réfléchis, c'est-à-dire que $S(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0) = S(\mu_0, \mu, \phi_0 - \phi)$. Si l'objet était plat et non une sphère, nous ne verrions qu'une face déformée et éclairée dont le photocentre serait alors le point miroir M situé entre les points sub-solaire et sub-terrestre. Comme nous avons affaire à une sphère, il existe un limbe où l'obscurité diminue, ce qui a pour effet de décaler le photocentre vers le point sub-solaire. Si l'on note s le rayon angulaire de l'objet, alors la distance EM entre le point sub-terrestre E et le point miroir M sera $s.\sin(i/2)$, où i est l'angle de phase. La distance entre le photocentre P et le centre de masse P_0 sera alors :

$$|P - P_0| = Cs \sin(i/2) \tag{6.5}$$

où C est une fonction de i dérivée de la fonction de diffusion. Si l'on note maintenant Q l'angle de position de l'équateur d'intensité par rapport au pôle nord céleste, le décalage entre le photocentre et le centre de masse sera :

$$\begin{cases} \Delta\alpha \cos\delta = -Cs \sin\dfrac{i}{2} \sin Q \\ \Delta\delta = -Cs \sin\dfrac{i}{2} \cos Q \end{cases} \tag{6.6}$$

Dans Lindegren (1977), le coefficient C est fixé à 0.75 pour la majorité des planètes.

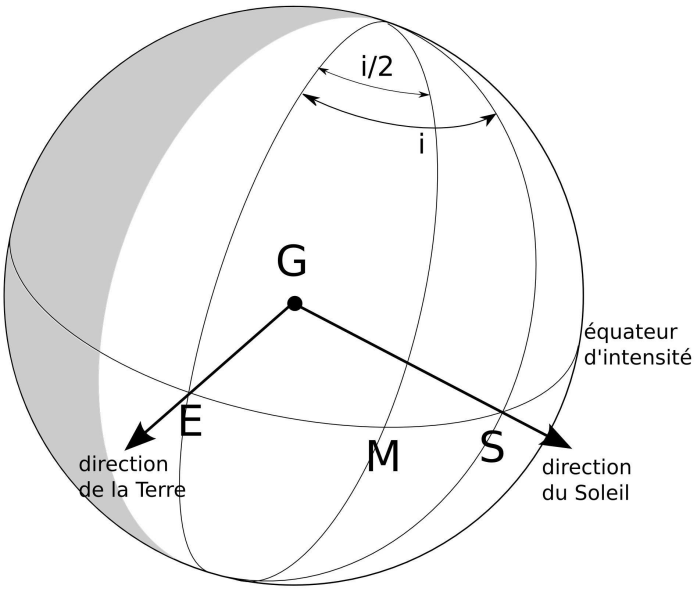

Figure 6.3 – Système de coordonnées lié à l'effet de phase

Photocentre du système

À l'exception des observations dédiées aux satellites, nos observations ne parviennent pas à résoudre le système de Pluton. Si la différence entre le photocentre de l'objet central et le photocentre total du système est négligeable dans le cas de la plupart des observations planétaires, ce n'est pas le cas ici. En effet, le diamètre de Charon est environ la moitié de celui de Pluton, sa surface angulaire apparente est donc environ le quart de celle de Pluton. Il nous faut donc calculer la position du photocentre total du système.

Soit F l'intensité du flux lumineux émis par le soleil et reçu par Pluton et Charon. Soient A_P et A_c les albédos respectifs de Pluton et Charon, R_P et R_C leurs rayons. La luminosité de Pluton sera alors : $I.A_P.2\pi\mathbb{R}_P^2$, celle de Charon : $I.A_C.2\pi\mathbb{R}_C^2$ en considérant que leur luminosité est celle de demi-sphères et que l'on néglige l'effet de centre-bord. Le photocentre total du système sera alors le barycentre des photocentres de chacun de ces objets pondérés chacun par leur luminosité. Finalement, on obtient les coordonnées $(\alpha_{pho}, \delta_{pho})$ du photocentre total du système :

$$\begin{cases} \alpha_{pho} = \dfrac{A_P.R_P^2.\alpha_P + A_C.R_C^2.\alpha_C}{A_P.R_P^2 + A_C.R_C^2} \\ \\ \delta_{pho} = \dfrac{A_P.R_P^2.\delta_P + A_C.R_C^2.\delta_C}{A_P.R_P^2 + A_C.R_C^2} \end{cases} \tag{6.7}$$

Il nous faut maintenant modifier également les équations variationnelles de manière à prendre en compte ce changement. Nous allons utiliser les mêmes notations que celles de la partie 4.3.1. Posons de plus :

$$C_P = \frac{A_P.R_P^2}{A_P.R_P^2 + A_C.R_C^2}; C_C = \frac{A_C.R_C^2}{A_P.R_P^2 + A_C.R_C^2} \tag{6.8}$$

Considérer la position du photocentre total revient en notation vectorielle à utiliser

une matrice M telle que $Z' = M(HX)A$, avec :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{pho} \\ \delta_{pho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_P & 0 & C_C & 0 & 0\dots0 \\ 0 & C_P & 0 & C_C & 0\dots0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_P}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_P}{\partial c_{6N+N'}} \\ \frac{\partial \delta_P}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial \delta_P}{\partial c_{6N+N'}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \alpha_i}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_i}{\partial c_{6N+N'}} \\ \frac{\partial \delta_i}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial \delta_i}{\partial c_{6N+N'}} \\ \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_1 \\ \vdots \\ \Delta c_{6N+N'} \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

6.3 Ajustement

6.3.1 Incompatibilité entre les jeux d'observations

Problème d'échelle

Les deux dernières estimations du demi grand axe de Charon (Tholen and Buie, 1997; Tholen et al., 2008) ne sont pas cohérentes entre elles. En effet, dans Tholen and Buie (1997) le demi-grand axe de Charon est estimé à 19636 ± 8 km, alors qu'il est estimé à 19570.45 ± 0.44 km dans Tholen et al. (2008). La principale différence entre les deux valeurs obtenues sont les jeux d'observations pris en compte. Dans Tholen and Buie (1997), l'ajustement de la trajectoire de Charon est réalisé sur les observations de Charon effectuées avec le HST de 1992-1993. Dans Tholen et al. (2008), ces observations sont aussi prises en compte, mais avec une plus grande incertitude que les observations de Buie et al. (2006). De plus, les observations de 2002-2003 de Charon sont plus nombreuses que celles de 1992-1993. En conséquence, la valeur du demi-grand axe de Charon dans Tholen et al. (2008) est largement dominée par les observations de Buie et al. (2006) effectuées en 2002-2003. Il est fortement improbable que le demi-grand axe de Charon ait autant changé en dix ans sous l'influence de Nix et Hydra. La double occultation stellaire de 2010 (Sicardy et al., 2011) semble indiquer que le demi-grand axe de Charon serait plus proche de la valeur de Tholen and Buie (1997), alors que les autres éléments elliptiques resteraient inchangés par rapport à ceux de Tholen et al. (2008). Nous avons donc considéré un facteur d'échelle associé aux observations de 2002-2003 et l'avons ajusté en même temps que les autres paramètres et conditions initiales. Le principal inconvénient de cette situation est que le jeu d'observations de 2002-2003 est justement l'ensemble d'observations publiées fournissant le plus d'observations pour Nix et Hydra. Toute solution orbitale pour ces satellites est donc dominée par ces observations.

Ajustement du facteur d'échelle

Afin de résoudre en partie cette incohérence entre les jeux d'observations, nous avons ajusté le facteur d'échelle du jeu 2002-2003 de manière à trouver une solution globale satisfaisant l'ensemble des observations. Pour ce faire, nous avons procédé de la façon suivante.

Soit X_i la position en pixels d'un objet i sur le CCD, x_i^o sa position par rapport au centre de l'image en coordonnées (α, δ). On note alors ρ le facteur d'échelle permettant d'établir l'équivalence entre la position en pixels et la position en coordonnées équatoriales relatives, tel que :

$$x_i^o = \rho X_i \tag{6.10}$$

Les pixels ne sont pas nécessairement de forme carrée, donc les deux composantes de ρ ne sont pas nécessairement identiques.

Suite aux résultats de la double occultation de 2010 (Sicardy et al., 2011), nous allons considérer que le facteur d'échelle du jeu d'observations 1992-1993 est correct, mais pas celui de 2002-2003. À cause de la répartition des observations, nous ne pouvons regrouper les observations de 2002-2003 pour faire des sous-jeux de taille conséquente de manière à ajuster un facteur d'échelle différent pour chacun de ces jeux. Nous considérons donc que le facteur d'échelle de chaque observation de 2002-2003 est affecté de la même erreur que les autres.

Posons ρ_1 le facteur d'échelle correct de 2002-2003, ρ_2 le facteur d'échelle incorrect de 2002-2003, x'^o_i la position d'un objet i observé en 2002-2003 si son facteur d'échelle est correct. Nous avons alors :

$$x'^o_i = \rho_1 X_i \tag{6.11}$$
$$x_i^o = \rho_2 X_i \tag{6.12}$$

Ce qui nous donne :

$$x'^o_i = \frac{\rho_1}{\rho_2} x_i \tag{6.13}$$

Posons x_i^c la position calculée de i. Alors les O-C seront tels que :

$$x'^o_i - x_i^c = \frac{\rho_1}{\rho_2} x_i^o - x_i^c \tag{6.14}$$

C'est le rapport ρ_1/ρ_2 que nous allons ajuster. Notons ce facteur λ_o. Il est possible de réécrire l'équation précédente comme :

$$x'^o_i - x_i^c = \lambda_o x_i^o - \lambda_c x_i^c \tag{6.15}$$

où $\lambda_c = 1$. Nous devrons donc calculer les dérivées partielles pour obtenir la correction $\Delta\lambda$ grâce aux moindres carrés. Il faudra simplement prendre en compte que $\lambda_0 = \lambda_c + \Delta\lambda$ et donc que $\lambda_c = \lambda_o - \Delta\lambda$.

L'expression des dérivées partielles de la position en fonction de ce facteur est très simple. En effet, si l'observation n'a pas été effectuée en 2002-2003, alors $\partial x'_i/\partial\lambda = 0$, et sinon $\partial x'_i/\partial\lambda = x_i^c$. Il nous suffit donc de rajouter une colonne avec les coefficients $(\partial\alpha_i/\partial\lambda, \partial\delta_i/\partial\lambda)$ à la matrice des dérivées partielles (cf chapitre 4).

Pour trouver la valeur du coefficient λ_o, on ajuste en premier lieu l'orbite de Charon sur les observations de 1992-1993, puis la trajectoire obtenue est ajustée aux observations de 2002-2003 en libérant comme paramètre supplémentaire λ_o. On trouve alors une valeur de 1.0022 ± 0.0024. C'est à peu près la valeur que l'on obtient en comparant les demi-grands axes obtenus dans Tholen and Buie (1997) et Tholen et al. (2008), soit respectivement 19636 km et 19570.45 km.

6.3.2 Pondération des observations

Avant de présenter les résultats de l'ajustement du modèle aux observations, il est nécessaire de présenter les différentes pondérations que nous allons utiliser. De manière générale, ce sont les incertitudes supposées des observations qui vont servir à pondérer les données.

Observations de Pluton

Comme il a été dit précédemment, les observations de Pluton que nous allons utiliser s'étendent sur presque un siècle d'observations. Dans ces conditions, et considérant la grande disparité des sources, il est bien entendu hors de question de donner le même poids à toutes ces observations. Pour la plupart des observations au sol, l'incertitude d'un jeu d'observations sera l'écart type des O-C de ce jeu. Néanmoins, nous allons être confrontés au problème des observations aberrantes. Il nous faut donc en premier lieu calculer les O-C d'un jeu d'observations, définir comme aberrantes les observations à plus de 3-σ et calculer de nouveau l'écart-type qui sera alors l'incertitude des observations retenues. À l'itération suivante, nous reprendrons en compte toutes les observations et répéterons le processus. De cette manière, certaines observations non-prises en compte lors de la première itération pourront être prises en compte aux itérations suivantes. La seule exception dans ce processus sera les occultations stellaires auxquelles nous donnerons une précision de 10 mas (Bruno Sicardy, communication privée).

Observations des satellites

Pour les satellites, nous reprenons les incertitudes de Buie et al. (2006), c'est-à-dire 6 mas pour Charon, 15 mas pour Nix et 9 mas pour Hydra en ce qui concerne le jeu de 2002-2003. Les observations de 1992-1993 se voient attribuer un poids de 10 mas. En effet, ces observations semblent donner une excentricité de Charon plus faible et d'après les dernières occultations effectuées, l'excentricité de Charon est plus faible que celle obtenue dans (Tholen et al., 2008). Plus précisément, cette observation semble indiquer qu'à l'exception de l'excentricité et du demi-grand axe, plus proches des valeurs données par le jeu d'observations 1992-1993, les autres éléments orbitaux semblent proches de la valeur fournie par le jeu de 2002-2003.

6.3.3 Résidus

En raison des faibles perturbations qu'entraîne le reste du système Solaire sur les satellites, nous avons d'abord ajusté le mouvement des satellites puis avons ensuite utilisé cette solution pour ajuster le mouvement héliocentrique du système.

Mouvement des satellites

Pour obtenir notre ajustement, nous avons procédé par étapes. En premier lieu, nous n'avons utilisé que les observations de (Buie et al., 2006; Sicardy et al., 2006a; Stern et al., 2006a). Nous avons alors ajusté Charon, le principal perturbateur de Pluton et Charon, puis les éléments elliptiques initiaux de Nix et Hydra, et enfin les masses des quatre objets. Dans un second temps, nous avons répété la démarche précédente en

Table 6.1 – Éléments elliptiques des satellites de Pluton à JD=2452600.5

	Charon	Nix	Hydra
a (km)	19604.5	41962	103837
	± 15.6	± 116	± 1464
e	0.00159	0.1608	0.3871
	± 0.00127	± 0.0038	± 0.0089
i (deg)	179.52	179.00	179.18
	0.08	0.21	0.07
Ω (deg)	236.72	253.68	268.88
	0.11	0.26	0.09
ω (deg)	250.51	124.67	158.84
	0.05	0.26	0.11
v (deg)	200.83	210.83	28.23
	0.05	0.40	0.28

Table 6.2 – Masses de Pluton et ses satellites.

	Pluton	Charon	Nix	Hydra
GM ($km^3.s^{-2}$)	874.25	102.83	0.018	0.078
incertitude	± 2.95	± 1.87	± 0.025	± 0.045

incluant les observations de (Tholen and Buie, 1997). Les résidus obtenus sont présentés dans la Table 6.4, et les éléments elliptiques initiaux obtenus dans la Table 6.1. Deux observations ont été écartées de l'ajustement, leurs résidus étant supérieurs à 3-σ. Ces résidus sont indiqués entre parenthèses dans la Table 6.4.

La différence entre les tables 6.1 et 1.1 en ce qui concerne les demi-grands axes provient essentiellement du problème d'échelle du jeu d'observations 2002-2003, ces observations étant bien plus nombreuses et dominant donc l'ajustement. L'excentricité des satellites que nous présentons dans la table est l'excentricité plutocentrique et les inclinaisons sont données par rapport à l'équateur J2000.

Table 6.4 – Résidus post-ajustements des positions des satellites de Pluton (les résidus entre parenthèses sont ceux des observations rejetées lors de l'ajustement).

date et heure d'observation	$\Delta\alpha_C$ arcsec	$\Delta\delta_C$ arcsec	$\Delta\alpha_N$ arcsec	$\Delta\delta_N$ arcsec	$\Delta\alpha_H$ arcsec	$\Delta\delta_H$ arcsec
1992-05-21 01 : 43	0.0037	-0.0025	-	-	-	-
1992-05-21 01 : 49	0.0035	-0.0046	-	-	-	-
1992-05-21 08 : 09	0.0011	-0.0034	-	-	-	-
1992-05-21 08 : 15	0.0022	0.0003	-	-	-	-
1992-05-29 10 : 42	0.0081	-0.0001	-	-	-	-

1992-05-29 10 : 48	0.0084	-0.0042	-	-	-	-
1992-05-29 10 : 55	0.0098	0.0056	-	-	-	-
1992-05-29 11 : 04	0.0087	0.0076	-	-	-	-
1992-05-29 17 : 09	0.0076	0.0005	-	-	-	-
1992-05-29 17 : 18	0.0113	-0.0009	-	-	-	-
1992-05-29 17 : 26	0.0057	-0.0002	-	-	-	-
1992-05-29 17 : 32	0.0068	0.0005	-	-	-	-
1992-06-02 22 : 51	0.0027	-0.0008	-	-	-	-
1992-06-02 22 : 57	0.0009	-0.0007	-	-	-	-
1992-06-03 04 : 52	0.0084	-0.0024	-	-	-	-
1992-06-03 04 : 58	0.0063	-0.0022	-	-	-	-
1992-08-21 22 : 07	-0.0007	-0.0026	-	-	-	-
1992-08-21 22 : 13	0.0004	-0.0034	-	-	-	-
1992-08-22 04 : 33	-0.0002	-0.0043	-	-	-	-
1992-08-22 04 : 39	-0.0014	-0.0051	-	-	-	-
1992-09-18 12 : 29	-0.0033	-0.0004	-	-	-	-
1992-09-18 12 : 35	-0.0024	-0.0006	-	-	-	-
1992-09-18 20 : 24	-0.0027	-0.0056	-	-	-	-
1992-09-18 20 : 30	-0.0036	-0.0060	-	-	-	-
1993-01-12 04 : 24	0.0043	-0.0004	-	-	-	-
1993-01-12 04 : 30	0.0058	0.0000	-	-	-	-
1993-01-12 14 : 03	0.0045	-0.0052	-	-	-	-
1993-01-12 14 : 09	0.0062	-0.0032	-	-	-	-
1993-01-24 07 : 43	0.0004	-0.0018	-	-	-	-
1993-01-24 07 : 49	0.0025	-0.0021	-	-	-	-
1993-01-24 23 : 22	0.0035	-0.0056	-	-	-	-
1993-01-24 23 : 28	0.0059	-0.0034	-	-	-	-
1993-05-31 10 : 43	-0.0059	0.0042	-	-	-	-
1993-05-31 10 : 49	-0.0040	0.0026	-	-	-	-
1993-05-31 10 : 56	-0.0087	0.0047	-	-	-	-
1993-05-31 11 : 05	-0.0078	0.0073	-	-	-	-
1993-05-31 17 : 09	-0.0027	0.0027	-	-	-	-
1993-05-31 17 : 18	-0.0024	0.0049	-	-	-	-
1993-05-31 17 : 26	-0.0034	0.0009	-	-	-	-
1993-05-31 17 : 32	-0.0038	0.0024	-	-	-	-
1993-06-16 13 : 56	0.0131	-0.0002	-	-	-	-
1993-06-16 14 : 02	0.0131	-0.0002	-	-	-	-
1993-06-16 20 : 22	0.0107	-0.0027	-	-	-	-
1993-06-16 20 : 28	0.0134	0.0008	-	-	-	-
1993-07-05 19 : 18	0.0098	0.0022	-	-	-	-
1993-07-05 19 : 24	0.0135	0.0005	-	-	-	-
1993-07-06 04 : 39	0.0106	0.0034	-	-	-	-
1993-07-06 04 : 45	0.0090	-0.0000	-	-	-	-
1993-08-12 16 : 28	0.0072	0.0051	-	-	-	-
1993-08-12 16 : 37	0.0083	0.0044	-	-	-	-
1993-08-14 03 : 40	0.0019	-0.0073	-	-	-	-
1993-08-14 03 : 49	0.0032	-0.0092	-	-	-	-

1993-08-15 08 : 34	-0.0022	0.0090	-	-	-	-
1993-08-15 08 : 44	-0.0033	-0.0044	-	-	-	-
1993-08-15 19 : 42	-0.0079	0.0048	-	-	-	-
1993-08-15 21 : 18	-0.0072	0.0034	-	-	-	-
1993-08-18 05 : 35	0.0039	-0.0001	-	-	-	-
1993-08-18 05 : 44	-0.0015	-0.0032	-	-	-	-
1993-08-18 13 : 37	0.0071	0.0094	-	-	-	-
1993-08-18 13 : 46	0.0059	0.0092	-	-	-	-
2002-06-11 08 : 19	-0.0098	-0.0041	0.0036	-0.0082	0.0099	-0.0016
2002-06-14 13 : 14	0.0041	-0.0003	0.0052	0.0097	0.0043	0.0086
2002-06-18 18 : 16	-0.0100	-0.0023	-0.0143	-0.0178	(0.1681)	(0.0151)
2002-07-02 14 : 00	-0.0038	-0.0003	-0.0089	0.0069	-0.0132	-0.0136
2002-07-17 11 : 30	0.0050	0.0004	-0.0205	0.0148	0.0034	0.0052
2002-10-03 04 : 31	-0.0041	-0.0043	-0.0087	-0.0424	-0.0160	-0.0101
2003-02-18 01 : 10	0.0054	-0.0016	-0.0196	-0.0095	-0.0067	0.0083
2003-04-20 18 : 08	(-0.0127)	(-0.0031)	-0.0113	0.0042	0.0040	0.0006
2003-05-13 02 : 47	0.0079	-0.0033	0.0119	0.0024	0.0124	-0.0041
2003-05-28 02 : 32	-0.0086	-0.0060	0.0100	0.0032	0.0164	0.0119
2003-05-30 03 : 50	-0.0051	-0.0007	0.0112	0.0277	0.0028	0.0085
2003-06-08 18 : 10	0.0019	-0.0025	0.0159	-0.0007	-0.0082	0.0196
2005-05-15 01 : 12	-	-	-0.0039	0.0072	-0.0466	0.0001
2005-05-18 03 : 21	-	-	-0.0087	0.0077	0.0010	-0.0132
2006-02-15 14 : 24	-	-	-0.0086	-0.0087	-0.0023	-0.0050
2006-03-02 18 : 00	-	-	0.0049	0.0210	0.0132	-0.0025
2006-04-10 08 : 20	-0.0110	0.0032	-	-	-0.0302	0.0038

Comme on peut le voir, l'excentricité de Charon est diminuée à cause de la contribution du jeu d'observations de Buie et al. (2006). Avant de trancher quant à savoir si Charon possède ou non une excentricité non nulle, il nous faudrait disposer d'autres jeux d'observations dont l'astrométrie a été réalisée de manière fiable, celle du jeu de 2002-2003 étant plus sujette à caution (Marc Buie, communication privée). L'excentricité étant malgré tout plus élevée que celle du jeu 2002-2003, le demi-grand axe est moins grand pour compenser cet effet.

Les résidus post-ajustements sont assez proches de ceux de Tholen et al. (2008) pour Nix et Hydra (ceux de Charon ne sont pas donnés dans l'article). Néanmoins, malgré cette proximité, les valeurs des masses de ces deux satellites sont assez différentes de celles données dans Tholen et al. (2008). Elles restent cohérentes à $1.5-\sigma$ près, mais cela revient malgré tout à diviser de moitié la masse de Nix et quadrupler celle d'Hydra. Le fait que les résidus demeurent relativement proches malgré ces différences confirme la grande difficulté à les estimer actuellement.

Comme il a été dit dans l'étude menée à partir de données simulées (cf chapitre 4), les masses des deux satellites sont à la limite de la détection. Celles de Pluton et Charon sont également cohérentes avec celles données dans (Tholen et al., 2008).

Table 6.3 – Conditions initiales des satellites à JD=2452600.5.

	Charon	Nix	Hydra
x(km)	-12523.25	8140.02	2010.63
y(km)	-10261.07	1164.79	11596.10
z(km)	11106.63	-46706.27	64771.15
v_x(km)	6845.94	-7830.78	8402.78
v_y(km)	8712.73	-7621.77	8047.88
v_z(km)	15749.24	-498.09	-101.90

Mouvement héliocentrique de Pluton

Les résidus obtenus après ajustement sont donnés dans les figures 6.4 à 6.14. Les valeurs moyennes et écarts-types de ces résidus sont fournis dans la légende des figures. Les éléments elliptiques initiaux obtenus sont donnés dans la Table 6.5, tandis que les positions/vitesses initiales de Pluton sont données dans la Table 6.6. Les éléments obtenus sont assez proches de ceux du JPL, mais les demi-grands axes diffèrent d'environ 0.2%. À première vue, cette différence peut sembler négligeable. Mais si l'on considère que le système sera exploré par une sonde en 2015, on comprend que cette différence est loin d'être négligeable. En effet, cette différence de demi-grand axe va jouer sur la distance Terre-Pluton, une donnée essentielle pour la navigation de la sonde.

Comparons nos résidus avec ceux obtenus par le Jet Propulsion Laboratory lors de l'élaboration de leur dernière théorie DE421 (Folkner et al., 2008). La Table 6.7 récapitule les moyennes et écarts-types des résidus que nous avons obtenus ainsi que ceux obtenus sur les mêmes observations pour DE421. On peut voir alors que l'on trouve globalement des résidus semblables en terme de moyenne et d'écarts-types. On obtient un résultat semblable en comparant avec la théorie INPOP08.

La principale amélioration en terme de précision et de quantité d'observations a eu lieu dans les années 1990, ce qui correspond au début de l'utilisation massive des caméras CCD. Par rapport aux observations utilisées pour l'élaboration de DE421, nous disposons d'observations allant de 2009 à 2011, et surtout, nous utilisons les données issues des occultations stellaires. En comparant la figure 6.14 issue de nos ajustements, et la figure 6.1 montrant l'écart entre les occultations stellaires et la théorie DE413, on peut voir que nous n'avons pas réussi à améliorer les résidus en ascension droite, mais que la forte pente en déclinaison a été partiellement absorbée. Cette amplitude en ascension droite ne s'explique pas encore. En effet, si des effets de surface (dûs à la rotation de Pluton, pas à des effets saisonniers) peuvent dégrader l'écart-type des observations photométriques, ils devraient se trouver moyennés vu le grand nombre d'observations récentes et donc ne pas influer sur le résultat de l'ajustement. Par conséquent, les effets de surface ne peuvent entraîner de dérive de notre trajectoire et n'apparaîtront pas dans les résidus des occultations. La seule solution qui apparaisse pour le moment serait que la précision astrométrique de l'étoile occultée soit moins bonne que ce que l'on pensait. En effet, nous avons utilisé une précision de 10 mas pour ces occultations, la position

de l'étoile occultée étant toujours réestimée avant une occultation. Pluton bougeant lentement sur le fond du ciel, il est possible que la zone du ciel traversée par Pluton souffre d'importantes erreurs de zone. Par conséquent, même avec une réévaluation de la position astrométrique de l'étoile occultée, la position des étoiles alentour étant trop dégradée, la position astrométrique pourrait toujours être entachée d'une erreur relativement importante. La position de Charon est par contre connue avec une précision suffisante pour raisonnablement écarter la possibilité d'une mésestimation de sa position et donc de la perturbation qu'il occasionne sur le mouvement de Pluton.

L'augmentation du nombre d'observations dans le futur, aussi bien des observations astrométriques que des occultations stellaires, devrait permettre de raffiner encore davantage l'orbite. Il est certain que nous ne pouvons avoir assez d'occultations stellaires sur une courte période de temps pour savoir si l'écart en ascension droite obéit à une loi périodique ou s'il est totalement aléatoire. Néanmoins, la future mission astrométrique Gaia devrait permettre d'effectuer une nouvelle réduction des observations du système. La position des étoiles occultées sera alors connue avec une très grande précision et l'homogénéité du catalogue permettra d'écarter les erreurs issues de cette position. En ce qui concerne les observations anciennes, il serait intéressant de numériser de nouveau les plaques photographiques afin d'effectuer une nouvelle réduction astrométrique.

Table 6.5 – Éléments elliptiques initiaux de Pluton à JD=2452600.5, plan de référence : équateur et équinoxe moyen J2000.

Paramètre	Valeur	Incertitude
a (UA)	39.3114428	0.0000135
e	0.2478048	0.0000003
i (deg)	23.613486	0.000002
Ω (deg)	44.284209	0.000004
ω (deg)	181.651831	0.000013
v (deg)	33.513148	0.000013

Table 6.6 – Positions et vitesses initiales de Pluton à JD=2452600.5, plan de référence : équateur et équinoxe moyen J2000.

X, Y, Z (UA)	-6.62788081093	-29.01127721746	-7.05657719334
V_X, V_Y, V_Z (UA/jour)	0.00312142054	-0.00082294954	-0.00120790283

Table 6.7 – Récapitulatif des moyennes et écarts-types des O-C des jeux d'observations pour notre modèle, DE421 et INPOP08, sous la forme $\mu \pm \sigma$.

	Notre modèle		DE421 INPOP08	
	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")
observations anciennes	-0.028 ± 1.16	0.0235 ± 1.56	-0.104 ± 1.163 0.754 ± 1.342	0.088 ± 1.553 0.142 ± 1.560
Pulkovo	0.027 ± 0.395	0.163 ± 0.418	-0.081 ± 0.388 0.352 ± 0.657	0.027 ± 0.414 0.035 ± 0.414
A.J. Dyer-Lick-Mink	-0.477 ± 0.958	-0.033 ± 0.480	-0.617 ± 0.932 -0.564 ± 0.990	-0.146 ± 0.500 -0.147 ± 0.523
Tokyo-Bordeaux-Flagstaff	-0.029 ± 0.100	-0.007 ± 0.097	-0.053 ± 0.0962 -0.068 ± 0.095	-0.028 ± 0.105 -0.021 ± 0.105
Gemmo-USNO	-0.076 ± 0.197	-0.022 ± 248	-0.110 ± 0.199 -0.129 ± 0.200	-0.014 ± 0.252 -0.004 ± 0.251
Bordeaux	-0.067 ± 0.097	-0.072 ± 170	-0.078 ± 0.091 -0.129 ± 0.200	-0.075 ± 0.146 -0.004 ± 0.251
FASTT de 1995 à 1997	0.016 ± 0.160	0.041 ± 0.198	-0.008 ± 0.159 -0.026 ± 0.160	0.012 ± 0.199 0.020 ± 0.199
FASTT de 1998 à 2000	0.00003 ± 0.102	0.0005 ± 0.086	-0.012 ± 0.102 -0.013 ± 0.102	-0.013 ± 0.089 -0.013 ± 0.089
FASTT de 2000 à 2011	0.004 ± 0.095	-0.032 ± 0.106	0.004 ± 0.096 0.035 ± 0.097	0.001 ± 0.108 -0.014 ± 0.107
Table Mountain	0.0015 ± 0.058	-0.0185 ± 0.078	0.0013 ± 0.058 $0.047 \pm 0.0.062$	0.035 ± 0.081 0.016 ± 0.079
Observatoire de Haute-Provence	0.036 ± 0.073	0.060 ± 0.077	0.031 ± 0.074 0.073 ± 0.082	0.110 ± 0.085 0.094 ± 0.081
Observatoire du Pic du Midi	-0.005 ± 0.030	0.014 ± 0.036	-0.015 ± 0.012 0.036 ± 0.017	0.076 ± 0.043 0.075 ± 0.026
Occultations	0.005 ± 0.044	-0.017 ± 0.019	-0.005 ± 0.067 0.044 ± 0.069	0.033 ± 0.065 0.011 ± 0.065

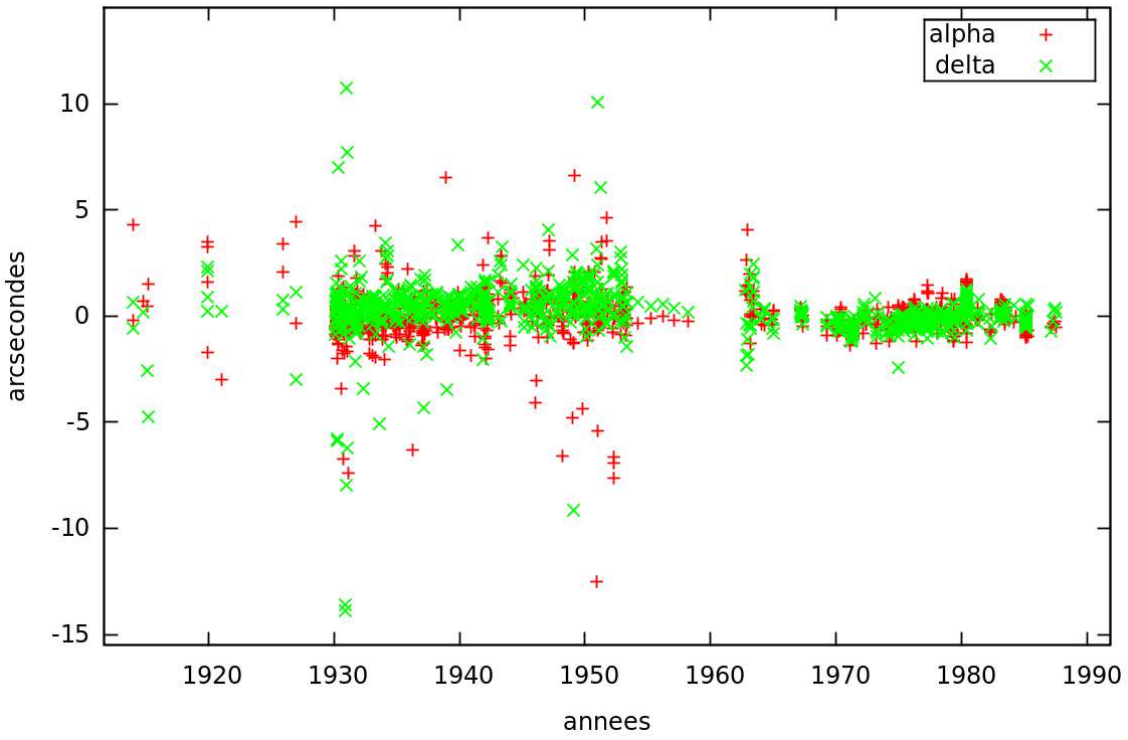

Figure 6.4 – Résidus des observations anciennes effectuées sur plaques photographiques de 1914 à 1987. $\mu_\alpha = -0.028$" ; $\mu_\delta = 0.235$" ; $\sigma_\alpha = 1.16$" ; $\sigma_\delta = 1.56$".

