



Des systèmes élastiques désordonnés aux statistiques d'événements rares

Grégory Schehr

► To cite this version:

Grégory Schehr. Des systèmes élastiques désordonnés aux statistiques d'événements rares. Mécanique statistique [cond-mat.stat-mech]. Université Paris Sud - Paris XI, 2011. tel-00640512

HAL Id: tel-00640512

<https://theses.hal.science/tel-00640512>

Submitted on 14 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Mémoire d'habilitation à diriger les recherches

**Des systèmes élastiques désordonnés aux statistiques
d'événements rares**

Grégory SCHEHR

Soutenance de thèse d'habilitation à diriger les recherches soutenue le
1^{er} Février 2011 devant un jury composé de

Jean-Philippe BOUCHAUD, examinateur

Bernard DERRIDA, rapporteur

Yan FYODOROV, rapporteur

Henk HILHORST, examinateur

Joachim KRUG, rapporteur

Marc MÉZARD, président du jury

Remerciements

C'est un grand plaisir de remercier ici mes collaborateurs avec qui j'ai travaillé durant ces dernières années et sans qui ce mémoire n'aurait certainement pas vu le jour. Je tiens à remercier mes collègues et collaborateurs d'Orsay et de Saclay qui font de cette région du Sud de Paris un environnement scientifique exceptionnel.

Une part importante des travaux présentés dans ce mémoire est issue de collaborations ou de discussions avec Satya Majumdar. Il m'a fait partager ses intuitions, ses goûts et son enthousiasme scientifiques. Je lui en suis extrêmement reconnaissant.

Bernard Derrida, Yan Fyodorov et Joachim Krug m'ont fait l'honneur d'accepter la lourde tâche de rapporteur de ce manuscrit d'habilitation à diriger les recherches.

Je remercie Marc Mézard d'avoir accepté de présider mon jury d'habilitation, Jean-Philippe Bouchaud d'y avoir participé en qualité d'examineur. Leur intérêt pour mon travail m'honore.

Je remercie enfin Henk Hilhorst en tant qu'examineur mais également en tant que collaborateur, au contact de qui j'ai beaucoup appris. Je tiens également à le saluer en tant que directeur du Laboratoire de Physique Théorique dont je suis membre depuis 2006.

A Aude, Capucine et Titien.

Table des matières

I. Systèmes élastiques désordonnés	11
1. Modèle SOS sur un substrat désordonné	13
1.1. Rugosité à température nulle	14
1.2. Chaos en désordre à température nulle	16
2. Dynamique non-stationnaire à la transition de dépiégeage	21
II. Propriétés de persistance	25
3. Un exemple instructif et non trivial : l'équation de diffusion	27
4. Persistance de l'aimantation globale à un point critique	30
4.1. Persistance globale à un point critique désordonné	31
4.2. Crossover dynamique de la persistance globale en conséquence d'une aimantation initiale finie	34
5. Persistance et polynômes aléatoires	38
5.1. Densité de racines réelles : formule de Kac-Rice	40
5.2. Probabilité de ne trouver aucune racine réelle	42
6. Statistique de la plus grande excursion	45
6.1. Résultats exacts pour des processus multiplicatifs et renouvellements	46
6.1.1. Processus de renouvellement	47
6.1.2. Processus multiplicatifs	48
6.2. Statistique de la plus longue excursion du mouvement Brownien fractionnaire	50
III. Statistique d'extrêmes	53
7. Introduction	54
7.1. Contexte et motivations	54
7.2. Statistique d'extrêmes de variables aléatoires identiques et indépendantes	56
7.2.1. La classe de Gumbel	58
7.2.2. La classe de Fréchet	59

Table des matières

7.2.3. La classe de Weibull	60
7.3. Quelques exemples fondamentaux de variables aléatoires fortement corrélées	61
7.3.1. Extrêmes de marches aléatoires	61
7.3.2. Extrêmes du mouvement Brownien : approche par l'intégrale de chemin	65
7.3.3. Valeurs propres maximales de matrices aléatoires : distribution de Tracy-Widom	70
8. Extrêmes de marches aléatoires : une approche par le groupe de renor- malisation dans l'espace réel	77
8.1. Introduction à la méthode de renormalisation dans l'espace réel . . .	77
8.2. Les résultats standards du Brownien	81
8.3. Processus de Bessel	83
8.4. Marche aléatoire en temps continu (CTRW)	84
9. Interface élastique et distribution d'Airy	86
9.1. Universalité de la distribution d'Airy et correction de taille finie . . .	89
9.2. D'autres définitions de la hauteur relative	91
9.3. Un problème relié : la question de Sylvester	93
10. Marcheurs répulsifs : du mouvement Brownien aux matrices aléatoires	97
10.1. Mouvements Browniens répulsifs et matrices aléatoires	98
10.1.1. Une approche par intégrale de chemin	98
10.1.2. Le lien avec les matrices aléatoires	99
10.1.3. Mouvement Brownien de Dyson	102
10.1.4. La limite du grand nombre de marcheurs $p \rightarrow \infty$ et le proces- sus d'Airy ₂	104
10.2. Statistiques d'extrêmes pour le modèle de marcheurs répulsifs	110
10.3. Liens avec les théories de Yang-Mills et distribution de Tracy-Widom	114
11. Conclusion et perspectives	118

Introduction générale au mémoire

Les résultats présentés dans ce mémoire d'habilitation à diriger les recherches s'appuient sur les travaux que j'ai effectués depuis 2006, date à laquelle j'ai rejoint le Laboratoire de Physique Théorique d'Orsay en tant que chargé de recherches au CNRS. J'ai choisi d'articuler ce mémoire autour de trois grandes thématiques :

1. les systèmes élastiques désordonnés,
2. les propriétés de persistance,
3. les statistiques d'extrêmes.

La première partie s'inscrit dans la continuité des travaux que j'ai effectués lors de ma thèse puis mon post-doctorat. Elle s'articule autour des résultats que j'ai obtenus pour deux modèles élastiques désordonnés : le modèle SOS sur un substrat désordonné en deux dimensions, et le voisinage de la transition de dépiégage d'une ligne élastique, en dimension $1+1$ dans un potentiel désordonné.

A la fin de mon post-doctorat, j'ai commencé à m'intéresser aux problèmes de persistance, auxquels est consacrée la deuxième partie. Je présenterai donc mes travaux sur la persistance, dans des situations de dynamique hors d'équilibre mais aussi d'un point de vue un peu plus formel, en connexion avec les propriétés des racines réelles de polynômes aléatoires. Enfin ces propriétés de persistance m'ont amené à m'intéresser aux statistiques d'extrêmes, qui constituent la part la plus importante de ce mémoire, cette thématique étant actuellement mon sujet principal de recherche. Cette dernière partie s'ouvre sur une assez longue introduction sur les statistiques d'extrêmes, où sont présentés un certain nombre de résultats connus (et d'autres moins connus).

Les travaux présentés ici s'appuient sur les 16 publications suivantes (afin de maintenir l'homogénéité thématique de ce manuscrit, un certain nombre de mes publications depuis 2006 ne sont pas discutées dans ce qui suit) :

Première partie : systèmes élastiques désordonnés

- P. Le Doussal, G. Schehr, *Disordered Free Fermions and the Cardy Ostlund Fixed Line at Low Temperature*, Phys. Rev. B **75**, 184401 (2007),
- K. Schwarz, A. Karrenbauer, G. Schehr, H. Rieger, *Domain walls and chaos in the disordered SOS model*, J. Stat. Mech., P08022 (2009),
- A. B. Kolton, G. Schehr, P. Le Doussal, *Universal non stationary dynamics at the depinning transition*, Phys. Rev. Lett. **103**, 160602 (2009).

Deuxième partie : propriétés de persistance

- R. Paul, G. Schehr *Non Markovian persistence in the diluted Ising model at criticality*, Europhys. Lett. **72**(5), 719 (2005),
- R. Paul, A. Gambassi, G. Schehr, *Dynamic Crossover in the Global Persistence at Criticality*, Europhys. Lett. **78** 10007, (2007),
- G. Schehr, S. N. Majumdar, *Statistics of the Number of Zero Crossings : from Random Polynomials to Diffusion Equation*, Phys. Rev. Lett. **99**, 060603 (2007),
- G. Schehr, S. N. Majumdar, *Real Roots of Random Polynomials and Zero Crossing Properties of Diffusion Equation*, J. Stat. Phys. **132**, 235 (2008),
- C. Godrèche, S. N. Majumdar, G. Schehr, *The Longest Excursion of Stochastic Processes in Nonequilibrium Systems*, Phys. Rev. Lett. **102**, 240602 (2009),
- R. Garcia-Garcia, A. Rosso, G. Schehr, *The longest excursion of fractional Brownian motion : numerical evidence of non-Markovian effects*, Phys. Rev. E **81**, 010102(R) (2010) .

