

Analyse semi-classique des phénomènes de résonance et d'absorption par des trous noirs

Bernard Raffaelli

▶ **To cite this version:**

Bernard Raffaelli. Analyse semi-classique des phénomènes de résonance et d'absorption par des trous noirs. Physique des Hautes Energies - Théorie [hep-th]. Université Pascal Paoli, 2011. Français. NNT : . tel-00653074

HAL Id: tel-00653074

https://theses.hal.science/tel-00653074

Submitted on 17 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Corse - Pasquale Paoli
Ecole Doctorale 377 : Environnement et Société
UFR Sciences et Techniques - SPE UMR CNRS 6134
Equipe de Physique Théorique

THÈSE

pour l'obtention du grade de
Docteur en Physique
Spécialité : *Physique Théorique*

par

RAFFAELLI Bernard

Analyse semi-classique des phénomènes de résonance et d'absorption par des trous noirs

Thèse soutenue le 12 Décembre 2011, devant le jury composé de :

Bros Jacques	Président du jury
Decanini Yves	Directeur de thèse
Deruelle Nathalie	Rapporteur
Folacci Antoine	Co-Directeur de thèse
Solodukhin Sergey	Rapporteur

À mon Père, à ma Soeur

Remerciements

Que le lecteur excuse, par avance, ma prose quelque peu maladroite.
A défaut d'être exprimés dans un français impeccable, il serait honnête de préciser que les quelques remerciements qui vont suivre n'ont pour objet que l'expression de mes sentiments les plus sincères, souvent entachés de mon éternelle pudeur.

Je ne peux pas ne pas remercier en premier lieu ma "co-bureau", durant deux années, Olivia, celle qui relativise toujours tout (ou presque !). Elle a su m'introduire aux quelques autres doctorant(e)s, que je remercie pour leur sympathie à mon égard, chose que je n'aurai jamais faite de mon plein gré. Elle m'a passé le flambeau de ce fameux bureau 96, à la non-épreuve de la pluie ! Bref, merci Olivia.

Je souhaiterais également remercier sincèrement Jean-Pierre Provost et Christian Bracco, qui ont été présents depuis une dizaine d'années me suivant ainsi au fil de mon "périple universitaire". Je les remercie particulièrement d'avoir été là à un moment où "certaines difficultés humaines surpassaient de très loin le stade des difficultés académiques". Avec eux, j'ai beaucoup appris, voire tout ré-appris. Comment ne pas mentionner ce recul que vous donne Jean-Pierre, et dont vous n'avez conscience qu'après longue, très longue maturation, face à la physique traditionnellement enseignée ? ! Cet enseignement *"à la Feynman"*, très rigoureuse mais avec toujours cette indispensable intuition physique. Je citerai également leur incroyable modestie face à la physique qu'ils ont su me transmettre. J'ai appris, auprès d'eux, la réflexion rigoureuse qui permet de ne pas s'engager dans un quelconque discours digne des histoires les plus farfelues de Science-Fiction.

Au-delà de la simple politesse qu'impose la coutume, comment ne pas remercier profondément et avec tout le respect que je leur dois, mes directeurs de thèse, Antoine Folacci et Yves Decanini, qui ont eu le "courage" (serais-je tenté de dire "l'audace" !) de prendre cet intrus, "venu de nulle part", au sein de leur duo de choc ! Eux qui m'ont tant apporté, scientifiquement et humainement... Avec eux, j'ai trouvé des gens aussi passionnés que moi. Comment ne pas écouter parler Antoine vous racontant ces histoires des "plus grands noms", qui ne sont pour vous, que des noms sur des articles et autres bouquins, qu'il a eu, lui, la chance incommensurable de côtoyer. Auprès d'eux, j'ai également appris à "être physicien théoricien" et cela n'a pas de prix. Voici donc les deux pièces maîtresses, l'élément moteur d'un travail de trois ans. Je les remercie également d'avoir été toujours très disponibles, d'avoir répondu à certains mails vers 5h30 du matin, d'organiser des séances de "discussions" pour faire avancer le travail et les idées. Un grand merci très sincère, bien qu'indescriptible, à vous deux !

Je tiens également à remercier tout particulièrement et très sincèrement Nathalie Deruelle et Sergey Solodukhin d'avoir eu l'amabilité d'accepter d'être les rapporteurs de ce travail de thèse ainsi que Jacques Bros pour son aimable collaboration me faisant ainsi, tous trois, l'honneur d'avoir accepté de faire partie de mon jury de soutenance.

Avant de terminer, j'aimerais exprimer mes remerciements à l'ensemble des chercheurs et personnels de la Faculté des Sciences de l'Université de Corse et de ce laboratoire SPE (UMR CNRS 6134), si atypique par sa pluridisciplinarité, avec lesquels j'ai eu plaisir à discuter, à rire, à penser et qui m'ont accueilli durant ces trois dernières années. Merci donc à l'équipe des "matheux" (et à Pierre Simonnet, cet incroyable électron libre !), à Stéphane Ancey et Paul Gabrielli, Jean-François Muzy, Antoine Pieri, et à tous ceux et celles que je ne nomme pas ici mais qui m'excuseront, j'en suis sûr.

Enfin, je remercierais l'Ecole Doctorale "Environnement et Société" (ED 377), pour son sérieux et son organisation ainsi qu'un remerciement particulier que j'adresse à la Collectivité Territoriale de Corse pour son soutien financier sans lequel ce travail de thèse n'aurait pas pu voir le jour.

Table des matières

Introduction **1**

I Analyse semi-classique des phénomènes de diffusion : La théorie du moment angulaire complexe **4**

1 Quelques rappels concernant la théorie de la diffusion **5**
1.1 Diffusion en théorie classique . . . 5
1.1.1 Section efficace différentielle . . . 6
1.1.2 Relation entre la section efficace différentielle et l'interaction . . . 7
1.1.3 Angle de déflection et "chemins classiques" . . . 7
1.1.4 Singularités . . . 9
1.2 Diffusion en théorie quantique . . . 10
1.2.1 Introduction - Enoncé du problème . . . 10
1.2.2 Amplitude de diffusion . . . 11
1.2.2.1 Courants de probabilité . . . 12
1.2.2.2 Lien avec la section différentielle efficace . . . 12
1.2.3 Théorie des ondes partielles pour les potentiels à symétrie sphérique . . . 13
1.2.3.1 Cas d'un potentiel nul : $V(r) = 0$ . . . 13
1.2.3.2 Cas d'un potentiel non nul : $V(r) \neq 0$ . . . 13
1.2.4 Opérateur de diffusion : la matrice S . . . 14

2 Approche semi-classique du problème de diffusion : la théorie du moment angulaire complexe et les pôles de Regge **16**
2.1 Approche semiclassique . . . 16
2.1.1 Insuffisance de la description classique . . . 17
2.1.2 Limite semiclassique et limite des courtes longueurs d'ondes . . . 18
2.1.3 Approximation semiclassique d'un processus de diffusion . . . 19
2.1.3.1 Expression WKB du déphasage . . . 19
2.1.3.2 Expressions asymptotiques . . . 22
2.1.3.3 Prolongement analytique et expression semiclassique de l'amplitude de diffusion . . . 22
2.1.3.4 Interprétation physique . . . 23
2.2 Théorie du moment angulaire complexe . . . 28
2.2.1 Transformation de Watson et formule sommatoire de Poisson . . . 28
2.2.2 Elements de matrice S et pôles de Regge . . . 29
2.2.3 Interprétation physique . . . 32
2.2.4 Comment déterminer les pôles de Regge ? . . . 33

II Perturbation des trous noirs : La réponse de la théorie CAM à un problème de diffusion résonante **34**

3 Physique des trous noirs du point de vue de la théorie des perturbations **35**
3.1 Introduction : Stabilité . . . 35

3.2 Modes quasinormaux . . . 38
3.2.1 Définition . . . 38
3.2.2 Bref historique : de CAM aux QNMs . . . 40

4 L'exemple du trou noir de Schwarzschild 42
4.1 Introduction et résultats semiclassiques . . . 42
4.1.1 Des pôles de Regge aux modes quasinormaux . . . 44
4.1.2 Détermination des pôles de Regge : l'approche WKB . . . 44
4.2 Section efficace d'absorption - Conséquences analytiques de l'approche CAM . . . 47
4.2.1 Introduction . . . 47
4.2.2 Structure fine de la section d'absorption à hautes énergies pour le trou noir de Schwarzschild . . . 48
4.2.3 Conclusion . . . 51

5 Trous noirs statiques à symétrie sphérique : une extension 54
5.1 Fréquences quasinormales et pôles de Regge pour des trous noirs statiques à symétrie sphérique : Théorie générale . . . 55
5.1.1 Des pôles de Regge aux fréquences quasinormales complexes pour des géométries statiques à symétrie sphérique de dimension arbitraire . . . 57
5.1.2 Approximations WKB pour les pôles de Regge et expressions semiclassiques des fréquences complexes quasinormales . . . 60
5.2 Applications . . . 63
5.2.1 Trous noirs de Schwarzschild-Tangherlini . . . 63
5.2.1.1 Le trou noir de Schwarzschild . . . 63
5.2.1.2 Le trou noir de Schwarzschild-Tangherlini de dimension 5 . . . 64
5.2.1.3 Le trou noir de Schwarzschild-Tangherlini de dimension 6 . . . 64
5.2.1.4 Termes dominants pour le trou noir de Schwarzschild-Tangherlini de dimension arbitraire . . . 65
5.2.2 Le trou noir de Reissner-Nordström . . . 65
5.2.2.1 Le trou noir de Reissner-Nordström de dimension 4 . . . 66
5.2.2.2 Termes dominants pour le trou noir de Reissner-Nordström de dimension arbitraire . . . 67
5.2.3 Le trou noir acoustique canonique . . . 67
5.3 Section d'absorption - Structure fine : une généralisation . . . 68
5.3.1 Vers une théorie générale . . . 68
5.3.2 Applications . . . 70
5.3.2.1 Application 1 : Trou noir de Schwarzschild-Tangherlini . . . 70
5.3.2.2 Application 2 : Trou noir de Reissner-Nordström de dimension 4 . . . 70
5.4 Conclusion . . . 71

6 Un retour sur le trou noir de Schwarzschild : Et si le champ scalaire était massif ? 72
6.1 Pôles de Regge pour le champ scalaire massif et fréquences quasinormales complexes associées 73
6.1.1 Généralités et notations . . . 73
6.1.2 Pôles de Regge : La méthode de Dolan-Ottewill . . . 77
6.1.3 Pôles de Regge : L'approche WKB . . . 78
6.1.4 Pôles de Regge : Comparaison des résultats "exacts" et des résultats asymptotiques 81
6.1.5 Effet de la masse sur les fréquences complexes quasinormales . . . 84
6.2 Description CAM de la section d'absorption à hautes énergies et rôle de la masse . . . 85
6.2.1 Généralités . . . 85
6.2.2 Résidus associés aux pôles de Regge des facteurs de corps gris . . . 86
6.2.3 Approximation CAM pour la section d'absorption . . . 86
6.3 Conclusion . . . 88

Conclusion et Perspectives **90**

Annexes **91**

A Pôles de Regge pour des trous noirs statiques à symétrie sphérique : Résultats **93**

B Pôles de Regge et QNMs pour le trou noir de Schwarzschild-de Sitter **96**
B.1 Le trou noir de Schwarzschild-de Sitter de dimension 4 97
B.2 Termes dominants pour le trou noir de Schwarzschild-de Sitter de dimension arbitraire . . 98

C Pôles de Regge et résidus du facteur de corps gris pour un champ scalaire de masse nulle **99**
C.1 Le trou noir de Schwarzchild 99
C.2 Les trous noirs statiques à symétrie sphérique 101

Liste des publications **103**

Introduction

"What I cannot create, I do not understand"
Richard P. Feynman, 1988

Le concept de trou noir a constamment saisi l'imagination humaine. Bien qu'il y ait de nombreuses créatures étranges, effrayantes et autres notions, ou objets, inventées par la mythologie et autres fictions, aucune de ces conceptions ne remplacera l'idée du trou noir. Kip Thorne, dans un article, intitulé "*The search for black holes*", paru dans *Scientific American* en décembre 1974, le résume ainsi : "*Of all the conceptions of the human mind from unicorns to gargoyles to the hydrogen bomb perhaps the most fantastic is the black hole : a hole in space with a definite edge over which anything can fall and nothing can escape ; a hole with a gravitational field so strong that even light is caught and held in its grip ; a hole that curves space and warps time. Like the unicorn and the gargoyle, the black hole seems much more at home in science fiction or in ancient myth than in the real Universe. Nevertheless, the laws of modern physics virtually demand that black holes exist. In our galaxy alone there may be millions of them.*"
Cependant les trous noirs font aussi partie des solutions formelles les plus simples des équations d'Einstein dans le vide, caractérisées uniquement par un nombre très limité de paramètres. Dans ce cadre, nous ne pouvons pas ne pas citer ce fantastique prologue de Chandrasekhar, dans sa monographie [19], qui exprime, en quelques lignes, cette "simplicité" et cette étrange "perfection" : "*The black holes of Nature are the most perfect macroscopic objects there are in the Universe : the only elements in their construction are our concepts of space and time. And since General Theory of Relativity provides only a single unique family of solutions for their descriptions, they are the simplest objects as well.*"

Bien que d'apparence "simple" et émergeant naturellement de la théorie classique, l'énigmatique identité des trous noirs a été renforcée par le fait qu'ils sont également le lieu de phénomènes quantiques et/ou thermodynamiques, originellement inattendus.

Néanmoins, au delà de la simple définition formelle à partir des solutions des équations d'Einstein dans le vide, il subsiste, comme l'a souligné Kip Thorne, depuis 1971 et l'observation du système binaire Cygnus X1, jusqu'aux hypothèses les plus récentes relatives à l'existence de trous noirs supermassifs au centre de nombreuses galaxies, dont la nôtre [1], des indices observationnels confortant leur existence dans l'Univers et motivant ainsi leur étude.

En physique, nous le savons, pour obtenir des informations essentielles sur les interactions entre particules fondamentales, atomes, molécules, etc..., ainsi que sur la structure des objets composés, nous devons procéder à des expériences de collision ou plus précisément de diffusion. C'est ce qui constitue précisément l'objet de ce travail. En étudiant comment un trou noir interagit avec son environnement, nous sommes en droit d'attendre des informations essentielles sur ces "*objets invisibles*". Cette étude sera également très utile pour comprendre, notamment, le signal que l'on devrait recevoir, prochainement, par le biais de la nouvelle génération de détecteurs d'ondes gravitationnelles.

Ce travail se concentre donc principalement sur les phénomènes sous-jacents aux processus de diffusion par des trous noirs, i.e. les phénomènes de résonance et d'absorption. Dans le cadre d'un tel problème, la courbure de l'espace-temps joue un rôle non seulement dans les conditions aux limites mais aussi dans les équations décrivant la propagation des divers champs physiques considérés (scalaire, électromagnétique ou gravitationnel). Ainsi, le problème de diffusion par des trous noirs est davantage analogue à la diffusion

1. observation, entres autres, du mouvement de l'étoile S2, sur une durée de dix ans, au voisinage de Sgr A^*

optique dans un milieu dont l'indice de réfraction n'est pas constant qu'à un problème de diffusion par un objet physique (sphère, cylindre, etc...). Dans le cas des trous noirs, c'est la courbure de l'espace-temps même qui engendre la diffusion.

Plus généralement, depuis l'article pionnier de Matzner [92], inspiré d'un travail similaire mais non publié de Hildreth [67], la diffusion et l'absorption par les trous noirs est un sujet qui a été longuement étudié du fait de (i) son intérêt mathématique, si l'on considère la théorie de la diffusion comme une branche de la physique mathématique (voir par exemple Ref. [97]) qui a trouvé avec les trous noirs et les espace-temps courbes un nouveau domaine d'activité très riche, mais aussi et surtout à cause de (ii) son intérêt physique lié à divers aspects fondamentaux ou expérimentaux en gravité classique et quantique tels que la théorie des perturbations des trous noirs, la théorie des ondes gravitationnelles, la théorie des modes quasinormaux et de la diffusion résonante, le lensing fort et faible, les instabilités et le phénomène de superradiance, le rayonnement Hawking, le paradoxe de l'information, le principe holographique et la correspondance CFT, les théories des champs de dimensions supérieures, les modèles analogues de gravité, etc... Nous renvoyons à la monographie de Futterman, Handler et Matzner [57] ainsi qu'aux références qui y sont citées pour la littérature sur la diffusion et l'absorption d'ondes par des trous noirs précédant 1988 et à Refs. [5, 4, 2, 28, 90, 59, 16, 41, 25, 30], pour une liste courte et non-exhaustive d'articles sur le sujet, publiés depuis et qui, selon nous, apportent un éclairage nouveau, basé sur des conceptions originales et très intéressantes.

Cependant, pour comprendre les effets de diffraction/diffusion dans un tel cadre gravitationnel, il est essentiel de développer un formalisme adapté à l'étude de la diffusion d'un champ par un trou noir, nous permettant par là-même, de comprendre physiquement et "intuitivement" la nature des phénomènes de résonance et d'absorption. Notons dès à présent qu'ici, nous limiterons notre étude au cas d'un champ scalaire. Même si un tel champ n'a pas encore été observé dans la Nature, ce choix n'est pas anodin. En effet, les équations régissant la propagation d'un champ électromagnétique faible, ou d'une perturbation gravitationnelle, dans un espace-temps courbe ont, nous le verrons, essentiellement une forme tout à fait analogue à l'équation décrivant la propagation d'un champ scalaire, sous les mêmes conditions.

De plus, depuis les années soixante, principalement dues à l'impulsion de Nussenzveig en électromagnétisme et Regge en physique quantique, des techniques asymptotiques/semiclassiques, qui utilisent un prolongement analytique des développements en ondes partielles, ont été développées afin de comprendre la théorie de la diffusion. Parmi ces techniques, la *théorie du moment angulaire complexe* est particulièrement bien adaptée à l'étude des phénomènes de résonance. Cette méthode n'est pas nouvelle. En effet, Watson [121], en 1918, l'utilisait déjà pour étudier la propagation des ondes radio autour de la Terre (voir également la modification proposée alors, pour cette approche, par Sommerfeld [111]). De nos jours, *la méthode du moment angulaire complexe* a été introduite dans divers domaines de la physique (électromagnétisme/optique, séismologie, acoustique, etc...).

Ainsi, toute l'originalité de ce manuscrit repose sur le fait que nous proposons de nous intéresser à la diffusion d'un champ scalaire (massif ou non) par des trous noirs du point de vue de cette *théorie du moment angulaire complexe*, espérant par là-même donner une interprétation physique, simple et intuitive des phénomènes de résonance et d'absorption par des trous noirs.

L'organisation du manuscrit est la suivante. Nous commençons, tout d'abord, par un rapide rappel, classique et quantique, des principaux ingrédients de la théorie de la diffusion. Ensuite, nous justifions et introduisons les idées principales sous-jacentes aux approches semiclassiques, pour terminer sur une présentation de la *théorie du moment angulaire complexe* et des outils (transformation de Watson, notions de pôles de Regge, etc...) dont nous aurons besoin tout le long de notre travail. Dans un deuxième temps, nous nous concentrerons davantage sur le problème de diffusion résonante par des trous noirs. Nous discuterons tout d'abord la stabilité de ces objets du point de vue de la théorie des perturbations, nous introduirons alors les notions duales et fondamentales de modes quasinormaux et de modes de Regge. Dans un premier exemple, nous appliquerons le formalisme de la *théorie du moment angulaire complexe* au cas de la diffusion d'un champ scalaire de masse nulle par un trou noir de Schwarzschild afin de bien comprendre l'interprétation apportée par cette dernière approche semiclassique. Nous verrons également les conséquences d'un tel formalisme sur l'expression de la section efficace, mettant en avant l'existence (obtenue par une analyse numérique) de faibles fluctuations présentes au-delà de la description eikonale et parfaitement justifiées analytiquement. Nous généraliserons alors les résultats précédents au cas de trous noirs statiques à symétrie sphérique, de dimension d'espace-temps arbitraire. Enfin, nous

reviendrons sur le cas du trou noir de Schwarzschild mais dans le cas d'une perturbation par un champ scalaire massif, mettant en évidence le rôle du paramètre de masse du champ dans l'expression des pôles de Regge, dans le spectre des modes quasinormaux et dans l'expression analytique de la section d'absorption. Pour justifier cette dernière partie relative au champ scalaire massif, rappelons que dans le cadre de la diffusion et de l'absorption par des trous noirs, les physiciens se sont principalement concentrés, à juste titre, comme nous l'avons mentionné plus haut, sur des théories des champs de masse nulle de spin 0, 1/2, 1, 2, qui sont considérés comme étant plus pertinentes d'un point de vue physique que les champs massifs. Cependant, de manière assez régulière depuis les années soixante-dix, quelques articles très intéressants relatifs aux théories des champs massifs et plus précisément sur l'influence du paramètre de masse du champ dans divers aspects de la diffusion dans le domaine fréquentiel (diffusion résonante, états liés, sections d'absorption, instabilités, etc...) ou dans le domaine temporel (*late-time tails*, instabilités, etc...) ont été publiés (voir, e.g., Refs. [23, 36, 37, 27, 117, 128, 38, 58, 110]). Durant la dernière décennie, un nombre de plus en plus important d'articles liés aux mêmes problèmes sont parus (voir, e.g., Refs. [83, 84, 78, 125, 15, 73, 100, 56, 114, 81, 46, 86, 18, 41, 80, 82, 40, 61]). Il nous semble alors important d'apporter un éclairage nouveau, toujours par l'intermédiaire de la *théorie du moment angulaire complexe*, sur ce cas extrêmement intéressant.

Première partie

Analyse semi-classique des phénomènes de diffusion : La théorie du moment angulaire complexe

Chapitre 1

Quelques rappels concernant la théorie de la diffusion

Ce chapitre n'a pas pour vocation, et encore moins pour prétention, de traiter de manière exhaustive tous les éléments relatifs à ce vaste sujet qu'est la théorie de la diffusion. Ainsi, nous inviterons, au cours de ce manuscrit, le lecteur à consulter les ouvrages de référence pour de plus amples précisions.
Ce chapitre est principalement consacré à un rappel des notions élémentaires et fondamentales des processus de diffusion en théorie classique puis en théorie quantique.
Ici, nous introduirons seulement les concepts essentiels dont nous aurons besoin pour la suite de notre étude, en espérant, bien sûr, faire preuve d'un minimum de clarté.
Après avoir posé le problème d'un processus de diffusion à partir de collision entre particules incidentes et particules cibles, nous simplifierons très rapidement cette approche en considérant un faisceau de particules incidentes identiques, l'interaction avec des particules cibles étant alors modélisée par l'existence d'un potentiel central, i.e. à symétrie sphérique, confiné dans le proche voisinage d'un point que nous prendrons comme origine (potentiel à courte portée).
Le traitement quantique sera également envisagé sous cet aspect. Plus précisément, nous nous intéresserons principalement à la diffusion d'un champ scalaire par un potentiel central de courte portée. Nous introduirons progressivement au cours de ce chapitre, de manière la plus intuitive possible, les concepts clés tels que le paramètre d'impact, la section efficace (différentielle), l'amplitude de diffusion, la notion de développement en ondes partielles, le concept de matrice S, entre autres.
De plus, nous souhaitons insister sur ces premières notions qui seront justifiées par la suite, dans le cadre gravitationnel et dans le cas de l'interaction entre un champ scalaire de masse nulle et un trou noir, du fait de l'existence formelle d'un potentiel diffuseur du type r^{-q}, avec $q \geq 2$. Il semble important de signaler que nous ne traiterons pas ici le cas d'un potentiel central à longue portée. Le lecteur trouvera, comme exemple bien connu, dans les ouvrages de référence, la diffusion d'une particule par un potentiel coulombien. Cependant, nous n'exclurons pas ce cas de figure. En effet, nous réservons cette étude spécifique, toujours dans le cadre gravitationnel, pour le dernier chapitre de ce manuscrit, consacré à la diffusion d'un champ scalaire massif par un trou noir de Schwarzschild, problème qui devient alors en tout point équivalent à un problème de diffusion résonante par un potentiel à longue portée.
Il nous semble alors naturel de garder les notations utilisées dans ce chapitre pour l'étude spécifique de la diffusion d'un champ scalaire, massif ou non, par des trous noirs statiques à symétrie sphérique.

1.1 Diffusion en théorie classique

Après l'introduction des notions élémentaires et fondamentales, cette étude "classique", dans le sens pédagogique et physique du terme, va nous permettre de déduire une expression de la section efficace différentielle comme résultant d'une "*somme sur les chemins classiques*", dans le cas d'un faisceau de particules, de paramètres d'impact différents, diffusées par une cible donnée. Cette expression nous permettra alors de faire le parallèle entre le résultat classique et le résultat quantique "exact" que nous établirons dans la section 1.2.

Une expérience typique de diffusion est représentée, de manière schématique, sur la figure 1.1. Considérons un faisceau cylindrique de particules de masses identiques μ_1 et de même quantité de mouvement $\vec{p}$, dirigé selon un axe Oz. Ce faisceau entre en collision avec une "cible" composée de particules de même masse μ_2, située au voisinage d'un point O de l'axe Oz, que nous prendrons comme origine. Après l'interaction, certaines particules, ayant un paramètre d'impact bien défini, seront diffusées suivant une direction (θ, ϕ). On considérera, très rapidement, que l'interaction entre particules cibles et particules incidentes est équivalente à l'interaction entre un faisceau de particules incidentes identiques avec un potentiel d'interaction dont la portée permet de le confiner dans un voisinage plus ou moins proche de l'origine O. Ce qui n'exclut cependant pas les potentiels à longue portée, même si ces derniers requièrent une attention particulière.

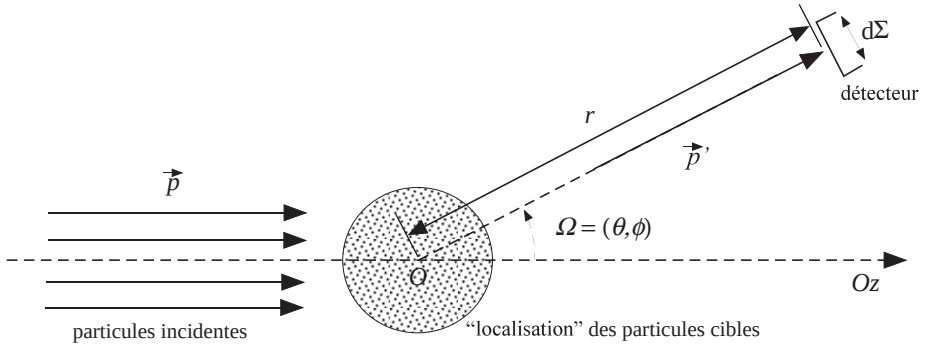


FIGURE 1.1 – Expérience de diffusion

1.1.1 Section efficace différentielle

Considérons le faisceau de particules incidentes vers O comme étant uniforme et cylindrique. Nous pouvons caractériser ce faisceau par un courant vectoriel défini par :

$$\vec{J} = n_v \vec{v} \tag{1.1}$$

où l'on a introduit n_v, le nombre de particules incidentes par unité de volume et $\vec{v}$ leur vitesse.
Le flux de ce vecteur à travers une surface permet d'obtenir le nombre de particules qui traverse cette surface par unité de temps :

$$\mathcal{F} = \int_{\mathcal{S}} \vec{J}.\vec{u}\, \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{1.2}$$

$\vec{u}$ étant un vecteur unitaire sortant, normal à la surface $\mathcal{S}$ considérée.
Evaluons le nombre $\mathrm{d}\mathcal{N}$ de particules diffusées par le potentiel centré en O, pendant une durée élémentaire $\mathrm{d}t$, dans un angle solide élémentaire $\mathrm{d}\Omega$, i.e. autour de la direction caractérisée par l'angle de diffusion θ et l'angle "azymuthal" ϕ. Cet angle solide est concrètement défini par la dimension du détecteur placé normalement à la direction du faisceau diffusé. Si la surface élémentaire du détecteur, placé normalement à la direction des particules, est $\mathrm{d}\Sigma$, l'angle solide élémentaire a pour expression

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}\Sigma}{r^2} = \frac{r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}\theta d\phi}{r^2} = \sin\theta\, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi. \tag{1.3}$$

Le nombre $\mathrm{d}\mathcal{N}$ est, par définition, proportionnel à la durée dt, à l'angle solide $d\Omega$ et au flux $\mathcal{F}$, en d'autres termes

$$\mathrm{d}\mathcal{N} \propto \mathcal{F}\, \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}t. \tag{1.4}$$

Une analyse dimensionnelle nous renseigne sur la dimension du coefficient de proportionnalité qui doit être homogène à une surface. Nous noterons $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$, cette grandeur. Ainsi, par définition

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{N}}{\mathcal{F}\, \mathrm{d}\Omega\, dt} \equiv \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}. \tag{1.5}$$

On appelle $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ la *section efficace différentielle de diffusion* ou *de collision*.
Notons que la section efficace différentielle est le rapport de deux différentielles de même degré. Ce n'est donc pas une différentielle au sens mathématique habituel.
En intégrant sur Ω, nous obtenons la *section efficace totale* σ_{tot}

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \int_{\mathrm{S}^2} \mathrm{d}\Omega \, \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}. \tag{1.6}$$

D'après ce qui précède, nous pouvons, dès lors, concevoir que l'ensemble des particules cibles ou le potentiel diffuseur $V(r)$ se comporterait comme un objet de *surface équivalente effective* σ_{tot}. De même, $\mathrm{d}\sigma$ serait alors considérée comme la surface équivalente d'un objet à l'origine d'une diffusion selon l'angle solide $\mathrm{d}\Omega$.

Remarque : La section efficace totale est *a priori* fonction de la vitesse v des particules incidentes, ou de façon équivalente, de leur énergie. La section efficace différentielle est une fonction de l'énergie et des angles θ et ϕ. Si le problème est invariant par rotation autour de la direction de projection, la section efficace ne dépendra (angulairement) que de θ, que l'on appellera *angle de diffusion*.
Ce sera le cas pour l'ensemble de cette étude.

1.1.2 Relation entre la section efficace différentielle et l'interaction

Le nombre de particules $\mathrm{d}\mathcal{N}$ diffusées, par les particules cibles, dans l'angle solide $\mathrm{d}\Omega$ défini par l'espace compris entre les cônes de demi-angle θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$, est le nombre de particules qui ont traversé, pendant la même durée élémentaire $\mathrm{d}t$, l'anneau de rayon intérieur b et de rayon extérieur $b + \mathrm{d}b$. Il vaut $\mathrm{d}\mathcal{N} = \mathcal{F} \times 2\pi b \, |\mathrm{d}b| \times \mathrm{d}t$. Par conséquent :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{N}}{\mathcal{F} \, \mathrm{d}\Omega \, \mathrm{d}t} = \frac{2\pi b \, |\mathrm{d}b|}{\mathrm{d}\Omega}. \tag{1.7}$$

En d'autres termes

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta} \right|. \tag{1.8}$$

Soulignons, au passage, qu'à partir de l'expression (1.7), nous pouvons immédiatement déduire l'expression de la section efficace appelée *section efficace géométrique*

$$\sigma_{\mathrm{geo}} = 2\pi \int_0^{b_{\max}} b \, \mathrm{d}b = \pi b_{\max}^2. \tag{1.9}$$

1.1.3 Angle de déflection et "chemins classiques"

A présent, nous modélisons notre processus de collision, dans le référentiel du centre de masse, par l'interaction d'une famille de particules incidentes identiques avec un potentiel central que l'on notera $V(r)$. On considère que chaque particule est non-relativiste, de masse μ, de moment angulaire L et d'énergie E. Les symétries du problème nous amènent aux intégrales premières du mouvement (lois de conservation des grandeurs mécaniques) bien connues, i.e.

$$L = \mu r^2 \dot{\theta}, \tag{1.10}$$

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}. \tag{1.11}$$

Comme à l'accoutumée, introduisons un potentiel effectif $V_{\mathrm{eff}}(r) = V(r) + L^2/(2\mu r^2)$. Ainsi, à partir du système d'équations précédent, nous pouvons aisément déduire la quantité $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r$ qui nous permettra de définir l'angle de déflection. En effet, nous avons

$$\dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{\mu^2 \, r^2}, \tag{1.12}$$

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{\mu} \left[E - V_{\mathrm{eff}}(r) \right]. \tag{1.13}$$

Le problème de diffusion nous assure $E \geq V_{\text{eff}}(r)$, les quantités introduites sont donc réelles.
En effectuant le rapport de ces deux équations et en prenant la racine, nous obtenons

$$\mathrm{d}\theta = \frac{L\mathrm{d}r}{r^2 \left\{2\mu \left[E - V_{\text{eff}}(r)\right]\right\}^{1/2}}. \tag{1.14}$$

Ce qui après intégration donne bien sûr

$$\theta(r) = \int \frac{L\mathrm{d}r}{r^2 \left\{2\mu \left[E - V_{\text{eff}}(r)\right]\right\}^{1/2}} + \theta_0. \tag{1.15}$$

Pour l'intégration, cf. fig. 1.2, considérons, par souci de simplification, le cas d'un potentiel répulsif (cas (a) de la fig. 1.2). Nous savons que la trajectoire, i.e. l'orbite, doit être symétrique par rapport à la direction définie par la distance d'approche minimale r_0 (position du péricentre). L'angle de déflection peut alors s'écrire

$$\Theta = \theta = \pi - 2\alpha \tag{1.16}$$

où α est l'angle entre la direction asymptotique incidente et la direction donnée par la position du péricentre.
Pour déterminer l'angle α, nous pouvons naturellement introduire les "conditions aux limites" suivantes : à l'infini radial, i.e. pour la direction asymptotique d'incidence, nous avons pour $r \to +\infty$, $\theta_0 = \pi$. De plus, $\theta(r) = \pi - \alpha$ quand $r = r_0$. Un réarrangement de l'expression (1.15) nous permet d'obtenir

$$\alpha = \int_{r_0}^{+\infty} \frac{L\mathrm{d}r}{r^2 \left\{2\mu \left[E - V_{\text{eff}}(r)\right]\right\}^{1/2}}. \tag{1.17}$$

On déduit alors aisément une expression pour l'angle de déflection

$$\Theta(L) = \pi - 2L \int_{\mathrm{r_0}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2 \left\{2\mu \left[E - V_{\text{eff}}(r)\right]\right\}^{1/2}}. \tag{1.18}$$

Nous avons noté, ici, Θ comme fonction de L mais de manière équivalente, nous pourrions écrire $\Theta(b)$, où $b = L/p$ est le paramètre d'impact associé à une particule incidente possédant ("à l'infini") la quantité de mouvement p.

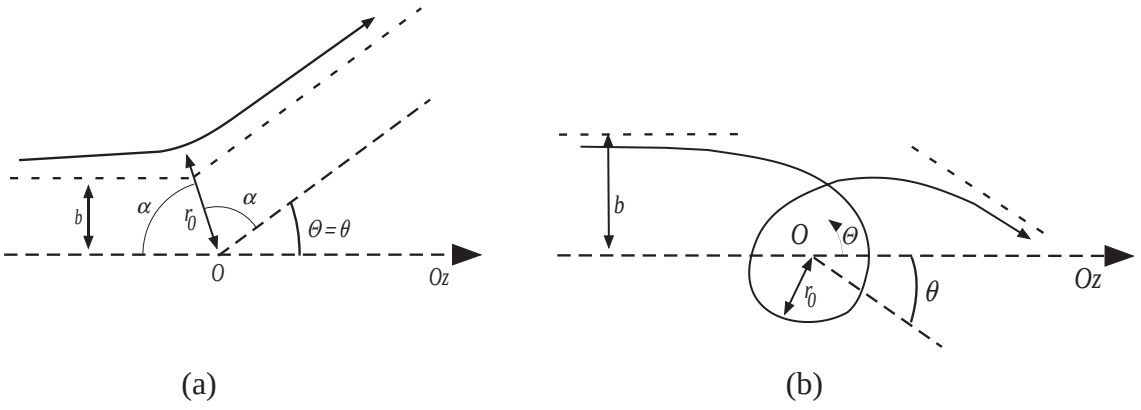


FIGURE 1.2 – (a) Exemple d'une interaction répulsive ; (b) Exemple d'une interaction attractive

Il est à noter que pour un potentiel répulsif, $\Theta(b)$ peut varier de 0 à π. Mais, il est cependant important de souligner que, dans le cas d'un potentiel attractif, Θ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes (en valeur absolue), puisque, physiquement, la particule incidente peut faire un certain nombre de tours autour du centre diffuseur avant de s'en échapper, selon un angle $\pm\theta$.
Nous établissons alors une relation entre l'angle de déflection Θ et l'angle de diffusion θ, permettant de rendre compte de ces deux cas de figures, que l'on écrira sous la forme

$$\Theta(b) + 2n\pi = \pm\theta \tag{1.19}$$

avec $n \in \mathbb{N}$ tel que θ reste dans "son intervalle de définition", i.e. $[0, \pi]$. La restriction de n aux entiers positifs permet d'imposer le fait que, physiquement, $\Theta(b)$ ne peut excéder π (dans le cas d'un potentiel répulsif) modulo 2π, comme nous l'avons indiqué ci-dessus.

Notons qu'en général, selon la nature physique du centre diffuseur, i.e. répulsif, attractif ou attractif avec un noyau répulsif (cas rencontré en physique atomique et nucléaire) entre autres, et indépendamment de l'indice n, il peut exister plusieurs paramètres d'impact b_j, avec $j \in \mathbb{N}$, correspondant à plusieurs trajectoires d'incidences possibles, mais aboutissant toutes à un même angle de diffusion θ. Ainsi, la section efficace différentielle, pour une direction θ fixée, est donnée par la somme sur tous les paramètres d'impact b_j possibles, pour lesquels l'angle de diffusion θ est le même (en valeur absolue). L'équation (1.8) se généralise suivant

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\theta) = \frac{1}{\sin\theta} \sum_j b_j(\theta) \left| \frac{\mathrm{d}b_j}{\mathrm{d}\theta} \right| . \tag{1.20}$$

Cette expression peut alors être interprétée comme résultant d'une somme sur les trajectoires classiques empruntées par chaque particule incidente.
Nous pouvons préciser davantage l'expression de ce résultat afin de faire un parallèle avec le résultat connu, issu de la théorie quantique, i.e. le développement en ondes partielles de la section différentielle efficace.

Considérons, tout d'abord, que toutes les particules incidentes ont même quantité de mouvement p à l'infini ($r \to \infty$). Exprimons ensuite $\mathrm{d}b_j/\mathrm{d}\theta$ en fonction de l'angle de déflection Θ et du moment angulaire L_j. Sachant que $\Theta(L_j) = \pm\theta - 2n\pi$ alors $\pm\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\Theta(L_j)$. De plus, nous savons que $b_j = L_j/p$ d'où $\mathrm{d}b_j/\mathrm{d}L_j = 1/p$. Enfin, en utilisant $\mathrm{d}b_j/\mathrm{d}\theta = (\mathrm{d}b_j/\mathrm{d}L_j) \times (\mathrm{d}L_j/\mathrm{d}\theta)$, l'équation (1.20) peut alors s'écrire

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\theta) = \frac{1}{p^2 \sin\theta} \sum_j L_j(\theta) \left| \frac{\mathrm{d}L_j}{\mathrm{d}\Theta(L_j)} \right| . \tag{1.21}$$

Le lecteur pourra alors faire le lien entre ce dernier résultat et son "analogue quantique" (exact), dans la section suivante.

1.1.4 Singularités

L'équation (1.8) et, par conséquent, les équations (1.20) et (1.21), présentent clairement des singularités, correspondant à des situations physiques différentes. En effet, plusieurs cas peuvent être possibles

- $|\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}b|$ peut être nul pour certaines valeurs de θ.
- Si $\Theta = n'\pi$ avec $n' \in \mathbb{N}$, alors d'après (1.19), θ devient un multiple de π et la section différentielle efficace diverge en $\sin^{-1}\theta$.
- Si l'on suppose $|\mathrm{d}b/\mathrm{d}\theta|$ borné. Alors, en considérant le cas de paramètres d'impact arbitrairement grands, i.e. $b \to \infty$, et des potentiels à longue portée, les trajectoires sont très peu déviées et tendent toutes, par conséquent, vers la direction $\theta \approx 0$.

Ces singularités "classiques" sont intimement liées aux aspects diffractifs issus de la théorie quantique (ou de l'optique physique) et, en conséquence, également de la limite semi-classique. Elles sont appelées respectivement "*diffusion arc-en-ciel (rainbow scattering)*", "*diffusion de gloire (glory scattering)*" et "*forward peaking*", en référence au phénomènes optiques associés. Pour plus de détails sur ces "*effets critiques*", nous renvoyons, par exemple, le lecteur aux articles de Ford et Wheeler [53], Berry et Mount [9] ou encore à l'ouvrage de Nussenzveig [99].

Arrêtons-nous sur une quatrième singularité possible. D'après l'équation (1.21), il est nécessaire que l'angle de déflection $\Theta(L)$ soit mathématiquement bien défini.
Or, d'après (1.18), $\Theta(L)$ peut diverger sous certaines conditions. Pour mettre en évidence cette divergence, introduisons momentanément la notation $V_{\text{eff}}(r, L)$, explicitant la dépendance de $V_{\text{eff}}(r)$ par rapport au moment angulaire L. Supposons alors qu'il existe une valeur $L = L_c$ telle que $V_{\text{eff}}(r, L_c)$ possède un maximum en $r = r_c$. Dans ce cas, pour une énergie E donnée et d'après (1.13), on vérifie aisément que la

particule incidente suit une orbite circulaire localisée précisément en $r = r_c$. La stabilité de cette orbite circulaire dépend, bien évidemment, de l'expression de $V(r)$.

De plus, si pour cette valeur $L = L_c$, l'énergie E est telle que $V_{\text{eff}}(r_c, L_c) \sim E$ alors $\Theta(L_c)$ diverge et (1.21) n'est plus correctement définie.
Physiquement, la divergence de $\Theta(L_c)$ signifie qu'une particule d'énergie E et de moment angulaire L_c sera "éternellement" en orbite, dont nous rappelons que la stabilité dépend de $V(r)$, à $r = r_c$ autour du centre diffuseur.

Dans ce cas, que devient l'expression (1.20) ?
Si l'on considère le paramètre d'impact $b(\theta) = L_c/p$ associé à un angle de diffusion θ, on peut écrire, d'après (1.19), $b(\Theta(L_c)) = L_c/p$, avec L_c et p fixés.
Comme nous venons de le remarquer, $\Theta(L_c)$ diverge, la fonction b devient donc infiniment multivaluée. Il existe alors une infinité de contribution pour la somme figurant dans (1.20), définissant la section efficace différentielle totale.

Cette quatrième singularité, dont l'analogue quantique est un processus de diffusion résonante, et les aspects diffractifs associés seront les sujets autour desquels nous focaliserons notre étude sur les phénomènes de résonance et d'absorption par des trous noirs.

1.2 Diffusion en théorie quantique

Une grande partie de ce que l'on sait sur les interactions entre particules, atomes, molécules, etc..., aussi bien que sur la structure des corps complexes, a été découvert, ou provient, d'expériences de diffusion. Ces découvertes abondantes s'étendent de l'expérience de Rutherford (1909-1911), mettant en évidence que les atomes ont leur masse et leur charge positive concentrées en des noyaux "quasi-ponctuels", jusqu'aux plus récentes découvertes à des échelles beaucoup plus petites, où l'on a pu montrer, par exemple, que les protons et les neutrons étaient eux-mêmes constitués de quarks "quasi-ponctuels", en passant par la découverte de nouvelles particules étoffant ainsi la zoologie des constituants subatomiques. Tout ceci a bien sûr été réalisable à l'aide de l'évolution des moyens techniques. Les expériences actuelles se font à des énergies encore plus élevées de l'ordre du TeV (Tevatron, LEP, Fermilab, LHC). Le lecteur aura remarqué que nous mettons ici, avec prudence, le terme "quasi-ponctuel" entre guillemets, tout d'abord parce que l'aspect ponctuel d'un corps est idéal et n'est donc évidemment pas physique, et ensuite parce que la notion de localisation à de telles échelles perd son sens.
Le but de cette section, à l'instar de la précédente, n'est pas de redémontrer ce que le lecteur pourra aisément trouver dans les ouvrages de références. Ainsi, nous introduirons ici les notions fondamentales, propres à la théorie quantique, avec un minimum de démonstrations parmi les plus intuitives possibles, afin de bien insister sur l'interprétation physique de ces résultats.

1.2.1 Introduction - Enoncé du problème

On s'intéresse à la description quantique de la diffusion par un potentiel $V(r)$ que nous supposons central, i.e. à symétrie sphérique. Rappelons que les trajectoires des particules incidentes, comme pour le cas classique, seront choisies parallèles à l'axe Oz.
Tout au long de cette étude nous ignorerons volontairement les éventuels degrés de liberté de spin, même si nous y ferons référence ponctuellement dans la deuxième partie de ce manuscrit.

Nous considérons ici le cas d'une particule de masse μ, d'énergie E, non-relativiste et de spin nul diffusée par un potentiel indépendant du temps. L'équation régissant l'évolution de la fonction d'onde associée à cette particule est alors l'équation de Schrödinger indépendante du temps. Simplifions d'ores et déjà cette équation en considérant les *états stationnaires de diffusion* $\tilde{\Phi}$ avec une dépendance temporelle en $e^{-iEt/\hbar}$. L'équation de Schrödinger s'écrit alors

$$\left\{\Delta + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - V(r)\right]\right\}\tilde{\Phi}(\vec{r}) = 0. \tag{1.22}$$

Après séparation des variables radiale et angulaires, l'équation radiale de l'onde partielle Φ_ℓ se réduit à

$$\left\{ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - V_\ell(r) \right] \right\} \Phi_\ell(r) = 0 \tag{1.23}$$

avec $V_\ell(r) = V(r) + \hbar^2 \ell(\ell+1)/(2\mu r^2)$. Le lecteur notera bien évidemment la similitude entre les quantités V_{eff} du précédent chapitre et V_ℓ.

De manière générale, il semble naturel d'envisager la diffusion comme un processus dépendant du temps.
En effet, une particule incidente décrite par un certain paquet d'ondes, part de $z = -\infty$ à $t = -\infty$, se propage le long de l'axe Oz et est soumis à l'effet du potentiel $V(r)$ à un temps que nous fixerons à $t \sim 0$. Cette particule a une certaine probabilité d'être diffusée suivant une direction (θ, ϕ), et, si l'on place un détecteur dans cette direction, celui-ci aura une certaine probabilité d'enregistrer la particule. La détection sera, à l'instar de l'émission, "idéalement" située en $z = +\infty$ à $t = +\infty$, i.e. lorsque la particule n'est plus (ou très peu) influencée par le potentiel. Nous parlerons alors d'*expressions asymptotiques* pour les états de diffusion.
Idéalement, le formalisme utilisé ici suppose implicitement un potentiel qui décroît suffisamment vite pour $r \to \infty$, soit, pour plus de précision, un potentiel décroissant en r^{-q}, avec $q > 1$.
Ce sera le cas pour la diffusion d'un champ scalaire de masse nulle par un trou noir. Cependant, nous verrons dans le chapitre 6 de la deuxième partie de ce manuscrit, que pour un champ massif, le formalisme s'apparente davantage à un processus de diffusion coulombienne demandant ainsi un traitement particulier.

Il faut souligner qu'en toute rigueur, la description quantique "physiquement correcte" ne peut se faire qu'en ayant recours à la notion de paquet d'ondes. Cependant, en vue d'une première simplification utilisée tout au long de ce travail, nous considérerons des états stationnaires.

1.2.2 Amplitude de diffusion

Comme évoqué à la section précédente, pour $t = -\infty$ et $z = -\infty$, la particule sera supposée libre (le potentiel $V(r)$ n'ayant pas d'influence notable pour des distances suffisamment grandes depuis l'origine O). Par conséquent, l'état de la particule est représenté par une onde plane du type $\Phi_{\text{plane}} \propto e^{ikz}$, avec $k = p/\hbar$ sa quantité de mouvement dirigée suivant Oz.

Lorsque la particule s'approche de l'origine, son comportement est influencé par le potentiel. D'un point de vue ondulatoire, l'onde plane est profondément modifiée. L'interaction au temps $t \sim 0$ requiert une analyse minutieuse et complexe.

Cependant, si l'on s'intéresse aux comportements asymptotiques, i.e. $t = \pm\infty$, la particule n'est plus sous l'influence du potentiel et la structure ondulatoire associée devient à nouveau intuitivement descriptible. Par analogie avec l'optique ou tout autre phénomène physique ondulatoire, nous pouvons légitimement penser que l'onde plane incidente a donné naissance à une onde transmise (poursuivant son évolution suivant $z > 0$, i.e. une onde du type e^{ikz}) et une onde diffusée.
L'état stationnaire de diffusion est alors la superposition de l'onde plane et de l'onde diffusée.

Bien que dépendant de l'action du potentiel, la description asymptotique de l'onde diffusée reste simple. En effet, radialement, i.e. pour une direction (θ, ϕ) fixée, la propagation selon les $z > 0$ (onde divergente) et la conservation de l'énergie ou de la probabilité imposent un comportement en e^{+ikr}/r. De plus, si l'on considère que la diffusion n'est, en général, pas isotrope, l'amplitude de l'onde diffusée va dépendre de la direction de diffusion (θ, ϕ). Nous noterons $f_k(\theta, \phi)$ cette amplitude de l'onde diffusée, appelée, à juste titre, *amplitude de diffusion*.
Nous pouvons alors écrire le comportement asymptotique de l'état de diffusion sous la forme

$$\Phi(\vec{r}) \sim \Phi_{\text{plane}} + f_k(\theta, \phi) \frac{e^{+ikr}}{r}. \tag{1.24}$$

Le lecteur trouvera une démonstration bien connue de ce résultat, et par conséquent une relation

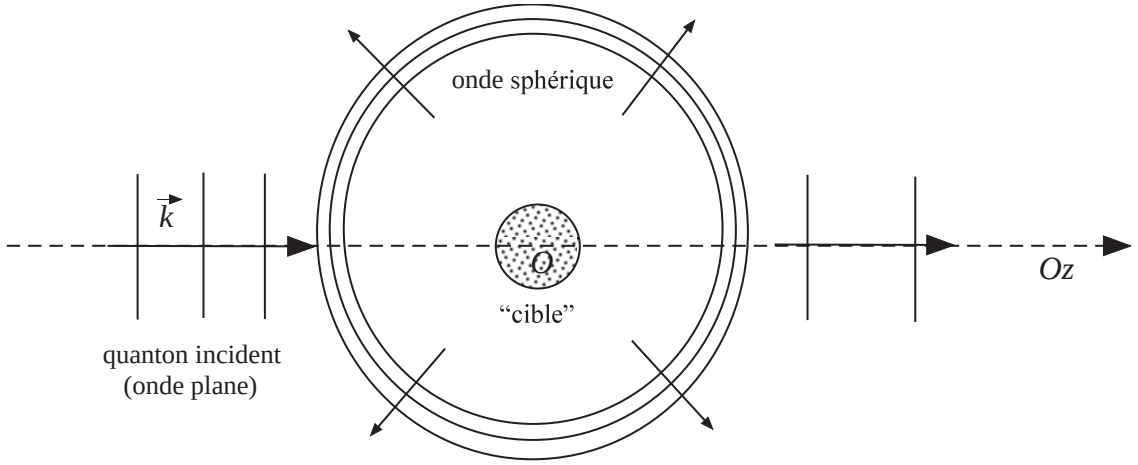


FIGURE 1.3 – Exemple d'une diffusion ondulatoire à symétrie sphérique

analytique entre $f(\theta, \phi)$ et $V(r)$, dans les ouvrages de référence Refs. [93, 22, 88], obtenue à partir de *l'équation intégrale de la diffusion* et de la notion de *fonction de Green* de l'opérateur $\Delta + k^2$.