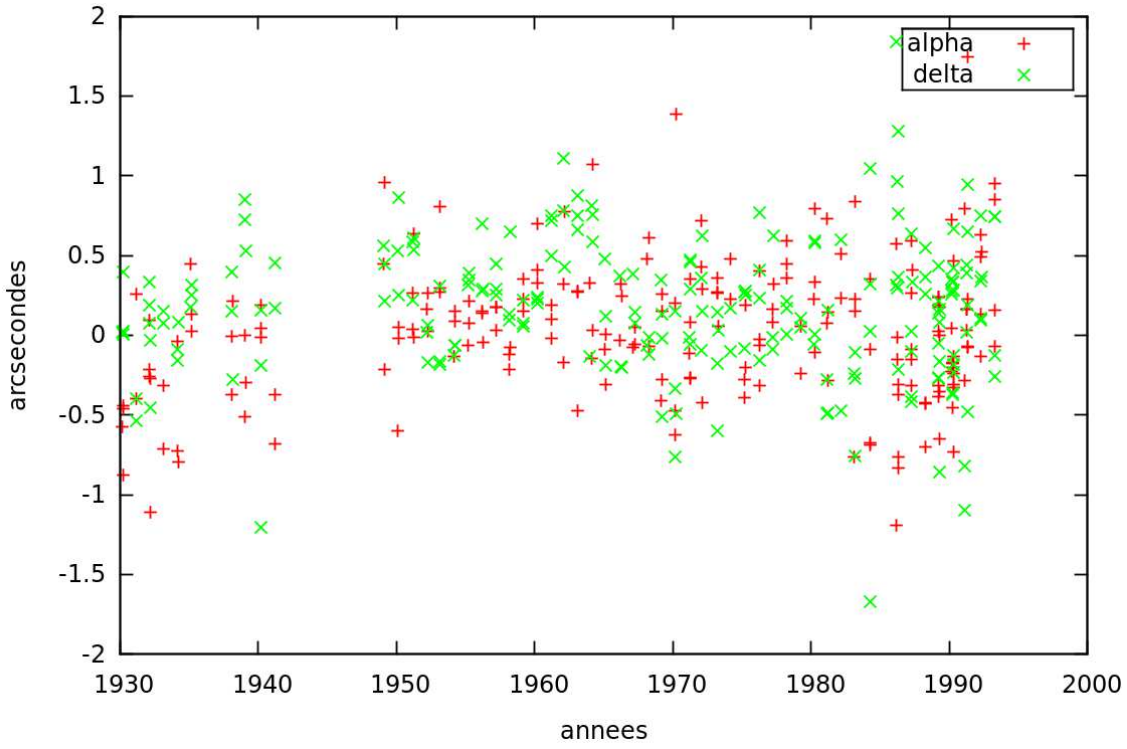

Figure 6.5 – Résidus des observations effectuées à l'observatoire de Pulkovo sur plaques photographiques. $\mu_\alpha = 27$ mas ; $\mu_\delta = 163$ mas ; $\sigma_\alpha = 395$ mas ; $\sigma_\delta = 418$ mas.

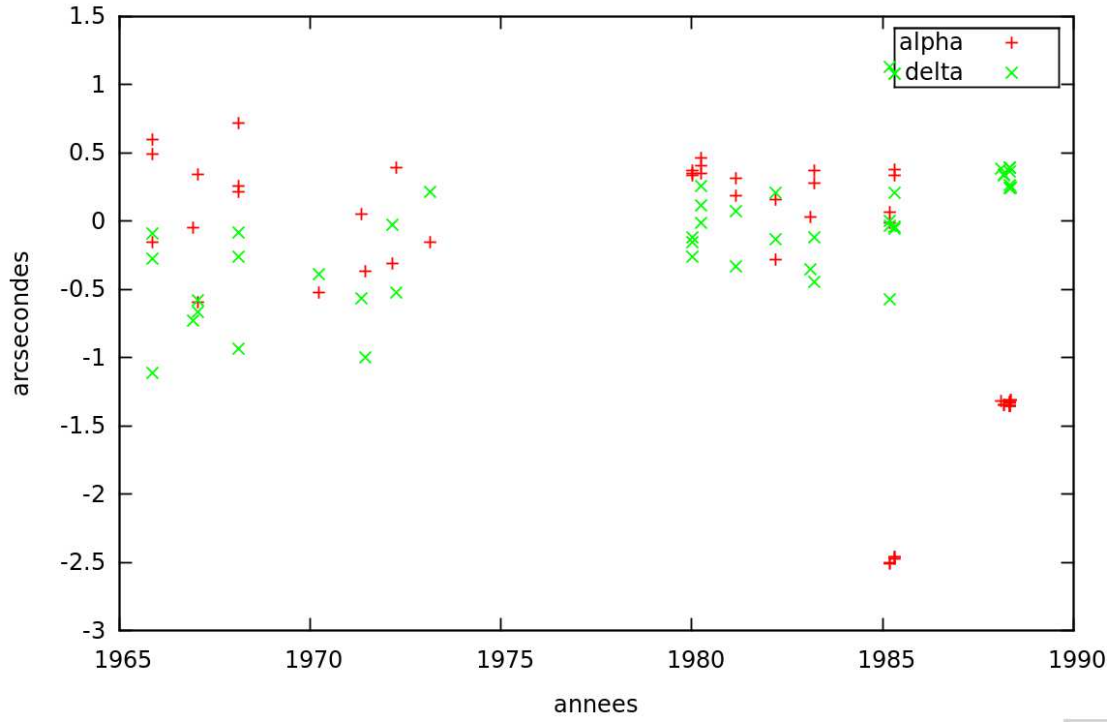

Figure 6.6 – Résidus des observations effectuées au A. J. Dyer Observatory et Lick Observatory et des observations de Mink. $\mu_\alpha = -0.477$" ; $\mu_\delta = -0.033$" ; $\sigma_\alpha = 0.958$" ; $\sigma_\delta = 0.480$".

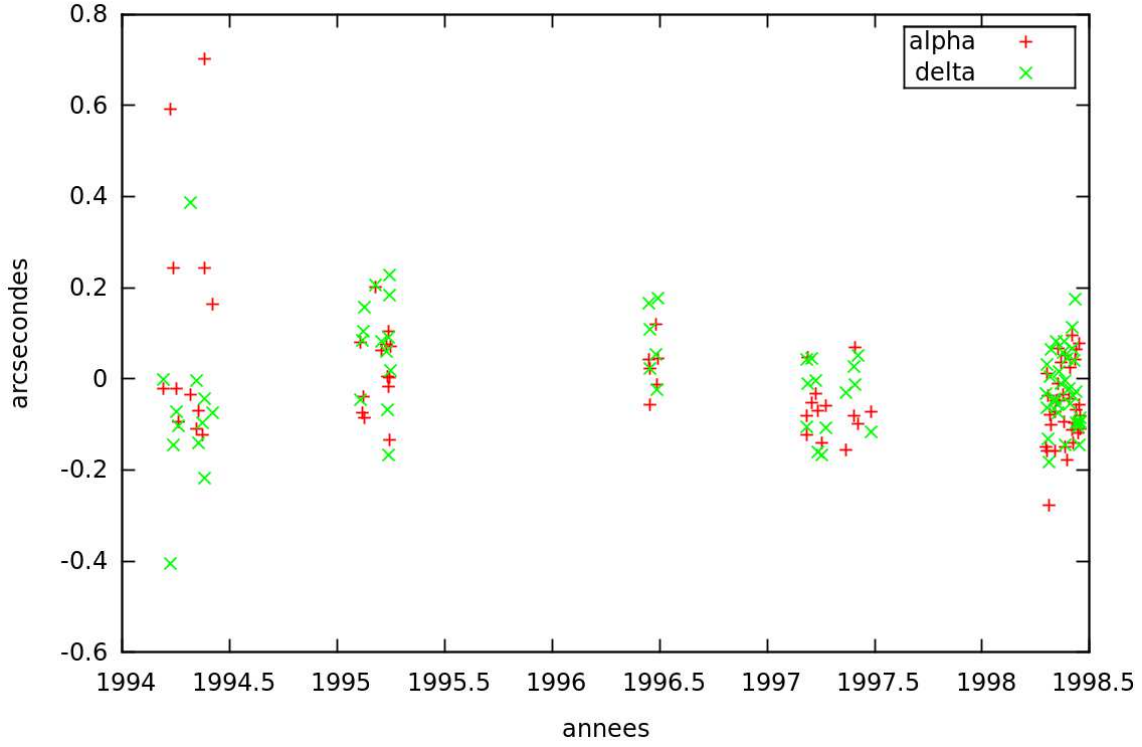

Figure 6.7 – Résidus des observations topocentriques effectuées à Tokyo, Bordeaux et Flagstaff. $\mu_\alpha = -29$ mas ; $\mu_\delta = -7$ mas ; $\sigma_\alpha = 100$ mas ; $\sigma_\delta = 97$ mas.

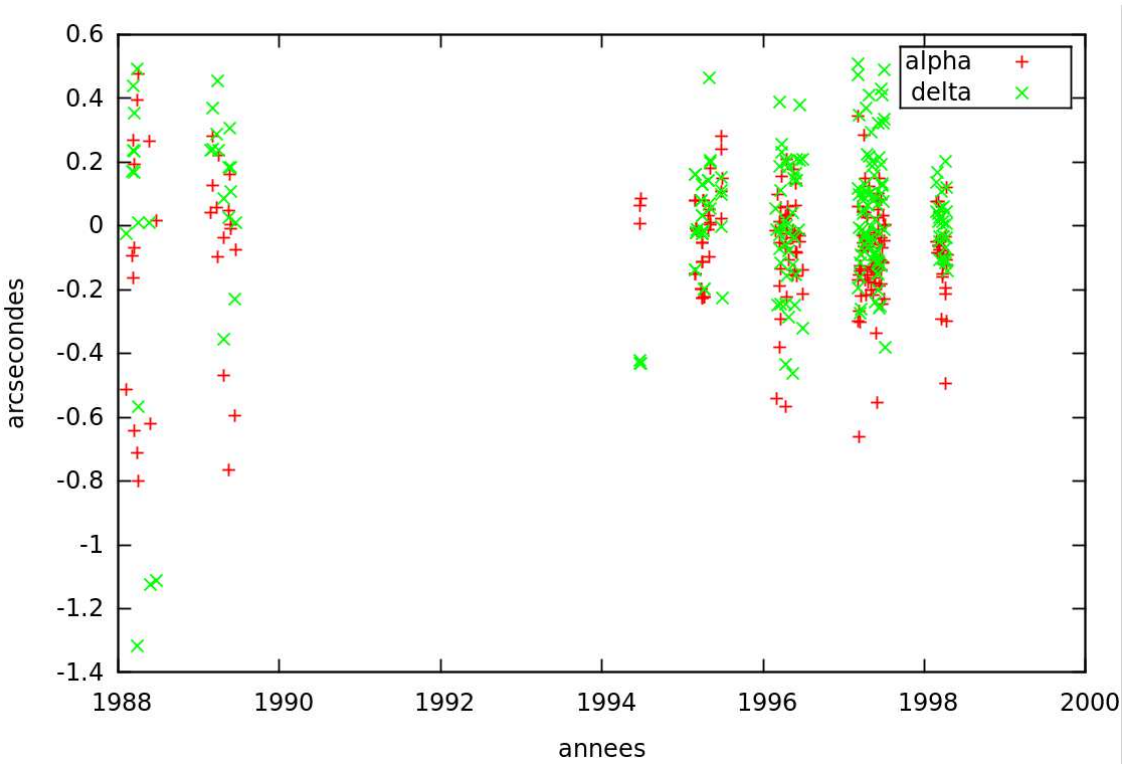

Figure 6.8 – Résidus des observations géocentriques référencées dans Gemmo and Barbieri (1994) ainsi que des observations USNO. $\mu_\alpha = -76$ mas ; $\mu_\delta = -22$ mas ; $\sigma_\alpha = 197$ mas ; $\sigma_\delta = 248$ mas.

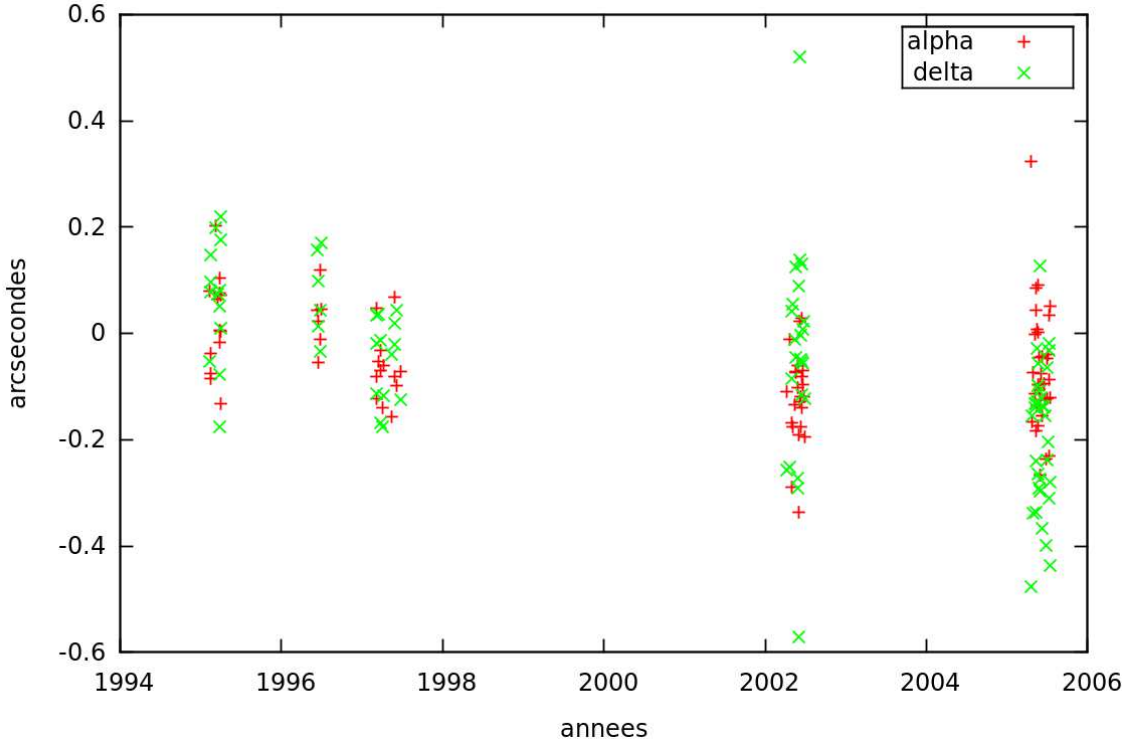

Figure 6.9 – Résidus des observations effectuées à l'observatoire de Bordeaux. $\mu_\alpha = -67$ mas ; $\mu_\delta = -72$ mas ; $\sigma_\alpha = 97$ mas ; $\sigma_\delta = 170$ mas.

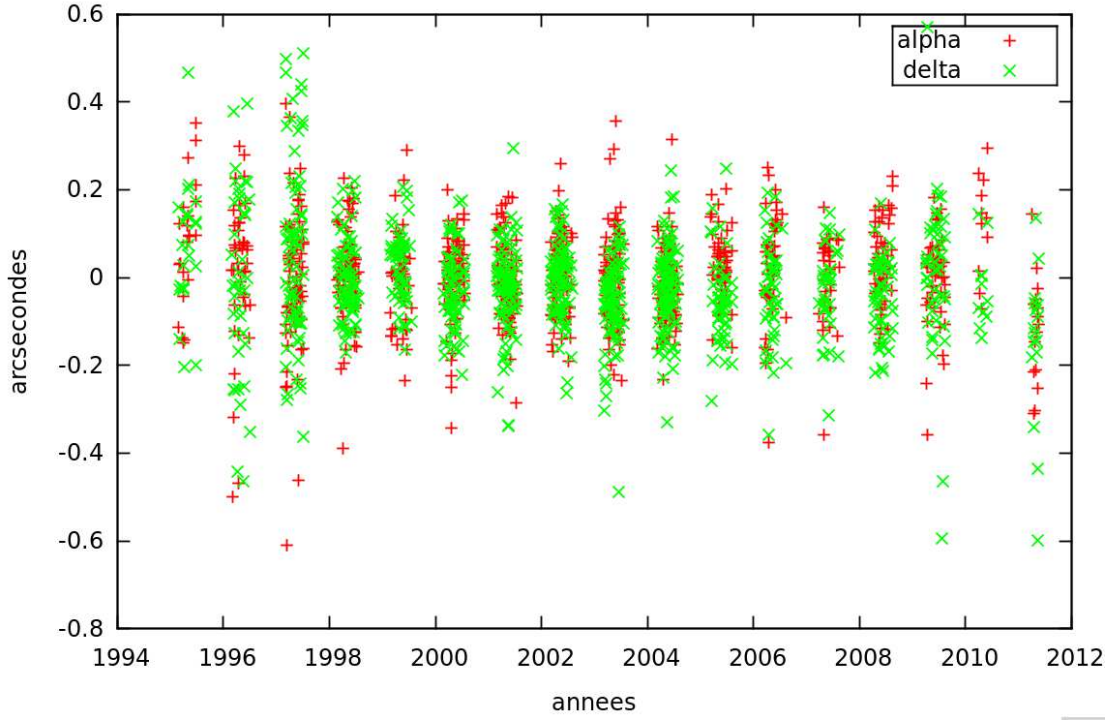

Figure 6.10 – Résidus des observations effectuées au FASTT. Statistiques de 1995 à 1997 : $\mu_\alpha = 16$ mas ; $\mu_\delta = 41$ mas ; $\sigma_\alpha = 160$ mas ; $\sigma_\delta = 198$ mas. Statistiques de 1998 à 2000 : $\mu_\alpha = 0.03$ mas ; $\mu_\delta = 0.5$ mas ; $\sigma_\alpha = 102$ mas ; $\sigma_\delta = 86$ mas. Statistiques de 2000 à 2011 : $\mu_\alpha = 3.6$ mas ; $\mu_\delta = -32$ mas ; $\sigma_\alpha = 95$ mas ; $\sigma_\delta = 106$ mas.

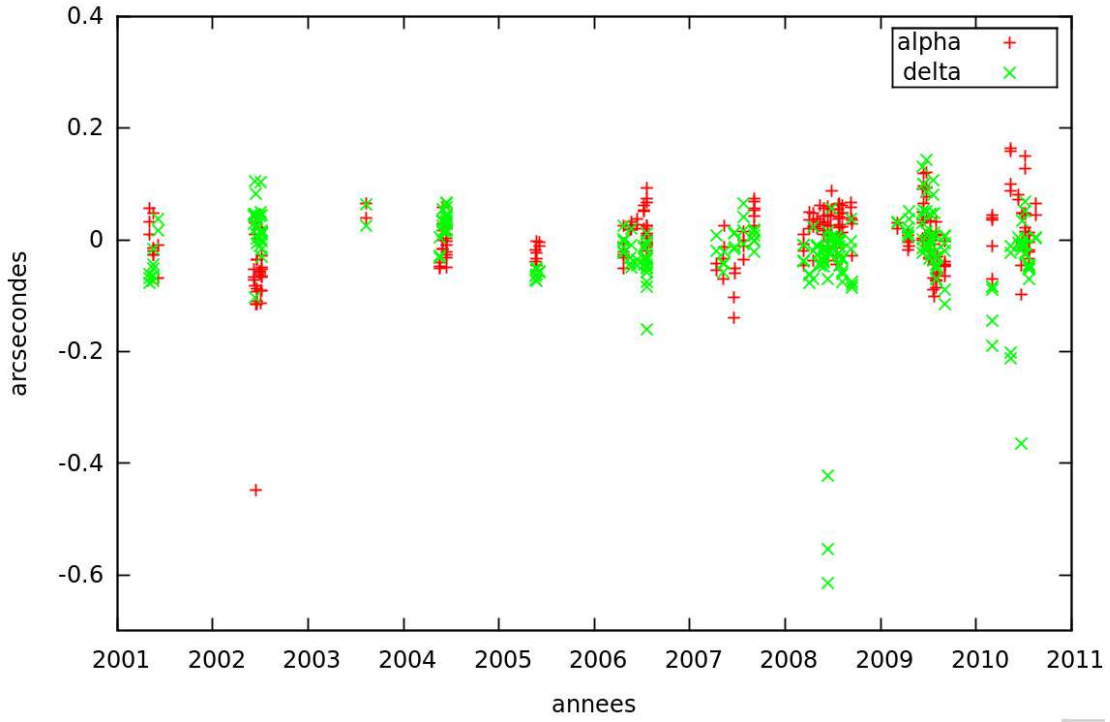

Figure 6.11 – Résidus des observations effectuées à l'observatoire de Table Mountain. $\mu_\alpha = 1.5$ mas ; $\mu_\delta = -18.5$ mas ; $\sigma_\alpha = 58$ mas ; $\sigma_\delta = 78$ mas.

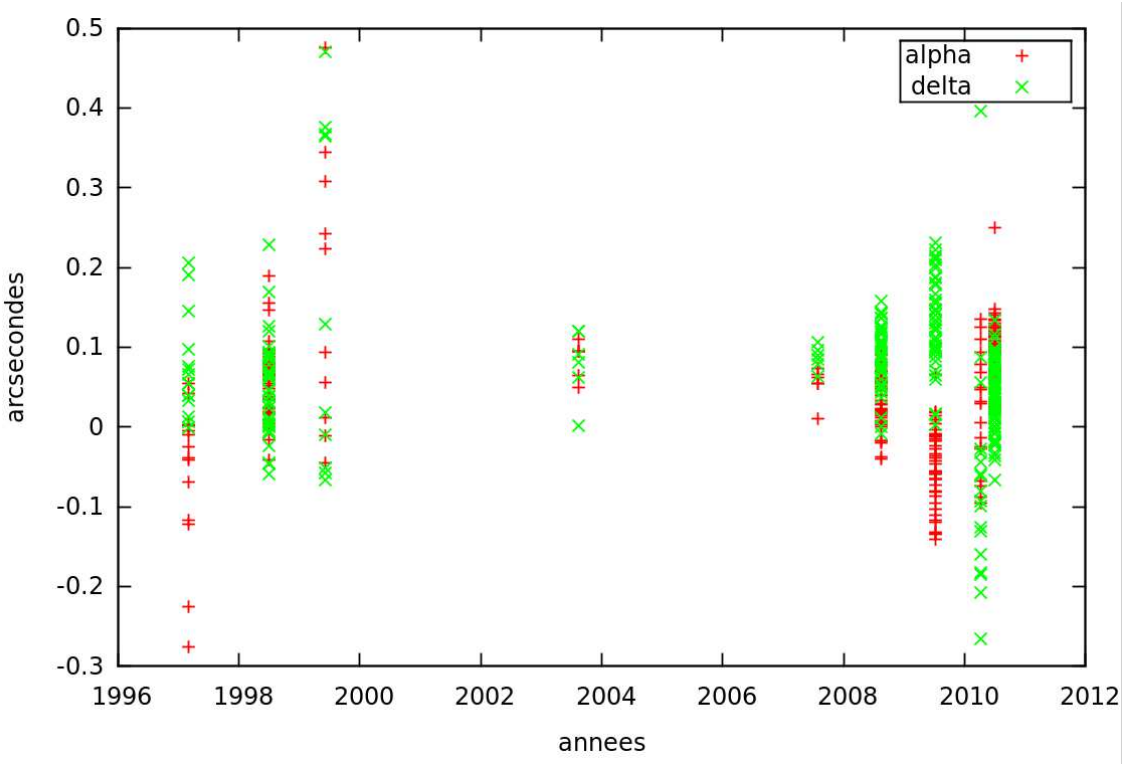

Figure 6.12 – Résidus des observations effectuées à l'Observatoire de Haute Provence. $\mu_\alpha = 36$ mas ; $\mu_\delta = 60$ mas ; $\sigma_\alpha = 73$ mas ; $\sigma_\delta = 77$ mas.

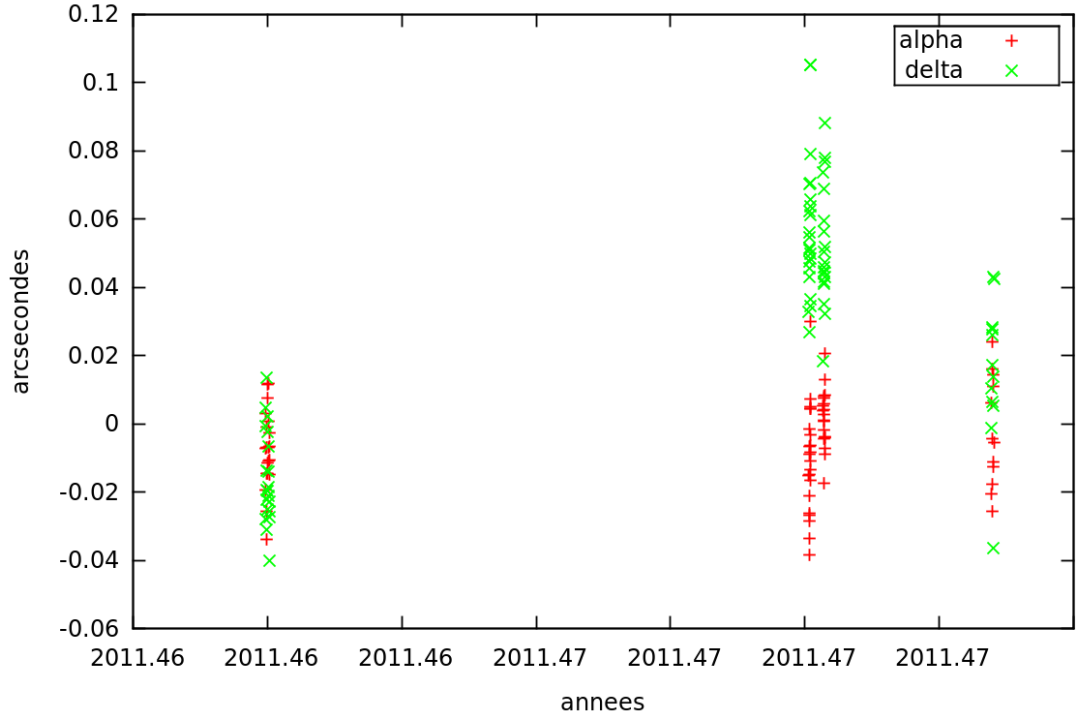

Figure 6.13 – Résidus des observations effectuées à l'Observatoire du Pic du Midi. $\mu_\alpha = -5$ mas ; $\mu_\delta = 30$ mas ; $\sigma_\alpha = 14$ mas ; $\sigma_\delta = 36$ mas.

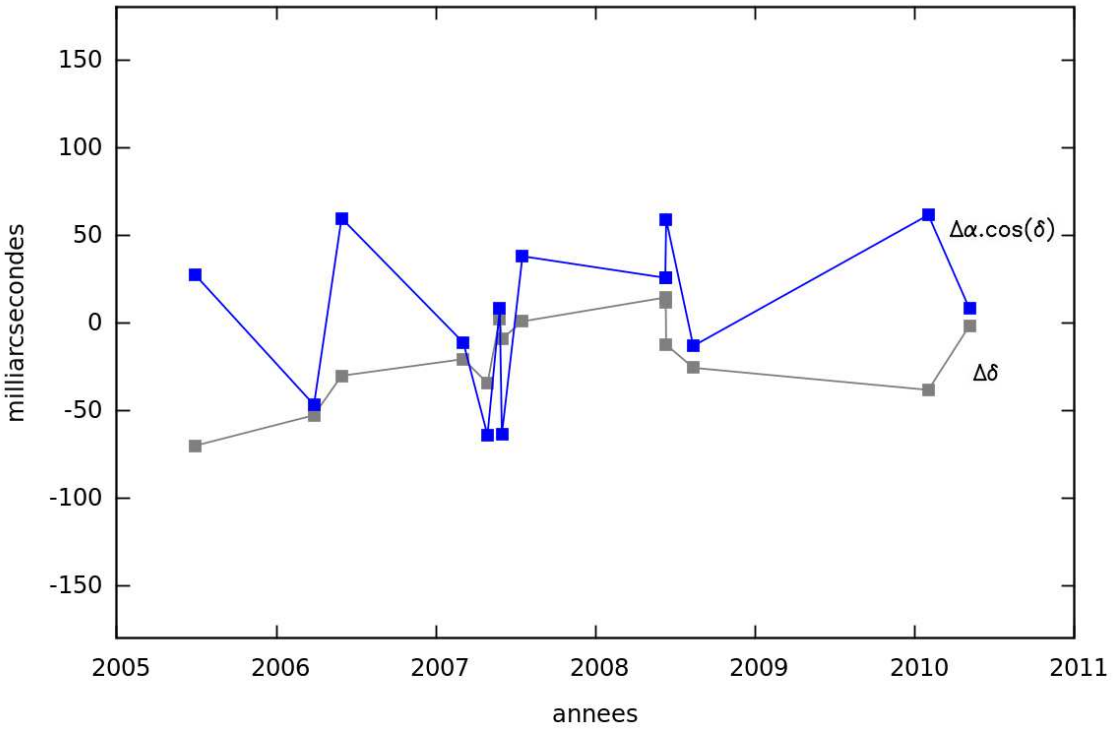

Figure 6.14 – Résidus des occultations de Pluton et Charon. $\mu_\alpha = 5$ mas ; $\mu_\delta = -17$ mas ; $\sigma_\alpha = 44$ mas ; $\sigma_\delta = 19$ mas. La présentation de la figure est légèrement différente pour faciliter la comparaison avec la figure 6.1

6.4 Conclusion

Nous avons ajusté notre modèle aux observations des satellites. Le problème d'incohérence d'échelle entre deux jeux d'observations a été partiellement résorbé, mais les deux ensembles fournissent toujours des excentricités assez différentes. Par ailleurs, les éléments elliptiques obtenus sont assez proches de ceux de Tholen et al. (2008). De même, les masses obtenues sont assez proches de leurs précédentes estimations pour Pluton et Charon. Par contre, ce n'est pas le cas pour Nix et Hydra. Cela s'explique par la grande incertitude attachée à leurs masses.