Toisième partie : statistiques d'extrêmes

- G. Schehr, P. Le Doussal, *Extreme value statistics from the Real Space Renormalization Group : Brownian Motion, Bessel Processes and Continuous Time Random Walks*, J. Stat. Mech. P01009 (2010),
- G. Schehr, S. N. Majumdar, *Universal Asymptotic Statistics of Maximum Relative Height in One-Dimensional Solid-on-Solid Models*, Phys. Rev. E **73**, 056103 (2006),
- J. Rambeau, G. Schehr, *Maximum Relative Height of One-Dimensional Interfaces : from Rayleigh to Airy Distribution*, J. Stat. Mech., P09004 (2009),
- H. J. Hilhorst, P. Calka, G. Schehr, *Sylvester's Question and the Random Acceleration Process*, J. Stat. Mech. P10010, (2008),
- G. Schehr, S. N. Majumdar, A. Comtet, J. Randon-Furling, *Exact Distribution of the Maximal Height of p Vicious Walkers*, Phys. Rev. Lett. **101**, 150601 (2008),
- J. Rambeau, G. Schehr, *Extremal statistics of curved growing interfaces in 1+1 dimensions*, Europhys. Lett. **91**, 60006 (2010),
- P. J. Forrester, S. N. Majumdar, G. Schehr, *Non-intersecting Brownian walkers and Yang-Mills theory on the sphere*, Nucl. Phys. B **844**, 500 (2011).

Première partie .

Systèmes élastiques désordonnés

Introduction

Les systèmes élastiques en milieu désordonné ont été beaucoup étudiés ces vingt dernières années, notamment parce qu'ils offrent une description théorique pertinente de nombreuses situations expérimentales. Par exemple les parois de domaines magnétiques [1, 2, 3] ou ferro-électriques [5, 6], les lignes de contact dans les expérience de mouillage [7, 8], les fronts d'invasion dans les milieux poreux [9, 10] ou les lignes de fracture [11, 12, 13, 14] peuvent être modélisés par des interfaces élastiques. Dans la plupart de ces situations, ces interfaces ou ces lignes seraient essentiellement plates si elles n'étaient pas sujettes aux effets d'un désordre *gelé*, causé par des impuretés inévitablement présentes dans les conditions expérimentales. Les systèmes périodiques comme les ondes de densité de charge [15], les réseaux de vortex dans les supraconducteurs de type II [16, 17, 18] ou les cristaux de Wigner [19] peuvent aussi être modélisés par une variété élastique "plongée" dans un milieu aléatoire. Dans ces cas-là, la structure élastique est décrite par le champ de déplacement autour du réseau périodique parfait qui existerait en absence de désordre, par exemple le réseau d'Abrikosov dans le cas des supraconducteurs. Dans ces systèmes, la compétition entre l'élasticité et le désordre, même faible [20], donne naissance à des structures rugueuses (et non plus plates), et à des phénomènes de piégeage collectif complexes, dont une manifestation caractéristique est la transition de dépiégeage en présence d'une force extérieure [21].

Du point de vue théorique, ces systèmes sont particulièrement intéressants car il existe une grande variété d'approches analytiques pour étudier les propriétés vitreuses causées par cette compétition entre élasticité et désordre : des méthodes variationnelles [22], le groupe de renormalisation fonctionnel [23], les méthodes d'ansatz de Bethe [24, 25, 26, 27] ou encore les théories de champs conformes [28]. Il existe par ailleurs un certain nombre de techniques numériques pour étudier ces systèmes [29, 30].

Dans la première partie de ce mémoire, je décrirai tout d'abord mes contributions à l'étude de différentes propriétés statiques d'un de ces modèles en dimension $d = 2$, le modèle SOS sur un substrat désordonné (dit modèle de Cardy-Ostlund [31]). Dans un deuxième temps, je présenterai mes travaux sur le régime non-stationnaire au voisinage de la transition de dépiégeage d'une ligne élastique dans un potentiel désordonné.

Modèle SOS sur un substrat désordonné

1

Dans ce chapitre, nous considérons le modèle "solid-on-solid" (SOS) sur un substrat désordonné décrit par le hamiltonien

$$H_{\text{SOS}} = \sum_{\langle i,j \rangle} (h_i - h_j)^2, \quad h_i = n_i + d_i, \quad (1.1)$$

où $i \equiv (x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^2$. Dans cette expression (1.1), la variable de hauteur n_i ($i = 1, \dots, N$) prend des valeurs entières $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ et les variables d_i sont des variables aléatoires gelées indépendantes, distribuées uniformément entre 0 et 1. Dans la définition de H_{SOS} (1.1), la somme porte sur les plus proches voisins $\langle i, j \rangle$ d'un réseau carré, de côté L . Ce hamiltonien (1.1) décrit un modèle discret d'interface élastique bi-dimensionnelle dans un potentiel désordonné périodique. Dans la limite continue, ce modèle (1.1) est décrit par un hamiltonien de Sine-Gordon avec une phase aléatoire (et en l'absence de vortex), le modèle de Cardy-Ostlund [31] :

$$H_{\text{CO}} = \int d^2\mathbf{r} (\nabla u(\mathbf{r}))^2 - \lambda \cos(2\pi[u(\mathbf{r}) - d(\mathbf{r})]), \quad (1.2)$$

où $u(\mathbf{r}) \in (-\infty, +\infty)$ est un champ de déplacement continu et les variables $d(\mathbf{r}) \in [0, 1]$ sont des variables aléatoires gelées et indépendantes de site à site.

En l'absence de désordre, il est bien connu que ce modèle (1.1) exhibe une transition de *roughening* : à haute température $T > T_R = 4/\pi$, la surface est rugueuse, caractérisée par une croissance logarithmique de la fonction de corrélation à deux points (1.3) tandis que pour $T < T_R$ l'interface est plate, caractérisée par une saturation de cette fonction de corrélation à grande distance. Cette transition est dans la classe d'universalité de celle de Kosterlitz-Thouless-Berezinskii. En présence de désordre la situation est très différente. A haute température $T > T_g = 2/\pi$, le désordre n'est pas pertinent à grande échelle, et l'interface a toujours une rugosité logarithmique :

$$T > T_g, \quad C(r) := \overline{\langle (u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{0}))^2 \rangle} \sim T \ln r, \quad r \gg 1, \quad (1.3)$$

où $\langle \dots \rangle$ dénote une moyenne thermique, $\overline{\dots}$ une moyenne sur le désordre et $r = |\mathbf{r}|$. La phase de basse température est au contraire plus rugueuse que la phase de haute température :

$$T < T_g, \quad C(r) \sim A(T) \ln^2 r + \mathcal{O}(\ln(r)). \quad (1.4)$$

1.1 Rugosité à température nulle

Au voisinage de T_g , des méthodes de renormalisation de type gaz de Coulomb (nous renvoyons à la Ref. [32] pour une revue de ces résultats) permettent de montrer que

$$A(T) = 2\tau^2 + \mathcal{O}(\tau^3), \quad \tau = \frac{T_g - T}{T_g}, \quad (1.5)$$

en bon accord avec des simulations numériques au voisinage de T_g [33]. Par ailleurs, des simulations numériques à température nulle [34, 35], utilisant des algorithmes d'optimisation combinatoire pour calculer exactement la configuration d'énergie minimale de ce modèle (1.1) ont montré que ce comportement en $\ln^2 r$ de la fonction de corrélation (1.4) se prolongeait jusqu'à $T = 0$, *i.e.* $A_{\text{NUM}}(T = 0) \approx 0.5 > 0$. Une signature plus directe de la nature vitreuse de cette phase de basse température peut être trouvée dans les fluctuations de susceptibilité, qui sont d'ordre $\mathcal{O}(\tau)$ au voisinage de T_g [36].