1.2.2.1 Courants de probabilité

Nous savons qu'en théorie quantique, les courants de probabilité associés respectivement à l'onde incidente e^{ikz} et à l'onde diffusée $f_k(\theta, \phi)e^{+ikr}/r$ sont donnés par

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\text{inc}} &= \frac{\hbar \vec{k}}{\mu} \propto \mathcal{F} \\ \vec{j}_{\text{diff}} &\propto \mathcal{F} \frac{|f_k(\theta, \phi)|^2}{r^2} \hat{r} \end{aligned} \tag{1.25}$$

où $\hat{r}$ désigne le vecteur unitaire radial. Ainsi, le nombre de particules $\Delta\mathcal{N}(\Omega)$ enregistrées par le détecteur par unité de temps est égal à l'intégrale du courant sur la surface du détecteur $\Delta S \sim r^2 \Delta\Omega$

$$\Delta\mathcal{N}(\Omega) = \int_{\Delta S} \vec{j}_{\text{diff}} . \mathrm{d}\vec{S} = r^2 \int_{\Delta\Omega} \vec{j}_{\text{diff}} . \hat{r} \mathrm{d}\Omega. \tag{1.26}$$

Pour un détecteur placé à une distance r de la cible et pour un angle solide infinitésimal, nous obtenons

$$\mathrm{d}\mathcal{N}(\Omega) = \mathcal{F} \left| f_k(\theta, \phi) \right|^2 \mathrm{d}\Omega. \tag{1.27}$$

1.2.2.2 Lien avec la section différentielle efficace

D'après (1.27) et (1.5), nous obtenons immédiatement le lien entre la section différentielle efficace et l'amplitude de diffusion

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left| f_k(\theta, \phi) \right|^2 . \tag{1.28}$$

Notons, que cette expression est remarquable dans le sens où elle donne une égalité entre une quantité pouvant être définie de manière purement classique, i.e. la section efficace différentielle et une quantité purement quantique, i.e. l'amplitude de diffusion.
Rappelons, au passage, la définition de la section efficace totale

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_{\mathrm{S}^2} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \right) \mathrm{d}\Omega. \tag{1.29}$$

1.2.3 Théorie des ondes partielles pour les potentiels à symétrie sphérique

1.2.3.1 Cas d'un potentiel nul : $V(r) = 0$

La solution générale de l'équation générale de Schrödinger en l'absence de potentiel s'écrit, après utilisation de la méthode usuelle de séparation de variables :

$$\Phi^{(0)}_{k,\ell,m}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2k^2}{\pi}} j_\ell(kr) Y_{\ell m}(\theta,\phi) \tag{1.30}$$

où j_ℓ sont les fonctions de Bessel sphériques. Ces états de diffusion sont également connus sous le nom d'*états stationnaires de moment cinétique bien défini*, ou encore *ondes sphériques libres* (cf. Refs. [93, 22, 88]). Le comportement asymptotique quand $r \to \infty$ est donné par le comportement asymptotique des fonctions de Bessel sphériques qui, lorsque leur argument tend vers l'infini, sont reliées aux fonctions trigonométriques

$$j_\ell(kr) \sim \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \ell\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2ik}\left(e^{i\ell\pi/2}\frac{e^{-ikr}}{r} - e^{-i\ell\pi/2}\frac{e^{+ikr}}{r}\right) = \frac{(-i)^\ell}{2ik}\left(\frac{e^{+ikr}}{r} + (-1)^{\ell+1}\frac{e^{-ikr}}{r}\right). \tag{1.31}$$

On montre alors qu'une onde sphérique libre peut se comporter asymptotiquement comme la somme d'une **onde sphérique entrante** et une **onde sphérique sortante** dont les amplitudes respectives sont proportionnelles aux harmoniques sphériques. En effet, d'après (1.30) et (1.31), nous pouvons écrire

$$\Phi^{(0)}_{k,\ell,m}(\vec{r}) \sim \frac{(-i)^\ell}{i\sqrt{2\pi}}\left[Y_{\ell m}(\theta,\phi)\frac{e^{+ikr}}{r} + (-1)^{\ell+1}Y_{\ell m}(\theta,\phi)\frac{e^{-ikr}}{r}\right]. \tag{1.32}$$

La symétrie cylindrique autour de Oz du problème permet de se limiter aux termes indépendants de ϕ, i.e. $m = 0$, nous avons donc

$$\Phi^{(0)}_{k,\ell,0}(\vec{r}) \sim \left[\frac{1}{i^{\ell+1}\sqrt{2\pi}}Y_{\ell 0}(\theta)\right]\frac{e^{+ikr}}{r} + \left[\frac{(-1)^{\ell+1}}{i^{\ell+1}\sqrt{2\pi}}Y_{\ell 0}(\theta)\right]\frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{1.33}$$

On considère à présent une onde plane dont le vecteur d'onde $\vec{k}$ est dirigé suivant l'axe Oz, avec $k_z = k$. Cette onde plane représente un état d'énergie et d'impulsion bien définies. Son expression, $e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta}$, est indépendante de l'angle ϕ. Nous rappelons, ici, le développement bien connu d'une telle onde plane en ondes sphériques libres.

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)}\, j_\ell(kr) Y_{\ell 0}(\theta). \tag{1.34}$$

Remarque : Les résultats (1.33) *et* (1.34) *peuvent s'écrire de manière équivalente en fonction des harmoniques sphériques ou des polynômes de Legendre.*

D'après les équations (1.31) et (1.33), son comportement asymptotique est de la forme

$$e^{ikz} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2k}\sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)}\,\Phi^{(0)}_{k,\ell,0}(\vec{r}). \tag{1.35}$$

Ainsi, lorsque le potentiel central est identiquement nul, la fonction $\Phi(\vec{r})$ de l'équation (1.24) se réduit à une onde plane dont le développement en ondes partielles ne dépend que des ondes sphériques libres $\Phi^{(0)}_{k,\ell,0}(\vec{r})$

1.2.3.2 Cas d'un potentiel non nul : $V(r) \neq 0$

D'après (1.24), l'effet d'un potentiel central non nul affecte uniquement l'**amplitude angulaire de l'onde sphérique sortante**. Ainsi, par extension de l'égalité (1.35), nous sommes amenés à écrire un développement en ondes partielles pour $\Phi(\vec{r})$ de la forme

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2k} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \Phi_{k,\ell,0}(\vec{r}) \tag{1.36}$$

où, du fait de l'influence du potentiel, les $\Phi_{k,\ell,0}(\vec{r})$ ne sont plus des ondes sphériques **libres**. De plus, à partir de (1.24) et (1.35), nous avons immédiatement

$$\Phi(\vec{r}) \propto \frac{\sqrt{2\pi}}{2k} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \Phi^{(0)}_{k,\ell,0}(\vec{r}) + f_k(\theta) \frac{e^{+ikr}}{r} \tag{1.37}$$

soit

$$\Phi(\vec{r}) \propto \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[Y_{\ell 0}(\theta) \frac{e^{+ikr}}{r} + (-1)^{\ell+1} Y_{\ell 0}(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} \right] + f_k(\theta) \frac{e^{+ikr}}{r}. \tag{1.38}$$

Nous avons vu que le potentiel affecte uniquement l'amplitude angulaire de l'onde sphérique sortante de $\Phi(\vec{r})$. Traduisons cela par l'introduction d'un facteur $S_\ell(k)$

$$\Phi(\vec{r}) \propto \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[S_\ell(k) Y_{\ell 0}(\theta) \frac{e^{+ikr}}{r} + (-1)^{\ell+1} Y_{\ell 0}(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} \right]. \tag{1.39}$$

Les éléments $S_\ell(k)$ traduisent l'effet du potentiel sur l'onde entrante. Confirmons cette remarque en établissant le lien entre la quantité $f_k(\theta)$, en présence d'un potentiel central non nul, et les éléments S_ℓ. Pour cela, réécrivons l'équation (1.39) sous la forme

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) \propto & \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[Y_{\ell 0}(\theta) \frac{e^{+ikr}}{r} + (-1)^{\ell+1} Y_{\ell 0}(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} \right] \\ & + \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[S_\ell(k) - 1 \right] Y_{\ell 0}(\theta) \frac{e^{+ikr}}{r}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Par identification avec (1.38), nous obtenons immédiatement

$$f_k(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[S_\ell(k) - 1 \right] Y_{\ell 0}(\theta). \tag{1.41}$$

Sachant que

$$Y_{\ell 0}(\theta) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos\theta) \tag{1.42}$$

où $P_\ell(cos\theta)$ est le polynôme de Legendre de degré ℓ, nous pouvons également exprimer l'amplitude de diffusion sous la forme

$$f_k(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left[S_\ell(k) - 1 \right] P_\ell(\cos\theta). \tag{1.43}$$

L'information concernant l'influence du potentiel $V(r)$ sur l'onde entrante est donc encodée dans les éléments $S_\ell(k)$ et, de manière équivalente, dans l'expression de l'amplitude de diffusion $f_k(\theta)$.

1.2.4 Opérateur de diffusion : la matrice S

Lors d'une expérience typique de diffusion, la collision entre les particules incidentes et les particules cibles peut produire plusieurs types de particules se propageant dans diverses directions. Nous pouvons simplifier cette description en introduisant, par exemple, avant l'interaction, un état initial $|I\rangle$ composé de deux types de particules libres, i.e. les particules incidentes et les particules cibles. Après la collision, nous pouvons introduire un état final $|F\rangle$ décrivant un grand nombre de particules différentes, libres, produites lors de cette collision. Une théorie quantique de la diffusion doit nous permettre de déduire la probabilité d'obtenir n'importe quel état asymptotique final à partir d'un état asymptotique initial donné.

Il est alors d'usage d'introduire l'opérateur de diffusion S tel que ces éléments entre les états initial et final définis par $\langle F\,|S|\,I\rangle$, nous donne accès à la probabilité P_{FI} pour que l'état $|F\rangle$ résulte de l'état $|I\rangle$, en d'autres termes

$$P_{FI} = |\langle F\,|S|\,I\rangle|^2 . \tag{1.44}$$

Une théorie de la diffusion reposant sur le concept de matrice S part bien souvent des hypothèses suivantes :

- Mis à part certaines contraintes dont nous ferons abstraction ici comme la conservation de la charge, du nombre baryonique qui ne nous sont d'aucune utilité, les états de particules libres, pouvant décrire un nombre quelconque de particules, doivent vérifier le principe de superposition.
- L'interaction modélisant la collision doit être une interaction à courte portée. Bien entendu, au prix d'une attention particulière concernant notamment les conditions aux limites, il reste possible d'incorporer dans la description les interactions à longue portée (ce sera le cas pour l'étude du champ scalaire massif diffusé par un trou noir de Schwarzschild).
- Dans la théorie de la diffusion relative aux particules élémentaires, il est demandé une invariance sous les transformations de Lorentz du processus d'interaction, et donc de la matrice S.
- La matrice S est unitaire.

La dernière hypothèse a une interprétation physique simple : la somme des probabilités de tous les processus possibles à une énergie donnée est égale à l'unité. Ce qui se traduit, pour la matrice S, par $SS^\dagger = 1$.

Revenons sur cette dernière hypothèse. Il est important d'insister sur le fait que la matrice S, telle qu'elle est couramment utilisée, décrit l'ensemble des processus possibles lors d'une interaction entre particules. Chaque processus est appelé "canal de diffusion". Si l'ensemble des canaux est pris en compte dans les états asymptotiques initial et final, alors la matrice S doit effectivement être unitaire, comme nous venons de le spécifier. Cependant, en ce qui nous concerne, ce ne sera pas le cas. En effet, nous nous intéressons ici aux phénomènes de résonance et d'absorption par un trou noir. Ainsi, l'interaction que nous envisageons dans ce manuscrit entre un champ scalaire et un trou noir sera analogue aux *seuls canaux*, à moment angulaire fixé, associé aux *seuls processus de diffusion de type inélastique.*

En ce sens, lorsque nous évoquerons la matrice S, il est nécessaire de garder en mémoire que nous décrivons un processus, à moment angulaire ℓ fixé, de type inélastique. Nous faisons dès lors un abus de langage par rapport à ce qui vient d'être énoncé. Par conséquent, comme nous le rencontrons dans les ouvrages de mécanique quantique Refs. [93, 22, 88], nous ne devons pas attendre que cette "matrice S" soit unitaire. Pour une description complète et rigoureuse, dans le cadre gravitationnel, concernant l'usage d'une matrice S unitaire et des états asymptotiques associés, appelés états "IN" et "UP" ou "OUT" et "DOWN", nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage très exhaustif de B. DeWitt [39], Chap. 30. Ici, bien que ne permettant pas de définir une base des solutions de l'équation d'onde, nous ne considérerons donc que les états "IN", suffisant à l'étude des phénomènes de résonance et d'absorption par un trou noir.

Enfin, notons que la symétrie sphérique du problème implique que la matrice S commute avec l'opérateur de rotation. Le lemme de Schur nous permet donc de déduire que la matrice S est diagonale. Ses valeurs propres correspondent alors précisément aux coefficients $S_\ell(k)$ introduits dans l'équation (1.39). Ainsi, comme il est d'usage dans la littérature, nous appellerons "éléments de matrice S", ces mêmes coefficients. Signalons, au passage, que cette correspondance n'est pas fortuite. L'introduction des coefficients $S_\ell(k)$ dans l'équation (1.39) suit un raisonnement et une simplification basés justement sur la symétrie sphérique de notre problème de diffusion.
Bien entendu, il est possible de relier ces éléments de matrice au coefficient de réflexion $R_\ell(k)$, défini comme le rapport entre l'amplitude de l'onde partielle ℓ sortante et l'amplitude de l'onde partielle ℓ entrante. D'après (1.39), il est alors aisé de montrer que

$$S_\ell(k) = (-1)^{\ell+1} R_\ell(k) \tag{1.45}$$

avec, dans le cadre de notre travail, $|S_\ell(k)| < 1$. Nous reviendrons sur cette écriture dans la suite du manuscrit.

Chapitre 2

Approche semi-classique du problème de diffusion : la théorie du moment angulaire complexe et les pôles de Regge

Il s'agira, dans ce chapitre, de montrer tout d'abord l'insuffisance de la description classique face à la richesse quantique et d'introduire la nécessité d'une approche semiclassique.
Ensuite, nous obtiendrons une expression semiclassique de l'amplitude de diffusion en ayant recours à un procédé formel en trois étapes suggéré par Ford et Wheeler en 1959 [53].
Enfin, nous introduirons la théorie du moment angulaire complexe (CAM), théorie puissante et élégante, nous permettant d'exploiter, de manière formelle, l'approche précédente dans sa globalité, afin d'en extraire des informations physiques relatives à la dernière singularité, à l'origine du phénomène de résonance, mentionnée à la section 1.1.4 du chapitre 1.

2.1 Approche semiclassique

Il existe une analogie très profonde entre le passage de la description quantique à une description classique et le passage entre l'optique physique (ondulatoire) et l'optique géométrique. Historiquement, ceci n'a rien d'étonnant. En effet la mécanique hamiltonienne a été construite à partir d'une analogie avec l'optique géométrique alors que la mécanique ondulatoire de Schrödinger et de de Broglie a été développée à partir d'une analogie avec l'optique ondulatoire.
Ainsi, le domaine de validité de l'approximation classique correspond à celui de l'optique géométrique.

Gardons en mémoire qu'en optique, un rayon lumineux est **localement** équivalent à une onde plane. De manière similaire, une trajectoire classique sera **localement** équivalente à une fonction d'onde plane. Nous reviendrons sur cette remarque plus loin dans ce chapitre.

S'intéresser à l'approximation semiclassique revient donc à se poser la question :
"Sous quelles conditions les concepts et résultats classiques sont-ils pertinents en théorie quantique de la diffusion ?"

Formellement, à partir d'une description quantique d'un problème physique donné, si l'on considère la limite $\hbar \to 0$, nous nous attendons à retrouver "naturellement" la description classique. Cependant, cette limite reste subtile et compliquée d'un point de vue conceptuel, physique et mathématique.
Néanmoins, la théorie classique doit tout de même fournir une très bonne description des phénomènes si l'action caractéristique du problème considéré est très grande devant la constante de Planck $\hbar$.

Notons que le caractère "fini" et non nul de $\hbar$ se traduit, entre autres, par l'existence de spectres discrets de valeurs propres associées à certaines observables données. Auquel cas, la différence entre deux valeurs propres voisines est proportionnelle à $\hbar$. L'approximation classique est alors justifiée si cette différence est négligeable.

C'est le cas si l'on considère de grandes valeurs pour les *nombres quantiques* mis en jeu.
Illustrons cela en considérant l'exemple du spectre discret des énergies propres de l'atome d'hydrogène. Rappelons, tout d'abord, le résultat principal bien connu

$$E_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{m\,c^2}{n^2} \tag{2.1}$$

où e et m sont respectivement la charge et la masse de l'électron, avec $n \in \mathbb{N}^*$. La différence entre deux états propres d'énergie voisins est

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = -\frac{2n+1}{(n+1)^2} E_n. \tag{2.2}$$

A la limite $\hbar \to 0$, la différence entre un état d'énergie et l'état voisin le plus proche est en valeur absolue $(2n+1)/(n+1)^2$. D'après (2.1), pour que l'énergie ne change pas, le processus consistant à prendre la limite $\hbar \to 0$ équivaut, ici, à considérer $n^2\hbar^2 =$ constante. Ainsi, nous avons $n \to \infty$ comme $1/\hbar$ et $\Delta E \approx \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) = \mathcal{O}(\hbar)$.

Physiquement, la limite $n \to \infty$ sera alors préférée à $\hbar \to 0$, partant du principe que $\hbar$ est une constante fondamentale de la Nature.

Cependant, il est important de noter que l'aspect discret du spectre de certaines valeurs propres ne suffit certainement pas à définir le caractère fondamentalement quantique d'un phénomène donné. Un exemple parmi tant d'autres est celui des inégalités d'Heisenberg qui ne sont en rien liées au caractère discret d'un spectre de valeurs propres.

Dans le cas où les nombres quantiques ne sont pas explicitement présents dans la description quantique, nous chercherons, tout comme en optique physique, la limite ou les grandeurs caractéristiques de la fonction d'onde sont grandes (resp. petites), i.e. fréquence (resp. longueur d'onde) devant les dimensions caractéristiques du problème tel un temps caractéristique (resp. une taille caractéristique). Nous préciserons davantage cette idée dans ce qui suit.
Pour une discussion plus précise, voire exhaustive, relative à la signification physique et à la nécessité de l'approche semiclassique, nous renvoyons le lecteur aux articles de Ford et Wheeler [53] et de Berry et Mount [9].

2.1.1 Insuffisance de la description classique

De manière générale, les expressions quantiques exactes, pour une grande variété d'observables prennent la forme de développements en série convergents sur un ensemble discret (souvent infini) de valeurs propres. C'est le cas de l'amplitude de diffusion, calculée dans le chapitre précédent, vérifiant le développement en ondes partielles (1.43). Ces développements sont bien évidemment plus "riches" qu'une simple somme sur les trajectoires classiques comme celle donnée en (1.21). En effet, un très grand nombre (pour ne pas dire infini, dans beaucoup de cas) de fonctions d'ondes propres contribuent à ces séries. Ces fonctions d'ondes vont naturellement interférer entre elles. Ainsi, à la place d'une somme de contributions incohérentes à la section efficace d'absorption, telle que définie par exemple en (1.21), que l'on a appelée par abus de langage "somme sur les chemins classiques", nous obtiendrons une superposition cohérente des amplitudes de probabilités associées à ces fonctions d'ondes, à l'origine de phénomènes ondulatoires typiques, i.e. interférence et diffraction.

Rappelons que l'expression (1.28) est remarquable dans le sens où elle donne une relation entre deux grandeurs issues de descriptions différentes, i.e. la section différentielle efficace que l'on peut définir dans le cadre de la théorie classique et l'amplitude de diffusion, naturellement introduite dans le cadre de la

description quantique.
Cependant, comme nous l'avons souligné plus haut, l'expression formelle (1.28) appuyée par l'observation expérimentale met en évidence l'existence d'interférences, lors de processus de diffusion, ce qui indique clairement que la limite classique n'est pas atteinte. Nous ne pouvons donc attendre de la théorie classique une description précise de certains processus de diffusion.

Comme nous le verrons par la suite, la description semiclassique nous permettra, à partir de concepts quantiques, d'interpréter les processus de diffusion avec des notions intuitives empruntées à la théorie classique.

2.1.2 Limite semiclassique et limite des courtes longueurs d'ondes

Une condition nécessaire à la validité de la théorie classique (et/ou de l'optique géométrique) est que la longueur d'onde (réduite) de de Broglie $\lambda\!\!\!^{-} = \lambda/(2\pi)$ [1] définie localement par

$$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{1}{k} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\left[E - V_\ell(r)\right]}} \tag{2.3}$$

doit être très petite devant toutes les dimensions caractéristiques du problème.

Remarquons que, à l'instar de la notion d'équilibre local en thermodynamique, l'énergie cinétique définie à partir de p doit varier "lentement" pour que la notion de longueur d'onde locale garde un sens physique.

Considérons, à présent, que cette condition est valable sur l'ensemble du domaine spatial d'intérêt. Tout comme en optique, cette notion de longueur d'onde locale, nous permettra, comme nous l'avons signalé plus haut, de définir localement une trajectoire au sens de la théorie classique. Nous reviendrons sur ce point lors de l'interprétation physique des résultats obtenus dans ce chapitre.

Comment cette condition de validité se traduit-elle quantitativement ?
Supposons une particule incidente de quantité de mouvement p. Supposons, de plus, que la cible (le centre diffuseur) a transféré une quantité de mouvement à la particule incidente $\Delta p_\perp$, perpendiculaire à sa trajectoire initiale. L'angle de diffusion est alors bien approché par la relation

$$\theta \approx \frac{\Delta p_\perp}{p}. \tag{2.4}$$

Un raisonnement qualitatif nous permet de préciser l'ordre de grandeur de $\Delta p_\perp$.
En effet, à partir de la relation de Newton réécrite sous la forme $|\Delta\vec{p_\perp}| = \left|\vec{\nabla}V\right| \times \Delta t$, si l'on considère que la région où l'interaction entre la particule incidente et le centre diffuseur est de l'ordre de R alors

$$\Delta p_\perp \approx \frac{\bar{V}}{R} \times \frac{R}{v} = \frac{\bar{V}}{v} \tag{2.5}$$

où $\bar{V}$ est la valeur moyenne du potentiel diffuseur dans la région de dimension R et v est la vitesse de la particule incidente.
Ainsi d'après (2.4), nous avons

$$\theta \approx \frac{\bar{V}}{pv} \approx \frac{\bar{V}}{E_c} \tag{2.6}$$

avec E_c, l'énergie cinétique de la particule incidente.
Les inégalités d'Heisenberg introduisent un écart type $\delta\theta$ due à la taille typique R de la région transversale d'action du potentiel. En effet, R introduit un écart type sur la quantité de mouvement p que l'on écrit

$$\delta p \approx \frac{\hbar}{R} \tag{2.7}$$

1. Nous introduisons cette écriture peu commune afin, d'une part, d'éviter d'alourdir inutilement nos équations avec des facteurs 2π et d'autre part de confondre cette grandeur avec le moment angulaire complexe que l'on notera par la suite λ.

d'où l'on déduit un écart type pour l'angle de diffusion donné par

$$\delta\theta \approx \frac{\delta p}{p} \approx \frac{\hbar}{pR}. \tag{2.8}$$

Pour que la diffusion soit correctement définie, nous devons avoir les conditions $\delta\theta \ll 1$ et $\delta\theta \ll \theta$. Sachant que $\lambda\!\!\!^{-} = \hbar/p$, nous obtenons alors, d'après ce qui précède

$$\lambda\!\!\!^{-} \ll R \qquad \text{et} \qquad \lambda\!\!\!^{-} \ll R\frac{\bar{V}}{E_c}. \tag{2.9}$$

Nous retiendrons donc essentiellement un domaine de validité défini par

$$\beta \gg 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\beta} \ll \theta \tag{2.10}$$

avec $\beta = R/\lambda\!\!\!^{-} = kR$ est une grandeur sans dimension caractérisant l'échelle typique du processus de diffusion.
Dans les approximations définies en (2.10), la première correspond à l'approximation semi-classique/des courtes longueurs d'onde (ou des hautes énergies). La deuxième exclut un proche voisinage de la direction donnée par $\theta = 0$.

Remarquons au passage que, d'après la relation de de Broglie $\lambda\!\!\!^{-} = \hbar/p$, la limite des courtes longueurs d'onde est équivalente formellement à la limite $\hbar \to 0$, ce que nous avons signalé à la section 2.1, limite à laquelle nous nous attendons à recouvrer les équations de la théorie classique à partir de la théorie quantique.

D'un point de vue pratique, nous voudrions insister sur le fait que nous souhaitons, ici, nous arrêter avant la limite classique "extrême" afin d'obtenir une approximation quantique à hautes énergies, pour avoir une description physique plus "riche" que ne l'est la description purement classique (cf. discussion à la section 2.1.1).

Nous savons que, dans un grand nombre de cas, l'équation de Schrödinger ne peut pas être résolue analytiquement. L'équation que l'on introduira dans la deuxième partie de ce manuscrit, relative à la propagation d'un champ de masse nulle dans une géométrie d'espace-temps donnée, sera formellement semblable à une équation de Schrödinger. De ce fait, nous serons amenés, comme il est d'usage en théorie quantique, à utiliser les mêmes méthodes d'approximation, telle que l'approche WKB (Wentzel-Kramer-Brillouin), valable dans le domaine défini précédemment par (2.9) ou (2.10) et adaptée au cas de la physique gravitationnelle [2].

2.1.3 Approximation semiclassique d'un processus de diffusion

On peut considérer l'approche semiclassique comme étant définie par un ensemble d'approximations mathématiques, justifiées par les expressions (2.9) ou (2.10), introduites dans l'expression (1.43) de $f(\theta)$. Inspiré par Ford et Wheeler [53], cette "transformation" de l'amplitude de diffusion s'effectuera en trois étapes.

2.1.3.1 Expression WKB du déphasage

Tout d'abord, intéressons-nous aux éléments de matrice S, i.e. $S_\ell(k)$, présents dans l'équation (1.43). Ces éléments seront remplacés par leur approximation WKB. Inspiré par la *méthode des déphasages*, que le lecteur trouvera dans la plupart des ouvrages de référence comme par exemple Refs. [93, 22, 88], nous allons considérer que les éléments de matrice S peuvent s'écrire sous la forme $S_\ell(k) = e^{2i\delta_\ell(k)}$, en

2. Pour plus de précision, l'approximation WKB/semiclassique est valable dans un domaine où le potentiel varie "lentement", en d'autres termes

$$\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \ll 1/\lambda\!\!\!^{-}. \tag{2.11}$$

rappelant la condition $\left|e^{2i\delta_\ell}\right| \leq 1$.
On appellera $\delta_\ell(k)$ le "déphasage", sous-entendu *induit par le potentiel*, en référence à la littérature.
On se propose alors, à partir de l'approximation WKB au premier ordre, de donner une expression de δ_ℓ, notée $\delta_\ell^{\mathrm{WKB}}$ que l'on nommera, par abus de langage, "*expression WKB du déphasage*".

Rappelons l'équation de Schrödinger radiale (1.23), vérifiée par l'onde partielle Φ_ℓ, que l'on écrira sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi_\ell}{\mathrm{d}r^2} + Q_\ell(r)\Phi_\ell = 0 \tag{2.12}$$

où $Q_\ell(r) = \mathcal{P}_\ell(r)^2/\hbar^2$ avec $\mathcal{P}_\ell(r) = (2m[E - V_\ell(r)])^{1/2}$.
Avec ces notations, $\mathcal{P}_\ell(r)/\hbar$ s'interprète comme le nombre d'onde **local**. En supposant que $V(r)$ se comporte comme r^{-q} avec $q \geq 2$ (ce qui sera le cas pour la diffusion d'un champ non massif par un trou noir), alors $Q_\ell(r) \to -\infty$ quand $r \to 0$. De plus, quand $r \to \infty$, $Q_\ell(r) \to 2mE/\hbar^2$. Ainsi, il existe toujours un point que l'on notera r_0, appelé point tournant, i.e. point où la vitesse de la particule s'annule, tel que $Q_\ell(r_0) = 0$, et au voisinage duquel $Q_\ell(r)$ change de signe. Notons que, dans l'intervalle $]-\infty, 2mE/\hbar^2[$, nous pourrions légitimement attendre l'existence de plusieurs points r_i tels que $Q_\ell(r_i) = 0$. Mais gardons en mémoire que notre étude porte sur les seuls états de diffusion. Ainsi, nous omettrons volontairement tout domaine dans lequel nous pourrions éventuellement trouver des situations "favorables" à l'existence d'états liés. En d'autres termes, nous nous intéressons ici uniquement au cas de l'existence d'un seul point tournant dans le domaine radial d'intérêt.

Généralement, les points tournants sont connus pour faire diverger les solutions WKB. Ainsi, il est fréquent de "découper" l'espace autour d'un point tournant en trois régions :
- une région centrale, souvent notée II, contenant le point tournant r_0 et pouvant, suivant le problème, être arbitrairement "fine" autour de r_0.
- deux régions, notée I et III, de part et d'autre de la région II

On écrit ensuite les solutions WKB dans les régions I et III. Puis, nous calculons la solution exacte dans la région II, obtenue en écrivant un développement de Taylor de $Q_\ell(r)$ au voisinage de r_0 à l'ordre souhaité. Typiquement, un développement de $Q_\ell(r)$ au voisinage de r_0 à l'ordre $2n$, nous donnera une approximation dite *approximation WKB à l'ordre n*. Nous verrons dans les chapitres suivants que nous pousserons les développements WKB jusqu'à l'ordre 3 ou encore à l'ordre 5, ce qui sous-entend l'utilisation d'un développement limité de Q_ℓ, autour du point tournant, à l'ordre 6 ou 10.

La dernière étape consiste à "recoller" les trois solutions obtenues. Nous obtenons alors les formules dites *formules de connexion* ou *formules de raccordement* qui nous permettent de décrire complètement le voisinage de r_0 défini sur l'ensemble des trois régions.
Le lecteur est, bien évidemment, invité à consulter les ouvrages de références Refs. [93, 6] dans lesquels les détails techniques de cette méthode basés sur des arguments mathématiquement et physiquement rigoureux sont précisément explicités.

Nous essaierons, ici, de donner une dérivation "heuristique" qui, bien sûr, ne peut pas être considérée comme une justification rigoureuse. Mais nous pensons que les arguments employés ci-dessous sont simples et plus intuitifs.

Nous cherchons une expression asymptotique de $\Phi_\ell(r)$ pour $r \to \infty$, afin de pouvoir la comparer avec la forme asymptotique bien connue (cf. Refs. [93, 22, 88]) de la solution libre de l'équation de Schrödinger, déduite de la méthode des déphasages

$$\Phi_\ell(r) \sim \frac{C_\ell(k)}{kr} \sin\left(kr - \ell\frac{\pi}{2} + \delta_\ell(k)\right). \tag{2.13}$$

Dans la région où $r \to 0$, que nous noterons III, les termes en r^{-q} avec $q \geq 2$ présents dans $Q_\ell(r)$ domine, et, par conséquent, $Q_\ell(r)$ devient négatif. L'approximation WKB au premier ordre nous permet d'écrire Φ_ℓ sous la forme

$$\Phi_\ell(r) \propto \frac{1}{\left[-Q_\ell(r)\right]^{1/4}} \exp\left\{\int_{r_0}^{r} \left[-Q_\ell(r')\right]^{1/2} \mathrm{d}r'\right\}. \tag{2.14}$$

En augmentant la valeur de r, nous parcourons bien sûr la région III, puis nous arrivons à la région II. Nous traversons alors le point tournant $r = r_0$. Dans ce cas, comme nous l'avons discuté plus haut, $Q(r)$ change de signe. Ainsi, $\sqrt{-Q_\ell}$ doit être remplacé par $\pm i\sqrt{Q_\ell}$. N'ayant que peu d'importance dans cette dérivation qualitative, fixons le signe tel que $\sqrt{-Q_\ell} \to +i\sqrt{Q_\ell}$. De la sorte, nous obtenons immédiatement $(-Q_\ell)^{-1/4} \to e^{-i\pi/4} Q_\ell^{-1/4}$.
Dans la région III, Φ_ℓ est réelle. En considérant la région II arbitrairement "fine" autour de r_0, il semble alors "naturel" par prolongement, d'attendre qu'il en soit également de même pour son expression dans la région I, i.e. pour $r > r_0$. Ainsi, Φ_ℓ deviendrait

$$\Phi_\ell(r) \propto \frac{1}{Q_\ell(r)^{1/4}} \mathrm{Re}\left\{\exp\left[i\left(\int_{r_0}^{r} Q_\ell(r')^{1/2}\mathrm{d}r'\right) - \frac{\pi}{4}\right]\right\} \tag{2.15}$$

d'où

$$\Phi_\ell(r) \propto \frac{1}{Q_\ell(r)^{1/4}} \sin\left[\left(\int_{r_0}^{r} Q_\ell(r')^{1/2}\mathrm{d}r'\right) + \frac{\pi}{4}\right]. \tag{2.16}$$

Sachant que $Q \to p^2/\hbar^2 = 2mE/\hbar^2 = k^2$ quand $r \to \infty$, le comportement asymptotique de Φ_ℓ s'écrit alors

$$\Phi_\ell(r) \sim \frac{1}{p^{1/2}} \sin\left[kr + \frac{1}{\hbar}\int_{r_0}^{\infty} (\mathcal{P}_\ell(r') - p)\,\mathrm{d}r' - kr_0 + \frac{\pi}{4}\right] \tag{2.17}$$

avec, nous le rappelons, $Q_\ell(r) = \mathcal{P}_\ell(r)^2/\hbar^2 = 2m[E - V_\ell(r)]/\hbar^2$. Enfin, en identifiant (2.17) et (2.13), nous obtenons l'expression WKB du déphasage

$$\hbar\delta_\ell^{\mathrm{WKB}}(k) = \int_{r_0}^{\infty} (\mathcal{P}_\ell(r') - p)\,\mathrm{d}r' - pr_0 + \hbar\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}. \tag{2.18}$$

Il est possible d'améliorer ce résultat [85, 97] en considérant le comportement de la fonction d'onde au voisinage de $r \to 0$. En effet, à partir de l'étude usuelle d'une particule dans un potentiel central, nous savons [22, 88] que le comportement de la fonction d'onde dans la région $r \to 0$ est

$$\Phi_\ell(r) \propto r^{\ell+1}. \tag{2.19}$$

Or, dans la région $r \to 0$, le terme centrifuge de $Q_\ell(r)$ (ou de $\mathcal{P}_\ell(r)$) domine et, d'après l'expression (2.14), le comportement obtenu est

$$\Phi_\ell(r) \propto r^{1/2} r^{\sqrt{\ell(\ell+1)}}. \tag{2.20}$$

Pour retrouver le "bon" comportement, donné par (2.19), nous sommes alors amenés à remplacer $\ell(\ell+1)$ dans l'expression de $V_\ell(r)$, par $(\ell+1/2)^2$. De plus, à partir de l'expression modifiée de $V_\ell(r)$

$$V_\ell(r) = V(r) - \frac{\hbar^2(\ell+1/2)^2}{2mr^2} \tag{2.21}$$

et de l'expression de $V_{\mathrm{eff}}(r)$, introduite au chapitre 1.1

$$V_{\mathrm{eff}}(r) = V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}, \tag{2.22}$$

il devient naturel d'interpréter, dans le contexte semiclassique, la quantité $\hbar(\ell+1/2)$ comme l'équivalent semiclassique de la valeur du moment angulaire classique [3] L.

Quelles sont les conséquences physiques (semiclassiques) de cette substitution ?
Si l'on considère une onde plane incidente comme équivalente à un faisceau de particules identiques, l'onde partielle ℓ correspond à des paramètres d'impact concentrés principalement à l'intérieur d'un anneau

3. Naïvement, nous pouvons apporter un argument simple concernant l'identification de L avec $\hbar(\ell+1/2)$. En effet, en considérant que la limite semiclassique correspond à des nombres quantiques de grandes valeurs (cf. section 2.1.2) et en identifiant L à $\hbar[\ell(\ell+1)]^{1/2}$, nous obtenons immédiatement dans la limite des grandes valeurs de ℓ

$$L = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)} \underset{l\gg 1}{\sim} \hbar\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \tag{2.23}$$

circulaire de rayon intérieur égal à $\ell\lambda\!\!\!^{-}$ et de rayon extérieur égal à $(\ell+1)\lambda\!\!\!^{-}$, cf. Ref. [12]. Intéressons-nous au rayon moyen, correspondant géométriquement à la demi-distance entre le rayon intérieur et le rayon extérieur de "l'anneau d'impact"

$$r_{\text{moy}} = \frac{\ell + (\ell+1)}{2}\lambda\!\!\!^{-} = \left(\ell + \frac{1}{2}\right)\lambda\!\!\!^{-}. \tag{2.24}$$

De plus, nous savons que dans le cadre de l'approximation semiclassique, le *principe de localisation* [29] associe à l'onde partielle ℓ, un paramètre d'impact $b_\ell = \hbar(\ell+1/2)/p$. Or, d'après la substitution introduite précédemment, cela revient, bien évidemment, à écrire la relation connue $b_\ell = L/p$. En outre, si l'on tient compte de l'expression (2.24), l'interprétation physique de l'expression semiclassique de b_ℓ devient naturelle : $b_\ell \propto r_{\text{moy}}$ représente, en première approximation, le rayon moyen de l'anneau d'impact. Cette remarque nous permet alors de déterminer le nombre d'onde partielles contribuant au développement de l'amplitude de diffusion dans le cadre de l'approximation semiclassique. En effet, d'après $b_\ell = (\ell+1/2)/k$, nous sommes en droit d'attendre que les trajectoires incidentes vont interagir de manière significative avec le centre diffuseur pour $b_\ell \lesssim R$, en d'autres termes pour $\ell + 1/2 \lesssim kR$.
Ainsi, sous des conditions semiclassiques, définies par les expressions (2.9) ou (2.10), le nombre caractéristique d'ondes partielles, qui contribuent de manière significative au développement en ondes partielles (1.43) de l'amplitude de diffusion $f(\theta)$, est de l'ordre du paramètre β, correspondant à une valeur très importante, toujours d'après l'approximation (2.10).

Dans ce qui suit, par souci de clarté, nous poserons $\hbar = 1$.

2.1.3.2 Expressions asymptotiques

Comme nous venons de le voir, les contributions significatives au développement en ondes partielles nécessitent de grandes valeurs pour le nombre quantique ℓ.

La deuxième étape consiste alors à utiliser les expressions asymptotiques pour les polynômes de Legendre présents dans la relation (1.43), expressions valables pour $\ell \gg 1$ et $\ell \sin\theta > 1$, cf. Ref. [1]

$$P_\ell(\cos\theta) \sim \left[\frac{2}{\pi(\ell+1/2)\sin\theta}\right]^{1/2} \cos\left[\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] \tag{2.25}$$

que l'on écrit sous la forme

$$P_\ell(\cos\theta) \sim \left[\frac{1}{2\pi(\ell+1/2)\sin\theta}\right]^{1/2} \left[e^{i(\ell+1/2)\theta}e^{-i\pi/4} + e^{-i(\ell+1/2)\theta}e^{+i\pi/4}\right]. \tag{2.26}$$

Ces expressions asymptotiques restent cependant de bonnes approximations même pour de faibles valeurs de ℓ.
Notons que la substitution explicitée précédemment, i.e. $\ell(\ell+1) \to (\ell+1/2)^2$, a introduit une nouvelle variable qui intervient ici tout à fait naturellement.
Enfin, rappelons la relation de fermeture vérifiée par les polynômes de Legendre

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)P_\ell(x)P_\ell(x') = \delta(x-x') \tag{2.27}$$

que l'on utilisera pour établir une expression semiclassique de l'amplitude de diffusion

2.1.3.3 Prolongement analytique et expression semiclassique de l'amplitude de diffusion

Rappelons le développement en ondes partielles de l'amplitude de diffusion (1.43)

$$f_k(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\left[S_\ell(k)-1\right]P_\ell(\cos\theta).$$

Les deux premières étapes pour l'obtention d'une expression semiclassique pour $f_k(\theta)$, nous ont permis de retravailler les éléments $S_\ell(k)$ de la matrice S, et de considérer l'expression asymptotique pour les polynômes de Legendre $P_\ell(\cos\theta)$.
De plus, dans le domaine de validité défini en (2.10), nous excluons le cas $\theta = 0$ ce qui se traduit, à partir de la relation de fermeture vérifiée par les polynômes de Legendre (2.27) par l'égalité

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)P_\ell(1)P_\ell(x)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)P_\ell(x)=\delta(1-x). \tag{2.28}$$

En tenant compte de (2.28), l'expression (1.43) se réduit à

$$f_k(\theta)=\frac{1}{ik}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)S_\ell(k)P_\ell(\cos\theta). \tag{2.29}$$

Historiquement, Ford et Wheeler [53] ont proposé, à ce stade, de remplacer la somme discrète (2.29) par une intégrale en considérant la nouvelle variable $\lambda = (\ell + 1/2)$ étendue à l'ensemble des réels, que l'on appellera très vite *moment angulaire* (en unité $\hbar$). Bien sûr, pour être valable, cette approximation exige qu'un grand nombre d'ondes partielles contribuent au processus de diffusion et que le déphasage varie régulièrement avec λ. Le prolongement analytique des polynômes de Legendre de $\ell \in \mathbb{N}$ à la variable réelle λ sera défini par les fonctions de Legendre de première espèce. Enfin, on suppose que le prolongement analytique de $S_{\lambda-1/2}(k)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ existe et se réduit à $S_\ell(k)$ pour les "points physiques", i.e. $\lambda = (\ell + 1/2)$ avec $\ell = 0, 1, 2 \ldots$.

Cependant, il existe une transformation mathématiquement plus élégante basée sur la formule sommatoire de Poisson, cf. Ref. [109]

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\mathrm{g}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\int_0^{\infty}\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{g}(\lambda)e^{2im\pi\lambda} \tag{2.30}$$

où $\mathrm{g}(\lambda)$ est la fonction obtenue par prolongement analytique de $\mathrm{g}(\ell + 1/2)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Bien entendu, $\mathrm{g}(\lambda)$ se réduit à $\mathrm{g}(\ell + 1/2)$ pour les "points physiques" $\lambda = \ell + 1/2$ avec $\ell = 0, 1, 2 \ldots$. Appliquons cette formule à l'expression (2.29)

$$f_k(\theta)=\frac{1}{ik}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\int_0^{\infty}\mathrm{d}\lambda\,\lambda\,S_\lambda(k)P_\lambda(\cos\theta)e^{2im\pi\lambda}. \tag{2.31}$$

En remplaçant les éléments de matrices S_ℓ par leur expression fonction du déphasage $\delta_\ell^{\mathrm{WKB}}$ et les polynômes de Legendre par leur expression asymptotique (2.26), il vient

$$f_k(\theta)=\frac{1}{ik(2\pi\sin\theta)^{1/2}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\int_0^{\infty}\mathrm{d}\lambda\,\sqrt{\lambda}\,\left[e^{i\phi_m^+(\lambda,\theta)}e^{-i\pi/4}+e^{i\phi_m^-(\lambda,\theta)}e^{+i\pi/4}\right] \tag{2.32}$$

avec

$$\phi_m^{\pm}(\lambda,\theta)=2\delta_\lambda^{\mathrm{WKB}}+\lambda(2m\pi\pm\theta). \tag{2.33}$$

2.1.3.4 Interprétation physique

Ford et Wheeler [53] se sont rendu compte que, même si seuls les *chemins classiques* définissent le comportement de la section différentielle efficace, la méthode de la phase stationnaire peut être appliquée pour évaluer l'intégrale (2.32) seulement si les points de phase stationnaire (que l'on notera $\overline{\lambda_j}$ avec $j = 1, 2, \ldots$) sont du premier ordre et "bien séparés" les uns des autres. Notons également que pour des angles très proches de $\theta \sim 0$ ou $\theta \sim \pi$, l'expression (2.32) n'est plus valable. En effet, la condition nécessaire à l'expression asymptotique des polynômes de Legendre (2.26) n'est plus satisfaite et l'on doit considérer des expressions asymptotiques alternatives, valables pour ces deux cas de figure. Pour ces situations, $f_k(\theta)$ dépend toujours de la contribution des *chemins classiques*, mais des méthodes d'intégration plus sophistiquées que celle de la phase stationnaire doivent être utilisées pour évaluer précisément

l'intégrale de l'expression (2.32).

L'intégrand dans l'expression (2.32) oscille très rapidement dans la limite semiclassique de sorte que les contributions (asymptotiques) dominantes à l'intégrale correspondent aux points de phase stationnaire contenus dans l'intervalle d'intégration.

Afin d'extraire les premières informations physiques de $f_k(\theta)$, recherchons, tout d'abord, les conséquences physiques de l'existence de points de phase stationnaire.
Le terme de phase $\phi_m^{\pm}(\lambda,\theta)$ est dit stationnaire en $\overline{\lambda_j}$ si

$$\left.\frac{\mathrm{d}\phi_m^{\pm}(\lambda,\theta)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=\overline{\lambda_j}} = 0 \tag{2.34}$$

soit, d'après (2.33)

$$2\frac{\mathrm{d}\delta_\lambda^{\mathrm{WKB}}}{\mathrm{d}\lambda} + 2m\pi \pm \theta = 0. \tag{2.35}$$

Or, d'après (2.18), on déduit aisément

$$\frac{\mathrm{d}\delta_\ell^{\mathrm{WKB}}}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{1}{2}\int_{r_0}^{\infty} \frac{2\lambda\,\mathrm{d}r}{r^2\left\{2m\left[E - V_\lambda(r)\right]\right\}^{1/2}} + \frac{\pi}{2}. \tag{2.36}$$

Ainsi, en identifiant (2.36) et (1.18), nous obtenons

$$\Theta(\lambda) = 2\frac{\mathrm{d}\delta_\ell^{\mathrm{WKB}}}{\mathrm{d}\lambda} \tag{2.37}$$

d'où l'on déduit, avec (2.35), qu'un point de phase stationnaire vérifie

$$\Theta(\overline{\lambda_j}) + 2m\pi = \pm\theta. \tag{2.38}$$

Le lecteur aura bien sûr remarqué que, la recherche des points de phase stationnaire pour l'expression (2.32), nous amène aisément à la relation (2.38) qui n'est autre que la relation classique (1.19) établie à la section 1.1.3.
Nous pouvons alors conclure que les *chemins classiques* correspondent aux points de phase stationnaire. Ainsi, tous les chemins, classiques et pseudoclassiques, pour un angle de diffusion θ, contribuent à l'amplitude de diffusion $f_k(\theta)$, à la limite semiclassique.

En outre, d'après l'analyse classique de la section 1.1 du chapitre 1, nous obtenons une interprétation physique naturelle de l'indice m provenant de la formule sommatoire de Poisson. Suivant Berry [9], nous nommerons cet indice : *nombre quantique topologique* car il représente le *nombre de tours effectué par un chemin autour du centre diffuseur.*

Avant de calculer explicitement l'expression semiclassique de $f_k(\theta)$, arrêtons-nous un instant sur la phase $\phi_m^{\pm}$ définie en (2.33). Dans les années 60, Berry (cf. Ref. [7] et Ref. [8]) a montré que pour un moment angulaire donné $\overline{\lambda_j}$ correspondant au j^{eme} chemin classique, la phase $\phi_m^{\pm}(\overline{\lambda_j},\theta)$ n'est rien d'autre que l'action classique, que nous noterons $A_j(\theta) = A(\overline{\lambda_j},\theta)$, calculée le long de la trajectoire. Mais, en tenant compte de l'expression (2.32), il semble clair qu'il s'agit d'une somme de contributions pour tout $\lambda \in]0,+\infty[$, et pour tout $m \in \mathbb{N}$, relative à des particules diffusées selon tous les angles de déflection Θ correspondant à l'angle de diffusion observé θ. Il semble alors légitime de se demander quelle signification donner à l'action $A(\lambda,\theta)$ correspondant à une particule déviée de Θ mais qui ne possède pas un moment angulaire classique parmi les $\overline{\lambda_j}$?
Sur la figure 2.1, nous avons représenté une sphère de rayon r_0, avec r_0 le point tournant de notre problème de diffusion. Cette sphère est l'enveloppe de la famille des chemins classiques de moment angulaire $\overline{\lambda_j}$. Notons qu'un segment appartenant à la surface de la sphère, bien que n'étant pas un chemin classique, est néanmoins une solution singulière des équations du mouvement. La sphère correspond à une caustique en optique.

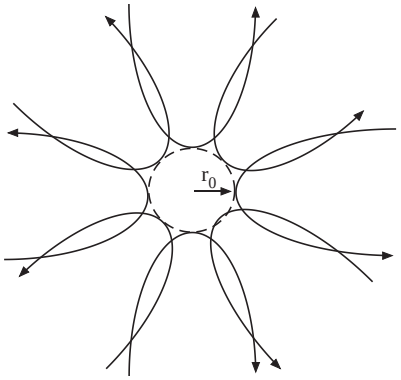


FIGURE 2.1 – La sphère de rayon r_0 est l'enveloppe de la famille des chemins classiques de moment angulaire λ

Nous avons représenté sur la figure 2.2 ce que Berry et Mount [9] ont appelé un *chemin pseudoclassique*. Ce chemin peut être décrit par trois région distinctes. Tout d'abord, les deux trajectoires AB et CD qui correspondent respectivement à des chemins incident et sortant, de même moment angulaire $\lambda \in \mathbb{R}$, puis l'arc de cercle BC sur la sphère de rayon r_0. Si l'on calcule l'action le long d'un chemin pseudoclassique, pour lequel BC correspond à un angle de déflection $\Theta = -2m\pi \mp \theta$, le résultat coïncide, sans surprise avec l'expression (2.33). Ainsi, *une particule de n'importe quel moment angulaire λ peut subir n'importe quel angle de déflection Θ en suivant un chemin pseudoclassique.*

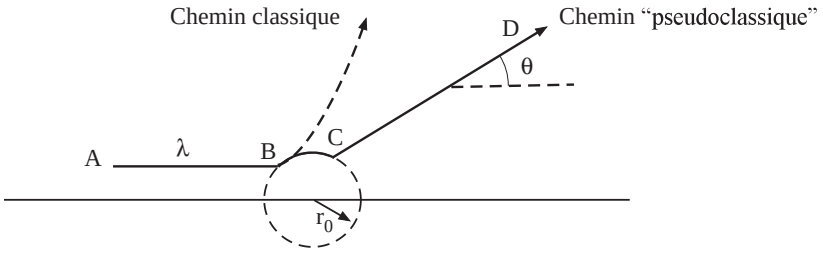


FIGURE 2.2 – La courbe ABCD est un chemin pseudoclassique

Ceci nous conduit naturellement à une interprétation de la formule sommatoire de Poisson. Elle représente l'amplitude de diffusion $f_k(\theta)$ comme une *somme sur tous les chemins, classiques et pseudoclassiques, qui émergent selon la direction θ.*

$$f_k(\theta) = \frac{1}{ik} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, \lambda\, [S_\lambda(k) - 1]\, P_{\lambda-1/2}(\cos\theta) e^{2im\pi\lambda}. \tag{2.39}$$

En d'autres termes, on pourrait, par abus de langage, considérer (2.39) comme une généralisation du *principe de Huygens* ou une forme simplifiée de *la somme sur les chemins de Feynman* [51].

A présent, calculons par la méthode de la phase stationnaire l'amplitude de diffusion $f_k(\theta)$ proprement dite. Pour cela, gardons en mémoire que nous nous plaçons à la limite semiclassique [4], i.e. telle que les termes de phase $\phi_m^{\pm}$ oscillent très rapidement.
Introduisons alors les intégrales $I_m^{\pm}$

$$I_m^{\pm} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \sqrt{\lambda}\, e^{i\phi_m^{\pm}}. \tag{2.40}$$

4. Pour justifier l'utilisation de cette méthode, nous pouvons également rétablir temporairement la constante de Planck $\hbar$ dans les termes de phase de l'expression (2.32) qui s'écrivent alors $\phi_m^{\pm}/\hbar$. La limite $\hbar \to 0$ permet ainsi d'obtenir une oscillation très rapide des intégrands. Gardons ce comportement des termes de phase en tête, même si nous choisissons un système d'unité tel que $\hbar = 1$

Avant de préciser la façon dont les chemins classiques contribuent à $f_k(\theta)$, nous souhaitons souligner que les intégrales $I_m^{\pm}$, font intervenir n'importe quelle valeur réelle du moment angulaire.
De plus, la relation (2.32) qui s'écrit à présent sous la forme

$$f_k(\theta) = \frac{1}{ik(2\pi \sin\theta)^{1/2}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \left[e^{-i\pi/4}\, I_m^+ + e^{+i\pi/4}\, I_m^- \right] \tag{2.41}$$

nous permet de différencier les chemins selon leur topologie. Deux possibilités s'offrent alors à nous. Soit nous considérons une valeur du moment angulaire fixée pour toutes topologies, auquel cas, l'application inverse de la formule sommatoire de Poisson nous ramène à une quantification du moment angulaire. Soit nous considérons toute valeur réelle possible du moment angulaire pour une topologie fixée, représentation pour laquelle seuls les moments angulaires $\overline{\lambda_j}$ contribuent à l'amplitude de diffusion à la limite semiclassique. Ainsi, en suivant Berry et Mount [9], nous pouvons conclure qu'une écriture du type (2.41) est à mi-chemin entre la mécanique classique et la mécanique quantique.