En ce qui concerne le mouvement héliocentrique de Pluton, son ajustement nous fournit des éléments elliptiques assez proches de ceux du JPL. Si ces différences peuvent ne pas affecter fortement les observations du système, il en va autrement en ce qui concerne la navigation de la sonde New Horizons. Néanmoins, notre ajustement permet de réduire la dérive en déclinaison constatée sur les occultations stellaires et les observations astrométriques, même si cette tendance est moins marquée sur ces dernières.

Chapitre 7

Eugenia

Sommaire

7.1 Présentation du système 113
7.2 Adaptation du modèle 114
7.3 Description des observations 116
7.4 Ajustement aux observations 117
7.4.1 Ajustement initial 117
7.4.2 Réévaluation des incertitudes 117
7.4.3 Ajustement sans les observations du Gemini Telescope 120
7.5 Discussion 122
7.5.1 Aplatissement dynamique 124
7.5.2 Mouvement des satellites 124
7.6 Apport du satellite GAIA 127
7.6.1 Simulation de données 128
7.6.2 Résultats 128
7.7 Conclusion 128

Nous avons adapté notre modèle de manière à reproduire le système de l'astéroïde multiple (45)Eugenia. Après une description des observations utilisées, nous présentons le résultat de notre ajustement des positions-vitesses des satellites. Enfin, la contribution de Gaia à la connaissance du système est abordée (Beauvalet et al., 2012a).

7.1 Présentation du système

(45)Eugenia est l'un des quatre astéroïdes triples connus situé dans la ceinture principale, avec (87)Sylvia (Brown et al., 2001; Marchis et al., 2005), (216)Kleopatra (Marchis et al., 2008b) et (93)Minerva (Marchis et al., 2009). L'objet principal, qui a donné son nom à l'ensemble du système, fut découvert en 1857 par Hermann Goldschmidt et fut baptisé ainsi en l'honneur de l'impératrice Eugénie, épouse de Napoléon III. (45)Eugenia est un corps irrégulier fortement aplati dont le diamètre moyen est de 217 km. Sa forme a été reconstituée grâce aux images effectuées par des grands télescopes, combinées à des inversions de courbes de lumière (cf figure 7.1). Les courbes de lumières ont également permis de déterminer qu'Eugenia possède une rotation rétrograde sur

l'écliptique (Kaasalainen et al., 2002), un fait confirmé dans Marchis et al. (2010b), où la direction du pôle d'Eugenia est $\beta = -19.2 \pm 0.9\,^{\circ}$ et $\lambda = 122.0 \pm 1.2\,^{\circ}$.

Le premier de ses satellites à avoir été découvert, Petit-Prince, est aussi le plus éloigné (Merline et al., 1999) et orbite à environ 3% du rayon de Hill d'Eugenia. Il fut nommé ainsi en référence au fils de l'impératrice Eugénie, mais aussi en référence au héros éponyme du roman de Saint-Exupéry. Son second satellite a pour nom provisoire S2004(45)1, et sera appelé "Princesse" dans le reste du chapitre. Il orbite à une distance plus proche d'Eugenia que Petit-Prince et fut découvert en 2007 (Marchis et al., 2007). La trajectoire des deux satellites est prograde par rapport à l'orientation d'Eugenia, mais les études dynamiques les plus récentes montrent qu'ils ont tous les deux une inclinaison non-négligeable par rapport à l'équateur d'Eugenia (Marchis et al., 2008a, 2010b). Cette situation n'est pas attendue pour un système aussi compact.

À partir de la forme d'Eugenia, et en faisant l'hypothèse qu'il ait une densité constante, il est possible de déduire la valeur de l'aplatissement polaire d'ordre 2 :

$$J_{2th} = \frac{1}{MR_E^2}\left(C_p - \frac{A_p + B_p}{2}\right) \approx \frac{1}{10R_E^2}(\alpha_p^2 + \beta_p^2 - 2\gamma_p^2) \tag{7.1}$$

où A_p, B_p et C_p sont les moments principaux d'inertie d'Eugenia, et α_p, β_p et γ_p les rayons d'un ellipsoïde de révolution ayant approximativement la même forme qu'Eugenia (Scheeres, 1994). Ceci donne une valeur théorique de $J_{2th} = 0.19$. De manière surprenante, la valeur trouvée à partir du mouvement des satellites est beaucoup plus faible $J_2 = 0.06$. La valeur théorique du J_2 donnée ci-dessus suppose qu'Eugenia est homogène. Il est certain que des variations de densité dans l'astéroïde pourraient occasionner des modifications de la valeur des moments d'inertie et donc du J_2. Une autre explication possible peut être la non-prise en compte des autres harmoniques du champ de gravité, principalement le c_{22} étant donné qu'Eugenia peut être assimilé à un ellipsoïde.

Les caractéristiques dynamiques du système sont présentées dans la Table 7.1. Les études dynamiques précédentes ont permis de déterminer l'orientation du pôle d'Eugenia, ainsi que la valeur de son J_2. Les masses des satellites n'ont pas été déterminées, et nous utiliserons les valeurs déjà utilisées dans (Marchis et al., 2010b). Ces valeurs ont été déduites en supposant une taille approximative de 7 km pour les deux satellites et en supposant une densité égale à celle d'Eugenia.

Nous allons adapter notre modèle dynamique pour qu'il corresponde au système d'Eugenia, et ajuster notre modèle aux observations du système.

7.2 Adaptation du modèle

Contrairement au système de Pluton, le système d'Eugenia ne comporte que trois corps. Nous prenons en compte l'influence du coefficient d'aplatissement polaire au second ordre J_2. Contrairement au cas de Pluton, nous allons ajuster la direction du pôle de

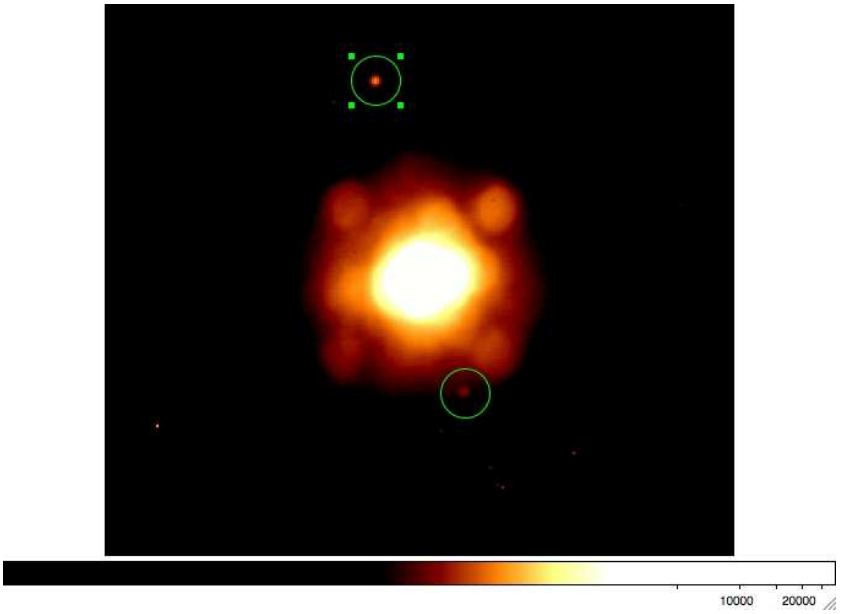

Figure 7.1 – Eugenia et ses satellites, Petit Prince (cercle supérieur) et S/2004(45)1 (cercle inférieur). Image du W.M. Keck II Telescope.

Table 7.1 – Élements elliptiques moyens, masses et diamètres d'Eugenia et de ses satellites, équateur et équinoxe moyen J2000. Les incertitudes données sont les incertitudes à 3-σ.

	Eugenia	Petit-Prince	Princesse
M($M_\odot$)	2.83×10^{-12} fixé	1.26×10^{-16} fixé	1.26×10^{-16} fixé
a	2.720(UA)	1164.51 (km) ± 0.03	610.8 (km) ± 0.3
e	0.082	6×10^{-3} $\pm 2.24 \times 10^{-2}$	6.9×10^{-2} $\pm 1.5 \times 10^{-2}$
i(deg)	6.610	107.6 ± 2.1	127 ± 30
Ω(deg)	147.939	202.5 ± 0.6	210 ± 3
ω(deg)	85.137	138 ± 48	95 ± 63
D(km)	$305 \times 220 \times 145$	13	6
P	4.49 (years)	4.766 (days)	1.8 (days)

rotation du corps principal, ainsi que son J_2, il nous faut donc ajouter le calcul des dérivées partielles des positions des corps du système en fonction de ces paramètres (cf chapitre 4). Nous n'ajusterons pas les masses du système, la masse d'Eugenia étant supposée connue (Marchis et al., 2008a), et les masses des satellites estimées à partir de leur taille en supposant une densité semblable à celle d'Eugenia. Au total, cela signifie qu'il nous faut intégrer 9 équations du mouvement et 189 équations variationnelles.

De manière générale, nous reprenons les conditions initiales issues de Marchis et al. (2010b). Les positions et vitesses initiales d'Eugenia par rapport au Soleil viennent de NOE-AST, une implémentation de NOE qui permet d'ajuster les positions des astéroïdes aux observations MPC.

7.3 Description des observations

Comme pour les satellites de Pluton, les satellites d'Eugenia ne peuvent être observés que grâce à des systèmes d'optique adaptative, ou grâce au Hubble Space Telescope. En 1998, on dispose de 3 observations effectuées au Canada France Hawai Telescope

- nombre d'observations : 3 de Petit-Prince
- incertitude des observations : 70 mas
- repère : ICRF J2000
- type d'observations : CCD
- source : Merline et al. (1999)

En 2004, on dispose d'observations de Petit Prince et de Princesse réalisées au Very Large Telescope-UT4 (VLT-UT4)

- nombre d'observations : 25 de Petit-Prince et 3 de Princesse
- incertitude des observations : 9 mas pour Petit Prince, 20 mas pour Princesse
- repère : ICRF J2000
- type d'observations : CCD
- source : Marchis et al. (2010b)

De 2003 à 2007, on dispose d'observations réalisées au W.M. Keck II Telescope

- nombre d'observations : 10 de Petit-Prince et 3 de Princesse
- incertitude des observations : 6 mas pour Petit Prince, 17 mas pour Princesse
- repère : ICRF J2000
- type d'observations : CCD
- source : Marchis et al. (2010b)

En 2010, on dispose d'observations réalisées au W.M. Keck II Telescope et au Gemini Telescope

- nombre d'observations du Keck : 2 de Petit-Prince et 2 de Princesse
- incertitude des observations : 6 mas pour Petit Prince, 17 mas pour Princesse
- nombre d'observations du Gemini : 3 de Petit-Prince et 2 de Princesse
- incertitude des observations : 10 mas pour Petit Prince, 20 mas pour Princesse
- repère : ICRF J2000
- type d'observations : CCD
- source : Franck Marchis (communication privée)

Enfin, on dispose d'une observation du HST en 2001 (source : Franck Marchis).

7.4 Ajustement aux observations

7.4.1 Ajustement initial

Dans un premier temps, nous avons effectué la même démarche que dans Marchis et al. (2010b) de manière à vérifier si l'adaptation de notre modèle dynamique a été correctement effectuée. C'est à dire que, à partir des observations s'étendant de 1998 à 2007, nous avons ajusté la valeur du J_2 et la direction du pôle de rotation en même temps que les éléments elliptiques initiaux de Petit-Prince. Les quelques observations de Princesse ne suffisant pas à mettre en évidence l'effet du J_2, c'est seulement après l'ajustement de Petit-Prince que nous ajusterons les éléments elliptiques de Princesse. Les résultats trouvés sont très semblables à ceux de Marchis et al. (2010b).

Par la suite, nous effectuons la même démarche, mais en prenant en compte les observations de 2010 également. Les résidus post-ajustement pour les deux satellites sont donnés dans les figures 7.2 et 7.3. Comme on peut le voir sur ces figures, les O-C des deux satellites ne sont pas satisfaisants en 2010, particulièrement ceux de Princesse. En raison de certaines de ces observations qui faisaient diverger notre ajustement lorsque l'on tentait d'ajuster la trajectoire des satellites, nous n'avons pas pu ajuster la totalité des éléments elliptiques de Princesse, mais uniquement son excentricité, son inclinaison et la longitude de son noeud ascendant. Les valeurs des éléments elliptiques initiaux trouvés ainsi que leurs incertitudes à 1-σ sont données dans la Table 7.2, tandis que les écarts-type et moyennes des O-C sont donnés dans la Table 7.4 . Les positions et vitesses initiales cartésiennes obtenues sont données dans la table 7.3

Table 7.2 – Éléments elliptiques de Petit-Prince et Princesse à JD=2452980.0.

Paramètre	Petit-Prince	Princesse
a (km)	1164.42 ±0.01	610.78
e	0.0070 ±0.0012	0.063±0.004
I (deg)	106.60±0.26	127.44 ±0.15
Ω(deg)	201.61 ±0.30	210.53±0.63
ω (deg)	131±9	95
M (deg)	12 ±9	-186

7.4.2 Réévaluation des incertitudes

Comme on peut le voir sur la figure 7.3 qui montre les O-C de Princesse, nous ne sommes pas parvenus à une solution satisfaisante. Plusieurs explications sont possibles à cela. En premier lieu, on peut soupçonner que le J_2 et la direction du pôle d'Eugenia sont mal déterminés. En effet, ces paramètres sont obtenus en même temps que les positions-vitesses initiales de Petit-Prince lors de l'ajustement. Les observations de ce dernier sont

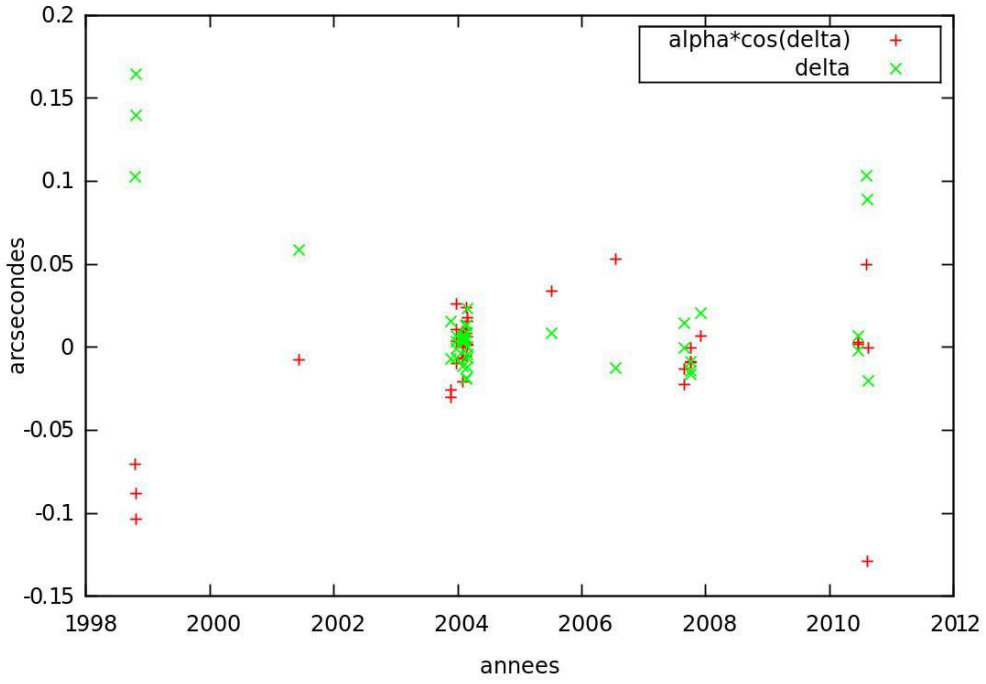

Figure 7.2 – Résidus post-ajustement de Petit Prince.

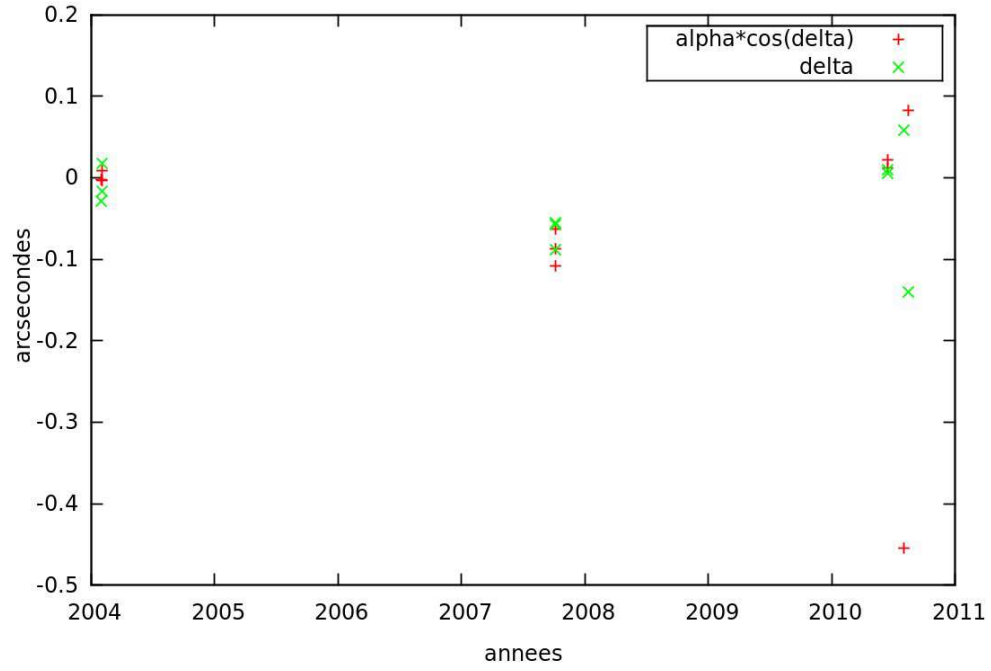

Figure 7.3 – Résidus post-ajustement de Princesse.

Table 7.3 – Positions et vitesses initiales à JD=2452980.0

Petit Prince			
x, y, z (km)	787.877	525.029	664.115
v_x, v_y, v_z (km/jour)	1003.56	13.50	-1197.34
Princesse			
x, y, z (km)	204.506	-337.294	-515.180
v_x, v_y, v_z (km/jour)	-1725.07	-1037.07	-22.11
Eugenia			
J_2, λ, β	0.0573 ±0.0004	119.30 ±0.31	-21.18±0.25

Table 7.4 – Moyennes et écarts-types des O-C de Petit Prince et Princesse.

	Petit Prince		Princesse	
	$\alpha * \cos(\delta)$	δ	$\alpha * \cos(\delta)$	δ
μ (mas)	-5.5	15.6	-59	-29.5
σ (mas)	34.0	40.8	142	54.7

de surcroît plus nombreuses que celles de Princesse et vont donc dominer la solution du pôle. Or, Petit-Prince étant le satellite le plus éloigné, il est le moins sensible à l'effet du J_2. Il est donc possible que le J_2 que l'on obtient permette de reconstituer une bonne orbite de Petit Prince, mais pas une bonne orbite de Princesse. Mais alors nous sommes confrontés à un autre problème : pourquoi la solution des orbites semble-t-elle cohérente entre 2004 et 2008 pour se dégrader ensuite [1] ?

Ces incertitudes ont peut-être été sous-estimées. Les incertitudes des observations que nous avons utilisées sont celles que nous a fournies Franck Marchis. Cette estimation est basée sur la précision de l'ajustement du centre de la figure de diffraction des satellites [2], et ne prend donc pas en compte l'erreur commise sur le facteur d'échelle. En effet, le facteur d'échelle est connu à 0.1 mas/pixel près. Pour Princesse, situé à environ 30 pixels d'Eugenia, cela signifie que le facteur d'échelle ajoute une incertitude de 3 mas. De plus, Eugenia n'est pas sphérique, et on peut sans doute s'attendre à au moins un dixième de pixel d'incertitude sur son centre, soit 2 mas. Cela signifie qu'on peut ajouter 5 mas d'incertitude sur les observations de Princesse. En ce qui concerne Petit Prince, il peut être situé jusqu'à 60 pixels d'Eugenia, ce qui signifie 6 mas d'incertitude supplémentaire, ajouté aux 2 mas de la position du centre d'Eugenia, soit une incertitude supplémentaire pouvant aller jusqu'à 8 mas, ce qui revient pratiquement à doubler l'incertitude d'origine. Reste aussi tout simplement la possibilité que nous n'ayons pas assez d'observations du satellite pour contraindre efficacement sa trajectoire.

Pour savoir si une dégradation des incertitudes des positions des satellites permettrait d'améliorer les choses, nous avons de nouveau ajusté notre modèle en considérant cette fois que pour l'équivalent d'une seconde d'arc d'écart entre un satellite et Eugénia, l'incertitude était augmentée de 5 mas, puis encore de 2 mas pour l'indétermination du centre d'Eugenia. Nous ajustons en deux étapes, tout d'abord nous ajustons les

1. L'incertitude sur les observations du CFHT et le fait que nous n'ayons qu'une seule observation du HST entraîne que l'on ne peut vraiment parler de cohérence avant 2004

2. ou PSF : point-spread function.

éléments elliptiques initiaux de Petit Prince ainsi que le J_2 d'Eugenia et la direction de son pôle, puis nous ajustons les éléments elliptiques de Princesse. Nous n'ajustons pas le demi-grand axe, l'argument du périhélie et le moyen mouvement de Princesse. Les éléments elliptiques obtenus sont dans la Table 7.5, leur équivalent en positions-vitesses initiales dans la Table 7.6, les O-C après ajustement dans les figures 7.4 et 7.5 et les moyennes et écarts-types de ces O-C dans la Table 7.7.

Table 7.5 – Éléments elliptiques de Petit-Prince et Princesse à JD=2452980.0 après réévaluation des incertitudes des observations.

Paramètre	Petit-Prince	Princesse
a (km)	1164.42 ±0.01	610.78
e	0.0075 ±0.0021	0.056±0.005
I (deg)	106.59±0.42	127.67 ±0.16
Ω(deg)	201.55 ±0.49	211.04±0.83
ω (deg)	131±15	95
M (deg)	12 ±15	-186

Table 7.6 – Positions et vitesses initiales à JD=2452980.0, direction du pôle et valeur du J_2 d'Eugenia, après réévaluation des incertitudes des observations.

Petit Prince			
x, y, z (km)	787.610	523.822	664.409
v_x, v_y, v_z (km/jour)	1004.73	13.24	-1197.34
Princesse			
x, y, z (km)	207.326	-335.274	-510.586
v_x, v_y, v_z (km/jour)	-1726.98	-1058.22	-21.09
Eugenia			
J_2, λ, β	0.0571 ±0.0005	118.87 ±0.53	-21.38±0.37

Table 7.7 – Moyennes et écarts-types des O-C de Petit Prince et Princesse après réévaluation des incertitudes.

	Petit Prince		Princesse	
	$\alpha * \cos(\delta)$	δ	$\alpha * \cos(\delta)$	δ
μ (mas)	-5.6	15.6	-61	-29.2
σ (mas)	34.1	40.3	143	55.7

7.4.3 Ajustement sans les observations du Gemini Telescope

Les O-C de Petit Prince semblent se dégrader en 2010, uniquement sur les observations du Gemini Telescope. On trouve plus ou moins le même phénomène pour Princesse,

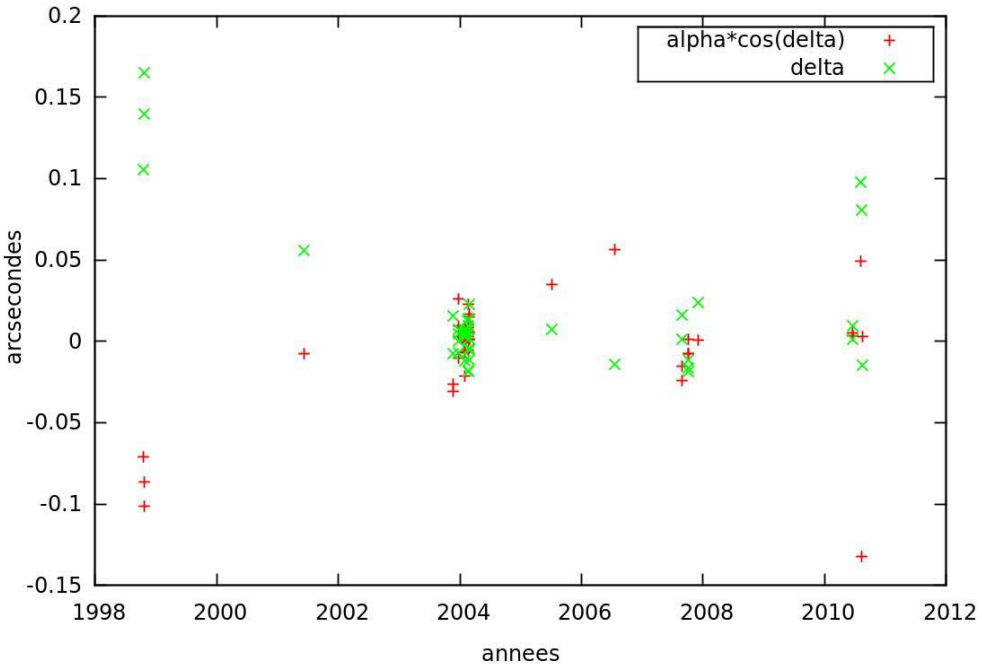

Figure 7.4 – Résidus post-ajustement de Petit Prince après réévaluation des incertitudes des observations.

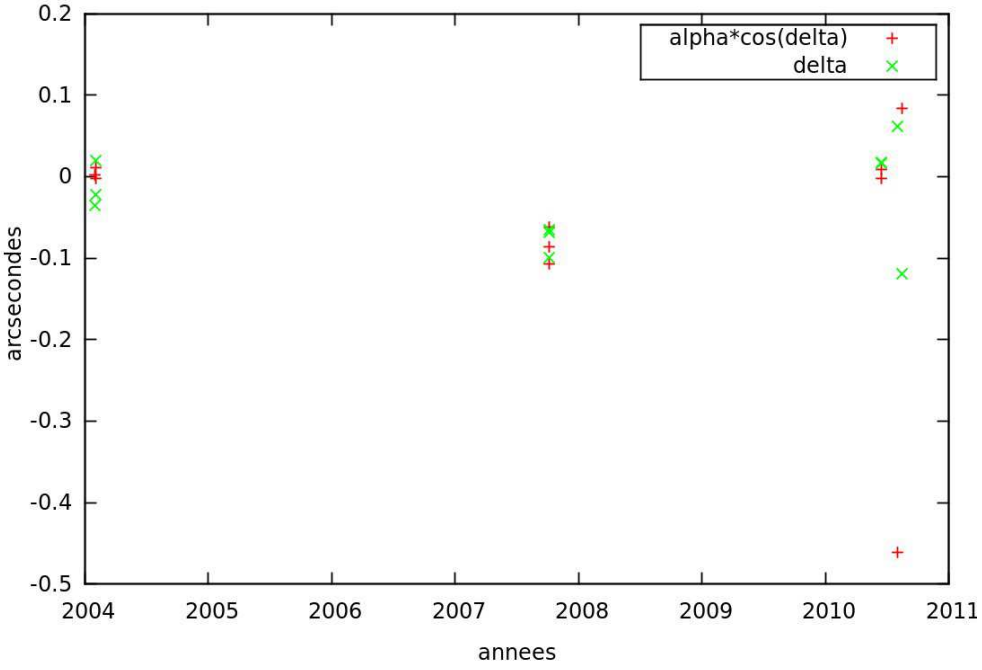

Figure 7.5 – Résidus post-ajustement de Princesse après réévaluation des incertitudes des observations.

avec une observation du Keck Telescope en 2010 dont l'O-C est assez correct, alors que les deux observations du Gemini sont très mauvaises et ont tendance à dégrader l'ajustement. Pour ces raisons, nous avons effectué un ajustement du système en ne tenant pas compte des observations effectuées au Gemini, les autres observations étant dotées des incertitudes donnée dans le paragraphe 7.4.1. Comme précédemment, nous n'avons pas ajusté tous les éléments elliptiques de Princesse. Les éléments elliptiques obtenus sont dans la Table 7.8, les positions-vitesses initiales dans la Table 7.9, les O-C après ajustement dans les figures 7.6 et 7.7 et les moyennes et écarts-types de ces O-C dans la Table 7.10. Les résidus obtenus en 2010 avec les observations du Keck Telescope sont cohérents avec ceux des autres observations. Néanmoins, il ne s'agit que de deux observations effectuées pendant la même nuit. Pour savoir s'il y a réellement un aspect dynamique du système que nous n'avons pas pris en compte ou si les observations issues du Gemini Telescope sont mauvaises, il nous faudrait davantage d'observations issues des deux télescopes sur la même période.

Table 7.8 – Éléments elliptiques de Petit-Prince et Princesse à JD=2452980.0 sans les observations du Gemini Telescope.

Paramètre	Petit-Prince	Princesse
a (km)	1164.42 ±0.01	610.78
e	0.0043 ±0.0012	0.087±0.005
I (deg)	107.08±0.27	126.63 ±0.19
Ω(deg)	201.96 ±0.30	207.72±0.72
ω (deg)	142±16	95
M (deg)	1 ±16	-186

Table 7.9 – Positions et vitesses initiales à JD=2452980.0 sans les observations du Gemini Telescope.