Par ailleurs, on montre que les fluctuations d'énergie libre ΔF_L , pour un système de taille finie L , sont logarithmiques, $\Delta F_L \sim \ln L$. Ce comportement est cohérent [37] avec un exposant dynamique z qui dépend continûment de la température : on montre en effet que $z - 2 = \mathcal{O}(\tau)$ [32] au voisinage de T_g et $z \propto 1/T$ dans la limite $T \rightarrow 0$ [38, 39], indiquant un comportement des barrières d'énergie libre B_L également logarithmiques, $B_L \sim \ln L$. Ces propriétés sont caractéristiques d'une phase marginale décrite par une ligne de points fixes indexés par la température, contrairement au cas où $\theta > 0$ décrit par un point fixe de température nulle [23].

Durant ma thèse, puis mon post-doc, j'ai étudié la dynamique relaxationnelle hors d'équilibre de ce modèle, non seulement au voisinage de T_g [39, 40] mais également au voisinage de $T = 0$ [38, 39]. Ici, je présenterai tout d'abord une étude de la rugosité de l'interface à l'équilibre dans la limite de température nulle, puis des propriétés de chaos en désordre, toujours à $T = 0$.

1.1. Rugosité à température nulle

Depuis une quinzaine d'années plusieurs auteurs ont proposé d'étudier certains modèles désordonnés en dimension $d = 1 + 1$, notamment dans le contexte de la localisation, par des méthodes inspirées des théories de champs conformes (CFT pour *Conformal Field Theory*). Par exemple, plusieurs résultats exacts ont été obtenus pour des modèles de fermions libres dans un potentiel désordonné, avec diverses types de symétrie, en utilisant notamment des techniques de bosonisation, associée à la super-symétrie [28, 41]. Ces méthodes de théorie de champs bi-dimensionnelles sont certainement très attrayantes néanmoins il n'est pas encore très clair qu'elles capturent la physique, possiblement non perturbative, de ces systèmes vitreux (et notamment d'éventuelles transitions de gel, propres aux systèmes désordonnés [42]). Le modèle de Cardy-Ostlund (1.2) est un bon exemple pour tester la validité de telles approches puisqu'il est justement la forme "bosonisée" d'un de ces modèles de fermions en milieu désordonné qui a été étudié par ces méthodes [28, 41]. Dans ces travaux [28, 41], les auteurs ont prétendu avoir résolu exactement ce modèle (1.2). En particulier, ils ont obtenu un résultat, exact à tous les ordres en théorie de perturbation, pour la fonction beta (qui décrit le flot de renormalisation de la théorie)

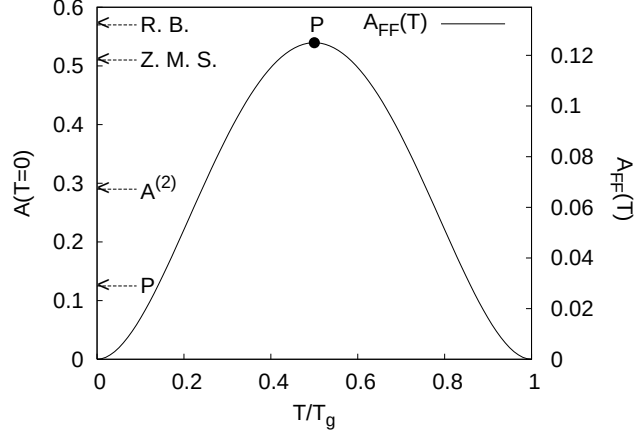


FIGURE 1.1.: **Axe des ordonnées à droite :** $A_{\text{FF}}(T)$ donnée par l'Eq. (1.6) obtenu de la Ref. [28] et conduisant à $A_{\text{FF}}(T = 0) = 0$. **Axe des ordonnées à gauche :** le calcul exact de la configuration d'énergie minimale du modèle (1.1) donne $A_{\text{NUM}}(T = 0) = 0.57$ de la Ref. [35] (noté 'R. B.' sur cet axe) et $A_{\text{NUM}}(T = 0) = 0.51$ de la Ref. [34] (noté 'Z. M. S.'), indiqué en même temps que la valeur $A_{\text{FRG}}(T = 0) \equiv A^{(2)}$ obtenue à l'aide du FRG dans la Ref. [45]. A noter que les échelles des deux axes sont différentes.

ainsi qu'une expression exacte pour les fonctions de corrélation, en utilisant des techniques d'algèbre de courant développées en particulier par A. Ludwig [28]. On peut déduire de ces articles [28, 41] le résultat pour l'amplitude $A(T) \equiv A_{\text{FF}}(T)$ (où l'indice FF renvoie à "free fermion") qui caractérise le comportement anormal de la fonction de corrélation $C(r)$ en Eq. (1.4) :

$$A_{\text{FF}}(T) = 2\tau^2(1 - \tau)^2, \quad (1.6)$$

où $\tau = (T - T_g)/T_g$. Ce résultat est en accord avec le résultat perturbatif pour $\tau \ll 1$ en Eq. (1.5). Par ailleurs cette amplitude $A_{\text{FF}}(T)$ exhibe un maximum pour $\tau = 1/2$, où $A_{\text{FF}} = 1/8$ (voir Fig. 1.1), et finalement *s'annule* à température nulle $T = 0$. Ce résultat $A_{\text{FF}}(T = 0) = 0$ est en contradiction avec les simulations numériques que nous avons mentionnées plus haut [34, 35] qui indiquent au contraire que $A(T = 0) \sim 0.5 > 0$. Par ailleurs le comportement de $A_{\text{FF}}(T)$ est assez surprenant puisqu'on s'attend a priori à ce que les effets du piégeage soient d'autant plus importants que la température est basse. Ce comportement non-monotone de $A_{\text{FF}}(T)$ rappelle d'ailleurs le résultat (incorrect) obtenu dans un modèle relié, le modèle XY avec une jauge aléatoire, en négligeant une infinité d'opérateurs qui deviennent en fait pertinents à basse température [43, 44].

Dans la référence [45], nous avons proposé un calcul de cette amplitude $A(T = 0)$ à température nulle en utilisant les techniques du groupe de renormalisation fonctionnel (FRG pour *Functional Renormalization Group*). Nous ne donnons ici aucun

1.2 Chaos en désordre à température nulle

détail de ce calcul assez technique et énonçons seulement les résultats principaux de notre approche, qui est donc un calcul perturbatif au voisinage de la dimension critique supérieure en dimension $d = 4 - \epsilon$. A l'aide du FRG, nous avons calculé $A_{\text{FRG}}(T = 0) \neq 0$ à l'ordre le plus bas d'une boucle, *i.e.* à l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$. Ce calcul donne une estimation de $A_{\text{FRG}}(T = 0) \sim 0.29$, en accord raisonnable avec les simulations numériques [34, 35], qui donnent $A_{\text{NUM}}(T = 0) \sim 0.5$ (voir Fig. 1.1). Nous avons montré que le fait que $A_{\text{FRG}}(T)$ ne s'annule pas à $T = 0$ est une conséquence directe de la non-analyticité du corrélateur du désordre au point fixe du FRG. En d'autres termes, cela signifie que le résultat $A_{\text{FF}}(T = 0) = 0$ (1.6) [28, 41] n'est rien d'autre que le résultat de la réduction dimensionnelle [46]. Dans ce modèle (1.2), on montre en effet que le couplage entre élasticité et désordre génère, dans l'action effective, des harmoniques plus élevées dans le terme de désordre, *i.e.* les termes $\cos[4\pi(u(\mathbf{r}) - \mathbf{d}(\mathbf{r}))]$, $\cos[8\pi(u(\mathbf{r}) - \mathbf{d}(\mathbf{r}))]$ Le comptage de puissance révèle que ces termes ne sont a priori pas pertinents pour $1/2 < T/T_g < 1$ ¹ mais ils deviennent tous pertinents à $T = 0$, rendant le point fixe de température nulle non analytique. Les équivalents de ces termes dans le modèle de fermions libres n'ont pas été considérés dans les références [28, 41], expliquant qualitativement leur résultat $A_{\text{FF}}(T = 0) = 0$. La prise en compte de ces opérateurs dans cette approche proposée par A. Ludwig et ses collaborateurs, afin d'échapper à la réduction dimensionnelle, reste un problème ouvert [47]. La compréhension détaillée de la phase de basse température de ce modèle reste un problème intéressant pour le futur.

1.2. Chaos en désordre à température nulle

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la sensibilité de la configuration d'énergie minimale (l'état fondamental) du modèle SOS (1.1) vis-à-vis d'une petite perturbation de la configuration du désordre. Pour cela, nous considérons une première réalisation des variables aléatoires d_i^1 et calculons l'état fondamental correspondant h_i^1 . Puis nous perturbons faiblement le substrat désordonné $d_i^2 = d_i^1 + \delta\epsilon_i$ avec $\delta \ll 1$ et où les variables ϵ_i sont des variables aléatoires indépendantes. Ici nous les choisissons Gaussiennes de moyenne nulle et de variance unité. Nous calculons ensuite l'état fondamental correspondant h_i^2 . La question que l'on se pose est la suivante : comment se comparent ces deux configurations h_i^1 et h_i^2 ?