A présent, rappelons brièvement le résultat formel issu de la méthode de la phase stationnaire. Supposons qu'il existe deux fonctions f et g continues et au minimum deux fois dérivables par rapport à la variable réelle $x \in]0, +\infty[$. Supposons de plus qu'il existe $x_c \in]0, +\infty[$ tel que $\mathrm{g}'(x_c) = 0$, $\mathrm{g}''(x_c) \neq 0$ et $\mathrm{f}(x_c) \neq 0$. A la limite $y \to \infty$, avec $y \in \mathbb{R}$, la méthode de la phase stationnaire nous permet d'évaluer une intégrale du type

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{f}(x)\, e^{iy\mathrm{g}(x)} \underset{y\to+\infty}{\sim} e^{i\epsilon\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{y}} \frac{\mathrm{f}(x_c)}{|\mathrm{g}''(x_c)|^{1/2}}\, e^{iy\mathrm{g}(xc)} \tag{2.42}$$

où ϵ est le signe de $\mathrm{g}''(x_c)$.
Ainsi, en appliquant ce résultat aux intégrales $I_m^{\pm}$, nous obtenons, à la limite semiclassique

$$I_m^{\pm} \sim \sqrt{2\pi} \left(\frac{\overline{\lambda_j}}{\left|\Theta'(\overline{\lambda_j})\right|} \right)^{1/2} e^{i\epsilon\frac{\pi}{4}} e^{i\phi_m^{\pm}(\overline{\lambda_j})} \tag{2.43}$$

où

$$\Theta'(\overline{\lambda_j}) = \left.\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=\overline{\lambda_j}} \qquad \text{avec} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\phi_m^{\pm}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^2} = \frac{\mathrm{d}\Theta(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{2.44}$$

L'amplitude de diffusion $f_k(\theta)$, devient dépendante du chemin classique suivi et s'écrit alors

$$f_{k,j}(\theta) = \frac{1}{ik} \left(\frac{\overline{\lambda_j}}{\sin\theta \left|\Theta'(\overline{\lambda_j})\right|} \right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{i\left[\phi_m^+(\overline{\lambda_j}) - m\pi + \frac{\pi}{4}(\epsilon-1)\right]} + e^{i\left[\phi_m^-(\overline{\lambda_j}) - m\pi + \frac{\pi}{4}(\epsilon+1)\right]} \right\} \tag{2.45}$$

ou, d'après (2.33)

$$f_{k,j}(\theta) = \frac{1}{ik} \left(\frac{\overline{\lambda_j}}{\sin\theta \left|\Theta'(\overline{\lambda_j})\right|} \right)^{1/2} \exp\left[2i\delta_{\overline{\lambda_j}}^{\mathrm{WKB}}\right] \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{i\left[\overline{\lambda_j}(2m\pi+\theta) - m\pi + \frac{\pi}{4}(\epsilon-1)\right]} + e^{i\left[\overline{\lambda_j}(2m\pi-\theta) - m\pi + \frac{\pi}{4}(\epsilon+1)\right]} \right\}. \tag{2.46}$$

Pour une seule topologie de chemin donnée, i.e. $m = m_0$ fixée, l'amplitude de diffusion s'écrit

$$f_{k,m_0,j}(\theta) = \frac{e^{-im_0\pi} e^{i\epsilon\frac{\pi}{4}} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}}{ik} \left(\frac{\overline{\lambda_j}}{\sin\theta \left|\Theta'(\overline{\lambda_j})\right|} \right)^{1/2} e^{iA_j(\theta)} \tag{2.47}$$

le signe $\pm$ permettant de traiter le cas d'un potentiel attractif ou répulsif. Notons que le module au carré de l'expression (2.47) est tout à fait similaire à l'expression classique (1.21).
De plus, pour le cas de l'existence de N chemins classiques correspondant à un même angle de diffusion θ

$$f_{k,m_0}(\theta) = \sum_{j=1}^{N} f_{k,m_0,j}(\theta). \tag{2.48}$$

Or, d'après la relation (1.28)

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = |f_{k,m_0}(\theta)|^2 \qquad \text{à laquelle on peut associer} \qquad \frac{\mathrm{d}\sigma_{m_0,j}}{\mathrm{d}\Omega} = |f_{k,m_0,j}(\theta)|^2 .$$

Nous obtenons immédiatement, dans le cas de l'existence de N chemins classiques correspondant à un même angle de diffusion θ et pour une topologie de chemins donnée, une expression de la section différentielle efficace de la forme

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\sigma_{m_0,j}}{\mathrm{d}\Omega} + 2\sum_{j\neq i}^{N} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma_{m_0,i}}{\mathrm{d}\Omega} \frac{\mathrm{d}\sigma_{m_0,j}}{\mathrm{d}\Omega} \right)^{1/2} \cos\left[\alpha_{m_0,j}(\theta) - \alpha_{m_0,i}(\theta)\right] \tag{2.49}$$

où l'on a noté la contribution du j^{eme} chemin classique à l'amplitude de diffusion sous la forme

$$f_{k,m_0,j}(\theta) = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma_{m_0,j}}{\mathrm{d}\Omega} \right)^{1/2} e^{i\alpha_{m_0,j}(\theta)} \tag{2.50}$$

avec $\alpha_{m_0,j}(\theta) = A_j(\theta) - m_0\pi + \epsilon\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4}$.
Nous retrouvons alors l'expression classique de la section différentielle efficace (1.21) établie à la section 1.1 du chapitre 1, pour une famille de chemins classiques, de même topologie. Cependant, si plusieurs chemins classiques contribuent à l'amplitude de diffusion $f_{k,m_0}(\theta)$, l'analyse semiclassique (2.49) met clairement en évidence un phénomène d'interférences, inaccessible à partir de la seule théorie classique.

Nous sommes alors en droit de se demander si ce(s) terme(s) d'interférence joue(nt) un rôle significatif dans l'approche semiclassique des processus de diffusion ?
Nous ne rentrerons pas dans les détails ici, en renvoyant le lecteur qui souhaite davantage de précisions à l'ouvrage de R.G. Newton [97]. Nous ne retiendrons ici que les principales conclusions.
Tout d'abord, pour des processus de diffusion macroscopique, les énergies des particules diffusées ne sont pas *exactement* les mêmes. Elles sont suffisamment dispersées pour que l'erreur relative sur la longueur d'onde soit grande devant le paramètre $\lambda\!\!\!^{-}/b$. Les interférences s'annulent donc en moyenne. En d'autres termes, le processus de moyennisation de la section différentielle efficace annulent ces phénomènes d'interférence. Mais l'on peut montrer que, même si les oscillations angulaires produites par interférences sont extrêmement étroites, dans le cas où la différence entre deux paramètres d'impact correspondant à un même angle de déflection est microscopique, i.e. comparable à la longueur d'onde, les interférences sont visibles. Par conséquent, contrairement à ce que l'on peut rencontrer parfois dans la littérature, les interférences ne nécessitent pas de potentiel diffuseur "inhabituel". En effet, le simple exemple, parmi quelques autres, de la diffusion des particules α par les noyaux atomiques est révélateur [54] de l'existence de ces phénomènes d'interférences.

Cependant, pour notre étude, s'agissant de processus de diffusion macroscopiques, ces phénomènes d'interférences seront considérés comme négligeables. Nous noterons néanmoins que, d'après la structure de la relation (2.46), et plus précisément dans le cas d'un moment angulaire donné et de chemins dont la topologie n'est pas fixée, nous sommes en droit d'attendre l'existence de phénomènes d'interférences dont l'*origine est différente* de celle que nous venons de discuter. Ceci sera clairement développé dans ce qui suit.

Enfin, nous terminerons en remarquant que, malgré une expression semiclassique de l'amplitude de diffusion, celle-ci présente toujours, dans l'expression de son module, les mêmes singularités, i.e. celles présentées à la section 1.1 du chapitre 1. Notons pour la quatrième singularité, que d'un point de vue quantique, l'orbite de durée "indéfinie" autour du centre diffuseur se traduira par un effet de *résonance* bien marqué.

Pour résumer, nous avons vu qu'en introduisant une liberté supplémentaire sur l'intervalle de définition de λ, nous étions à même d'extraire les premières interprétations physiques de l'analyse semiclassique. Cette fois-ci, en élargissant à nouveau l'intervalle de définition du moment angulaire, non pas de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$ mais de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$, la théorie dite *théorie du moment angulaire complexe* nous permettra de retravailler, avec beaucoup plus d'aisance, la formule sommatoire de Poisson, nous donnant ainsi un "contrôle" de

la quatrième singularité, rencontrée dès l'analyse purement classique (cf. section 1.1.4). C'est en effet cette singularité, à l'origine du phénomène de résonance, qui est au centre de notre étude. Cette méthode puissante et élégante fait l'objet de la section suivante et nous permettra, à partir du concept de *pôles de Regge*, i.e. des pôles des éléments de matrice S, une interprétation physique simple des phénomènes de diffusion et plus particulièrement des phénomènes de résonance et d'absorption. Cette théorie du moment angulaire complexe, que l'on notera très rapidement CAM, pour *Complexe Angular Momentum*, sera mathématiquement au coeur de l'analyse semiclassique et de l'interprétation physique des phénomènes de résonance et d'absorption d'un champ scalaire par des trous noirs.

2.2 Théorie du moment angulaire complexe

Pour une étude plus exhaustive ainsi que pour les diverses applications (en mécanique quantique, physique nucléaire, physique des hautes énergies, électromagnétisme, séismologie...) relatives à la théorie du moment angulaire complexe que nous allons introduire ici, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de Newton [97], Nussenzveig [99], Grandy [63] et Collins [24], entre autres exemples, ainsi qu'aux références qui y sont citées.

Ford et Wheeler [53] ont fait une première analyse des singularités vues à la section 1.1 du chapitre 1, également appelées *effets critiques*, avec des outils dont les domaines de validité se sont révélés être trop étroits et irréguliers dans les zones de transition (dans le sens usuel de l'optique), i.e. entre chacune de ces singularités. Notons au passage qu'il existe, dans la littérature, diverses approximations asymptotiques uniformes dépourvues de ces "défauts de transition" (cf. e.g. Ref. [99] ou encore Ref. [63]). Cependant, rappelons que notre étude ne prétend pas couvrir l'ensemble de ces effets critiques. Nous allons en effet nous concentrer sur un formalisme nous permettant de traiter uniquement la quatrième singularité, rencontrée à la section 1.1.4, à l'origine du phénomène de résonance lors d'un processus de diffusion. Nous allons montrer, dans cette partie, que la théorie CAM répond parfaitement à ce "cahier des charges" et ce, avec des résultats élégants, d'une très bonne précision comparés à des résultats exacts, issus d'une analyse numérique.
Pour ce faire, rappelons tout d'abord que la formule sommatoire de Poisson est exacte. Mais, pour tirer parti de ses conséquences, notamment en ce qui concerne la possibilité de fournir les approximations asymptotiques que nous recherchons, l'étape cruciale consiste à étendre le domaine de définition du moment angulaire λ, au plan complexe. Pour désigner le plan $\mathbb{C}$, nous utiliserons, par abus de langage, l'expression "*plan λ-complexe*" ou encore "*plan CAM*".
Historiquement, les idées fondatrices de cette méthode remontent à Poincaré [101], Watson [122], Sommerfeld [111], entre autres, pour l'étude des ondes dites *ondes de surface* dans des domaines aussi variés que la séismologie, l'électromagnétisme, la mécanique des fluides...
Comme pour le cas de l'extension de $\lambda \in \mathbb{N}$ à $\lambda \in \mathbb{R}$, une condition incontournable est celle de l'existence d'un prolongement analytique des polynômes de Legendre (qui existe, nous le savons, au travers des fonctions hypergéométriques) mais surtout, et ce sera une des hypothèses fortes pour la suite de notre travail, des éléments de matrice S, i.e. S_ℓ.

2.2.1 Transformation de Watson et formule sommatoire de Poisson

Historiquement, la transformation de Watson est basée sur la relation

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathrm{g}\left(\ell+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} \mathrm{g}(\lambda)\frac{e^{-i\pi\lambda}}{\cos(\pi\lambda)}\mathrm{d}\lambda \tag{2.51}$$

où $\mathcal{C}$ est le contour représenté sur la figure 2.3. Ce résultat peut aisément être vérifié en considérant les résidus de l'intégrand qui ne sont autres que l'ensemble des demi-entiers.

Afin de mettre en exergue le lien entre la transformation de Watson (2.51) et la formule sommatoire de Poisson (2.30), qui nous a permis une première interprétation physique riche en terme de topologie des chemins empruntés par les particules incidentes, nous utiliserons la simple formule, valable pour $\mathrm{Im}\lambda > 0$

$$\frac{1}{\cos\pi\lambda} = 2i\sum_{m=0}^{\infty} e^{i\pi(2m+1)(\lambda-1/2)} \tag{2.52}$$

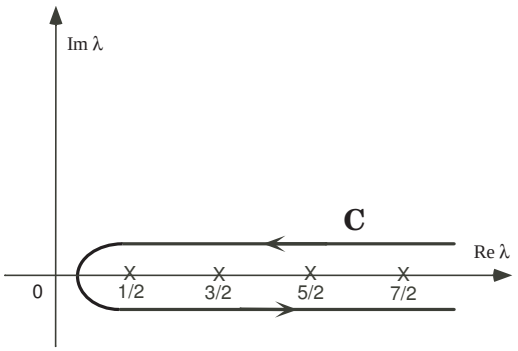


FIGURE 2.3 – Contour d'intégration utilisé pour la transformation de Watson

que nous écrivons immédiatement sous la forme

$$\frac{e^{-i\pi\lambda}}{\cos\pi\lambda} = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m e^{2im\pi\lambda}. \tag{2.53}$$

Selon la parité de l'intégrand et le domaine de définition de l'indice de sommation m, le contour d'intégration $\mathcal{C}$ peut devenir équivalent à une ligne horizontale située dans le demi-plan supérieur, parallèle à l'axe Reλ, ce qui sera systématiquement le cas dans notre étude. Ainsi, en injectant (2.53) dans l'expression (2.51), il vient

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\mathrm{g}\left(\ell+\frac{1}{2}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\int_0^{\infty}\mathrm{g}(\lambda)e^{2im\pi\lambda}\mathrm{d}\lambda \tag{2.54}$$

qui est la formule sommatoire de Poisson utilisée dans la section précédente.
Notons que l'on trouve dans la littérature, une écriture alternative, totalement équivalente à l'expression (2.51) (cf. Ref. [4]), que l'on peut également vérifier par application du théorème des résidus

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell}\mathrm{g}\left(\ell+\frac{1}{2}\right) = \frac{i}{2}\int_{\mathcal{C}}\frac{\mathrm{g}(\lambda)}{\cos\pi\lambda}\mathrm{d}\lambda \tag{2.55}$$

où $\mathcal{C}$ reste le contour défini sur la figure 2.3.
Nous exploiterons cette dernière expression pour sa simplicité d'utilisation concernant les intégrands que nous rencontrerons dans le cas de la diffusion d'un champ scalaire par des trous noirs. Nous proposons donc de l'utiliser dès à présent.

Enfin, le lecteur aura remarqué que le passage au plan λ-complexe, nous donne la liberté de pouvoir déformer le contour d'intégration $\mathcal{C}$, ce qui nous permettra d'obtenir des informations physiques précises relatives aux phénomènes de résonance et d'absorption par des trous noirs, en d'autres termes, d'avoir accès aux informations relatives aux singularités d'intérêt mentionnées plus haut.

2.2.2 Elements de matrice S et pôles de Regge

Rappelons l'expression de l'amplitude de diffusion (1.43)

$$f_k(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\left[S_\ell(k)-1\right]P_\ell(\cos\theta).$$

Les polynômes de Legendre vérifiant la condition

$$P_\ell(-\cos\theta) = (-1)^\ell P_\ell(\cos\theta) \tag{2.56}$$

écrivons l'amplitude de diffusion sous la forme

$$f_k(\theta) = \frac{1}{ik}\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^\ell\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\left[S_\ell(k)-1\right]P_\ell(-\cos\theta). \tag{2.57}$$

Nous pouvons alors appliquer la transformation de Watson donnée en (2.55) de laquelle nous déduisons

$$f_k(\theta) = \frac{1}{2k} \int_{\mathcal{C}} \frac{\lambda \left[S_{\lambda-1/2}(k) - 1 \right] P_{\lambda-1/2}(-\cos\theta)}{\cos \pi\lambda} \mathrm{d}\lambda \tag{2.58}$$

avec, bien sûr, le contour $\mathcal{C}$ défini sur la figure 2.3.

Notons que la transformation de Watson (2.55) ne peut s'appliquer que s'il existe un prolongement analytique de l'intégrand dans le plan λ-complexe. En particulier, nous savons que le prolongement analytique des polynômes de Legendre existe et est donné par les fonctions hypergéométriques, i.e. $P_{\lambda-1/2}(z) = F(-\lambda+1/2, \lambda+1/2; 1; (1-z)/2)$. Cependant dans ce manuscrit, en l'absence d'expression analytique, pour tout λ, des éléments de matrice S, nous devrons systématiquement supposer l'existence d'un prolongement analytique $S_{\lambda-1/2}(k)$ de $S_\ell(k)$, dans ce même plan λ-complexe.

Pour un moment angulaire ℓ donné, comment peut-on définir les éléments $S_\ell(k)$?
Nous ne répondrons pas à cette question dans cette section. Ici, nous souhaitons simplement mettre en évidence la physique sous-jacente au formalisme de la théorie CAM, dans le cadre de l'analyse semiclassique des phénomènes de résonance et d'absorption par un centre diffuseur. Nous gardons les détails de la définition des éléments $S_\ell(k)$ ainsi que l'énoncé du problème de diffusion par un trou noir pour la deuxième partie de ce manuscrit.

Comme nous l'avons souligné précédemment, l'avantage majeur du passage dans le plan complexe est de pouvoir déformer les contours d'intégration. En quoi cette liberté est-elle nécessaire ? A la limite semiclassique, les contributions à l'amplitude de diffusion requièrent, nous l'avons vu, de prendre en compte un très grand nombre de termes dans le développement en ondes partielles (1.43). Ce qui implique une convergence très lente de ce développement. Nous passerons sur le fait trivial que le calcul très lourd d'un tel développement ne renseigne en rien sur la physique mise en jeu. Enfin, la troncation d'un développement en ondes partielles, même pour des valeurs très importantes de ℓ, fait apparaître un phénomène d'interférences non physiques indésirable, à l'instar du phénomène de Gibbs en analyse de Fourier. La théorie CAM ne souffre, quant à elle, d'aucun de ces défauts formels. De plus, par le biais de la déformation des contours d'intégration, la théorie CAM permet de concentrer les contributions asymptotiques dominantes pour l'amplitude de diffusion dans le voisinage d'un nombre restreint de points dans le plan λ-complexe, afin d'obtenir un développement asymptotique rapidement convergent.

Nous allons anticiper sur le processus de diffusion par un tour noir en supposant que l'intégrand et en particulier les éléments $S_\ell(k)$ possèdent un certain nombre de pôles simples dans le plan λ-complexe, que nous noterons λ_n. Ces pôles sont également appelés *pôles de Regge*, suite aux travaux de Tulio Regge, en 1965, qui ont conduit à l'application de la théorie CAM dans le domaine de la physique des hautes énergies. Historiquement, on doit l'introduction de ce formalisme, comme véritable principe régissant les interactions entre particules, à J.A. Wheeler dès 1937 suivi par Heisenberg vers 1941. Dans les années 1960, la matrice S et les *pôles de Regge* ont joué un rôle important dans l'étude des collisions de particules subatomiques comme remplaçants possibles d'une théorie quantique des champs plus fondamentale, faisant abstraction de toute notion d'espace et de temps au profit des propriétés mathématiques de la matrice S. Mais cette approche a été abandonnée dans les années 1970 avec l'avènement de la QCD (*Quantum ChromoDynamics*) qui a résolu le problème de l'interaction forte (interaction entre quarks) dans le cadre de la théorie des champs. Nous soulignerons, au passage, que le formalisme de la matrice S et des *pôles de Regge* appliqué au cas de l'interaction forte a conduit parallèlement au développement de la théorie des cordes. Nous invitons le lecteur intéressé par tous ces aspects à consulter les ouvrages introductifs Ref. [64] et Ref. [24] entre autres...

Ainsi, afin de prendre en compte la contribution de ces pôles à l'amplitude de diffusion, nous allons déformer le contour $\mathcal{C}$ suivant la figure 2.4. Nous verrons, dans la deuxième partie de ce manuscrit, que l'existence de pôles pour les éléments $S_\ell(k)$ définit, avec les conditions aux limites adéquates, les *modes quasinormaux* d'un trou noir.

Quelles sont les conséquences directes de la déformation du contour d'intégration selon la figure 2.4 ? Pour tenir compte des éventuelles singularités de l'intégrand, on referme le contour $\mathcal{C}$ par deux quarts

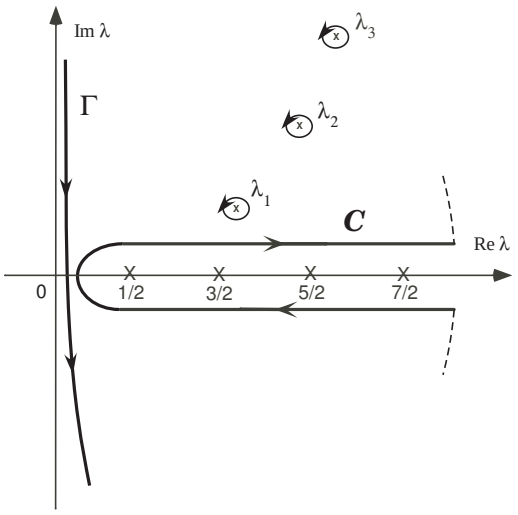


FIGURE 2.4 – Déformation du contour d'intégration ; les λ_n sont les pôles des éléments $S_{\lambda-1/2}(k)$.

de cercles dans le premier quadrant et le quatrième quadrant du plan complexe. Comme nous l'avons déjà souligné, les seules singularités rencontrées seront les pôles des éléments $S_{\lambda-1/2}(k)$ appartenant au premier quadrant [4] (cf. figure 2.4). En supposant que l'intégrand ait un "bon comportement" quand $|\lambda| \to \infty$, l'application des lemmes de Jordan et du théorème des résidus nous permettent d'écrire l'amplitude de diffusion sous la forme d'une somme de deux contributions. Changeons d'ores et déjà de notation $f_k(\theta) = f(k,\theta)$, afin d'insister sur le fait que l'amplitude de diffusion est fonction de k.

$$f(k,\theta) = \frac{1}{2k}\int_\Gamma \frac{\lambda\left[S_{\lambda-1/2}(k)-1\right]P_{\lambda-1/2}(-\cos\theta)}{\cos\pi\lambda}\mathrm{d}\lambda + \left(\frac{-i\pi}{k}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda_n(k)\gamma_n(k)}{\cos\left(\pi\lambda_n(k)\right)}P_{\lambda_n(k)-1/2}(-\cos\theta) \tag{2.59}$$

où $\gamma_n(k)$ est le résidu associé au pôle $\lambda_n(k)$.

Le premier terme est appelé *intégrale de fond* [4]. Celle-ci peut être calculée avec des méthodes similaires à celles employées à la section précédente. Elle ne joue aucun rôle dans le phénomène de résonance [4] qui nous intéresse ici. Nous n'en tiendrons donc pas compte dans la suite de ce manuscrit. Nous noterons $f_P(k,\theta)$, le second terme duquel nous allons extraire, après quelques manipulations formelles, identiques à celles utilisées précédemment, les interprétations physiques déduite de la théorie CAM. Tout ce qui suit restera, bien sûr, valable pour le cas de la diffusion d'un champ scalaire par un trou noir.
Rappelons le comportement asymptotique des polynômes de Legendre (2.26) pour $|\lambda| \to \infty$, valable pour $|\lambda|\sin\theta > 1$

$$P_{\lambda-1/2}(-\cos\theta) \sim \frac{e^{i\lambda(\pi-\theta)-i\pi/4} + e^{-i\lambda(\pi-\theta)+i\pi/4}}{(2\pi\lambda\sin\theta)^{1/2}} \tag{2.60}$$

de même que la relation (2.52)

$$\frac{1}{\cos\pi\lambda} = 2i\sum_{m=0}^{+\infty} e^{i\pi(2m+1)(\lambda-1/2)} \tag{2.61}$$

valable pour $\mathrm{Im}\lambda > 0$. L'expression de $f_P(k,\theta)$ s'écrit alors

$$f_P(k,\theta) = \frac{2\pi}{ik}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda_n(k)\gamma_n(k)}{[2\pi\lambda_n(k)\sin\theta]^{1/2}} \times \sum_{m=0}^{+\infty}\left(e^{i\lambda_n(k)(\theta+2m\pi)-im\pi+i\pi/4} + e^{i\lambda_n(k)(2\pi-\theta+2m\pi)-im\pi-i\pi/4}\right). \tag{2.62}$$

Notons que les exponentielles sont semblables à celles que nous avons obtenues lors de notre première approche semiclassique. Cependant, à l'exception du terme en $\sin\theta$, excluant les valeurs $\theta = 0\,\mathrm{ou}\,\pi$, le lecteur aura remarqué l'absence explicite, dans l'expression (2.62), de grandeurs à l'origine de la

quatrième singularité rencontrée à la section 1.1.4 qui est ici, comme nous l'avons discuté précédemment, entièrement décrite par les pôles de Regge et leurs résidus respectifs, conséquence du formalisme CAM. Les autres singularités restent cependant présentes dans l'intégrale de fond.

2.2.3 Interprétation physique

L'interprétation physique de l'expression (2.62) est alors aisée. Les termes de la forme $\exp[i\lambda_n(k)\theta]$ et $\exp[i\lambda_n(k)(2\pi-\theta)]$ exhibent une évolution angulaire, indépendante de la variable radiale. En ce sens, ils correspondent à des contributions de type ondes de surface. Nous savons [4] que les pôles de Regge, $\lambda_n(k)$, appartiennent au premier quadrant du plan λ-complexe. Ainsi, $\exp[i\lambda_n(k)\theta]$ (resp. $\exp[i\lambda_n(k)(2\pi-\theta)]$) correspond à une *onde de surface* se propageant dans le sens trigonométrique (resp. sens trigonométrique inverse). La partie réelle d'un pôle, i.e. $\mathrm{Re}\lambda_n(k)$, représente le terme de propagation azimuthale tandis que la partie imaginaire, i.e. $\mathrm{Im}\lambda_n(k)$, correspond à l'amortissement de l'onde de surface associée. Cet amortissement exponentiel, $\exp[-\mathrm{Im}\lambda_n(k)\theta]$ (resp. $\exp[-\mathrm{Im}\lambda_n(k)(2\pi-\theta)]$) est physiquement dû à un rayonnement continu d'énergie vers "l'extérieur". De plus, comme nous l'avons déjà remarqué à propos de la topologie des chemins rencontrée à la section 2.1.3.4, la somme sur l'indice m tient compte du nombre de circonvolutions d'une onde de surface indexée par l'indice n des pôles de Regge autour du centre diffuseur. Nous trouvons ici l'équivalent ondulatoire du concept que l'on a déjà rencontré, i.e. le nombre de tours effectués par une particule incidente autour du centre diffuseur. Enfin, notons que le terme de phase "$-im\pi$" correspond à une avance due aux deux caustiques présentes sur l'axe de diffusion dans le cas, nous le rappelons, d'un problème à symétrie sphérique qui est le cadre d'étude de notre travail.

Une structure de la forme (2.62) exhibe très clairement, par le biais de l'existence des ondes de surface, la possibilité d'un comportement résonant. En effet, considérons la $n^{\text{ème}}$ onde de surface, i.e. l'onde de surface décrite par le pôle de Regge $\lambda_n(\omega)$. Quand la quantité $\mathrm{Re}\ \lambda_n(\omega) - 1/2$ coïncide avec un entier, il y a un phénomène de résonance produit par interférence constructive entre les différentes "composantes" de l'onde de surface, chaque "composante" correspondant à un nombre de circonvolutions m différent. Cette résonance et, plus précisément, la fréquence de résonance que nous noterons $\omega_{\ell n}^{(0)}$ est donc générée par ces ondes de surface. Nous pouvons, dès lors, déduire une première relation semiclassique que nous utiliserons régulièrement dans la seconde partie de ce manuscrit reliant la fréquence de résonance et les pôles de Regge. Cette relation semiclassique est une condition de quantification "à la Bohr-Sommerfeld" que l'on peut écrire sous la forme

$$\mathrm{Re}\,\lambda_n\left(\omega_{\ell n}^{(0)}\right) = \ell + \frac{1}{2}, \qquad \ell \in \mathbf{N}. \tag{2.63}$$

A cela, nous pouvons ajouter une deuxième relation semiclassique caractérisant ce même type de phénomène de résonance. En effet, supposons que la fréquence ω soit dans un proche voisinage de la fréquence d'excitation $\omega_{\ell n}^{(0)}$, nous pouvons alors développer l'expression du pôle de Regge $\lambda_n(\omega)$ en série de Taylor au voisinage de $\omega_{\ell n}^{(0)}$, ce que l'on écrit sous la forme

$$\lambda_n(\omega) \approx \ell + \frac{1}{2} + \left.\frac{\mathrm{dRe}\,\lambda_n(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_{\ell n}^{(0)}} \left(\omega - \omega_{\ell n}^{(0)}\right) + i\,\mathrm{Im}\,\lambda_n\left(\omega_{\ell n}^{(0)}\right) + i\left.\frac{\mathrm{dIm}\,\lambda_n(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_{\ell n}^{(0)}} \left(\omega - \omega_{\ell n}^{(0)}\right) + \ldots \tag{2.64}$$

Enfin, en remplaçant le développement (2.64) dans le terme $\sin[\pi(\lambda_n(\omega) - 1/2)]$ de (2.62), nous constatons que $f_P(k,\theta)$ présente un comportement à la "Breit-Wigner", i.e. de la forme

$$\frac{\Gamma_{\ell n}/2}{\omega - \omega_{\ell n}^{(o)} + i\Gamma_{\ell n}/2}. \tag{2.65}$$

avec

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \left.\frac{\mathrm{Im}\,\lambda_n(\omega)[\mathrm{d}/\mathrm{d}\omega\,\mathrm{Re}\,\lambda_n(\omega)]}{[\mathrm{d}/\mathrm{d}\omega\,\mathrm{Re}\,\lambda_n(\omega)]^2 + [\mathrm{d}/\mathrm{d}\omega\,\mathrm{Im}\,\lambda_n(\omega)]^2}\right|_{\omega=\omega_{\ell n}^{(0)}}. \tag{2.66}$$

qui caractérise l'amortissement de la $n^{\text{ème}}$ onde de surface.

2.2.4 Comment déterminer les pôles de Regge ?

Nous venons de voir une partie de la puissance du formalisme CAM ainsi que l'abondance d'informations physiques liée aux pôles (de Regge) des éléments de matrice S. Nous avons vu que l'interprétation en terme d'ondes de surface est sous-jacente à ce formalisme et nous permet de décrire de manière intuitive ce qui pourrait être des phénomènes de résonance associés aux aspects diffusifs du problème considéré.
Cependant, il nous manque deux informations de première importance. Comment peut-on déterminer les pôles de Regge ? En d'autres termes, est-il possible d'obtenir une expression analytique de ces pôles ? Enfin, où se propagent les ondes de surface associées ?
Le lecteur aura compris que ces deux questions sont dépendantes l'une de l'autre. En effet, comme nous l'avons souligné précédemment, il subsiste un lien intrinsèque entre l'existence des pôles de Regge et les ondes de surface.
Formellement, il existe plusieurs méthodes pour répondre à ces questions. Tout d'abord, il va de soi que si l'on connaît une expression analytique de la fonction $S_{\lambda-1/2}$, alors la recherche des pôles de Regge ne devrait poser aucune difficulté insurmontable. Cependant, comme nous l'avons déjà signalé auparavant, nous serons amené à supposer qu'il existe un prolongement analytique, dans le plan λ-complexe, des éléments S_ℓ, sans toutefois connaître son expression $\forall\lambda \in \mathbb{C}$. De ce fait, nous avons eu recours à une méthode extraite de l'approximation WKB, adaptée au contexte de la physique des trous noirs. Plus précisément, nous avons déjà signalé que pour décrire une certaine configuration, en l'occurrence une résonance, associée à un problème physique donné, l'approximation WKB implique l'existence de formule(s) de raccordement. Ces formules de raccordement dépendent aussi bien de l'indice de moment angulaire ℓ que de la fréquence ω. Nous retrouvons d'ailleurs cette structure duale fondamentale pour la matrice S. Inspiré par le formalisme CAM, nous étendons le domaine de définition de ℓ au plan λ-complexe. Nous pouvons alors résoudre la formule de raccordement en λ, déduite de l'approche WKB, obtenant ainsi, une expression analytique des pôles de Regge, fonction de la fréquence $\omega > 0$. Signalons qu'une fois l'expression analytique pour les pôles de Regge calculée, la localisation des ondes de surfaces peut-être obtenue soit à partir du principe de localisation, i.e. $L = bp$, soit déduite de la région spatiale considérée lors de l'application de l'approximation WKB.
Dans la suite de ce manuscrit, nous donnerons des expressions analytiques pour les pôles de Regge déduites de l'approximation WKB poussée à l'ordre 3, proposée par Schutz, Will et Iyer [108, 72, 71], puis nous irons jusqu'à l'ordre 5 inspiré par Will, Guinn et Konoplya [124, 79]. Nous serons également amenés à utiliser, au chapitre 6, une troisième méthode, introduite par Dolan et Ottewill, pour laquelle le lecteur trouvera un développement détaillé dans [44].
Cependant, il reste néanmoins une incertitude. En effet, nous verrons que, dans le cadre gravitationnel, la question de la localisation des ondes de surface n'est pas clairement définie. C'est pourquoi nous utiliserons, avec prudence, ce terme entre guillemets.

Deuxième partie

Perturbation des trous noirs : La réponse de la théorie CAM à un problème de diffusion résonante

Chapitre 3

Physique des trous noirs du point de vue de la théorie des perturbations

Nous utiliserons, dans la suite de ce manuscrit, un système d'unités dans lequel $\hbar = c = G = 1$.

3.1 Introduction : Stabilité

Avant de discuter la stabilité d'un trou noir face à des perturbations externes, il serait légitime de se demander pourquoi s'intéresser à la théorie des perturbations des trous noirs ? Les premières réponses que l'on pourrait apporter à cette question sont les suivantes. Tout d'abord, la présence de perturbations peut rompre les propriétés statiques d'une géométrie d'espace-temps définie par un trou noir et par conséquent être la source de l'émission d'ondes gravitationnelles, ondes qui pourraient être détectées dans un futur proche par les nouveaux dispositifs expérimentaux. Ensuite, et c'est là un fait fondamental, les ondes gravitationnelles émises par un trou noir "transportent" avec elles les informations relatives à ses propriétés comme sa masse, sa charge et/ou son moment angulaire (pour un trou noir en rotation). En ce sens, l'observation des ondes gravitationnelles émises par des trous noirs en réponse à une perturbation serait une preuve directe de leur existence. Enfin, il va de soi qu'étudier la réponse des trous noirs à diverses perturbations extérieures, nous permet de conclure quant à la stabilité de ces objets.

Ainsi, une des premières questions, parmi les plus importantes, associées à la probable existence des trous noirs dans notre Univers est certainement celle concernant leur stabilité face à des perturbations extérieures de natures diverses.
C'est en 1957, que Regge et Wheeler ont publié ce qui peut être considéré comme le premier article relatif à la théorie des perturbations des trous noirs [104] dans lequel ils ont étudié la stabilité d'un trou noir de Schwarzschild face à des perturbations gravitationnelles externes. Regge et Wheeler ont dérivé les équations qui décrivent un tel trou noir "légèrement" perturbé, i.e. en supposant des perturbations linéaires de la métrique, du type

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\text{Background}} + h_{\mu\nu} \qquad \text{avec} \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \tag{3.1}$$

Les perturbations d'un trou noir de Schwarzschild peuvent être divisées en deux catégories. L'origine de cette scission se trouve dans la séparation des variables "spatiales et angulaires". Il n'est pas question ici de redémontrer les résultats de la théories des perturbations linéaires des trous noirs. Cependant, nous pouvons tenter de comprendre cette origine de la façon suivante. En effet, une contrainte importante sur la métrique $h_{\mu\nu}$ est imposée par le théorème de Birkhoff qui énonce que la solution de Schwarzschild est la seule solution asymptotiquement plate, à symétrie sphérique des équations d'Einstein dans le vide même si l'espace-temps n'est pas statique. Ainsi, des trous noirs non-rotatifs peuvent seulement être perturbés par des perturbations non radiales, ce qui impose une totale dépendance angulaire pour la métrique $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(t, r, \theta, \phi)$ où t, r, θ, ϕ sont les coordonnées usuelles de Schwarzschild. Le traitement mathématique d'une telle dépendance temporelle, radiale et angulaire peut être lourd. Mais, il est possible

de procéder à une séparation des variables. Dans le cas d'une fonction scalaire, ne dépendant que des coordonnées spatiales, le résultat bien connu, que nous avons d'ailleurs déjà utilisé dans ce manuscrit, nous permet de développer cette fonction en une série sur les *harmoniques sphériques* $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$

$$F(r,\theta,\phi)=\sum_{\ell,m}a_{\ell m}(r)Y_{\ell m}(\theta,\phi). \tag{3.2}$$

De façon analogue, pour le cas vectoriel, il existe un développement en série sur les *harmoniques sphériques vectorielles* et pour le cas tensoriel d'ordre 2, un développement en série sur les *harmoniques sphériques tensorielles* que l'on peut écrire

$$F_{\mu\nu}(t,r,\theta,\phi)=\sum_{\ell,m}a_{\ell m}(t,r)\left[H^{\rm ax}_{\ell m}(\theta,\phi)\right]_{\mu\nu}+\sum_{\ell,m}b_{\ell m}(t,r)\left[H^{\rm pol}_{\ell m}(\theta,\phi)\right]_{\mu\nu}. \tag{3.3}$$

Cependant, contrairement au cas scalaire, il faut tenir compte du fait que les *harmoniques sphériques tensorielles*, i.e. $\left(H^{\rm ax}_{\ell m}\right)_{\mu\nu}$ et $\left(H^{\rm pol}_{\ell m}\right)_{\mu\nu}$ se comportent différemment sous la transformation de parité. Plus précisément, si l'on note Π, l'opérateur de parité agissant sur un tenseur d'ordre 2, son action se traduit par

$$\Pi\left(\left[H_{\ell m}(\theta,\phi)\right]_{\mu\nu}\right)\to\left[H_{\ell m}(\pi-\theta,\pi+\phi)\right]_{\mu\nu}. \tag{3.4}$$

Ainsi, les *harmoniques sphériques tensorielles* peuvent être classées selon leur comportement sous l'action de parité. En effet, les harmoniques tensorielles pour lesquelles $\Pi\left(H_{\mu\nu}\right)=(-1)^{\ell+1}H_{\mu\nu}$ seront appelées harmoniques *impaires* ou *axiales*. De manière similaire, si $\Pi\left(H_{\mu\nu}\right)=(-1)^{\ell}H_{\mu\nu}$, les harmoniques seront appelées harmoniques *paires* ou *polaires*. Le lecteur comprendra alors les notations utilisées précédemment, i.e. $H^{\rm ax}$ et $H^{\rm pol}$. Cette différence de comportement sous l'action d'un opérateur de parité est à l'origine de la division en deux catégories pour des perturbations linéaires extérieures à une métrique de type Schwarzschild.
Les perturbations axiales sont gouvernées par une équation surprenamment simple appelée *équation de Regge-Wheeler*, alors que les perturbations polaires sont gouvernées par une équation mathématiquement plus élaborée appelée *équation de Zerilli*. Cependant, il est intéressant de noter qu'il existe une transformation permettant de passer de l'une à l'autre, via une certaine classe d'opérateurs différentiels bien définis. Nous ne développerons pas davantage nos propos sur le sujet en renvoyant le lecteur intéressé au très exhaustif livre de Chandrasekhar [19].

Afin de mettre en avant, de manière simple, les principales caractéristiques du problème des perturbations des trous noirs, nous allons commencer par étudier la propagation d'une champ scalaire "test" dans la géométrie de Schwarzschild. Même si ce cas ne semble pas physiquement justifié, nous l'utilisons ici et tout au long de ce manuscrit, afin de décrire les concepts fondamentaux relatifs à la théorie des perturbations des trous noirs. Les champs de "spins physiques" tels que les spins $s=1/2,1\,\text{et}\,2$ sont envisageables au prix d'une complexité analytique et, par là-même, de la perte d'intuition relative à la physique sous-jacente au problème des perturbations. Ce choix se justifie donc par sa simplicité, d'une part, et par la physique qu'elle décrit d'autre part, car les champs de spins $s=0,1\,\text{et}\,2$ (la partie axiale pour le dernier cas) satisfont des équations de Regge-Wheeler quasiment identiques. Nous ne traiterons pas le cas d'un champ de spin $s=1/2$, en renvoyant le lecteur à l'article [42] par exemple.

Considérons donc un champ scalaire non massif $\Phi(\vec{r})$ se propageant dans la géométrie de Schwarzschild. L'évolution d'un tel champ satisfait l'équation de Klein-Gordon

$$\Box\Phi=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Phi=0 \tag{3.5}$$

où g est le déterminant de la métrique $g_{\mu\nu}$ dont les éléments permettent de définir une longueur infinitésimale de géodésique

$$\mathrm{d}s^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\sigma_2^2 \tag{3.6}$$

où $d\sigma_2^2$ représente la métrique définie sur la 2-sphère unité S^2 et M est la masse du trou noir.
La métrique est à symétrie sphérique, il est donc naturel de séparer les variables angulaires des variables radiale et temporelle. Le champ $\Phi(\vec{r})$ se décompose alors sous la forme bien connue

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{\ell,m} \frac{u_\ell(r,t)}{r} Y_{\ell m}(\theta,\phi) \tag{3.7}$$

où $Y_{\ell m}$ sont les harmoniques sphériques usuelles. La fonction $u_\ell(r,t)$ vérifie alors l'équation

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r_*^2} - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - V_\ell(r)\right] u_\ell(r,t) = 0. \tag{3.8}$$

Nous avons utilisé la *coordonnée de la tortue* r_*, introduite par Wheeler en 1955, particulièrement bien adaptée à la description de l'extérieur d'un trou noir, et en l'occurrence du trou noir de Schwarzschild. Cette coordonnée est reliée à la coordonnée radiale de Schwarzschild par

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \tag{3.9}$$

ou encore

$$r_* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) + \text{const.} \tag{3.10}$$

En particulier, si l'on choisit de décrire l'extérieur du trou noir par la *coordonnée de la tortue*, l'horizon des évènements est *repoussé* à $r_* = -\infty$.
Si, nous supposons, de plus, une dépendance en temps de type harmonique, i.e. $u_\ell(r,t) = \Phi_\ell(r)\exp[-i\omega t]$, nous obtenons alors l'équation

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r_*^2} + \omega^2 - V_\ell(r)\right] \Phi_\ell(r) = 0 \tag{3.11}$$

qui a la même forme que l'équation dérivée par Regge et Wheeler en 1957 pour des perturbations gravitationnelles axiales.
Le lecteur aura remarqué que cette équation est en tout point similaire à une équation de Schrödinger radiale. En ce sens, la quantité $V_\ell(r)$ joue le rôle de potentiel et est appelée potentiel de Regge-Wheeler. Chandrasekhar a été le premier à remarquer cette similitude suggérant ainsi que la théorie des perturbations des trous noirs pouvait être formulée comme un problème de diffusion résonante. C'est précisément sous cet aspect que se situe l'ensemble de ce travail. Pour revenir à l'expression du potentiel de Regge-Wheeler, nous invitons le lecteur à consulter l'ouvrage de Frolov et Novikov [55] dans lequel la dépendance de ce potentiel suivant le spin du champ est explicitée. Nous ne retiendrons ici que le résultat final

$$V_\ell(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2(1-s^2)M}{r^3}\right]. \tag{3.12}$$

Revenons à la question de la stabilité des trous noirs. Vishveshwara [119] a déduit de l'équation (3.8) l'équivalent d'une intégrale première du mouvement, ce qui pourrait se traduire, ici, par une conservation de l'énergie s'écrivant sous la forme

$$\int_{r_*=-\infty}^{r_*=+\infty} \left[\left|\frac{\mathrm{d}u_\ell(r,t)}{\mathrm{d}r_*}\right|^2 + \left|\frac{\mathrm{d}u_\ell(r,t)}{\mathrm{d}t}\right|^2 + V_\ell(r)\left|u_\ell(r,t)\right|^2\right] \mathrm{d}r_* = \text{const.} \tag{3.13}$$

Cette équation est obtenue en multipliant l'équation (3.8) par $\mathrm{d}\overline{u}_\ell/\mathrm{d}t$ (où $\overline{u}_\ell$ est le complexe conjugué de u_ℓ) et en ajoutant l'équation obtenue à son complexe conjugué. Enfin, on intègre l'équation finale pour r_* allant de $-\infty$ à $+\infty$. Sachant que le potentiel V_ℓ est défini positif, la quantité $\mathrm{d}u_\ell(r,t)/\mathrm{d}t$ est bornée, excluant par là-même une croissance temporelle de type exponentiel pour les solutions de l'équation (3.8). Cependant, cela n'exclut pas la possibilité de croissance linéaire (ou de puissance inférieure à 1) en temps. La question de la stabilité a finalement été complètement entérinée suite aux travaux de Kay et Wald [75] qui ont montré que $u_\ell(r,t)$ restait bornée en tout point si les conditions initiales étaient elles-mêmes régulières et bornées. Nous pouvons alors affirmer qu'un trou noir de Schwarzschild et par extension un trou noir statique à symétrie sphérique est stable pour des conditions initiales ayant un support compact dans un système de coordonnées données.

3.2 Modes quasinormaux

Nous commencerons cette section par une citation de Vishveshwara [118] :
"*How do you observe a solitary black hole ? To me the answer seemed obvious. It had to be through scattering of radiation, provided the black hole left its fingerprint on the scattered wave... So, I started pelting the black hole with Gaussian wave packets. If the wave packet was spatially wide, the scattered one was affected very little. It was like a big wave washing over a small pebble. But when the Gaussian became sharper, maxima and minima started emerging, finally levelling off to a set pattern when the width of the Gaussian became comparable to or less than the size of the black hole. The final outcome was a very characteristic decaying mode, to be christened later as the quasinormal mode. The whole experiment was extraordinarily exciting.*"

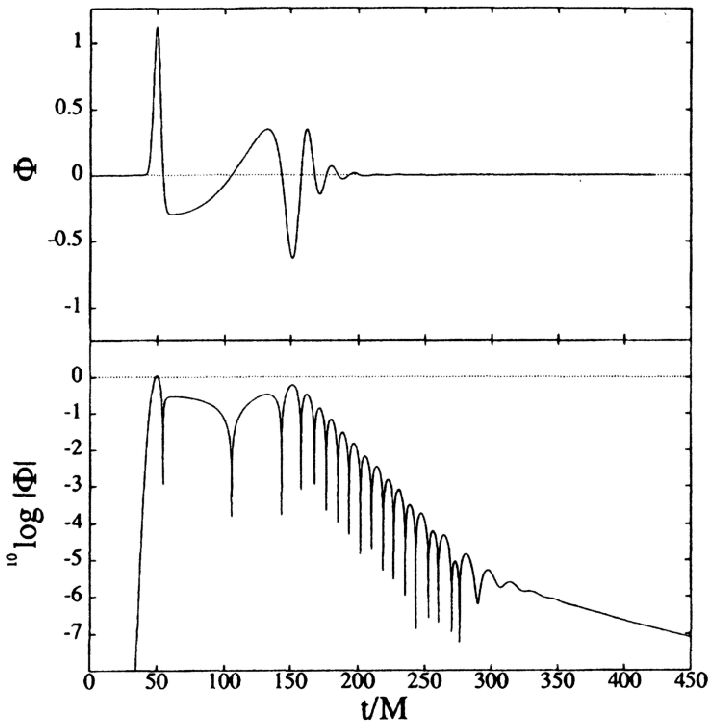


FIGURE 3.1 – Expérience de diffusion proposée par Vishveshwara : réponse d'un trou noir de Schwarzschild perturbé par un paquet d'onde gaussien scalaire. A $t/M = 50$, la première crête représente le paquet d'onde gaussien passant devant un observateur et se dirigeant vers le trou noir. Les modes quasinormaux dominent clairement à $t/M \approx 150$.

3.2.1 Définition

Nous pouvons noter, dès à présent, que le potentiel effectif de l'équation de Regge-Wheeler est un potentiel à "courte portée", i.e. en r^{-q} avec $q \geq 2$, pour un champ de masse nulle et correspond à une barrière de potentiel. Comme nous l'avons déjà signalé précédemment, cela signifie que le problème des trous noirs est en tout point similaire à celui d'une diffusion par une barrière de potentiel en théorie quantique.
De plus, nous introduisons les modes quasinormaux (QNMs) comme solutions de l'équation de Regge-Wheeler, elle-même indépendante de la nature des ondes absorbées par le trou noir. Plus précisément, les QNMs sont définis comme des solutions, de fréquence $\omega \in \mathbb{C}$ de l'équation de Regge-Wheeler vérifiant la condition de causalité d'ondes purement entrantes à l'horizon des évènements, et se comportant comme des ondes purement sortantes vers l'infini spatial. Comme précédemment, pour compléter notre similitude avec la diffusion en théorie quantique, les modes quasinormaux sont analogues aux résonances en théorie

quantique de la diffusion, nous permettant ainsi de rejoindre la remarque suggérée par Chandrasekhar signalée plus haut. De plus, en supposant une dépendance harmonique en $\exp[-i\omega t]$, une solution causale générale de l'équation de Regge-Wheeler, contrainte aux comportements asymptotiques précédents, s'écrit

$$\begin{aligned}\Phi_{\omega,\ell}(r_*) &\underset{r_*\to-\infty}{\sim} e^{-i\omega r_*},\\ \Phi_{\omega,\ell}(r_*) &\underset{r_*\to+\infty}{\sim} A_{\rm in}e^{-i\omega r_*} + A_{\rm out}e^{+i\omega r_*}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

D'après ces comportements, un mode quasinormal correspond à $A_{in} = 0$, i.e. une onde purement sortante à l'infini spatial et purement entrante à l'horizon. Sachant qu'un trou noir est un objet stable, il est nécessaire que le mode soit amorti pour un observateur situé en un point donné. En d'autres termes, $\mathrm{Im}\,\omega_n < 0$. Remarquons, de plus, que ces comportements asymptotiques laissent une liberté concernant le choix de la normalisation de la fonction d'onde. Aussi est-il nécessaire de préciser que, dans l'ensemble de ce manuscrit, nous n'aurons jamais besoin de spécifier un tel choix.
A cela, nous pouvons ajouter la remarque suivante qui nous servira dans la suite de notre travail. Considérons le wronskien de deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (3.11). Nous allons utiliser la solution ci-dessus Φ_ℓ, avec $\ell \in \mathbb{N}$, ainsi que son complexe conjugué. En évaluant ce wronskien à $r_* = \pm\infty$, nous obtenons

$$1 + |A_{\rm out}|^2 = |A_{\rm in}|^2 . \tag{3.15}$$

Si nous introduisons, comme nous le ferons pour l'étude des sections efficaces d'absorption, les amplitudes de transmission T_ℓ et de réflexion R_ℓ (déjà définie dans la partie précédente)

$$\begin{aligned}T_\ell &= \frac{1}{A_{\rm in}}\\ R_\ell &= \frac{A_{\rm out}}{A_{\rm in}}\end{aligned}$$

nous reconnaissons la relation usuelle rencontré en théorie de la diffusion

$$|T_\ell|^2 + |R_\ell|^2 = 1. \tag{3.16}$$

Ainsi, la "partie" de l'onde incidente qui n'est pas absorbée par le trou noir sera réfléchie vers l'infini spatial. Nous verrons que la réflexion est en fait une diffusion engendrée par l'existence d'un mode quasinormal, i.e. par un phénomène de résonance amortie, relatif au trou noir considéré. Il semble important de rappeler, ici, que tous ces concepts sont construits à partir de la matrice S, définie par ses éléments diagonaux $S_\ell(\omega)$ donnés, comme nous l'avons vu, par

$$S_\ell(\omega) = (-1)^{\ell+1}R_\ell(\omega). \tag{3.17}$$

Notons que, pour $\omega > 0$, les matrices T, R et S précédemment définies peuvent être prolongées analytiquement dans le plan CAM. Pour ce faire, nous transformons tout d'abord, le moment angulaire usuel ℓ en un nombre complexe $\lambda = \ell + 1/2$. Puis, nous construisons les prolongements analytiques $T_{\lambda-1/2}(\omega)$, $R_{\lambda-1/2}(\omega)$ et $S_{\lambda-1/2}(\omega)$ de $T_\ell(\omega)$, $R_\ell(\omega)$ et $S_\ell(\omega)$. Les pôles de Regge sont alors définis comme les pôles, dans le plan CAM, de la matrice T, i.e. vérifiant la condition $A_{\rm in} = 0$. Il est alors possible de montrer (cf. Refs. [4], [33] et [32]) que les pôles de Regge sont aussi des pôles de la matrice R (et donc de la matrice S), et, pour lesquels, le rapport $T_{\lambda-1/2}(\omega)/R_{\lambda-1/2}(\omega)$ reste régulier. En d'autres termes, les pôles de Regge sont les "valeurs propres" associés aux modes $\Phi_{\omega,\lambda-1/2}(r_*)$, solutions de l'équation de Regge-Wheeler, dont le comportement est purement entrant à l'horizon et purement sortant à l'infini spatial. Ces modes sont appelés "modes de Regge".
Le lecteur aura compris que la différence entre modes quasinormaux et modes de Regge réside principalement dans la structure duale des éléments $S_\ell(\omega)$ de la matrice S. Les premiers correspondent à un prolongement dans le plan ω-complexe, alors que les seconds à un prolongement dans le plan λ-complexe. Cette dualité pourra se révéler très utile dans la simplification de l'analyse des prolongements analytiques dans l'un ou l'autre des plans complexes. Enfin, nous terminerons en rappelant que les quantités $|T_\ell|^2$ et $|R_\ell|^2$ sont connues comme étant respectivement les probabilités de transmission et de réflexion relatifs au problème de diffusion considéré.

D'un point de vue astrophysique, la détection d'un tel mode sous une forme autre qu'un signal gravitationnel est peu probable. Plusieurs raisons sont envisageables. En effet, la réalité d'un champ scalaire de masse nulle n'est pour l'instant qu'une aide purement formelle à l'analyse des spectres des QNMs. De même, pour un champ vectoriel de type électromagnétique, la fréquence typique d'un mode quasinormal ne permettrait pas la propagation d'une telle onde sur de longues distances, à travers un milieu interstellaire. Ainsi, nous nous concentrerons pour cette analyse d'ordre de grandeur caractéristique à une perturbation gravitationnelle. Pour un trou noir de Schwarzschild, le mode quasinormal "fondamental" a une fréquence

$$\nu \sim 12\text{kHz}\left(\frac{M\odot}{M}\right) \tag{3.18}$$

tandis que le temps caractéristique d'amortissement est

$$\tau \sim 0.05\text{ms}\left(\frac{M}{M\odot}\right). \tag{3.19}$$

Les harmoniques ont toutes des temps caractéristiques d'amortissement très court. Par conséquent, les QNMs d'un trou noir sont des phénomènes de très courte durée. Nous pouvons toujours comparer un trou noir à d'autres systèmes résonants en définissant un facteur de qualité

$$Q \approx \frac{1}{2}\left|\frac{\text{Re}\,\omega_n}{\text{Im}\,\omega_n}\right|. \tag{3.20}$$

Nous anticipons quelque peu sur le spectre des fréquences complexes quasinormales pour affirmer que les modes quasinormaux correspondent grossièrement à $Q \approx \ell$, que l'on peut aisément comparer au cas d'une étoile à neutrons $Q \sim 1000$, ou bien encore d'un atome $Q \sim 10^6$. Ainsi, par simple comparaison, il apparaît très clairement que le trou noir de Schwarzschild est un oscillateur extrêmement pauvre.