Petit Prince			
x, y, z (km)	782.074	536.368	667.073
v_x, v_y, v_z (km/jour)	1006.59	11.94	-1189.61
Princesse			
x, y, z (km)	188.491	-348.118	-532.483
v_x, v_y, v_z (km/jour)	-1730.08	-931.100	-26.09
Eugenia			
J_2, λ, β	0.0583 ±0.0004	121.17 ±0.35	-20.46±0.25

7.5 Discussion

On peut voir que la solution obtenue s'éloigne très peu de celle de (Marchis et al., 2010b). L'inclinaison des satellites sur l'équateur d'Eugenia est de nouveau confirmée,

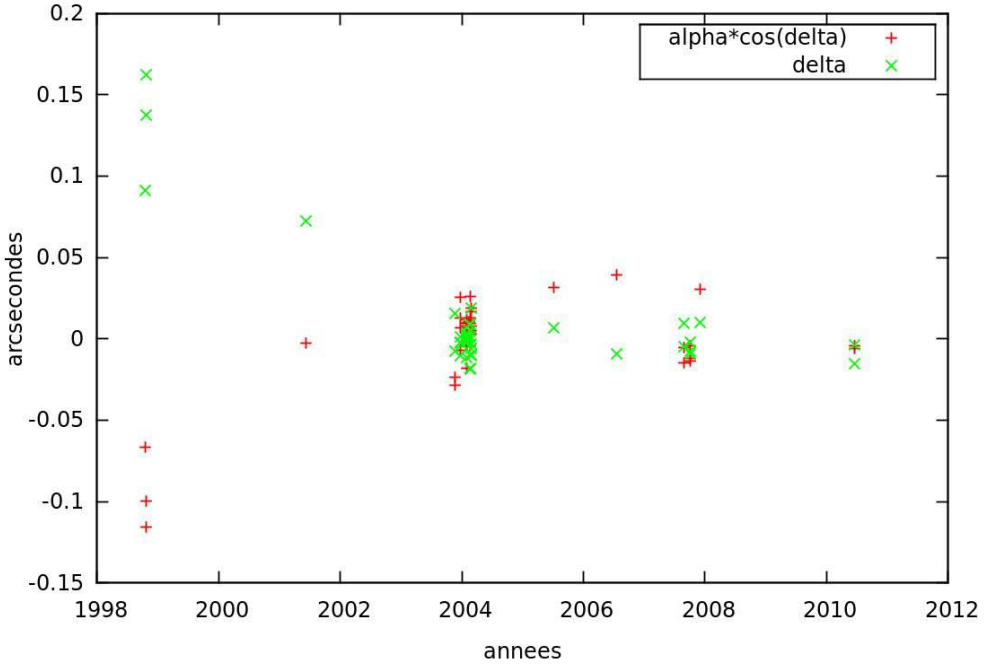

Figure 7.6 – Résidus post-ajustement de Petit Prince après réévaluation des incertitudes des observations et sans les observations du Gemini Telescope

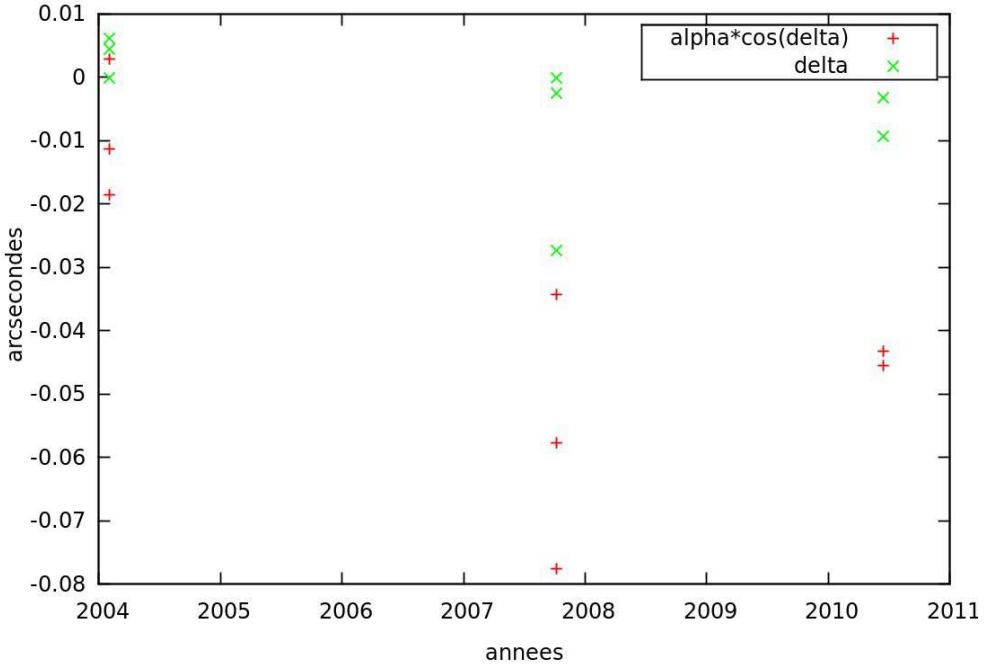

Figure 7.7 – Résidus post-ajustement de Princesse après réévaluation des incertitudes des observations et sans les observations du Gemini Telescope

Table 7.10 – Moyennes et écarts-types des O-C de Petit Prince et Princesse sans les observations du Gemini Telescope.

	Petit Prince		Princesse	
	$\alpha * \cos(\delta)$	δ	$\alpha * \cos(\delta)$	δ
μ (mas)	-3.0	9.9	-35.6	-4.0
σ (mas)	29.8	37.5	24.4	9.9

de même que la faible valeur du J_2 dynamique. En sus de ces particularités faisant du système d'Eugenia un système très différent de celui des planètes et des planètes naines, nous ne connaissons rien de la rotation ou de la forme de ses satellites, de leur structure interne... Nous allons donc tenter ici d'introduire quelques pistes de réflexion pour une future étude du système.

7.5.1 Aplatissement dynamique

On propose ici une possible explication du faible J_2 obtenu à partir de l'ajustement. Eugenia est un astéroïde assimilable à un ellipsoïde triaxial, par conséquent, on peut s'attendre à ce que la déformation associée au c_{22} joue un rôle dans le mouvement des satellites. Le fait de ne pas prendre en compte ce coefficient dans notre modèle peut-il induire de façon virtuelle un aplatissement dynamique plus faible que ce que l'on attend ? Eugenia a une période de rotation d'environ six heures, alors que Petit Prince, le satellite à partir duquel on détermine le J_2, a une période de révolution de presque cinq jours. Dans ces conditions, l'effet du c_{22} est moyenné sur une période et "ajouté" à la contribution du J_2 (cf équation 3.34). Par conséquent, l'effet du c_{22} peut être compensé lors de l'ajustement par une augmentation du J_2. On peut donc en conclure que l'ajustement du c_{22} ne permettrait pas de résoudre le problème de l'aplatissement dynamique détecté. Le cas des autres harmoniques reste toutefois à étudier.

Une autre explication pourrait venir de la structure interne d'Eugenia. On sait qu'Eugenia est peu dense, faisant partie des astéroïdes de type *rubble pile*, et c'est à peu près tout ce que l'on sait à ce propos. Eugenia étant un agrégat lâche, il est possible que sa densité soit non-homogène. La présence de cavités pourrait modifier l'aplatissement dynamique ressenti par les satellites, cet aplatissement rendant compte de la répartition de la masse dans le corps. Ceci aurait pour conséquence un aplatissement dynamique plus faible que ne le laisse présager sa forme.

7.5.2 Mouvement des satellites

Effet de marées

À l'heure actuelle, nous n'avons aucune indication sur la forme ou la rotation des satellites. La seule information dont nous disposons est que le corps central, Eugenia est un rubble pile. Les différents éléments constituant un rubble pile seront moins liés entre eux que dans le cas d'un monolithe, les contraintes ne s'exerçant que sur un nombre restreint de points de contact.

Eugenia va lever des marées dans ses satellites et réciproquement. Ces marées vont

dissiper l'énergie du système et donc entraîner une modification des éléments orbitaux des satellites et de la rotation de tous les corps. La dissipation d'énergie est caractérisée par un facteur de qualité Q qui dépend de la phase des matériaux considérés et des interactions entre les differents éléments du corps. De manière générale, le facteur de qualité est défini comme :

- si Q est élevé : la dissipation d'énergie est faible
- si Q est faible : la dissipation d'énergie est importante.

Il est donné par la formule :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{2\pi E_0} \oint \left(\frac{-dE}{dt} \right) dt \tag{7.2}$$

où E_0 est l'énergie maximale emmagasinée par effet de marée pendant un cycle de marée et dE/dt le taux de dissipation de cette énergie au cours du même cycle. Les effets de marées dépendront également du nombre de Love d'ordre 2 : k_2. Si l'on néglige l'excentricité et l'inclinaison du satellite, et si l'on considère que nos corps sont sphériques, la dissipation d'énergie par les marées levées par le primaire dans le satellite entraînera une diminution de la fréquence de rotation de ce dernier suivant :

$$\frac{d\omega_s}{dt} = 5\pi \mathrm{sgn}(n - \omega_s) \frac{k_{2s}}{Q_s} G\rho_p \left(\frac{\rho_p}{\rho_s} \right) \left(\frac{R_p}{a_s} \right)^6 \tag{7.3}$$

où n est la fréquence du moyen mouvement du satellite, ω_s sa fréquence de rotation, k_s son nombre de Love, Q_s son facteur de qualité, ρ_p et ρ_s les densités respectives du primaire et du satellite, R_p le rayon du primaire et a_s le demi-grand axe du satellite. Le nombre de Love estimé pour un rubble pile est donné par Goldreich and Sari (2009) comme :

$$k_2 \approx 10^{-5} \frac{R}{1 \text{ km}} \tag{7.4}$$

À partir de cette formule, il est possible d'évaluer le temps qu'il faut pour qu'un satellite, doté de la vitesse de rotation maximale pour ne pas se disloquer, soit en rotation synchrone. En appliquant cette formule à Petit Prince, avec $Q_s = 100$, Goldreich and Sari (2009) donne un temps de synchronisation d'environ 10 000 ans.

Plusieurs possibilités s'offrent alors. Si Petit Prince est bien un rubble pile, comme Eugenia, et qu'il est en rotation synchrone, on peut penser que le système s'est formé il y a plus de 10 000 ans. Par contre, si Petit Prince est un monolithe, son nombre de Love k_2 sera plus petit que s'il était un rubble pile[3]. La diminution de sa rotation sera moins rapide et il serait alors possible que le satellite ne soit pas synchrone même si le système s'est formé il y a plus de 10 000 ans.

La fréquence de rotation est la quantité modifiée le plus rapidement par les effets de marées(Goldreich and Sari, 2009). Si l'on suppose que Petit Prince est actuellement en résonance synchrone, il est possible de déterminer sa vitesse d'éloignement par rapport à Eugenia. Néanmoins, le développement que nous allons faire ne tient pas compte de la possibilité de résonances causées par l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite du satellite.

3. Ceci est dû au fait que la viscosité μ d'un rubble pile est inférieure à celle d'un monolithe, d'où une relation inverse pour k_2 (Goldreich and Sari, 2009)

Nous allons négliger ces deux paramètres. En ce qui concerne le demi-grand axe du satellite, sa variation dépendra essentiellement de la dissipation d'énergie dans le primaire (en raison du fait que l'on néglige e et i), suivant :

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = 3\frac{k_{2p}}{Q_p}\frac{M_s}{M_p}\left(\frac{R_p}{a}\right)^5 n \tag{7.5}$$

avec $Q_p = 100$ et k_{2p} donné par l'équation 7.4. La formule 7.5 donne actuellement un taux de variation du demi-grand axe de Petit Prince de 4 mm par siècle. Par conséquent, on peut en déduire que les effets de marées ne jouent probablement plus de rôle dans l'évolution du système.

La plupart des approximations prises en compte concernent un possible effet négligeable de l'excentricité et de l'inclinaison. Bien sûr, l'orbite de Petit Prince ne correspond pas vraiment à ce cas de figure, mais nous rapprocher d'une configuration planétaire permet au moins d'approcher ce qui s'est peut-être passé dans le système.

Effet Yarkovsky

L'effet Yarkovsky est un effet non-gravitationnel affectant les petits corps. Considérons la face éclairée d'un objet, cette surface absorbe une partie du rayonnement solaire avant de la réémettre sous forme de rayonnement infrarouge. Seulement, à cause de l'inertie thermique des matériaux qui le composent, ce rayonnement n'est pas réémis instantanément. Pendant le laps de temps écoulé entre l'absorption de l'énergie solaire et sa dissipation, le satellite aura tourné sur lui-même. Ce faisant, le corps réémet le rayonnement dans une direction autre que celle d'où il l'a reçu. Cette dissymétrie est à l'origine d'une force exerçant un couple sur l'objet et modifiant ses paramètres orbitaux.

Pour étudier l'influence de l'effet Yarkovsky sur les satellites d'Eugenia, nous allons nous référer au cas des satellites de Mars (Tajeddine et al., 2011). L'effet Yarkovsky dépend essentiellement de la distance entre le Soleil et le petit corps considéré. Dans le cas de Phobos et Deimos, les modifications entraînées par l'effet Yarkovsky diurne sur leur demi-grand axe et leur excentricité sont négligeables (quelques cm sur un million n'années pour le demi-grand axe). Les masses de Petit Prince et Princesse ne sont pas encore connues, nous ne disposons que d'estimations issues de leur magnitude et de la supposition qu'ils aient une densité égale à celle d'Eugenia. Ces estimations fournissent des masses de ces deux satellites environ dix fois plus petites que celle de Phobos. À distance égale du Soleil, et avec la même conductivité thermique, l'effet Yarkovsky serait donc légèrement plus efficace pour les satellites d'Eugenia qu'il ne l'est sur les satellites de Mars mais demeurerait sans doute toujours négligeable. Seulement, la conductivité thermique des satellites est faible (Bottke et al., 2006) si ce sont des rubble pile, d'où une modification du demi-grand axe plus faible, et leur distance au Soleil est plus grande. On peut donc assez raisonnablement négliger l'effet Yarkovsky quant à l'évolution des éléments elliptiques de Petit Prince et Princesse.

Effet BYORP

BYORP signifie Binary YORP (Yarkovsky-O'Keefe-Radzievskii-Paddack). Il affecte les satellites en rotation synchrone, nous allons donc supposer que Petit Prince a déjà

évolué sous l'effet des marées et qu'il est en résonance spin-orbite. Le satellite va se retrouver affecté par l'effet YORP, la partie de l'effet Yarkovsky affectant la rotation d'un objet, c'est-à-dire qu'il va absorber le rayonnement solaire sur une partie de sa surface, pour ensuite émettre un rayonnement thermique un peu plus tard, donc dans une autre direction. La réémission de l'énergie dans une autre direction va modifier son moment angulaire, et donc ses éléments elliptiques. Pour Petit-Prince, l'évolution du demi-grand axe de Petit Prince est environ 130 fois plus rapide par effet BYORP que par effet de marées (Goldreich and Sari, 2009), mais cela reste insuffisant pour être détectable.

En ce qui concerne l'inclinaison, la configuration $i = 0$ peut aussi bien être un équilibre stable qu'en équilibre instable (Steinberg and Sari, 2011), de même que la configuration $i = \pi/2$. Le point qui nous intéresse le plus est que l'évolution de l'inclinaison par effet BYORP est très lente, de l'ordre de l'âge du système, voire supérieure. La capacité du système à atteindre son point d'équilibre est donnée par la condition $\Delta i \approx \beta^{-1}$ où Δi est la différence entre l'inclinaison de départ et l'inclinaison d'équilibre, et β le rapport entre le moment angulaire orbital du satellite et le moment angulaire total du système, généralement dominé par la rotation du corps central.
Estimons ce rapport pour le cas de Petit Prince. Le moment angulaire de révolution de Petit Prince sera $L_{PPce} = m_{PPce} r^2 \dot{\theta}$ où r est sa distance à Eugenia, et $\dot{\theta}$ sa vitesse angulaire de révolution. Si l'on approxime Eugenia par une sphère pleine, son moment angulaire de rotation sera $L_E = 2/5\ m_E R_E^2 \omega$, où R_E est le rayon d'Eugenia et ω sa vitesse angulaire de rotation. Le rapport des deux nous donne : $\beta \approx 10^{-4}$. Le problème est que l'évolution par effet BYORP est assez lente. Si la variation de l'inclinaison est aussi, voire plus lente que celle du demi-grand axe, alors il sera difficile de savoir si l'effet BYORP a tendance à augmenter l'inclinaison des satellites, ou au contraire à la diminuer.

Les deux satellites ne semblent pas avoir la même inclinaison, même si toute conclusion est difficile à faire vu l'incertitude attachée aux éléments elliptiques de Princesse. Malgré tout, si l'inclinaison de Petit Prince par rapport à l'équateur d'Eugenia est déjà élevée ($\approx 9^\circ$), celle de Princesse semble encore supérieure ($\approx 18^\circ$). À ce jour, aucune explication quant à cette configuration n'est vraiment plus convaincante que les autres. Si les deux satellites se sont formés ensemble, il y a peut être eu collision de l'un d'entre eux avec un objet, ce qui aurait eu pour conséquence de modifier la trajectoire de celui qui a été impacté...

7.6 Apport du satellite GAIA

Tout comme pour Pluton, le satellite GAIA observera régulièrement Eugenia au cours de sa mission. Si Princesse est trop proche d'Eugenia pour être détecté, ce ne sera pas le cas de Petit Prince qui devrait être détectable près de son élongation maximale. Lorsque Petit Prince sera plus proche d'Eugenia, la grande différence de magnitude entre les deux objets empêchera la détection du satellite.

7.6.1 Simulation de données

GAIA devrait observer Eugenia de 2013 à 2018. Pour simuler ces observations, nous avons utilisé une simulation de transits d'astéroïdes sur les CCD de GAIA grâce au programme Rendez-vous. Le calendrier des observations simulées est donné dans l'annexe A.4. Comme Petit-Prince ne pourra pas être détecté lorsqu'il sera au plus près d'Eugenia, nous avons décidé de rejeter les simulations pour lesquelles Petit Prince sera à moins de 0.5 arcsec d'Eugenia. On considère que la précision de ces observations est la même que pour Pluton, c'est à dire 1 mas. Les conditions initiales sont celles de Marchis et al. (2010b). Nous avons alors deux jeux d'observations :

- **1998-2010** : reproduit les observations actuellement publiées
- **1998-2010+GAIA** : reproduit les observations actuellement publiées et les futures observations de GAIA

7.6.2 Résultats

On ajuste simultanément les éléments elliptiques des deux satellites, la direction du pôle et le J_2 d'Eugenia. Les incertitudes que l'on obtient pour les éléments elliptiques des satellites, la direction du pôle et la valeur du J_2 sont données dans la Table 7.11. Les incertitudes que nous obtenons pour le jeu 1998-2010 sont les mêmes que celles de Marchis et al. (2010b) présentées dans la table 7.1. Comme on peut le voir en comparant les deux jeux d'observations, les éléments orbitaux de Petit Prince seront davantage contraints par les observations GAIA, et par conséquent ceux de Princesse également.

Table 7.11 – Incertitudes à 1-σ sur les éléments elliptiques de Petit-Prince et Princesse à JD=2452980.0.

Paramètre	Petit-Prince	Princesse
a (km)	0.010	0.037
e	0.0002	0.011
I (deg)	0.22	0.65
Ω(deg)	0.082	2.2
ω (deg)	2	13
M (deg)	2	12
	Eugenia	
J_2	0.0003	
λ	0.058	
β	0.068	

7.7 Conclusion

À ce jour, nous manquons principalement d'observations pour contraindre véritablement le mouvement de Princesse, sachant qu'il est le satellite dont le mouvement est le plus influencé par la géométrie d'Eugenia. Nous avons néanmoins réussi à retrouver des résultats similaires à ceux obtenus avec le modèle dynamique NOE (Lainey et al., 2007). Les quelques observations supplémentaires dont nous disposons par rapport

à Marchis et al. (2010b) ne nous permettent pas d'améliorer fortement la précision. En revanche, l'augmentation du nombre d'observations, plus particulièrement les observations qui seront effectuées par Gaia, permettra d'améliorer véritablement détermination de la trajectoire des satellites.

Conclusion

Nous avons développé un modèle numérique reproduisant le mouvement d'un système multiple d'astéroïdes. Notre modèle a la particularité de représenter simultanément le mouvement héliocentrique de l'ensemble du système et le mouvement des satellites autour du corps central et permet de prendre en compte l'effet de l'aplatissement polaire et du bourrelet statique de marées. L'application de ce modèle au système de Pluton nous a permis, à partir de données simulées, de déterminer les paramètres dynamiques du système actuellement détectables grâce aux observations. Nous avons également simulé l'évolution de l'incertitude des masses du système en nous fondant sur un programme réaliste d'observations futures. Puis nous avons ajusté notre modèle aux observations du système, aussi bien les observations absolues de Pluton que les observations relatives de ses satellites. Enfin, nous avons adapté notre modèle au système de l'astéroïde triple (45)Eugenia et l'avons ajusté aux observations relatives de ses satellites.

En ce qui concerne le problème de la détermination des masses dans le système de Pluton, et plus particulièrement celles de Nix et Hydra, notre modèle ne peut arriver à de meilleures déterminations que celles de Tholen et al. (2008) en raison du nombre restreint d'observations disponibles et des difficultés inhérentes à cette détermination. Par contre, nous avons pu mettre en avant la très importante contribution que New Horizons apportera à ce problème, ainsi que celle, moins spectaculaire mais néanmoins intéressante, de Gaia. Ainsi, Gaia ne permettra pas seulement d'avoir une précision inégalée de la position astrométrique des étoiles occultées, mais aussi des positions astrométriques absolues précises de Pluton et Charon. De plus, une nouvelle réduction des occultations et observations passées du système permettra d'améliorer la précision des trajectoires des objets du système.

L'ajustement aux observations des satellites actuellement disponibles souffre principalement du problème d'erreur d'échelle du jeu d'observations de 2002-2003, c'est-à-dire justement le jeu d'observations le plus important pour Nix et Hydra. Notre ajustement pourra bénéficier de considérables améliorations lorsque de nouvelles observations seront disponibles de manière à résoudre ce problème d'échelle pour ce jeu.

L'ajustement du mouvement héliocentrique de Pluton donne des résultats similaires à ceux des théories planétaires du Jet Propulsion Laboratory. Néanmoins, le demi-grand axe que nous obtenons diffère de 0.2%. La mission New Horizons traversant le système en 2015, il est peu probable que de nouvelles observations pendant quatre ans permettent de contraindre de manière certaine la distance héliocentrique du système. Une nouvelle réduction astrométrique des plaques photographiques anciennes est donc notre meilleure chance d'améliorer cette situation avant l'arrivée de New Horizons.

L'adaptation de notre modèle au système d'Eugenia nous a permis de confirmer l'efficacité de notre ajustement dans le cas d'un système différent de celui pour lequel il a été conçu à l'origine. Le problème potentiel des observations Gemini n'a toujours

pas été résolu, seules de nouvelles observations pourraient nous permettre de savoir si cette situation est due à une perturbation du système, ou si la réduction astrométrique elle-même est à incriminer. Notre but à terme est d'effectuer simultanément un ajustement du mouvement héliocentrique du primaire et du mouvement de ses satellites, une démarche que nous n'avons pas encore tentée avec Eugenia.

Par ailleurs, il est prévu de raffiner notre modèle en incluant, entre autres, des développements supérieurs des harmoniques du champ de gravité. La plupart des objets composant les systèmes multiples étant irréguliers, il est aussi prévu d'inclure la modélisation de la rotation des objets ainsi que la précession des pôles. Il est également prévu d'inclure les perturbations que peuvent engendrer des rencontres proches entre astéroïdes sur la trajectoire de leurs satellites.

En ce qui concerne le système de Pluton, la découverte de S/2011(134340) 1 risque de remettre en cause de nombreux points. Ce nouveau satellite est bien moins massif que Nix et Hydra, et serait perturbé fortement lors de ses rencontres proches avec ces deux derniers. Suivant l'amplitude de ces perturbations, il sera peut-être possible de déterminer par ce biais les masses de Nix et Hydra. Il est prévu d'adapter notre modèle pour prendre en compte ce nouveau satellite. Ce nouveau satellite va très certainement entraîner une modification du planning d'observations de la sonde New Horizons. En résumé, la découverte de cet objet remet en cause un certain nombre de choses dans le système de Pluton. Elle permettra peut-être de contraindre la valeur des masses de Nix et Hydra qui nous auraient certainement échappées jusqu'à l'arrivée de New Horizons, et ainsi, peut-être éclairera-t-elle l'histoire de la formation de ce système.

Annexes

Annexe A

Dates utilisées pour les simulations

A.1 Système de Pluton

Table A.1 – Dates utilisées pour la simulation des observations entre 2010 et 2014. Toutes les simulations ont été obtenues pour 00 :00 UT.

Dates			
05/31/2010	06/13/2011	06/30/2012	07/14/2013
06/04/2010	06/23/2011	07/07/2012	07/18/2013
06/10/2010	06/28/2011	07/16/2012	07/25/2013
06/15/2010	06/30/2011	07/21/2012	06/03/2014
06/18/2010	07/05/2011	07/24/2012	06/08/2014
06/25/2010	07/13/2011	07/28/2012	06/14/2014
07/01/2010	07/18/2011	06/10/2013	06/19/2014
07/06/2010	07/23/2011	06/15/2013	06/24/2014
07/11/2010	07/28/2011	06/21/2013	06/30/2014
07/17/2010	06/07/2012	06/26/2013	07/07/2014
07/21/2010	06/12/2012	06/30/2013	07/11/2014
07/27/2010	06/19/2012	07/06/2013	07/14/2014
06/08/2011	06/25/2012	07/11/2013	07/28/2014

Table A.2 – Programme prévisonnel des observations de New Horizons : cibles et précision attendues des observations.

Date et heure UT	Cible	précisison (km/pixel)
1/25/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	4049.6
1/27/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	4001.95
1/29/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3954.3
1/31/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3906.65
2/2/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3859
2/4/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3811.35
2/6/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3763.7

2/8/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3716.05
2/10/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3668.41
2/12/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3620.76
2/14/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3573.11
2/16/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3525.46
2/18/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3477.81
2/20/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3430.16
2/22/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3382.51
2/24/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3334.87
2/26/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3287.22
2/28/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3239.57
3/2/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3191.93
3/4/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3144.28
3/6/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	3096.63
4/5/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	2381.9
4/7/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	2334.26
4/9/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	2286.61
4/11/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	2238.97
4/13/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	2191.33
4/15/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	2143.69
4/17/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	2096.05
4/19/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	2048.4
4/21/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	2000.76
4/23/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	1953.12
4/25/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	1905.48
4/27/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	1857.84
4/29/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	1810.19
5/1/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	1762.55
5/3/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	1714.91
5/5/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	1667.27
5/7/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	1619.62
5/9/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	1571.98
5/11/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	1524.34
5/13/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	1476.7
5/15/2015 11 :58	Pluto+Charon+Nix+Hydra	1429.06
6/5/2015 6 :39	Pluto+Charon+Nix+Hydra	233.52
6/6/2015 0 :49	Pluto+Charon+Nix+Hydra	229.01
6/7/2015 6 :31	Pluto+Charon+Nix+Hydra	221.65
6/8/2015 0 :41	Pluto+Charon+Nix+Hydra	217.14
6/9/2015 6 :23	Pluto+Charon+Nix+Hydra	209.77
6/10/2015 0 :33	Pluto+Charon+Nix+Hydra	205.26
6/11/2015 6 :15	Pluto+Charon+Nix+Hydra	197.89
6/12/2015 0 :25	Pluto+Charon+Nix+Hydra	193.38
6/13/2015 6 :07	Pluto+Charon+Nix+Hydra	186.01
6/14/2015 0 :17	Pluto+Charon+Nix+Hydra	181.51
6/15/2015 5 :59	Pluto+Charon+Nix+Hydra	174.14
6/16/2015 0 :09	Pluto+Charon+Nix+Hydra	169.63

6/17/2015 5 :51	Pluto+Charon+Nix+Hydra	162.26
6/18/2015 0 :01	Pluto+Charon+Nix+Hydra	157.75
6/19/2015 5 :49	Nix+Hydra	150.21
6/19/2015 23 :59	Nix+Hydra	145.71
6/21/2015 5 :41	Nix+Hydra	138.37
6/21/2015 23 :51	Nix+Hydra	133.89
6/23/2015 5 :33	Nix+Hydra	126.58
6/23/2015 23 :16	Hydra	122.11
6/23/2015 23 :25	Nix	122.18
6/23/2015 23 :28	Hydra	122.06
6/24/2015 23 :21	Nix	116.29
6/24/2015 23 :24	Hydra	116.16
6/25/2015 4 :47	Hydra	114.83
6/25/2015 23 :16	Hydra	110.28
6/26/2015 5 :03	Nix	108.97
6/26/2015 5 :06	Hydra	108.84
6/26/2015 23 :13	Nix	104.49
6/26/2015 23 :16	Hydra	104.36
6/27/2015 4 :47	Hydra	103
6/27/2015 23 :16	Hydra	98.45
6/28/2015 4 :55	Nix	97.16
6/28/2015 4 :58	Hydra	97.04
6/28/2015 23 :05	Nix	92.66
6/28/2015 23 :08	Hydra	92.56
6/29/2015 4 :47	Hydra	91.17
6/29/2015 23 :16	Hydra	86.61
6/30/2015 4 :47	Nix	85.3
6/30/2015 4 :50	Hydra	85.24
6/30/2015 22 :57	Nix	80.79
6/30/2015 23 :00	Hydra	80.75
7/1/2015 4 :47	Hydra	79.32
7/1/2015 23 :16	Hydra	74.76
7/2/2015 4 :39	Nix	73.41
7/2/2015 4 :42	Hydra	73.42
7/2/2015 22 :49	Nix	68.88
7/2/2015 22 :52	Hydra	68.93
7/3/2015 4 :47	Hydra	67.46
7/3/2015 22 :15	Nix	63.03
7/3/2015 22 :19	Hydra	63.12
7/3/2015 23 :30	Hydra	62.83
7/5/2015 3 :04	Nix	55.83
7/5/2015 3 :09	Hydra	55.98
7/5/2015 4 :37	Hydra	55.62
7/5/2015 22 :32	Hydra	51.18
7/6/2015 8 :36	Nix	48.45
7/6/2015 8 :41	Hydra	48.66
7/7/2015 4 :18	Nix	43.53

7/7/2015 4 :23	Hydra	43.77
7/7/2015 4 :28	Hydra	43.75
7/7/2015 22 :29	Nix	38.99
7/7/2015 22 :32	Hydra	39.26
7/7/2015 22 :53	Hydra	39.18
7/9/2015 4 :11	Nix	31.57
7/9/2015 4 :14	Hydra	31.88
7/9/2015 4 :35	Hydra	31.79
7/9/2015 22 :21	Nix	27.04
7/9/2015 22 :24	Hydra	27.36
7/9/2015 22 :45	Hydra	27.27
7/11/2015 4 :03	Nix	19.64
7/11/2015 4 :06	Hydra	19.96
7/11/2015 4 :27	Hydra	19.87
7/11/2015 22 :13	Nix	15.12
7/11/2015 22 :16	Hydra	15.43
7/13/2015 4 :13	Nix	7.68
7/13/2015 4 :16	Hydra	7.95
7/13/2015 14 :26	Hydra	5.39
7/13/2015 14 :33	Nix	5.1
7/13/2015 23 :14	Hydra	3.21
7/13/2015 23 :17	Nix	2.94
7/14/2015 4 :38	Nix	1.61
7/14/2015 4 :56	Hydra	1.8
7/14/2015 7 :41	Hydra	1.14
7/14/2015 8 :05	Nix	0.77
7/14/2015 10 :00	Nix	0.29
7/14/2015 14 :46	Hydra	0.8
7/14/2015 14 :52	Nix	0.92
7/14/2015 23 :05	Nix	2.95
7/15/2015 2 :41	Hydra	3.69
7/15/2015 2 :45	Nix	3.85
7/16/2015 0 :28	Nix	9.22
7/16/2015 0 :38	Hydra	9.16
7/16/2015 3 :55	Hydra	9.98

Table A.3 – Dates, précision et cibles utilisées pour simuler une extension de la mission New Horizons.