Ce type de question est apparue il y a plus d'une vingtaine d'années dans le contexte des verres de spins [48], où il a été proposé que le désordre pouvait induire des propriétés de "chaos statique", c'est-à-dire une extrême sensibilité des configurations du système à une modification des paramètres extérieurs (comme le désordre ici, ou bien la température [49]). L'idée est alors que ces perturbations sont responsables d'une dé-corrélation des configurations du système au-delà d'une longueur de recouvrement ℓ_δ , qui diverge algébriquement lorsque δ tend vers 0 comme $\ell_\delta \sim \delta^{-1/\alpha}$, où α est "l'exposant de chaos". Pour fixer les idées, considérons par exemple un verre de spins d'Ising, $H_{\text{SG}} = \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j$ où $\sigma_i = \pm 1$ et où les couplages J_{ij} sont des

1. On ne peut toutefois pas exclure que la dimension de ces opérateurs soit modifiée le long de la ligne de points fixes.

variables aléatoires continues, de variance J . Dans un système de taille finie ce hamiltonien H_{SG} a deux états fondamentaux reliés l'un à l'autre par un renversement global des spins. Dans le contexte de la théorie phénoménologique des gouttelettes [48, 50, 51] une excitation de basse énergie du système est obtenue à partir de l'état fondamental en retournant les spins d'une région de taille linéaire ℓ (c'est ce qu'on appelle une gouttelette ou *droplet*) : ceci coûte une énergie $J\ell^\theta$ (c'est ce qui définit l'exposant θ). Si l'on ajoute maintenant une petite perturbation Gaussienne aux couplages, d'une largeur δJ , l'excédent d'énergie de cette même gouttelette est modifié. Pour un verre de spin, cet excédent d'énergie provient uniquement des liens à la frontière de la gouttelette et correspond donc à la somme de ℓ^{d_s} variables (de liens) aléatoires, où d_s est la dimension fractale de la gouttelette : cet excédent est donc d'ordre $\pm\delta\ell^{d_s/2}$. Cet argument prédit donc que l'état fondamental est instable par rapport à une perturbation infinitésimale des couplages sur des échelles de longueur ℓ telles que $\delta J\ell^{d_s/2} > J\ell^\theta$, i.e. $\ell > \ell_\delta$ où $\ell_\delta \sim \delta^{-1/\alpha_{\text{SG}}}$ avec $\alpha_{\text{SG}} = d_s/2 - \theta$. On voit donc que pour les verres de spins, les propriétés de chaos en désordre sont intimement reliées à la géométrie des excitations, à travers leur dimension fractale d_s .

La situation est assez différente pour des systèmes élastiques en milieu désordonné, comme le modèle SOS (1.1). Bien sûr cet hamiltonien, pour des conditions périodiques ou ouvertes a lui une infinité d'états fondamentaux qui diffèrent simplement par une translation globale du champ de hauteur $\Delta n \in \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$. Dans ce cas, toujours dans le contexte de la théorie des gouttelettes [50, 52, 53], une excitation de basse énergie du système consiste en un domaine de taille ℓ qui diffère localement de l'état fondamental par une translation "unitaire", c'est-à-dire $\Delta n = \pm 1$ et le coût en énergie est ℓ^θ . Considérons une petite perturbation du substrat désordonné $d_i^2 = d_i^1 + \delta\epsilon_i$: ici l'excédent d'énergie vient du coeur de la gouttelette, qui est sujet à une force aléatoire, et pas seulement de la frontière de cette région comme dans le cas d'un verre de spin. Ainsi dans ce cas, on s'attend à ce que l'état fondamental soit instable sur des échelles de longueur $\ell > \ell_\delta$ avec $\ell_\delta \sim \delta^{-1/\alpha}$ et $\alpha = d/2 - \theta$. Dans notre cas (1.1), $d = 2$ et $\theta = 0$ et on s'attend donc à $\ell_\delta \propto \delta^{-1}$.

Pour ce modèle SOS (1.1), les propriétés de chaos en désordre ont été démontrées analytiquement au voisinage de la température de transition [36] et à $T = 0$ des indications de chaos en désordre ont été observées par une mesure de corrélations globales $\chi(\delta) = \sum_i (h_i^1 - h_i^2)^2$ [35]. Dans la référence [54], en suivant un travail récent de Le Doussal, nous avons étudié les corrélations locales entre ces deux configurations h_i^1 et h_i^2 caractérisées par la fonction de corrélation $C_{ij}(\mathbf{r})$ avec $\mathbf{r} \equiv (x, y)$ (et $i, j = 1, 2$)

$$C_{ij}(\mathbf{r}) = \overline{(h_k^i - h_{k+\mathbf{r}}^i)(h_k^j - h_{k+\mathbf{r}}^j)}, \quad (1.7)$$

où $k + \mathbf{r} \equiv (x_k + x, y_k + y)$ et pour un système invariant par rotation on a bien sûr $C_{ij}(\mathbf{r}) \equiv C_{ij}(r)$ avec $r = |\mathbf{r}|$. De façon tout-à-fait équivalente on peut étudier ces corrélations dans l'espace de Fourier en définissant

$$S_{ij}(\mathbf{q}) = \overline{\hat{h}_q^i \hat{h}_{-q}^j}, \quad \hat{h}_q^j = \frac{1}{L^2} \sum_k h_k^j e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}}, \quad (1.8)$$

où $\mathbf{q} \cdot \mathbf{k} = q_x x_k + q_y y_k$. Pour un système invariant par rotation on a bien sûr

1.2 Chaos en désordre à température nulle

$S_{ij}(\mathbf{q}) \equiv S_{ij}(q)$ où $q = |\mathbf{q}|$. Dans la suite nous parlerons de corrélation intra-couches pour évoquer les corrélations $C_{ii}(r)$ [ou $S_{ii}(q)$] et de corrélations inter-couches pour évoquer $C_{i \neq j}(r)$ [ou $S_{i \neq j}(q)$].

Les propriétés de chaos en désordre à $T = 0$ pour un système élastique désordonné "générique" ont été étudiées dans la référence [53] à l'aide du groupe de renormalisation fonctionnel. A l'ordre d'une boucle en dimension $d = 4 - \epsilon$ il a été montré que, pour des systèmes dont le désordre a des corrélations à courte portée (ce qui inclut par exemple les modèles ferromagnétiques avec couplages aléatoires) ou bien pour un système dont le désordre est périodique en dimension $d > 2$ (comme par exemple le modèle du verre de Bragg à une composante), les corrélations inter-couches prennent la forme [53]

$$C_{12}(r) = r^{2\zeta} \Phi(\delta r^\alpha) \quad \text{avec} \quad \Phi(x) \sim \begin{cases} c^{\text{st}} & , \quad x \ll 1, \\ x^{-\mu} & , \quad x \gg 1, \end{cases} \quad (1.9)$$

où c^{st} est une constante, ζ l'exposant de rugosité, tel que $C_{ii}(r) \sim r^{2\zeta}$, et où μ est l'exposant de *dé-corrélation*. Dans l'espace de Fourier, $S_{12}(q)$ a donc la forme :

$$S_{12}(q) = \ell_\delta^{(d+2\zeta)} \varphi(q\ell_\delta) \quad \text{avec} \quad \varphi(y) \sim \begin{cases} y^{-d-2\zeta+\mu} & , \quad y \ll 1, \\ y^{-d-2\zeta} & , \quad y \gg 1, \end{cases} \quad (1.10)$$

avec $\ell_\delta \sim \delta^{-1/\alpha}$ et où le comportement de $\varphi(y)$ à grand argument est tel que $S_{12}(q)$ a une bonne limite lorsque $\ell_\delta \rightarrow \infty$ (*i.e.* $\delta \rightarrow 0$), comme il se doit.