Malgré cela, comme nous l'avons signalé précédemment, les QNMs représentent aujourd'hui la clé d'une possible observation directe d'un trou noir. Par conséquent, du fait de cette importance incontestable pour la future astronomie par ondes gravitationnelles, les QNMs ont fait l'objet de nombreuses études depuis plus de 40 ans. Plus particulièrement, depuis la dernière décennie, nous avons constaté une recrudescence des travaux relatifs aux QNMs motivée par des applications possibles aussi diverses et variées, au-delà du point de vue purement astrophysique, comme les modèles analogues de gravité, la gravité quantique, la théorie des cordes et les sujets connexes tels que la correspondance AdS/CFT, les théories alternatives de gravité, la quantification de la surface de l'horizon des évènements des trous noirs, etc... Nous invitons vivement le lecteur à consulter les articles de revues consacrés aux QNMs jusqu'en 1999, comme l'article de Kokkotas et Schmidt [77] ou bien encore celui de Nollert [98]. Nous recommandons également l'article, bien plus récent et très complet, écrit par Berti, Cardoso et Starinets [11] pour le lecteur qui souhaiterait approfondir certains aspects précis qui ne font pas parti de notre travail.

3.2.2 Bref historique : de CAM aux QNMs

Un des premiers articles relatifs aux QNMs et à leur interprétation physique, a été écrit par Press [102], dans lequel il identifie la résonance gravitationnelle du trou noir de Schwarzschild à ses "oscillations libres", article dans lequel il conclut par ailleurs " *The essential point of this letter is that a black hole can be a dynamical entity rather than merely an arena for dynamics*". Peu de temps après, Goebel [60] a suggéré, toujours pour le trou noir de Schwarzschild, une interprétation physique intuitive associée aux QNMs. Selon Goebel, les QNMs peuvent être décrit en termes d'ondes gravitationnelles en orbites spirales au voisinage de l'orbite circulaire instable des particules de masse nulle (photons ou gravitons) localisée en $r = 3M$ et dont l'amortissement est due à un rayonnement d'énergie vers l'infini spatial. Cette formidable interprétation a été développée par d'autres auteurs dans le cadre de diverses théories des champs sur des géométries définies par différents trous noirs, en utilisant une approximations eikonale, i.e. avec des outils basés sur les notions de géodésiques et de *faisceau de rayons géométriques* (nous renvoyons le lecteur aux références Refs. [50, 91, 113, 3, 127, 17, 44, 68] ainsi que Ref. [106]). Cette approche leur a permis d'obtenir une approximation analytique des premiers termes dominants intervenant dans

les développements asymptotiques des expressions des fréquences complexes caractéristiques de divers trous noirs à partir d'une interprétation en terme de particules de masse nulle "piégées" au voisinage des géodésiques de genre lumière circulaires et instables (cf. Ref. [17] où la relation entre l'exposant de Lyapunov associé au mouvement géodésique est clairement mis en évidence).

Une réalisation potentiellement plus riche de l'interprétation des QNMs par Goebel, qui n'est pas restreinte à des considérations purement géométriques mais fondée sur une théorie des champs et qui est, de plus, capable d'aller au-delà des termes dominants, cités plus haut, a également été formulée [33, 31, 32] (voir également Ref. [44]). Cette nouvelle approche utilise les techniques de la théorie CAM, introduite dans la section 2.2 du chapitre 2.1 de la première partie de ce manuscrit, qui, nous l'avons vu, joue un rôle central dans la description semiclassique des processus de diffusion. En effet, comme l'ont remarqué Chandrasekhar et d'autres co-auteurs [19] (se reporter également à Ref. [49]), la théorie des perturbations des trous noirs peut être formulée comme un problème de diffusion résonante. De ce fait, le concept de matrice S ainsi que toutes les notions fondamentales de la théorie de la diffusion résonante et les techniques développées dans ce cadre sont naturellement introduites et mises au centre de toute leur physique. C'est donc le cas, en particulier, de la notion de pôles de Regge et des techniques issues de la théorie CAM, qui permettent notamment d'obtenir une compréhension semiclassique/à hautes énergies des phénomènes.

Il y a quelques années, la méthode CAM et les techniques associées aux pôles de Regge [97] étaient utilisés, pour la première fois en physique gravitationnelle, par Chandrasekhar et Ferrari [20] dans leur travaux relatifs aux oscillations non-radiales des étoiles relativistes. Le cadre général pour l'application de la théorie CAM au trou noir de Schwarzschild a été développé par Andersson et Thylwe [4]. Peu de temps après, Andersson a utilisé ces mêmes outils pour interpréter la "*gloire*" du trou noir de Schwarzschild [2]. Nous avons vu dans la première partie de ce manuscrit qu'au travers de la théorie CAM a émergé un concept important, celui "d'onde de surface". Ces "ondes de surface" nous permettent d'avoir une description des effets diffractifs en théorie de la diffusion. Dans ce contexte, Andersson a montré, pour un trou noir de Schwarzschild de masse M, que des familles "d'ondes de surfaces" (comme nous l'avons déjà vu, chaque onde étant associée à un pôle de Regge des éléments de matrice S) se propagent dans un proche voisinage de l'orbite circulaire instable des particules de masse nulle située à $r = 3M$ (se reporter également à Ref. [33], ainsi qu'au chapitre 4 consacré au trou noir de Schwarzschild). Mis à part ces travaux, l'approche CAM pour le problème de diffusion résonante en physique des trous noirs a été négligée au profit des modes quasinormaux, pour lesquels la réponse dynamique à une perturbation extérieure est expliquée en termes de fréquences de résonance. L'objet de cette seconde partie est donc de montrer la connexion entre modes quasinormaux et "ondes de surface" ainsi que les conséquences analytiques et physiques du formalisme CAM appliqué à la physique des trous noirs à hautes énergies. Nous introduirons ces concepts à travers l'exemple du trou noir de Schwarzschild, résultats que nous généraliserons par la suite aux trous noirs statiques à symétrie sphérique.

Chapitre 4

L'exemple du trou noir de Schwarzschild

Dans ce chapitre, nous allons adapter l'ensemble des outils relatifs à un problème de diffusion résonante (introduits dans la première partie de ce manuscrit), et en particulier la théorie CAM, au cas de la diffusion d'un champ scalaire de masse nulle par un trou noir. Nous avons choisi de commencer par adapter et définir toutes les notions nécessaires dans le cas particulier du trou noir de Schwarzschild. Nous obtiendrons ainsi une interprétation physique semiclassique intuitive des QNMs. Plus précisément, le lien entre les éléments de matrice S, les pôles de Regge et les fréquences quasinormales sera clairement énoncé. Nous présenterons, les conséquences de l'approximation WKB pour l'obtention des QNMs qui nous permettra d'avoir accès à une expression analytique des pôles de Regge et par là-même de définir le lieu de propagation des "ondes de surface", concept naturellement sous-jacent à la théorie CAM. Nous rejoindrons donc l'interprétation des QNMs proposée par Goebel en 1972 [60]. Pour information, concernant le trou noir de Schwarzschild, le lecteur pourra trouver les principaux résultats exposés dans ce chapitre dans l'article de Y. Decanini et A. Folacci [32]. Enfin, signalons dès à présent que, dans les chapitres suivants, nous généraliserons ce formalisme ainsi que les résultats associés aux cas des trous noirs statiques à symétrie sphérique pour un espace-temps de dimension arbitraire.

4.1 Introduction et résultats semiclassiques

Commençons par rappeler cette première solution des équations d'Einstein dans le vide, correspondant à une géométrie statique à symétrie sphérique à quatre dimensions, i.e. le trou noir de Schwarzschild. La région extérieure d'un trou noir de Schwarzschild de masse M est habituellement définie comme la variété $\mathcal{M} =]-\infty, +\infty[_t \times]2M, +\infty[_r \times S^2$ dont la métrique est donnée par

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\sigma_2^2 \tag{4.1}$$

où $\mathrm{d}\sigma_2^2$ représente la métrique définie sur la 2-sphère unité S^2.

La méthode CAM est basée, nous l'avons vu, sur la structure duale de la matrice S associée à un problème de diffusion donné. Nous avons vu que les éléments de matrice S sont fonctions de la fréquence ω et de l'indice de moment angulaire ℓ. Nous pouvons dès lors prolonger analytiquement les éléments de matrice S aussi bien dans le plan ω-complexe que dans le plan λ-complexe, après avoir effectué le changement de variable $\ell \to \lambda - 1/2$. Dans le cadre d'un problème de diffusion résonante, le lecteur aura compris que pour interpréter les modes quasinormaux, nous sommes particulièrement intéressés par les pôles (de Regge) des éléments de matrice S (cf. partie 3.2.1 de la section 3.2 du chapitre 3). Dans le plan ω-complexe, les pôles des éléments de matrice S, situés dans le quatrième quadrant, sont les fréquences complexes des modes quasinormaux. En d'autres termes, le comportement des éléments de matrice S, dans ce plan ω-complexe, nous permet d'étudier les phénomènes de résonances. La structure dans le plan λ-complexe nous permet, comme nous l'avons déjà vu, en utilisant les déformations de

contour d'intégration, le théorème de Cauchy et les éléments de l'analyse asymptotique, d'obtenir une description semiclassique du processus de diffusion en termes de rayons diffractés (cf. première partie de ce manuscrit). Dans ce contexte, les pôles (de Regge) des éléments de matrice S, appartenant au premier quadrant du plan λ-complexe [4], sont associés à la diffraction. Ainsi, il semble naturel que lorsqu'une connexion entre ces deux facettes des éléments de matrice S est établie, les aspects résonants du processus de diffusion peuvent alors être interprété semiclassiquement.
Plus précisément, pour les problèmes de diffusion présentant une symétrie sphérique, la connexion entre la diffusion résonante et l'interprétation en termes de pôles de Regge est une conséquence directe des considérations qui suivent :

- (i) Pour une valeur $\ell \in \mathbb{N}$ donnée, les résonances, i.e. les pôles des éléments $S_\ell(\omega)$, sont de la forme $\omega_{\ell n} = \omega_{\ell n}^{(0)} - i\Gamma_{\ell n}/2$, avec $n \in \mathbb{N}$. De plus, dans un très proche voisinage d'un pôle $\omega_{\ell n}$, les éléments $S_\ell(\omega)$ ont une forme de type Breit-Wigner, i.e.

$$S_\ell(\omega) \propto \frac{\Gamma_{\ell n}/2}{\omega - \omega_{\ell n}^{(0)} + i\Gamma_{\ell n}/2} \tag{4.2}$$

- (ii) Pour une valeur $\omega > 0$ donnée, les pôles de Regge, i.e. les pôles des éléments $S_{\lambda-1/2}(\omega)$, peuvent être exprimés comme des fonctions dépendant de la fréquence, $\lambda_n(\omega)$. Comme nous l'avons vu dans le chapitre consacré à la théorie CAM, les courbes tracées, pour $\omega > 0$, dans le plan λ-complexe correspondant aux fonctions $\lambda_n(\omega)$ sont appelées les trajectoires de Regge. Elles nous permettent d'interpréter les pôles de Regge en termes de rayons diffractés, que nous avons également appelés "chemins pseudoclassiques", ou bien encore en termes "d'onde de surface" : $\mathrm{Re}\lambda_n(\omega)$ définit la relation de dispersion de la $n^{\text{ème}}$ "onde de surface", tandis que $\mathrm{Im}\lambda_n(\omega)$ est associée à son amortissement.
- (iii) A partir des trajectoires de Regge, il est alors possible de construire semiclassiquement le spectre de résonance. Pour cela, il nous faut utiliser les relations semiclassiques définies en fin de première partie de ce manuscrit. Nous rappelons que la première, semblable à une condition de quantification "à la Bohr-Sommerfeld", permet d'obtenir les fréquences d'excitation $\omega_{\ell n}^{(0)}$ des résonances générées par la $n^{\text{ème}}$ "onde de surface" :

$$\mathrm{Re}\lambda_n\left(\omega_{\ell n}^{(0)}\right) = \ell + 1/2, \qquad \ell \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

  La seconde, quant à elle, nous permet d'obtenir les "largeurs" dans le domaine fréquentiel de ces mêmes résonances

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \left.\frac{\mathrm{Im}\,\lambda_n(\omega)[\mathrm{d}/\mathrm{d}\omega\,\mathrm{Re}\,\lambda_n(\omega)]}{[\mathrm{d}/\mathrm{d}\omega\,\mathrm{Re}\,\lambda_n(\omega)]^2 + [\mathrm{d}/\mathrm{d}\omega\,\mathrm{Im}\,\lambda_n(\omega)]^2}\right|_{\omega=\omega_{\ell n}^{(0)}}. \tag{4.4}$$

  Cette dernière relation se réduit, dans le domaine fréquentiel où la condition $|\mathrm{d}/\mathrm{d}\omega\,\mathrm{Re}\lambda_n(\omega)| \gg |\mathrm{d}/\mathrm{d}\omega\,\mathrm{Im}\lambda_n(\omega)|$ est vérifiée, à

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \left.\frac{\mathrm{Im}\,\lambda_n(\omega)}{[\mathrm{d}/\mathrm{d}\omega\,\mathrm{Re}\,\lambda_n(\omega)]}\right|_{\omega=\omega_{\ell n}^{(0)}}. \tag{4.5}$$

Dans les articles Refs. [4, 2, 33], en utilisant les techniques relatives à la théorie CAM et aux pôles de Regge, les auteurs ont établi que les QNMs (faiblement amortis) du trou noir de Schwarzschild correspondent à des résonances du type Breit-Wigner générées par une famille "d'ondes de surface" localisées dans un très proche voisinage de la sphère de photons située à $r = 3M$. Ils ont également pu construire numériquement, à partir des trajectoires de Regge, le spectre des fréquences complexes des QNMs. En ce sens, ils ont pu rejoindre l'interprétation intuitive de Goebel [60] proposée en 1972, que nous avons mentionnée précédemment. Même si d'autres réalisations de l'interprétation de Goebel ont été développées Refs. [50, 91, 113, 3, 127, 17], celles-ci restent inscrites dans le cadre d'une "physique géodésique" basée sur des rayons géométriques, alors que l'analyse CAM apporte naturellement un regard potentiellement plus riche basé sur une physique ondulatoire.

4.1.1 Des pôles de Regge aux modes quasinormaux

Nous avons déjà vu que l'équation d'onde pour un champ de spin $s = 0, 1$ ou 2 correspondant respectivement à un champ scalaire, électromagnétique ou à des perturbations gravitationnelles, se réduit à l'équation de Regge-Wheeler

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r_*^2} + \omega^2 - V_\ell(r)\right]\Phi_\ell(r) = 0 \tag{4.6}$$

pour laquelle nous avons supposé une dépendance temporelle de type harmonique, i.e. en $\exp[-i\omega t]$. De plus, r_* est la *coordonnée de la tortue*, précédemment définie, et $V_\ell(r)$ est le potentiel (de Regge-Wheeler) donné par

$$V_\ell(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2(1-s^2)M}{r^3}\right]. \tag{4.7}$$

Pour un indice de moment angulaire ℓ donné, les éléments $S_\ell(\omega)$ seront introduits en recherchant les modes-solutions de l'équation de Regge-Wheeler (4.6) dont les comportements asymptotiques correspondent à une onde purement entrante à l'horizon des évènements en $r = 2M$

$$\Phi_\ell(r) \underset{r_*\to-\infty}{\sim} e^{-i\omega r_*} \tag{4.8}$$

et, à l'infini spatial, à une onde dont le comportement s'écrit

$$\Phi_\ell(r) \underset{r_*\to+\infty}{\sim} \frac{1}{T_\ell(\omega)}e^{-i\omega r_* + i\ell\pi/2} - \frac{S_\ell(\omega)}{T_\ell(\omega)}e^{+i\omega r_* - i\ell\pi/2}. \tag{4.9}$$

Notons que la relation $S_\ell = (-1)^{\ell+1}R_\ell$ se traduit, ici, dans les conditions aux limites écrites ci-dessus, par l'introduction d'une phase de type $\pm i\ell\pi/2$. De plus, il est important de rappeler que pour $\omega > 0$, les pôles de Regge de la matrice S correspondent aux valeurs complexes λ pour lesquelles $S_{\lambda-1/2}(\omega)$ et $T_{\lambda-1/2}(\omega)$ ont un pôle simple mais $S_{\lambda-1/2}(\omega)/T_{\lambda-1/2}(\omega)$ est régulier [33]. Ces pôles, notés $\lambda_n(\omega)$ seront différenciés les uns des autres par l'indice $n = 1, 2, \ldots$. En se référant à la discussion de la section 3.2 du chapitre 3, les modes quasinormaux sont les solutions de l'équation de Regge-Wheeler (4.6) correspondant à une onde purement entrante à l'horizon et à une onde purement sortante à l'infini spatial. Sachant que l'on travaille, ici, dans le plan λ-complexe, il s'agit, comme nous l'avons signalé dans le chapitre précédent, de s'intéresser aux "modes de Regge" du trou noir de Schwarzschild.

4.1.2 Détermination des pôles de Regge : l'approche WKB

En général, il n'est pas possible de résoudre exactement l'équation de Regge-Wheeler (4.6), tout comme l'équation de Schrödinger. Cependant, notons qu'il existe une résolution analytique exacte de l'équation de Regge-Wheeler donnée par Fiziev en termes de fonctions de Heun [52]. Mais le formalisme est bien trop lourd et une interprétation physique simple et intuitive est, pour l'heure, toujours absente. Par conséquent, nous ne pouvons obtenir que des approximations analytiques pour les pôles de Regge ainsi que pour les fréquences complexes quasinormales. Par exemple, l'approche WKB, développée dans le contexte général des problèmes aux valeurs propres (pour plus de détails, se reporter à Ref. [6]) a été adaptée pour déterminer les QNMs du trou noir de Schwarzschild par Schutz et Will [108] et par Will et Iyer [72, 71], où les auteurs ont étendue l'approche WKB jusqu'à l'ordre 3. Signalons, de plus, que dans Ref. [32], les auteurs ont utilisé les résultats de Schutz, Will et Iyer pour déterminer les pôles de Regge du trou noir de Schwarzschild. En effet, les modes de Regge et les modes quasinormaux vérifient la même équation d'onde avec les mêmes conditions aux limites mais avec des interprétations différentes pour l'indice de moment angulaire et la fréquence. Ainsi en utilisant l'approximation WKB à l'ordre 3 [72, 71] pour les modes de Regge, la formule de raccordement nous permet de déduire que, pour $\omega > 0$, les pôles de Regge λ sont les solutions complexes de l'équation

$$\omega^2 = \left[V_0(\lambda) + \left[-2V_0^{(2)}(\lambda)\right]^{1/2}\overline{\Lambda}(\lambda, n)\right] - i\,\alpha(n)\left[-2V_0^{(2)}(\lambda)\right]^{1/2}[1 + \overline{\Omega}(\lambda, n)] \tag{4.10}$$

avec $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ici,

$$\overline{\Lambda}(\lambda, n) = \frac{1}{\left[-2V_0^{(2)}(\lambda)\right]^{1/2}} \left[\frac{1}{8} \frac{V_0^{(4)}(\lambda)}{V_0^{(2)}(\lambda)} \left(\frac{1}{4} + \alpha(n)^2 \right) - \frac{1}{288} \left(\frac{V_0^{(3)}(\lambda)}{V_0^{(2)}(\lambda)} \right)^2 \left(7 + 60\,\alpha(n)^2 \right) \right] \tag{4.11a}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}(\lambda, n) = \frac{1}{\left[-2V_0^{(2)}(\lambda)\right]} \Bigg[& \frac{5}{6912} \left(\frac{V_0^{(3)}(\lambda)}{V_0^{(2)}(\lambda)} \right)^4 \left(77 + 188\,\alpha(n)^2 \right) \\ & - \frac{1}{384} \left(\frac{\left[V_0^{(3)}(\lambda)\right]^2 V_0^{(4)}(\lambda)}{\left[V_0^{(2)}(\lambda)\right]^3} \right) \left(51 + 100\,\alpha(n)^2 \right) + \frac{1}{2304} \left(\frac{V_0^{(4)}(\lambda)}{V_0^{(2)}(\lambda)} \right)^2 \left(67 + 68\,\alpha(n)^2 \right) \\ & + \frac{1}{288} \left(\frac{V_0^{(3)}(\lambda) V_0^{(5)}(\lambda)}{\left[V_0^{(2)}(\lambda)\right]^2} \right) \left(19 + 28\,\alpha(n)^2 \right) - \frac{1}{288} \left(\frac{V_0^{(6)}(\lambda)}{V_0^{(2)}(\lambda)} \right) \left(5 + 4\,\alpha(n)^2 \right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{4.11b}$$

Dans les expressions (4.10) et (4.11), nous avons introduit les notations suivantes

$$\alpha(n) = n - 1/2 \tag{4.12}$$

et, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$V_0^{(p)}(\lambda) = \frac{d^p}{dr_*{}^p} V_{\lambda - 1/2}(r_*) \Big|_{r_* = (r_*)_0} \tag{4.13}$$

où $(r_*)_0$ est le maximum de la fonction $V_{\lambda-1/2}(r_*)$.

Pour résoudre l'équation (4.10), nous devons exprimer les développements asymptotiques pour $|\lambda| \to +\infty$ de $V_0(\lambda)$, de $\left[-2V_0^{(2)}(\lambda)\right]^{1/2}$ ainsi que des divers rapports présents dans les équations (4.11a) et (4.11b). En d'autres termes, la méthode de résolution consiste, tout d'abord, à écrire un développement de $(r_*)_0$ en puissance de λ. Nous déduisons ensuite les développements asymptotiques en puissance de λ pour le potentiel de Regge-Wheeler et ses dérivées successives, i.e. $V_0^{(p)}(\lambda)$ avec $p \in \mathbb{N}$. Nous pouvons alors résoudre l'équation (4.10) de manière perturbative en supposant $|\lambda| \gg 1$ et $\mathrm{Re}\lambda \gg \mathrm{Im}\lambda$. Ainsi, après avoir calculé les quantités (4.11), l'expression (4.10) se ramène à une équation polynomiale en λ. Pour la résoudre, nous décomposons le moment angulaire complexe en partie réelle et imaginaire. L'approximation $\mathrm{Re}\lambda_n \gg \mathrm{Im}\lambda_n$ permet alors d'obtenir $\mathrm{Im}\lambda_n$ sous la forme $\mathrm{Im}\lambda_n = \alpha(n)(1 + \epsilon_n)$, avec $\epsilon_n \ll 1$, puis de déduire une expression pour $\mathrm{Re}\lambda$.

Finalement, nous obtenons pour l'expression des pôles de Regge

$$\lambda_n(\omega) \approx [27(M\omega)^2 + a_n + 2\alpha(n)^2 \epsilon_n(\omega)]^{1/2} + i\alpha(n)[1 + \epsilon_n(\omega)] \tag{4.14}$$

où

$$a_n = \frac{2}{3} \left[\frac{5}{12} \alpha(n)^2 + \frac{115}{144} - 1 + s^2 \right] \tag{4.15}$$

et

$$\epsilon_n(\omega) = \frac{b_n}{27(M\omega)^2 + a_n + \alpha(n)^2} \tag{4.16}$$

avec

$$b_n = -\frac{4}{9} \left[\frac{305}{1728} \alpha(n)^2 + \frac{5555}{6912} - 1 + s^2 \right] \tag{4.17}$$

Il est important de signaler que l'approximation donnée par l'approche WKB reste valable dans un large domaine fréquentiel qui n'est pas restreint à $\omega \to \infty$. En effet, pour dériver l'équation (4.10), dans [6, 108, 72, 71], les auteurs ont considéré comme paramètre de perturbation, pour la méthode WKB,

la "distance" $\epsilon^{1/2}$ (avec formellement $\epsilon \to 0$) séparant les points tournants de (4.6), i.e. les racines de $\omega^2 - V_\ell(r^*)$ de la localisation du maximum de cette même fonction $\omega^2 - V_\ell(r^*)$, au lieu du paramètre $1/\omega$ avec $\omega \to +\infty$.

Signalons dès à présent que le développement asymptotique en puissance de λ pour la position du maximum du potentiel de Regge-Wheeler montre qu'il est situé au très proche voisinage de la valeur $r = 3M$. Nous reviendrons sur ce constat dans la théorie générale lorsque nous comparerons les comportements asymptotiques de ce potentiel avec le potentiel effectif pour $\ell \gg 1$. Ainsi, nous sommes naturellement conduit, par l'approche WKB, à "localiser" les "ondes de surface" dans une région imprécise, "proche" de la sphère de photons du trou noir de Schwarzschild, située en $r = 3M$. Le lecteur aura remarqué que nous utilisons avec précaution les termes "localisation" et "onde de surface" car, dans le contexte de la physique des trous noirs, le lieu de la propagation de ces "ondes de surface" n'est pas définie aussi clairement comme ce peut être le cas en électromagnétisme, en mécanique des fluides, etc... Nous savons seulement par l'approche WKB, et par là-même, par le développement asymptotique de $(r_*)_0$, que le lieu de propagation se situe, comme nous en avons pris l'habitude dans ce manuscrit, dans un *très proche voisinage de la sphère de photons*. Cette question reste, à l'heure actuelle, encore ouverte.

Néanmoins, nous invitons vivement le lecteur à comparer les résultats WKB avec les valeurs obtenues numériquement dans l'article [32], afin de voir la remarquable précision qu'apporte l'approche WKB. Ainsi, nous pouvons affirmer que les résultats WKB donnent une simple et surtout très bonne approximation des pôles de Regge. Notons qu'il est possible de simplifier davantage l'expression (4.14) pour l'écrire sous la forme, plus élégante,

$$\lambda_n(\omega) = \left[3\sqrt{3}\,M\omega + \frac{\sqrt{3}\,a_n}{18\,M\omega}\right] + i(n-1/2)\left[1 + \frac{b_n}{27(M\omega)^2}\right] + \underset{\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\omega^3}\right). \tag{4.18}$$

Bien entendu, cette dernière expression fournit des résultats précis pour les très hautes fréquences et ne doit donc pas être utilisée en dehors de ce domaine. Cependant, elle a le mérite d'exhiber des expressions simples pour la relation de dispersion ainsi que pour "l'amortissement" des "ondes de surface". Il est intéressant de noter que si l'on s'arrête au premier terme du développement de (4.18), le principe de localisation qui s'écrit $L = bp$, devient, suite au formalisme relatif aux pôles de Regge, $\mathrm{Re}\lambda_n(\omega) = \omega\, b$ (cf. Ref. [2]). Nous obtenons alors, d'après (4.18), un paramètre d'impact $b = 3\sqrt{3}M$, qui correspond au paramètre d'impact critique associé à une particule de masse nulle et d'énergie ω qui se retrouve piégée sur la sphère de photons. Nous retrouvons, de façon plus heuristique cette fois, une "localisation" des "ondes de surface" en $r = 3M$. Cependant, cela reste une interprétation semiclassique formellement valable pour $\omega \to +\infty$.
Dans ce contexte, il reste néanmoins très intéressant de réécrire la partie résonante de l'amplitude de diffusion associée au trou noir de Schwarzschild qui, comme nous l'avons vu à la fin de la première partie de ce manuscrit, est une superposition de termes de la forme $\exp[i(\lambda_n(\omega)\theta - \omega t)]$, de la façon suivante

$$\exp[-k_n''(\omega)\mathcal{L}]\exp[i(k_n'(\omega)\mathcal{L} - \omega t)] \tag{4.19}$$

où $\mathcal{L} = (3M)\theta$ est la longueur d'arc d'ouverture θ mesurée sur la sphère de photons. Ici, $k_n'(\omega) = \mathrm{Re}\lambda_n(\omega)/(3M)$ est le nombre d'onde, ou la relation de dispersion, de la $n^{\text{ème}}$ "onde de surface", tandis que $k_n''(\omega) = \mathrm{Im}\lambda_n(\omega)/(3M)$ est sa constante d'amortissement. Au premier ordre, la relation de dispersion est linéaire mais si nous allons aux ordres supérieurs, cette relation est clairement non-linéaire (cf. (4.14) et (4.18)). Ce dernier résultat pourrait avoir des conséquences en lensing gravitationnel fort. A cause de l'incertitude sur la "localisation des "ondes de surface", cette analyse peut cependant être incorrecte. En effet, si nous devons tenir compte de la valeur finie de la fréquence d'un photon, les corrections non-linéaires pourrait introduire un décalage de la localisation de l'orbite circulaire instable du photon. Il serait alors nécessaire de modifier légèrement l'expression (4.19) et plus précisément l'expression de la longueur d'arc.

Quoiqu'il en soit, à partir des relations semiclassiques (4.3) et (4.5) et de l'expression des pôles de Regge (4.14), nous retrouvons les expressions analytiques des fréquences complexes des modes quasinormaux. Ainsi, pour de grandes valeurs de ℓ nous obtenons

$$\omega_{\ell n}^{(0)} = \frac{1}{3\sqrt{3}M}\left[(\ell+1/2) - \frac{a_n}{2\ell} + \frac{a_n}{4\ell^2} + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell^3}\right)\right] \tag{4.20a}$$

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \frac{n-1/2}{3\sqrt{3}M}\left[1 + \frac{c_n}{2\ell^2} + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell^3}\right)\right] \tag{4.20b}$$

avec $\ell \in \mathbb{N}$ et $n = 1, 2, \ldots$. Ici,

$$c_n = a_n + 2b_n = -\frac{2}{9}\left[-\frac{235}{432}\alpha(n)^2 + \frac{1415}{1728} - 1 + s^2\right]. \tag{4.21}$$

Notons au passage que, si l'on souhaite retrouver l'interprétation géométrique proposé dans Ref. [17], le premier terme de l'expression (4.20a) peut être exprimé en fonction de la vitesse angulaire évaluée en $r = 3M$, i.e. sur l'orbite circulaire instable, tandis que le premier terme de (4.20b) est lié à l'exposant de Lyapunov correspondant.

4.2 Section efficace d'absorption - Conséquences analytiques de l'approche CAM

4.2.1 Introduction

Dans un récent article [30], en utilisant les techniques relatives aux pôles de Regge, Y. Decanini, G. Esposito-Farèse et A. Folacci ont développé une nouvelle description universelle du problème d'absorption pour un champ scalaire de masse nulle se propageant dans une géométrie définie par des trous noirs statiques à symétrie sphérique, possédant une sphère de photons, pour un nombre de dimension d'espace-temps arbitraire. Ils ont montré qu'en particulier, la section d'absorption à hautes énergies est très bien approchée, dans le régime eikonal, par une somme de deux contributions : la section d'absorption géométrique associée à la sphère de photons du trou noir (en d'autres termes, la section efficace de capture du trou noir) et une fonction sinus cardinal, dépendant des caractéristiques géométriques des géodésiques nulles instables (période orbitale, exposant de Lyapunov) appartenant à la sphère de photons. Ils ont de plus fourni une analyse rigoureuse aussi bien qu'une description physique très claire d'un résultat bien connu en physique des trous noirs (voir, e.g., Refs. [107, 66, 73, 74, 47, 62, 26, 43, 25]), le fait qu'en général, aux hautes énergies, la section d'absorption d'un trou noir oscille autour d'une valeur constante, expliquant, avec ce même formalisme, l'existence de cette valeur limite et des fluctuations.

Ici, à partir du formalisme CAM, déjà développé dans Ref. [30], et en utilisant de nouveaux développements asymptotiques pour les résidus associés aux pôles du facteur de corps gris, nous allons au-delà de la description eikonale de la section d'absorption à hautes énergies pour le trou noir de Schwarzschild. Rappelons au passage que les pôles du facteur de corps gris sont les pôles du coefficient de transmission qui sont donc, ni plus ni moins, que les pôles de Regge. Plus précisément, à partir d'une analyse numérique, nous montrerons tout d'abord que, au-delà du régime eikonal, la section d'absorption du trou noir de Schwarzschild présente une *structure fine* simple. Nous la décrirons alors analytiquement et nous l'interpréterons en termes géométriques.

Pour terminer, nous considérerons quelques conséquences possibles de ces résultats et nous mettrons numériquement en évidence, pour le trou noir de Schwarzschild, l'existence d'une *structure hyperfine* plus complexe, si l'on va au-delà de la *structure fine*, mais dont les conséquences physiques pourraient ne pas avoir d'importance notable.
Enfin, nous renvoyons le lecteur à l'Annexe plus technique C.1, dans laquelle nous donnerons quelques développements asymptotiques pour les pôles de Regge ainsi que pour les résidus associés du facteur de corps gris, qui sont d'une grande utilité pour décrire analytiquement la structure fine et qui pourraient, nous le pensons, aider à analyser cette *structure hyperfine*.

Nous choisirons, ici, un système d'unités pour lequel $\hbar = c = G = 1$ et nous supposerons à l'instar de ce qui précède, une dépendance harmonique en temps pour les champs scalaires, du type $\exp[-i\omega t]$.

4.2.2 Structure fine de la section d'absorption à hautes énergies pour le trou noir de Schwarzschild

Nous commencerons simplement par rappeler quelques considérations générales, relatives (i) au trou noir de Schwarzschild et (ii) au champ scalaire défini sur ce *background* gravitationnel, que nous utiliserons très souvent dans cette section. Nous en profiterons alors pour (ré-)introduire nos notations usuelles :

– (i) Nous rappelons tout d'abord que la région extérieure d'un trou noir de Schwarzschild de masse M est habituellement définie comme la variété $\mathcal{M} =]-\infty, +\infty[_t \times]2M, +\infty[_r \times S^2$ dont la métrique est définie par $\mathrm{d}s^2 = -(1-2M/r)\mathrm{d}t^2 + (1-2M/r)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\sigma_2^2$. Ici, $\mathrm{d}\sigma_2^2$ représente, nous le rappelons, la métrique définie sur la 2-sphère unité S^2. Notons que, en lieu et place de la coordonnée radiale de Schwarzschild standard r, il est parfois plus simple et plus utile d'utiliser la *coordonnée de la tortue* $r_*(r)$, introduite précédemment, définie par $\mathrm{d}r/\mathrm{d}r_* = (1-2M/r)$ et qui réalise une bijection de $]2M, +\infty[$ dans $]-\infty, +\infty[$. Nous signalons également que ce trou noir possède une sphère de photons située à $r = 3M \equiv r_c$, correspondant à un paramètre d'impact critique donné par $b_c = 3\sqrt{3}M$ (voir, e.g., Chap. 25 de Ref. [94]). Par conséquent, la section efficace d'absorption géométrique du trou noir est $\sigma_{\mathrm{geo}} = \pi b_c^2 = 27\pi M^2$.

– (ii) Notons, à nouveau, que l'équation d'onde pour un champ scalaire de masse nulle se propageant dans la géométrie de Schwarzschild se réduit, après séparation des variables radiale et angulaires, et après avoir introduit les fonctions d'onde partielles radiales $\phi_{\omega\ell}(r)$, à l'équation de Regge-Wheeler avec un potentiel $V_\ell(r_*)$, correspondant cette fois-ci, à un spin $s = 0$

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_{\omega\ell}}{\mathrm{d}r_*^2} + \left[\omega^2 - V_\ell(r_*)\right]\phi_{\omega\ell} = 0 \tag{4.22}$$

et

$$V_\ell(r) = \left(\frac{r-2M}{r}\right)\left[\frac{(\ell+1/2)^2 - 1/4}{r^2} + \frac{2M}{r^3}\right]. \tag{4.23}$$

Ici, $\omega > 0$ est la fréquence du mode-solution considéré tandis que $\ell \in \mathbb{N}$ est l'indice de moment angulaire habituel. Remarquons au passage que pour ω et ℓ fixés, l'amplitude radiale $\phi_{\omega\ell}(r_*)$ satisfait les conditions aux limites

$$\phi_{\omega\ell}(r_*) \sim \begin{cases} T_\ell(\omega)e^{-i\omega r_*} & \text{for } \; r_* \to -\infty, \\ \\ e^{-i\omega r_*} + R_\ell(\omega)e^{+i\omega r_*} & \text{for } \; r_* \to +\infty \end{cases} \tag{4.24}$$

où $T_\ell(\omega)$ et $R_\ell(\omega)$ sont respectivement les coefficients de transmission et de réflexion relatifs au problème de diffusion par le trou noir de Schwarzschild (cf. section 3.2.1). Enfin, nous rappelons que le facteur de corps gris (la probabilité d'absorption par le trou noir de particules d'énergie ω et de moment angulaire ℓ) est défini par

$$\Gamma_\ell(\omega) = |T_\ell(\omega)|^2 \tag{4.25}$$

Ainsi, pour le champ scalaire de masse nulle considéré ici, la section efficace d'absorption du trou noir peut être exprimée en fonction du facteur de corps gris selon (cf. [22, 55])

$$\sigma_{\mathrm{abs}}(\omega) = \frac{\pi}{\omega^2}\sum_{\ell=0}^{+\infty}(2\ell+1)\Gamma_\ell(\omega). \tag{4.26}$$

Notons que la série (4.26) peut être évaluée avec une très grande précision en résolvant numériquement le problème défini par (4.22), (4.23) et (4.24). Cependant, ce type de séries, comme nous l'avons déjà signalé, converge lentement. Ainsi son évaluation devient particulièrement lourde et difficile pour les hautes fréquences.

Dans Ref. [30], les auteurs ont montré que le comportement à hautes énergies de la section d'absorption du trou noir de Schwarzschild (4.26) est très bien décrit, dans le régime eikonal (que l'on nommera également *description eikonale*), par, nous le rappelons, la somme de deux termes : la section efficace

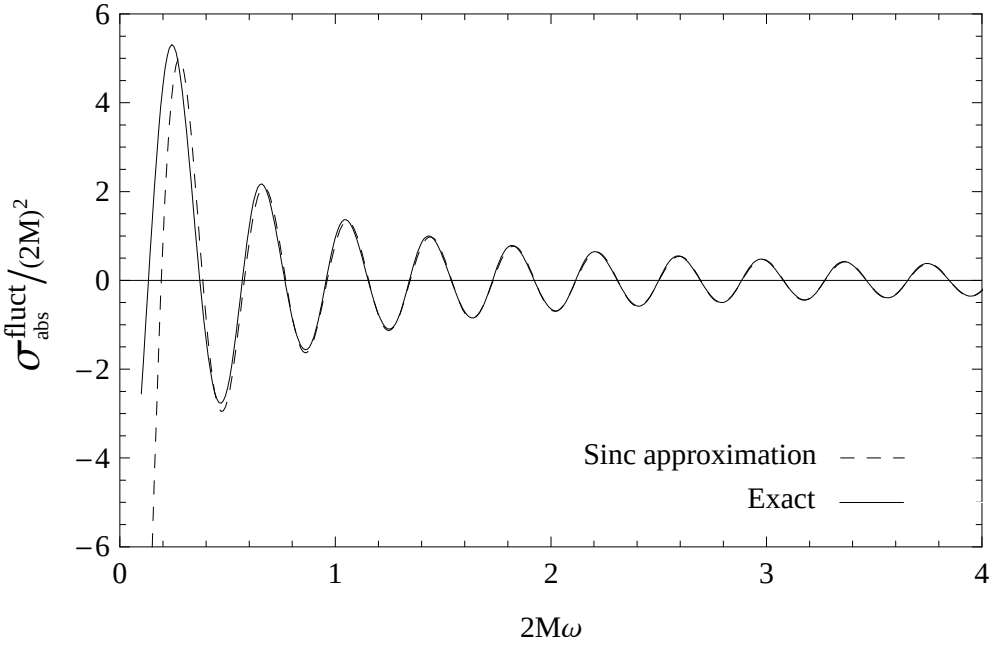


FIGURE 4.1 – Fluctuations de la section total d'absorption, $\sigma_{\rm abs}^{\rm fluct} \equiv \sigma_{\rm abs} - \sigma_{\rm geo}$, pour un champ scalaire de masse nulle se propageant dans une géométrie de Schwarzschild. La courbe exacte a été obtenue numériquement à partir de (4.26) alors que l'aproximation faisant intervenir la fonction "sinc" est donnée par (4.27).

géométrique associée à la sphère de photons du trou noir et la contribution d'une fonction sinus cardinal, dépendant des caractéristiques géométriques (période orbitale et exposant de Lyapunov) des géodésiques nulles instables appartenant à la sphère de photons (voir également Ref. [107] pour un tracé de la section d'absorption du trou noir de Schwarzschild suivant une fonction sinus cardinal mais principalement basé sur des considérations numériques). Plus précisément, ils ont montré que les fluctuations de (4.26) autour de la section efficace géométrique $\sigma_{\rm geo}$ est parfaitement décrite par cette (très simple) relation

$$\sigma_{\rm abs}^{\rm osc}(\omega) = -8\pi\, e^{-\pi}\, \sigma_{\rm geo}\, \mathrm{sinc}\left[2\pi(3\sqrt{3}M)\omega\right], \tag{4.27}$$

où $\mathrm{sinc}\, x \equiv (\sin x)/x$ désigne la fonction sinus cardinal. Notons que l'argument de la fonction sinc dépend de la période orbitale, $2\pi(3\sqrt{3}M) = 2\pi b_c$, nécessaire à une particule scalaire de masse nulle pour compléter son orbite autour du trou noir, sur la sphère de photons (cf. [33, 32, 34, 17]) tandis que le coefficient $8\pi e^{-\pi}$ est lié à l'exposant de Lyapunov associé à la géodésique suivie par la particule (nous renvoyons le lecteur aux Refs. [30, 34, 17] pour davantage de précisions sur ce dernier point). Signalons, dès à présent, que cette dépendance sera d'autant plus explicite lors de la généralisation de la théorie à des trous noirs statiques à symétrie sphérique. Cette dernière relation leur a permis d'interpréter de manière naturelle la période des maxima (ou des minima, ou encore des zéros) des fluctuations en termes d'interférences constructives des "ondes de surface" se propageant dans un très proche voisinage de la sphère de photons (voir également [33] ainsi que [32] pour des considérations similaires).

L'accord entre (4.27) et le résultat exact (4.26) obtenu numériquement est d'une très bonne précision, même en ce qui concerne les basses fréquences (voir figure 4.1). Cependant, si nous considérons la différence entre les deux courbes tracées, i.e. si nous nous intéressons au comportement de la fonction

$$\Delta\sigma_{\rm abs}^{\rm fluct,\,fine}(\omega) \equiv \sigma_{\rm abs}(\omega) - \left[\sigma_{\rm geo} + \sigma_{\rm abs}^{\rm osc}(\omega)\right], \tag{4.28}$$

nous mettons en évidence qu'au delà de la description eikonale, la section d'absorption présente une structure fine simple (voir figure 4.2). L'amplitude de cette structure fine étant de l'ordre de 5 à 10 % de celle des fluctuations eikonales, nous pensons donc que son existence doit être mentionnée et pourrait

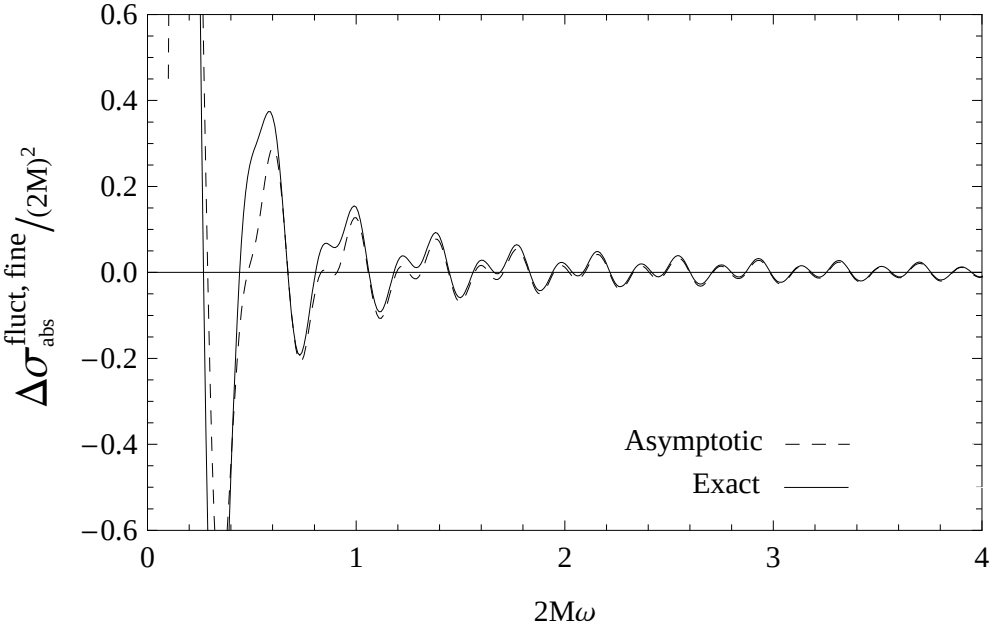


FIGURE 4.2 – Structure fine de la section d'absorption totale, $\Delta\sigma_{\rm abs}^{\rm fluct,\,fine}(\omega) \equiv \sigma_{\rm abs}(\omega) - [\sigma_{\rm geo} + \sigma_{\rm abs}^{\rm osc}(\omega)]$, pour un champ scalaire de masse nulle se propageant dans une géométrie de Schwarzschild. La courbe exacte est obtenue numériquement à partir de (4.26) et (4.27) tandis que le résultat asymptotique est donné par (4.33).

peut-être avoir des conséquences physiques intéressantes. Ainsi, il nous semble important de la décrire mathématiquement.

Avec cet objectif en tête, rappelons tout d'abord comment Decanini, Esposito-Farèse et Folacci ont obtenu la description eikonale de la section d'absorption (4.26). Dans Ref. [30], les auteurs ont montré que l'expression (4.26) peut être remplacée par la série

$$\sigma_{\rm abs}(\omega) = 27\pi M^2 - \frac{4\pi^2}{\omega^2}\,{\rm Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{i\pi[\lambda_n(\omega)-1/2]}\,\lambda_n(\omega)\gamma_n(\omega)}{\sin[\pi(\lambda_n(\omega)-1/2)]}\right) + \underset{M\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{(M\omega)^2}\right). \tag{4.29}$$

Dans la relation (4.29), $\lambda_n(\omega)$ avec $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ sont les pôles (de Regge) du prolongement analytique $\Gamma_{\lambda-1/2}(\omega)$ du facteur de corps gris $\Gamma_\ell(\omega)$, situés, rappelons-le, dans le premier quadrant du plan λ-complexe. Les quantités $\gamma_n(\omega)$ sont les résidus associés à ces pôles. Il est important de signaler que la série (4.29) converge très rapidement et, par conséquent, la contribution des pôles de Regge correspondant à $n > 1$ est quasiment négligeable (nous renvoyons le lecteur à la figure 2 de Ref. [30]). De ce fait, en utilisant les premières approximations grossières

$$\lambda_n(\omega) = 3\sqrt{3}M\omega + i\,(n-1/2) + \underset{2M\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{2M\omega}\right) \tag{4.30}$$

ainsi que

$$\gamma_n(\omega) = -\frac{1}{2\pi} + \underset{2M\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{2M\omega}\right). \tag{4.31}$$

et en ne tenant compte que de la contribution du premier pôle de Regge, les auteurs de Ref. [30] ont obtenu, à partir de l'expression (4.29), l'approximation eikonale (4.27) pour les fluctuations de la section d'absorption (4.26).

Bien entendu, les approximations (4.30) et (4.31) sont bien trop grossières pour nous permettre de comprendre l'existence de la structure fine. Mais si nous considérons à présent les développements asymptotiques calculés dans l'annexe C.1, i.e. (C.13) et (C.14) avec $n = 1$ et $s = 0$, en utilisant la relation (pour $a \in \mathbb{R}$)

$$\frac{e^{i\pi(z-a)}}{\sin[\pi(z-a)]} = -2i \sum_{m=1}^{+\infty} e^{i2m\pi(z-a)} \quad \text{valable si Im } z > 0, \tag{4.32}$$

il est assez aisé de montrer qu'à partir de (4.29), l'expression (4.26) peut être approximée par

$$\sigma_{\rm abs}(\omega) \approx \sigma_{\rm geo} \left(1 - 8\pi\, e^{-\pi}\, \frac{\sin\left[2\pi(3\sqrt{3}M)\omega\right]}{2\pi(3\sqrt{3}M)\omega} + 16\pi e^{-2\pi} \frac{\sin\left[4\pi(3\sqrt{3}M)\omega\right]}{4\pi(3\sqrt{3}M)\omega} \right.$$
$$\left. + \frac{4\pi^2 e^{-\pi}(-39+7\pi)}{27} \frac{\cos\left[2\pi(3\sqrt{3}M)\omega\right]}{[2\pi(3\sqrt{3}M)\omega]^2} \right). \tag{4.33}$$

Dans la relation (4.33), les deux premiers termes correspondent à la description eikonale construite dans Ref. [30] tandis que le troisième et le quatrième termes décrivent la structure fine de la section d'absorption. Sur la figure 4.2 nous avons comparé la structure fine exacte évaluée numériquement avec le résultat fournit par les deux derniers termes de l'expression (4.33). L'accord est tout à fait remarquable. En effet, l'erreur faite par rapport à la section d'absorption exacte (4.26) ou par rapport à ses fluctuations autour de $\sigma_{\rm geo}$ est considérablement réduite en utilisant (4.33).

Il nous semble important, d'un point de vue physique, de remarquer que la structure fine, tout comme la contribution eikonale, est simplement la conséquence de "l'onde de surface", piégée dans un très proche voisinage de la sphère de photons, associée au premier pôle de Regge. Cependant, pour décrire la structure fine, nous devons prendre en considération les multiples circonvolutions de cette "onde de surface" autour du trou noir (le phénomène de "battements" présent dans la structure fine sur la figure 4.2 sont une conséquence des interférences entre les termes dépendant de la période orbitale, sur la sphère de photons, de la particule de masse nulle autour du trou noir et leur seconde harmonique) ainsi que son caractère dispersif (l'amplitude de la contribution de la première harmonique est construite, en partie, à partir des non-linéarités de la trajectoire du premier pôle de Regge dans le plan λ-complexe, en d'autres termes, l'amplitude de la première harmonique provient du terme en $1/(M\omega)$ de (C.13)).

Nous souhaiterions noter qu'avec l'équation (4.33), nous avons à notre disposition une approximation assez simple et très précise nous permettant de décrire qualitativement et quantitativement le comportement à hautes énergies de la section d'absorption du trou noir de Schwarzschild, évitant par là-même de très longs calculs. De plus, il est intéressant de constater que, pour les "très hautes énergies", seuls les trois premiers termes de (4.33) doivent être pris en compte, ce qui simplifie considérablement cette approximation, éliminant ainsi un quatrième terme peu élégant.

4.2.3 Conclusion

L'existence d'une structure fine simple dans le spectre d'absorption des trous noirs est une propriété étonnante qui, d'après nos connaissances, n'a jamais été mise en évidence et qui de plus, doit certainement être considérée d'un point de vue théorique. Comme cela a déjà été le cas pour les fluctuations autour de la section efficace géométrique du trou noir, cette structure fine est uniquement la conséquence de "l'onde de surface" piégée dans un très proche voisinage de la sphère de photons, associée au premier pôle de Regge. Cependant, pour l'interprétation de la structure fine, comme nous l'avons vu, nous devons tenir compte des circonvolutions multiples de cette "onde de surface" autour du trou noir, à l'origine du phénomène de "battements" que nous avons signalé dans la précédente section. Il est en outre important de rappeler la dualité existant en les pôles de Regge et les fréquences complexes des modes quasinormaux faiblement amortis du trou noir (voir Refs. [33, 32, 34]). Cela nous permettrait alors d'interpréter également la structure fine de la section d'absorption à hautes énergies des trous noirs en termes de modes

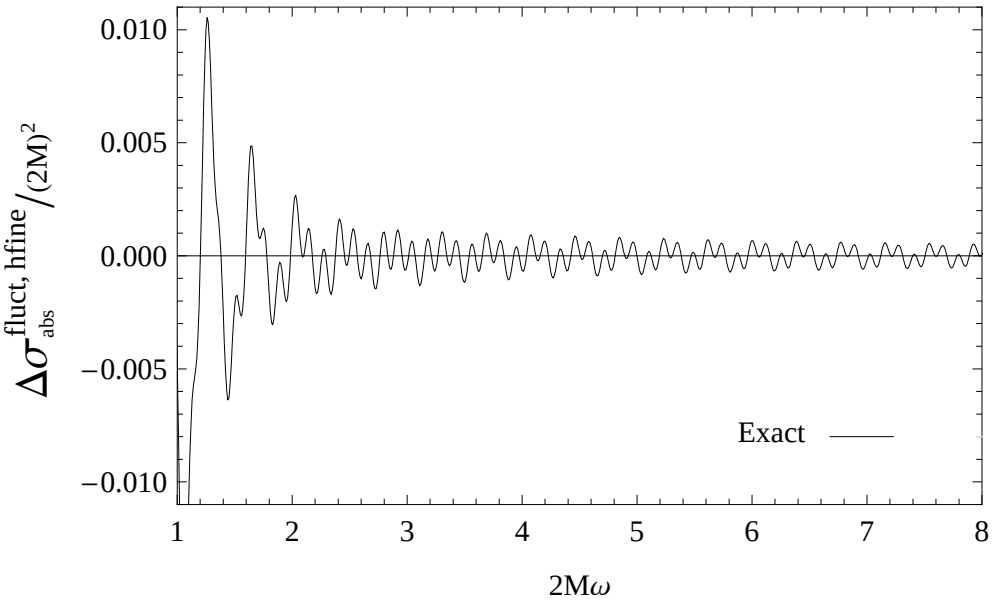


FIGURE 4.3 – Structure hyperfine de la section d'absorption pour un champ scalaire de masse nulle se propageant dans la géométrie de Schwarzschild.

quasinormaux.