Date et heure UT	Cible	précision (km/pixel)
07/16/2015 05 :50 :00	Nix	10.58
07/16/2015 06 :14 :00	Nix	10.68
07/16/2015 08 :59 :00	Hydra	11.38
07/16/2015 09 :17 :00	Hydra	11.45
07/16/2015 14 :37 :00	Nix	12.81
07/16/2015 14 :41 :00	Hydra	12.83
07/16/2015 23 :21 :00	Hydra	15.03

07/16/2015 23 :29 :00	Nix	15.06
07/17/2015 09 :39 :00	Hydra	17.642
07/17/2015 09 :42 :00	Hydra	17.66
07/18/2015 15 :39 :00	Nix	25.26
07/18/2015 15 :42 :00	Nix	25.27
07/19/2015 09 :28 :00	Hydra	29.78
07/19/2015 09 :49 :00	Hydra	29.873
07/19/2015 09 :52 :00	Hydra	29.88
07/20/2015 15 :10 :00	Nix	37.32
07/20/2015 15 :31 :00	Hydra	37.41
07/20/2015 15 :34 :00	Hydra	37.42
07/21/2015 09 :20 :00	Hydra	41.93
07/21/2015 09 :41 :00	Nix	42.02
07/21/2015 09 :44 :00	Hydra	42.04
07/22/2015 15 :02 :00	Hydra	49.47
07/22/2015 15 :23 :00	Hydra	49.569
07/22/2011 15 :26 :00	Nix	49.58
07/23/2015 09 :27 :00	Hydra	54.15
07/23/2015 09 :32 :00	Hydra	54.17
07/23/2015 09 :37 :00	Hydra	54.19
07/24/2015 05 :14 :00	Nix	59.17
07/24/2015 05 :19 :00	Nix	59.19
07/24/2015 15 :23 :00	Hydra	61.75
07/25/2015 09 :18 :00	Hydra	66.30
07/25/2015 10 :46 :00	Nix	66.67
07/25/2015 10 :51 :00	Nix	66.69
07/26/2015 14 :25 :00	Hydra	73.69
07/26/2015 15 :36 :00	Hydra	73.99
07/26/2015 15 :40 :00	Nix	74.016
07/27/2015 09 :08 :00	Nix	78.44
07/27/2015 15 :03 :00	Hydra	79.94
07/27/2015 15 :06 :00	Hydra	79.95
07/28/2015 09 :13 :00	Hydra	84.55
07/28/2015 09 :16 :00	Nix	84.57
07/28/2015 14 :39 :00	Nix	85.93
07/29/2015 09 :08 :00	Hydra	90.63
07/29/2015 14 :55 :00	Hydra	92.09
07/29/2015 14 :58 :00	Hydra	92.11
07/30/2015 09 :05 :00	Nix	96.71
07/30/2015 09 :08 :00	Hydra	96.72
07/30/2015 14 :39 :00	Hydra	98.12
07/31/2015 09 :08 :00	Hydra	102.81
07/31/2015 14 :47 :00	Nix	104.25
07/31/2015 14 :50 :00	Hydra	104.26
08/01/2015 08 :57 :00	Hydra	108.86
08/01/2015 09 :00 :00	Hydra	108.87
08/01/2015 14 :39 :00	Nix	110.30

08/02/2015 09 :08 :00	Hydra	114.99
08/02/2015 14 :39 :00	Hydra	116.40
08/02/2015 14 :42 :00	Hydra	116.41
08/03/2015 08 :49 :00	Nix	121.01
08/03/2015 08 :52 :00	Hydra	121.02
08/03/2015 14 :39 :00	Hydra	122.49
08/04/2015 09 :08 :00	Nix	127.18
08/04/2015 14 :31 :00	Hydra	128.55
08/04/2015 14 :34 :00	Hydra	128.56
08/05/2015 14 :27 :00	Hydra	134.62
08/05/2015 14 :30 :00	Nix	134.64
08/05/2015 14 :39 :00	Hydra	134.68
08/06/2015 08 :22 :00	Hydra	139.17
08/07/2015 14 :04 :00	Nix	146.71
08/08/2015 08 :14 :00	Hydra	151.32
08/09/2015 13 :56 :00	Hydra	158.86
08/10/2015 08 :05 :00	Hydra	163.48
08/11/2015 13 :54 :00	Nix	171.04
08/12/2015 08 :04 :00	Nix	175.65
08/13/2015 13 :46 :00	Hydra	183.19
08/14/2015 07 :56 :00	Hydra	187.80
08/15/2015 13 :38 :00	Hydra	195.34
08/16/2015 07 :48 :00	Nix	199.96
08/17/2015 13 :30 :00	Hydra	207.50
08/18/2015 07 :40 :00	Hydra	212.11
08/19/2015 13 :22 :00	Hydra	219.65
08/20/2015 07 :32 :00	Nix	224.256
08/21/2015 13 :14 :00	Hydra	231.80
08/22/2015 07 :24 :00	Hydra	236.41
08/23/2015 13 :06 :00	Hydra	243.95
08/24/2015 07 :16 :00	Nix	248.56

A.2 Système d'Eugenia

Table A.4 – Dates utilisées pour les simulations des observations Gaia.

Dates	
01/09/2013 09 :11 :37.51	07/10/2015 02 :52 :09.03
10/02/3013 02 :44 :17.81	07/10/2015 07 :05 :45.20
10/02/3013 04 :30 :52.44	27/04/2016 06 :37 :21.13
03/03/2013 20 :42 :14.56	27/04/2016 08 :23 :54.12
03/03/2013 22 :29 :47.82	17/05/2016 02 :26 :15.30
24/09/2013 08 :31 :35.33	20/06/2016 12 :05 :37.74
24/09/2013 10 :18 :08.32	30/07/2016 05 :24 :55.81
18/10/2013 02 :25 :42.47	30/07/2016 07 :11 :29.85
18/10/2013 04 :12 :17.02	30/07/2016 01 :25 :09.47
17/11/2013 02 :02 :57.09	30/07/2016 13 :11 :43.41
17/11/2013 03 :49 :30.60	06/08/2016 11 :30 :38.04
28/03/2014 22 :32 :12.19	06/08/2016 13 :17 :11.99
28/03/2014 08 :28 :59.12	06/08/2016 17 :30 :51.61
28/03/2014 10 :15 :33.75	06/08/2016 19 :17 :25.64
22/05/2014 08 :18 :48.44	22/11/2016 01 :34 :33.66
14/12/2014 03 :38 :45.72	23/12/2016 20 :07 :10.76
14/12/2014 07 :52 :23.17	03/02/2017 17 :31 :58.57
14/12/2014 09 :38 :56.17	03/02/2017 19 :18 :33.12
26/12/2014 01 :59 :12.19	03/02/2017 23 :32 :13.78
26/12/2014 03 :45 :46.66	04/02/2017 01 :18 :48.15
03/02/2015 19 :12 :48.99	10/02/2017 23 :37 :53.85
03/02/2015 20 :59 :21.72	11/02/2017 01 :24 :27.62
07/03/2015 14 :28 :37.52	11/02/2017 05 :38 :06.55
28/03/2015 06 :40 :05.29	11/02/2017 07 :24 :40.41
27/06/2015 22 :11 :47.47	17/02/2017 12 :16 :15.89
28/06/2015 02 :25 :26.05	17/02/2017 14 :02 :48.97
28/06/2015 04 :11 :59.57	17/02/2017 18 :16 :27.21
28/06/2015 08 :25 :37.98	30/07/2017 00 :23 :56.23
28/06/2015 10 :12 :11.40	30/07/2017 02 :10 :30.95
04/07/2015 04 :16 :12.89	30/07/2017 06 :24 :12.47
04/07/2015 08 :29 :51.56	07/09/2017 11 :37 :45.64
04/07/2015 10 :16 :25.25	07/09/2017 13 :24 :18.81
04/07/2015 14 :30 :04.18	10/10/2017 17 :08 :09.17
13/08/2015 15 :26 :02.11	10/10/2017 18 :54 :43.29
14/09/2015 19 :08 :59.77	29/10/2017 05 :12 :32.26
14/09/2015 20 :55 :34.32	29/10/2017 06 :59 :06.37

Annexe B

Réduction astrométrique des images du Pic du Midi

B.1 Présentation des observations

Les observations de Pluton à l'Observatoire du Pic du Midi ont été réalisées les 1er, 4 et 5 juillet 2011, fournissant respectivement 20, 41 et 12 observations. L'Observatoire du Pic du Midi est situé à 2877 mètres d'altitude, de coordonnées 42° 56' 11" Nord et 0° 08' 34" Est. Le télescope utilisé est le télescope de 105 cm. Ses caractéristiques techniques sont données dans la Table B.1.

Table B.1 – Caractéristiques techniques du télescope de 1m du Pic du Midi et de la caméra

Taille du miroir primaire	105 cm
Focale	17.2 m
Taille du pixel	9 μm
Taille de la matrice CCD	3500×2500
Taille de l'image	$7' \times 7'$
Binning	2×2
Filtre	R

La durée d'exposition des observations varie entre 30 secondes et 1 minute 30 suivant la qualité du ciel. La taille d'un pixel lorsqu'aucune modification n'est effectuée est d'environ 0.17". Sur le capteur, l'image d'une source ponctuelle non résolue est une tache de lumière, principalement à cause de la diffraction de la lumière par l'atmosphère. La largeur à mi-hauteur de l'intensité de cette tache sur l'image nous donne la qualité de visibilité (ou *seeing*) de notre image, d'environ 0.9" sur les observations réalisées.

De manière à gagner en luminosité sur l'image, sa qualité a été *dégradée* d'un binning 2×2. Cela signifie qu'un carré de deux récepteur CCD de côté donnera un pixel de l'image finale, les contributions de chaque récepteur étant additionnées. Chaque pixel a donc une taille d'environ 0.34". Nous avons une qualité de visibilité de 0.9", ce qui signifie que la largeur à mi-hauteur de l'image d'une étoile est répartie sur trois pixels.

B.2 Réduction astrométrique des images

B.2.1 Traitement des images

Avant de procéder à la réduction astrométrique à proprement parler, il faut effectuer un certain nombre de traitements sur l'image pour qu'elle soit exploitable. Ces étapes ont été réalisées par François Colas.

Les traitements ont pour but de corriger les défauts liés à la caméra en éliminant une partie du bruit instrumental. En premier lieu, le simple fonctionnement de la caméra entraîne un biais sur la mesure des pixels. La mesure de ce biais est effectuée en réalisant une exposition la plus courte possible.

Ensuite, on cherche à déterminer les défauts de la matrice CCD, qui apparaîtront comme des pixels *chauds*, c'est à dire saturés. Pour ce faire, il faut réaliser ce que l'on appelle un courant d'obscurité (ou *dark*), c'est à dire une image réalisée en l'absence de toute source lumineuse. Cette image est ensuite soustraite des images que l'on a effectuées. Le dark doit être réalisé avec un temps de pose identique aux expositions faites pendant la nuit de manière à reproduire de la manière la plus proche possible le comportement de la matrice.

Tous les pixels de la matrice ne vont pas réagir de manière identique. Pour une même intensité lumineuse reçue certains pixels auront une valeur plus importante que d'autres. Pour corriger ce défaut, on réalise une plage de lumière uniforme (PLU) ou *flat*, c'est à dire une image réalisée sur une cible présentant un aspect uniforme et de taille supérieure à celle de notre matrice CCD. Cette image est en quelque sorte une *carte* de l'efficacité de notre matrice.

B.2.2 Principe de la réduction astrométrique

Le but de la réduction astrométrique est de pouvoir étalonner l'image pour transformer les positions tangentielles sur le plan du CCD en positions angulaires sur la voûte céleste Pour déterminer cette équivalence, nous allons utiliser les étoiles du champ dont l'on connaît la position en coordonnées équatoriales grâce à des catalogues. Les équations liant la position en pixels et celle en angles ne sont pas linéaires, en raison de la projection de l'image sphérique du ciel générée par le télescope sur le plan du CCD. De plus, les défauts de l'optique du télescope peut générer des déformations supplémentaires de l'image. De manière à compenser au maximum ces déformations, il est important d'utiliser le plus grand nombre possible d'étoiles de référence. La transformation pixel/angle est donc modélisée par un polynôme dont les coefficients sont déterminés grâce aux étoiles de champ et dont le degré est lié aux déformations de ce même champ. Ainsi, si l'on dispose de N étoiles de champs, et que l'on note $(X_k, Y_k)_{k=1..N}$ les positions de ces étoiles sur le CCD, et $(\beta_k, \gamma_k)_{k=1..N}$ les positions projetées de ces étoiles sur le plan tangent à la sphère céleste, ces positions sont liées aux coordonnées équatoriales par la projection

gnomonique :

$$\begin{aligned} \beta_k = & \quad \frac{\cos\delta_k \sin(\alpha_k - \alpha_0)}{\sin\delta_0 \sin\delta_k + \cos\delta_0 \cos\delta_k \cos(\alpha_k - \alpha_0)} \\ \gamma_k = & \quad \frac{\cos\delta_0 \sin(\alpha_k - \alpha_0) - \sin\delta_0 \cos\delta_k \cos(\alpha_k - \alpha_0)}{\sin\delta_0 \sin\delta_k + \cos\delta_0 \cos\delta_k \cos(\alpha_k - \alpha_0)} \end{aligned} \tag{B.1}$$

où (α_0, δ_0) désigne les coordonnées du centre du champ.

Les positions en pixels vont être liées aux positions en (β, γ) par les relations :

$$\begin{aligned} \beta_k = & \quad \sum_l \sum_m a_{lm} X_k^l Y_k^m \\ \gamma_k = & \quad \sum_l \sum_m b_{lm} X_k^l Y_k^m \end{aligned} \tag{B.2}$$

Pour déterminer les coefficients a_{lm} et b_{lm}, la méthode la plus couramment utilisée dans les procédures de réduction astrométrique est la méthode des moindres carrés. Cette méthode est détaillée dans le chapitre 4.

Si l'on dispose de suffisamment d'étoiles de champ, il est possible de reproduire de manière assez fine les déformations de l'image dues aux aberrations, à la réfraction atmosphérique différentielle, au système optique... Néanmoins, l'augmentation du degré du polynôme de passage peut entraîner de fortes erreurs dans la détermination des coefficients d'ordre élevé. En effet, ces coefficients vont être fortement affectés par les erreurs aléatoires de la mesure de la position de l'étoile sur l'image, et par les erreurs de catalogue (Zacharias et al., 1992).

La calibration astrométrique de nos images a été réalisée grâce au logiciel PRISM.

B.2.3 PRISM

PRISM est un logiciel de traitement d'images astronomiques. Il dispose de fonctionnalités permettant de l'utiliser pour réaliser la réduction astrométrique d'une image. Pour ce faire, PRISM va utiliser les données contenues dans l'en-tête de nos images au format FITS. PRISM va utiliser les images traitées. À partir de la date d'observation et de la position approximative du centre de l'image, PRISM va détecter et identifier les étoiles présentes, comme illustré dans la figure B.1.

À partir de ces étoiles, le logiciel peut étalonner l'image en (α, δ) si on lui spécifie un degré de polynôme de transformation. Pour nos images de Pluton, nous avons de nombreuses étoiles de champ, une situation due à la présence de Pluton dans le plan galactique. Le catalogue utilisé pour identifier les étoiles est le catalogue UCAC2 (Zacharias et al., 2004). Ce catalogue possède une précision moyenne de 20 mas sur les étoiles dont la magnitude est comprise entre 10 et 14. Généralement, nos images disposaient d'une quinzaine d'étoiles de champ connues et nous avons demandé un polynôme d'ordre 3 pour la réduction astrométrique. Une fois notre champ étalonné, il ne nous reste plus qu'à transformer les positions (X, Y) de Pluton sur l'image en coordonnées équatoriales. Les positions obtenues sont données dans la Table B.2.

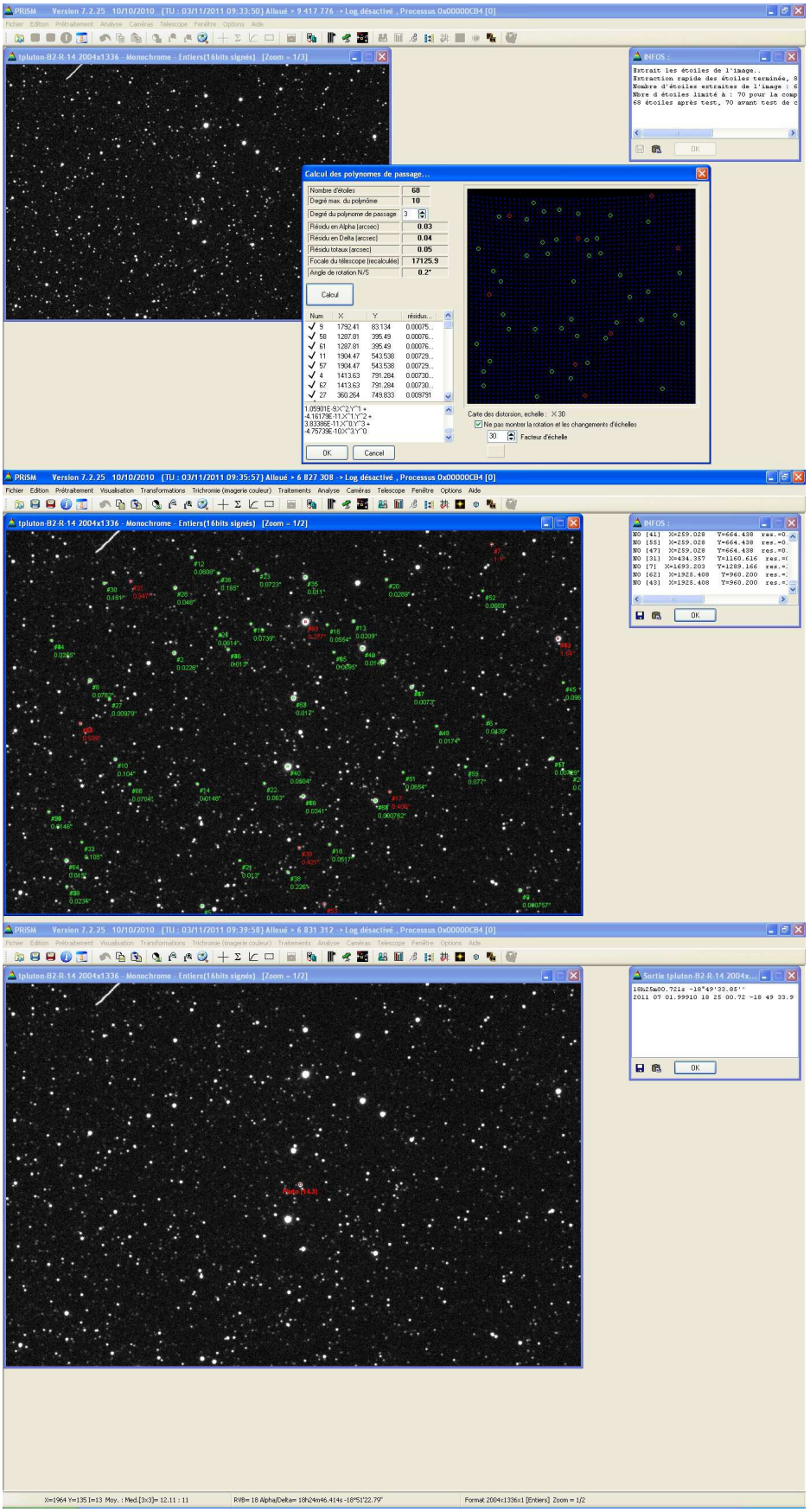

Figure B.1 – Utilisation du logiciel PRISM pour effectuer la calibration astrométrique de l'image prise à la date 2011/07/01.99910 et mesure astrométrique de la position de Pluton

Table B.2 – Observations effecutées au Pic du Midi.

Date UT	Ascension droite (h m s)	Déclinaison (° ' ")
2011 07 01.98356	18 25 00.821	-18 49 33.65
2011 07 01.98476	18 25 00.814	-18 49 33.69
2011 07 01.98594	18 25 00.807	-18 49 33.67
2011 07 01.98713	18 25 00.799	-18 49 33.71
2011 07 01.98833	18 25 00.789	-18 49 33.72
2011 07 01.98953	18 25 00.783	-18 49 33.70
2011 07 01.99072	18 25 00.774	-18 49 33.74
2011 07 01.99191	18 25 00.767	-18 49 33.77
2011 07 01.99314	18 25 00.759	-18 49 33.75
2011 07 01.99433	18 25 00.753	-18 49 33.79
2011 07 01.99552	18 25 00.745	-18 49 33.78
2011 07 01.99671	18 25 00.736	-18 49 33.81
2011 07 01.99791	18 25 00.729	-18 49 33.81
2011 07 01.99910	18 25 00.722	-18 49 33.83
2011 07 02.00029	18 25 00.713	-18 49 33.85
2011 07 02.00148	18 25 00.705	-18 49 33.86
2011 07 02.00267	18 25 00.697	-18 49 33.88
2011 07 02.00387	18 25 00.690	-18 49 33.89
2011 07 02.00506	18 25 00.682	-18 49 33.92
2011 07 02.00625	18 25 00.674	-18 49 33.92
2011 07 04.93881	18 24 41.927	-18 50 05.90
2011 07 04.93988	18 24 41.921	-18 50 05.89
2011 07 04.94036	18 24 41.917	-18 50 05.88
2011 07 04.94084	18 24 41.913	-18 50 05.91
2011 07 04.94132	18 24 41.910	-18 50 05.91
2011 07 04.94179	18 24 41.907	-18 50 05.91
2011 07 04.94228	18 24 41.905	-18 50 05.92
2011 07 04.94275	18 24 41.900	-18 50 05.95
2011 07 04.94323	18 24 41.899	-18 50 05.92
2011 07 04.94370	18 24 41.895	-18 50 05.94
2011 07 04.94419	18 24 41.891	-18 50 05.95
2011 07 04.94466	18 24 41.890	-18 50 05.95
2011 07 04.94514	18 24 41.886	-18 50 05.94
2011 07 04.94562	18 24 41.886	-18 50 05.93
2011 07 04.94610	18 24 41.880	-18 50 05.98
2011 07 04.94659	18 24 41.877	-18 50 05.97
2011 07 04.94706	18 24 41.875	-18 50 05.92
2011 07 04.94706	18 24 41.875	-18 50 05.92
2011 07 04.94753	18 24 41.872	-18 50 05.96
2011 07 04.94801	18 24 41.868	-18 50 05.97
2011 07 04.94848	18 24 41.866	-18 50 05.98
2011 07 04.94896	18 24 41.862	-18 50 06.01
2011 07 05.01760	18 24 41.419	-18 50 06.79
2011 07 05.01808	18 24 41.416	-18 50 06.74

2011 07 05.01855	18 24 41.413	-18 50 06.75
2011 07 05.01903	18 24 41.410	-18 50 06.78
2011 07 05.01950	18 24 41.407	-18 50 06.77
2011 07 05.01999	18 24 41.403	-18 50 06.79
2011 07 05.02094	18 24 41.396	-18 50 06.81
2011 07 05.02141	18 24 41.394	-18 50 06.80
2011 07 05.02190	18 24 41.391	-18 50 06.81
2011 07 05.02237	18 24 41.388	-18 50 06.82
2011 07 05.02285	18 24 41.385	-18 50 06.81
2011 07 05.02333	18 24 41.382	-18 50 06.83
2011 07 05.02381	18 24 41.380	-18 50 06.80
2011 07 05.02428	18 24 41.375	-18 50 06.83
2011 07 05.02476	18 24 41.372	-18 50 06.84
2011 07 05.02523	18 24 41.370	-18 50 06.86
2011 07 05.02572	18 24 41.366	-18 50 06.82
2011 07 05.02619	18 24 41.363	-18 50 06.86
2011 07 05.02667	18 24 41.361	-18 50 06.82
2011 07 05.92970	18 24 35.621	-18 50 16.98
2011 07 05.93308	18 24 35.601	-18 50 17.03
2011 07 05.93392	18 24 35.594	-18 50 17.01
2011 07 05.93477	18 24 35.588	-18 50 17.02
2011 07 05.93561	18 24 35.584	-18 50 17.04
2011 07 05.93730	18 24 35.575	-18 50 17.07

Annexe C

Résultats préliminaires pour le système de (87)Sylvia

C.1 Présentation du système

(87)Sylvia est, comme (45)Eugenia, un astéroïde triple de la ceinture principale. Sylvia est l'un des plus grands astéroïdes irréguliers, avec un diamètre moyen de 286 km. Il fut découvert en 1866 par N.R. Pogson alors qu'il réalisait des observations à Madras. Son nom fait référence à Rhea Silvia, descendante du héros troyen Énée et mère des fondateurs légendaires de Rome : Romulus et Remus. Ces deux derniers noms furent donnés aux satellites de (87)Sylvia. Tous comme pour Eugenia, le satellite le plus éloigné du primaire, Romulus, fut le premier découvert en 2001 (Brown et al., 2001). Remus fut découvert en 2004 (Marchis et al., 2005). Contrairement à Petit Prince et S2004(45)1, les deux satellites de Sylvia ont une faible inclinaison par rapport à l'équateur de ce dernier. La Table C.1 fournit les caractéristiques dynamiques du système.

En utilisant une démarche similaire à celle d'Eugenia, c'est à dire en supposant que Sylvia possède une densité uniforme, on trouve une valeur de l'aplatissement polaire d'ordre 2 J_{2th} de 0.14. Une précédente étude dynamique du système par Marchis et al. (2005) déduit du mouvement des satellites une valeur supérieure de l'aplatissement polaire : $J_2 = 0.17$.

C.2 Description des observations

Nous disposons d'observations du système provenant de quatre instruments différents. Comme pour les satellites de Pluton et (45)Eugenia, il s'agit d'observations réalisées par de grands télescopes équipés d'optique adaptative et d'observations réalisées par le Hubble Space Telescope.

L'observation du système la plus ancienne que nous allons utiliser est une observation de 2001 par le HST :

- nombre d'observations : 1 de Romulus, 1 de Remus
- incertitude des observations : 50 mas

Table C.1 – Élements elliptiques moyens, masses et diamètres de Sylvia et de ses satellites, équateur et équinoxe moyen J2000. L'inclinaison des satellites est repérée par rapport à l'équateur de Sylvia.

	Sylvia	Romulus	Remus
M(kg)	1.48×10^{19} fixé	4×10^{15} fixé	4×10^{15} fixé
a	3.490 (UA)	1356 (km) ± 5	706 (km) ± 5
e	0.080	1×10^{-3} $\pm 1 \times 10^{-3}$	1.6×10^{-2} $\pm 1.1 \times 10^{-2}$
i(deg)	10.855	1.7 ± 1.0	2.0 ± 1.0
Ω(deg)	73.342	101	97
ω(deg)	266.195	273	314
D(km)	$305 \times 220 \times 145$	18	7
P	4.49 (years)	3.6496 (days)	1.3788 (days)

– repère : ICRF J2000
– type d'observations : CCD

Nous avons quelques observations réalisées au W.M. Keck II Telescope. Parmi ces observations, celles de 2001 ont été réalisées par l'instrument NIRSPEC, les autres par NIRC2.
– nombre d'observations : 5 en 2001, 1 en 2004 et 1 en 2006, seul Romulus a été détecté sur ces images
– incertitude des observations : 20 mas en 2001, 15 mas en 2004 et 2006
– repère : ICRF J2000
– type d'observations : CCD

De 2004 à 2010, on dispose d'observations réalisées au Gemini Telescope
– nombre d'observations : 17 de Romulus, 4 de Remus
– incertitude des observations : 20 mas
– repère : ICRF J2000
– type d'observations : CCD

En 2004, on dispose d'observations réalisées au VLT-UT4
– nombre d'observations : 26 de Romulus, 12 de Remus
– incertitude des observations : 20 mas
– repère : ICRF J2000
– type d'observations : CCD

C.3 Premiers résultats de l'ajustement

Nous avons dans un premier temps ajusté la masse, le J_2, l'orientation du pôle de Sylvia et les éléments elliptiques de Romulus sur un sous-ensemble d'observations. Ensuite, sur l'ensemble des observations, nous avons effectué un ajustement en deux étapes. Tout d'abord nous avons ajusté les éléments elliptiques initiaux de Romulus, ensuite ceux de Remus. Les éléments elliptiques que nous obtenons sont donnés dans la Table C.2, leurs équivalents en positions et vitesses cartésiennes dans la Table C.3. Les O-C des deux satellites sont donnés dans les figures C.1 et C.2.

Table C.2 – Éléments elliptiques de Romulus et Remus à JD=2452980.0.

Paramètre	Romulus	Remus
a (km)	1349.72 ±0.02	705.61±0.14
e	0.0050 ±0.0023	0.002±0.009
I (deg)	8.23±0.16	9.29 ±1.20
Ω(deg)	99.4 ±1.1	97.0±5.8
ω (deg)	53±16	315±350
M (deg)	213 ±16	21±351

Table C.3 – Positions et vitesses initiales à JD=2453249.5

Romulus			
x, y, z (km)	1335.01	131.31	-193.65
v_x, v_y, v_z (km/jour)	-234.93	2293.41	-20.46
Remus			
x, y, z (km)	201.46	673.32	-46.16
v_x, v_y, v_z (km/jour)	-3029.43	941.26	473.39
Sylvia			
GM (km^3.s^{-2}), J_2	0.969 ±0.001	0.1757 ±0.0007	
λ (deg), β (deg)	19.5	81.5	

C.4 Pistes d'amélioration et perspectives

Les résultats présentés ici sont très certainement perfectibles. En ce qui concerne la masse de Sylvia, nous n'avons pas pu l'ajuster sur la totalité des observations à cause de problèmes numériques lors de l'ajustement. En raison de la très grande différence entre les dérivées partielles par rapport aux positions initiales et les dérivées partielles par rapport aux masses, les moindres carrés nous fournissaient des résultats aberrants. De plus, les incertitudes que nous avons utilisées sont plus élevées que celles des observations des satellites d'Eugenia. Il est possible que la valeur plus élevée du J_2 dynamique de Sylvia

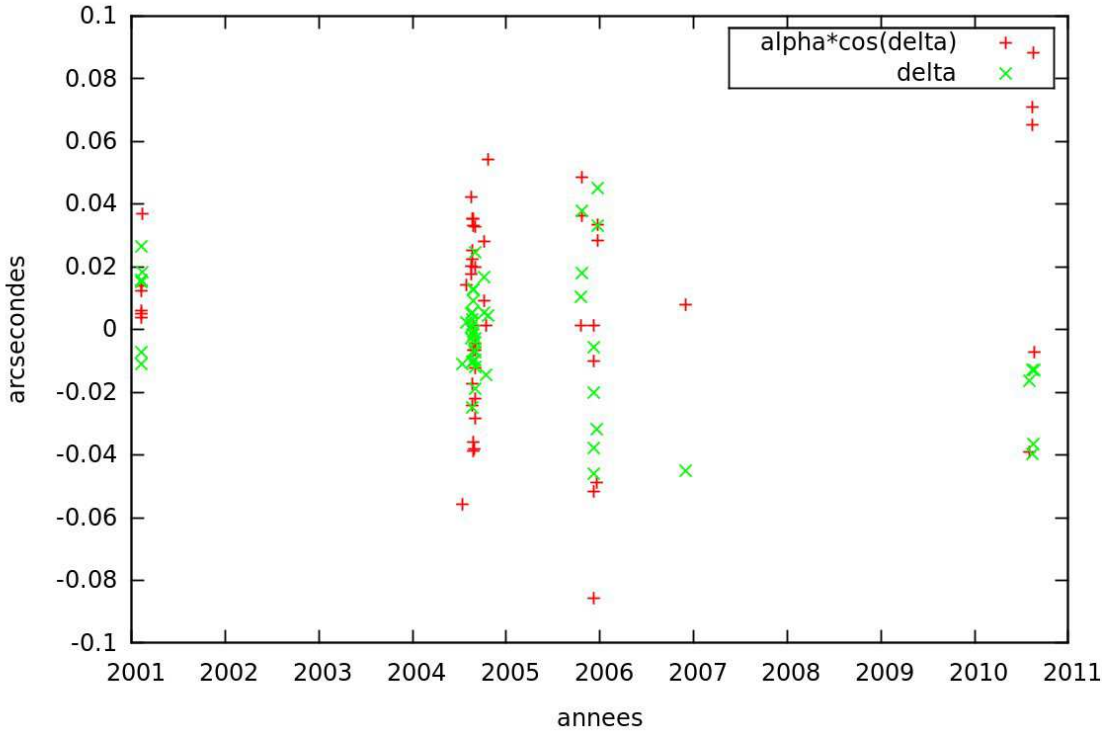

Figure C.1 – Résidus post-ajustement de Romulus. $\mu_{alpha} = 6.4$ mas, $\mu_{\delta} = -2.7$ mas, $\sigma_{\alpha} = 34.4$ mas et $\sigma_{\delta} = 20.1$ mas.