Le modèle SOS en deux dimensions (1.1) correspond à un cas marginal périodique en dimension $d = 2$ [*i.e.* $\zeta = 0$ (1.4) et donc $\theta = 0$] pour lequel, comme cela est discuté dans les références [53, 55], l'analyse conduisant aux résultats ci-dessus (1.9) cesse d'être valide. En effet des termes non-locaux non pertinents en dimension $d > 2$ le deviennent en dimension $d = 2$ et nécessitent un traitement particulièrement ardu. Pour décrire les propriétés de chaos en désordre à $T = 0$ on peut toutefois s'inspirer des résultats de Hwa et Fisher obtenus au voisinage de la transition $T \lesssim T_g$ [36]. Leurs résultats pour la fonction de corrélation inter-couches s'écrivent, dans l'espace réel :

$$C_{12}(r) \sim \begin{cases} \sigma \ln^2(r) & , \quad r \ll L_\delta, \\ \hat{\sigma} \ln(r) & , \quad r \gg L_\delta. \end{cases} \quad (1.11)$$

ou bien, de façon équivalente, en espace de Fourier :

$$S_{12}(q) \sim \begin{cases} \sigma \frac{\ln 1/q}{q^2}, & q \gg L_\delta^{-1}, \\ \frac{\hat{\sigma}}{q^2}, & q \ll L_\delta^{-1}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Le but de notre travail [54] a été de répondre à deux questions principales : (i) quelles sont les corrélations résiduelles au-delà de la longueur ℓ_δ , et en particulier $\hat{\sigma}$ (1.11) est-il fini à température $T = 0$? Par ailleurs quelle est la forme d'échelle de la fonction de corrélation inter-couches $C_{12}(r)$, *i.e.* l'analogue de l'Eq. (1.9) à partir de laquelle on peut extraire l'exposant α ? Ici nous présentons nos résultats

numériques concernant l'étude de ces corrélations résiduelles. Nous renvoyons le lecteur à notre article [54] concernant l'étude de la forme d'échelle de $S_{12}(q)$ (rendue délicate par la présence de ces corrections logarithmiques (1.12) qui sont ici cruciales) et mentionnons seulement que nos données numériques sont compatibles avec une valeur de l'exposant de chaos $\alpha = 1$, en accord avec l'argument présenté plus haut.

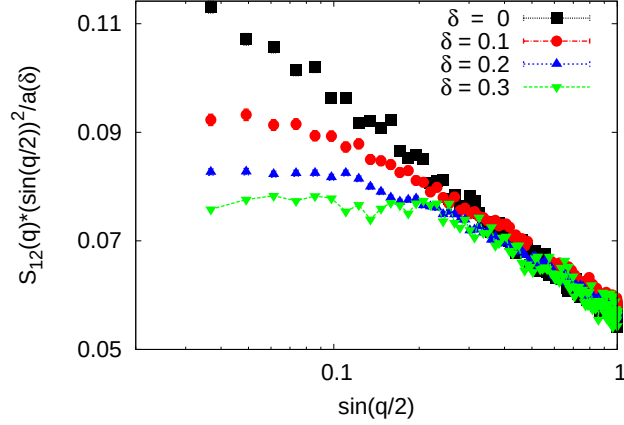


FIGURE 1.2.: $S_{12}(q) * y^2 / a(\delta)$ en fonction de $y = \sin(q/2)$ pour différentes valeurs de $\delta = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ et un système taille linéaire $L = 256$ sur une échelle log-linéaire. L'écart par rapport à une ligne droite, pour $\delta > 0$ est une indication de chaos en désordre dans ce modèle. Ce comportement est compatible avec l' Eq. (1.12) et en particulier avec une valeur finie de $\hat{\sigma}$ à $T = 0$.

Pour étudier ces propriétés de chaos en désordre pour ce modèle SOS (1.1), nous avons utilisé un algorithme d'optimisation combinatoire, l'algorithme dit de *minimum-cost-flow* [29], qui permet de calculer exactement (et en un temps polynomial) les deux configurations h_i^1 et h_i^2 correspondant respectivement au niveau fondamental du système pour une configuration d_i^1 et d_i^2 (avec des conditions aux bords libres). Pour mettre en évidence les effets de chaos en désordre dans ce modèle il s'avère plus commode d'étudier $S_{12}(q)$ en variable de Fourier (le crossover entre un $\ln r$ et un $\ln^2(r)$ étant assez difficile à identifier précisément dans $C_{12}(r)$ dans l'espace réel). Nous renvoyons à la référence [54] pour plus de détails sur les simulations et montrons ici seulement les résultats numériques. Ces simulations ont été faites sur un réseau carré de taille linéaire $L = 256$ et pour calculer $S_{12}(q)$ nous avons choisi $\mathbf{q} = (q, 0)$ avec $q = 2\pi n/L$ et $n = 0, 1, 2, \dots, L-1$. Sur la Fig. 1.2, nous présentons ces données pour $S_{12}(q)$. Le comportement en Eq. (1.12) suggère de représenter $q^2 S_{12}(q)$ en fonction de q . Pour s'affranchir au maximum des effets de taille finie il est commode de travailler avec la variable $y = \sin(q/2) = [(1 - \cos(q))/2]^{1/2}$ plutôt que le vecteur d'onde q lui-même (bien sûr pour $q \rightarrow 0$ ces deux variables coïncident à un facteur 2 près). Sur cette figure 1.2 nous traçons en fait $S_{12}(q)[\sin(q/2)]^2 / a(\delta)$ en fonction de $\sin(q/2)$ sur une échelle log-linéaire pour différentes valeurs de $\delta = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ [l'amplitude $a(\delta)$ est choisie

1.2 Chaos en désordre à température nulle

telle que les différentes courbes coïncident pour $\sin(q/2) \sim 1$, avec $a(0) = 1$].

Pour $\delta = 0$, où $S_{12}(q) = S_{11}(q)$, les points sont quasiment sur une même droite, ce qui suggère, pour $q \rightarrow 0$, que $S_{11}(q) \sim \ln(1/q)/q^2$: ceci produit bien le terme en $\ln^2(r)$ dans $C_{11}(r)$ en espace réel (1.4, 1.11), en accord avec d'autres simulations numériques effectuées précédemment [34, 35]. Pour $\delta > 0$, le comportement est assez différent : à petit vecteur d'onde q , nos données numériques montrent une déviation assez claire par rapport à la ligne droite, indiquant une saturation à une valeur finie (et nous avons vérifié qu'il ne s'agissait pas d'effets de taille finie). Cette saturation est une indication claire de chaos en désordre dans ce modèle. De plus, la saturation de cette quantité $S_{12}(q)[\sin(q/2)]^2/a(\delta)$ à une valeur finie est compatible avec une valeur finie de $\hat{\sigma} > 0$ en Eqs. (1.11, 1.12) à température nulle et la présence de corrélations résiduelles.

Nous concluons ce chapitre en indiquant que nous avons également étudié, dans la référence [54] les parois de domaines présents dans des configurations de plus basse énergie de ce modèle SOS (1.1) avec des conditions aux bords appropriées. Nous avons en particulier confronté certaines propriétés de ces domaines, en deux dimensions, aux prédictions des théories SLE (*Stochastic-Loewner-Evolution*) [56, 57]. Bien que la statistique de ces domaines soient qualitativement bien décrites par SLE, nous avons néanmoins montré que cette théorie seule ne suffisait pas pour décrire de façon cohérente l'ensemble des propriétés de ces domaines [54].

Dynamique non-stationnaire à la transition de dépiégeage

2

Le désordre dans les systèmes élastiques a pour effet de piéger collectivement ces structures et d'affecter de façon spectaculaire leurs propriétés dynamiques. En particulier, lorsque ces systèmes sont soumis à une force extérieure f , la présence de désordre conduit, à température nulle, à une *transition de dépiégeage* pour une valeur critique de la force $f = f_c$. Pour $f < f_c$ l'interface élastique est immobile tandis que pour $f > f_c$ elle atteint un régime stationnaire caractérisé par une vitesse moyenne constante v . Pour $f \gtrsim f_c$, il est intéressant de considérer cette transition de dépiégeage comme un phénomène critique où la vitesse moyenne $v > 0$ joue le rôle d'un paramètre d'ordre, se comportant comme $v \sim (f - f_c)^\beta$ au voisinage de la transition. Cette transition est caractérisée par une longueur de corrélation divergeant lorsque $f \rightarrow f_c$ comme $\xi \sim (f - f_c)^{-\nu}$. Les exposants β et ν sont donc des exposants critiques (universels). Cependant, près du point critique, le temps nécessaire à la mise en place du régime stationnaire hors d'équilibre peut être extrêmement long puisque le système garde la mémoire de la condition initiale sur des échelles de longueur plus grande que la longueur de corrélation qui croît au cours du temps comme $t^{1/z}$, où z est l'exposant dynamique [38, 58]. Puisque cette croissance n'est limitée que par la longueur de corrélation ξ (qui diverge au voisinage de la transition) ou la taille du système L , ce régime transitoire non-stationnaire peut être "macroscopique" $t \lesssim \min(\xi^z, L^z)$ et il est donc pertinent dans un certain nombre de situations expérimentales : l'étude de ce régime a fait l'objet de deux de mes publications [38, 59].