Pour le trou noir de Schwarzschild, l'amplitude de la structure fine est de l'ordre de 5 à 10 % de celles des fluctuations eikonales. Ainsi, nous sommes amenés à penser que son existence pourrait avoir des conséquences physiques intéressantes. Ce pourrait être le cas, par exemple, dans le contexte du lensing gravitationnel fort. En effet, comme il a déjà été mentionné dans Ref. [32], les effets du lensing gravitationnel fort associés à un trou noir de Schwarzschild ont été, jusqu'à présent, uniquement considérés dans le cadre de l'optique géométrique. Une description basée sur les techniques relatives aux pôles de Regge, pourrait fournir une description plus complète avec, comme conséquences, de nouveaux effets d'origine ondulatoire. Plus précisément, comme nous l'avons déjà signalé dans ce manuscrit, ces conséquences observationnelles trouveraient leur origine dans la non-linéarité des trajectoires de Regge. Certains résultats obtenus dans deux articles récents [112, 123] semblent également indiquer que les spectres de résonance et d'absorption du trou noir de Schwarzschild pourraient jouer un rôle crucial dans le contexte du lensing gravitationnel fort et, en particulier, que la section d'absorption à hautes énergies et le lensing fort seraient intimement liés. Si un tel résultat se révèle être exact (nous émettons cependant quelques doutes concernant les déclarations faites dans les précédentes références à cause d'un certain manque de rigueur dans leurs démonstrations), les structures eikonale et fine de la section d'absorption du trou noir de Schwarzschild pourraient être observées, peut-être même très prochainement, à travers la nouvelle génération de dispositifs expérimentaux toujours en développement (voir, e.g. Ref. [48]) et conçus pour explorer les effets de la courbure de l'espace-temps au voisinage de l'horizon des évènements du trou noir supermassif situé au centre de notre galaxie.

Pour terminer, nous invitons le lecteur à prêter un regard attentif à la figure 4.3 dans laquelle nous avons tracé la "structure hyperfine" de la section d'absorption à hautes énergies associée au trou noir de Schwarzschild. Elle a été obtenue en soustrayant à la structure fine exacte, évaluée numériquement, les contributions correspondant aux troisième et quatrième termes de l'expression (4.33) ainsi que la contribution $\pi/(12\sqrt{3}M\omega)^2$ considérée dans la section 2 de Ref. [30]. Même si la courbe tracée semble plutôt régulière (en tout cas pour les hautes fréquences), elle présente un comportement bien plus compliqué que la structure fine. Nous pensons qu'elle peut analytiquement être décrite en prenant en considération, en plus des non-linéarités associées au premier pôle de Regge ainsi qu'au résidu correspondant (termes d'ordre supérieur des équations (C.13) et (C.14)), la contribution du second pôle de Regge. Cependant,

l'amplitude de la structure hyperfine étant très faible relativement à celle de la structure fine, il ne nous semble pas nécessaire (ou même intéressant d'un point de vue physique) de la décrire analytiquement.

Chapitre 5

Trous noirs statiques à symétrie sphérique : une extension

Dans ce chapitre, nous allons étendre les principaux résultats obtenus pour le trou noir de Schwarzschild aux trous noirs statiques à symétrie sphérique de dimension arbitraire, possédant une sphère de photons, i.e. une hypersurface sur laquelle une particule de masse nulle est en orbite circulaire instable autour du trou noir suivant des géodésiques nulles. Comme nous le savons, les trous noirs de Schwarzschild, de Schwarzschild-Tangherlini, les trous noirs de Reissner-Nordström, le trou noir acoustique canonique, pour les modèles analogues de gravité (cf. [120]) ou bien encore le trou noir de Schwarzschild-de Sitter sont des trous noirs présentant ce type de symétrie.

Ainsi, un de nos principaux objectifs sera de dériver, dans ce qui suit, des expressions analytiques générales, relatives à cette classe de trous noirs, pour les pôles des éléments de matrice S associés à une théorie de champ scalaire de masse nulle. Nous y parviendrons en utilisant, comme précédemment, une approximation WKB d'ordre trois pour résoudre l'équation d'onde radiale associée à l'évolution du champ scalaire. Ces expressions nous permettront d'obtenir, dans un premier temps, des formules analytiques pour la relation de dispersion non-linéaire ainsi que pour l'amortissement de "l'onde de surface", se propageant dans un proche voisinage de la sphère de photons. Puis, à partir des conditions de résonance "à la Bohr-Sommerfeld", obtenues dans la discussion 2.2.3 à la fin de la section 2.2, nous déduirons des développements étendus au-delà des premiers termes pour les fréquences complexes correspondant à des modes quasinormaux faiblement amortis.

Physiquement, ce formalisme nous permettra de montrer la connexion précise entre l'existence d'une sphère de photons et les propriétés des "ondes de surface" se propageant dans un proche voisinage de celle-ci. Pour une définition plus rigoureuse du concept de sphère de photons dans des espace-temps statiques à symétrie sphérique, nous renvoyons le lecteur à l'article de Claudel, Virbhadra et Ellis [21].

Nous commencerons par énoncer nos hypothèses générales de travail, que nous justifierons physiquement. Puis, à l'instar de l'exemple du trou noir de Schwarzschild, nous expliquerons comment construire la matrice S qui va nous permettre d'étudier les aspects résonants d'une théorie de champ scalaire dans une géométrie statique à symétrie sphérique, asymptotiquement plate, de dimension arbitraire, possédant une sphère de photons. Enfin, nous expliciterons les expressions analytiques générales des pôles de Regge correspondant à ces configurations, ainsi que les fréquences complexes quasinormales associées. Ces résultats seront obtenus, comme pour le chapitre précédent, en utilisant l'approximation WKB à l'ordre trois développée par Schutz et Will [108] et par Will et Iyer [72, 71] (voir également Ref. [6] pour des aspects généraux de la théorie WKB). Nous verrons que notre analyse WKB nous permettra, de plus, de montrer que (i) la relation de dispersion de la $n^{\text{ème}}$ "onde de surface" est non-linéaire et dépend de l'indice n et que (ii) l'amortissement de cette même $n^{\text{ème}}$ "onde de surface" dépend de la fréquence. Nous terminerons par l'application de ce formalisme pour quelques exemples tels que le trou noir de Schwarzschild, les trous noirs de Schwarzschild-Tangherlini, le trou noir de Reissner-Nordström ainsi que le trou noir acoustique canonique. Nous renvoyons le lecteur à l'Annexe B pour le cas du trou noir

de Schwarzschild-de Sitter. En effet, même si une telle géométrie n'est pas asymptotiquement plate, le formalisme développé dans ce chapitre s'applique naturellement.

5.1 Fréquences quasinormales et pôles de Regge pour des trous noirs statiques à symétrie sphérique : Théorie générale

Nous considérons un espace-temps statique à symétrie sphérique de dimension arbitraire $d \geq 4$, muni de la métrique

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + r^2\mathrm{d}\sigma_{d-2}^2. \tag{5.1}$$

Ici, $d\sigma_{d-2}^2$ décrit un élément de ligne infinitésimal sur la sphère unité S^{d-2}. Sur S^{d-2}, nous introduisons les coordonnées angulaires habituelles $\theta_i \in [0, \pi]$ avec $i = 1, \ldots, d-3$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$. Plus précisément, nous pouvons écrire

$$\mathrm{d}\sigma_{d-2}^2 = \mathrm{d}{\theta_1}^2 + \sum_{k=2}^{d-3}\left(\prod_{i=1}^{k-1}\sin^2\theta_i\right)\mathrm{d}\theta_k^2 + \left(\prod_{i=1}^{d-3}\sin^2\theta_i\right)\mathrm{d}\varphi^2. \tag{5.2}$$

Bien évidemment, une métrique de la forme (5.1) ne décrit pas l'ensemble des espace-temps statiques à symétrie sphérique, mais elle nous permettra de considérer une large catégorie de trous noirs d'intérêt physique. De plus, dans l'expression (5.1), nous supposerons que $f(r)$ est une fonction de la seule coordonnée radiale usuelle r avec les propriétés suivantes :

- (i) Il existe un intervalle $I =]r_h, +\infty[\subset \mathbb{R}$ avec $r_h > 0$ tel que $f(r) > 0$ pour $r \in I$.
- (ii) r_h est une racine simple de $f(r)$, i.e.,

$$f(r_h) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'(r_h) \neq 0, \tag{5.3}$$

  et $f(r)$ vérifie en outre

$$\lim_{r\to+\infty} f(r) = 1. \tag{5.4}$$

- (iii) Il existe une valeur $r_c \in I$ pour laquelle

$$f'(r_c) - \frac{2}{r_c}f(r_c) = 0 \tag{5.5}$$

  et

$$f''(r_c) - \frac{2}{r_c^2}f(r_c) < 0. \tag{5.6}$$

Nous proposons à présent de discuter brièvement ces trois hypothèses.
Les hypothèses (i) et (ii) spécifient que l'espace-temps considéré est un trou noir asymptotiquement plat avec un horizon des évènements à r_h, la région extérieure correspondant à $r \in I$. L'hypothèse (iii) implique l'existence d'une sphère de photons, support des géodésiques nulles équivalentes à des orbites circulaires instables pour des particules de masse nulle (voir ci-dessous pour plus de détails). Notons que, comme conséquence de (i) et (ii), la "*coordonnée de la tortue*" (tortoise coordinate) $r_* = r_*(r)$, définie pour $r \in I$ par la relation $dr_*/dr = 1/f(r)$ et la condition $r_*(r_c) = 0$, est une fonction bijective $r_* = r_*(r)$ de I dans $]-\infty, +\infty[$.

Considérons, à présent, d'un point de vue géodésique, une particule de masse nulle en chute libre autour d'un trou noir. Sans perdre en généralité, nous pouvons considérer que son mouvement appartient à l'hyperplan équatorial défini par $\theta_i = \pi/2$ pour $i = 1, \ldots, d-3$. Son mouvement s'effectuant le long d'une géodésique nulle, nous avons (cf. expressions (5.1) et (5.2))

$$-f(r)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2 + \frac{1}{f(r)}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2 = 0 \tag{5.7}$$

où α est un paramètre affine. Du fait des symétries de notre problème, il existe deux intégrales premières du mouvement respectivement associées aux vecteurs de Killing $\partial/\partial t$ et $\partial/\partial\varphi$ et données par

$$f(r)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha}\right) = E, \tag{5.8a}$$

$$r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\alpha}\right) = L. \tag{5.8b}$$

Ici, E et L représentent respectivement l'énergie et le moment angulaire de la particule de masse nulle. En insérant les équations (5.8a) et (5.8b) dans (5.7), nous obtenons

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2 + V_{\mathrm{eff}}(r) = E^2 \tag{5.9}$$

où

$$V_{\mathrm{eff}}(r) = \frac{L^2}{r^2}f(r). \tag{5.10}$$

D'après ces deux dernières équations et d'après l'hypothèse (iii), nous pouvons aisément remarquer que la particule de masse nulle peut suivre une orbite circulaire instable autour du trou noir en question, à une distance définie par $r = r_c$. En effet, nous avons en particulier

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}V_{\mathrm{eff}}(r)\bigg|_{r=r_c} = 0 \tag{5.11a}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}V_{\mathrm{eff}}(r)\bigg|_{r=r_c} = \frac{L^2}{r_c^2}\left(f''(r_c) - \frac{2}{r_c^2}f(r_c)\right) < 0. \tag{5.11b}$$

Sur une telle orbite, la particule de masse nulle fait un tour complet autour du trou noir au bout du temps

$$T = \frac{2\pi r_c}{\sqrt{f(r_c)}} \tag{5.12}$$

Ce résultat peut être obtenu en intégrant l'équation (5.7).

D'un point de vue ondulatoire, l'équation d'onde pour un champ scalaire de masse nulle se propageant sur une géométrie gravitationnelle quelconque est donnée par l'équation de Klein-Gordon

$$\Box\Phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\right) = 0. \tag{5.13}$$

Si la métrique de l'espace-temps est définie par (5.1), après séparation des variables radiales et angulaires et ayant introduit la fonction d'onde partielle radiale $\Phi_\ell(r)$ avec $\ell = 0, 1, 2, \ldots$, cette équation se réduit à l'équation de Regge-Wheeler

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi_\ell}{\mathrm{d}r_*^2} + \left[\omega^2 - V_\ell(r)\right]\Phi_\ell = 0. \tag{5.14}$$

(Nous avons supposé ici, comme nous en avons pris l'habitude dans ce manuscrit, une dépendance en temps de type harmonique $\exp[-i\omega t]$ pour le champ scalaire non massif.) Dans l'expression (5.14), $V_\ell(r)$ est le potentiel de Regge-Wheeler, défini par

$$V_\ell(r) = f(r)\left[\frac{\ell(\ell+d-3)}{r^2} + \frac{(d-2)(d-4)}{4r^2}f(r) + \left(\frac{d-2}{2r}\right)f'(r)\right]. \tag{5.15}$$

Notons que

- $\lim_{r\to r_h} V_\ell(r) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} V_\ell(r) = 0$. Par conséquent, les solutions de l'équation radiale (5.14) a un comportement en $\exp(\pm i\omega r_*)$ à l'horizon et à l'infini.
- Pour $\ell \gg 1$, $V_\ell(r)$ possède un maximum local en $r = r_c$ car dans cette limite, $V_\ell(r)$ et $V_{\mathrm{eff}}(r)$ ont des comportements identiques.

– Pour chaque valeur finie de ℓ, le maximum local de $V_\ell(r)$ est proche de $r = r_c$.

Pour un indice de moment angulaire ℓ donné, les éléments $S_\ell(\omega)$ de la matrice S sont définis en recherchant la solution de l'équation de Regge-Wheeler (5.14) ayant un comportement purement entrant à l'horizon des évènements $r = r_h$, i.e. vérifiant

$$\Phi_\ell(r) \underset{r_* \to -\infty}{\sim} T_\ell(\omega) e^{-i\omega r_*} \tag{5.16}$$

et qui, à l'infini spatial $r \to +\infty$, présente un comportement asymptotique de la forme

$$\Phi_\ell(r) \underset{r_* \to +\infty}{\sim} e^{-i\omega r_* + i\left(\ell + \frac{d-3}{2}\right)\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}} - S_\ell(\omega) e^{+i\omega r_* - i\left(\ell + \frac{d-3}{2}\right)\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{4}}. \tag{5.17}$$

Nous souhaitons rappeler (cf. section 1.2.3 du chapitre 1.2 de la première partie de ce manuscrit) que la matrice S nous permet d'analyser aussi bien les aspects résonants du trou noir considéré que de construire l'amplitude de diffusion, décrivant la diffusion d'une onde scalaire monochromatique.

Pour décrire de manière semiclassique les phénomènes de résonance, nous souhaitons à nouveau insister sur le fait que la structure duale de la matrice S joue un rôle crucial. En effet, la matrice S est une fonction de la fréquence ω mais aussi de l'indice de moment angulaire ℓ. Elle peut tout aussi bien être analytiquement prolongée dans le plan ω-complexe que dans le plan λ-complexe avec, cette fois, $\lambda = \ell + (d-3)/2$. A présent, nous noterons $S_{\lambda-(d-3)/2}(\omega)$ ce prolongement analytique. Pour $\ell = \lambda - (d-3)/2 \in \mathbb{N}$, les pôles simples appartenant au quatrième quadrant du plan ω-complexe sont les fréquences complexes des QNMs. Par conséquent, ces modes sont des solutions, purement entrantes à l'horizon et purement sortantes à l'infini spatial, de l'équation d'onde radiale (5.14). Nous écrirons $\omega_{\ell n} = \omega_{\ell n}^{(o)} - i\Gamma_{\ell n}/2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ les fréquences quasinormales. Rappelons que $\omega_{\ell n}^{(o)} > 0$ et $\Gamma_{\ell n} > 0$ représentent respectivement la fréquence d'oscillation et l'amortissement correspondant au QNM associé. Nous supposerons, de plus, que dans un très proche voisinage de $\omega_{\ell n}$, $S_\ell(\omega)$ peut s'écrire sous la forme de Breit-Wigner, i.e.,

$$S_\ell(\omega) \propto \frac{\Gamma_{\ell n}/2}{\omega - \omega_{\ell n}^{(o)} + i\Gamma_{\ell n}/2}. \tag{5.18}$$

Pour une valeur de la fréquence $\omega > 0$ donnée, les pôles simples appartenant au premier quadrant du plan λ-complexe sont, comme nous l'avons déjà vu, les pôles Regge. Notons qu'ils sont aussi des pôles simples de $T_{\lambda-(d-3)/2}(\omega)$ et, par conséquent, les modes associés (les modes de Regge) sont purement entrant à l'horizon et purement sortant à l'infini spatial. Les pôles de Regge seront toujours notés $\lambda_n(\omega)$, l'indice $n = 1, 2, \ldots$ nous permettant de distinguer chaque pôle.

5.1.1 Des pôles de Regge aux fréquences quasinormales complexes pour des géométries statiques à symétrie sphérique de dimension arbitraire

Nous allons étendre ici, le formalisme et les résultats obtenus pour le trou noir de Schwarzschild. La méthode utilisée reste identique, i.e. nous passons dans le plan λ-complexe afin de transformer, avec le théorème de Cauchy et les pôles des éléments de matrice S, l'expression de l'amplitude de diffusion. L'interprétation en termes "d'ondes de surface" est encore valable, chaque onde étant associée à un pôle. Nous dériverons l'équivalent des relations semiclassiques (2.63) et (2.66), relations indispensables pour construire à partir des trajectoires de Regge le spectre des fréquences complexes correspondant aux modes quasinormaux (faiblement amortis).

Pour commencer, nous considérons la diffusion d'une onde scalaire plane monochromatique de fréquence ω par un trou noir statique à symétrie sphérique de dimension d. Sans perdre en généralités, l'amplitude de diffusion peut être écrite sous la forme

$$f(\omega, \theta_1) = \frac{2^{\frac{d-4}{2}}}{2\sqrt{\pi}(i\omega)^{\frac{d-2}{2}}} \Gamma\left(\frac{d-3}{2}\right) \sum_{\ell=0}^{+\infty} (2\ell + d - 3) \left[S_\ell(\omega) - 1\right] C_\ell^{\frac{d-3}{2}}(\cos\theta_1) \tag{5.19}$$

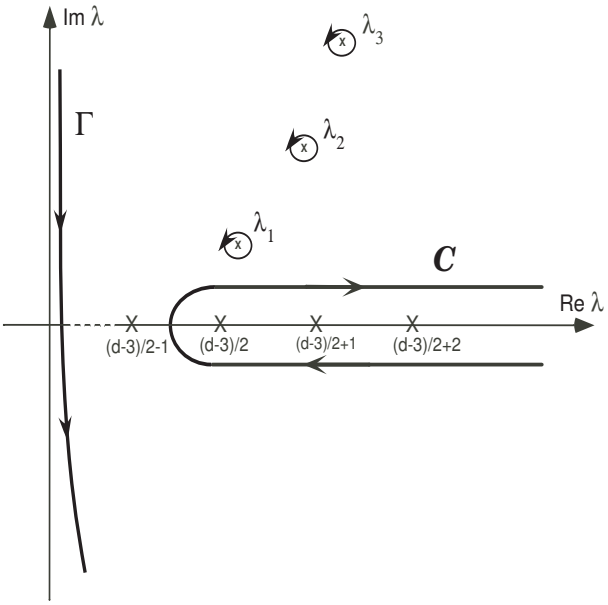


FIGURE 5.1 – Le contour d'intégration de Watson.

où ℓ est l'indice usuel du moment angulaire, $C_\ell^{\frac{d-3}{2}}(z)$ sont les polynômes de Gegenbauer (cf. [1]) et $S_\ell(\omega)$ sont les éléments diagonaux de la matrice S définis par l'équation (5.17). Ainsi, en utilisant, de nouveau, une transformation de Sommerfeld-Watson [122, 111] (voir par exemple [97] pour une présentation plus récente), nous pouvons extraire en deux étapes la partie résonante de l'amplitude de diffusion (5.19). Tout d'abord, nous remplaçons la somme discrète sur l'indice du moment angulaire ℓ par une intégrale de contour dans le plan λ-complexe. Nous obtenons

$$f(\omega,\theta_1) = i\,\frac{2^{\frac{d-4}{2}}}{2\sqrt{\pi}(i\omega)^{\frac{d-2}{2}}}\Gamma\left(\frac{d-3}{2}\right)\int_{\mathcal{C}}\frac{\lambda\left[S_{\lambda-\frac{d-3}{2}}(\omega)-1\right]}{\sin[\pi(\lambda-(d-3)/2)]}C^{\frac{d-3}{2}}_{\lambda-\frac{d-3}{2}}(-\cos\theta_1)\;d\lambda. \tag{5.20}$$

Ici $\mathcal{C}$ est le contour d'intégration dans le plan CAM tracé sur la figure 5.1. De plus, nous considérons à présent que l'expression $S_{\lambda-(d-3)/2}(\omega)$ est le prolongement analytique de $S_\ell(\omega)$ dans le plan λ-complexe, régulier au voisinage de l'axe des λ réels positifs, et $C^{\frac{d-3}{2}}_{\lambda-\frac{d-3}{2}}(z)$ est le prolongement analytique des polynômes de Gegenbauer défini par [1]

$$C^{\frac{d-3}{2}}_{\lambda-\frac{d-3}{2}}(z) = \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{d-3}{2}\right)}{\Gamma(d-3)\Gamma\left(\lambda-\frac{d-5}{2}\right)}F\left(-\lambda+\frac{d-3}{2},\lambda+\frac{d-3}{2};\frac{d-2}{2};\frac{1-z}{2}\right). \tag{5.21}$$

De la même façon que dans les chapitres précédents, nous pouvons alors déformer le contour d'intégration de l'expression (5.20) en tenant compte des singularités éventuelles (cf. figure 5.1), i.e. les pôles de la matrice S situés dans le premier quadrant du plan CAM, ou en d'autres termes, les pôles de Regge $\lambda_n(\omega)$ avec $n = 1, 2, \ldots$. Par le théorème de Cauchy, nous pouvons dès lors extraire de l'équation (5.20), une série sur les résidus associés aux pôles de Regge qui nous permet d'obtenir la contribution résonante (diffractive) sous la forme

$$f_{\mathrm{P}}(\omega,\theta_1) = -2\pi\,\frac{2^{\frac{d-4}{2}}}{2\sqrt{\pi}(i\omega)^{\frac{d-2}{2}}}\Gamma\left(\frac{d-3}{2}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda_n(\omega)\gamma_n(\omega)}{\sin\left[\pi(\lambda_n(\omega)-(d-3)/2)\right]}C^{\frac{d-3}{2}}_{\lambda_n(\omega)-\frac{d-3}{2}}(-\cos\theta_1). \tag{5.22}$$

Ici, nous avons défini

$$\gamma_n(\omega) = \text{residue}\left[S_{\lambda-(d-3)/2}(\omega)\right]_{\lambda=\lambda_n(\omega)}. \tag{5.23}$$

Comme précédemment, notons que $f(\omega,\theta_1)$ diffère de $f_{\mathrm{P}}(\omega,\theta_1)$ par une intégrale de fond définie sur le contour Γ (cf. figure 5.1), qui ne joue aucun rôle dans les phénomènes de résonance.

En utilisant le développement asymptotique (voir [1])

$$C^{\frac{d-3}{2}}_{\lambda-\frac{d-3}{2}}(-\cos\theta_1) \sim \frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{d-3}{2}\right)}{\Gamma(d-3)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \frac{e^{i\lambda(\pi-\theta_1)-i(d-3)\pi/4}+e^{-i\lambda(\pi-\theta_1)+i(d-3)\pi/4}}{2[\pi(\lambda-(d-3)/2)]^{1/2}[(\sin\theta_1)/2]^{(d-3)/2}} \tag{5.24}$$

quand $|\lambda| \to \infty$, valable pour $|\lambda|\sin\theta_1 > 1$, ainsi que la relation

$$\frac{1}{\sin\pi z} = -2i\sum_{m=0}^{+\infty} e^{i\pi(2m+1)z} \tag{5.25}$$

vraie si Im $z > 0$, nous pouvons écrire

$$f_{\rm P}(\omega,\theta_1) = \frac{2i\pi}{(2i\omega)^{\frac{d-2}{2}}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Gamma\left[\lambda_n(\omega)+(d-3)/2\right]}{\Gamma\left[\lambda_n(\omega)+1/2\right]}\frac{\lambda_n(\omega)\gamma_n(\omega)e^{-i\pi(d-3)/2}}{[\pi(\lambda_n(\omega)-(d-3)/2)]^{1/2}[(\sin\theta_1)/2]^{(d-3)/2}}$$
$$\times\sum_{m=0}^{+\infty}\left[e^{i\lambda_n(\omega)(2\pi-\theta_1+2m\pi)-i(d-3)m\pi-i(d-3)\pi/4}+e^{i\lambda_n(\omega)(\theta_1+2m\pi)-i(d-3)m\pi+i(d-3)\pi/4}\right]. \tag{5.26}$$

De manière tout à fait analogue aux chapitres précédents, dans l'expression (5.26), les termes exponentiels correspondent à des "ondes de surface", i.e. aux contributions diffractives. Gardant en mémoire la dépendance temporelle en $\exp[-i\omega t]$ et en rappelant qu'un pôle de Regge $\lambda_n(\omega)$ appartient au premier quadrant du plan CAM, le terme $\exp[i\lambda_n(\omega)\theta_1]$ (resp. $\exp[i\lambda_n(\omega)(2\pi-\theta_1)]$) correspond à la $n^{\text{ème}}$ "onde de surface" se propageant dans le sens trigonométrique (resp. trigonométrique inverse) autour du trou noir. De plus, Re $\lambda_n(\omega)$ représente la relation de dispersion, ou sa constante de propagation azimuthale, tandis que le terme en Im $\lambda_n(\omega)$ définit son amortissement. La décroissance exponentielle $\exp[-\text{Im }\lambda_n(\omega)\theta_1]$ (resp. $\exp[-\text{Im }\lambda_n(\omega)(2\pi-\theta_1)]$) est le résultat d'un rayonnement d'énergie vers l'infini spatial. Signalons que, dans l'expression (5.26), la somme sur le *nombre quantique topologique* m prend en compte les multiples circonvolutions des "ondes de surface" autour du trou noir. Enfin, notons que, dans cette même équation, la présence du facteur $\exp[-i(d-3)m\pi]$ tient compte d'une avance de phase due aux caustiques. Le lecteur remarquera avec aisance que, mise à part cette dernière remarque, intuitivement difficile à conceptualiser, la théorie généralisée à une classe de trous noirs statiques à symétrie sphérique, possédant une sphère de photons, présente dans ses principaux traits, une physique tout à fait similaire à celle rencontrée dans l'exemple du trou noir de Schwarzschild.

Le comportement résonant du trou noir peut alors naturellement être compris en terme "d'ondes de surface". Considérons la $n^{\text{ème}}$ "onde de surface", i.e. "l'onde de surface" décrite par le pôle de Regge $\lambda_n(\omega)$. Quand la quantité Re $\lambda_n(\omega) - (d-3)/2$ coïncide avec un entier, il y a résonance produite par interférences constructives entre les diverses "composantes" de "l'onde de surface", chaque "composante" correspondant à un nombre de circonvolutions différent autour du trou noir (voir l'expression (5.26)). Les fréquences d'excitation des résonances, notées $\omega^{(0)}_{\ell n}$, présentes dans la formule de Breit-Wigner (5.18) et engendrées par la $n^{\text{ème}}$ "onde de surface" sont alors obtenue à partir d'une condition de quantification "à la Bohr-Sommerfeld"

$$\text{Re}\,\lambda_n\left(\omega^{(0)}_{\ell n}\right) = \ell + \frac{d-3}{2}, \qquad \ell \in \mathbb{N}. \tag{5.27}$$

A présent, en supposant que ω est dans un proche voisinage de $\omega^{(0)}_{\ell n}$, nous pouvons développer, comme nous l'avons fait dans la première partie de ce manuscrit, $\lambda_n(\omega)$ en une série de Taylor autour de $\omega^{(0)}_{\ell n}$. Puis, en remplaçant ce développement de Taylor dans le terme en $\sin\left[\pi(\lambda_n(\omega)-(d-3)/2)\right]$ de (5.22), nous constatons que $f_{\rm P}(\omega,\theta_1)$ présente une comportement résonant de la forme Breit-Wigner (5.18) où

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \left.\frac{\text{Im}\,\lambda_n(\omega)[d/d\omega\,\text{Re}\,\lambda_n(\omega)]}{[d/d\omega\,\text{Re}\,\lambda_n(\omega)]^2+[d/d\omega\,\text{Im}\,\lambda_n(\omega)]^2}\right|_{\omega=\omega^{(0)}_{\ell n}}. \tag{5.28}$$

En outre, notons que dans le domaine de fréquence où la condition $|d/d\omega\,\text{Re}\,\lambda_n(\omega)| \gg |d/d\omega\,\text{Im}\,\lambda_n(\omega)|$ est satisfaite, la relation (5.28) se réduit à

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \left.\frac{\text{Im}\,\lambda_n(\omega)}{d/d\omega\,\text{Re}\,\lambda_n(\omega)}\right|_{\omega=\omega^{(0)}_{\ell n}}. \tag{5.29}$$

A partir des trajectoires de Regge, i.e. $\lambda_n(\omega)$ pour $\omega \in [0, +\infty[$, les relations (5.27) et (5.28) ou (5.29) nous permettent de construire semiclassiquement le spectre de résonance du trou noir en question ou, en d'autre terme, le spectre des fréquences complexes quasinormales. La relation semiclassique (5.27) permet de déduire les fréquences d'excitation $\omega_{\ell n}^{(0)}$ de ces résonances tandis que la relation (5.28) nous donne les largeurs fréquentielles correspondantes. Il est bien entendu que le raisonnement nous conduisant aux relations (5.27) et (5.28) à partir de (5.19) est basé sur plusieurs hypothèses qui ne sont pas forcément satisfaite en pratique. Mais, en général, elles permettent de décrire très correctement les fréquences complexes quasinormales appartenant à un proche voisinage de l'axe des ω réels.

5.1.2 Approximations WKB pour les pôles de Regge et expressions semiclassiques des fréquences complexes quasinormales

Comme nous l'avons déjà remarqué, en général, il n'est pas possible de résoudre exactement l'équation de Regge-Wheeler (5.14), tout comme l'équation de Schrödinger. Par conséquent, nous ne pouvons obtenir que des approximations analytiques pour les pôles de Regge ainsi que pour les fréquences complexes quasinormales. Nous utiliserons, de la même manière que pour l'exemple du trou noir de Schwarzschild, l'approche WKB (pour plus de détails, se reporter à [6]) adaptée et étendue à l'ordre 3, pour déterminer les QNMs du trou noir de Schwarzschild par Schutz and Will [108] et par Will et Iyer [72, 71] et, dans [32], pour déterminer les pôles de Regge du trou noir de Schwarzschild. Ceci peut tout à fait être appliqué, sans difficultés majeures, au cas général considéré dans ce chapitre. Ainsi, en utilisant l'approximation WKB, pour les modes de Regge de l'équation (5.14), nous trouvons que les pôles λ sont les solutions complexes de l'équation

$$\omega^2 = \left[V_0(\lambda) + [-2V_0^{(2)}(\lambda)]^{1/2}\,\overline{\Lambda}(\lambda, n)\right] - i\,\alpha(n)\,[-2V_0^{(2)}(\lambda)]^{1/2}[1 + \overline{\Omega}(\lambda, n)] \tag{5.30}$$

avec $\omega > 0$ et $n = 1, 2, 3, \ldots$. Une fois de plus, les définitions des quantités présentes dans (5.30) restent les mêmes que que celles introduites à la section 4.1.2 du chapitre 4.

Pour résoudre l'équation (5.30), nous devons, comme dans le chapitre précédent, exprimer les développements asymptotiques, pour $|\lambda| \to +\infty$, de $V_0(\lambda)$, de $\left[-2V_0^{(2)}(\lambda)\right]^{1/2}$ ainsi que des divers rapports présents dans les équations (4.11a) et (4.11b). Afin de simplifier les expressions des résultats, nous avons introduit les notations

$$f_c^{(p)} = f^{(p)}(r_c) \tag{5.31}$$

et

$$\eta_c = \frac{1}{2}\sqrt{4f_c - 2r_c^2 f_c^{(2)}}. \tag{5.32}$$

Il est intéressant de noter que le paramètre η_c est directement lié à la dérivée seconde (5.11b) du potentiel effectif (5.10) évaluée en $r = r_c$. Par conséquent, ce paramètre représente une mesure de l'instabilité des orbites circulaires appartenant à la sphère de photons. Pour être plus précis, il peut être exprimé en fonction de l'exposant de Lyapunov Λ_c correspondant à ces orbites, introduit dans Ref. [17] et représentant l'inverse d'un temps caractéristique d'instabilité. Nous avons, en effet

$$\eta_c = \frac{r_c}{\sqrt{f_c}}|\Lambda_c|. \tag{5.33}$$

Nous ne nous étendrons pas davantage sur cet aspect parce que, comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, nous avons l'intention d'aller au-delà d'une description purement géométrique dans notre analyse du comportement résonant des trous noirs.

Etant donné la longueur des résultats, nous avons choisi de les écrire dans l'Annexe A. Nous retiendrons, ici, seulement la relation

$$\lambda_n(\omega) \approx \left[\frac{r_c^2}{f_c}\,\omega^2 + a_n + 2\eta_c^2\alpha(n)^2\epsilon_n(\omega)\right]^{1/2} + i\eta_c\alpha(n)\,[1 + \epsilon_n(\omega)] \tag{5.34}$$

où a_n, $\alpha(n)$, ϵ_n, η_c sont définis dans cette même Annexe.
Cette relation est un de nos principaux résultats. Comme nous le verrons et comme nous l'avons déjà vu pour le cas du trou noir de Schwarzschild, cette équation permet également d'obtenir la relation de dispersion et l'amortissement de "l'onde de surface" située dans un proche voisinage de la sphère de photons du trou noir en question.
De plus, il est possible de simplifier (5.34) et d'obtenir une approximation à hautes fréquences des pôles de Regge. Nous avons, en effet,

$$\lambda_n(\omega) = \left[\frac{r_c}{\sqrt{f_c}}\,\omega + \frac{a_n}{(2r_c/\sqrt{f_c})}\,\frac{1}{\omega}\right] + i\eta_c\alpha(n)\left[1 + \frac{b_n}{(r_c^2/f_c)}\,\frac{1}{\omega^2}\right] + \underset{\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\omega^3}\right). \tag{5.35}$$

Comme précédemment, nous voudrions insister sur la différence notable entre l'approximation (5.34) et sa version bien plus élégante (5.35). L'approximation (5.35) prend tout son sens en tant que développement en $1/\omega$ pour $\omega \to +\infty$. A contrario, l'approximation (5.34) reste valable, pour les mêmes raisons que celles explicitées pour l'exemple du trou noir de Schwarzschild, dans un large domaine fréquentiel via la théorie WKB. Bien évidemment, pour résoudre (5.30) afin d'obtenir l'expression (5.34), nous avons, de plus, supposé que $|\lambda_n| \gg 1$ et $\mathrm{Re}\,\lambda_n \gg \mathrm{Im}\,\lambda_n$. Ainsi, nous ne pouvons attendre de l'expression (5.34) une très grande précision pour les très basses fréquences (cf. Refs. [44] et [32] pour des analyses numériques effectuées dans le cas du trou noir de Schwarzschild).

En outre, il est intéressant, à ce stade, de donner une interprétation des précédents résultats en terme "d'onde de surface", interprétation devenue assez rapidement naturelle et habituelle dans le cadre de la théorie CAM, et tout au long de ce manuscrit. Comme nous l'avons vu dans la section précédente, la partie résonante de l'amplitude de diffusion est une superposition de termes du type $\exp[i(\lambda_n(\omega)\theta_1 - \omega t)]$ (dans cette partie, nous rappelons que nous considérons une dépendance temporelle harmonique, i.e. en $\exp[-i\omega t]$). En injectant le premier terme du développement de (5.35) dans ces contributions ondulatoires, il est aisé de remarquer que la contribution de la $n^{\text{ème}}$ "onde de surface" peut s'écrire

$$\exp[-\eta_c\alpha(n)\theta_1]\,\exp\left[i\left(r_c/\sqrt{f_c}\,\omega\theta_1 - \omega t\right)\right] \tag{5.36}$$

Le deuxième terme décrit la propagation de cette "onde de surface" au voisinage de la sphère de photons en $r = r_c$. En effet, nous pouvons constater que le temps nécessaire à un point quelconque de cette onde pour faire un tour complet autour du trou noir est $T' = 2\pi(r_c/\sqrt{f_c})$ qui est exactement le temps (5.12) nécessaire à une particule de masse nulle pour effectuer une révolution complète sur son orbite circulaire instable. Le premier terme, quant à lui, correspond à un amortissement exponentiel de cette même "onde de surface" dû à un rayonnement vers l'infini spatial de l'énergie consécutif à une résonance.
Arrêtons-nous un instant sur cette interprétation en terme "d'onde de surface" et écrivons l'expression (5.36) sous la forme

$$\exp[-k_n''(\omega)\mathcal{L}]\exp[i(k_n'(\omega)\mathcal{L} - \omega t)] \tag{5.37}$$

avec $\mathcal{L} = r_c\,\theta_1$, la longueur d'arc de cercle, pour une ouverture d'angle θ_1, prise sur la sphère de photons. A présent, nous pouvons interpréter $k_n'(\omega) = \omega/\sqrt{f_c}$ comme le nombre d'onde de la $n^{\text{ème}}$ "onde de surface", ou en d'autres termes, sa relation de dispersion, tandis que $k_n''(\omega) = \eta_c\alpha(n)/r_c$ correspond à sa constante d'amortissement.

Si l'on s'arrête aux premiers termes du développement des pôles de Regge, la relation de dispersion est linéaire et indépendante de l'indice de "l'onde de surface" alors que l'amortissement dépend uniquement de l'indice n. Bien sûr, le lecteur aura constaté que si nous allons au-delà des premiers termes, la relation de dispersion s'écrit (cf. (5.34))

$$k_n'(\omega) \approx \left[\frac{1}{f_c}\,\omega^2 + \frac{a_n}{r_c^2} + 2\left(\frac{\eta_c^2}{r_c^2}\right)\alpha(n)^2\epsilon_n(\omega)\right]^{1/2} \tag{5.38a}$$

ce qui implique [cf. Eq. (5.35)]

$$k_n'(\omega) = \left[\frac{1}{\sqrt{f_c}}\,\omega + \frac{a_n}{(2r_c^2/\sqrt{f_c})}\,\frac{1}{\omega}\right] + \underset{\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \tag{5.38b}$$

qui est d'une part clairement non-linéaire et d'autre part, dépendante de l'indice n. Ce résultat pourrait avoir des répercutions importantes dans le lensing gravitationnel fort (se reporter également à Ref. [32] ainsi qu'à la discussion de l'Annexe B). Avec une telle application potentielle, il est à noter que, dans les expressions (5.37) et (5.38), ω est la fréquence du "photon scalaire" mesurée par un observateur statique qui serait situé "à l'infini". Si nous prenons en compte le redshift gravitationnel associé à ce photon et si nous introduisons sa fréquence $\tilde{\omega} = \omega/\sqrt{f_c}$, cette fois-ci mesurée par un observateur situé sur la sphère de photons, la relation de dispersion (5.38) s'écrit

$$k'_n(\tilde{\omega}) \approx \left[\tilde{\omega}^2 + \frac{a_n}{r_c^2} + 2\left(\frac{\eta_c^2}{r_c^2}\right)\alpha(n)^2\epsilon_n(\tilde{\omega})\right]^{1/2} \tag{5.39a}$$

et nous avons

$$k'_n(\tilde{\omega}) = \left[\tilde{\omega} + \frac{a_n}{2r_c^2}\,\frac{1}{\tilde{\omega}}\right] + \underset{\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\tilde{\omega}^3}\right). \tag{5.39b}$$

A ce stade nous ne pouvons pas ne pas remarquer que lorsque $a_n > 0$, l'expression (5.39) traduit une relation de dispersion supraluminique. En effet, elle nous conduit à une vitesse de groupe $v_g(\tilde{\omega}) = d\tilde{\omega}/dk'_n(\tilde{\omega}) > 1$. La condition $a_n > 0$ est vérifiée $\forall n \in \mathbb{N}$ pour des champs de spins 1 et 2 se propageant sur une géométrie de Schwarzschild (se reporter à l'équation (13) de Ref. [32]). Cette même condition est également vérifiée pour le champ scalaire de masse nulle pour $n \neq 1$. Ainsi, on ne peut pas la considérer comme une simple condition physique "exotique". Elle semble également être vérifiée dans la plupart des exemples de trous noirs statiques à symétrie sphérique que nous considérerons plus bas. A priori, ce résultat peut sembler quelque peu déroutant. Mais, il est important de remarquer que des relations de dispersion supraluminiques pour les "ondes de surface" se propageant sur la sphère de photons n'impliquent pas nécessairement une violation du principe de causalité.

En effet, pour transmettre une information entre une source et un récepteur situé à l'extérieur d'un trou noir, plusieurs des "canaux" discutés lors de l'introduction de l'opérateur de diffusion, sont à considérer. Bien sûr, il y a des canaux associés à la diffusion par la sphère de photons d'un trou noir (pour une source et un récepteur à l'infini, ils correspondent à la somme sur les pôles de Regge dans l'expression (5.26)) mais il y a aussi les canaux associés aux "rayons géométriques" (pour une source et un récepteur à l'infini, ils proviennent de l'intégrale de fond (5.20) évaluée sur le contour Γ de la figure 5.1). Afin d'étudier la causalité dans de telles configurations, il serait nécessaire de prendre en compte les interférences entre toutes les composantes spectrales monochromatiques du signal transportant l'information pour l'ensemble des canaux. Nous pensons qu'une telle étude ne démontrera pas de violation du principe de causalité. La situation rencontrée ici est très similaire à celle discutée par un grand nombre d'auteurs qui travaillent sur l'électromagnétisme dans les milieux dispersifs (voir, e.g. [14] ainsi que les références qui y sont citées). Dans de tels contextes, il a été observé qu'une vitesse de groupe supérieure à la vitesse de la lumière ne viole pas le principe de causalité parce qu'elle ne correspond tout simplement pas à la vitesse de transmission de l'information, ou vitesse de propagation de l'énergie.

Enfin, le résultat WKB (5.34) et les trajectoires de Regge associées nous permettent d'obtenir, à partir des relations semiclassiques (5.27) et (5.29), des expressions analytiques pour les fréquences complexes des QNMs. En effet, en injectant (5.34) dans les équations (5.27) et (5.29), nous obtenons pour de grandes valeurs de ℓ, les comportements suivants

$$\omega_{\ell n}^{(o)} = \frac{\sqrt{f_c}}{r_c}\left[\left(\ell + \frac{d-3}{2}\right) - \frac{a_n}{2\ell} + (d-3)\frac{a_n}{4\ell^2} + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell^3}\right)\right], \tag{5.40a}$$

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \eta_c\frac{\sqrt{f_c}}{r_c}\alpha(n)\left[1 + \frac{c_n}{2\ell^2} + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell^3}\right)\right], \tag{5.40b}$$

avec $\ell \in \mathbb{N}$ et $n = 1, 2, \ldots$. Ici,

$$c_n = a_n + 2b_n. \tag{5.41}$$

Notons, que les premiers termes de ces développements (5.40) ont déjà été obtenus (cf. Refs. [127, 17, 44]). Les termes d'ordre supérieur en $1/\ell$ et $1/\ell^2$ sont totalement inédits (se reporter cependant à la section 5.2 de Ref. [44]). Ils sont directement liés au comportement non-linéaire de la relation de dispersion et de l'amortissement des "ondes de surface" se propageant dans un très proche voisinage de la sphère de photons.

5.2 Applications

Dans cette section, nous appliquerons le formalisme que nous venons de développer à quelques géométries d'espace-temps d'intérêt physique.

5.2.1 Trous noirs de Schwarzschild-Tangherlini

Pour les trous noirs de Schwarzschild-Tangherlini, qui sont une généralisation du trou noir de Schwarzschild de dimension 4, construite par Tangherlini dans les années 60 [115], la fonction $f(r)$ s'écrit

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{d-3} \tag{5.42}$$

avec

$$r_0^{d-3} = \frac{16\pi M}{(d-2)\mathcal{A}_{d-2}} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{d-2} = \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma[(d-1)/2]}. \tag{5.43}$$

Ici, M est la masse du trou noir, $\mathcal{A}_{d-2}$ l'aire de la sphère unité S^{d-2}. L'horizon des évènements est situé à $r_h = r_0$. L'orbite circulaire instable est en

$$r_c = r_0 \left(\frac{d-1}{2}\right)^{1/(d-3)} \tag{5.44a}$$

et le paramètre associé η_c est égale à

$$\eta_c = \sqrt{d-3}. \tag{5.44b}$$

5.2.1.1 Le trou noir de Schwarzschild

Pour $d = 4$, la solution de Schwarzschild-Tangherlini n'est rien d'autre que le trou noir de Schwarzschild ordinaire. Nous obtenons

$$r_c = \frac{3}{2} r_0 = 3M, \tag{5.45a}$$

$$\eta_c = 1, \tag{5.45b}$$

ainsi que

$$a_n = -\frac{29}{216} + \frac{5}{18}\alpha(n)^2, \tag{5.46a}$$

$$b_n = \frac{1357}{15552} - \frac{305}{3888}\alpha(n)^2, \tag{5.46b}$$

$$c_n = \frac{313}{7776} + \frac{235}{1944}\alpha(n)^2, \tag{5.46c}$$

$$\epsilon_n(\omega) = \frac{b_n}{27M^2\omega^2 + a_n + \alpha(n)^2}. \tag{5.46d}$$

L'approximation WKB (5.34) pour les pôles de Regge nous amène à l'expression

$$\lambda_n(\omega) \approx \left[27M^2\omega^2 + a_n + 2\alpha(n)^2\epsilon_n(\omega)\right]^{1/2} + i\alpha(n)\left[1 + \epsilon_n(\omega)\right]. \tag{5.47}$$

Le comportement pour les hautes fréquences (5.35) des pôles de Regge s'écrit alors

$$\lambda_n(\omega) = \left[3\sqrt{3}M\omega + \frac{\sqrt{3}a_n}{18M\omega}\right] + i\alpha(n)\left[1 + \frac{b_n}{27M^2\omega^2}\right] + \underset{\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\omega^3}\right). \tag{5.48}$$

Les résultats (5.47) et (5.48) sont en accord avec les résultats obtenus dans Ref. [32]. Les fréquences de résonance et l'amortissement des QNMs, données par les relations générales (5.40), se réduisent ici à

$$\omega_{\ell n}^{(0)} = \frac{1}{3\sqrt{3}M}\left[\left(\ell + \frac{1}{2}\right) - \frac{a_n}{2\ell} + \frac{a_n}{4\ell^2} + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell^3}\right)\right], \tag{5.49a}$$

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \frac{\alpha(n)}{3\sqrt{3}M}\left[1 + \frac{c_n}{2\ell^2} + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell^3}\right)\right]. \tag{5.49b}$$

Les relations (5.49) sont, à nouveau, en accord avec les résultats obtenus dans Ref. [71] (voir également Ref. [32]).

5.2.1.2 Le trou noir de Schwarzschild-Tangherlini de dimension 5

Pour $d = 5$, nous avons

$$r_c = \sqrt{2} r_0, \tag{5.50a}$$
$$\eta_c = \sqrt{2}, \tag{5.50b}$$

ainsi que

$$a_n = -\frac{5}{16} + \frac{3}{4}\alpha(n)^2, \tag{5.51a}$$
$$b_n = \frac{115}{512} - \frac{31}{128}\alpha(n)^2, \tag{5.51b}$$
$$c_n = \frac{5}{48} + \frac{17}{64}\alpha(n)^2, \tag{5.51c}$$
$$\epsilon_n(\omega) = \frac{b_n}{2r_c^2\,\omega^2 + a_n + 2\alpha(n)^2}. \tag{5.51d}$$

L'approximation WKB (5.34) pour les pôles de Regge nous conduit à

$$\lambda_n(\omega) \approx \left[2r_c^2\omega^2 + a_n + 4\alpha(n)^2\epsilon_n(\omega)\right]^{1/2} + i\alpha(n)[1 + \epsilon_n(\omega)] \tag{5.52}$$

et leur comportement à hautes fréquences (5.35) nous donne

$$\lambda_n(\omega) = \left[\sqrt{2}\, r_c\omega + \frac{a_n}{2\sqrt{2}\, r_c\omega}\right] + i\sqrt{2}\,\alpha(n)\left[1 + \frac{b_n}{2r_c^2\omega^2}\right] + \underset{\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\omega^3}\right). \tag{5.53}$$

Les fréquences d'excitation et les constantes d'amortissement des QNMs données par les formules générales (5.40) se réduisent à

$$\omega_{\ell n}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}\, r_c}\left[(\ell+1) - \frac{a_n}{2\ell} + \frac{a_n}{2\ell^2} + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell^3}\right)\right], \tag{5.54a}$$
$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \frac{\alpha(n)}{r_c}\left[1 + \frac{c_n}{2\ell^2} + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell^3}\right)\right]. \tag{5.54b}$$

5.2.1.3 Le trou noir de Schwarzschild-Tangherlini de dimension 6

Pour $d = 6$, nous avons

$$r_c = \left(\frac{5}{2}\right)^{1/3} r_0, \tag{5.55a}$$
$$\eta_c = \sqrt{3}, \tag{5.55b}$$

et

$$a_n = -\frac{31}{60} + \frac{7}{5}\alpha(n)^2, \tag{5.56a}$$
$$b_n = \frac{1411}{3600} - \frac{91}{180}\alpha(n)^2, \tag{5.56b}$$
$$c_n = \frac{481}{1800} + \frac{7}{18}\alpha(n)^2, \tag{5.56c}$$
$$\epsilon_n(\omega) = \frac{b_n}{(5/3)r_c^2\,\omega^2 + a_n + 3\alpha(n)^2}. \tag{5.56d}$$

L'approximation WKB (5.34) pour la détermination des pôles de Regge nous conduit à

$$\lambda_n(\omega) \approx \left[\frac{5}{3}r_c^2\omega^2 + a_n + 6\alpha(n)^2\epsilon_n(\omega)\right]^{1/2} + i\sqrt{3}\alpha(n)\left[1+\epsilon_n(\omega)\right] \tag{5.57}$$

et leur comportement à hautes fréquences (5.35) s'écrit

$$\lambda_n(\omega) = \left[\left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} r_c\omega + \frac{a_n}{2(5/3)^{1/2}r_c\omega}\right] + i\sqrt{3}\,\alpha(n)\left[1+\frac{b_n}{(5/3)r_c^2\,\omega^2}\right] + \underset{\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\omega^3}\right). \tag{5.58}$$

Les fréquences d'excitations et les constantes d'amortissement des QNMs données par (5.40) se réduisent à

$$\omega_{\ell n}^{(0)} = \left(\frac{3}{5}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{r_c}\right)\left[\left(\ell+\frac{3}{2}\right) - \frac{a_n}{2\ell} + 3\frac{a_n}{4\ell^2} + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell^3}\right)\right], \tag{5.59a}$$

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \sqrt{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{r_c}\right)\alpha(n)\left[1+\frac{c_n}{2\ell^2} + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell^3}\right)\right]. \tag{5.59b}$$

5.2.1.4 Termes dominants pour le trou noir de Schwarzschild-Tangherlini de dimension arbitraire

Notons que, dans le cas d-dimensionnel, nous pouvons calculer simplement les termes dominants des pôles de Regge et des fréquences complexes quasinormales. Nous avons

$$\lambda_n(\omega) = \sqrt{\frac{d-1}{d-3}}\,r_c\omega + i\sqrt{d-3}\,\alpha(n) + \underset{\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\omega}\right) \tag{5.60}$$

et

$$\omega_{\ell n}^{(0)} = \sqrt{\frac{d-3}{d-1}}\left(\frac{1}{r_c}\right)\left(\ell+\frac{d-3}{2}\right) + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell}\right), \tag{5.61a}$$

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \frac{d-3}{\sqrt{d-1}}\left(\frac{1}{r_c}\right)\alpha(n) + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell}\right). \tag{5.61b}$$

Les relations (5.61) sont en accord avec les résultats obtenus dans [79] et [127].