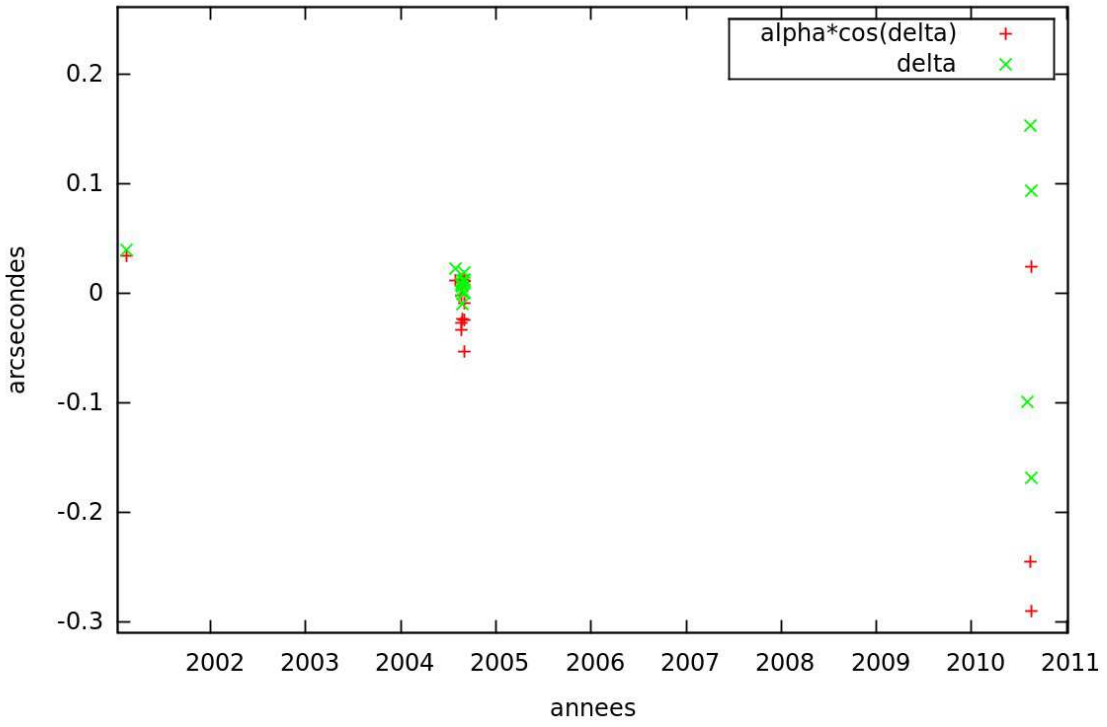

Figure C.2 – Résidus post-ajustement de Remus. $\mu_{alpha} = -13.9$ mas, $\mu_{\delta} = 127.4$ mas, $\sigma_{\alpha} = 6.4$ mas et $\sigma_{\delta} = 65.3$ mas.

par rapport à la valeur théorique issue de ses dimensions soit due à la rotation rapide de Sylvia. En effet, Sylvia est un ellipsoïde, et son bourrelet statique caractérisé par c_{22} est certainement important. Or, sous l'effet de la rotation rapide, les satellites se comportent comme s'ils subissaient un J_2 supplémentaire. Il serait donc intéressant d'ajuster la valeur du c_{22}. D'autres chercheurs de l'IMCCE travaillent également sur l'ajustement des satellites de Sylvia à partir d'une méthode différente : un algorithme génétique explorant l'espace des possibilités des paramètres ajustables. La comparaison des résultats issus de ces deux méthodes permettra sans doute d'explorer de nouvelles pistes quant à la compréhension du système.

Annexe D

Articles acceptés

Astronomy & Astrophysics manuscript no. art˙print
March 14, 2012
© ESO 2012

Dynamical parameter determinations in Pluto's system

Expected constraints from the New Horizons mission to Pluto

L. Beauvalet[1], V. Lainey[1], J.-E. Arlot[1], and R. P. Binzel[2,1]

[1] Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides-Observatoire de Paris, UMR 8028 du CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Lille 1, 77 avenue Denfert Rochereau, 75014 PARIS, France

[2] Department of Earth, Atmospheric, and Planetary Sciences, Massachusetts Institute of Technology, 77 Massachusetts Avenue, Cambridge, MA 02139 USA

Preprint online version: March 14, 2012

ABSTRACT

Pluto is the multiple system that has been observed the longest. Yet, the masses of its smallest satellites, Nix and Hydra, which were discovered in 2005, are still imprecisely known, because of the short time span and number of available observations. We present a numerical model that takes into account the second order gravity fields and Pluto's orbital motion in the solar system. We investigated the dynamical parameters that may be reliably determined today. We also assessed the possible improvements on the parameter uncertainties with the future increase of observations, including the New Horizons mission. Fitting our model to simulated data, we show that the precision of observations prevents the quantification of the polar oblateness J_2 and equatorial bulge c_{22} of Pluto and Charon. Similarly, we show that the masses are on the detection limit. In particular, unless 25 observations are made every year, the mass of Nix may be constrained with confidence only with New Horizons data. Hydra's mass will only be constrained by the probe. The recent discovery of P4 might change this situation, but our knowledge of this object is still too vague to draw any conclusion.

Key words. Celestial mechanics – Planets and satellites: fundamental parameters – planets and satellites: individual: Pluto – Methods: numerical – Kuiper belt: general

1. Introduction

Pluto's system is now the multiple system that has been observed the longest. It consists of four bodies: Pluto, its most massive satellite Charon, which was discovered in 1978 (Christy & Harrington 1978), and the smaller satellites Nix and Hydra, discovered in 2005 (Weaver et al. 2005, 2006). Charon's mass is about one tenth of Pluto's mass, making it one of the most massive satellites with respect to its primary in the solar system. Indeed, they should be considered as a binary object because the center of mass of the system is not inside Pluto. The most popular formation scenario for the pair is a collision between two massive Kuiper Belt objects, which created Pluto and Charon (Canup 2005). The formation of the other satellites is also discussed, with a possible in-situ formation (accretion from the remains of Charon's formation) or a capture scenario. Their color is the same as that of Charon (Stern et al. 2007). The farthest satellite, Hydra, orbits at only 3% of Hill's radius around Pluto, making it one of the most compact systems (Stern et al. 2006). These facts favor the accretion scenario, but a more definitive clue would be given by the estimation of their densities.

While the sizes and masses of Pluto and Charon are known through stellar occultations and satellite period estimates, respectively, that is not the case for Nix and Hydra. The best estimate of the system's masses has been made by Tholen et al. (2008) with masses (GM) for Nix and Hydra 0.039 ± 0.034 km^3 s^{-2} and 0.021 ± 0.042 km^3 s^{-2}, respectively, while no successful stellar occultation of them has been made. No estimate of Pluto and Charon's harmonic gravity fields is available. Constraining these parameters will greatly help in characterizing Pluto's and Charon's interiors.

The system has yet to be explored by *in situ* spacecraft. This situation will change in 2015 with the arrival of the New Horizons mission (Stern & Spencer 2003). This mission will provide observations of Pluto and its companions, astrometry, surface imaging, and spectroscopy of the bodies' surface. The probe will not orbit around Pluto's system, it will only cross the system before escaping the solar system. The high resolution of the probe's observations is expected to improve the precision in our current estimates of the masses of the system's bodies (Weaver et al. 2007).

The purpose of this paper is to determine how much about the dynamical parameters of the system we can know today. We also investigate how this knowledge will evolve, before and after New Horizons' flyby with an observation rate similar to previous years (about ten observations per year) and a similar astrometric precision. To do so we have developed a numerical model of Pluto's system (Sect. 2). We estimated which dynamical parameters are likely to be determined from observations today and considered the existence of opportune observation moments for mass determination (Sect. 3). Finally, we studied how the precision on these parameters may evolve with increasing observations (Sect. 4).

2. Dynamical model

We describe Pluto's system as an $\mathcal{N}$+4-body problem. The number $\mathcal{N}$ refers to the bodies introduced in the model that do not belong to Pluto's system: the Sun and the eight planets, for which

the Moon's mass is added to that of the Earth. The number 4 is for Pluto, Charon, Nix and Hydra.

We calculated the equations of motion of Pluto, Charon, Nix, and Hydra in an inertial reference frame centered on the barycenter of the solar system, not a plutocentric one to avoid the additional inertial forces. Only Pluto and Charon are described as oblate. We also took into account the fact that Pluto and Charon are in a double spin-orbit resonance, which means that they have the same rotation period, equal to Charon's revolution period.

We use the following notation:

- i integrated body
- j the Sun or a planet
- l body of Pluto's system
- M_j mass of the body j
- m_l mass of the body l
- $\boldsymbol{r}_j$ position vector of the body j with respect to solar system barycenter
- r_{ij} distance between bodies i and j
- R_l equatorial radius of body l
- $J_2^{(l)}$ polar oblateness of body l
- $c_{22}^{(l)}$ equatorial ellipticity of body l
- $U_{\widehat{li}}$ function of the i body's oblateness on the l body's center of mass
- $U_{\widehat{il}}$ function of the l body's oblateness on the i body's center of mass,

and we obtain the following equation of motion for the integrated body i:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^{N} -\frac{GM_j(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)}{r_{ij}^3} + \sum_{l=1,\ l\neq i}^{\triangle} \left(-\frac{Gm_l(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_l)}{r_{il}^3} + Gm_l\nabla_l U_{\widehat{li}} - Gm_l\nabla_i U_{\widehat{il}} \right), \quad (1)$$

where the function of the oblateness is written, depending on the coordinates (r_i, ϕ_i, λ_i) providing the position of i in the spherical equatorial coordinates system linked to l:

$$U_{\widehat{il}} = -\frac{R_l^2}{r_{il}^3}\left[J_2^{(l)}\left(\frac{3}{2}\sin^2(\phi_i) - \frac{1}{2}\right) - 3c_{22}^{(l)}\cos^2(\phi_i)\cos(2\lambda_i)\right]. \quad (2)$$

The expressions of $\nabla_l U_{\widehat{li}}$ and $\nabla_i U_{\widehat{il}}$. have been developed in Lainey et al. (2004) in a planetocentric reference frame. We used the same expressions for a plutocentric reference frame and computed them in the International Celestial Reference Frame (ICRF) through a transformation matrix using the spherical coordinates of Pluto's rotation pole from the IAU convention (Seidelmann et al. 2007). The prime meridian of Pluto is considered to be in the direction of Charon because of the double spin-orbit resonance, and conversely. Indeed, the optical libration caused by Charon's eccentricity has an amplitude of $2e_C$ (Murray & Dermott 2000), where e_C is Charon's eccentricity. This means 6×10^{-3} rad difference in the orientation of Charon, causing an effect far weaker on the longitude. Accordingly, this effect can be neglected at our level of accuracy.

The masses of Pluto's system and the initial state vectors for each moon were taken from Tholen et al. (2008). Using the DE406 JPL ephemeris (Standish 1998), we obtained Pluto's initial positions and velocities, as well as the masses and position of the Sun and the planets.

The values of the oblate gravity field coefficients J_2 and c_{22} come from a theoretical approach. Following Turcotte & Schubert (2002), assuming a constant density body and given the notation ω_l the angular velocity of the l body, we have

$$J_2^{(l)} = \frac{1}{2}\frac{R_l^3\omega_l^2}{Gm_l}. \quad (3)$$

Pluto and Charon are in a double spin-orbit resonance. Hence, Pluto's rotation period is estimated from Charon's revolution to be about six days. This leads, for Pluto and Charon, to $J_2^{(1)} = 9.01\times10^{-4}$ and $J_2^{(2)} = 1.14\times10^{-3}$. The tesseral coefficient c_{22} value gives an idea of Pluto's and Charon's deformation due to their mutual interaction in double spin-orbit resonance. In the hydrostatic case, the value of c_{22} is (Zharkov et al. 1985)

$$c_{22}^{(l)} = \frac{3}{10}J_2^{(l)}. \quad (4)$$

Hence the values of c_{22} we considered for Pluto and Charon are $c_{22}^{(1)} = 2.70\times10^{-4}$ and $c_{22}^{(2)} = 3.42\times10^{-4}$, respectively.

We integrated numerically our model with the 15th order Gauss-Radau integrator developed by Everhart (1985), which we chose for its accuracy and speed.

We fitted the initial conditions and parameters with a linear least-square procedure without any constraints. To obtain the values of the partial derivatives needed for it, we used the following relation (Lainey et al. 2004):

$$\frac{\partial}{\partial c_l}\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2}\right) = \frac{1}{M_i}\left[\sum_j\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial \boldsymbol{r}_j}\frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial c_l} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_j}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_j}{\partial c_l}\right) + \frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial c_l}\right], \quad (5)$$

where c_l is a parameter we need to adjust. The values of the $\partial \boldsymbol{r}_i/\partial c_l$ coefficients were then computed through numerically integrating the previous equation simultaneously with the equations of motion. For more details on the variational equations used, we refer to Lainey et al. (2004).

While we are fitting initial Cartesian coordinates in Sect. 3, initial elliptical elements are fitted in Sect. 4 for better convergence (Taylor 1998).

3. Parameter determinations

We are challenged by the great distance of Pluto's system to the Sun. This leads to a large uncertainty in the observations once they are transformed into kilometers. Since an unmodeled physical effect can partly vanish when fitting a dynamical model to the observations, we have to quantify the part of its influence after the fitting.

Therefore, we used the following procedure. We computed simulated positions using Eq.(1) and the inital conditions and parameters described above. These simulated data are obtained by taking into account the effect we aim to test, a mass, an initial position or a polar oblateness coefficient. We then fitted a version of our model that does not include the parameter we aim to test. The obtained residuals may then be compared to the precision of the observations (Lainey & Tobie 2005).

3.1. Oblate gravity fields

The main effect of the influence of Pluto's polar oblateness will be the precession of the satellite orbits. The effect will be easier to detect in two cases. First, for satellites close to the planet, because their precession will be faster. Second, for a satellite **that has been observed for a long time**, because the difference in longitude will grow with time.

To test the influence of the oblate gravity fields, we simulated data on a time span of about 30 years, the time span since Charon's discovery. A sampling of ten days for the four bodies' Cartesian positions was considered. We used the values of J_2 and c_{22} given in the previous section. We then fitted only the values of the cartesian initial positions and velocities to the data. We did not fit the value of the masses because of the possible correlations between them and the oblate gravity fields. As a result, this situation is the most favorable one for detecting the influence of these coefficients. The post-fit residuals are shown in the Fig. 1.

The residuals for Pluto are at most about 7 km, 4 km for Charon, 3 km for Nix, and 4 km for Hydra. Evidently, the residuals are all linearly increasing with time, except for Hydra. Because the system lies about 30 AU away, it means a difference of about 0.2 mas and 0.3 mas for the satellites and Pluto, respectively. Pluto's system is really compact, consequently both Nix and Hydra are in the light of Pluto and Charon on the observations. In the observations from 2002-2003 of Nix and Hydra, the precision on the astrometry of Charon were about 3 mas. The oldest observations of Charon where it can be separated from Pluto are speckle interferometry observations from 1985 and 1983, whose precision were estimated to be 80 mas. Most recent observations of Charon probably have an accuracy better than 3 mas, but the precision of the older observations prevents us from detecting this 0.3 mas effect **after 30 years of observations**. Therefore we conclude that the effect of the oblate gravity fields cannot be detected today thanks to the observations.

Our hypothesis on the constant density of Pluto and Charon is most probably not true, but the value of the J_2 coefficient will not be drastically modified. As a result, we would still be confronted with the very same problem as before, where the uncertainty of the observations will prevent us from detecting the effect of the most massive bodies' oblateness.

Concerning the insight the New Horizons mission will provide on this topic, the minimum precision required for detecting the effect of J_2 and c_{22} on the satellites will only be attained seven days before the closest approach between the probe and Pluto's system. This will provide only a few points in a short timespan compared to the observations already available. Moreover, the center of mass will not be determined with a one-pixel precision because of the size of the satellites on the image at the time of the closest approach. Because the residuals show a linear increase with time, we can deduce that a good precision of the observations in this short timespan will probably not be enough to provide the value of Pluto's and Charon's oblate gravity fields.

3.2. Masses

The current uncertainties in the masses of Pluto and Charon are a small percentage compared to their masses, but that is not the case for Nix and Hydra. When comparing the perturbations of the satellites on each other, the main perturbation on Nix will be caused by Hydra and vice versa. Consequently, the mutual interactions between the smallest satellites will be the best way to determine their masses.

As already mentioned, Tholen et al. (2008) have given values for the masses of the system's bodies. Unfortunately, the 1-σ error bar for Nix and Hydra are nearly the same as the estimated value, giving GM values of $Gm_3 = 0.039 \pm 0.034$ km^3 s^{-2} and $Gm_4 = 0.021 \pm 0.042$ km^3 s^{-2}, respectively. Because of the low

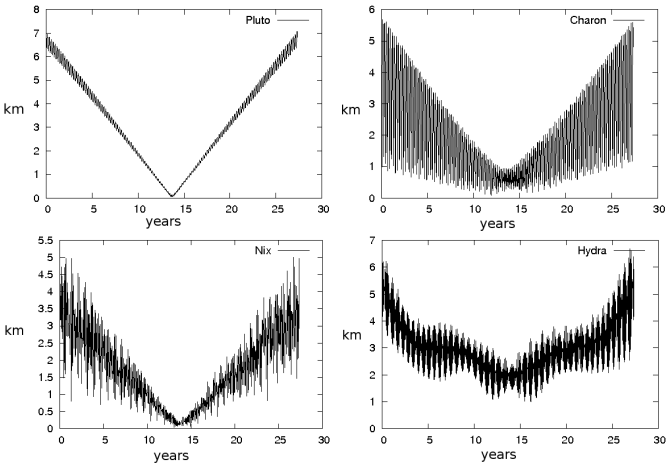

Fig. 1. Post-fit residuals of a model without Pluto's and Charon's J_2 and c_{22}, fitted to simulated observations with a non-zero value of these coefficients. Only the initial positions and velocities were fitted.

value of the masses and these large error bars, we tried to determine whether we could obtain reliable mass estimates in the coming years. To do so, we used the same method as used before for the oblate gravity fields. We simulated observations with the masses given by Tholen et al. (2008), and fitted our model with a massless Hydra to derive whether fitting the initial positions and velocities only would absorb the difference. Because the two small moons have been discovered in 2005 and precovery observations have been obtained in 2002, we simulated data over eight years only, with a ten day sampling period. The result is given in Fig. 2.

The low post-fit residuals on Pluto's and Charon's positions are explained by the small influence of Hydra on their orbits. The post-fit residuals of Nix's position are higher, about 40 km (i.e. 2 mas). The precision of the astrometric positions on the prediscovery observations from Buie et al. (2006) for Nix and Hydra are 15 and 9 mas, respectively. In Tholen et al. (2008), the uncertainties are slightly greater.

In principle, a 2 mas signal in the 9 mas noise of Nix's observations should be detectable. Of course, in this case, the number of observations will become a major concern. With too few observations, it will be impossible to detect the effect of the masses with confidence, because both the noise and the too few positions will prevent us from detecting a clear tendency in the signal (see Sect. 4 for an analysis on the precision of the masses depending on the number of observations). The currently unpublished observations from HST have been made with the WFPC2 of the HST, which means with a pixel size of 46 mas. The astrometry from the HST images comes from the motion of Pluto on the CCD plane, one star at most being visible on the image. In this case, the uncertainty on Pluto's motion causes an uncertainty on the relative position of its satellites. Accordingly, we do not expect the uncertainty on the astrometric positions of the satellites to be reduced by much from their current value, even with observations made especially to detect the faint satellites.

To test the influence of Nix's mass (whose estimate in Tholen et al. (2008) is higher than Hydra's), we used the very same method. The result is shown in Fig. 3. The residuals are higher than before, and because the current mass tested is twice the previous one, the post-fit residuals are also about twice as high.

The masses of the satellites obviously have an influence on the residuals, but they are not adequately constrained from cur-

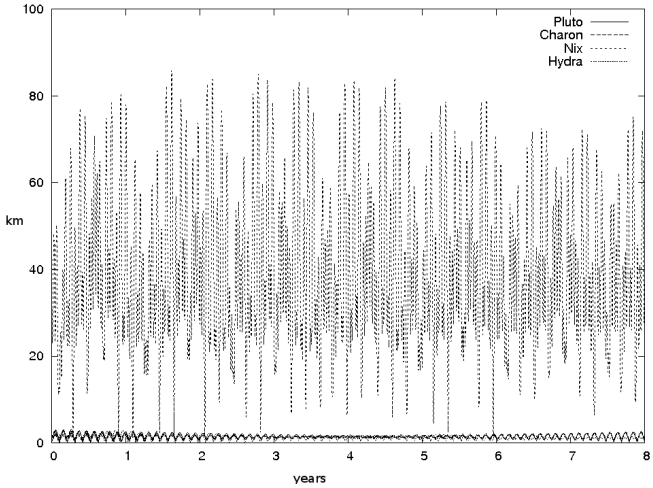

Fig. 2. Post-fit residuals of a model with a massless Hydra fitted to simulated observations with $GM_4 = 0.021 \pm 0.042 \mathrm{km}^3\mathrm{s}^{-2}$. Only the initial positions and velocities were fitted.

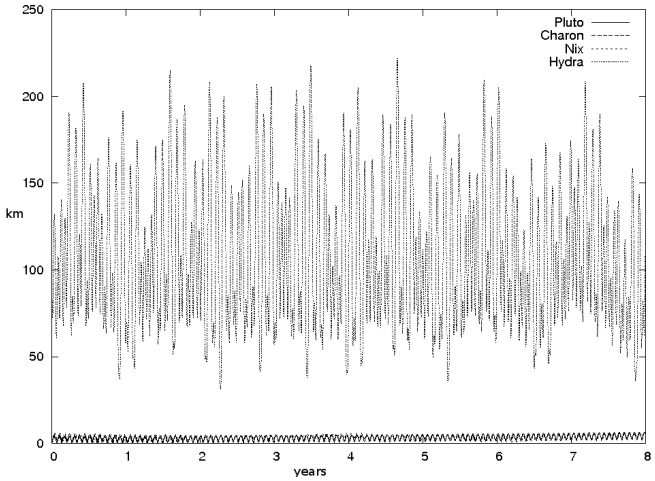

Fig. 3. Post-fit residuals of a model with a massless Nix fitted to simulated observations with $GM_3 = 0.039 \pm 0.034$ km^{3}s^{-2}. Only the initial positions and velocities were fitted.

rent estimates. Because of this, the masses can be greater than their current estimates. To quantify how the residuals increase with the satellites masses, we used the same method as before, and fitted a model for which Nix's mass is 2-σ greater than its estimated value, hence a mass about three times bigger than previously. The result is shown in Fig. 4. The residuals are three times higher than before. The uncertainty on the masses implies that Nix could be three times more massive, and Hydra five times more massive if we consider the 2-σ uncertainty. This would imply at most residuals of 10 and 12 mas, respectively.

If the real masses of the satellites are larger than previously estimated, the problem of the number of observations and noise will be less important than for the masses from Tholen et al. (2008). But on the other hand, if the masses are smaller, the observation noise will become more difficult to overcome. The problem is that the currently estimated masses induce residuals on the very limit of the current best precision of observations, and they are not as numerous and regular as in the previous simulations. Yet, residuals will grow as a longer time span of the observations is available, hence easier possible detection.Disregarding these problems of parameter correlations and the number of observations, the masses as currently estimated are within the range of detection and do not appear to be numerical artifacts.

3.3. Sense and sensitivity

Because mass determination can be a tricky problem that depends on the amount of observations, we have tried to determine the best opportunities for new observations. To do so, we used the same approach as Emelyanov (2005) and calculated the value of the sensitivity function

$$\Phi(t) = m_j \sqrt{\left(\frac{\partial X_i}{\partial m_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial m_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_i}{\partial m_j}\right)^2}, \quad (6)$$

where t is the date of observation, X_i, Y_i and Z_i the Cartesian coordinates of the perturbed body, and m_j the mass of the perturbing satellite. This quantity stands for the influence of the mass of a satellite on another body's position. Accordingly, the higher its value, the stonger the influence, the easier it is to detect. We calculated this value about every five hours to be sure

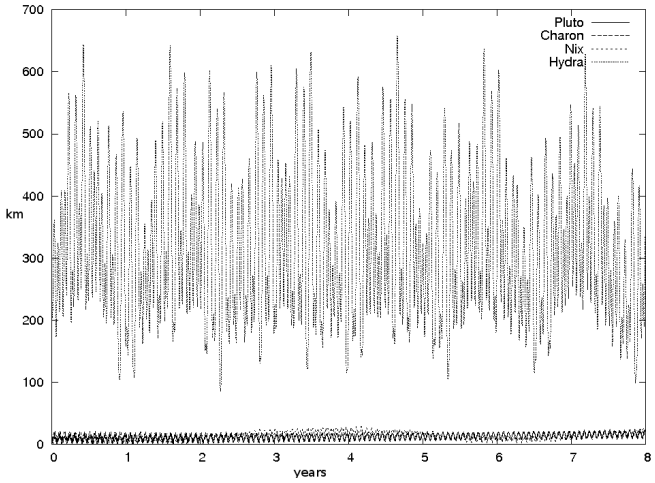

Fig. 4. Post-fit residuals of a model with a massless Nix fitted to simulated observations with $GM_3 = 0.107$ km^{3}s^{-2}. Only the initial positions and velocities were fitted.

not to miss an interesting opportunity. Fig. 5 shows the sensitivity function of Charon's and Hydra's position with respect to Nix's mass, while Fig. 6 shows the sensitivity function of Charon's and Nix's position with respect to Hydra's mass.

We can only see the growth of the curves and oscillation amplitudes around a mean value. The amplitude of the oscillations is coherent with those obtained from the tests on our model capability to detect the masses of the small satellites. Though their values are not the same, we still have higher oscillations from the influence of Nix, whose mass is bigger than Hydra's, than from those of Hydra.

The sensitivity function does not take into account the possible correlations between the parameters. As a result, we cannot quantify the effect that these correlations would have on the satellites' motion from the signal, and consequently, we cannot quantify the effect of the masses on the satellites' motion. But we also looked at the maximum of the oscillations and found a clear regularity, most probably related to a combination of proper frequencies of the satellites' orbits. The regularity of the oscillations suggests that specific observation moments may be deter-

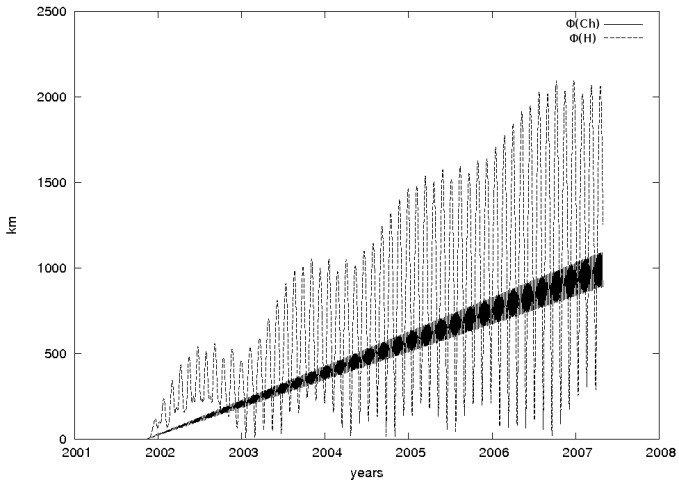

Fig. 5. Sensitivity function of Charon's and Hydra's position with respect to Nix's mass.

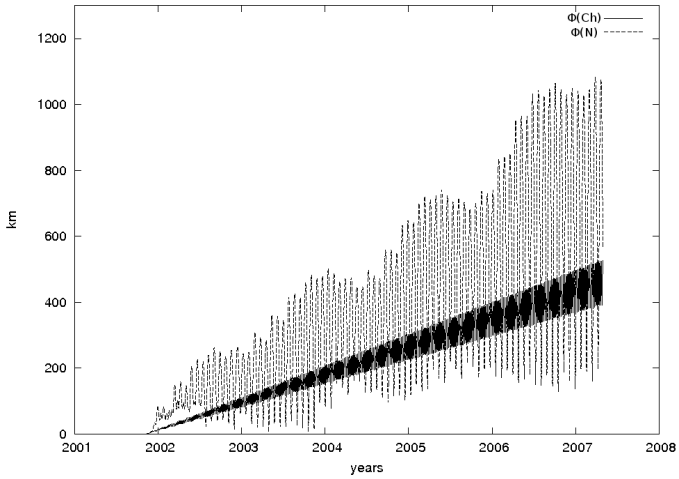

Fig. 6. Sensitivity function of Charon's and Nix's position with respect to Hydra's mass.

mined to enhance the detection of the masses, once our model will be fitted to the observations.

4. Evolution of the uncertainty on mass determinations

As mentioned in the previous section, the currently estimated masses of the smallest satellites can be clearly determined once enough observations is available. Yet this does not tell us whether we could obtain it when considering the currently available sets of observations, and how the precision of this determination will evolve in the future.

Here, our method is to simulate data at the dates of the observations, fit our model to it, and then extract the statistical 1-σ precision given by the least-squares procedure. The difference to the previous methods is that we now fit all the parameters (initial conditions and masses), and that problems from correlations and observation uncertainties will arise. We no longer fit our model to absolute Cartesian coordinates, but to spherical ones relative to Pluto ($\Delta\alpha$, $\Delta\delta$). The advantage of working with simulated data is that we do not have to face convergence problems because of observation accuracy. The precision that will be given is the formal 1-σ from the least-squares fit.