Nous nous intéressons ici à la dynamique d'interfaces élastiques de dimension interne d (donc $d = 1$ correspond à une ligne élastique) qui peut être paramétrisée par un champ de déplacement scalaire $u_{x,t}$ qui décrit la position de l'interface dans un milieu désordonné en dimension $d + 1$. La dynamique sur-amortie de cette interface en présence d'une force extérieure et à température nulle est décrite par l'équation du mouvement :

$$\eta \partial_t u_{x,t} = c \nabla^2 u_{x,t} + F(x, u_{x,t}) + f, \quad (2.1)$$

où η est le coefficient de friction, c la constante d'élasticité (on choisit ici une élasticité purement harmonique et isotrope dans le cadre d'un "modèle minimal") et $F(x, u)$ est une force de piégeage aléatoire de moyenne nulle et avec des corrélations spatiales de la forme $\overline{F(x, u)F(x', u')} = \Delta(u - u')\delta^d(x - x')$. En présence d'une force extérieure f , la vitesse moyenne est donnée par $v = L^{-d} \int d^d x \overline{\partial_t u_{x,t}}$. Nous considérons ici, par souci de simplicité, le cas où l'interface est initialement plate à l'instant $t = 0$

mais notre analyse reste valide pour une configuration initiale caractérisée par des corrélations à courte portée.

Nous décrivons les propriétés dynamiques de ce système à l'aide de quantités à deux temps t, t_w : les fonctions de corrélation et de réponse comme des fonctions de l'âge ou du temps d'attente t_w . En introduisant la composante de Fourier $\hat{u}_{q,t}$ du champ de déplacement $u_{x,t}$ nous définissons la fonction de réponse (linéaire) d'un mode de Fourier $\mathcal{R}_{tt'}^q$ à une petite perturbation extérieure $\hat{h}_{-qt_w}$

$$\mathcal{R}_{tt_w}^q = \frac{\overline{\delta \hat{u}_{qt}}}{\delta \hat{h}_{-qt_w}} \quad , \quad t > t_w \quad , \quad (2.2)$$

ainsi que la fonction de corrélation d'un mode de Fourier $\mathcal{C}_{tt_w}^q$

$$\mathcal{C}_{tt_w}^q = \overline{\hat{u}_{qt} \hat{u}_{-qt_w}} \quad . \quad (2.3)$$

Durant les quinze dernières années, de nombreux travaux ont concerné l'étude du régime stationnaire de la dynamique décrite par l'Eq. (2.1). Dans ce cas, ces fonctions à deux temps ne dépendent que de leur différence $t - t_w$ que les techniques du groupe de renormalisation fonctionnel (FRG) ont permis d'étudier en grand détail [23, 62, 63, 64, 65]. Le FRG a en effet permis de calculer les exposants critiques pour différentes classes d'universalité (*e.g.* un désordre avec des corrélations à courte portée, un désordre périodique...) et des algorithmes particulièrement efficaces ont été développés [30, 66, 67] pour étudier le diagramme des phases de ce système. En revanche, le régime transitoire, caractérisé notamment par une brisure de l'invariance par translation dans le temps a été beaucoup moins étudié.

Dans les références [38, 59], nous avons montré que ce régime présente des propriétés de vieillissement, universelles, similaires à celles des dynamiques relaxationnelles au voisinage d'un point critique (thermodynamique) [68, 69, 70]. Nous avons montré, en utilisant à la fois les techniques du FRG (à l'ordre de deux boucles) et des simulations numériques (dynamique moléculaire) que ces fonctions de réponse (2.2) et de corrélation prennent la forme d'échelle suivante :

$$\mathcal{R}_{tt_w}^q = (t/t_w)^{\theta_R} q^{z-2} F_R[q^z(t-t_w), t/t_w] \quad , \quad (2.4)$$

$$\mathcal{C}_{tt_w}^q = q^{-(1+2\zeta)} (t/t_w)^{\theta_C-1} F_C[q^z(t-t_w), t/t_w] \quad , \quad (2.5)$$

où θ_R et θ_C sont deux nouveaux exposants critiques, indépendants des exposants usuels, caractérisant la transition de dépiégeage. Ces exposants sont définis tels que $F_{R,C}(y_1, y_2 \rightarrow \infty) \sim f_{R,C}(y_1)$ pour y_1 fixé. Dans les Eqs (2.4, 2.5), les fonctions $F_{R,C}$ sont des fonctions d'échelle universelles (à une amplitude non universelle près) et ζ l'exposant de rugosité.

Pour tester ces prédictions du FRG (2.4, 2.5), nous avons résolu numériquement l'équation du mouvement (2.1) dans le cas d'une interface unidimensionnelle ($d = 1$). A $t = 0$, l'interface est donc plate, $u_{x,t=0} = 0$ et nous calculons ensuite les fonctions de réponse et de corrélation lorsque $f = f_c$, la force critique étant calculée exactement pour chaque réalisation du désordre en utilisant l'algorithme proposé dans les Refs. [30, 66, 67]. Numériquement, il est plus facile de calculer la fonction de réponse

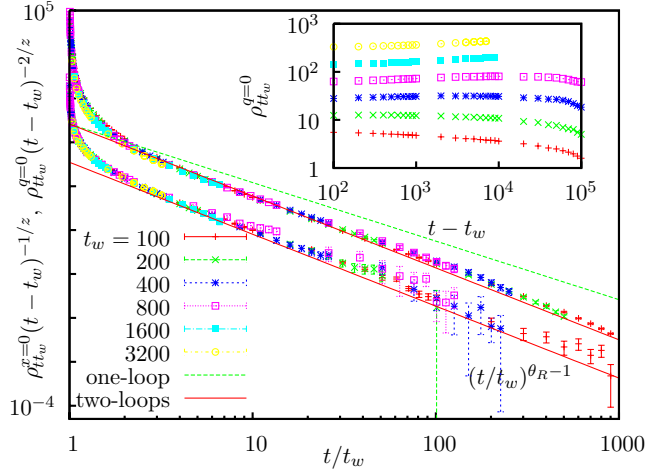


FIGURE 2.1.: Réponse intégrée locale $\rho_{tt_w}^{x=0}(t-t_w)^{-2/z}$ et globale $\rho_{tt_w}^{q=0}(t-t_w)^{-1/z}$ en fonction de t/t_w pour une ligne élastique exactement à la transition de dépiégeage. L'exposant θ_R est un nouvel exposant associé à la transition de dépiégeage : sa valeur numérique est estimée à $\theta_R = -0.6 \pm 0.02$, en très bon accord avec notre calcul à deux boucles $\theta_R \approx -0.638$ (2.7). Notons ici que l'exposant dynamique est $z = 1.5$. **Médaille** : pour comparaison nous traçons $\rho_{tt_w}^{q=0}$ en fonction de $t - t_w$.