5.2.2 Le trou noir de Reissner-Nordström

Pour le trou noir de Reissner-Nordström d-dimensionnel [115], la fonction $f(r)$ s'écrit

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{d-3} + \frac{\theta^2}{r^{2(d-3)}} \tag{5.62}$$

avec (cf. [95] ou Appendix A de [96])

$$r_0^{d-3} = \frac{16\pi M}{(d-2)\mathcal{A}_{d-2}} \doteq 2\mu \quad \text{et} \quad \theta^2 = \frac{8\pi q^2}{(d-2)(d-3)}. \tag{5.63}$$

Ici, M est la masse du trou noir et q sa charge. Nous supposons, de plus, que $\mu^2 > \theta^2$. Signalons qu'ici nous utilisons le système d'unité d'Heaviside. Pour cette géométrie, il existe deux horizons des évènements, connus sous les noms d'horizon intérieur et d'horizon extérieur. Ils sont respectivement situés en

$$r_- = \left(\mu - \sqrt{\mu^2-\theta^2}\right)^{1/(d-3)}, \tag{5.64a}$$

$$r_+ = \left(\mu + \sqrt{\mu^2-\theta^2}\right)^{1/(d-3)}. \tag{5.64b}$$

Nous sommes uniquement intéressés par l'horizon extérieur avec une rayon à $r_h = r_+$ parce que nous avons précisément $f(r) > 0$ pour $r \in]r_h, +\infty[$ (cf. hypothèse (i) en début de ce chapitre).

Les géodésiques nulles correspondant à des orbites circulaires instables sont situées en $r_c > r_h$, donné par

$$r_c = \left(\frac{(d-1)\mu + \sqrt{[(d-1)\mu]^2 - 4(d-2)\theta^2}}{2} \right)^{1/(d-3)}. \tag{5.65a}$$

Nous avons, de plus, le paramètre η_c correspondant

$$\eta_c = \sqrt{(d-3) - \frac{(d-2)(d-3)\theta^2}{r_c^{2(d-3)}}}. \tag{5.65b}$$

Pour $\theta = 0$ nous retrouvons les résultats relatifs aux trous noirs de Schwarzschild-Tangherlini. Notons qu'il est également possible d'exprimer η_c sous deux autres formes équivalentes puisque, comme conséquence de (5.5), les paramètres r_c, μ et θ sont reliés par

$$\left(r_c^{d-3}\right)^2 - (d-1)\mu r_c^{d-3} + (d-2)\theta^2 = 0. \tag{5.66}$$

5.2.2.1 Le trou noir de Reissner-Nordström de dimension 4

Pour $d = 4$, nous avons

$$r_c = \frac{1}{2}(3M + \sqrt{9M^2 - 8Q^2}), \tag{5.67a}$$

$$\eta_c = \sqrt{1 - \frac{2Q^2}{r_c^2}}, \tag{5.67b}$$

ainsi que

$$a_n = \frac{\left(1 - Q^2/r_c^2\right)^2}{216(1 - 2Q^2/r_c^2)^2}\left[-29 + \frac{86Q^2}{r_c^2}\right] + \frac{1 - Q^2/r_c^2}{36(1 - 2Q^2/r_c^2)^2}\left[10 - \frac{62Q^2}{r_c^2} + \frac{124Q^4}{r_c^4}\right]\alpha(n)^2, \tag{5.68a}$$

$$\begin{aligned} b_n = {} & \frac{\left(1 - Q^2/r_c^2\right)^2}{15552(1 - 2Q^2/r_c^2)^5}\left[1357 - \frac{12478Q^2}{r_c^2} + \frac{42333Q^4}{r_c^4} - \frac{64324Q^6}{r_c^6} + \frac{43588Q^8}{r_c^8}\right] \\ & + \frac{1 - Q^2/r_c^2}{3888(1 - 2Q^2/r_c^2)^5}\left[-305 + \frac{3943Q^2}{r_c^2} - \frac{21335Q^4}{r_c^4} + \frac{56357Q^6}{r_c^6} - \frac{69544Q^8}{r_c^8} + \frac{34772Q^{10}}{r_c^{10}}\right]\alpha(n)^2, \end{aligned} \tag{5.68b}$$

$$\begin{aligned} c_n = {} & \frac{\left(1 - Q^2/r_c^2\right)^2}{7776(1 - 2Q^2/r_c^2)^5}\left[313 - \frac{3118Q^2}{r_c^2} + \frac{11229Q^4}{r_c^4} - \frac{18820Q^6}{r_c^6} + \frac{18820Q^8}{r_c^8}\right] \\ & + \frac{1 - Q^2/r_c^2}{1944(1 - 2Q^2/r_c^2)^5}\left[235 - \frac{2645Q^2}{r_c^2} + \frac{11929Q^4}{r_c^4} - \frac{28315Q^6}{r_c^6} + \frac{37592Q^8}{r_c^8} - \frac{18796Q^{10}}{r_c^{10}}\right]\alpha(n)^2, \end{aligned} \tag{5.68c}$$

$$\epsilon_n(\omega) = \frac{b_n}{3r_c^2/(1 - Q^2/r_c^2)\,\omega^2 + a_n + (1 - 2Q^2/r_c^2)\alpha(n)^2}. \tag{5.68d}$$

Ici, nous avons noté $Q^2 = 4\pi q^2$. Cela nous permet de comparer nos résultats avec ceux exprimés dans le système d'unités de Gauss. L'approximation WKB (5.34) pour les pôles de Regge nous conduit à

$$\lambda_n(\omega) \approx \left[\frac{3r_c^2}{1 - Q^2/r_c^2}\omega^2 + a_n + 2\left(1 - \frac{2Q^2}{r_c^2}\right)\alpha(n)^2\epsilon_n(\omega)\right]^{1/2} + i\sqrt{1 - \frac{2Q^2}{r_c^2}}\alpha(n)[1 + \epsilon_n(\omega)] \tag{5.69}$$

Et leur comportement hautes fréquences (5.35) nous donne

$$\lambda_n(\omega) = \left[\frac{\sqrt{3}\,r_c}{\sqrt{1-Q^2/r_c^2}}\omega + \frac{a_n}{2\sqrt{3}\,r_c/\sqrt{1-Q^2/r_c^2}\,\omega}\right] + i\sqrt{1-\frac{2Q^2}{r_c^2}}\alpha(n)\left[1+\frac{b_n}{3r_c^2/(1-Q^2/r_c^2)\,\omega^2}\right] + \underset{\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\omega^3}\right). \tag{5.70}$$

Les fréquences d'excitation et les constantes d'amortissement des QNMs, données par les formules générales (5.40), se réduisent à

$$\omega_{\ell n}^{(0)} = \sqrt{1-\frac{Q^2}{r_c^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}\,r_c}\right)\left[\left(\ell+\frac{1}{2}\right) - \frac{a_n}{2\ell} + \frac{a_n}{4\ell^2} + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell^3}\right)\right], \tag{5.71a}$$

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \sqrt{1-\frac{2Q^2}{r_c^2}}\sqrt{1-\frac{Q^2}{r_c^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}\,r_c}\right)\alpha(n)\left[1+\frac{c_n}{2\ell^2} + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell^3}\right)\right]. \tag{5.71b}$$

Les termes dominants de (5.71) sont en accord avec les formules (37) et (38) de [50]. De plus, signalons au passage que, pour $Q = 0$, tous les résultats obtenues pour les pôles de Regge et les fréquences complexes quasinormales pour le trou noir de Reissner-Nordström de dimension 4, se ramènent aux résultats relatifs au trou noir de Schwarzschild.

5.2.2.2 Termes dominants pour le trou noir de Reissner-Nordström de dimension arbitraire

Dans le cas d-dimensionnel, nous pouvons aisément calculer les termes dominants des pôles de Regge et des fréquences complexes quasinormales. Nous avons

$$\lambda_n(\omega) = \sqrt{\frac{d-1}{d-3}}\frac{r_c\omega}{\sqrt{1-\frac{\theta^2}{r_c^{2(d-3)}}}} + i\sqrt{d-3}\sqrt{1-\frac{(d-2)\theta^2}{r_c^{2(d-3)}}}\alpha(n) + \underset{\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

et

$$\omega_{\ell n}^{(0)} = \sqrt{\frac{d-3}{d-1}}\sqrt{1-\frac{\theta^2}{r_c^{2(d-3)}}}\left(\frac{1}{r_c}\right)\left(\ell+\frac{d-3}{2}\right) + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell}\right), \tag{5.72a}$$

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \frac{d-3}{\sqrt{d-1}}\sqrt{1-\frac{\theta^2}{r_c^{2(d-3)}}}\sqrt{1-\frac{(d-2)\theta^2}{r_c^{2(d-3)}}}\left(\frac{1}{r_c}\right)\alpha(n) + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell}\right). \tag{5.72b}$$

Signalons que pour $\theta = 0$, à partir des expressions (5.72) et (5.72), nous retrouvons les résultats des trous noirs de Schwarzschild-Tangherlini.

5.2.3 Le trou noir acoustique canonique

Pour le trou noir acoustique canonique (pour plus de détails se reporter à la section 8 de [120]), la fonction $f(r)$ s'écrit

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4. \tag{5.73}$$

L'horizon des évènements acoustique est situé en $r_h = r_0$, le rayon des orbites circulaires instables est donné par

$$r_c = 3^{1/4} r_0 \tag{5.74a}$$

et nous avons le paramètre η_c correspondant

$$\eta_c = 2. \tag{5.74b}$$

En outre, nous avons

$$a_n = \frac{1}{108} + \frac{20}{9}\alpha(n)^2, \tag{5.75a}$$

$$b_n = -\frac{85}{1944} - \frac{215}{243}\alpha(n)^2, \tag{5.75b}$$

$$c_n = -\frac{19}{243} + \frac{110}{243}\alpha(n)^2, \tag{5.75c}$$

$$\epsilon_n(\omega) = \frac{b_n}{(3/2)r_c^2\,\omega^2 + a_n + 4\alpha(n)^2}. \tag{5.75d}$$

L'approximation WKB (5.34) pour les pôles de Regge nous conduit à

$$\lambda_n(\omega) \approx \left[\frac{3}{2}r_c^2\omega^2 + a_n + 8\alpha(n)^2\epsilon_n(\omega)\right]^{1/2} + 2i\alpha(n)\left[1+\epsilon_n(\omega)\right] \tag{5.76}$$

et leur comportement hautes fréquences (5.35) nous donne

$$\lambda_n(\omega) = \left[\frac{r_c}{\sqrt{2}}\omega + \frac{a_n}{\sqrt{2}\,r_c\omega}\right] + 2i\alpha(n)\left[1 + \frac{b_n}{(3/2)r_c^2\omega^2}\right] + \underset{\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\omega^3}\right). \tag{5.77}$$

Les fréquences d'excitation et les amortissements des QNMs, données par les relations (5.40), se ramènent à

$$\omega_{\ell n}^{(0)} = \frac{\sqrt{2}}{r_c}\left[(\ell+1/2) - \frac{a_n}{2\ell} + \frac{a_n}{4\ell^2} + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell^3}\right)\right], \tag{5.78a}$$

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{r_c}\alpha(n)\left[1 + \frac{c_n}{2\ell^2} + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell^3}\right)\right]. \tag{5.78b}$$

Les termes dominants (5.78) sont en accord avec la relation (53) de [10].
Dans [44], Dolan et Ottewill ont obtenu pour $n=0$, les développements de $\omega_{\ell n}^{(0)}$ et $\Gamma_{\ell n}/2$ jusqu'à l'ordre $1/(\ell+1/2)^4$. Nos résultats (5.78) sont cohérents avec leur équation (78).

5.3 Section d'absorption - Structure fine : une généralisation

5.3.1 Vers une théorie générale

Comme nous l'avons déjà vu plus haut, l'analyse développée dans le chapitre relatif au trou noir de Schwarzschild peut être naturellement étendue dans le cas plus général d'une théorie de champ scalaire de masse nulle définie dans une géométrie statique à symétrie sphérique de dimension $d \geq 4$ arbitraire, possédant une sphère de photons. Nous garderons donc les mêmes notations que précédemment.
Notons que, pour de tels trous noirs, le paramètre d'impact critique et la section efficace géométrique sont, à présent, donnés respectivement par $b_c = r_c/\sqrt{f(r_c)}$ et $\sigma_{\rm geo} = \pi^{(d-2)/2}b_c^{d-2}/\Gamma(d/2)$ (cf., e.g. [66]). Bien entendu, quand $f(r) = 1-2M/r$ et $d=4$, nous retrouvons l'ensemble des résultats relatifs au trou noir de Schwarzschild.

L'équation d'onde pour un champ scalaire de masse nulle se propageant dans un tel *background* gravitationnel se réduit toujours, après séparation des variables radiale et angulaires et l'introduction de l'onde partielle radiale $\phi_{\omega\ell}(r)$ avec $\omega > 0$ et $\ell \in \mathbb{N}$, à l'équation de Regge-Wheeler (4.22) mais, en lieu et place du potentiel (4.23), nous avons, cette fois

$$V_\ell(r) = f(r)\left[\frac{[\ell+(d-3)/2]^2 - [(d-3)/2]^2}{r^2} + \frac{(d-2)(d-4)}{4r^2}f(r) + \left(\frac{d-2}{2r}\right)f'(r)\right]. \tag{5.79}$$

Les conditions aux limites (4.24) restent toujours valables et les facteurs de corps gris sont toujours définis par (4.25) mais, à présent, la section efficace d'absorption du trou noir est donnée par (cf. [65])

$$\sigma_{\rm abs}(\omega) = \frac{\pi^{(d-2)/2}}{\Gamma\left[(d-2)/2\right]\omega^{d-2}}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{(\ell+d-4)!}{\ell!}\,(2\ell+d-3)\,\Gamma_\ell(\omega). \tag{5.80}$$

Dans l'article [30], les auteurs ont montré que les fluctuations de (5.80) autour de la section efficace géométrique est décrite par la série sur les pôles de Regge

$$\sigma_{\rm abs}^{\rm RP}(\omega) = -\frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma\left[(d-2)/2\right]\omega^{d-2}}\,{\rm Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Gamma[\lambda_n(\omega)+(d-3)/2]}{\Gamma[\lambda_n(\omega)-(d-5)/2]}\frac{e^{i\pi[\lambda_n(\omega)-(d-3)/2]}\lambda_n(\omega)\gamma_n(\omega)}{\sin[\pi(\lambda_n(\omega)-(d-3)/2)]}\right). \quad (5.81)$$

Bien sûr, a priori, une telle série, même si elle fournit une description exacte des fluctuations, ne semble pas vraiment intéressante d'un point de vue physique. Dans [30], les auteurs ont été capables d'en extraire une approximation eikonale pour la section efficace d'absorption basée sur une première approximation, assez grossière, pour les pôles de Regge et leur résidus.

Dans l'Annexe C.2, nous avons obtenu un ordre supplémentaire pour ces approximations. Nous pouvons donc aller au-delà de la description eikonale et construire analytiquement la structure fine de la section efficace d'absorption. En utilisant les développements asymptotiques (C.18) et (C.20) pour les pôles de Regge $\lambda_n(\omega)$ et leur résidus $\gamma_n(\omega)$, ainsi que les relations (4.32) et

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} \sim \left(\frac{1}{z}\right)^{-a+b} \qquad \text{valable si } |z|\to+\infty \text{ et } |\arg z|<\pi, \quad (5.82)$$

ne gardant que la contribution du premier pôle de Regge dans l'expression (5.81), nous obtenons

$$\begin{aligned}\sigma_{\rm abs}(\omega) \approx \sigma_{\rm geo}\Bigg(1 &+ (-1)^{d-3}\,4(d-2)\pi\,\eta_c\,e^{-\pi\eta_c}\frac{\sin\left[2\pi(r_c/\sqrt{f_c})\omega\right]}{2\pi(r_c/\sqrt{f_c})\omega}\\ &+8(d-2)\pi\eta_c e^{-2\pi\eta_c}\frac{\sin\left[4\pi(r_c/\sqrt{f_c})\omega\right]}{4\pi(r_c/\sqrt{f_c})\omega}\\ &-(-1)^{d-3}4(d-2)\pi^2 e^{-\pi\eta_c}\left[a_c-(d-3)\eta_c^2-2\pi\eta_c a_1\right]\frac{\cos\left[2\pi(r_c/\sqrt{f_c})\omega\right]}{\left[2\pi(r_c/\sqrt{f_c})\omega\right]^2}\\ &-16(d-2)\pi^2 e^{-2\pi\eta_c}\left[a_c-(d-3)\eta_c^2-4\pi\eta_c a_1\right]\frac{\cos\left[4\pi(r_c/\sqrt{f_c})\omega\right]}{\left[4\pi(r_c/\sqrt{f_c})\omega\right]^2}\Bigg). \end{aligned} \quad (5.83)$$

Dans la relation (5.83), les deux premiers termes correspondent à la description eikonale construite dans la section 4 de l'article [30], tandis que le troisième, le quatrième et le cinquième décrivent la structure fine de la section d'absorption. Notons que l'argument des termes en sin et cos dépendent de la période orbitale, $2\pi(r_c/\sqrt{f_c}) = 2\pi b_c$, nécessaire à une particule de masse nulle pour compléter sa révolution autour du trou noir, sur la sphère de photons. Il en va de même pour sa seconde harmonique. Bien sûr, l'équation (5.83) généralise (4.33) pour des trous noirs statiques à symétrie sphérique et, *mutatis mutandis*, l'interprétation physique de la structure fine pour le trou noir de Schwarzschild fournit dans le précédent chapitre reste valable dans le cas général. Notons que les deux derniers termes de l'expression (5.83) dépendent des coefficients a_c et a_1 définis dans l'Annexe C.2 (se reporter à l'équation (C.21) pour a_c et à l'équation (C.19), avec $n=1$, pour a_1) qui sont exprimés en fonction des dérivées de $f(r)$ évaluées sur la sphère de photons. Il est également important de souligner que le cinquième terme de (5.83) n'était pas présent pour le trou noir de Schwarzschild. Plus précisément, nous l'avons volontairement ignoré dans le chapitre précédent parce qu'il était numériquement négligeable pour ce trou noir particulier. En fait, comme nous allons le voir plus bas, il est également numériquement négligeable pour les trous noirs de Schwarzschild-Tangherlini de dimension 5 et 6 et pour le trou noir de Reissner-Nordström de dimension 4. Cependant, nous considérons que ce n'est pas là un fait général.

Pour terminer, notons que pour les "très hautes fréquences", nous pouvons ne pas tenir compte des deux derniers termes de l'expression (5.83). Nous avons donc à notre disposition une formule simple décrivant de manière précise la section efficace d'absorption pour un champ scalaire de masse nulle se propageant dans la géométrie d'un trou noir statique à symétrie sphérique.

5.3.2 Applications

5.3.2.1 Application 1 : Trou noir de Schwarzschild-Tangherlini

Appliquons, à présent, la théorie générale développée dans la précédente section, aux trous noirs de Schwarzschild-Tangherlini de dimension d. Nous avons

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r_h}{r}\right)^{d-3}. \tag{5.84}$$

Ici, r_h, qui représente la position de l'horizon des évènements dans la coordonnée radiale standard, est liée à la masse M du trou noir par

$$r_h^{d-3} = \frac{16\pi M}{(d-2)\mathcal{A}_{d-2}} \tag{5.85}$$

avec $\mathcal{A}_{d-2} = 2\pi^{(d-1)/2}/\Gamma[(d-1)/2]$, l'aire de la sphère unité S^{d-2}. La sphère de photons est située en

$$r_c = r_h \left(\frac{d-1}{2}\right)^{1/(d-3)}, \tag{5.86a}$$

et le paramètre η_c associé est donné par

$$\eta_c = \sqrt{d-3}, \tag{5.86b}$$

tandis que le paramètre d'impact critique correspondant $b_c = r_c/\sqrt{f_c}$ s'écrit

$$b_c = \sqrt{\frac{d-1}{d-3}} r_c. \tag{5.86c}$$

Pour $d = 5$, nous avons $\sigma_{\text{geo}} = (4\pi/3)b_c^3$ avec $b_c = \sqrt{2}r_c$ et $r_c = \sqrt{2}r_h$ ainsi que $\eta_c = \sqrt{2}$. La formule générale (5.83) se réduit à

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{abs}}^{\text{ST d=5}}(\omega) \approx \sigma_{\text{geo}} \Bigg(1 &+ 12\sqrt{2}\pi e^{-\sqrt{2}\pi} \frac{\sin[2\pi b_c\omega]}{2\pi b_c\omega} + 24\sqrt{2}\pi e^{-2\sqrt{2}\pi} \frac{\sin[4\pi b_c\omega]}{4\pi b_c\omega} \\ &+ 3\pi^2(13-\sqrt{2}\pi)e^{-\sqrt{2}\pi} \frac{\cos[2\pi b_c\omega]}{(2\pi b_c\omega)^2}\Bigg).\end{aligned} \tag{5.87}$$

Pour $d = 6$, nous avons $\sigma_{\text{geo}} = (\pi^2/2)b_c^4$ avec $b_c = \sqrt{5/3}r_c$ et $r_c = (5/2)^{1/3}r_h$ ainsi que $\eta_c = \sqrt{3}$. La formule générale (5.83) se réduit donc à

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{abs}}^{\text{ST d=6}}(\omega) \approx \sigma_{\text{geo}} \Bigg(1 &- 16\sqrt{3}\pi e^{-\sqrt{3}\pi} \frac{\sin[2\pi b_c\omega]}{2\pi b_c\omega} + 32\sqrt{3}\pi e^{-2\sqrt{3}\pi} \frac{\sin[4\pi b_c\omega]}{4\pi b_c\omega} \\ &+ 16\pi^2 \frac{(-114+5\sqrt{3}\pi)}{15} e^{-\sqrt{3}\pi} \frac{\cos[2\pi b_c\omega]}{(2\pi b_c\omega)^2}\Bigg).\end{aligned} \tag{5.88}$$

Notons que, dans les expressions (5.87) et (5.88), nous n'avons pas tenu compte du cinquième terme de l'équation (5.83) qui se révèle être numériquement négligeable.

5.3.2.2 Application 2 : Trou noir de Reissner-Nordström de dimension 4

Nous pouvons également appliquer le formalisme développé dans la section précédente au trou noir de Reissner-Nordström (cf. [94]). Pour cet exemple, nous rappelons

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \tag{5.89}$$

où M est la masse du trou noir et Q sa charge. Nous supposons que $M > Q$. Ce trou noir possède un horizon intérieur et un horizon extérieur respectivement situés en

$$r_- = \left(M - \sqrt{M^2 - Q^2}\right), \tag{5.90a}$$

$$r_+ = \left(M + \sqrt{M^2 - Q^2}\right). \tag{5.90b}$$

Comme précédemment, nous ne sommes intéressés que par l'horizon extérieur de rayon $r_h = r_+$. En effet, dans ce cas, $f(r) > 0$ pour $r \in]r_h, +\infty[$. La sphère de photons est située en

$$r_c = \frac{1}{2}(3M + \sqrt{9M^2 - 8Q^2}), \tag{5.91a}$$

(notons que $r_c > r_h$). Le paramètre η_c associé est donné par

$$\eta_c = \sqrt{1 - \frac{2Q^2}{r_c^2}}. \tag{5.91b}$$

Le paramètre d'impact critique $b_c = r_c/\sqrt{f_c}$ s'écrit

$$b_c = \frac{\sqrt{3}r_c}{\sqrt{1 - Q^2/r_c^2}} \tag{5.91c}$$

et la section efficace géométrique est alors définie par

$$\sigma_{\text{geo}} = \pi b_c^2 = \frac{3\pi r_c^2}{1 - Q^2/r_c^2}. \tag{5.91d}$$

Pour le trou noir de Reissner-Nordström de dimension 4, la formule générale (5.83) se réduit alors à

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{abs}}^{\text{RN d=4}}(\omega) \approx \sigma_{\text{geo}} \Bigg\{ & 1 - 8\pi\eta_c e^{-\pi\eta_c} \frac{\sin[2\pi b_c\omega]}{2\pi b_c\omega} + 16\pi\eta_c e^{-2\pi\eta_c} \frac{\sin[4\pi b_c\omega]}{4\pi b_c\omega} \\ & - \frac{4\pi^2 e^{-\pi\eta_c}}{9\eta_c^4} \left[\left(13 - \frac{72Q^2}{r_c^2} + \frac{123Q^4}{r_c^4} - \frac{82Q^6}{r_c^6} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\pi\eta_c}{3} \left(7 - \frac{18Q^2}{r_c^2} - \frac{39Q^4}{r_c^4} + \frac{50Q^6}{r_c^6} \right) \right] \frac{\cos[2\pi b_c\omega]}{(2\pi b_c\omega)^2} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.92}$$

Dans l'expression (5.92), nous avons, une fois de plus, mis de côté le cinquième terme de l'équation (5.83) qui se trouve être, encore une fois, numériquement négligeable.

5.4 Conclusion

L'existence inattendue d'une structure fine dans le "spectre d'absorption" pour le trou noir de Schwarzschild et pour les trous noirs statiques à symétrie sphérique d'intérêt physique, est une caractéristique qui doit être mise en évidence d'un point de vue théorique. Comme nous l'avons déjà vu pour les fluctuations autour de la section géométrique de capture du trou noir, cette structure fine, pour le trou noir de Schwarzschild, comme pour la théorie plus générale des trous noirs statiques à symétrie sphérique, est une conséquence de "l'onde de surface" se propageant dans un très proche voisinage de la sphère de photons, associée au premier pôle de Regge. Cependant, pour l'interprétation de la structure fine, nous avons vu que nous devions prendre en considération les circonvolutions multiples autour du trou noir de cette "onde de surface" (le phénomène de "battements" présent dans la structure fine est due aux interférences entre des termes dépendant de la période orbitale nécessaire à une particule de masse nulle pour compléter son orbite sur la sphère de photons et leur seconde harmonique) aussi bien que son caractère dispersif (l'amplitude de la première harmonique est construite, en partie, à partir des non-linéarités de la première trajectoire de Regge). Il est de plus important de rappeler la dualité existant entre les pôles de Regge et les fréquences complexes des modes quasinormaux faiblement amortis (cf. [33, 32, 34]). Nous sommes alors amenés à penser que la structure fine de la section d'absorption d'un trou noir, à hautes énergies pourrait être également interprétée, de manière naturelle, en termes de modes quasinormaux.

Chapitre 6

Un retour sur le trou noir de Schwarzschild : Et si le champ scalaire était massif ?

Nous allons considérer, ici, le cas d'un champ scalaire massif se propageant dans une géométrie de Schwarzschild. Nous allons revoir, dans le cadre de la théorie CAM, deux aspects particuliers de la diffusion par un tel trou noir. Plus précisément, nous allons décrire le comportement, aux hautes énergies, du spectre de résonance et de la section d'absorption en soulignant le rôle joué par le paramètre de masse du champ scalaire. Notons que ces deux sujets ont déjà été traités par un certain nombre d'auteurs [23, 117, 58, 110, 73, 81, 61] mais les descriptions données ont seulement été obtenues du point de vue d'une analyse purement numérique (nous renvoyons cependant le lecteur à l'article Ref. [100] ou un "*toy-model*", analytiquement soluble, a été envisagé dans le but de comprendre la dépendance en masse du spectre de résonance, ainsi qu'à un article très récent de Hod [69] dans lequel les résonances du trou noir de Kerr *near-extremal* dues à une perturbation scalaire massive ont également été déduites de manière analytique). L'approche CAM va nous permettre d'aller au-delà des considérations numériques et de comprendre, analytiquement, en fonction du paramètre de masse, les effets bien connus tels que la migration des fréquences quasinormales ainsi que le comportement de la section d'absorption. Bien entendu, il est important de rappeler que les techniques relatives aux pôles de Regge sont formellement valables pour les "hautes" fréquences. Cela représente leur principale limitation. Ainsi, nous ne devons pas attendre de pouvoir décrire directement l'existence du spectre des états liés [36, 116, 76, 126, 81, 61], ce qui constitue un aspect important de la théorie du champ scalaire massif dans une géométrie de Schwarzschild pour des fréquences "suffisamment basses".

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord construire un développement asymptotique des pôles de Regge, aux hautes fréquences, associés au champs scalaire massif. Nous allons utiliser deux approches différentes, chacune mettant en évidence le rôle joué par la sphère de photons du trou noir : (i) une approche puissante développée récemment par Dolan et Ottewill dans Ref. [44], basée sur un nouvel ansatz pour les modes solutions de l'équation de Regge-Wheeler et (ii) une approche plus traditionnelle (cf. Refs. [32, 34] ainsi que les chapitres précédents de ce manuscrit pour des applications aux théories scalaires non massives) basée, nous l'avons vu, sur la méthode WKB développée par Schutz, Will et Iyer (cf. Refs. [108, 72, 71, 124, 79]). Puis, à partir des pôles de Regge, nous obtiendrons les fréquences quasinormales faiblement amorties relatives au champ scalaire massif en fonction du paramètre de masse. Cela nous permettra de montrer explicitement que lorsque la masse du champ scalaire augmente, les fréquences d'excitation augmentent tandis que l'amortissement associé diminue. Enfin, nous considérerons le problème d'absorption pour ce même champ scalaire massif. A partir des techniques relatives aux pôles de Regge, nous ferons une resommation de la section efficace d'absorption qui nous fournira une formule simple décrivant très précisément, aux "hautes" fréquences, son comportement et soulignant plus particulièrement aussi bien le rôle du paramètre de masse du champ que celui de la sphère de photons. Pour conclure ce chapitre, nous présenterons brièvement quelques généralisations possibles de ce travail.

6.1 Pôles de Regge pour le champ scalaire massif et fréquences quasinormales complexes associées

6.1.1 Généralités et notations

Dans cette partie, nous décrirons le premier problème que nous souhaitons résoudre en utilisant les outils de la théorie CAM et nous en profiterons pour introduire les principales notations utilisées ici. Nous ne rappelons plus les aspects géométriques relatifs au trou noir de Schwarzschild, dont le lecteur est déjà familier.

Cependant, afin de simplifier les discussions qui vont suivre et pour interpréter physiquement certains de nos résultats, il est nécessaire de souligner quelques aspects de la diffusion de particules massives (ou non) par un trou noir de Schwarzschild, aspects liés plus ou moins directement à l'existence de sa sphère de photons en $r = 3M$ (cf., e.g., Chap. 25 de Ref. [94] ou, pour plus de précisions, Chap. 3 de Ref. [19] et, pour certaines notations nous utiliserons le choix adopté dans Ref. [41]).

Considérons une particule de masse μ et d'énergie $\omega > \mu$. Notons $p(\omega) = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ et $v(\omega) = p(\omega)/\omega$, respectivement la quantité de mouvement de la particule et sa vitesse, à "l'infini" du trou noir. En particulier, nous avons

$$v(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\omega^2}}. \tag{6.1}$$

Nous rappelons que, pour μ fixée, il existe une sphère, dont la localisation dépend du paramètre ω, située en $r = r_c(\omega)$, avec

$$r_c(\omega) = 2M \left(\frac{3 + \left(1 + 8v^2(\omega)\right)^{1/2}}{1 + \left(1 + 8v^2(\omega)\right)^{1/2}} \right), \tag{6.2}$$

sur laquelle une particule massive est en orbite circulaire instable autour du trou noir, suivant des géodésiques de genre temps. Nous avons $r_c(\omega) \in]3M, 4M[$. Nous souhaitons également rappeler que le rayon critique $r_c(\omega)$ définit un paramètre d'impact critique

$$b_c(\omega) = \frac{M}{\sqrt{2}\, v^2(\omega)} \left[8v^4(\omega) + 20v^2(\omega) - 1 + \left(1 + 8v^2(\omega)\right)^{3/2} \right]^{1/2}. \tag{6.3}$$

Le trou noir capture toutes particules incidentes ayant un paramètre d'impact $b < b_c(\omega)$ tandis que les particules de paramètre d'impact $b > b_c(\omega)$ sont, quant à elles, diffusées. Ainsi, pour des particules de masse μ, d'énergie ω, la section d'absorption géométrique du trou noir de Schwarzschild est $\sigma_{\rm geo}(\omega) = \pi b_c^2(\omega)$ ou, plus précisément,

$$\sigma_{\rm geo}(\omega) = \frac{\pi M^2}{2\, v^4(\omega)} \left[8v^4(\omega) + 20v^2(\omega) - 1 + \left(1 + 8v^2(\omega)\right)^{3/2} \right]. \tag{6.4}$$

Notons que $v(\omega) = 1$ pour $\mu = 0$ et, à partir des relations (6.2)-(6.4), nous retrouvons sans surprise, l'existence de la sphère de photons du trou noir située en $r_c(\omega) = 3M$. De plus, le paramètre d'impact critique correspondant est, bien entendu, donné par $b_c(\omega) = 3\sqrt{3}M$. En conséquence, nous retrouvons la section géométrique bien connue du trou noir de Schwarzschild $\sigma_{\rm geo}(\omega) = 27\pi M^2$ pour des particules de masse nulle. De plus, signalons que pour $\mu \neq 0$, nous avons les développements asymptotiques suivants

$$r_c(\omega) = 3M \left[1 + \frac{\mu^2}{9\omega^2} + \underset{\omega \to +\infty}{\mathcal{O}} \left(\frac{1}{\omega^4} \right) \right], \tag{6.5a}$$

$$b_c(\omega) = 3\sqrt{3}M \left[1 + \frac{\mu^2}{3\omega^2} + \underset{\omega \to +\infty}{\mathcal{O}} \left(\frac{1}{\omega^4} \right) \right], \tag{6.5b}$$

$$\sigma_{\rm geo}(\omega) = 27\pi M^2 \left[1 + \frac{2\mu^2}{3\omega^2} + \underset{\omega \to +\infty}{\mathcal{O}} \left(\frac{1}{\omega^4} \right) \right]. \tag{6.5c}$$

Ainsi, en première approximation et aux hautes énergies, une particule massive se comporte comme une particule de masse nulle. En particulier, elle est en orbite autour du trou noir suivant des orbites circulaires instables situées au voisinage de la sphère de photons.

A présent, nous considérons un champ scalaire massif Φ de masse μ se propageant à l'extérieur d'un trou noir de Schwarzschild. Son évolution est décrite par l'équation d'onde $(\Box - \mu^2)\Phi = 0$ qui se réduit, après séparation de variables radiales et angulaires et introduction de la fonction d'onde radiale partielle $\phi_{\omega,\ell}(r)$ avec $\omega > 0$ et $\ell \in \mathbb{N}$, à l'équation de Regge-Wheeler

$$\frac{d^2\phi_{\omega,\ell}}{dr_*^2} + \left[\omega^2 - V_\ell(r)\right]\phi_{\omega,\ell} = 0. \tag{6.6}$$

Dans cette équation (6.6), comme nous en avons pris l'habitude tout au long de ce manuscrit, $V_\ell(r)$ est le potentiel de Regge-Wheeler, qui cette fois, est donné par

$$V_\ell(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[\mu^2 + \frac{(\ell+1/2)^2 - 1/4}{r^2} + \frac{2M}{r^3}\right] \tag{6.7}$$

Comme nous l'avons signalé dans la section 1.2.4 de ce manuscrit, nous ne considérerons que les modes "IN" (cf., e.g., Ref. [13] ou Chap. 30 de Ref. [39]) qui sont solutions de (6.6) avec un comportement purement rentrant à l'horizon $r = 2M$, i.e., qui satisfont

$$\phi_{\omega,\ell}(r) \underset{r_* \to -\infty}{\sim} T_\ell(\omega) e^{-i\omega r_*} \tag{6.8a}$$

et qui, de plus, à l'infini spatial $r \to +\infty$, ont un comportement asymptotique de la forme

$$\phi_{\omega,\ell}(r) \underset{r_* \to +\infty}{\sim} \left[\frac{\omega}{p(\omega)}\right]^{1/2} \left(e^{-i[p(\omega)r_* + (M\mu^2/p(\omega))\ln(r/M)]} + R_\ell(\omega) e^{+i[p(\omega)r_* + (M\mu^2/p(\omega))\ln(r/M)]}\right). \tag{6.8b}$$

Dans l'équation (6.8b), $p(\omega)$, qui représente à présent le nombre d'onde, est donnée par

$$p(\omega) = \left(\omega^2 - \mu^2\right)^{1/2} \tag{6.9}$$

tandis que $T_\ell(\omega)$ et $R_\ell(\omega)$ sont les coefficients de transmission et d'absorption, liés entre eux par

$$|R_\ell(\omega)|^2 + |T_\ell(\omega)|^2 = 1 \quad \forall\, \omega > 0 \text{ et } \forall\, \ell \in \mathbb{N}. \tag{6.10}$$

Cette dernière relation peut être obtenue (cf. chapitre 3 de la deuxième partie de ce manuscrit) à partir des propriétés du wronskien

$$W[\phi_{\omega,\ell}(r), \overline{\phi_{\omega,\ell}}(r)] \equiv \phi_{\omega,\ell}(r)\left(\frac{d}{dr_*}\overline{\phi_{\omega,\ell}}(r)\right) - \left(\frac{d}{dr_*}\phi_{\omega,\ell}(r)\right)\overline{\phi_{\omega,\ell}}(r). \tag{6.11}$$

En effet, selon l'équation de Regge-Wheeler (6.6), il est possible de montrer que ce wronskien est une constante et en l'évaluant en $r_* \to -\infty$ et $r_* \to +\infty$, si l'on tient compte des conditions aux limites (6.8), nous obtenons la relation (6.10). Notons également que le coefficient $[\omega/p(\omega)]^{1/2}$ de l'équation (6.8b) a été introduit pour simplifier la forme de cette relation. De plus, il est important de souligner que les modes "IN" sont naturellement et sans aucune ambiguïté définis par les conditions aux limites (6.8) pour $\omega > \mu$. Cependant, pour $0 < \omega < \mu$, la situation est un peu plus compliquée (voir Chap. 30 de Ref. [39] pour plus de précisions) : en effet, il est tout d'abord nécessaire d'aller dans le plan ω-complexe et de considérer avec précaution les différentes coupures associées aux fonctions $p(\omega)$ (les deux coupures $]-\infty, -\mu[$ et $]+\mu, +\infty[$ le long de l'axe ω réel) et $\omega^{1/2}$ (une coupure choisie, par exemple, à partir de l'origine du plan ω-complexe et située le long de l'axe des ω imaginaires purs négatifs) nous permettant de traiter ces fonctions multivaluées dans le plan ω-complexe. Ainsi, en considérant le feuillet de Riemann sur lequel $\mathrm{Im}\, p(\omega) \geq 0$, nous pouvons définir $p(\omega)$ pour $0 < \omega < \mu$ et nous avons en particulier $p(\omega)$ imaginaire pur positif. Finalement, les conditions aux limites (6.8) peuvent, à présent, être utilisées également pour $0 < \omega < \mu$.

De plus, il convient de rappeler que les coefficients de transmission $T_\ell(\omega)$ nous permettent de construire les facteurs de corps gris, i.e. les probabilités d'absorption par un trou noir de Schwarzschild de particules scalaires d'énergie ω et de moment angulaire ℓ. Ils sont, nous l'avons vu, donnés par

$$\Gamma_\ell(\omega) = |T_\ell(\omega)|^2 \tag{6.12}$$

et, pour le champ scalaire massif considéré ici, la section efficace d'absorption du trou noir peut être exprimée en fonction de ces derniers, sous la forme

$$\sigma_{\rm abs}(\omega) = \frac{\pi}{[p(\omega)]^2}\sum_{\ell=0}^{+\infty}(2\ell+1)\Gamma_\ell(\omega). \tag{6.13}$$

En outre, même si nous ne prétendons pas analyser ici tous les aspects de la diffusion de ce type de trou noir et considérer en particulier ses sections efficaces élastiques partielles, son amplitude de diffusion, sa section efficace différentielle, etc..., il semble important de rappeler que tous ces concepts sont construits à partir de la matrice S, définie par ses éléments diagonaux $S_\ell(\omega)$ donnés par

$$S_\ell(\omega) = (-1)^{\ell+1}R_\ell(\omega). \tag{6.14}$$

A présent, considérons le potentiel de Regge-Wheeler $V_\ell(r)$ donné par (6.7). Nous allons commencer par supposer que la condition

$$2M\mu \in]0, 1/2[\tag{6.15}$$

est satisfaite. Nous restreindrons ainsi notre étude au champ scalaire de masse μ relativement "faible". Cette hypothèse nous permet de simplifier notre travail car elle nous évite une discussion assez compliquée relative au comportement de $V_\ell(r)$ pour différentes valeurs du moment angulaire ℓ. En effet, il est bien connu [110, 61] que sous la restriction (6.15), $V_\ell(r)$ présente toujours trois extrema $\forall\ell \in \mathbb{N}$. Depuis les travaux de Tartaglia et Cardan, il est devenu assez aisé de montrer que ces extrema $r_{\rm neg}(\ell)$, $r_{\rm max}(\ell)$ et $r_{\rm min}(\ell)$ satisfont dans notre cadre $r_{\rm neg}(\ell) < 0 < 8M/3 \leq r_{\rm max}(\ell) < 4M < r_{\rm min}(\ell)$ et sont donnés par

$$r_{\rm neg}(\ell) = \frac{\ell(\ell+1)}{3M\mu^2} + 2\sqrt{-\frac{\mathcal{P}(\ell)}{3}}\cos\left[\frac{\xi(\ell)}{3} + \frac{2\pi}{3}\right], \tag{6.16a}$$

$$r_{\rm max}(\ell) = \frac{\ell(\ell+1)}{3M\mu^2} + 2\sqrt{-\frac{\mathcal{P}(\ell)}{3}}\cos\left[\frac{\xi(\ell)}{3} - \frac{2\pi}{3}\right], \tag{6.16b}$$

$$r_{\rm min}(\ell) = \frac{\ell(\ell+1)}{3M\mu^2} + 2\sqrt{-\frac{\mathcal{P}(\ell)}{3}}\cos\left[\frac{\xi(\ell)}{3}\right], \tag{6.16c}$$

où

$$\mathcal{P}(\ell) = \frac{-1}{3M^2\mu^4}\left[\ell^2(\ell+1)^2 - 9M^2\mu^2\ell(\ell+1) + 9M^2\mu^2\right] \tag{6.17a}$$

et

$$\xi(\ell) = \arccos\left[-\frac{\mathcal{Q}(\ell)}{2}\sqrt{-\frac{27}{\mathcal{P}(\ell)^3}}\right] \tag{6.17b}$$

avec

$$\mathcal{Q}(\ell) = \frac{-1}{27M^3\mu^6}\left[2\ell^3(\ell+1)^3 - 27M^2\mu^2\ell^2(\ell+1)^2 + 27M^2\mu^2\ell(\ell+1) - 216M^4\mu^4\right]. \tag{6.17c}$$

(Pour $\ell = 0$, (6.16) correspond à Eq. (13) de Ref. [61].) Bien entendu, seul les extrema $r_{\rm max}(\ell)$ et $r_{\rm min}(\ell)$, qui appartiennent à la région physique $r > 2M$, gouverneront le comportement des modes "IN" définis précédemment par l'équation de Regge-Wheeler (6.6) ainsi que les conditions aux limites (6.8). En outre, il est très important de garder en mémoire que $r_{\rm max}(\ell)$ correspond au maximum de la barrière de potentiel locale tandis que $r_{\rm min}(\ell)$ désigne le minimum du puits de potentiel local. Finalement, il est intéressant de noter que

$$r_{\rm max}(\ell) = 3M\left[1 - \frac{1-27M^2\mu^2}{9(\ell+1/2)^2} + \underset{\ell+1/2\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{(\ell+1/2)^4}\right)\right] \tag{6.18}$$

et par conséquent, pour de grandes valeurs du moment angulaire, le maximum du potentiel de Regge-Wheeler $V_\ell(r)$ est situé "très près" de la sphère de photons du trou noir de Schwarzschild localisée en $r = 3M$.

Le procédé à l'aide duquel nous avons défini les modes "IN" pour $0 < \omega < \mu$, nous permet, de plus, de faire un prolongement analytique, dans le plan ω-complexe, des matrices diagonales T, R et S. Rappelons

qu'un pôle de la matrice T (notons qu'il est également pôle des matrices R et S), appartenant au demi-plan inférieur du premier feuillet de Riemann associés à la fonction multivaluée $p(\omega)$ et tel que le rapport $T_\ell(\omega)/R_\ell(\omega)$ reste régulier, est une résonance du champ scalaire. Rappelons également que les résonances sont distribuées de manière symétrique par rapport à l'axe des ω imaginaires. Concentrons-nous sur les pôles appartenant au quatrième quadrant de ce même feuillet de Riemann. Il est bien connu qu'ils peuvent être séparés en deux familles (cf., e.g., Chap. 30 de Ref. [39] ou Refs. [36, 116, 76, 126, 110, 81, 61]) correspondant respectivement aux fréquences complexes ω telles que $\mathrm{Re}\,\omega < \mu$ et $\mathrm{Re}\,\omega > \mu$, en conséquence, ils sont respectivement associés à (cf. (6.8)) :

- un spectre d'états liés (ces modes sont normalisables, purement entrant à l'horizon et avec une décroissance exponentielle à l'infini spatial),
- un spectre de modes quasinormaux (ces modes ne sont pas normalisables, purement entrant à l'horizon et purement sortant à l'infini spatial et oscillant sur chacune des limites).

D'un point de vue physique, l'existence d'états liés est directement associée à la présence du puits de potentiel proche de $r_{\min}(\ell)$ (voir également Refs. [36, 116, 76, 126, 61] et Chap. 30 de Ref. [39] pour plus de précisions) tandis que l'existence de modes quasinormaux faiblement amortis est due à la présence de la barrière de potentiel aux alentours de $r_{\max}(\ell)$ ou, plus simplement, peuvent être décrits semiclassiquement en terme "d'ondes de surface" se propageant dans un très proche voisinage de la sphère de photons située en $r = 3M$. Dans ce qui suit, nous allons discuter précisément ce dernier point en utilisant les techniques relatives à la théorie CAM. Nous ne serons cependant pas capables de fournir une description analogue pour le spectre des états liés.

Pour conclure cette section, nous allons brièvement rappeler quelques aspects relatifs à la théorie CAM que nous utiliserons intensivement dans la suite de ce chapitre. Notons tout d'abord que, pour $\omega > 0$, les matrices T, R et S précédemment définies peuvent être prolongées analytiquement dans le plan CAM : nous transformons en premier lieu, le moment angulaire usuel ℓ en un nombre complexe $\lambda = \ell + 1/2$ puis nous construisons les prolongements analytiques $T_{\lambda-1/2}(\omega)$, $R_{\lambda-1/2}(\omega)$ et $S_{\lambda-1/2}(\omega)$ de $T_\ell(\omega)$, $R_\ell(\omega)$ et $S_\ell(\omega)$ à partir de (6.6), (6.7), (6.8) et (6.14). Rappelons que les pôles de Regge sont définis comme les pôles dans le plan CAM de la matrice T (ou, de manière équivalente, comme les pôles des matrices R et S) pour lesquels, le rapport $T_{\lambda-1/2}(\omega)/R_{\lambda-1/2}(\omega)$ reste régulier. De plus, ils appartiennent au premier ou au troisième quadrant du plan CAM, distribués symétriquement par rapport à l'origine. Autrement dit, les pôles de Regge sont les "valeurs propres" associées aux modes $\phi_{\omega,\lambda-1/2}(r)$, solutions de (6.6), dont le comportement est purement entrant à l'horizon et purement sortant à l'infini spatial (cf. (6.8)), également appelés "modes de Regge".

Dans Ref. [32] les auteurs ont montré que, pour un champ scalaire de masse nulle se propageant dans une géométrie de Schwarzschild, les fréquences complexes des modes quasinormaux faiblement amortis peuvent être analytiquement obtenues à partir des trajectoires de Regge, i.e. à partir des courbes tracées, dans le plan CAM, en considérant les pôles de Regge comme fonctions de la fréquence ω. *Mutatis mutandis*, le raisonnement conduisant à ces résultats (pour plus de précision, se reporter à Refs. [33, 32] et à l'Annexe A de Ref. [34]) peut être reproduit dans le cadre d'une théorie de champ scalaire massif. Plus précisément, notons $\omega_{\ell n} = \omega^{(o)}_{\ell n} - i\Gamma_{\ell n}/2$ avec $\ell \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, les fréquences quasinormales complexes appartenant au demi-plan inférieur du premier feuillet de Riemann associé à la fonction multivaluée $p(\omega)$, et λ_n avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, les pôles de Regge appartenant au premier quadrant du plan CAM. Si nous décrivons les trajectoires de Regge à l'aide des fonctions $\lambda_n = \lambda_n(\omega)$ avec $\omega > \mu$, nous avons les relations semiclassiques

$$\mathrm{Re}\,\lambda_n\left(\omega^{(0)}_{\ell n}\right) = \ell + 1/2 \qquad \ell \in \mathbb{N}, \tag{6.19a}$$

et

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \left.\frac{\mathrm{Im}\,\lambda_n(\omega)}{d/d\omega\ \mathrm{Re}\,\lambda_n(\omega)}\right|_{\omega=\omega^{(0)}_{\ell n}}. \tag{6.19b}$$

6.1.2 Pôles de Regge : La méthode de Dolan-Ottewill

Dans cette section, nous allons obtenir un développement asymptotique à hautes fréquences des pôles de Regge en utilisant et en généralisant au cas d'un champ scalaire massif, une nouvelle et très puissante méthode introduite et développée par Dolan et Ottewill dans Ref. [44]. Il est important de souligner (voir ci-dessous) que, pour cette méthode, les paramètres critiques (6.2) et (6.3) associés à une particule scalaire massive sont les principaux ingrédients nous permettant de construire les modes de Regge et les pôles de Regge de la théorie des champs associée.

En élargissant le raisonnement de Dolan et Ottewill au cas du champ scalaire massif, nous introduisons l'ansatz suivant afin de décrire les modes de Regge $\phi_{\omega,\lambda_n(\omega)-1/2}(r)$ ainsi que les pôles de Regge correspondants $\lambda_n(\omega)$:

$$\phi_{\omega,\lambda_n(\omega)-1/2}(r) = u_{\omega,\lambda_n(\omega)-1/2}(r)\exp\left[i\omega v(\omega)\int^{r_*}\left(1+\frac{2Mb_c(\omega)^2/r_c(\omega)^2}{r'}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{r_c(\omega)}{r'}\right)dr'_*\right] \tag{6.20a}$$

avec

$$u_{\omega,\lambda_n(\omega)-1/2}(r) = \left[\left(1-\frac{r_c(\omega)}{r}\right)^n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}^{(n)}(\omega)[\omega v(\omega)]^{-j}\left(1-\frac{r_c(\omega)}{r}\right)^{n-i}\right] \times \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} T_k^{(n)}(\omega,r)[\omega v(\omega)]^{-k}\right) \tag{6.20b}$$

et

$$\lambda_n(\omega) = \lambda_{-1}^{(n)}(\omega v(\omega))\,[\omega v(\omega)] + \lambda_0^{(n)}(\omega v(\omega)) + \frac{\lambda_1^{(n)}(\omega v(\omega))}{[\omega v(\omega)]} + \frac{\lambda_2^{(n)}(\omega v(\omega))}{[\omega v(\omega)]^2} + \frac{\lambda_3^{(n)}(\omega v(\omega))}{[\omega v(\omega)]^3} + \frac{\lambda_4^{(n)}(\omega v(\omega))}{[\omega v(\omega)]^4} + \dots \tag{6.21}$$

Nous invitons le lecteur à comparer nos équations (6.20a), (6.20b) et (6.21) avec les équations (5), (39) et (38) de Ref. [44]. Notons plus précisément que, pour étendre la méthode de Dolan-Ottewill au cas du champ scalaire massif, nous devons considérer comme paramètre naturel des développements asymptotiques, la "quantité de mouvement" $\omega v(\omega) = p(\omega)$, en lieu et place de l'énergie ω. Nous supposerons enfin que $\omega > \mu$.