The dates we used for the simulated data of Nix and Hydra are the same as those of the prediscovery observations (Buie et al. 2006), which give also Charon's positions, those of the discovery (Weaver et al. 2005) and those of Hydra and Charon from Sicardy et al. (2006). We added simulations corresponding to Charon's observations from Tholen & Buie (1997). We also assumed that observations of the system will be carried out every year from the ground or HST, near Pluto's opposition. For these hypothetical observations, we assumed that about ten of them will be made every year, the current rythm being about ten observations every two years, and that their precision would be those given in Buie et al. (2006), that is, 3 mas for Charon, 9 mas for Hydra, and 15 mas for Nix.

Our reason for not decreasing these error bars is that in the most recent fit to observations made (Tholen et al. 2008), the uncertainties have been raised and the pixel size of the unpublished observations is greater than those of the published ones, as said in section 3.2. Moreover, no drastic evolution of the precision of observations may be expected before the arrival of New Horizons, the next generation of ground telescope are still projects, and the next generation of space telescope will not be launched before 2015.

We did not simulate the observations from cycle 15 and 17 of the HST, because they were still unpublished when we were writing this paper, and because one set of additional data is not expected to change the conclusions on the uncertainty of the masses drastically. Therefore we simulated ten observations in 2010 while twelve have been made in reality (Tholen et al. 2010), and we did not simulate data in 2007.

The dates for these simulations are given in the Table 1. We also simulated data that will reproduce the schedule of New Horizons' observations, coming from Young et al. (2008) and Young et al. (2010). The schedule and uncertainties used are given in Table 4. To know whether extending the New Horizons mission in Pluto's system would significantly improve its results, we added a set of simulated observations after the probe's flyby of the system, following a symmetric pattern to last phase of the mission. During this phase, only Nix and Hydra are observed. The schedule of the simulated data as well as the uncertainties attached to each date are given in Table 5. To reproduce the fact that at the time of the closest approach, the satellite's center of mass will probably not be determined with a one-pixel precision, we increased the uncertainty. Considering the observations of Deimos by the probe Mars Express (Oberst et al. 2006), the uncertainty on the center of figure is about one sixth of the Deimos radii and 500 meters for Phobos. **In the case of New Horizons, the satellites will probably be darker, so there will be a longer exposure and there will possibly be stars beside them. Consequently, we expect the astrometric determination to be easier.** To reproduce the difficulty of localizing the objects' center of light, we set the precision on the satellites observations to be at best one eighth of the satellites' diameter.

The simulated positions of the satellites are given with respect to Pluto. We have five sets of simulated data:

- 1992-2006: reproduces the existing observations described above
- 1992-2014: reproduces the existing observations described above and the future ground-based observations made before the New Horizons' flyby in Pluto's system
- 1992-2006+NH: reproduces the existing observations described above and the observations made by New Horizons

Table 1. Dates used for the simulation of observations between 2010 and 2014. All simulations were computed for UT 00:00.

Dates			
2010-05-31	2011-06-13	2012-06-30	2013-07-14
2010-06-04	2011-06-23	2012-07-07	2013-07-18
2010-06-10	2011-06-28	2012-07-16	2013-07-25
2010-06-15	2011-06-30	2012-07-21	2014-06-03
2010-06-18	2011-07-05	2012-07-24	2014-06-08
2010-06-25	2011-07-13	2012-07-28	2014-06-14
2010-07-01	2011-07-18	2013-06-10	2014-06-19
2010-07-06	2011-07-23	2013-06-15	2014-06-24
2010-07-11	2011-07-28	2013-06-21	2014-06-30
2010-07-17	2012-06-07	2013-06-26	2014-07-07
2010-07-21	2012-06-12	2013-06-30	2014-07-11
2010-07-27	2012-06-19	2013-07-06	2014-07-14
2011-06-08	2012-06-25	2013-07-11	2014-07-28

Table 2. 1-σ error bars on the masses given by least-squares method using different sets of simulated observations, using m_1 = 870.3 km^3 s^{-2}, m_2 = 101.4 km^3 s^{-2}, m_3 = 0.039 km^3 s^{-2} and m_4 = 0.021 km^3 s^{-2}. No new observations of Charon is simulated for the extended phase of New Horizons.

set of simulated observations	1-σ error bars on the masses (km^{3}s^{-2})			
	number of simulated observations			
	Pluto	Charon	Nix	Hydra
1992-2006	1.28	0.51	0.024	0.036
		72	16	17
1992-2014	0.82	0.28	0.010	0.019
		125	68	69
1992-2006+NH	0.27	0.072	0.012	0.0028
		129	106	124
1992-2014+NH	0.25	0.045	0.0076	0.0026
		181	158	176
1992-2014+extended NH	0.19	0.039	0.0070	0.0024
		181	186	233

– 1992-2014+NH: reproduces the existing observations described above, the future ground-based observations, and the observations made by New Horizons
– 1992-2014+extended NH: reproduces the existing observations described above, the future ground-based observations, and the observations made by New Horizons assuming the observations of Pluto's system are extended.

The results for all these simulations and the number of simulated data used for each body are given in Table 2.

The error bars of the masses found for the 1992-2006 period are consistent with those from Tholen et al. (2008), and the error bars have the same order of magnitude as the mass estimates for Nix and Hydra.

Between the set for the 1992-2006 period and that for 1992-2014, we can see that the uncertainty on the masses of Pluto and Charon decrease less noticeably than those of Nix and Hydra. Yet, the relative uncertainties on these latter ones remain very high.

While considering the different sets, we can see that the most significant improvement in the determination of the masses will be given by New Horizons data. The main advantage of observing the system before the probe's flyby is to precisely determine the orbit of the satellites and help constrain the mass of Nix, but only New Horizons will enable us to obtain statistical error bars whose order of magnitude is lower than the current estimated masses. That Nix's mass will become less constrained than that of Hydra, while the situation is different now, can be explained because New Horizons will obtain more extensive observations of this satellite. One aspect that can be discussed is the uncertainty we attached to New Horizons simulations. We used Phobos and Deimos as an example for the determination of the satellites' center. These satellites are far from spherical, hence the difficulties in determining the center. Nix and Hydra are possibly more spherical because of their expected greater size, and therefore the precision on their center might be better than in our simulations. This can also lower the uncertainty on the masses, but not significantly. Because of the difference between the pixel size and the precision of the determination of the center of mass, the extension of the mission presented here would not be useful to constrain the masses much more, and so would not be a good option for enhancing the detection of masses.

Now we can consider the question of the value of the masses. The statistical uncertainty from the least-squares method only depends on the uncertainty of the observations, the partial derivatives, and the correlations between the parameters. When considering the uncertainty attached to one mass, the factors described before do not explicitly depend on this mass. Therefore, if one satellite's mass is higher than its estimate, its error will not change much from the case where the estimate is the lower mass. That is, the relative error will decrease, but not the absolute one. Accordingly, if we consider that both satellites are 2-σ more massive than their current estimation, and using the σ from Table 2, we obtain m_3 = 0.087 km^3 s^{-2} and m_4 = 0.093 km^3 s^{-2}. It means that the masses would be known to 11 and 20 %, respectively, in 2014. While New Horizons would not improve this relative uncertainty much for Nix, that is not the case for Hydra, whose mass would be known with a 3% uncertainty.

We assume that the mass will be determined with sufficient confidence if the 2-σ uncertainty is less than half the mass of the satellite. In 2014, we can see that the uncertainty on Nix's mass will be 0.010 km^3 s^{-2}. If we compare this with the estimated mass in Tholen et al. (2008), we can see that the condition given above will be fulfilled. This means that if the real mass of Nix is about the same or greater than its current estimation, we will know it with confidence before the New Horizons mission. If Nix is less massive, we can determine **which value of the mass New Horizons will enable us to detect with confidence**. Because the uncertainty on Nix's mass from the New Horizons data is expected to be 0.0076 km^3 s^{-2}, the minimum corresponding mass is 0.030 km^3 s^{-2}. When using the same method for Hydra, we find that the mass of Hydra would have to be greater than 0.075 km^3 s^{-2} to be known before 2014, and that its lowest value detectable from the New Horizons data is 0.010 km^3 s^{-2}.

We then investigated how many ground-based observations would be needed to obtain a comparable precision as the one we obtained before with New Horizons. To do so, we simulated observations at random dates during 50 days each year around Pluto's opposition, beginning in 2011. We used two different densities of simulations. In the first set, with the highest density, we simulated 100 observations each year (set 1999-2014 HD), and about 25 for the second one (set 1999-2014 LD). The uncertainties obtained for these simulated dates are given in Table 3.

Clearly, our most dense set gives a lower uncertainty for Nix's mass than what would be achieved with New Horizons in our previous simulation. Yet, that is not the case for the mass of the other objects of the system. This is because New Horizons

Table 3. 1-σ error bars on the masses given by the least-squares method using two sets of simulated observations with different densities, using m_1 = 870.3 km^3 s^{-2}, m_2 = 101.4 km^3 s^{-2}, m_3 = 0.039 km^3 s^{-2}, and m_4 = 0.021 km^3 s^{-2}.

set of simulated observations	1-σ error bars on the masses (km^{3}s^{-2})			
	Pluto	Charon	Nix	Hydra
1992-2014, about 25 observations/year	0.76	0.20	0.0076	0.015
1992-2014, about 100 observations/year	0.39	0.10	0.0041	0.010

will observe the system very regularly during several months, a situation harder to achieve for HST and ground-based observations. Nix's mass can be constrained with only 25 observations per year. We would then obtain only from ground-based/HST observations a precision similar to what we expect with the New Horizons data and ten ground-based/HST observations per year.

5. Conclusion

We have developed a numerical model of a multiple system's motion around the Sun with the possibility to include the oblate gravity fields. The first application of this model to Pluto's system has led us to conclude that the oblate gravity fields of Pluto and Charon will not be substantially more constrained from astrometry in the coming years, even considering New Horizons' data. Concerning the masses, we are limited today by the accuracy of the observations. A study on the error bars also shows that substantial improvement in mass determinations of all bodies except for possibly Nix must await New Horizons' flyby of Pluto's system.

Astrometric observations from New Horizons should succeed in significantly constraining Nix's and Hydra's mass and radii, if the masses are not too low compared with their current estimates. If the masses are lower than their current estimates, we can determine a highest possible value from New Horizons error bars, that is 0.0076 km^{3}s^{-2} for Nix, and 0.0028 km^3 s^{-2} for Hydra. This will provide the first estimates or highest values of the two moon densities and, as a result, may shed light on the question of their origin.

This should not be considered a reason not to observe the system. The discovery of the new satellite P4 clearly indicates that this system could still be a source of discoveries, and as such, new observations are still necessary. Indeed, the recent discovery of P4 could challenge some of these results depending on the interactions between this satellite and the other bodies of the system. P4 orbits around Pluto on an orbit between Nix and Hydra. Its mass is expected to be far lower than those of Nix and Hydra from its magnitude. If its trajectory is strongly disturbed by mutual effects with the other two satellites, then we might expect P4 to be the key to obtain the masses of Nix and Hydra before the arrival of New Horizons if the rate of observations is not increased. One must keep in mind, nonetheless, that this is only one possible configuration of the system among others. Indeed, we still have very few observations of the satellite nor do we have data on its astrometric precision.

That the masses remain strongly unconstrained while the motion of the satellites is known with a fairly good precision means that the masses are not heavily constrained by said motions. Observing the system remains imperative for constraining the orbit of the satellites, to prepare the New Horizons arrival as well as potential stellar occultations by these bodies. Indeed, their ephemeris is doomed to diverge if no new observations are available.

One key point of our model is that it is able to simultaneously fit the primary's motion (in our application, Pluto) and those of its satellites. The next step is now to adjust our model to real observations.

Acknowledgements. Support for this work (RPB) was provided by NASA, as a member of the New Horizons Mission science team. The authors thank the New Horizons Pluto Encounter Planning team for providing the parameters in Table 4.

References

Buie, M. W., Grundy, W. M., Young, E. F., Young, L. A., & Stern, S. A. 2006, AJ, 132, 290
Canup, R. M. 2005, Science, 307, 546
Christy, J. W. & Harrington, R. S. 1978, AJ, 83, 1005
Emelyanov, N. V. 2005, A&A, 438, L33
Everhart, E. 1985, in Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11-15, 1984. Edited by Andrea Carusi and Giovanni B. Valsecchi. Dordrecht: Reidel, Astrophysics and Space Science Library. Volume 115, 1985,, p.185, ed. A. Carusi & G. B. Valsecchi, 185–+
Lainey, V., Duriez, L., & Vienne, A. 2004, A&A, 420, 1171
Lainey, V. & Tobie, G. 2005, Icarus, 179, 485
Murray, C. D. & Dermott, S. F. 2000, Solar System Dynamics, ed. Murray, C. D. & Dermott, S. F.
Oberst, J., Matz, K. D., Roatsch, T., et al. 2006, A&A, 447, 1145
Seidelmann, P. K., Archinal, B. A., A'Hearn, M. F., et al. 2007, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 98, 155
Sicardy, B., Ageorges, N., Marco, O., et al. 2006, PLUTO III (HYDRA), Tech. rep., IAU Electronic Telegram
Standish, E. M. 1998, Tech. rep., Jet Prop. Lab. Interoffice Memo. 312.F-98-04
Stern, S. A., Mutchler, M. J., Weaver, H. A., & Steffl, A. J. 2007, in Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts, Vol. 38, Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts, 1722–+
Stern, S. A. & Spencer, J. 2003, Earth Moon and Planets, 92, 477
Stern, S. A., Weaver, H. A., Steffl, A. J., et al. 2006, Nature, 439, 946
Taylor, D. B. 1998, A&A, 330, 362
Tholen, D. J. & Buie, M. W. 1997, Icarus, 125, 245
Tholen, D. J., Buie, M. W., & Grundy, W. M. 2010, in Bulletin of the American Astronomical Society, Vol. 42, AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #42, 984–+
Tholen, D. J., Buie, M. W., Grundy, W. M., & Elliott, G. T. 2008, AJ, 135, 777
Turcotte, D. L. & Schubert, G. 2002, Geodynamics - 2nd Edition, ed. Turcotte, D. L. & Schubert, G.
Weaver, H. A., Gibson, W. C., Tapley, M. B., Young, L. A., & Stern, S. A. 2007, Overview of the New Horizons Science Payload, Tech. rep., Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory, http://www.boulder.swri.edu/pkb/
Weaver, H. A., Stern, S. A., Mutchler, M. J., et al. 2005, IAU Circ., 8625, 1
Weaver, H. A., Stern, S. A., Mutchler, M. J., et al. 2006, Nature, 439, 943
Young, L. A., Olkin, C., Spencer, J., et al. 2010, New Horizons: Plans for Nix and Hydra, in 2010 Nix-Hydra Meeting, Baltimore, MD (https://webcast.stsci.edu/webcast/detail.xhtml?talkid=1914&parent=1)
Young, L. A., Stern, S. A., Weaver, H. A., et al. 2008, Space Sci. Rev., 140, 93
Zharkov, V. N., Leontjev, V. V., & Kozenko, V. A. 1985, Icarus, 61, 92

Constraining multiple systems with GAIA

Beauvalet, L.[a], Lainey, V.[a], Arlot, J.-E.[a], Bancelin, D.[a], Binzel, R. P.[b,a], Marchis, F.[c,a]

[a] *IMCCE-Observatoire de Paris-UPMC, 77, avenue Denfert-Rochereau, 75014, Paris, France*
[b] *Department of Earth, Atmospheric, and Planetary Sciences, Massachusetts Institute of Technology, 77 Massachusetts Avenue, Cambridge, MA 02139 USA*
[c] *SETI Institute, 515 N. Whisman Road, Mountain View, CA 94043, USA*

Abstract

GAIA will provide observations of **some multiple asteroid and dwarf systems**. These observations are a way to determine and improve the quantification of **dynamical parameters, such as the masses and the gravity fields, in these multiple systems**. Here we investigate this problem in the cases of Pluto's and Eugenia's system. We simulate observations reproducing an approximate planning of the GAIA observations for both systems, **as well as the New Horizons observations of Pluto**. We have developed a numerical model reproducing the specific behavior of multiple asteroid system around the Sun and fit it to the simulated observations **using least-square method, giving the uncertainties on the fitted parameters**. We found that GAIA will improve significantly the precision of Pluto's and Charon's mass**, as well as Petit Prince's orbital elements and Eugenia's polar oblateness**.

Keywords: Planetary dynamics, multiple systems, satellites, physical parameters, GAIA

1. Introduction

Astrometric monitoring of multiple systems is a powerful way in the Solar System to have access to the physical properties of small bodies. Indeed, the satellite motions provide the mass of the primary, as well as the harmonics of its gravity field. The bodies involved can be very different in size and masses, from dwarf planets to small asteroids. These systems can be very compact and, as a result, **are difficult to observe from Earth without adaptive optics**. We can expect GAIA to observe the components of such systems, both the primary and its satellites, if these later are far enough from the primary (Bancelin et al., 2011, this issue). GAIA will make precise and regular observations of them, and as a result, will probably improve our knowledge of their dynamical parameters.

The purpose of this paper is to estimate the precision on the **dynamical parameters** we can expect for multiple systems thanks to GAIA. This kind of systems have been discovered among **nearly every** family of small bodies. We have investigated the contribution of GAIA's observations for one system in the Kuiper Belt : Pluto, and one in the Main Belt : 45 Eugenia. After a presentation of the dynamical model used especially to describe multiple systems in Section 1, we will develop the case of each system in a different section.

2. Dynamical model

We use here the same numerical model which has been developed in Beauvalet et al. (2011) (submitted). We consider the motion of every bodies of a multiple system in the inertial reference frame ICRF centered on the barycenter of the Solar System. We compute the motion of the bodies disturbed by the Sun and the planets, whose positions are obtained through the numerical ephemeris DE405 (Standish, 1998). The initial positions, velocities and masses in Pluto's

system come from (Tholen et al., 2008). When needed, we include the second order harmonics of the polar oblateness of the primary, J_2. We use the following notations :

- i **an integrated body from the considered system**,
- j the Sun or a planet,
- m_i the mass of the body i,
- $\mathbf{r}_j$ the position vector of the body j with respect to the Solar System barycenter,
- r_{ij} the distance between bodies i and j,
- R_l the equatorial radius of body l, $J_2^{(l)}$ the polar oblateness of body l,
- $U_{\bar{i}\hat{l}}$ the potential of the l body's oblateness on the i body's center of mass.

We then obtain the following equation of motion :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_i = & \sum_{j=1}^{10} -\frac{Gm_j(\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j})}{r_{ij}^3} \\ & + \sum_{l=1,\ l\neq i}^{3}\Big(-\frac{Gm_l(\mathbf{r_i}-\mathbf{r_l})}{r_{il}^3} \\ & + Gm_l\nabla_l U_{\bar{l}\hat{i}} - Gm_l\nabla_i U_{\bar{i}\hat{l}}\Big)\end{aligned} \quad (1)$$

where $U_{\bar{i}\hat{l}}$ is a function of the oblateness of l, and ϕ_i the latitude of i with respect to l equator :

$$U_{\bar{i}\hat{l}} = -\frac{R_l^2}{r_{il}^3}J_2^{(l)}\left(\frac{3}{2}\sin^2(\phi_i)-\frac{1}{2}\right) \quad (2)$$

Numerical integration of the equations of motion has been made using the 15th order Gauss-Radau integrator developed by Everhart (1985). Then we can adjust our model to the observations through a least-square procedure without constraints.

	Pluto	Charon
semi-major axis	39.26 AU	19570.45 km
diameter	2340 km	1206 km
angular diameter	100 mas	55 mas
magnitude	15.1	16.8
GM ($km^3\ s^{-2}$)	870.3	101.4
	Nix	Hydra
semi-major axis	49242. km	65082. km
diameter	88 km	72 km
angular diameter	4 mas	3 mas
magnitude	23.7	23.3
GM ($km^3\ s^{-2}$)	0.039	0.021

Table 1: Characteristics of Pluto and its satellites

3. Pluto's sytem

3.1. Description

In 2013, Pluto will be about 33 AU from the Sun. **We consider a four bodies system : Pluto, its most massive satellite Charon (Christy and Harrington, 1978), Nix and Hydra (Weaver et al., 2005). Physical details on these objects are given in Table 1. A last satellite has been discovered in July 2011 (Showalter et al., 2011) and has not been included in the model.**

The particularity of Pluto among other systems in the Kuiper Belt is that it will be observed *in situ* by the probe New Horizons in 2015. This means that the system will then be observed simultaneously by this probe and by GAIA. Nonetheless, New Horizons will observe the four bodies of the system during a very short amount of time, whereas GAIA will only be able to detect Pluto and Charon, **but its observations will be regularly made during five years.** The contribution of New Horizons' observations to our knowledge of the dynamical parameters of the system has been investigated in Beauvalet et al. (2011) (submitted). In this previous study, we have found that the only parameters which can be estimated are the masses of the bodies, **while the oblate gravity fields will not be obtained, even at the time of New Horizons arrival**. We use here the same method for GAIA.

3.2. Data simulation

Our goal is to determine the precision on the masses we can expect thanks to GAIA's observations. To do so, we simulate data at the moment of already existing and expected future observations of the system. We then fit our model to the simulations and extract the 1-σ uncertainty from the least-square method. We did not include noise to our simulation. This comes from the fact that we only want the statistical uncertainty, a quantity which depends only on the uncertainty of the observations, the influence of the parameter on the system and the correlations between the parameters. We used the Rendez-vous software to obtain a possible schedule of observations of Pluto's sytem by GAIA between 2013 and 2017. This software code has been developed by C. Ordenovic, F. Mignard and **P. Tanga** (OCA) for Gaia DPAC. The uncertainty attached to these simulated GAIA observations is considered to be 1 mas. **As a first approximation, we neglect the fact that this precision is available only in the direction of the scan.**

The dates used for GAIA simulations are given in Table 2. **The simulated ground-based observations consist of ten observations per year, with the same uncertainties as current ground-based observations. The New Horizons simulations are obtained using a preliminary schedule of the mission, as well as its estimated uncertainties.** More details on these two sets of simulations are given in Beauvalet et al. (2011)(submitted)

As a result, we have two different sets of simulated data :

- 1992-2014+NH : reproducing the existing observations, the future possible observations and New Horizons temporary observation schedule
- GAIA : reproducing observations of the system by GAIA

Simulations with GIBIS suggest that the two bodies, Pluto and Charon, should always be detected as separated objects. Nix and Hydra have respective magnitude of about 23.7 and 23 (Stern et al.,

Table 2: Dates used for the simulation of GAIA observations for Pluto's system.

Dates	
29/04/2013 17:16:31	05/04/2014 20:14:44
29/04/2013 19:03:05	23/08/2014 07:18:58
13/05/2013 13:08:54	23/08/2014 13:19:11
13/05/2013 17:22:33	23/08/2014 09:05:32
13/05/2013 19:09:06	07/09/2014 07:24:37
16/08/2013 14:40:26	07/09/2014 09:11:11
16/08/2013 18:54:05	11/10/2014 18:49:60
16/08/2013 20:40:39	11/10/2014 20:36:33
17/08/2013 00:54:18	25/02/2015 13:29:17
17/08/2013 02:40:52	25/02/2015 15:15:51
17/08/2013 06:54:31	15/03/2015 15:19:11
17/08/2013 08:41:04	17/04/2015 01:03:56
20/08/2013 18:57:21	01/09/2015 15:35:38
20/08/2013 20:43:54	22/09/2015 07:48:31
21/08/2013 00:57:33	22/09/2015 09:35:05
21/08/2013 02:44:07	22/10/2015 15:11:01
21/08/2013 06:57:46	06/03/2016 14:02:18
21/08/2013 08:44:20	29/03/2016 15:43:50
30/09/2013 18:15:16	27/04/2016 01:39:15
30/09/2013 20:01:50	10/09/2016 20:21:33
07/11/2013 19:22:56	10/09/2016 22:08:07
07/11/2013 23:36:35	05/10/2016 21:58:12
08/11/2013 01:23:09	01/11/2016 07:58:37
16/11/2013 11:42:28	01/11/2016 09:45:11
16/11/2013 13:29:02	17/03/2017 04:23:16
16/11/2013 17:42:41	13/04/2017 10:08:01
16/11/2013 19:29:15	07/05/2017 16:00:14
17/02/2014 02:45:53	21/09/2017 08:55:12
17/02/2014 06:59:32	21/09/2017 10:41:46
17/02/2014 08:46:06	20/10/2017 10:21:17
27/02/2014 13:06:04	11/11/2017 14:31:42
27/02/2014 14:52:38	11/11/2017 16:18:16
05/04/2014 18:28:10	

2006), so these two bodies will not be detected by GAIA.

3.3. Results

3.3.1. Contribution of GAIA's whole mission

The uncertainties on the masses for every object of the system is given in Table 3. We can see that GAIA's observations will lower the uncertainties of the masses of Pluto and Charon when comparing the cases with and without GAIA. We can also see that the precision of the masses of Nix and Hydra will also be a little bit modified. This comes from the fact that, if a parameter is more constrained, the fitting process can no longer reduce the residuals through changing this parameter as much as before. As a result, the role, and so the uncertainty, of the other parameter will also change. The masses which will be the most improved by GAIA are Pluto's and Charon's. We could have expected that the uncertainties on the masses of Nix and Hydra would have been much lowered because of the stronger constraints put on Pluto and Charon. This is not what happens here, only the uncertainty on Hydra's mass being lowered. This comes from the fact that the correlations between the parameters do not decrease linearly with the number of observations available.

3.3.2. Orbit enhancement before New Horizons arrival

GAIA will be launched two years before New Horizons' arrival, and so will collect data before the fly-by. We have searched whether GAIA would enable us to put stronger constraints on the masses and, as a result, on the body ephemerides. We have used the same method as before with simulations spanning between 2013 and 2015 before New Horizons' fly-by. **The set of simulations named 1992-2015 uses the dates of the currently available observations, the future observations before New Horizons' arrival and the observations from GAIA before 2015.**

The obtained uncertainties on the masses and the satellites' semi-major axis are given respectively in Table 3 and 4.

set of simulated observations	1-σ error bars on the masses (km^3s^{-2}) number of simulated observations	
	Pluto	Charon
1992-2014+NH	0.25	0.045
		181
1992-2014+NH	0.17	0.014
+GAIA		181
1992-2015	0.45	0.035
	41	166
	Nix	Hydra
1992-2014+NH	0.0076	0.0026
	158	176
1992-2014+NH	0.0078	0.0024
+GAIA	186	233
1992-2015	0.0086	0.016
	68	69

Table 3: 1-σ error bars on the masses given by least square method using different sets of simulated observations, using $m_P = 870.3$ km^3 s^{-2}, $m_C = 101.4$ km^3 s^{-2}, $m_N = 0.039$ km^3 s^{-2} and $m_H = 0.021$ km^3 s^{-2}(Tholen et al., 2008).

As can be seen, Charon's mass would be considerably improved by those observations. Concerning Nix and Hydra's dynamics, the most interesting results concern their semi-major axis, whose uncertainty would be lowered even though they are not observed by GAIA. We can deduce that these observations, if they were to be available in time to prepare New Horizons' arrival, would be very precious to constrain not only Pluto's and Charon's motion, but those of Nix and Hydra as well. We can see here that in this case, strengthening the constraints on Pluto and Charon also constrains Nix and Hydra.

4. Eugenia's system

4.1. Description

(45)Eugenia is one of the few known triple asteroids. The primary, Eugenia, is far from spherical, its shape being obviously oblate from high resolution observations and light-curve inversion method. Its two satellites, Petit Prince

set of simulated observations	1-σ error bars on the semi-major axis (km)		
	Charon	Nix	Hydra
1992-2014	5.8	23	155
1992-2015	3.25	10	43

Table 4: 1-σ error bars on the semi-major axis using two different sets of simulations. The current estimation of the semi-major axis is $a_C = 19570.45$ km, $a_N = 49242$ km and $a_H = 65082$ km (Tholen et al., 2008)

and S2004(45) are quite close to their primary and far smaller than it. The outermost satellite, Petit Prince, is the first discovered satellite of the system (Merline et al., 1999) in 1999, while the second one, closer to Eugenia, has been discovered in 2007 (Marchis et al., 2007). Petit Prince semi-major axis is only 3% of Eugenia's Hill radius, meaning both satellites are deep inside Eugenia's gravitational well. Yet, most recent studies of the system (Marchis et al., 2008, 2010) imply that they have a non-negligible inclination with respect to Eugenia's equatorial plane. From Eugenia's shape, a theoretical value of its second order polar oblateness has been estimated to be 0.19. This is in contradiction with a much lower value of 0.06 deduced from the satellite orbital motions. **S2004(45) is always too close to Eugenia to be observed by GAIA considering the difference in their magnitude, about 8.2. On the contrary, Petit-Prince should be detectable when being close to its higher separation from Eugenia but the difference in their magnitude, about 7.4, prevents Petit Prince to be seen by GAIA when too close to Eugenia.**

4.2. Data simulation

We used again the simulation of asteroids'transit on GAIA's CCD with Rendez-vous software, and extracted the scheduled dates for Eugenia's observations. **The dates used are given in Table 7**. As Petit-Prince will not be seen when too close to Eugenia, we decided to reject the positions where he would be closer than 500 mas from Eugenia. We gave the observations a 1 mas uncertainty, as for Pluto's system.

	Eugenia	Petit Prince
semi-major axis	2.720 AU	1164.51 km
diameter	214 km	13 km
angular diameter	110 mas	7 mas
magnitude	7.46	16.8
GM (km^3 s^{-2})	0.376	1.67×10^{-5}
	S2004(45)	
semi-major axis	610.8 km	
diameter	6 km	
angular diameter	3 mas	
magnitude	-	
GM (km^3 s^{-2})	1.67×10^{-5}	

Table 5: Characteristics of Eugenia and its satellites

semi major axis (km)	Petit Prince	S2004(45)
1998-2010	0.011	0.055
1998-2010+GAIA	0.005	0.029
Eugenia's pole (°)	λ	β
1998-2010	0.20	0.10
1998-2010+GAIA	0.040	0.041

Table 6: 1-σ error-bar on some of Eugenia's and its satellites' dynamical parameters using different sets of simulations

4.3. Results

The uncertainties obtained for the semi-major axis of the satellites, and the pole orientation of Eugenia, are given in Table 6. Concerning the second order polar oblateness, its uncertainty for the 1998-2010 set is 0.0006, and 0.0002 with GAIA observations, to be compared with $J_2 = 0.060$. As can be seen when comparing the two sets of observations, the orbital elements of Petit Prince will be constrained by GAIA observations, and as a result, the uncertainties on those of S2004(45) will also be lowered. We also find that **the pole orientation will be more constrained since this data is obtained from the satellites'motion.**

5. Conclusion

For both systems, Pluto's and Eugenia's, GAIA will put new constrains on the dynamical properties of the system's bodies. Pluto has the advantage that it will be observed by both GAIA and New Horizons, and each mission will give us

Annexe E

Origine des noms de Pluton et de ses satellites

E.1 Origine des noms des planètes et *Interpretatio*

Dans cette section, nous ne traiterons que des planètes visibles à l'œil nu, étant les seules dont le nom est issu de l'Antiquité. Les noms des planètes visibles à l'œil nu que nous connaissons dans la civilisation occidentale sont issus de la tradition latine. Les Romains ont attribué aux planètes le nom de divinités de leur panthéon. Néanmoins, ces noms n'ont pas été attribués en fonction de leur importance. Par exemple, parmi la triade capitoline : Jupiter, Junon et Minerve, les divinités les plus importantes pour les romains, un seul se voit attribuer une planète. Cette situation s'explique par le fait que l'attribution des noms de dieux à des planètes est une tradition héritée de la Grèce, qui a elle-même repris cette tradition des babyloniens.