globale intégrée plutôt que la réponse elle-même, $\rho_{tt_w}^{q=0} \equiv \int_0^{t_w} ds \mathcal{R}_{ts}^{q=0}$ ainsi que la fonction de réponse *locale* intégrée $\rho_{tt_w}^{x=0} \equiv \int_0^{t_w} ds \int_q \mathcal{R}_{ts}^q$. A partir des formes d'échelle ci-dessus (2.4) on déduit

$$\frac{\rho_{tt_w}^{x=0}}{(t-t_w)^{1/z}} = h\left(\frac{t}{t_w}\right), \quad \frac{\rho_{tt_w}^{q=0}}{(t-t_w)^{2/z}} = \tilde{h}\left(\frac{t}{t_w}\right), \quad (2.6)$$

où les fonctions $h(y)$ et $\tilde{h}(y)$ se comportent comme $y^{-1+\theta_R}$ pour $y \rightarrow \infty$. Sur la Fig. 2.1 nous montrons les résultats de nos simulations numériques pour $\rho_{tt_w}^{x=0}$ et $\rho_{tt_w}^{q=0}$ pour une interface de taille $L = 2048$ et moyennée sur 10^4 réalisations indépendantes du désordre. Nous voyons que les formes d'échelle ci-dessus (2.6) décrivent très bien nos données numériques. Par ailleurs, pour $t/t_w \gg 1$ nous observons un comportement en loi de puissance avec un exposant $\theta_R = -0.6 \pm 0.02$ qui est bien le même pour les deux fonctions de corrélation, $\rho_{tt_w}^{x=0}(t-t_w)^{-1/z} \sim \rho_{tt_w}^{q=0}(t-t_w)^{-2/z} \sim (t/t_w)^{-1+\theta_R}$. Par ailleurs dans la référence [59], nous avons calculé cet exposant θ_R à l'ordre de deux boucles :

$$\begin{aligned} \theta_R &= -\frac{\epsilon}{9} + \left(\frac{1}{162\gamma\sqrt{2}} - \frac{\ln 2}{108} - \frac{23}{648} \right) \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \\ &= -0.1111...\epsilon - 0.03395...\epsilon^2 + O(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (2.7)$$

avec $\gamma = \int_0^1 dy \sqrt{y-1-\ln y} = 0.54822...$ Pour $\epsilon = 3$, cette expression (2.7), en supposant que les corrections d'ordre $O(\epsilon^3)$ sont faibles, donne $\theta_R = -0.638...$, ce

qui est très proche de la valeur numérique. Finalement dans la référence [59], nous avons également calculé numériquement la fonction de corrélation et vérifié qu'elle obéissait bien à la forme d'échelle ci-dessus (2.5). Toutefois, le calcul de l'exposant θ_C par le FRG se révèle être particulièrement compliqué et reste encore un problème ouvert.

Ce travail montre donc que le régime transitoire de la dynamique d'une interface au voisinage de la transition de dépiégeage présente des propriétés universelles de vieillissement, caractérisées par de nouveaux exposants (θ_R , θ_C). Ce système constitue donc un des rares exemples de système désordonné en dimension finie où un calcul analytique de ces propriétés est possible, et dont les prédictions sont en bon accord avec nos simulations numériques. Outre leur intérêt théorique, ces prédictions théoriques devraient être pertinentes pour décrire diverses situations expérimentales comme la dynamique des parois de domaines dans des systèmes magnétiques ou les lignes de contact dans le contexte du mouillage (nous avons vérifié numériquement que ces formes d'échelles sont encore valides pour une élasticité à longue portée). Enfin il serait intéressant d'étudier les conséquences de ces propriétés de vieillissement pour les lignes de fracture.

L'étude des dynamiques hors d'équilibre et des propriétés de vieillissement dans ce modèle, et dans d'autres situations que j'ai étudiées [38, 39, 40] m'ont conduit à m'intéresser aux propriétés de temps de premier passage. En particulier, dans ces situations, les formes d'échelles similaires à celles obtenues plus haut (2.4, 2.5) permettent de décrire les propriétés de persistance, qui font l'objet de la partie suivante.

Deuxième partie .

Propriétés de persistance

Introduction

Après plusieurs dizaines d'années de recherche, la compréhension et la description des propriétés statistiques des "zéros" de processus stochastiques non-Markoviens restent un défi majeur pour les mathématiciens (notamment les probabilistes) mais aussi pour les physiciens. Une quantité particulièrement intéressante dans ce contexte est la *probabilité de persistance* $P_c(t)$: pour un processus stochastique $X(t \geq 0)$ de moyenne nulle, $\langle X(t) \rangle = 0$, la probabilité de persistance, ou simplement "la persistance", est définie comme la probabilité pour que X n'ait pas changé de signe dans l'intervalle de temps $[0, t]$. Ces propriétés statistiques de premier passage ont été abondamment étudiées dans les années 1960 par des mathématiciens [71, 72, 73, 74, 75, 76], souvent inspirés par des problèmes d'ingénierie. Durant les quinze dernières années, ces propriétés de persistance ont connu un vif intérêt dans le contexte de la mécanique statistique des systèmes hors d'équilibre, non seulement d'un point de vue théorique [77, 78] mais aussi expérimental [79]. Dans de nombreuses situations physiques, allant de la dynamique de marche vers l'ordre de systèmes ferromagnétiques (*coarsening*) aux interface fluctuantes ou aux chaînes de polymères, ces travaux [78] ont montré que $P_c(t)$ décroît génériquement en loi de puissance $P_c(t) \sim t^{-\theta_c}$ où l'exposant de persistance θ_c est en général non trivial. Pour le mouvement Brownien, on a $\theta_c = 1/2$ (qui est un résultat toutefois non trivial, valide aussi pour des marches de Lévy [72]), mais le calcul analytique de cet exposant devient extrêmement ardu pour des processus non-Markoviens [78].

Ces propriétés de persistance ont tout d'abord été étudiées dans le contexte de la dynamique relaxationnelle de systèmes ferromagnétiques à température nulle, $T = 0$, lorsque la configuration initiale est totalement aléatoire (*i.e.* une configuration de haute température) [77]. Dans ce cas, bien sûr, le processus stochastique $X(t)$ pertinent est l'aimantation locale, pour laquelle $P_c(t)$ décroît en effet algébriquement $P_c(t) \sim t^{-\theta_c}$. Pour la dynamique de Glauber de la chaîne d'Ising, on a par exemple $\theta_c = 3/8$ [84] tandis qu'en plus grande dimension, $d \geq 2$ cet exposant n'est connu que numériquement [77]. Un autre exemple d'exposant de persistance non trivial est donné par l'équation de diffusion avec des conditions initiales aléatoires en dimension d , que nous étudierons plus en détail dans le chapitre 3.

Après une discussion des propriétés de persistance pour l'équation de diffusion, je présenterai divers aspects de la probabilité de persistance sur lesquels j'ai travaillé. Dans le chapitre 4, je présenterai mes travaux sur la persistance de l'aimantation globale de systèmes critiques. Dans le chapitre 5 je présenterai les connexions entre les propriétés de persistance de l'équation de diffusion avec conditions initiales aléatoires et la statistique des racines réelles d'une classe de polynômes aléatoires. Enfin, dans le chapitre 6, je présenterai une extension des propriétés de persistance à l'étude des grandes excursions de processus aléatoires entre deux zéros consécutifs.

Un exemple instructif et non trivial : l'équation de diffusion

L'exemple le plus simple exhibant des propriétés de persistance non triviales est certainement celui des marches aléatoires. Depuis les travaux fondateurs du mathématicien Sparre Andersen [72], les propriétés de premier passage de marches aléatoires ont été abondamment étudiées et, pour plus de détail, nous renvoyons le lecteur aux livres de Feller [80] et de Redner [81] ainsi qu' à des notes de cours récentes sur ce sujet passionnant [82, 83]. Dans ce chapitre nous avons choisi de présenter un autre exemple qui a été beaucoup étudié en mécanique statistique, et qui permet d'entrevoir la complexité de cet objet qu'est la persistance : l'équation de diffusion, ou équation de la chaleur, en dimension d . Ici un champ scalaire $\phi(\mathbf{x}, t)$ évolue dans le temps selon l'équation déterministe

$$\partial_t \phi(\mathbf{x}, t) = \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t), \quad (3.1)$$

avec des conditions initiales *aléatoires*, $\phi(\mathbf{x}, t = 0) = \psi(\mathbf{x})$ où $\psi(\mathbf{x})$ est un champ aléatoire gaussien de moyenne nulle et avec des corrélations spatiales à courte portée, $[\psi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}')]_{\text{ini}} = \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Ici on utilise la notation $[\dots]_{\text{ini}}$ pour indiquer une moyenne sur les conditions initiales. Pour un système de taille L , la persistance $P_c(t, L)$ est la probabilité pour que le champ $\phi(\mathbf{x}, t)$, en un point donné de l'espace $\mathbf{x}$, ne change pas de signe jusqu'au temps t . La condition initiale étant statistiquement invariante par translation la probabilité de persistance ne dépend pas de la position $\mathbf{x}$, suffisamment loin de la frontière du système considéré.