En insérant les relations (6.20a), (6.20b) et (6.21) dans l'équation (6.6) avec (6.7) où $\ell \to \lambda_n(\omega) - 1/2$, nous obtenons

$$\lambda_{-1}^{(n)}(\omega v(\omega)) = 3\sqrt{3}M\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu^2}{[\omega v(\omega)]^2}\right) - \frac{2}{27}\left(\frac{\mu^4}{[\omega v(\omega)]^4}\right) + \underset{\mu/[\omega v(\omega)]\to 0}{\mathcal{O}}\left(\frac{\mu^6}{[\omega v(\omega)]^6}\right)\right], \tag{6.22a}$$

$$\lambda_0^{(n)}(\omega v(\omega)) = i\alpha(n)\left[1-\frac{1}{9}\left(\frac{\mu^2}{[\omega v(\omega)]^2}\right) + \frac{1}{18}\left(\frac{\mu^4}{[\omega v(\omega)]^4}\right) + \underset{\mu/[\omega v(\omega)]\to 0}{\mathcal{O}}\left(\frac{\mu^6}{[\omega v(\omega)]^6}\right)\right], \tag{6.22b}$$

$$\lambda_1^{(n)}(\omega v(\omega)) = \frac{3\sqrt{3}}{M}\left[\frac{60\alpha(n)^2-29}{11664} + \frac{-372\alpha(n)^2+115}{104976}\left(\frac{\mu^2}{[\omega v(\omega)]^2}\right) + \underset{\mu/[\omega v(\omega)]\to 0}{\mathcal{O}}\left(\frac{\mu^4}{[\omega v(\omega)]^4}\right)\right], \tag{6.22c}$$

$$\lambda_2^{(n)}(\omega v(\omega)) = i\frac{\alpha(n)}{M^2}\left[\frac{-1220\alpha(n)^2+1357}{419904} + \frac{4444\alpha(n)^2-3707}{1259712}\left(\frac{\mu^2}{[\omega v(\omega)]^2}\right) + \underset{\mu/[\omega v(\omega)]\to 0}{\mathcal{O}}\left(\frac{\mu^4}{[\omega v(\omega)]^4}\right)\right], \tag{6.22d}$$

$$\lambda_3^{(n)}(\omega v(\omega)) = \frac{3\sqrt{3}}{M^3}\left[\frac{-2357520\alpha(n)^4+4630008\alpha(n)^2-99373}{29386561536} + \underset{\mu/[\omega v(\omega)]\to 0}{\mathcal{O}}\left(\frac{\mu^2}{[\omega v(\omega)]^2}\right)\right], \tag{6.22e}$$

$$\lambda_4^{(n)}(\omega v(\omega)) = i\frac{\alpha(n)}{M^4}\left[\frac{144920784\alpha(n)^4-439855800\alpha(n)^2+28395953}{2115832430592} + \underset{\mu/[\omega v(\omega)]\to 0}{\mathcal{O}}\left(\frac{\mu^2}{[\omega v(\omega)]^2}\right)\right], \tag{6.22f}$$

et finalement

$$\lambda_n(\omega) = 3\sqrt{3}M\,\omega v(\omega) + i\alpha(n) + \left[\frac{5}{36}\alpha(n)^2 - \frac{29-3888M^2\mu^2}{432}\right]\left(\frac{1}{(3\sqrt{3}M\,\omega v(\omega))}\right)$$
$$+i\alpha(n)\left[-\frac{305}{3888}\alpha(n)^2 + \frac{1357-46656M^2\mu^2}{15552}\right]\left(\frac{1}{(3\sqrt{3}M\,\omega v(\omega))^2}\right)$$
$$+\left[-\frac{49115}{839808}\alpha(n)^4 + \frac{192917-4339008M^2\mu^2}{1679616}\alpha(n)^2\right.$$
$$\left.-\frac{99373-32192640M^2\mu^2+2176782336M^4\mu^4}{40310784}\right]\left(\frac{1}{(3\sqrt{3}M\,\omega v(\omega))^3}\right)$$
$$+i\alpha(n)\left[\frac{3019183}{60466176}\alpha(n)^4 - \frac{18327325-311008896M^2\mu^2}{120932352}\alpha(n)^2\right.$$
$$\left.+\frac{28395953-6226336512M^2\mu^2+117546246144M^4\mu^4}{2902376448}\right]\left(\frac{1}{(3\sqrt{3}M\,\omega v(\omega))^4}\right)$$
$$+\underset{M\omega v\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{(3\sqrt{3}M\,\omega v(\omega))^5}\right). \tag{6.23}$$

Dans les équations précédentes, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, nous avons posé

$$\alpha(n) = n - 1/2 \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}. \tag{6.24}$$

Nous pouvons également convertir les développements asymptotiques précédents en $\omega v(\omega)$ en développements suivant ω. A partir de (6.1) ou (6.9), nous avons

$$\lambda_n(\omega) = 3\sqrt{3}M\omega + i\alpha(n) + \left[\frac{5}{36}\alpha(n)^2 - \frac{29+1944M^2\mu^2}{432}\right]\left(\frac{1}{(3\sqrt{3}M\omega)}\right)$$
$$+i\alpha(n)\left[-\frac{305}{3888}\alpha(n)^2 + \frac{1357-46656M^2\mu^2}{15552}\right]\left(\frac{1}{(3\sqrt{3}M\omega)^2}\right)$$
$$+\left[-\frac{49115}{839808}\alpha(n)^4 + \frac{192917-1189728M^2\mu^2}{1679616}\alpha(n)^2\right.$$
$$\left.-\frac{99373+4339008M^2\mu^2+952342272M^4\mu^4}{40310784}\right]\left(\frac{1}{(3\sqrt{3}M\omega)^3}\right)$$
$$+i\alpha(n)\left[\frac{3019183}{60466176}\alpha(n)^4 - \frac{18327325-54867456M^2\mu^2}{120932352}\alpha(n)^2\right.$$
$$\left.+\frac{28395953+611380224M^2\mu^2-117546246144M^4\mu^4}{2902376448}\right]\left(\frac{1}{(3\sqrt{3}M\omega)^4}\right)$$
$$+\underset{M\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{(3\sqrt{3}M\omega)^5}\right). \tag{6.25}$$

Pour $\mu = 0$, la relation (6.25) est en accord avec les équations (38) et (40)-(45) de Ref. [44].

6.1.3 Pôles de Regge : L'approche WKB

Dans cette section, nous allons dériver à nouveau le développement asymptotique à hautes énergies (6.25) des pôles de Regge mais nous utiliserons à présent une approche beaucoup plus traditionnelle, intensivement utilisée dans ce manuscrit (cf. Refs. [32, 34] ainsi que les chapitres précédents pour des applications aux théories de champs scalaires de masse nulle) basée sur la même méthode WKB due à Schutz, Will et Iyer (cf. Refs. [108, 72, 71, 124]) pour l'étude du comportement résonant des trou noirs et pour déterminer plus particulièrement leurs fréquences quasinormales faiblement amorties, méthode étendue aux ordres supérieurs par Konoplya [79]. Nous vérifierons ainsi la relation (6.25) mais nous verrons également que la méthode de Dolan-Ottewill, précédemment utilisée pour la détermination des pôles de Regge, est bien plus efficace que l'approche WKB, nous donnant accès, beaucoup plus rapidement,

aux mêmes résultats lorsque l'on cherche à obtenir les termes d'ordre supérieurs pour les développements asymptotiques. En effet, pour calculer (6.25), nous avons besoin de commencer avec une approximation WKB d'ordre 5 pour les facteurs de corps gris (6.12) et, en conséquence, cela nous amène à travailler avec de très lourdes expressions (voir ci-dessous). Bien entendu, si nous avons seulement besoin du terme dominant ou du terme suivant d'ordre supérieur dans les développements asymptotiques, il nous semble que l'approche WKB reste plus souple.

Avant d'entrer dans les détails techniques de notre travail, il est très intéressant de noter que la méthode de Dolan-Ottewill développée précédemment et l'approche WKB utilisée dans ce manuscrit sont basées sur des concepts physiques différents. En effet, comme nous l'avons déjà signalé, l'ansatz de Dolan-Ottewill est construit à partir des paramètres critiques (6.2) et (6.3) associés aux particules scalaires massives tandis que les calculs WKB utilisent le maximum (6.16b) du potentiel de Regge-Wheeler définissant par là-même la théorie de champ scalaire. Bien sûr, pour chaque approche, aux très hautes fréquences, la sphère de photons en $r_c(\omega) = 3M$ et le paramètre d'impact associé $b_c(\omega) = 3\sqrt{3}M$ jouent un rôle déterminant.

Pour $\ell \in \mathbb{N}$ et $\omega > 0$, avec ω^2 proche du maximum du potentiel de Regge-Wheeler $V_\ell(r_{\max}(\ell))$, nous pouvons utiliser , suivant Iyer, Will et Guinn [72, 71, 124] et en retenant certains résultats de l'article [79], une approximation WKB d'ordre 5 pour les facteurs de corps gris (6.12). Après de fastidieux calculs, nous obtenons

$$\Gamma_\ell(\omega) = \frac{1}{1 + \exp[2\mathcal{S}_\ell(\omega)]} \tag{6.26}$$

avec

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_\ell(\omega) = \pi k^{1/2} \Bigg\{ & \frac{1}{2} z_0^2 + \left(\frac{15}{64} b_3^2 - \frac{3}{16} b_4 \right) z_0^4 + \left(\frac{1155}{2048} b_3^4 - \frac{315}{256} b_3^2 b_4 + \frac{35}{64} b_3 b_5 + \frac{35}{128} b_4^2 - \frac{5}{32} b_6 \right) z_0^6 \\
& + \left(\frac{255255}{131072} b_3^6 - \frac{225225}{32768} b_3^4 b_4 + \frac{15015}{4096} b_3^3 b_5 + \frac{45045}{8192} b_3^2 b_4^2 - \frac{3465}{2048} b_3^2 b_6 - \frac{3465}{1024} b_3 b_4 b_5 + \frac{315}{512} b_3 b_7 \right. \\
& \left. - \frac{1155}{2048} b_4^3 + \frac{315}{512} b_4 b_6 + \frac{315}{1024} b_5^2 - \frac{35}{256} b_8 \right) z_0^8 + \left(\frac{66927861}{8388608} b_3^8 - \frac{20369349}{524288} b_3^6 b_4 + \frac{2909907}{131072} b_3^5 b_5 \right. \\
& + \frac{14549535}{262144} b_3^4 b_4^2 - \frac{765765}{65536} b_3^4 b_6 - \frac{765765}{16384} b_3^3 b_4 b_5 + \frac{45045}{8192} b_3^3 b_7 - \frac{765765}{32768} b_3^2 b_4^3 + \frac{135135}{8192} b_3^2 b_4 b_6 \\
& + \frac{135135}{16384} b_3^2 b_5^2 - \frac{9009}{4096} b_3^2 b_8 + \frac{135135}{8192} b_3 b_4^2 b_5 - \frac{9009}{2048} b_3 b_4 b_7 - \frac{9009}{2048} b_3 b_5 b_6 + \frac{693}{1024} b_3 b_9 + \frac{45045}{32768} b_4^4 \\
& \left. - \frac{9009}{4096} b_4^2 b_6 - \frac{9009}{4096} b_4 b_5^2 + \frac{693}{1024} b_4 b_8 + \frac{693}{1024} b_5 b_7 + \frac{693}{2048} b_6^2 - \frac{63}{512} b_{10} \right) z_0^{10} \Bigg\} \\
+ \pi k^{-1/2} \Bigg\{ & \left(- \frac{7}{64} b_3^2 + \frac{3}{16} b_4 \right) + \left(- \frac{1365}{2048} b_3^4 + \frac{525}{256} b_3^2 b_4 - \frac{95}{64} b_3 b_5 - \frac{85}{128} b_4^2 + \frac{25}{32} b_6 \right) z_0^2 \\
& + \left(- \frac{285285}{65536} b_3^6 + \frac{315315}{16384} b_3^4 b_4 - \frac{28875}{2048} b_3^3 b_5 - \frac{79695}{4096} b_3^2 b_4^2 + \frac{9765}{1024} b_3^2 b_6 + \frac{8505}{512} b_3 b_4 b_5 - \frac{1365}{256} b_3 b_7 \right. \\
& \left. + \frac{2625}{1024} b_4^3 - \frac{1155}{256} b_4 b_6 - \frac{1085}{512} b_5^2 + \frac{245}{128} b_8 \right) z_0^4 + \left(- \frac{121246125}{4194304} b_3^8 + \frac{43648605}{262144} b_3^6 b_4 - \frac{7912905}{65536} b_3^5 b_5 \right. \\
& - \frac{37011975}{131072} b_3^4 b_4^2 + \frac{2777775}{32768} b_3^4 b_6 + \frac{2477475}{8192} b_3^3 b_4 b_5 - \frac{225225}{4096} b_3^3 b_7 + \frac{2327325}{16384} b_3^2 b_4^3 - \frac{585585}{4096} b_3^2 b_4 b_6 \\
& - \frac{555555}{8192} b_3^2 b_5^2 + \frac{63525}{2048} b_3^2 b_8 - \frac{525525}{4096} b_3 b_4^2 b_5 + \frac{54285}{1024} b_3 b_4 b_7 + \frac{49665}{1024} b_3 b_5 b_6 - \frac{7035}{512} b_3 b_9 - \frac{165165}{16384} b_4^4 \\
& \left. + \frac{47355}{2048} b_4^2 b_6 + \frac{45045}{2048} b_4 b_5^2 - \frac{5985}{512} b_4 b_8 - \frac{5355}{512} b_5 b_7 - \frac{5145}{1024} b_6^2 + \frac{945}{256} b_{10} \right) z_0^6 \Bigg\} \\
+ \pi k^{-3/2} \Bigg\{ & \left(\frac{119119}{131072} b_3^6 - \frac{153153}{32768} b_3^4 b_4 + \frac{16107}{4096} b_3^3 b_5 + \frac{47229}{8192} b_3^2 b_4^2 - \frac{6405}{2048} b_3^2 b_6 - \frac{6237}{1024} b_3 b_4 b_5 + \frac{1155}{512} b_3 b_7 \right. \\
& \left. - \frac{1995}{2048} b_4^3 + \frac{1095}{512} b_4 b_6 + \frac{1107}{1024} b_5^2 - \frac{315}{256} b_8 \right) + \left(\frac{156165009}{8388608} b_3^8 - \frac{63864801}{524288} b_3^6 b_4 + \frac{13216203}{131072} b_3^5 b_5 \right. \\
& + \frac{62777715}{262144} b_3^4 b_4^2 - \frac{5354349}{65536} b_3^4 b_6 - \frac{4945941}{16384} b_3^3 b_4 b_5 + \frac{519057}{8192} b_3^3 b_7 - \frac{4669665}{32768} b_3^2 b_4^3 + \frac{1399167}{8192} b_3^2 b_4 b_6 \\
& + \frac{1368675}{16384} b_3^2 b_5^2 - \frac{185661}{4096} b_3^2 b_8 + \frac{1279047}{8192} b_3 b_4^2 b_5 - \frac{161133}{2048} b_3 b_4 b_7 - \frac{154917}{2048} b_3 b_5 b_6 + \frac{28077}{1024} b_3 b_9 \\
& \left. + \frac{400785}{32768} b_4^4 - \frac{143241}{4096} b_4^2 b_6 - \frac{139293}{4096} b_4 b_5^2 + \frac{23457}{1024} b_4 b_8 + \frac{22029}{1024} b_5 b_7 + \frac{21777}{2048} b_6^2 - \frac{5607}{512} b_{10} \right) z_0^2 \Bigg\} .
\end{aligned}
\tag{6.27}
$$

Ici, nous avons utilisé les notations suivantes

$$
z_0 \equiv z_0(\ell, \omega) = \sqrt{2 \, \frac{\omega^2 - V_0(\ell)}{V_0^{(2)}(\ell)}}, \tag{6.28}
$$

$$
k \equiv k(\ell) = -\frac{1}{2} V_0^{(2)}(\ell), \tag{6.29}
$$

$$
b_p \equiv b_p(\ell) = \frac{2}{p!} \frac{V_0^{(p)}(\ell)}{V_0^{(2)}(\ell)} \quad \text{pour} \quad p > 2, \tag{6.30}
$$

avec

$$
V_0(\ell) \equiv V_\ell(r_*)|_{r_* = r_*[r_{\max}(\ell)]} = V_\ell(r)|_{r = r_{\max}(\ell)} \tag{6.31}
$$

et

$$
V_0^{(p)}(\ell) \equiv \frac{d^p}{dr_*{}^p} V_\ell(r_*) \bigg|_{r_* = r_*[r_{\max}(\ell)]} \quad \text{pour} \quad p \geq 2. \tag{6.32}
$$

Notons que, dans l'expression (6.27), le terme $k^{1/2}z_0^2$ correspond à une approximation WKB d'ordre 1. Les termes $k^{1/2}z_0^4$ et $k^{-1/2}$ nous permettent de construire une approximation WKB d'ordre 2. De plus, les termes $k^{1/2}z_0^6$ et $k^{-1/2}z_0^2$ nous permettent d'obtenir une approximation WKB d'ordre 3. Enfin, les termes $k^{1/2}z_0^8$, $k^{-1/2}z_0^4$ et $k^{-3/2}$ nous donnent une approximation WKB d'ordre 4. Cette approximation WKB à l'ordre 4 peut être trouvée dans Ref. [124] (voir l'équation (12) de cette article) et est confirmée par nos propres calculs, même si certains coefficients dans les équations (6) et (7) de Ref. [124] sont faux et quelques "coquilles" sont présentes dans l'équation (4). Dans l'expression (6.27) nous avons également tenu compte des termes $k^{1/2}z_0^{10}$, $k^{-1/2}z_0^6$ et $k^{-3/2}z_0^2$ correspondants à une approximation WKB d'ordre 5. Ces derniers ont été obtenus à partir de Ref. [79].

Même si la relation (6.27) a été calculée pour $\ell \in \mathbb{N}$ et $\omega > 0$, nous pouvons l'utiliser dans le plan ω-complexe ou, comme nous allons le faire dans ce qui suit, dans le plan λ-complexe. Nous considérons $\omega > 0$ mais nous transformons le moment angulaire ℓ présent dans les équations précédentes en variable complexe, $\lambda = \ell + 1/2$. Nous nous focaliserons donc sur le prolongement analytique $\Gamma_{\lambda-1/2}(\omega)$ du facteur de corps gris $\Gamma_\ell(\omega)$ défini par (6.12) et (6.26) aussi bien que sur le prolongement analytique $\mathcal{S}_{\lambda-1/2}(\omega)$ des "phases" $\mathcal{S}_\ell(\omega)$ données par (6.27). Nous avons

$$\Gamma_{\lambda-1/2}(\omega) = \frac{1}{1+\exp[2\mathcal{S}_{\lambda-1/2}(\omega)]} \tag{6.33}$$

et les pôles (de Regge) des facteurs de corps gris sont les solutions $\lambda_n(\omega)$ de l'équation

$$\mathcal{S}_{\lambda-1/2}(\omega) = i(n-1/2)\pi \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \tag{6.34}$$

(nous ne considérons ici que les pôles appartenant au premier quadrant du plan λ-complexe). En insérant (6.16b) dans l'expression (6.27) et en utilisant la transformation $\ell \to \lambda - 1/2$, nous obtenons à partir de (6.34)

$$\begin{aligned}
(\omega M)^2 &= \left(\frac{1}{27}\right)\lambda^2 - i\left(\frac{2\alpha(n)}{27}\right)\lambda + \left[\left(\frac{29-276\alpha(n)^2}{5832}\right) + \frac{1}{3}M^2\mu^2\right]\lambda^0 \\
&+ i\left[\left(\frac{-1357\alpha(n)+1220\alpha(n)^3}{209952}\right) + \frac{2\alpha(n)}{9}M^2\mu^2\right]\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\
&+ \left[\left(\frac{8545-736824\alpha(n)^2-1193520\alpha(n)^4}{544195584}\right) + \left(\frac{-7-60\alpha(n)^2}{486}\right)M^2\mu^2 + M^4\mu^4\right]\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \\
&+ i\left[\left(\frac{6835519\alpha(n)-20410824\alpha(n)^3-25861584\alpha(n)^5}{39182082048}\right)\right. \\
&\left. + \left(\frac{-125\alpha(n)-380\alpha(n)^3}{7776}\right)M^2\mu^2 + 3\alpha(n)M^4\mu^4\right]\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) + \underset{\lambda\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\lambda^4}\right).
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Nous pouvons alors résoudre cette relation (6.35) de manière perturbative pour retrouver le résultat (6.25).

6.1.4 Pôles de Regge : Comparaison des résultats "exacts" et des résultats asymptotiques

Il est à présent important et intéressant de vérifier la précision du développement asymptotique à hautes fréquences obtenu précédemment. Dans Ref. [33], afin de déterminer numériquement, pour des théories de champs scalaires de masse nulle, les pôles de Regge du trou noir de Schwarzschild, les auteurs ont adapté une méthode puissante développée par Leaver [87] pour calculer les fréquences complexes quasinormales des trous noirs de Schwarzschild et de Kerr (ils ont, en fait, utilisé une version quelque peu modifiée due à Majumdar et Panchapakesan, basée sur le déterminant de Hill [89]). Mais, ici, nous sommes confrontés à un champ scalaire massif. La méthode de Leaver doit donc être adaptée. Dans Ref. [81], Konoplya et Zhidenko ont montré comment réaliser les modifications correspondantes. Dans cette partie, nous avons utilisé la méthode "combinée" de Leaver-Konoplya-Zhidenko avec l'approche du déterminant de Hill pour traiter numériquement le spectre des pôles de Regge.

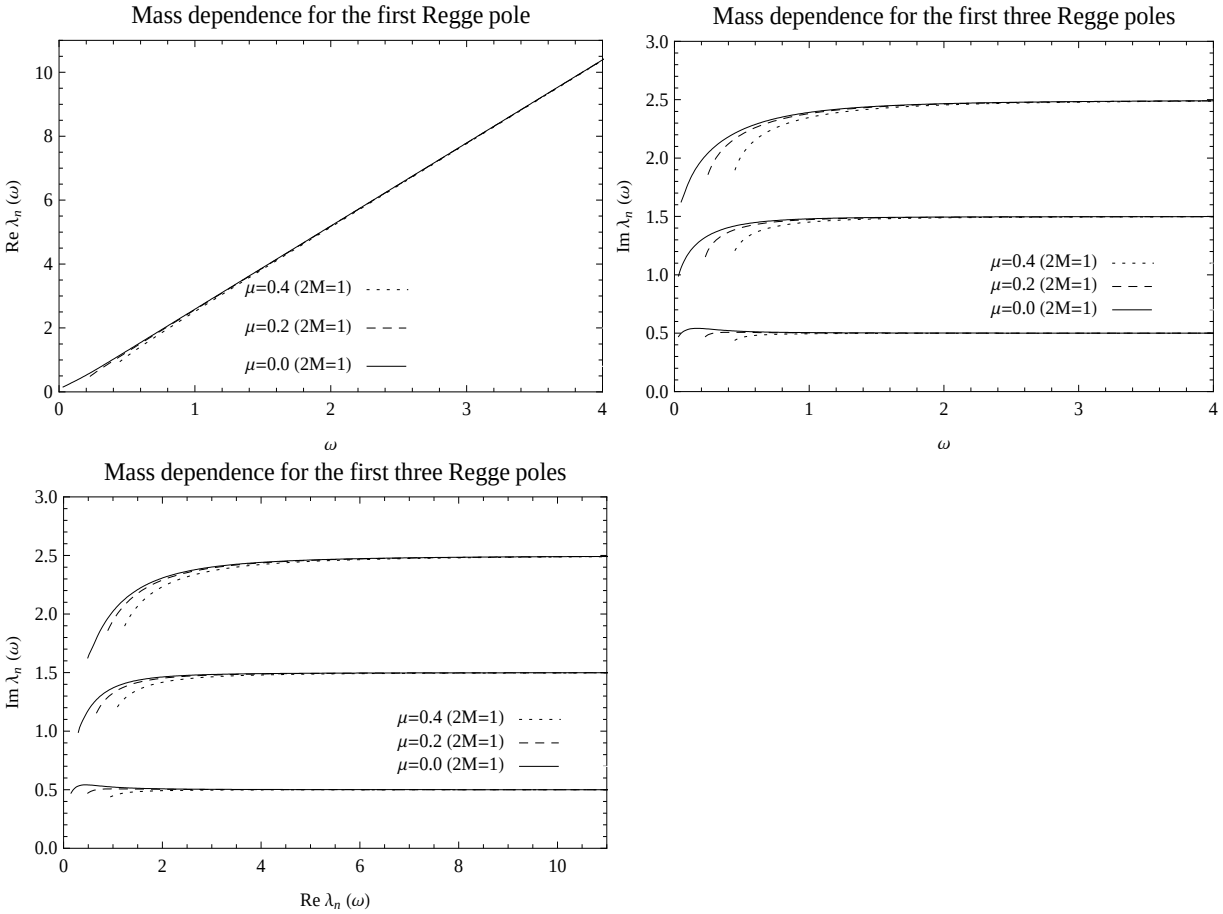


FIGURE 6.1 – Trajectoires de Regge pour les champs scalaires de masse nulle et de masse non nulle (les faibles masses vérifiant la condition (6.15)). Les pôles de Regge $\lambda_n(\omega)$ $(n = 1, 2, 3)$ sont suivis pour $2M\omega = 0.03 \to 4$. Pour plus de lisibilité, le tracé de $\mathrm{Re}\,\lambda_n(\omega)$ est donné uniquement pour le premier pôle de Regge.

TABLE 6.1 – Quelques valeurs des pôles de Regge pour le champ scalaire : Comparaison entre les résultats exacts et les résultats asymptotiques pour $\mu = 0$ ($2M = 1$). La série (6.23) est toujours tronquée au terme inférieur.

n	ω	Exact $\mathrm{Re}\,\lambda_n(\omega)$	Exact $\mathrm{Im}\,\lambda_n(\omega)$	Asymptotique $\mathrm{Re}\,\lambda_n(\omega)$	Asymptotique $\mathrm{Im}\,\lambda_n(\omega)$
1	0.5	1.282821	0.515994	1.284398	0.515656
				(-0.12 %)	(0.07 %)
	1.0	2.586845	0.504736	2.586891	0.504737
				(-0.0018 %)	(-0.0002 %)
	2.0	5.190075	0.501236	5.190077	0.501236
				(-0.000039 %)	(0. %)
2	0.5	1.452818	1.430687	1.469628	1.379357
				(-1.2 %)	(3.6 %)
	1.0	2.688355	1.479587	2.690232	1.477585
				(-0.07 %)	(0.14 %)
	2.0	5.242994	1.494926	5.243088	1.494880
				(-0.0018 %)	(0.0031 %)

TABLE 6.2 – Quelques valeurs des pôles de Regge pour le champ scalaire : Comparaison entre les résultats exacts et les résultats asymptotiques pour $\mu = 0.2$ ($2M = 1$). La série (6.23) est toujours tronquée à au terme inférieur.

n	ω	Exact $\mathrm{Re}\,\lambda_n(\omega)$	Exact $\mathrm{Im}\,\lambda_n(\omega)$	Asymptotique $\mathrm{Re}\,\lambda_n(\omega)$	Asymptotique $\mathrm{Im}\,\lambda_n(\omega)$
1	0.5	1.245875	0.506823	1.250055	0.504331
				(-0.34 %)	(0.49 %)
	1.0	2.569229	0.502503	2.569344	0.502477
				(-0.004 %)	(0.005 %)
	2.0	5.181378	0.500679	5.181381	0.500679
				(-0.000066 %)	(0. %)
2	0.5	1.411681	1.405188	1.4155982	1.345471
				(-0.3 %)	(4.2 %)
	1.0	2.670066	1.473100	2.671532	1.471040
				(-0.055 %)	(0.14 %)
	2.0	5.234201	1.493274	5.234282	1.493228
				(-0.0015 %)	(0.0030 %)

La figure 6.1 montre les trajectoires de Regge "exactes", calculées numériquement, nous permettant ainsi de souligner clairement le rôle du paramètre de masse μ. Nous observons aussi de manière numérique que les pôles de Regge ne sont définis que pour $\omega > \mu$.

Nous avons également comparé les pôles de Regge "exacts", obtenus numériquement, avec les résultats donnés par la série (6.25) ou par la série (6.23). La précision est très importante pour les hautes fréquences (i.e. pour $|2M\omega| \geq 2$) et les erreurs pour chacune des séries sont du même ordre de grandeur. Cependant, notons qu'elles augmentent légèrement avec l'ordre du pôle de Regge n ainsi qu'avec la valeur du paramètre de masse μ. Pour les plus basses fréquences, la série (6.23) se révèle être la plus précise. Les tables 6.1-6.3 présentent la position dans le plan CAM de quelques pôles de Regge calculés à partir de cette dernière formule asymptotique. Elles montrent un bon accord pour le premier pôle de Regge même pour les basses fréquences. Pour le second pôle de Regge (et également pour le troisième que nous n'avons pas fait figurer ici), la précision reste correcte pour $|2M\omega| \geq 1$.

TABLE 6.3 – Quelques valeurs des pôles de Regge pour le champ scalaire : Comparaison entre les résultats exacts et les résultats asymptotiques pour $\mu = 0.4$ ($2M = 1$). La série (6.23) est toujours tronquée au terme inférieur.

n	ω	Exact $\mathrm{Re}\,\lambda_n(\omega)$	Exact $\mathrm{Im}\,\lambda_n(\omega)$	Asymptotique $\mathrm{Re}\,\lambda_n(\omega)$	Asymptotique $\mathrm{Im}\,\lambda_n(\omega)$
1	0.5	1.114489	0.462801	1.077877	0.429439
				(3.3 %)	(7.2 %)
	1.0	2.514597	0.495198	2.514479	0.495068
				(0.005 %)	(0.026 %)
	2.0	5.155079	0.498976	5.155077	0.498975
				(0.00004 %)	(0.00020 %)
2	0.5	1.258631	1.286677	1.55611	0.983336
				(-24 %)	(24 %)
	1.0	2.613157	1.451939	2.611183	1.450803
				(0.08 %)	(0.08 %)
	2.0	5.207607	1.488218	5.207596	1.488185
				(0.00021 %)	(0.00219 %)

6.1.5 Effet de la masse sur les fréquences complexes quasinormales

Les relations (6.19a) et (6.19b) nous permettent de construire des approximations analytiques pour les fréquences d'excitation des résonances $\omega_{\ell n}^{(0)}$ et les amortissements associés $\Gamma_{\ell n}/2$ des modes quasinormaux. En introduisant dans ces deux relations semiclassiques la série (6.25) tronquée après le terme en $1/(3\sqrt{3}M\omega)^2$, nous obtenons

$$\omega_{\ell n}^{(0)} = \frac{1}{3\sqrt{3}M}\left\{(\ell+1/2) + \left[-\frac{5}{36}\alpha(n)^2 + \frac{29+1944M^2\mu^2}{432}\right]\left(\frac{1}{(\ell+1/2)}\right) + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{(\ell+1/2)^3}\right)\right\}, \tag{6.36a}$$

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \frac{n-1/2}{3\sqrt{3}M}\left\{1 + \left[\frac{235}{3888}\alpha(n)^2 + \frac{313-116640M^2\mu^2}{15552}\right]\left(\frac{1}{(\ell+1/2)^2}\right) + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{(\ell+1/2)^4}\right)\right\}. \tag{6.36b}$$

Notons également que, pour $\mu = 0$, les relations (6.36) sont en accord avec les résultats obtenus dans Ref. [71] (voir aussi Ref. [32] ainsi que les chapitres précédents de ce manuscrit).

A partir des équations (6.36), nous pouvons remarquer que lorsque la masse μ du champ scalaire augmente, la fréquence des oscillations d'un mode quasinormal augmente tandis que l'amortissement associé diminue. Ce résultat bien connu observé numériquement par de nombreux auteurs (cf., e.g., Refs. [110, 81]) est, ici, décrit analytiquement. De plus, il est possible de fournir une explication duale de ce résultat en considérant l'interprétation physique des pôles de Regge en terme "d'ondes de surface" situées dans un proche voisinage de la sphère de photons [2, 33, 32, 34] (voir également les chapitres précédents de ce manuscrit), même si nous pensons que cette description doit être envisagée avec précaution. Dans ce contexte, nous rappelons que $\mathrm{Re}\,\lambda_n(\omega)$ représente la constante de propagation azimuthale de la $n^{\text{ème}}$ "onde de surface" tandis que $\mathrm{Im}\,\lambda_n(\omega)$ correspond à la constante d'amortissement. A partir de (6.25), il devient alors trivial de constater que, pour une valeur donnée de la fréquence ω, toutes les constantes de propagation azimuthale et toutes les constantes d'amortissement diminuent quand le paramètre de masse μ augmente. En conséquence, les fréquences d'excitation des résonances $\omega_{\ell n}^{(0)}$, fréquences pour lesquelles il y a interférences constructives dues aux "ondes de surface" (voir également la relation (6.19a)), doivent nécessairement augmenter avec le paramètre de masse μ. En outre, l'atténuation de la $n^{\text{ème}}$ "onde de surface" diminue quand le paramètre de masse μ augmente. Ainsi, l'énergie rayonnée vers l'infini spatial durant les circonvolutions répétées de "l'onde de surface" autour du trou noir diminue également. Il semble alors naturel (voir aussi Eq. (6.19b)) d'observer un comportement similaire pour l'amortissement associé aux modes quasinormaux.

Nous pouvons améliorer significativement les développements asymptotiques (6.36) en allant au-delà

de l'approche semiclassique. En effet, les fréquences complexes quasinormales sont solutions de l'équation

$$\lambda_n(\omega) = \ell + 1/2 \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad \ell \in \mathbb{N}. \tag{6.37}$$

Un tel résultat peut être compris en rappelant qu'un facteur en $1/\cos[\pi\lambda_n(\omega)]$ est présent dans toutes les séries sur les résidus associés aux pôles de Regge construites à partir des techniques relatives à la théorie CAM (cf., e.g., l'équation (8) de Ref. [33]). Cette équation peut être résolue perturbativement et nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\omega_{\ell n}^{(0)} = \frac{1}{3\sqrt{3}M}\Bigg\{&(\ell+1/2) + \left[-\frac{5}{36}\alpha(n)^2 + \frac{29+1944M^2\mu^2}{432}\right]\left(\frac{1}{(\ell+1/2)}\right)\\ &+\Bigg[\frac{17795}{839808}\alpha(n)^4 + \frac{18763-14346720M^2\mu^2}{1679616}\alpha(n)^2\\ &\qquad -\frac{82283+20015424M^2\mu^2-136048896M^4\mu^4}{40310784}\Bigg]\left(\frac{1}{(\ell+1/2)^3}\right)\\ &+\underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{(\ell+1/2)^5}\right)\Bigg\},\end{aligned} \tag{6.38a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \frac{\alpha(n)}{3\sqrt{3}M}\Bigg\{&1 + \left[\frac{235}{3888}\alpha(n)^2 + \frac{313-116640M^2\mu^2}{15552}\right]\left(\frac{1}{(\ell+1/2)^2}\right)\\ &+\Bigg[-\frac{234857}{60466176}\alpha(n)^4 - \frac{653125-953881920M^2\mu^2}{120932352}\alpha(n)^2\\ &\qquad -\frac{4832407-3269372544M^2\mu^2+29386561536M^4\mu^4}{2902376448}\Bigg]\left(\frac{1}{(\ell+1/2)^4}\right)\\ &+\underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{(\ell+1/2)^6}\right)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{6.38b}$$

Pour $\mu = 0$, les relations (6.38) sont en accord avec les équations (7) et (17)-(22) de Ref. [44].

6.2 Description CAM de la section d'absorption à hautes énergies et rôle de la masse

6.2.1 Généralités

Dans cette section, nous allons nous concentrer sur la section efficace d'absorption définie par (6.13) (voir également Refs. [73, 61] pour de précédentes analyses numériques). Nous donnerons, plus particulièrement, une approximation simple et très précise de cette série en soulignant le rôle joué par le paramètre de masse μ. Cela nous permettra alors de décrire qualitativement et quantitativement son comportement pour les hautes fréquences/énergies.

Avec cet objectif en tête, il est nécessaire de remplacer la somme sur les ondes partielles (6.13) par la série sur les pôles de Regge

$$\sigma_{\rm abs}(\omega) = \sigma_{\rm geo}(\omega) - \frac{4\pi^2}{[p(\omega)]^2}\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{i\pi[\lambda_n(\omega)-1/2]}\,\lambda_n(\omega)\gamma_n(\omega)}{\sin[\pi(\lambda_n(\omega)-1/2)]}\right) + \ldots \tag{6.39}$$

Dans cette relation (6.39), $\sigma_{\rm geo}(\omega)$ est la section efficace géométrique du trou noir donnée par (6.4). Les éléments $\lambda_n(\omega)$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont les pôles (de Regge) du prolongement analytique $\Gamma_{\lambda-1/2}(\omega)$ du facteur de corps gris $\Gamma_\ell(\omega)$ appartenant au premier quadrant du plan λ-complexe tandis que les éléments $\gamma_n(\omega)$ sont les résidus associés. Nous pouvons obtenir l'expression (6.39) à partir de (6.13) en utilisant les techniques propres à la théorie CAM et en répétant pour $\omega > \mu$, *mutatis mutandis*, les principales étapes de la section II de Ref. [30] dans lequel les auteurs ont considéré la section d'absorption d'un champ scalaire de masse nulle. Ceci est rendu possible grâce aux propriétés des pôles de Regge et du

prolongement analytique de la matrice T mentionnés en début de ce chapitre. Dans l'expression (6.39), les points de suspension correspondent à l'intégrale de fond le long de l'axe des λ imaginaires purs, rencontrée dans la première partie de ce manuscrit. Nous allons supposer qu'elle peut être négligée numériquement et physiquement à hautes énergies.

Il est à présent possible de considérer le comportement à hautes fréquences de la section efficace d'absorption (6.13) en remplaçant dans la relation (6.39) les fonctions $\lambda_n(\omega)$ et $\gamma_n(\omega)$ par leur développement asymptotiques à hautes énergies. Nous avons déjà à notre disposition le développement (6.25) pour les pôles de Regge $\lambda_n(\omega)$. Il ne nous reste donc qu'à obtenir un développement analogue pour les résidus $\gamma_n(\omega)$.

6.2.2 Résidus associés aux pôles de Regge des facteurs de corps gris

Notons tout d'abord que la méthode de Dolan-Ottewill, très efficace pour la construction des développements asymptotiques à hautes fréquences des pôles de Regge, ne peut naturellement pas être adaptée pour le calcul des développements des résidus. Cependant, il est assez aisé d'accomplir un tel objectif à partir de l'approche WKB présentée précédemment dans ce chapitre.

Les pôles de Regge sont les pôles du prolongement analytique $\Gamma_{\lambda-1/2}(\omega)$ des facteurs de corps gris donnés par (6.33) et sont également solutions de l'équation (6.34). Ainsi, il est aisé de montrer que les résidus correspondants dont donnés par

$$\gamma_n(\omega) = \frac{-1/2}{\left[d\,\mathcal{S}_{\lambda-1/2}(\omega)/d\lambda\right]\big|_{\lambda=\lambda_n(\omega)}}. \tag{6.40}$$

Donc, à partir de (6.40), (6.27), (6.16b) et (6.25), nous obtenons le développement asymptotique (approximation WKB d'ordre 5)

$$\begin{aligned}
\gamma_n(\omega) = &-\frac{1}{2\pi} + i\alpha(n)\left[\frac{5}{36\pi}\right]\left(\frac{1}{3\sqrt{3}M\omega}\right) + \left[\frac{305}{2592\pi}\alpha^2(n) - \frac{1357-46656M^2\mu^2}{31104\pi}\right]\left(\frac{1}{(3\sqrt{3}M\omega)^2}\right)\\
&+i\alpha(n)\left[\frac{49115}{419904\pi}\alpha^2(n) - \frac{192917-1189728M^2\mu^2}{1679616\pi}\right]\left(\frac{1}{(3\sqrt{3}M\omega)^3}\right)\\
&+\left[-\frac{15095915}{120932352\pi}\alpha^4(n) + \frac{18327325-54867456M^2\mu^2}{80621568\pi}\alpha^2(n)\right.\\
&\qquad\left.-\frac{28395953+611380224M^2\mu^2-117546246144M^4\mu^4}{5804752896\pi}\right]\left(\frac{1}{(3\sqrt{3}M\omega)^4}\right)\\
&+\underset{M\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{(3\sqrt{3}M\omega)^5}\right).
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Il est intéressant de remarquer que, dans un article très récent [45], Dolan et Ottewill ont développé de nouvelles techniques, basées sur leur ansatz, afin de construire analytiquement les *fonctions d'excitation* (provenant de la somme sur les résidus aux pôles de la fonction de Green du problème de diffusion) associées aux fréquences complexes quasinormales. Leurs techniques pourraient être adaptées pour obtenir les deux premiers termes de la relation (6.41) mais, malheureusement, cela demande énormément de travail.

6.2.3 Approximation CAM pour la section d'absorption

A présent, introduisons (6.25) et (6.41) dans la relation (6.39) en prenant en compte l'équation (6.5c). En remarquant que la contribution des pôles de Regge avec $n > 1$ est quasiment négligeable et que, pour garder une certaine cohérence mathématique, nous avons uniquement besoin des trois premiers termes de la relation (6.25) et des deux premiers termes de (6.41), nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{abs}}(\omega) \approx 27\pi M^2 \Bigg(&1 + \frac{2\mu^2}{3\omega^2} - 8\pi e^{-\pi}\frac{\sin\left[2\pi(3\sqrt{3}M)\omega\right]}{2\pi(3\sqrt{3}M)\omega} + 16\pi e^{-2\pi}\frac{\sin\left[4\pi(3\sqrt{3}M)\omega\right]}{4\pi(3\sqrt{3}M)\omega}\\
&+\frac{4\pi^2 e^{-\pi}\left[-39+7\pi+972\pi M^2\mu^2\right]}{27}\frac{\cos\left[2\pi(3\sqrt{3}M)\omega\right]}{\left[2\pi(3\sqrt{3}M)\omega\right]^2}\Bigg).
\end{aligned} \tag{6.42}$$

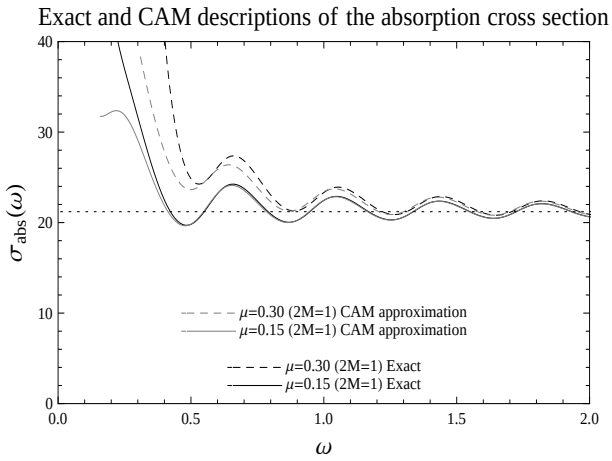


FIGURE 6.2 – La section d'absorption "exacte" (6.13) et son approximation CAM (6.44) sont comparées pour $\mu = 0.15$ et $\mu = 0.30$ ($2M = 1$). La valeur limite constante $27\pi M^2$ correspondant à la section géométrique de la sphère de photons est également tracée.

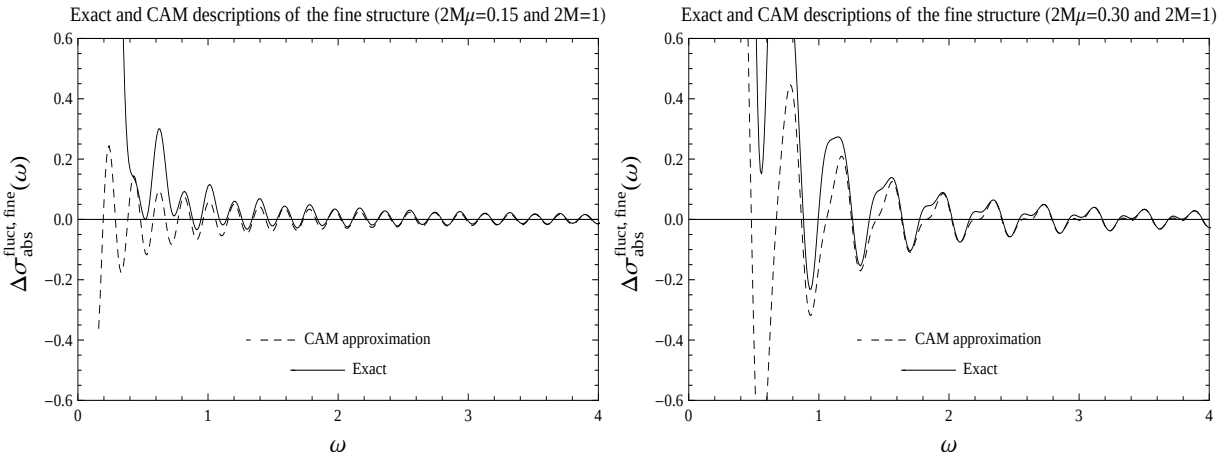


FIGURE 6.3 – Structure fine pour $\mu = 0.15$ et $\mu = 0.30$ ($2M = 1$). Nous comparons la structure fine "exacte" (6.45) avec son approximation CAM (6.44).

Pour $\mu = 0$, la relation (6.42) se réduit à l'équation (2.12) de Ref. [35] (voir également la section 4.2.2 du chapitre 4) et résulte de la superposition d'une contribution eikonale (cf. Ref. [30]) et d'une structure fine. Il est intéressant de rappeler que la contribution eikonale est la somme de la section d'absorption géométrique de la sphère de photons du trou noir et d'une fonction "sinc" dépendant des caractéristiques géométriques des géodésiques nulles instables appartenant à la sphère de photons. Elle décrit précisément le comportement à hautes fréquences de la section d'absorption et, en particulier, de ses oscillations régulières et atténuées autour d'une valeur limite (cf., e.g., Ref. [107] pour une analyse numérique de ce comportement). La structure fine est une fonction légèrement plus compliquée dépendant également des caractéristiques géométriques des géodésiques nulles instables appartenant à la sphère de photons et qui, surtout, nous permet de capturer de faibles fluctuations au-delà de la contribution eikonale. Pour $\mu \neq 0$, même si cela ne semble pas si naturel, une description analogue peut être donnée : nous pouvons associer les trois premiers termes de (6.42), i.e.,

$$\sigma_{\rm abs}^{\rm Eik}(\omega) \equiv 27\pi M^2 \left(1 + \frac{2\mu^2}{3\omega^2} - 8\pi e^{-\pi} \frac{\sin\left[2\pi(3\sqrt{3}M)\omega\right]}{2\pi(3\sqrt{3}M)\omega}\right) \tag{6.43}$$

avec la description eikonale et les deux derniers, i.e.,

$$27\pi M^2 \left[16\pi e^{-2\pi} \frac{\sin\left[4\pi(3\sqrt{3}M)\omega\right]}{4\pi(3\sqrt{3}M)\omega} + \frac{4\pi^2 e^{-\pi}\left[-39 + 7\pi + 972\pi M^2\mu^2\right]}{27} \frac{\cos\left[2\pi(3\sqrt{3}M)\omega\right]}{\left[2\pi(3\sqrt{3}M)\omega\right]^2}\right] \tag{6.44}$$

avec la structure fine. Nous pouvons observer que le paramètre de masse μ est présent dans chacune des contributions. Il modifie de manière significative la partie eikonale et corrige légèrement l'amplitude de l'un des termes (le plus petit pour les très hautes fréquences) de la structure fine.

Nous avons numériquement testé la relation (6.42). Nous avons constaté qu'elle décrit de manière très précise la section d'absorption (6.13) et, en particulier, qu'elle prend en compte, de manière très correcte, les contributions du paramètre de masse μ. Dans la figure 6.2, pour deux valeurs du paramètre de masse μ, nous avons tracé la section d'absorption "exacte" obtenue numériquement à partir de (6.13) en résolvant le problème défini par (6.6), (6.7) et (6.8) et nous l'avons comparée avec le résultat donné par (6.42). L'accord est remarquable, même pour les basses fréquences. Cependant, nous pouvons observer que, pour les faibles énergies, la précision de la description CAM diminue quand le paramètre de masse μ augmente. De plus, notons que nos courbes représentant les sections d'absorption obtenues numériquement semblent être en accord avec celles de Ref. [61] mais en total désaccord avec celles tracées dans Ref. [73].

Dans la figure 6.3, pour une même valeur du paramètre de masse μ, nous avons testé la précision de la description CAM (6.44) définie par

$$\Delta\sigma_{\rm abs}^{\rm fluct,\,fine}(\omega) \equiv \sigma_{\rm abs}(\omega) - \left[27\pi M^2 \left(1 + \frac{2\mu^2}{3\omega^2} - 8\pi e^{-\pi} \frac{\sin\left[2\pi(3\sqrt{3}M)\omega\right]}{2\pi(3\sqrt{3}M)\omega}\right)\right] \tag{6.45}$$

par rapport à la structure fine "exacte" calculée numériquement. L'accord est remarquable pour les hautes fréquences et reste robuste pour des fréquences plus faibles (notons que le comportement de la structure fine est très simple pour $2M\mu = 0.15$. En effet, dans ce cas, le coefficient du second terme de l'expression (6.44) peut-être négligé. En fait, il s'annule pour $2M\mu \approx 0.149265...$).

6.3 Conclusion

Dans ce chapitre, en travaillant dans le plan CAM, nous avons mis en évidence de manière explicite le rôle joué par le paramètre de masse du champ scalaire dans les spectres de résonance et d'absorption du trou noir de Schwarzschild, simplifiant considérablement leur description. Ce travail peut être étendu au cas d'un champ scalaire massif se propageant dans une géométrie de Reissner-Nordström, Kerr et Kerr-Newman aussi bien que pour le cas, le plus intéressant physiquement, des fermions massifs [117]. Ce dernier problème pourrait même avoir de belles applications dans le contexte de l'astrophysique "multicanale" à hautes énergies. Avec cet objectif en vue, les articles récents de Dolan, Doran, Lasenby et collaborateurs [46, 86, 41] constitueraient un point de départ solide et naturel.

Enfin, il est important de souligner que, dans ce chapitre, les techniques relatives aux pôles de Regge ne nous ont pas permis de comprendre l'existence du spectre des états liés [36, 116, 76, 126, 110, 81, 61]

associé au champ scalaire massif dans une géométrie de Schwarzschild. Nous trouvons cela regrettable et nous considérons que c'est un des problèmes à traiter dans le cadre de la théorie CAM. En effet, si nous pouvons résoudre un tel problème, nous pourrions éventuellement donner une explication duale simple de la réalisation par les champs massifs du scénario de la "black hole bomb" [103] ou, en d'autres termes, des instabilités induites par le spectre des états liés, en présence de rotation du trou noir et consécutives au phénomène de superradiance (cf., e.g., Refs. [37, 27, 128, 38, 56, 114, 18, 40]).

Conclusion et Perspectives

Comme l'a remarqué Chandrasekhar dans le milieu des années soixante-dix, la théorie des perturbations des trous noirs peut être formulée comme un problème de diffusion résonante. Ainsi, toutes les techniques développées dans le cadre de la théorie de la diffusion, peuvent naturellement être introduites dans le contexte de la physique des trous noirs.

Un des concepts centraux de la théorie de la diffusion est la notion de pôles de Regge qui permet une interprétation semiclassique des phénomènes de résonance. Nous l'avons utilisée tout au long de ce manuscrit, et particulièrement dans le chapitre 4, afin de comprendre, à partir de ce nouveau point de vue, certains aspects résonants du trou noir de Schwarzschild. Nos résultats nous ont permis d'établir plus précisément, sur des bases rigoureuses et dans le contexte d'une théorie ondulatoire/théorie des champs, l'interprétation intuitive des modes quasinormaux du trou noir de Schwarzschild suggérée par Goebel en 1972, i.e. modes interprétés, dans le cas gravitationnel, en termes d'ondes en orbite spirale au voisinage de la sphère de photons/gravitons située en $r = 3M$ et amorties par rayonnement d'énergie vers l'infini spatial. Nous avons vu, en effet, tout au long de ce manuscrit que les modes quasinormaux, avaient, comme conséquence du formalisme CAM, une interprétation duale simple en terme de modes de Regge, expliquant de manière intuitive les phénomènes de résonance et d'absorption en terme "d'ondes de surface" localisées dans un proche voisinage de la sphère de photons.

Dans ce manuscrit, ainsi que dans les articles parus apparentés, nous avons voulu étendre cette approche. Plus précisément, nous avons donné, dans le chapitre 5, des relations analytiques générales pour les pôles de Regge de la matrice S associée à la théorie du champ scalaire de masse nulle, définie dans une géométrie statique à symétrie sphérique de dimension arbitraire et possédant une sphère de photons. L'interprétation physique en termes "d'ondes de surface" reste valable. Ces premiers résultats proviennent de l'utilisation d'une approximation WKB d'ordre 3 pour résoudre l'équation d'onde radiale associée. Plus particulièrement, nous avons tenté de mettre en avant le rôle joué par la sphère de photons, ou en d'autres termes, le rôle joué par l'ensemble des géodésiques nulles correspondant à des orbites circulaires instables suivies par des particules de masse nulle autour du trou noir.

De plus, nous avons systématiquement mis en évidence l'existence d'une structure fine pour la section d'absorption, au-delà de la description eikonale, aussi bien pour le trou noir de Schwarzschild que pour le cas, plus général, de trous noirs statiques à symétrie sphérique. Nous pensons que cette structure pourrait avoir des conséquences physiques tout à fait intéressantes. Ce pourrait être le cas dans le cadre du lensing gravitationnel fort. En effet, jusqu'à présent, le lensing gravitationnel fort dû à un trou noir de Schwarzschild par exemple, a principalement été considéré du point de vue de l'optique géométrique. Une description basée sur des concepts ondulatoires et, en particulier, sur les techniques relatives aux pôles de Regge, pourrait être à l'origine d'une description plus riche avec la prédiction de nouveaux effets observables, dûs aux non-linéarités des trajectoires de Regge. De plus si, comme nous commençons à le voir apparaître dans la littérature, la section d'absorption à hautes énergies et le lensing gravitationnel fort sont intimement liés, la structure eikonale et la structure fine de la section d'absorption du trou noir de Schwarzschild pourraient être observées dans un futur très proche, par l'intermédiaire de la nouvelle génération de dispositifs expérimentaux, encore en développement, destinés à explorer, entre autre, les effets de la courbure de l'espace-temps au voisinage de l'horizon des évènements du trou noir supermassif situé au centre de notre galaxie. Les modes quasinormaux, vus comme de véritables "empreintes digitales" d'un trou noir, ouvrent alors une porte sur leur prochaine observation directe par détection d'un signal gravitationnel typique de leurs caractéristiques intrinsèques. Enfin, nous nous sommes concentré sur le cas du champ scalaire massif ou la plupart des résultats précédents et les interprétations physiques associées restent valables. La théorie CAM nous a permis, dans ce contexte, de donner des expressions analytiques des pôles de Regge et de la section d'absorption nous permettant de mettre en évidence le rôle

fondamental joué par le paramètre de masse du champ, résultats aux conséquences potentiellement intéressantes dans divers aspects de la diffusion dans le domaine fréquentiel (diffusion résonante, états liés, sections d'absorption, instabilités, etc...) ou dans le domaine temporel (*late-time tails*, instabilités, etc...).