Pour les babyloniens, l'observation du ciel est une pratique essentielle liée à la religion, comme l'attestent les nombreuses représentations du ciel sur les vestiges de cette époque. Le comportement des astres, leur luminosité, etc, permettaient d'établir des horoscopes. Les constellations présentes dans l'Almageste de Ptolémée sont elles-mêmes issues en partie des constellations sumériennes (cf figure E.1). Les planètes étaient considérées comme le séjour des dieux. Le nom et les attributs de la divinité associée à chaque planète sont donnés dans le tableau E.1.

Table E.1 – Planète, divinité associée chez les babyloniens et attributs

Planète	Divinité babylonienne	Attributs
Mercure	Nabu	Sagesse, écriture
Vénus	Ishtar	Amour, fertilité, guerre
Mars	Nergal	Guerre, royaume des morts
Jupiter	Marduk	Roi des Dieux, magie, végétation
Saturne	Ninurta	Fertilité, labours, irrigation

Table E.2 – Planète, divinité associée chez les grecs et attributs

Planète	Divinité grecque	Attributs
Mercure	Hermès	Commerce, voleurs, éloquence, ...
Vénus	Aphrodite	Amour
Mars	Ares	Guerre violente
Jupiter	Zeus	Roi des Dieux, ciel, tonnerre
Saturne	Cronos	Roi des Titans

Figure E.1 – Déesse Gula avec son chien, Kudurru de Nazimarutash, temple de Mardouk à Babylone. Calcaire noir, deuxième moitié du 14ème siècle avt J.-C., troisième dynastie Kassite. Musée du Louvre, Département des Antiquités Orientales, Paris, France. Photographie par Dorothée Sacrez.

Les grecs ont repris cette tradition par le truchement de ce que l'on appelle l'*interpretatio graeca*. Cette locution latine désigne la manière dont les auteurs de la Grèce hellénistique et pré-hellénistique attribuaient aux divinités étrangères le nom de leurs propres divinités. Par exemple, lors de l'évocation de la religion égyptienne, Amon, divinité tutélaire de la ville de Thèbes, dieu des vents et dieu suprême du panthéon égyptien sous le Nouvel Empire (environ -1500 à -1000 av. J.-C.), est désigné sous le nom de "Zeus", dieu du ciel et roi des dieux pour les grecs. Les équivalences ne sont bien sûr pas parfaites mais contribuent à établir un rapprochement entre les peuples antiques, sans pour autant conduire à l'assimilation.

Les romains pousseront encore plus loin cette manière de faire à travers l'*interpretatio romana*. Étape première du syncrétisme religieux romain et favorisant l'assimilation culturelle des peuples vaincus, l'interpretatio romana se verra effectuée de telle manière lors de la conquête de la Grèce que la majeure partie du panthéon grec se verra attribuer un équivalent romain, quitte à modifier quelque peu les attributions d'une divinité. C'est ainsi que, par exemple, la planète Vénus, se verra attribuée le nom de la déesse éponyme qui occupait une place assez secondaire sous Rome, par assimilation avec la grecque Aphrodite et la babylonienne Ishtar, l'une des plus importante déesse du monde antique.

E.2 Pluton : un cas particulier

À partir de la découverte des satellites galiléens en 1610 s'est posée la question des noms à attribuer à ces nouveaux objets, fallait-il leur donner un nom en rapport avec leur époque de découverte, comme les astres médicéens de Galilée, ou conserver une continuité avec l'antiquité romaine dont les noms avaient été conservés ? Un débat identique eut lieu également lors des découvertes d'Uranus et Neptune, Herschel voulant donner à Uranus le nom de son mécène, le roi Georges III, Le Verrier voulant donner son propre nom à Neptune.

Lors de la découverte de Pluton, le nom qui fut retenu fut celui proposé par Venetia Burney, une jeune anglaise de 11 ans. Ce nom permettait de faire référence à Percival Lowell dont les initiales se retrouvent dans les deux premières lettres de Pluton, et de donner à une planète le nom du troisième fils de Saturne/Cronos. Cependant, l'attribution de ce nom a popularisé l'idée que Pluton serait le nom de la divinité infernale latine assimilée au grec Hadès par l'interpretatio romana. En réalité, le nom même *Pluton* est la forme latinisée du grec Πλούτων (Plouton), l'un des noms euphémique d'Hadès, à ne pas confondre avec Πλουτος (Ploutos), fils de Déméter et Poséïdon et dieu de la prospérité ayant la même racine étymologique. Hadès était le frère de Zeus et de Poséïdon et s'était vu échoir la souveraineté sur le royaume des morts suite à la Titanomachie, épisode mythologique relaté entre autre dans la *Théogonie* d'Hésiode et rapportant le combat entre Zeus et ses frères d'une part, et leur père Cronos aidé des Titans, ses frères, d'autre part.

Les noms euphémiques étaient des épithètes utilisés à la place des noms usuels pour se concilier les bonnes grâces de divinités habituellement terrifiantes et redoutables. Ainsi, Hadès, souverain des enfers, était-il appelé *Plouton*, le riche, car, en tant que dieu

chthonien (souterrain), il régnait sur les richesses enfouies dans le sol. L'utilisation de ce nom euphémique dans certains textes latins et de nombreux textes grecs a conduit à la confusion entre le nom réel du dieu des morts et son nom euphémique. La confusion fut d'autant plus facile qu'Hadès n'était pratiquement pas vénéré sous son nom, un seul temple lui étant dédié dans la cité d'Élis où un culte lui était rendu une fois par an. Les seuls hymnes grecs lui étant dédiés sont des hymnes orphiques, attachés aux cultes à mystères d'Eleusis, dans lesquels il est confondu avec Ploutos de part son statut d'époux de Perséphone.

Deux divinités latines furent rapprochées d'Hadès par l'interpretatio romana : Dis Pater, à l'origine divinité chthonienne de la richesse et de l'abondance, plus proche par ses attributs de Ploutos, et Orcus, divinité à la dimension infernale plus marquée. Ce dernier a d'ailleurs donné son nom à un autre objet trans-neptunien. Il ne m'a pas été permis de savoir si Venetia Burley, en proposant Pluton, avait conscience de proposer un nom euphémique, mais l'on peut penser que si ce n'était pas le cas, elle l'apprit plus tard, ayant épousé un classiciste.

E.3 Satellites de Pluton

E.3.1 Charon

Il aurait pû sembler relativement naturel d'attribuer au premier satellite connu de Pluton le nom de l'épouse de la divinité éponyme, mais c'est une autre qui a eu ce privilège. Ayant été découvert par Christy et Harrington, il revenait aux deux découvreurs de proposer un nom pour ce nouvel objet. Christy voulu lui donner le nom "Charon", diminutif de sa femme Charlene rimant avec proton et neutron. Étant donné que le nom d'un objet nouvellement découvert doit être accepté par l'Union Astronomique Internationale, il était peu probable que le surnom de sa femme soit accepté. Par chance, "Charon" est aussi le nom d'une figure mythologique infernale, le nautonier des enfers, chargé de mener l'âme des morts par delà le fleuve Styx et fut donc accepté par l'UAI. Nommer le premier satellite de Pluton "Charon" au lieu de Proserpine peut aussi se justifier par le fait que le nom avait déjà été attribué à un astéroïde dès 1853, (26) Proserpine.

E.3.2 Nix

Le nom de la divinité primordiale de la Nuit, issue du Chaos chez les grecs, est Nyx. Un astéroïde s'est vu donné ce nom en 1980, (3908)Nyx. Lors de l'attribution du nom au satellite de Pluton, le changement de graphie a été justifié comme étant une référence à la graphie égyptienne de cette divinité, mais aucune référence concernant cette particularité égyptienne n'a été trouvée. Étant donné le nombre de génies infernaux et héros ayant parcouru les enfers existant dans la mythologie gréco-latine et n'ayant pas encore donné leur nom à un astéroïde, il paraît assez difficile de justifier ce choix autrement que pour former avec Nix et Hydra les initiales de la mission New Horizons. La déesse grecque de la Nuit n'a pas de rapport direct avec Hadès, sauf si l'on considère le fait que son fils, Thanatos, personnification de la Mort, est celui qui peuple le royaume d'Hadès. Étrangement, il existe une créature de la mythologie nordique ayant une dimension néfaste nommé le Nix

en allemand, ou Nixe, Neck, Necker, un génie des eaux scandinave, attirant les humains dans les eaux pour les noyer.

E.3.3 Hydra

Le nom du satellite est une référence à l'Hydre de Lerne, qu'Hérakles (Hercule en latin), affronta pour le deuxième de ses travaux. Les marais abritant l'hydre étaient considérés comme l'une des entrées des enfers et étaient le lieu d'un culte à mystères. Une constellation porte déjà ce nom. Néanmoins, contrairement à une idée largement répandue, elle ne fait pas référence à la même créature, mais à celle d'une autre légende liée aux constellations de la coupe et du corbeau.

Bibliographie

Aoki, S., Soma, M., Kinoshita, H., and Inoue, K. Conversion matrix of epoch B 1950.0 FK 4-based positions of stars to epoch J 2000.0 positions in accordance with the new IAU resolutions. *A&A*, volume 128 :263–267, 1983.

Assafin, M., Camargo, J. I. B., Vieira Martins, R., Andrei, A. H., Sicardy, B., Young, L., da Silva Neto, D. N., and Braga-Ribas, F. Precise predictions of stellar occultations by Pluto, Charon, Nix, and Hydra for 2008-2015. *A&A*, volume 515 :A32+, 2010. doi :10.1051/0004-6361/200913690.

Baier, G. and Weigelt, G. Speckle interferometric observations of Pluto and its moon Charon on seven different nights. *A&A*, volume 174 :295–298, 1987.

Barbieri, C., Benacchio, L., Capaccioli, M., and Gemmo, A. G. Accurate positions of the planet Pluto from 1979 to 1987. *AJ*, volume 96 :396–399, 1988. doi :10.1086/114818.

Barbieri, C., Benacchio, L., Capaccioli, M., Pinto, G., and Schoenmaker, A. A. Accurate positions of the planet Pluto from 1974 to 1978. *AJ*, volume 84 :1890–1893, 1979. doi :10.1086/112620.

Barbieri, C., Capaccioli, M., Ganz, R., and Pinto, I. G. Accurate Positions of the Planet Pluto in the Years 1969-1970. *AJ*, volume 77 :521–+, 1972. doi :10.1086/111312.

Barbieri, C., Capaccioli, M., and Pinto, G. Astrometric positions of the planet Pluto in the years 1971-1974. *AJ*, volume 80 :412–+, 1975. doi :10.1086/111757.

Basri, G. and Brown, M. E. Planetesimals to Brown Dwarfs : What is a Planet ? *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, volume 34 :193–216, 2006. doi :10.1146/annurev.earth.34.031405.125058.

Beauvalet, L., Lainey, V., Arlot, J.-E., Bancelin, D., Binzel, R., and Marchis, F. Constraining multiple systems with gaia. *Planet. Space Sci.*, volume in press, 2012a. doi : 10.1016/j.pss.2012.01.006.

Beauvalet, L., Lainey, V., Arlot, J.-E., and Binzel, R. Dynamical parameters determination in pluto's system. *A&A*, volume in press, 2012b. doi :10.1051/0004-6361/201116952.

Beletic, J. W., Goody, R. M., and Tholen, D. J. Orbital elements of Charon from speckle interferometry. *Icarus*, volume 79 :38–46, 1989. doi :10.1016/0019-1035(89)90106-1.

Belton, M. and Carlson, R. 1993 (243) 1. *IAU Circ.*, volume 5948 :2–+, 1994.

Bottke, W. F., Jr., Vokrouhlický, D., Rubincam, D. P., and Nesvorný, D. The Yarkovsky and Yorp Effects : Implications for Asteroid Dynamics. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, volume 34 :157–191, 2006. doi :10.1146/annurev.earth.34.031405.125154.

Brown, M. E., Margot, J. L., Keck, W. M., II, de Pater, I., and Roe, H. S/2001 (87) 1. *IAU Circ.*, volume 7588 :1–+, 2001.

Buie, M. W., Grundy, W. M., Young, E. F., Young, L. A., and Stern, S. A. Orbits and Photometry of Pluto's Satellites : Charon, S/2005 P1, and S/2005 P2. *AJ*, volume 132 :290–298, 2006. doi :10.1086/504422.

Buie, M. W., Grundy, W. M., Young, E. F., Young, L. A., and Stern, S. A. Pluto and Charon with the Hubble Space Telescope. II. Resolving Changes on Pluto's Surface and a Map for Charon. *AJ*, volume 139 :1128–1143, 2010. doi :10.1088/0004-6256/139/3/1128.

Canup, R. M. A Giant Impact Origin of Pluto-Charon. *Science*, volume 307 :546–550, 2005. doi :10.1126/science.1106818.

Canup, R. M. On a Giant Impact Origin of Charon, Nix, and Hydra. *AJ*, volume 141 :35–+, 2011. doi :10.1088/0004-6256/141/2/35.

Christy, J. W. and Harrington, R. S. The satellite of Pluto. *AJ*, volume 83 :1005–+, 1978. doi :10.1086/112284.

Cohen, C. J. and Hubbard, E. C. Libration of the close approaches of Pluto to Neptune. *AJ*, volume 70 :10–+, 1965. doi :10.1086/109674.

Cohen, C. J., Hubbard, E. C., and Oesterwinter, C. New orbit for Pluto and analysis of differential corrections. *AJ*, volume 72 :973–+, 1967. doi :10.1086/110372.

Debehogne, H. and de Freitas Mourao, R. R. The positions of Pluto obtained during the February 1985 observations carried out at the European Southern Observatory (ESO), La Silla. *AJ*, volume 96 :1479–1481, 1988. doi :10.1086/114899.

Debehogne, H., Machado, L. E., Caldeira, J. F., Vieira, G. G., and Netto, E. R. Positions of Jupiter, Galilean satellites and Pluto obtained in May 1980 with GPO of the ESO, La Silla. *A&AS*, volume 46 :131–134, 1981.

Emelyanov, N. V. The mass of Himalia from the perturbations on other satellites. *A&A*, volume 438 :L33–L36, 2005. doi :10.1051/0004-6361:200500143.

Everhart, E. An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. In A. Carusi & G. B. Valsecchi, editor, *Dynamics of Comets : Their Origin and Evolution, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11-15, 1984. Edited by Andrea Carusi and Giovanni B. Valsecchi. Dordrecht : Reidel, Astrophysics and Space Science Library. Volume 115, 1985,, p.185*, pp. 185–+, 1985.

Folkner, W. M., Williams, J. G., and Boggs, D. H. Technical report, Jet Prop. Lab. Interoffice Memo. 343R-08-003, 2008.

Gemmo, A. G. and Barbieri, C. Astrometry of Pluto from 1969 to 1989. *Icarus*, volume 108 :174–179, 1994. doi :10.1006/icar.1994.1051.

Goldreich, P. and Sari, R. Tidal Evolution of Rubble Piles. *ApJ*, volume 691 :54–60, 2009. doi :10.1088/0004-637X/691/1/54.

Greenberg, R. Apsidal precession of orbits about an oblate planet. *AJ*, volume 86 :912–914, 1981. doi :10.1086/112968.

Hardie, R. H., Marcialis, R. L., Wilson, J. W., and Furman, W. R. Astrometric observations of Pluto - 1965-1981. *AJ*, volume 90 :2643–+, 1985. doi :10.1086/113970.

Harrington, R. S. and Walker, R. L. Positions of planets and natural satellites. II. *AJ*, volume 89 :889–898, 1984. doi :10.1086/113586.

Jensen, K. S. Accurate astrometric positions of Pluto, 1975-1978. *A&AS*, volume 36 :395–398, 1979.

Jewitt, D., Luu, J., and Marsden, B. G. 1992 QB1. *IAU Circ.*, volume 5611 :1–+, 1992.

Kaasalainen, M., Torppa, J., and Piironen, J. Models of Twenty Asteroids from Photometric Data. *Icarus*, volume 159 :369–395, 2002. doi :10.1006/icar.2002.6907.

Klemola, A. R. and Harlan, E. A. Astrometric observations of outer planets and minor planets 1980-1982. *AJ*, volume 87 :1242–+, 1982. doi :10.1086/113208.

Klemola, A. R. and Harlan, E. A. Astrometric observations of outer planets and minor planets 1982-1983. *AJ*, volume 89 :879–881, 1984. doi :10.1086/113584.

Klemola, A. R. and Harlan, E. A. Astrometric observations of outer planets and minor planets 1984-1985. *AJ*, volume 92 :195–198, 1986. doi :10.1086/114150.

Krivov, A. V. Indirect Influence of the External Bodies on the Motion of Artificial Earth Satellites. In K. Kurzynska, F. Barlier, P. K. Seidelmann, & I. Wyrtrzyszczak , editor, *Dynamics and Astrometry of Natural and Artificial Celestial Bodies*, pp. 353–+, 1994.

Lainey, V. *Théorie dynamique des satellites galiléens*. Ph.D. thesis, Observatoire de Paris, 2002.

Lainey, V., Dehant, V., and Pätzold, M. First numerical ephemerides of the Martian moons. *A&A*, volume 465 :1075–1084, 2007. doi :10.1051/0004-6361:20065466.

Lainey, V., Duriez, L., and Vienne, A. New accurate ephemerides for the Galilean satellites of Jupiter. I. Numerical integration of elaborated equations of motion. *A&A*, volume 420 :1171–1183, 2004. doi :10.1051/0004-6361:20034565.

Lee, M. H. and Peale, S. J. On the orbits and masses of the satellites of the Pluto Charon system. *Icarus*, volume 184 :573–583, 2006. doi :10.1016/j.icarus.2006.04.017.

Lindegren, L. Meridian observations of planets with a photoelectric multislit micrometer. *A&A*, volume 57 :55–72, 1977.

Lithwick, Y. and Wu, Y. On the Origin of Pluto's Minor Moons, Nix and Hydra. *ArXiv e-prints*, 2008a.

Lithwick, Y. and Wu, Y. The Effect of Charon's Tidal Damping on the Orbits of Pluto's Three Moons. *ArXiv e-prints*, 2008b.

Malhotra, R. The Origin of Pluto's Orbit : Implications for the Solar System Beyond Neptune. *AJ*, volume 110 :420–+, 1995. doi :10.1086/117532.

Marchis, F., Baek, M., Descamps, P., Berthier, J., Hestroffer, D., and Vachier, F. S/2004 (45) 1. *IAU Circ.*, volume 8817 :1–+, 2007.

Marchis, F., Berthier, J., Burns, K. J., Descamps, P., Durech, J., Emery, J. P., Enriquez, J. E., Lainey, V., Reiss, A. E., and Vachier, F. Characteristics of Known Triple Asteroid Systems in the Main Belt. In *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #42*, volume 42 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, pp. 1050–+, 2010a.

Marchis, F., Descamps, P., Baek, M., Harris, A. W., Kaasalainen, M., Berthier, J., Hestroffer, D., and Vachier, F. Main belt binary asteroidal systems with circular mutual orbits. *Icarus*, volume 196 :97–118, 2008a. doi :10.1016/j.icarus.2008.03.007.

Marchis, F., Descamps, P., Berthier, J., and Emery, J. P. S/2008 (216) 1 and S/2008 (216) 2. *IAU Circ.*, volume 8980 :1–+, 2008b.

Marchis, F., Descamps, P., Hestroffer, D., Berthier, J., Brown, M. E., and Margot, J.-L. Satellites of (87) Sylvia. *IAU Circ.*, volume 8582 :1–+, 2005.

Marchis, F., Lainey, V., Descamps, P., Berthier, J., van Dam, M., de Pater, I., Macomber, B., Baek, M., Le Mignant, D., Hammel, H. B., Showalter, M., and Vachier, F. A dynamical solution of the triple asteroid system (45) Eugenia. *Icarus*, volume 210 :635–643, 2010b. doi :10.1016/j.icarus.2010.08.005.

Marchis, F., Macomber, B., Berthier, J., Vachier, F., and Emery, J. P. S/2009 (93) 1 and S/2009 (93) 2. *IAU Circ.*, volume 9069 :1–+, 2009.

Merline, W. J., Close, L. M., Dumas, C., Chapman, C. R., Roddier, F., Menard, F., Slater, D. C., Duvert, G., Shelton, C., and Morgan, T. Discovery of a moon orbiting the asteroid 45 Eugenia. *Nature*, volume 401 :565–+, 1999. doi :10.1038/44089.

Milani, A., Nobili, A. M., and Carpino, M. Dynamics of Pluto. *Icarus*, volume 82 :200–217, 1989. doi :10.1016/0019-1035(89)90031-6.

Morando, B. *Mouvement d'un satellite artificiel de la terre*, 1974.

Murray, C. D. and Dermott, S. F. *Solar System Dynamics*, 2000.

Oberst, J., Matz, K. D., Roatsch, T., Giese, B., Hoffmann, H., Duxbury, T., and Neukum, G. Astrometric observations of Phobos and Deimos with the SRC on Mars Express. *A&A*, volume 447 :1145–1151, 2006. doi :10.1051/0004-6361:20053929.

Rapaport, M., Teixeira, R., Le Campion, J. F., Ducourant, C., Camargo, J. I. B., and Benevides-Soares, P. Astrometry of Pluto and Saturn with the CCD meridian instruments of Bordeaux and Valinhos. *A&A*, volume 383 :1054–1061, 2002. doi : 10.1051/0004-6361:20011804.

Rylkov, V. P., Vityazev, V. V., and Dement'eva, A. A. Pluto : an analysis of photographic positions obtained with the Pulkovo normal astrograph in 1939-1992. *Astronomical and Astrophysical Transactions*, volume 6 :265–281, 1995. doi :10.1080/10556799508232072.

Scheeres, D. J. Dynamics about uniformly rotating triaxial ellipsoids : Applications to asteroids. *Icarus*, volume 110 :225–238, 1994. doi :10.1006/icar.1994.1118.

Seidelmann, P. K., Archinal, B. A., A'Hearn, M. F., Conrad, A., Consolmagno, G. J., Hestroffer, D., Hilton, J. L., Krasinsky, G. A., Neumann, G., Oberst, J., Stooke, P., Tedesco, E. F., Tholen, D. J., Thomas, P. C., and Williams, I. P. Report of the IAU/IAG Working Group on cartographic coordinates and rotational elements : 2006. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, volume 98 :155–180, 2007. doi :10.1007/s10569-007-9072-y.

Showalter, M. R., Hamilton, D. P., Stern, S. A., Weaver, H. A., Steffl, A. J., and Young, L. A. New Satellite of (134340) Pluto : S/2011 (134340) 1. *Central Bureau Electronic Telegrams*, volume 2769 :1–+, 2011.

Sicardy, B., Ageorges, N., Marco, O., Roques, F., Mousis, O., Rousselot, P., Hainaut, O., Bellucci, A., Colas, F., Gendron, E., Lellouch, E., Renner, S., and Widemann, T. Pluto iii (hydra). *IAU Electronic Telegram*, 2006a.

Sicardy, B., Bellucci, A., Gendron, E., Lacombe, F., Lacour, S., Lecacheux, J., Lellouch, E., Renner, S., Pau, S., Roques, F., Widemann, T., Colas, F., Vachier, F., Martins, R. V., Ageorges, N., Hainaut, O., Marco, O., Beisker, W., Hummel, E., Feinstein, C., Levato, H., Maury, A., Frappa, E., Gaillard, B., Lavayssière, M., di Sora, M., Mallia, F., Masi, G., Behrend, R., Carrier, F., Mousis, O., Rousselot, P., Alvarez-Candal, A., Lazzaro, D., Veiga, C., Andrei, A. H., Assafin, M., da Silva Neto, D. N., Jacques, C., Pimentel, E., Weaver, D., Lecampion, J.-F., Doncel, F., Momiyama, T., and Tancredi, G. Charon's size and an upper limit on its atmosphere from a stellar occultation. *Nature*, volume 439 :52–54, 2006b. doi :10.1038/nature04351.

Sicardy, B., Bolt, G., Broughton, J., Dobosz, T., Gault, D., Kerr, S., Bénard, F., Frappa, E., Lecacheux, J., Peyrot, A., Teng-Chuen-Yu, J.-P., Beisker, W., Boissel, Y., Buckley, D., Colas, F., de Witt, C., Doressoundiram, A., Roques, F., Widemann, T., Gruhn, C., Batista, V., Biggs, J., Dieters, S., Greenhill, J., Groom, R., Herald, D., Lade, B., Mathers, S., Assafin, M., Camargo, J. I. B., Vieira-Martins, R., Andrei, A. H., da Silva Neto, D. N., Braga-Ribas, F., and Behrend, R. Constraints on Charon's Orbital Elements from the Double Stellar Occultation of 2008 June 22. *AJ*, volume 141 :67–+, 2011. doi :10.1088/0004-6256/141/2/67.

Standish, E. M. Improved ephemerides of Pluto. *Icarus*, volume 108 :180–185, 1994. doi :10.1006/icar.1994.1052.

Standish, E. M. Technical report, Jet Prop. Lab. Interoffice Memo. 312.F-98-04, 1998.

Steinberg, E. and Sari, R. Binary YORP Effect and Evolution of Binary Asteroids. *AJ*, volume 141 :55–+, 2011. doi :10.1088/0004-6256/141/2/55.

Stern, A. and Spencer, J. New Horizons : The First Reconnaissance Mission to Bodies in the Kuiper Belt. *Earth Moon and Planets*, volume 92 :477–482, 2003. doi :10.1023/B:MOON.0000031962.33024.33.

Stern, S. A., Mutchler, M. J., Weaver, H. A., and Steffl, A. J. The Positions, Colors, and Photometric Variability of Pluto's Small Satellites from HST Observations : 2005-2006. In *Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts*, volume 38 of *Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts*, pp. 1722–+, 2007.

Stern, S. A., Mutchler, M. J., Weaver, H. A., and Steffl, A. J. The Positions, Colors, and Photometric Variability of Pluto's Small Satellites from HST Observations 2005-2006, 2008. Submitted (arXiv : astro-ph/0605014).

Stern, S. A., Weaver, H. A., Steffl, A. J., Mutchler, M. J., Merline, W. J., Buie, M. W., Young, E. F., Young, L. A., and Spencer, J. R. A giant impact origin for Pluto's small moons and satellite multiplicity in the Kuiper belt. *Nature*, volume 439 :946–948, 2006a. doi :10.1038/nature04548.

Stern, S. A., Weaver, H. A., Steffl, A. J., Mutchler, M. J., Merline, W. J., Buie, M. W., Young, E. F., Young, L. A., and Spencer, J. R. A giant impact origin for Pluto's small moons and satellite multiplicity in the Kuiper belt. *Nature*, volume 439 :946–948, 2006b. doi :10.1038/nature04548.

Tajeddine, R., Lainey, V., and Hestroffer, D. Study of the Yarkovsky diurnal effect on planetary satellites : Application to the satellites of Mars. In *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #43*, volume 43 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, pp. 999–+, 2011.

Taylor, D. B. Ephemerides of the five major Uranian satellites by numerical integration. *A&A*, volume 330 :362–374, 1998.

Tholen, D. J. and Buie, M. W. The Orbit of Charon. *Icarus*, volume 125 :245–260, 1997. doi :10.1006/icar.1996.5494.

Tholen, D. J., Buie, M. W., and Grundy, W. M. Improved Masses of Nix and Hydra. In *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #42*, volume 42 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, pp. 984–+, 2010.

Tholen, D. J., Buie, M. W., Grundy, W. M., and Elliott, G. T. Masses of Nix and Hydra. *AJ*, volume 135 :777–784, 2008. doi :10.1088/0004-6256/135/3/777.

Turcotte, D. L. and Schubert, G. *Geodynamics - 2nd Edition*, 2002. doi :10.2277/0521661862.

Wan, X., Huang, T., and Innanen, K. A. The 1 :1 Superresonance in Pluto's Motion. *AJ*, volume 121 :1155–1162, 2001. doi :10.1086/318733.

Weaver, H. A., Stern, S. A., Mutchler, M. J., Steffl, A. J., Buie, M. W., Merline, W. J., Spencer, J. R., Young, E. F., and Young, L. A. S/2005 P 1 and S/2005 P 2. *IAU Circ.*, volume 8625 :1–+, 2005.

Williams, J. G. and Benson, G. S. Resonances in the Neptune-Pluto System. *AJ*, volume 76 :167–+, 1971. doi :10.1086/111100.

Young, E. F., Young, L. A., and Buie, M. Pluto's Radius. In *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #39*, volume 38 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, pp. 541–+, 2007.

Young, L. A., Olkin, C., Spencer, J., Moore, J., Weaver, H. A., Grundy, W. M., Stern, S. A., Gladstone, G. R., Linscott, I. R., Hill, M., and Heather, E. New horizons : Plans for nix and hydra, 2010. In 2010 Nix-Hydra Meeting, Baltimore, MD (https ://webcast.stsci.edu/webcast/detail.xhtml ?talkid=1914&parent=1).

Young, L. A., Stern, S. A., Weaver, H. A., Bagenal, F., Binzel, R. P., Buratti, B., Cheng, A. F., Cruikshank, D., Gladstone, G. R., Grundy, W. M., Hinson, D. P., Horanyi, M., Jennings, D. E., Linscott, I. R., McComas, D. J., McKinnon, W. B., McNutt, R., Moore, J. M., Murchie, S., Olkin, C. B., Porco, C. C., Reitsema, H., Reuter, D. C., Spencer, J. R., Slater, D. C., Strobel, D., Summers, M. E., and Tyler, G. L. New Horizons : Anticipated Scientific Investigations at the Pluto System. *Space Sci. Rev.*, volume 140 :93–127, 2008. doi :10.1007/s11214-008-9462-9.

Zacharias, N., de Vegt, C., Nicholson, W., and Penston, M. J. CPC2 - the Second Cape Photographic Catalog - Part Two - Conventional Plate Adjustment and Catalog Construction. *A&A*, volume 254 :397, 1992.

Zacharias, N., Urban, S. E., Zacharias, M. I., Wycoff, G. L., Hall, D. M., Monet, D. G., and Rafferty, T. J. The Second US Naval Observatory CCD Astrograph Catalog (UCAC2). *AJ*, volume 127 :3043–3059, 2004. doi :10.1086/386353.

Zappala, V., de Sanctis, G., and Ferreri, W. Astrometric positions of Pluto from 1973 to 1979. *A&AS*, volume 41 :29–31, 1980.

Zappala, V., de Sanctis, G., and Ferreri, W. Astrometric positions of Pluto from 1980 to 1982. *A&AS*, volume 51 :385–387, 1983.

Zharkov, V. N., Leontjev, V. V., and Kozenko, V. A. Models, figures, and gravitational moments of the Galilean satellites of Jupiter and icy satellites of Saturn. *Icarus*, volume 61 :92–100, 1985. doi :10.1016/0019-1035(85)90157-5.