Notons que nos résultats ne sont qu'une première étape dans la compréhension, dans un cadre semiclassique, des divers aspects de la physique des trous noirs statiques à symétrie sphérique comme le lensing gravitationnel, le rayonnement Hawking, le paradoxe de l'information, le principe holographique et la correspondance CFT, les théories des champs de dimensions supérieures, les modèles analogues de gravité, etc... De plus, nous pensons qu'il serait à présent très intéressant d'explorer, entre autres, par l'utilisation de la méthode CAM, (i) les états liés pour le cas d'un champ scalaire massif et (ii) une situation moins symétrique, e.g. l'étude des trous noirs de Kerr et de Kerr-Newman, pour comprendre entres autres, toujours d'un point de vue semiclassique, le phénomène de superradiance.
D'un point de vue historique/épistémologique, cette "renaissance" du concept de pôles de Regge dans le domaine gravitationnel est certes surprenante, mais pourrait, peut-être, permettre une compréhension de la gravitation et des trous noirs d'un point de vue plus fondamental (i.e. quantique).
Enfin, soulignons que nous avons été parmi les premiers à avoir adapté une approche semiclassique à la physique de la gravitation et plus particulièrement au problème de la diffusion par des trous noirs. Beaucoup de nos résultats sont élégants, d'une interprétation étonnamment "simple" et potentiellement plus riche que celle trouvée dans la littérature sur les mêmes sujets. Nous espérons que ce formalisme sera à même, à plus ou moins long terme, de préciser certaines conclusions, d'apporter de nouvelles solutions et de comprendre physiquement, voire intuitivement, la nature d'autres phénomènes ou caractéristiques propres à la gravité.

Annexes

Annexe A

Pôles de Regge pour des trous noirs statiques à symétrie sphérique : Résultats

Dans cette annexe, nous donnons les résultats obtenus à partir de l'approche WKB étendue à l'ordre 3 pour des trous noirs statiques à symétrie sphérique. La méthode de résolution est similaire à celle utilisée pour le trou noir de Schwarzschild. Après de fastidieux calculs, nous obtenons

$$V_0(\lambda) = \lambda^2 \frac{f_c}{r_c^2} + \frac{f_c}{4r_c^2}\left[d(d-2)f_c - (d-3)^2\right] + \underset{|\lambda|\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{A.1a}$$

et

$$\begin{aligned}\left[-2V_0^{(2)}(\lambda)\right]^{1/2} &= \frac{2\eta_c f_c}{r_c^2}\lambda - \frac{f_c}{8\eta_c^3 r_c^2}\Big[2f_c^2[(d-3)^2 + (d-2)(d-4)f_c] \\ &\quad + r_c^2 f_c f_c^{(2)}[(d-2)(d+8)f_c - 2(d-3)^2] + d(d-2)r_c^3 f_c^2 f_c^{(3)} \\ &\quad + r_c^4\left(f_c^{(2)}\right)^2[(1/2)(d-3)^2 - (d^2-4)f_c]\Big]\frac{1}{\lambda} + \underset{|\lambda|\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\end{aligned} \tag{A.1b}$$

de même que

$$\begin{aligned}\frac{V_0^{(4)}(\lambda)}{V_0^{(2)}(\lambda)} &= -\frac{f_c}{2\eta_c^2 r_c^2}\Big[16f_c^2 - 16r_c^2 f_c f_c^{(2)} + 4r_c^3 f_c f_c^{(3)} \\ &\quad + r_c^4\left(4\left(f_c^{(2)}\right)^2 + f_c f_c^{(4)}\right)\Big] + \underset{|\lambda|\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\end{aligned} \tag{A.2a}$$

$$\left(\frac{V_0^{(3)}(\lambda)}{V_0^{(2)}(\lambda)}\right)^2 = \frac{r_c^4 f_c^2\left(f_c^{(3)}\right)^2}{4\eta_c^4} + \underset{|\lambda|\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{A.2b}$$

$$\begin{aligned}\frac{\left[V_0^{(3)}(\lambda)\right]^2 V_0^{(4)}(\lambda)}{\left[V_0^{(2)}(\lambda)\right]^3} &= -\frac{r_c^2 f_c^3\left(f_c^{(3)}\right)^2}{8\eta_c^6}\Big[16f_c^2 - 16r_c^2 f_c f_c^{(2)} + 4r_c^3 f_c f_c^{(3)} \\ &\quad + r_c^4\left(4\left(f_c^{(2)}\right)^2 + f_c f_c^{(4)}\right)\Big] + \underset{|\lambda|\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\end{aligned} \tag{A.2c}$$

$$\frac{V_0^{(3)}(\lambda)V_0^{(5)}(\lambda)}{\left[V_0^{(2)}(\lambda)\right]^2} = \frac{r_c^2 f_c^3 f_c^{(3)}}{4\eta_c^4}\left[-10 f_c f_c^{(3)} + 10 r_c f_c f_c^{(4)} + r_c^2\left(15 f_c^{(2)} f_c^{(3)} + f_c f_c^{(5)}\right)\right] + \underset{|\lambda|\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{A.2d}$$

$$\begin{aligned}\frac{V_0^{(6)}(\lambda)}{V_0^{(2)}(\lambda)} = -\frac{f_c^2}{2\eta_c^2 r_c^4}\Big[&-272 f_c^3 + 408 r_c^2 f_c^2 f_c^{(2)} - 88 r_c^3 f_c^2 f_c^{(3)} \\ &+ r_c^4 f_c\left(38 f_c f_c^{(4)} - 204\left(f_c^{(2)}\right)^2\right) + r_c^5 f_c\left(104 f_c^{(2)} f_c^{(3)} + 18 f_c f_c^{(5)}\right) \\ &+ r_c^6\left(34\left(f_c^{(2)}\right)^3 + 15 f_c\left(f_c^{(3)}\right)^2 + 26 f_c f_c^{(2)} f_c^{(4)} + f_c^2 f_c^{(6)}\right)\Big] + \underset{|\lambda|\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).\end{aligned} \tag{A.2e}$$

Nous pouvons, dès lors, résoudre l'équation (5.30), en supposant $|\lambda| \gg 1$ et $\mathrm{Re}\,\lambda \gg \mathrm{Im}\,\lambda$. Nous obtenons alors une famille de solutions $\lambda_n(\omega)$ avec $n = 1, 2, 3, \ldots$ données par l'approximation

$$\lambda_n(\omega) \approx \left[\frac{r_c^2}{f_c}\,\omega^2 + a_n + 2\eta_c^2\alpha(n)^2\epsilon_n(\omega)\right]^{1/2} + i\eta_c\alpha(n)\left[1 + \epsilon_n(\omega)\right] \tag{A.3}$$

où

$$\begin{aligned}a_n = -\frac{1}{1152\eta_c^4}\Big\{&288 f_c^2\left[(d^2-2d-1)f_c - (d-3)^2\right] \\ &+144 r_c^2 f_c f_c^{(2)}\left[2(d-3)^2 - (2d^2-4d-3)f_c\right] \\ &-72 r_c^3 f_c^2 f_c^{(3)} - 18 r_c^4\left[4(d-3)^2\left(f_c^{(2)}\right)^2 - 4(d-3)(d+1) f_c\left(f_c^{(2)}\right)^2 + f_c^2 f_c^{(4)}\right] \\ &+36 r_c^5 f_c f_c^{(2)} f_c^{(3)} + r_c^6\left[36\left(f_c^{(2)}\right)^3 - 7 f_c\left(f_c^{(3)}\right)^2 + 9 f_c f_c^{(2)} f_c^{(4)}\right]\Big\} \\ &+ \alpha(n)^2\frac{r_c^3 f_c}{96\eta_c^4}\left\{24 f_c f_c^{(3)} + 6 r_c f_c f_c^{(4)} - 12 r_c^2 f_c^{(2)} f_c^{(3)} + r_c^3\left(5\left(f_c^{(3)}\right)^2 - 3 f_c^{(2)} f_c^{(4)}\right)\right\}\end{aligned} \tag{A.4}$$

et

$$\epsilon_n(\omega) = \frac{b_n}{(r_c^2/f_c)\,\omega^2 + a_n + \eta_c^2\alpha(n)^2} \tag{A.5}$$

avec

$$
\begin{aligned}
b_n = \frac{1}{442368\eta_c^{10}} \Big\{ & -55296(d-3)^2 f_c^5 (1+f_c) + 27648 r_c^2 f_c^4 f_c^{(2)} \left[5(d-3)^2 + 2(d^2-12d+23) f_c\right] \\
& -9216(3d^2-6d-2) r_c^3 f_c^5 f_c^{(3)} + 6912 r_c^4 f_c^3 \left[-20(d-3)^2 \left(f_c^{(2)}\right)^2 + 2(2d^2+36d-95) f_c \left(f_c^{(2)}\right)^2 \right. \\
& \left. +9 f_c^2 f_c^{(4)}\right] + 3456 r_c^5 f_c^4 \left[6(2d^2-4d+1) f_c^{(2)} f_c^{(3)} + 5 f_c f_c^{(5)}\right] \\
& -192 r_c^6 f_c^2 \left[-360(d-3)^2 \left(f_c^{(2)}\right)^3 + 144(2d^2+6d-25) f_c \left(f_c^{(2)}\right)^3 + 423 f_c^2 f_c^{(2)} f_c^{(4)} - 200 f_c^2 \left(f_c^{(3)}\right)^2 \right. \\
& \left. -5 f_c^3 f_c^{(6)}\right] - 96 r_c^7 f_c^3 \left[36(6d^2-12d+17) \left(f_c^{(2)}\right)^2 f_c^{(3)} - 257 f_c f_c^{(3)} f_c^{(4)} + 270 f_c f_c^{(2)} f_c^{(5)}\right] \\
& +12 r_c^8 f_c \left[-1440(d-3)^2 \left(f_c^{(2)}\right)^4 + 288(7d^2+6d-55) f_c \left(f_c^{(2)}\right)^4 + 2376 f_c^2 \left(f_c^{(2)}\right)^2 f_c^{(4)} \right. \\
& \qquad \left. +67 f_c^3 \left(f_c^{(4)}\right)^2 + 152 f_c^3 f_c^{(3)} f_c^{(5)} - 2744 f_c^2 f_c^{(2)} \left(f_c^{(3)}\right)^2 - 120 f_c^3 f_c^{(2)} f_c^{(6)}\right] \\
& +48 r_c^9 f_c^2 \left[12(6d^2-12d+59) \left(f_c^{(2)}\right)^3 f_c^{(3)} + 153 f_c \left(f_c^{(3)}\right)^3 - 514 f_c f_c^{(2)} f_c^{(3)} f_c^{(4)} + 270 f_c \left(f_c^{(2)}\right)^2 f_c^{(5)}\right] \\
& +12 r_c^{10} \left[144(d-3)^2 \left(f_c^{(2)}\right)^5 - 288(d^2-7) f_c \left(f_c^{(2)}\right)^5 - 67 f_c^3 f_c^{(2)} \left(f_c^{(4)}\right)^2 - 152 f_c^3 f_c^{(2)} f_c^{(3)} f_c^{(5)} \right. \\
& \qquad \left. +344 f_c^2 \left(f_c^{(2)}\right)^2 \left(f_c^{(3)}\right)^2 + 60 f_c^3 \left(f_c^{(2)}\right)^2 f_c^{(6)} + 108 f_c^2 \left(f_c^{(2)}\right)^3 f_c^{(4)} + 153 f_c^3 \left(f_c^{(3)}\right)^2 f_c^{(4)}\right] \\
& -24 r_c^{11} f_c f_c^{(2)} \left[252 \left(f_c^{(2)}\right)^3 f_c^{(3)} + 153 f_c \left(f_c^{(3)}\right)^3 - 257 f_c f_c^{(2)} f_c^{(3)} f_c^{(4)} + 90 f_c \left(f_c^{(2)}\right)^2 f_c^{(5)}\right] \\
& +r_c^{12} \left[-864 \left(f_c^{(2)}\right)^6 + 385 f_c^2 \left(f_c^{(3)}\right)^4 - 1512 f_c \left(f_c^{(2)}\right)^4 f_c^{(4)} - 918 f_c^2 f_c^{(2)} \left(f_c^{(3)}\right)^2 f_c^{(4)} \right. \\
& \qquad \left. +201 f_c^2 \left(f_c^{(2)}\right)^2 \left(f_c^{(4)}\right)^2 + 456 f_c^2 \left(f_c^{(2)}\right)^2 f_c^{(3)} f_c^{(5)} + 1368 f_c \left(f_c^{(2)}\right)^3 \left(f_c^{(3)}\right)^2 - 120 f_c^2 \left(f_c^{(2)}\right)^3 f_c^{(6)}\right] \Big\} \\
& + \frac{\alpha(n)^2 r_c^3 f_c}{110592\eta_c^{10}} \Big\{ 9216 f_c^4 f_c^{(3)} + 13824 r_c f_c^4 f_c^{(4)} + 3456 r_c^2 f_c^3 \left[-2 f_c^{(2)} f_c^{(3)} + f_c f_c^{(5)}\right] \\
& +192 r_c^3 f_c^3 \left[72 \left(f_c^{(3)}\right)^2 - 99 f_c^{(2)} f_c^{(4)} + f_c f_c^{(6)}\right] - 288 r_c^4 f_c^2 \left[12 \left(f_c^{(2)}\right)^2 f_c^{(3)} - 29 f_c f_c^{(3)} f_c^{(4)} + 18 f_c f_c^{(2)} f_c^{(5)}\right] \\
& +12 r_c^5 f_c^2 \left[648 \left(f_c^{(2)}\right)^2 f_c^{(4)} + 17 f_c \left(f_c^{(4)}\right)^2 + 56 f_c f_c^{(3)} f_c^{(5)} - 1032 f_c^{(2)} \left(f_c^{(3)}\right)^2 - 24 f_c f_c^{(2)} f_c^{(6)}\right] \\
& +144 r_c^6 f_c \left[28 \left(f_c^{(2)}\right)^3 f_c^{(3)} + 25 f_c \left(f_c^{(3)}\right)^3 - 58 f_c f_c^{(2)} f_c^{(3)} f_c^{(4)} + 18 f_c \left(f_c^{(2)}\right)^2 f_c^{(5)}\right] \\
& +12 r_c^7 f_c \left[-36 \left(f_c^{(2)}\right)^3 f_c^{(4)} + 75 f_c \left(f_c^{(3)}\right)^2 f_c^{(4)} - 17 f_c f_c^{(2)} \left(f_c^{(4)}\right)^2 - 56 f_c f_c^{(2)} f_c^{(3)} f_c^{(5)} \right. \\
& \qquad \left. +168 \left(f_c^{(2)}\right)^2 \left(f_c^{(3)}\right)^2 + 12 f_c \left(f_c^{(2)}\right)^2 f_c^{(6)}\right] \\
& -72 r_c^8 f_c^{(2)} \left[12 \left(f_c^{(2)}\right)^3 f_c^{(3)} + 25 f_c \left(f_c^{(3)}\right)^3 - 29 f_c f_c^{(2)} f_c^{(3)} f_c^{(4)} + 6 f_c \left(f_c^{(2)}\right)^2 f_c^{(5)}\right] \\
& +r_c^9 \left[235 f_c \left(f_c^{(3)}\right)^4 - 216 \left(f_c^{(2)}\right)^4 f_c^{(4)} - 450 f_c f_c^{(2)} \left(f_c^{(3)}\right)^2 f_c^{(4)} + 51 f_c \left(f_c^{(2)}\right)^2 \left(f_c^{(4)}\right)^2 \right. \\
& \left. +168 f_c \left(f_c^{(2)}\right)^2 f_c^{(3)} f_c^{(5)} + 360 \left(f_c^{(2)}\right)^3 \left(f_c^{(3)}\right)^2 - 24 f_c \left(f_c^{(2)}\right)^3 f_c^{(6)}\right] \Big\} . \qquad \text{(A.6)}
\end{aligned}
$$

Annexe B

Pôles de Regge et QNMs pour le trou noir de Schwarzschild-de Sitter

Pour le trou noir de Schwarzschild-de Sitter de dimension d [115], la fonction $f(r)$ s'écrit

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{d-3} - \frac{r^2}{L^2}. \tag{B.1}$$

Ici, r_0 est un paramètre associé à la masse M du trou noir par l'expression (5.43) et L est une longueur caractéristique liée à la constante cosmologique Λ par la relation

$$\Lambda = \frac{(d-1)(d-2)}{2L^2}. \tag{B.2}$$

Si

$$0 < \left(\frac{d-1}{2}\right)^{2/(d-1)} \left[\left(\frac{d-1}{d-3}\right)\frac{r_0^2}{L^2}\right]^{(d-3)/(d-1)} < 1 \tag{B.3}$$

alors l'équation $f(r) = 0$ possède seulement deux racines réelles r_h et $r_{\rm Co}$ avec $0 < r_h < r_{\rm Co}$ (voir, par exemple, l'Appendix A de [96]). Elles correspondent respectivement aux positions de l'horizon du trou noir et de l'horizon cosmologique. pour $r \in]r_h, r_{\rm Co}[$, nous avons $f(r) > 0$. Dans ce cas, il existe également une sphère de photons situé en

$$r_c = r_0 \left(\frac{d-1}{2}\right)^{1/(d-3)} \tag{B.4a}$$

avec $r_c \in]r_h, r_{\rm Co}[$. Le paramètre η_c associé est donné par

$$\eta_c = \sqrt{d-3}. \tag{B.4b}$$

r_c et η_c sont tous deux indépendants de la constante cosmologique et correspondent aux valeurs obtenues pour le trou noir de Schwarzschild-Tangherlini ordinaire (nous invitons le lecteur à comparer les expressions (5.44a) et (5.44b)).

Ici, il nous semble important de noter qu'a priori, le formalisme que nous avons développé précédemment ne s'applique pas à une géométrie qui n'est pas asymptotiquement plate et pour laquelle la fonction $f(r)$ est positive uniquement sur l'intervalle $]r_h, r_{\rm Co}[$. Plus précisément, les preuves des relations semiclassiques (5.27)-(5.29) données dans la section 5.1.1 ne sont pas valables parce qu'elles sont basées sur le concept de matrice S et de l'amplitude de diffusion qui, dans ce contexte, ne peuvent pas être utilisées. Mais nous pouvons aisément contourner ces difficultés :

– En effet, pour $f(r)$ définie par (B.1), le potentiel $V_\ell(r)$ obtenu à partir de l'expression (5.15) vérifie les conditions aux limites $\lim_{r\to r_h} V_\ell(r) = 0$ et $\lim_{r\to r_{\rm Co}} V_\ell(r) = 0$. Sachant que la coordonnée de la tortue $r_*(r)$ définit une bijection de $]r_h, r_{\rm Co}[$ dans $]-\infty, +\infty[$, il est formellement possible de définir une matrice S, à partir des relations (5.16) et (5.17).

– La structure de cette matrice S dans le plan ω-complexe et dans le plan λ-complexe nous permet de considérer le spectre des fréquences quasinormales et des pôles de Regge.
– Il est alors possible d'établir une connexion semiclassique, basée sur (5.27)-(5.29), entre ces deux spectres. Ceci peut être réalisé en construisant, à partir des modes de Regge, la partie diffractive du propagateur de Feynman associé à un champ scalaire, i.e. en développant un formalisme introduit il y a plus de soixante ans par Sommerfeld [111] comme alternative à l'approche usuelle utilisée pour l'étude de la diffusion [122] considérée dans la section 5.1.1. Une telle approche à été utilisée dans l'article [31] pour le trou noir BTZ.

B.1 Le trou noir de Schwarzschild-de Sitter de dimension 4

Pour $d = 4$, la condition (B.3) implique

$$0 < \frac{27M^2}{L^2} < 1 \tag{B.5}$$

et nous avons

$$r_c = 3M, \tag{B.6a}$$
$$\eta_c = 1, \tag{B.6b}$$

ainsi que

$$a_n = -\frac{29}{216} + \frac{137M^2}{8L^2} + \frac{5}{18}\left(1 - \frac{27M^2}{L^2}\right)\alpha(n)^2, \tag{B.7a}$$
$$b_n = \frac{1357}{15552} + \frac{1505M^2}{288L^2} - \frac{24765M^4}{64L^4} + \left[-\frac{305}{3888} + \frac{35M^2}{72L^2} + \frac{705M^4}{16L^4}\right]\alpha(n)^2, \tag{B.7b}$$
$$c_n = \frac{313}{7776} + \frac{3971M^2}{144L^2} - \frac{24765M^4}{32L^4} + \left[\frac{235}{1944} - \frac{235M^2}{36L^2} + \frac{705M^4}{8L^4}\right]\alpha(n)^2, \tag{B.7c}$$
$$\epsilon_n(\omega) = \frac{b_n}{27M^2/(1-27M^2/L^2)\,\omega^2 + a_n + \alpha(n)^2}. \tag{B.7d}$$

L'approche WKB (5.34) pour les pôles de Regge nous conduit à

$$\lambda_n(\omega) \approx \left[\frac{27M^2}{1-27M^2/L^2}\omega^2 + a_n + 2\alpha(n)^2\epsilon_n(\omega)\right]^{1/2} + i\alpha(n)\left[1 + \epsilon_n(\omega)\right] \tag{B.8}$$

et leur comportement à hautes fréquences (5.35) nous donne

$$\lambda_n(\omega) = \left[\frac{3\sqrt{3}M}{\sqrt{1-27M^2/L^2}}\omega + \frac{\sqrt{1-27M^2/L^2}\,a_n}{6\sqrt{3}M\omega}\right] + i\alpha(n)\left[1 + \frac{(1-27M^2/L^2)b_n}{27M^2\omega^2}\right] + \underset{\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\omega^3}\right). \tag{B.9}$$

Ici, il est intéressant de noter que le rayon de la sphère de photons et le paramètre η_c caractérisant l'instabilité des géodésiques nulles circulaires, ne dépendent pas de la constante cosmologique (voir les formules (B.6)), ce qui n'est pas le cas pour les propriétés (relation de dispersion et amortissement) des "ondes de surface" se propageant dans un proche voisinage de la sphère de photons (nous renvoyons le lecteur aux équations (B.8) et (B.9)). Par conséquent, la constante cosmologique affecterait le lensing gravitationnelle fort dû à un trou noir de Schwarzschild-de Sitter. Ce résultat confirme, dans un contexte semiclassique, la récente étude de Rindler et Ishak [105] concernant le rôle de la constante cosmologique dans la courbure des rayons lumineux au voisinage d'une densité de masse importante (pour des références sur ce sujet d'actualité, nous renvoyons le lecteur à la bibliographie de ce récent article d'Ishak, Rindler et Dossett [70]).

Les fréquences d'excitation et les amortissements des QNMs, donnés par les formules générales (5.40), se ramènent à

$$\omega_{\ell n}^{(0)} = \frac{\sqrt{1-27M^2/L^2}}{3\sqrt{3}M}\left[\left(\ell+\frac{1}{2}\right) - \frac{a_n}{2\ell} + \frac{a_n}{4\ell^2} + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell^3}\right)\right], \tag{B.10a}$$

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \frac{\sqrt{1-27M^2/L^2}}{3\sqrt{3}M}\alpha(n)\left[1 + \frac{c_n}{2\ell^2} + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell^3}\right)\right]. \tag{B.10b}$$

Les termes dominants de (B.10) ont été obtenus dans l'article [106]. Dans [44], Dolan et Ottewill ont obtenu pour $n = 0$, les développements de $\omega_{\ell n}^{(0)}$ et $\Gamma_{\ell n}/2$ jusqu'à l'ordre $1/(\ell+1/2)^4$. Nos résultats (B.10) sont cohérents avec leur équation (72). Finalement, il est important de noter que, pour $L \to +\infty$, tous les résultats obtenus pour les pôles de Regge et les fréquences complexes quasinormales du trou noir de Schwarzschild-de Sitter de dimension 4, se réduisent aux résultats relatifs au trou noir de Schwarzschild.

B.2 Termes dominants pour le trou noir de Schwarzschild-de Sitter de dimension arbitraire

Dans le cas à d dimensions, nous pouvons aisément calculer les termes dominants des pôles de Regge et des fréquences complexes quasinormales. Nous avons

$$\lambda_n(\omega) = \sqrt{\frac{d-1}{d-3}}\frac{r_c\omega}{\sqrt{1-\frac{(d-1)r_c^2}{(d-3)L^2}}} + i\sqrt{d-3}\,\alpha(n) + \underset{\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\omega}\right) \tag{B.11}$$

et

$$\omega_{\ell n}^{(0)} = \sqrt{\frac{d-3}{d-1}}\sqrt{1-\frac{(d-1)r_c^2}{(d-3)L^2}}\left(\frac{1}{r_c}\right)\left(\ell+\frac{d-3}{2}\right) + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell}\right), \tag{B.12a}$$

$$\frac{\Gamma_{\ell n}}{2} = \frac{d-3}{\sqrt{d-1}}\sqrt{1-\frac{(d-1)r_c^2}{(d-3)L^2}}\left(\frac{1}{r_c}\right)\alpha(n) + \underset{\ell\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\ell}\right). \tag{B.12b}$$

Les formules (B.12) sont en accord avec les résultats obtenus dans l'article [127]. De plus, notons que pour $L \to +\infty$, à partir de (B.11) et (B.12), nous retrouvons les résultats relatifs aux trous noirs de Schwarzschild-Tangherlini.

Annexe C

Pôles de Regge et résidus du facteur de corps gris pour un champ scalaire de masse nulle

C.1 Le trou noir de Schwarzchild

L'approche WKB développée par Schutz, Will et Iyer [108, 72, 71] (voir aussi Ref. [124] pour des aspects similaires) pour déterminer les fréquences quasinormales (faiblement amorties) des trous noirs s'est avérée très efficace dans la construction des développements asymptotiques à hautes énergies des pôles de Regge pour les trous noirs (nous renvoyons le lecteur à nos précédents travaux [32, 34]). Ici, nous allons l'utiliser et l'étendre de sorte à pouvoir extraire des facteurs de corps gris des trous noirs, des développements asymptotiques à hautes fréquences pour les résidus associés aux pôles de Regge.

Même si, tout au long de l'étude consacrée au trou noir de Schwarzschild, nous nous sommes restreints aux pôles et aux résidus des facteurs de corps gris associés à une théorie de champ scalaire, nous allons traiter ici le cas le plus général, déjà évoqué, d'un champ de spin s avec $s = 0, 1, \text{et } 2$ qui vérifie l'équation de Regge-Wheeler, incluant par là même en plus d'une théorie de champ scalaire ($s = 0$), les perturbations électromagnétiques ($s = 1$) et les gravitationnelles axiales ($s = 2$). Pour un rapide rappel, nous renvoyons le lecteur au début de la deuxième partie de ce manuscrit. D'un point de vue technique, le cas général ne présente pas davantage de difficultés que le cas du seul champ scalaire, de plus, nos résultats pourraient être utiles dans un proche avenir.

L'équation d'onde pour le champ scalaire, pour le champ électromagnétique et pour les perturbations axiales se propageant dans la géométrie de Schwarzschild se réduisent, après séparation des variables temporelles, radiales et angulaires à l'équation de Regge-Wheeler (4.22) mais à présent, en lieu et place du potentiel de Regge-Wheeler scalaire (4.7) avec $s = 0$, nous devons considérer un potentiel dépendant du spin

$$V_\ell(r) = \left(\frac{r-2M}{r}\right)\left[\frac{(\ell+1/2)^2 - 1/4}{r^2} + \frac{2(1-s^2)M}{r^3}\right] \tag{C.1}$$

et nous devons de plus supposer que l'indice ordinaire de moment angulaire $\ell \in \mathbb{N}$ vérifie $\ell \geq s$. Pour $\omega > 0$ et ℓ données, la fonction d'onde radiale partielle $\phi_{\omega\ell}(r_*)$ satisfait toujours aux conditions aux limites (4.24).

A présent, il est important de remarquer que le potentiel de Regge-Wheeler $V_\ell(r_*)$ défini par (C.1) se comporte comme une barrière de potentiel et présente un maximum proche de la sphère de photons du trou noir de Schwarzschild située à $r_c = 3M$. Désignons par $r_0(\ell)$ la position de ce maximum, exprimée suivant la coordonnée radiale de Schwarzschild, et par $(r_*)_0(\ell)$ la *coordonnée de la tortue* correspondante.

A partir de (C.1), il est aisé d'obtenir

$$r_0(\ell) = 3M\left[1 - \frac{(1-s^2)}{9(\ell+1/2)^2} + \underset{\ell+1/2\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{(\ell+1/2)^4}\right)\right] \tag{C.2}$$

et de montrer que le maximum du potentiel de Regge-Wheeler est donné par

$$\begin{aligned} V_0(\ell) &\equiv V_\ell(r_*)|_{r_*=(r_*)_0(\ell)} = V_\ell(r)|_{r=r_0(\ell)} && \text{(C.3)}\\ &= \frac{(\ell+1/2)^2}{27M^2} + \frac{-3+8(1-s^2)}{324M^2} + \underset{\ell+1/2\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{(\ell+1/2)^2}\right). && \text{(C.4)} \end{aligned}$$

Pour $\ell \in \mathbb{N}$ et $\omega > 0$, avec ω^2 proche du sommet $V_0(\ell)$ du potentiel de Regge-Wheeler, nous pouvons utiliser, en suivant Iyer, Will et Guinn [72, 71, 124], une approximation WKB au troisième ordre pour les facteurs de corps gris (4.25). Nous avons

$$\Gamma_\ell(\omega) = \frac{1}{1+\exp[2S_\ell(\omega)]} \tag{C.5}$$

avec

$$\begin{aligned} S_\ell(\omega) = \pi k^{1/2}&\left[\frac{1}{2}z_0^2 + \left(\frac{15}{64}b_3^2 - \frac{3}{16}b_4\right)z_0^4 + \left(\frac{1155}{2048}b_3^4 - \frac{315}{256}b_3^2b_4 + \frac{35}{64}b_3b_5 + \frac{35}{128}b_4^2 - \frac{5}{32}b_6\right)z_0^6\right]\\ +\pi k^{-1/2}&\left[\left(\frac{3}{16}b_4 - \frac{7}{64}b_3^2\right) - \left(\frac{1365}{2048}b_3^4 - \frac{525}{256}b_3^2b_4 + \frac{95}{64}b_3b_5 + \frac{85}{128}b_4^2 - \frac{25}{32}b_6\right)z_0^2\right]. \end{aligned} \tag{C.6}$$

Ici, nous utilisons les notations suivantes

$$z_0 \equiv z_0(\ell,\omega) = \sqrt{2\,\frac{\omega^2 - V_0(\ell)}{V_0^{(2)}(\ell)}}, \tag{C.7}$$

$$k \equiv k(\ell) = -\frac{1}{2}V_0^{(2)}(\ell), \tag{C.8}$$

$$b_p \equiv b_p(\ell) = \frac{2}{p!}\frac{V_0^{(p)}(\ell)}{V_0^{(2)}(\ell)} \quad \text{for} \quad p > 2, \tag{C.9}$$

avec $V_0(\ell)$ défini par (C.3) et

$$V_0^{(p)}(\ell) \equiv \left.\frac{d^p}{dr_*{}^p}V_\ell(r_*)\right|_{r_*=(r_*)_0(\ell)} \quad \text{for} \quad p \geq 2. \tag{C.10}$$

Même si les auteurs des Refs. [72, 71, 124] ont obtenu les relations précédentes pour $\ell \in \mathbb{N}$ et $\omega > 0$, ils ont remarqué que leurs résultats restent utiles pour obtenir une approximation WKB au troisième ordre pour les fréquences quasinormales complexes associées aux modes faiblement amortis des trous noirs. Comme il a été déjà démontré dans Refs. [32] et [34], ces mêmes relations sont très efficaces pour construire les développements asymptotiques à hautes fréquences pour les pôles de Regge du trou noir et, ici, nous allons les utiliser en vue d'extraire, depuis les facteurs de corps gris du trou noir, des développements asymptotiques à hautes fréquences pour les résidus associés à ces pôles de Regge. Tout d'abord, considérons, comme nous en avons pris l'habitude tout au long de ce manuscrit, que $\omega > 0$ et que le moment angulaire ℓ est étendu au plan complexe en introduisant la variable $\lambda = \ell + 1/2$. Enfin, considérons le prolongement analytique $\Gamma_{\lambda-1/2}(\omega)$ des facteurs de corps gris $\Gamma_\ell(\omega)$ définie par les expressions (4.25) et (6.26) ainsi qu'un prolongement analytique $S_{\lambda-1/2}(\omega)$ des "phases" $S_\ell(\omega)$ présente dans la relation (C.6). Les pôles (de Regge) des facteurs de corps gris sont les solutions $\lambda_n(\omega)$ de l'équation

$$S_{\lambda-1/2}(\omega) = i(n-1/2)\pi \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \tag{C.11}$$

(ici nous prenons en compte les seuls pôles appartenant au premier quadrant du plan λ-complexe) et il est également aisé de montrer que les résidus correspondant à ces pôles sont donnés par l'expression

$$\gamma_n(\omega) = \frac{-1/2}{\left[d\, S_{\lambda-1/2}(\omega)/d\lambda\right]\big|_{\lambda=\lambda_n(\omega)}}. \tag{C.12}$$

En injectant (C.2) dans la relation (C.6) et en tenant compte de la transformation $\ell \to \lambda - 1/2$, nous obtenons à partir de (C.11) le développement asymptotique

$$\begin{aligned}\lambda_n(\omega) = 3\sqrt{3}\, M\omega + i\,(n-1/2) + \left(\frac{60\,(n-1/2)^2 - 144(1-s^2) + 115}{1296\sqrt{3}}\right)\frac{1}{M\omega} \\ -i\,(n-1/2)\left(\frac{1220\,(n-1/2)^2 - 6912(1-s^2) + 5555}{419904}\right)\frac{1}{(M\omega)^2} \\ + \underset{M\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{(M\omega)^3}\right)\end{aligned} \tag{C.13}$$

pour les pôles de Regge (en accord avec les résultats de Ref. [32]). Enfin, à partir de (C.2), (C.6), (C.12) et (C.13), nous obtenons pour les résidus au pôles

$$\begin{aligned}\gamma_n(\omega) = -\frac{1}{2\pi} + i\left(\frac{5(n-1/2)}{108\sqrt{3}\pi}\right)\frac{1}{M\omega} \\ + \left(\frac{3660\,(n-1/2)^2 - 6912(1-s^2) + 5555}{839808\pi}\right)\frac{1}{(M\omega)^2} + \underset{M\omega\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{(M\omega)^3}\right).\end{aligned} \tag{C.14}$$

Il est intéressant de noter que, pour décrire la structure fine de la section d'absorption à hautes énergies du trou noir de Schwarzschild, nous avons besoin des seuls trois premiers termes de l'expression (C.13) ainsi que des deux premiers de la relation (C.14). Nous avons dérivé un ordre supérieur supplémentaire qui pourrait être utile pour décrire analytiquement la structure hyperfine de la section d'absorption à hautes énergies (nous renvoyons ici le lecteur à notre dernière remarque à ce sujet dans l'analyse qui précède). Pour le lecteur intéressé, notons que, en combinant l'approche WKB à l'ordre 5 développé par [79] avec les résultats donnés dans Refs. [71, 124], nous avons été en mesure d'obtenir, de plus, les ordres supérieurs des développements asymptotiques des pôles de Regge $\lambda_n(\omega)$ et de leur résidus $\gamma_n(\omega)$.

C.2 Les trous noirs statiques à symétrie sphérique

Cette partie est consacrée aux trous noirs statiques à symétrie sphérique de dimension arbitraire $d \geq 4$, possédant une sphère de photons, point de départ de notre étude du chapitre 5.

Comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre 5, une théorie de champ scalaire définie dans de telles géométries, à l'instar de la théorie de champ scalaire définie dans la géométrie de Schwarzschild, vérifie l'équation de Regge-Wheeler (5.14) avec les conditions aux limites (4.24) mais, à présent, le potentiel de Regge-Wheeler n'est plus défini par (4.23) mais par l'expression plus complexe définie en (5.79). Cependant, étant données les hypothèses utilisées au début de l'étude de telles configurations, les comportements des relations (4.23) et (5.79) sont très similaires. Ainsi, *mutatis mutandis*, les calculs de l'annexe C.1 peuvent être aisément généralisés.

Remarquons, tout d'abord, que le potentiel de Regge-Wheeler $V_\ell(r_*)$ donné par (5.79) se comporte comme une barrière de potentiel et possède un maximum situé au voisinage de la sphère de photons du trou noir en $r = r_c$. Comme nous l'avons déjà fait, appelons à nouveau $r_0(\ell)$, la position du maximum exprimée selon la coordonnée radiale standard et par $(r_*)_0(\ell)$, sa position selon la coordonnée de la tortue correspondante. A partir de (5.79), Nous pouvons obtenir

$$r_0(\ell) = r_c\left[1 - \frac{\delta_c}{[\ell + (d-3)/2]^2} + \underset{\ell+(d-3)/2\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{[\ell + (d-3)/2]^4}\right)\right] \tag{C.15}$$

avec

$$\delta_c = \frac{1}{2}(d-2) r_c f_c \left(\frac{(d-2) f_c + r_c^2 f_c^{(2)}}{2 f_c - r_c^2 f_c^{(2)}} \right) \tag{C.16}$$

ce qui généralise (C.2). Nous pouvons, dès lors, montrer que le maximum du potentiel de Regge-Wheeler (5.79), qui reste défini par (C.3), est à présent donné par

$$V_0(\ell) = \frac{[\ell + (d-3)/2]^2}{r_c^2/f_c} + \frac{\left[d(d-2) f_c - (d-3)^2\right]}{4 r_c^2/f_c} + \underset{\ell+(d-3)/2 \to +\infty}{\mathcal{O}} \left(\frac{1}{[\ell + (d-3)/2]^2} \right) \tag{C.17}$$

ce qui généralise (C.4).

Nous pouvons donc considérer que l'approximation WKB (C.5)-(C.6) de l'annexe C.1 reste valable dans le cas le plus général étudié ici. Cependant, dans l'expression (C.6) nous allons, à présent, uniquement prendre en compte les termes d'ordre un et deux de l'approximation WKB, i.e. les termes en $k^{1/2} z_0^2$, $k^{1/2} z_0^4$ et $k^{-1/2}$. Ceci pour, d'une part, éviter des calculs trop lourds et d'autre part parce que la description de la structure fine de la section efficace d'absorption peut complètement être obtenue avec cette précision. Ainsi, en injectant l'expression (C.15) dans la relation (C.6) et en utilisant le changement de variable $\ell \to \lambda - (d-3)/2$, nous déduisons, à partir de (C.11), le développement asymptotique suivant

$$\lambda_n(\omega) = \frac{r_c}{\sqrt{f_c}}\, \omega + i \eta_c (n - 1/2) + \frac{a_n/2}{(r_c/\sqrt{f_c})\omega} + \underset{(r_c/\sqrt{f_c})\omega \to +\infty}{\mathcal{O}} \left(\frac{1}{[(r_c/\sqrt{f_c})\omega]^2} \right). \tag{C.18}$$

avec

$$\begin{aligned} a_n = & -\frac{1}{1152 \eta_c^4} \Big\{ 288 f_c^2 \left[(d^2 - 2d - 1) f_c - (d-3)^2 \right] \\ & + 144 r_c^2 f_c f_c^{(2)} \left[2(d-3)^2 - (2d^2 - 4d - 3) f_c \right] - 72 r_c^3 f_c^2 f_c^{(3)} \\ & - 18 r_c^4 \left[4(d-3)^2 \left(f_c^{(2)} \right)^2 - 4(d-3)(d+1) f_c \left(f_c^{(2)} \right)^2 + f_c^2 f_c^{(4)} \right] \\ & + 36 r_c^5 f_c f_c^{(2)} f_c^{(3)} + r_c^6 \left[36 \left(f_c^{(2)} \right)^3 - 7 f_c \left(f_c^{(3)} \right)^2 + 9 f_c f_c^{(2)} f_c^{(4)} \right] \Big\} \\ & + (n - 1/2)^2 \frac{r_c^3 f_c}{96 \eta_c^4} \left\{ 24 f_c f_c^{(3)} + 6 r_c f_c f_c^{(4)} - 12 r_c^2 f_c^{(2)} f_c^{(3)} + r_c^3 \left[5 \left(f_c^{(3)} \right)^2 - 3 f_c^{(2)} f_c^{(4)} \right] \right\} \end{aligned} \tag{C.19}$$

pour les pôles de Regge (en accord avec nos résultats, cf. [34]). Notons qu'ici, afin de simplifier l'expression des résultats nous avons utilisé les notations (5.31) et (5.32) introduites dans la section 5.3.

Enfin, à partir des expressions (C.15), (C.6), (C.12) et (C.18), nous pouvons déduire une expression analytique pour les résidus associés aux pôles de Regge

$$\gamma_n(\omega) = -\frac{\eta_c}{2\pi} + i\, \frac{(a_c/2\pi)(n - 1/2)}{(r_c/\sqrt{f_c})\omega} + \underset{(r_c/\sqrt{f_c})\omega \to +\infty}{\mathcal{O}} \left(\frac{1}{[(r_c/\sqrt{f_c})\omega]^2} \right) \tag{C.20}$$

avec

$$a_c = \frac{r_c^3 f_c}{96 \eta_c^4} \left\{ 24 f_c f_c^{(3)} + 6 r_c f_c f_c^{(4)} - 12 r_c^2 f_c^{(2)} f_c^{(3)} + r_c^3 \left[5 \left(f_c^{(3)} \right)^2 - 3 f_c^{(2)} f_c^{(4)} \right] \right\}. \tag{C.21}$$

Liste des publications

L' ensemble du travail et des résultats présentés dans ce manuscrit ont fait l'objet des publications suivantes :

- Y. Decanini, A. Folacci, B. Raffaelli, *"Resonance and absorption spectra of the Schwarzschild black hole for massive scalar perturbations : a complex angular momentum analysis"*, Phys. Rev. D **84**, 084035 (2011).

- Y. Decanini, A. Folacci, B. Raffaelli, *"Fine structure of high-energy absorption cross sections for black holes"*, Class. Quantum Grav. **28**, 175021 (2011).

- Y. Decanini, A. Folacci, B. Raffaelli, *"Unstable circular null geodesics of static spherically symmetric black holes, Regge poles and quasinormal frequencies"*, Phys. Rev. D **81**, 104039 (2010).

Bibliographie

[1] Abramowitz M and Stegun I A 1965 *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New-York)

[2] Andersson N 1994 *Class. Quantum Grav.* **11** 3003

[3] Andersson N and Onozawa H 1996 *Phys. Rev. D* **54** 7470

[4] Andersson N and Thylwe K E 1994 *Class. Quantum Grav.* **11** 2991

[5] Anninos P, DeWitt-Morette C, Matzner R A, Yioutas P and Zhang T R 1992 *Phys. Rev. D* **46** 4477

[6] Bender C M and Orszag S A 1978 *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill, New-York)

[7] Berry M V 1966 *Proc. Phys. Soc.* **89** 479

[8] Berry M V 1969 *J. Phys. B.* **2** 381

[9] Berry M V and Mount K E 1972 *Rep. Prog. Phys.* **35** 315

[10] Berti E, Cardoso V and Lemos J P S 2004 *Phys. Rev. D* **70** 124006

[11] Berti E, Cardoso V and Starinets A O 2009 *Class. Quantum Grav.* **26** 163001

[12] Blatt J M and Weisskopf V 1952 *Theoretical Nuclear Physics* (Wiley, New York)

[13] Boulware D G 1975 *Phys. Rev. D* **11** 1404

[14] Brillouin L 1960 *Wave propagation and group velocity* (Academic Press, New-York)

[15] Burko L M and Khanna G 2004 *Phys. Rev. D* **70** 044018

[16] Cardoso V, Dias O J C, Lemos J P S and Yoshida S 2004 *Phys. Rev. D* **70** 044039

[17] Cardoso V, Miranda A S, Berti E, Witek H and Zanchin V T 2009 *Phys. Rev. D* **79** 064016

[18] Cardoso V and Yoshida S 2005 *J. High Energy Phys.* **07** 009

[19] Chandrasekhar S 1983 *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, Oxford)

[20] Chandrasekhar S and Ferrari V 1992 *Proc. R. Soc. London A* **437** 133

[21] Claudel C M, Virbhadra K S and Ellis G F R 2001 *J. Math. Phys.* **42** 818

[22] Cohen-Tannoudji C, Diu B and Laloë F 1997 *Mécanique quantique, Tome I et II* (Hermann)

[23] Collins P A, Delbourgo R and Williams R M 1973 *J. Phys. A : Math. Nucl. Gen.* **6** 161

[24] Collins P D B 1977 *An Introduction to Regge Theory and High-Energy Physics* (Cambridge University Press, Cambridge)

[25] Crispino L C B, Dolan S and Oliveira E S 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 231103

[26] Crispino L C B, Oliveira E S, Higuchi A and Matsas G E A 2007 *Phys. Rev. D* **75** 104012

[27] Damour T, Deruelle N and Ruffini R 1976 *Lett. Nuovo Cimento* **15** 257

[28] Das S R, Gibbons G W and Mathur S D 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 417

[29] de Hulst H C V 1957 *Light Scattering by Small Particles* (Wiley, New York)

[30] Décanini Y, Esposito-Farèse G and Folacci A 2011 *Phys. Rev. D* **83** 044032

[31] Décanini Y and Folacci A 2009 *Phys. Rev. D* **79** 044021

[32] Décanini Y and Folacci A 2010 *Phys. Rev. D* **81** 024031

[33] Décanini Y, Folacci A and Jensen B P 2003 *Phys. Rev. D* **67** 124017

[34] Décanini Y, Folacci A and Raffaelli B 2010 *Phys. Rev. D* **81** 104039
[35] Décanini Y, Folacci A and Raffaelli B 2011 *Class. Quantum Grav.* **28** 175021
[36] Deruelle N and Ruffini R 1974 *Phys. Lett. B* **52** 437
[37] Deruelle N and Ruffini R 1975 *Phys. Lett. B* **57** 248
[38] Detweiler S 1980 *Phys. Rev. D* **22** 2323
[39] DeWitt B S 2003 *The Global Approach to Quantum Field Theory* (Oxford University Press, Oxford)
[40] Dolan S 2007 *Phys. Rev. D* **76** 084001
[41] Dolan S, Doran C and Lasenby A 2006 *Phys. Rev. D* **74** 064005
[42] Dolan S, Doran C and Lasenby A 2006 *Phys. Rev. D* **74** 064005
[43] Dolan S, Oliveira E S and Crispino L C B 2009 *Phys. Rev. D* **79** 064014
[44] Dolan S and Ottewill A C 2009 *Class. Quantum Grav.* **26** 225003
[45] Dolan S and Ottewill A C 2011 (*Preprint* `arXiv:1106.4318 [gr-qc]`)
[46] Doran C, Lasenby A, Dolan S and Hinder I 2005 *Phys. Rev. D* **71** 124020
[47] Doran C, Lasenby A, Dolan S and Hinder I 2005 *Phys. Rev. D* **71** 124020
[48] Eisenhauer F and al 2008 *Proc. SPIE* **7013** 70132A
[49] Ferrari V 1992 *Proc. R. Soc. London A* **340** 423
[50] Ferrari V and Mashhoon B 1984 *Phys. Rev. D* **30** 295
[51] Feynman R P and Hibbs A R 1965 *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill)
[52] Fiziev P P 2006 *Class. Quantum Grav.* **23** 2447
[53] Ford K W and Wheeler J A 1959 *Ann. Phys.* **7** 259
[54] Ford K W and Wheeler J A 1959 *Ann. Phys.* **7** 287
[55] Frolov V P and Novikov I D 1998 *Black Hole Physics* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht)
[56] Furuhashi H and Nambu Y 2004 *Prog. Theor. Phys.* **112** 983
[57] Futterman J A H, Handler F A and Matzner R A 1988 *Scattering from black holes* (Cambridge University Press, Cambridge)
[58] Gaina A B 1989 *Sov. Phys. JETP* **69** 13
[59] Glampedakis K and Andersson N 2001 *Class. Quantum Grav.* **18** 1939
[60] Goebel C J 1972 *Ap. J.* **172** L95
[61] Grain J and Barrau A 2008 *Eur. Phys. J. C* **53** 641
[62] Grain J, Barrau A and Kanti P 2005 *Phys. Rev. D* **72** 104016
[63] Grandy W T 2000 *Scattering of Waves from Large Spheres* (Cambridge University Press, Cambridge)
[64] Gribov V N 2003 *The Theory of Complex Angular Momenta : Gribov Lectures on Theoretical Physics* (Cambridge University Press, Cambridge)
[65] Gubser S S 1997 *Phys. Rev. D* **56** 4984
[66] Harris C M and Kanti P 2003 *J. High Energy Phys.* **10** 014
[67] Hildreth W W 1964 *Ph. D. Thesis* (Princeton University, Unpublished)
[68] Hod S 2009 *Phys. Rev. D* **80** 064004
[69] Hod S 2011 *Phys. Rev. D* **84** 044046
[70] Ishak M, Rindler W and Dossett J 2010 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **403** 2152
[71] Iyer S 1987 *Phys. Rev. D* **35** 3632
[72] Iyer S and Will C M 1987 *Phys. Rev. D* **35** 3621
[73] Jung E and Park D K 2004 *Class. Quantum Grav.* **21** 3717
[74] Jung E and Park D K 2005 *Nucl. Phys. B* **717** 272
[75] Kay B S and Wald R M 1987 *Class. Quantum Grav.* **4** 893

[76] Kofman L A 1982 *Phys. Lett. A* **87** 281
[77] Kokkotas K D and Schmidt B G 1999 *Living Rev. Relativity* **2** 2
[78] Konoplya R A 2002 *Phys. Lett. B* **550** 117
[79] Konoplya R A 2003 *Phys. Rev. D* **68** 024018
[80] Konoplya R A 2006 *Phys. Rev. D* **73** 024009
[81] Konoplya R A and Zhidenko A V 2005 *Phys. Lett. B* **609** 377
[82] Konoplya R A, Zhidenko A V and Molina C 2007 *Phys. Rev. D* **75** 084004
[83] Koyama H and Tomimatsu A 2001 *Phys. Rev. D* **63** 064032
[84] Koyama H and Tomimatsu A 2001 *Phys. Rev. D* **64** 044014
[85] Langer R E 1937 *Phys. Rev.* **51** 669
[86] Lasenby A, Doran C, Pritchard J, Caceres A and Dolan S 2005 *Phys. Rev. D* **72** 105014
[87] Leaver E W 1985 *Proc. R. Soc. London A* **402** 285
[88] LeBellac M 2007 *Physique quantique* (EDP Sciences, 2ème Edition)
[89] Majumdar B and Panchapakesan N 1989 *Phys. Rev. D* **40** 2568
[90] Maldacena J and Strominger A 1997 *Phys. Rev. D* **56** 4975
[91] Mashhoon B 1985 *Phys. Rev. D* **31** 290
[92] Matzner R A 1968 *J. Math. Phys.* **9** 163
[93] Messiah A 2003 *Mécanique quantique, Tome 1 et 2* (Dunod, Nouvelle Edition)
[94] Misner C W, Thorne K S and Wheeler J A 1973 *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, San Francisco)
[95] Myers R C and Perry M J 1986 *Ann. Phys. (N.Y.)* **172** 304
[96] Natário J and Schiappa R 2004 *Adv. Theor. Math. Phys.* **8** 1001
[97] Newton R G 1982 *Scattering Theory of Waves and Particles* 2nd ed (Springer-Verlag, New York)
[98] Nollert H P 1999 *Class. Quantum Grav.* **16** R159
[99] Nussenzveig H M 1992 *Diffraction Effects in Semiclassical Scattering* (Cambridge University Press, Cambridge)
[100] Ohashi A and Sakagami M 2004 *Class. Quantum Grav.* **21** 3973
[101] Poincaré H 1910 *Rend. Circ. Mat. Palermo* **29** 169
[102] Press W H 1971 *Astrophys. J.* **170** L105
[103] Press W H and Teukolsky S A 1972 *Nature* **238** 211
[104] Regge T and Wheeler J A 1957 *Phys. Rev.* **108** 1063
[105] Rindler W and Ishak M 2007 *Phys. Rev. D* **76** 043006
[106] Sá Barreto A and Zworski M 1997 *Mathematical Res. Lett.* **4** 103
[107] Sánchez N 1978 *Phys. Rev. D* **18** 1030
[108] Schutz B F and Will C M 1985 *Astrophys. J.* **291** L33
[109] Schwartz L 1966 *Mathematics for the Physical Sciences* (Addison-Wesley)
[110] Simone L E and Will C M 1992 *Class. Quantum Grav.* **9** 963
[111] Sommerfeld A 1949 *Partial Differential Equations of Physics* (Academic Press, New York)
[112] Stefanov I Z, Yazadjiev S S and Gyulchev G G 2010 *Phys. Rev. L* **104** 251103
[113] Stewart J M 1989 *Proc. R. Soc. Lond. A* **424** 239
[114] Strafuss M J and Khanna G 2005 *Phys. Rev. D* **71** 024034
[115] Tangherlini F R 1963 *Nuovo Cim.* **27** 636
[116] Ternov I M, Halilov V P, Chizhov G A and Gaina A B 1978 *Izv. Vuz. USSR Fiz.* **21** 109
[117] Unruh W G 1976 *Phys. Rev. D* **14** 3251
[118] Vishveshwara C V *The Vaidaya-Raychaudhuri Endowment Lecture*

[119] Vishveshwara C V 1970 *Phys. Rev. D* **1** 2870
[120] Visser M 1998 *Class. Quantum Grav.* **15** 1767
[121] Watson G N 1918 *Proc. R. Soc. London A* **95** 83
[122] Watson G N 1918 *Proc. R. Soc. London A* **95** 83
[123] Wei S W, Liu Y X and Guo H 2011 (*Preprint* `arXiv:1103.3822v1 [hep-th]`)
[124] Will C M and Guinn J W 1987 *Phys. Rev. A* **37** 3674
[125] Xue L, Wang B and Su R K 2002 *Phys. Rev. D* **66** 024032
[126] Zaslavskii O B 1990 *Class. Quantum Grav.* **7** 589
[127] Zerbini S and Vanzo L 2004 *Phys. Rev. D* **70** 044030
[128] Zouros T M and Eardley D M 1979 *Ann. Phys.* **118** 139