Pour un système de taille linéaire L , la solution de l'équation de diffusion (3.1), en un point suffisamment éloigné de la frontière du système, est

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{|\mathbf{y}| \leq L} d\mathbf{y} \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \psi(\mathbf{y}) \quad , \quad \mathcal{G}(\mathbf{x}) = (4\pi t)^{-d/2} \exp(-\mathbf{x}^2/4t), \quad (3.2)$$

où $\psi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, 0)$ est un champ Gaussien, décorrélé de site à site. Puisque l'Eq. (3.2) est linéaire, $\phi(\mathbf{x}, t)$ est une variable Gaussienne à tout temps $t \geq 0$. Ainsi les propriétés statistiques de ses zéros sont complètement déterminées par le corrélateur à deux temps $[\phi(\mathbf{x}, t)\phi(\mathbf{x}, t')]_{\text{ini}}$. Pour étudier les propriétés de persistance $P_c(t, L)$ il est utile d'étudier le processus normalisé [78] :

$$X(t) = \frac{\phi(\mathbf{x}, t)}{[\phi(\mathbf{x}, t)^2]_{\text{ini}}^{1/2}}. \quad (3.3)$$

On calcule aisément sa fonction d'auto-corrélation $a(t, t') = [X(t)X(t')]_{\text{ini}}$ à partir de la solution explicite donnée en Eq. (3.2). On obtient alors $a(t, t') \equiv a(\tilde{t}, \tilde{t}')$ avec $\tilde{t} = t/L^2$ et $\tilde{t}' = t'/L^2$

$$a(\tilde{t}, \tilde{t}') = \begin{cases} \left(\frac{4\tilde{t}\tilde{t}'}{(\tilde{t}+\tilde{t}')^2} \right)^{d/4} & , \quad \tilde{t}, \tilde{t}' \ll 1 , \\ 1 & , \quad \tilde{t}, \tilde{t}' \gg 1 . \end{cases} \quad (3.4)$$

Considérons tout d'abord le régime $\tilde{t}, \tilde{t}' \ll 1$. Après la première étape de normalisation (3.3), il est utile de procéder à une seconde transformation en introduisant le temps logarithmique

$$T = \ln \tilde{t} . \quad (3.5)$$

Il est alors aisé de voir que, en fonction de ce temps logarithmique T , $X(T)$ en Eq. (3.3) est un processus Gaussien stationnaire dont le corrélateur est donné par

$$a(T, T') \equiv a(T - T') = [\cosh(|T - T'|/2)]^{-d/2} , \quad (3.6)$$

qui décroît exponentiellement, $a(T - T') \sim \exp[-(d/4)|T - T'|]$ pour $|T - T'| \gg 1$. Ainsi, nous avons ramené le calcul de la probabilité de persistance $P_c(t, L)$, pour $t \ll L^2$, au calcul de la probabilité de persistance $\mathcal{P}_0(T)$ du processus $X(T)$. On peut alors utiliser un résultat pour un processus gaussien stationnaire dû à Slepian [75] qui affirme que si $a(T) < 1/T$ pour T grand, alors $\mathcal{P}_0(T)$ décroît exponentiellement $\mathcal{P}_0(T) \sim \exp[-\theta T]$. Ce théorème ne dit cependant rien sur l'exposant θ si ce n'est qu'il dépend d'une façon non triviale du corrélateur complet $a(T)$ en Eq. (3.6) (et pas seulement de son comportement asymptotique à T grand). Si l'on revient au temps original $\tilde{t} = e^T$ (3.5), on obtient alors $P_c(t, L) \sim t^{-\theta(d)}$, pour $1 \ll t \ll L^2$. On s'attend en effet à ce que l'exposant de persistance $\theta(d)$ dépende continûment de d puisque c'est le cas du corrélateur $a(T)$ (3.6). Dans la limite opposée $t \gg L^2$, on a $P_c(t, L) \rightarrow A_L$, une constante qui dépend de L . Ces deux comportements limites de $P_c(t, L)$ peuvent être résumés dans la forme d'échelle suivante [85] :

$$P_c(t, L) \propto L^{-2\theta(d)} h(L^2/t) , \quad (3.7)$$

où la fonction $h(u) \sim c^{\text{st}}$, une constante indépendante de L et t pour $u \ll 1$ et $h(u) \propto u^{\theta(d)}$ pour $u \gg 1$ où $\theta(d)$ est un exposant qui dépend continûment de la dimension d . Ceci implique en particulier que, dans la limite $L \rightarrow \infty$, $P_c(t) \equiv P_c(t, L \rightarrow \infty) \sim t^{-\theta(d)}$ pour $t \gg 1$. Cet exposant a été mesuré dans des simulations numériques [85, 86], donnant les estimations $\theta_{\text{sim}}(1) = 0.12050(5)$, $\theta_{\text{sim}}(2) = 0.1875(1)$. Le cas de la dimension $d = 1$ est particulièrement intéressant puisque cet exposant a été mesuré expérimentalement à l'aide de technique de Résonance Magnétique Nucléaire (RMN) pour mesurer l'aimantation de spin d'un gaz de Xenon polarisé, en géométrie unidimensionnelle [87], avec pour résultat $\theta_{\text{exp}}(1) = 0.12$, en bon accord avec les simulations numériques.

Malgré de nombreux travaux théoriques, il n'existe pas de résultats exacts pour la valeur de cet exposant $\theta(d)$. Néanmoins, plusieurs méthodes ont été proposées

pour en donner une valeur approchée. L'approximation la plus précise pour ce processus de diffusion est certainement celle des intervalles indépendants (ou IIA pour *Independent Interval Approximation*) [73], qui suppose l'indépendance statistique des intervalles entre les "zéros" successifs de $\phi(\mathbf{x}, t)$. Cette méthode fournit les approximations suivantes : $\theta_{\text{IIA}}(1) = 0.1203\dots$, $\theta_{\text{IIA}}(2) = 0.1862\dots$ [85], en accord remarquable avec les simulations numériques. Une approche alternative, et plus systématique, consiste à développer $\theta(d)$ au voisinage de $d = 0$ où le processus est Markovien [88, 89]. Cette expansion donne $\theta(d) = d/4 - 0.12065\dots d^{3/2} + \dots$ [90], qui nécessiterait certainement un calcul à l'ordre suivant pour rendre cette estimation numériquement compétitive. Il existe encore une autre approche systématique, introduite dans le contexte de "la persistance en temps discret" [91] et qui donne des résultats approchés pour $\theta(d)$ en très bon accord avec les simulations numériques. Finalement, dans la limite de grande dimension $d \gg 1$, on peut montrer que $\theta(d) \sim 2^{-3/2} \theta_\infty \sqrt{d}$ où θ_∞ est le taux de décroissance de la persistance $\mathcal{P}_0(T)$ associée au processus Gaussien stationnaire dont les corrélations sont données par

$$C_\infty(T) = \langle X(T')X(T' + T) \rangle = \exp\left(-\frac{T^2}{2}\right), \quad (3.8)$$

pour lequel $\mathcal{P}_0(T) \sim \exp(-\theta_\infty T)$, pour $T \gg 1$.

Ceci montre donc que même pour un processus simple comme l'équation de diffusion (3.1), la persistance est un objet particulièrement complexe, pour lequel il n'existe pas de résultats exacts. Nous verrons au chapitre 5 que ces propriétés de persistance pour l'équation de diffusion sont reliées à celles des racines réelles de certains polynômes aléatoires.

Persistence de l'aimantation globale à un point critique

4

En mécanique statistique, les propriétés de persistence ont tout d'abord été étudiées dans le contexte des dynamiques relaxationnelles, de marches vers l'ordre (*coarsening*), de systèmes ferromagnétiques à température nulle $T = 0$ [77]. Dans ce cas, nous l'avons dit en introduction, un processus stochastique naturel est l'aimantation locale, c'est-à-dire la valeur *d'un seul spin*, pour laquelle $P_c(t)$ décroît algébriquement. En revanche, à température finie, $T > 0$, un spin individuel fluctue très rapidement et la probabilité de persistence de l'aimantation locale décroît exponentiellement à grand temps t .

Néanmoins, Majumdar, Bray, Cornell et Sire ont montré que si l'on considérait au contraire la probabilité de persistence associée à *l'aimantation globale*, appelée "persistence globale", celle-ci décroît algébriquement dans la phase de basse température, *i.e.* en dessous de la température critique $0 \leq T \leq T_c$, $P_g(t) \sim t^{-\theta_0}$, avec un exposant θ_0 [92]. Le cas où le système est exactement à la température critique, que nous allons considérer ici, est particulièrement intéressant puisque θ_0 se trouve être un nouvel exposant universel associé à la dynamique critique hors d'équilibre de ces systèmes [92]. Depuis, la persistence globale a été étudiée dans divers systèmes critiques [89, 93, 94, 95] (nous renvoyons le lecteur à la référence [96] pour une étude numérique récente de la persistence globale en dessous de T_c).

On considère donc un système ferromagnétique de taille linéaire L dans une configuration totalement aléatoire à l'instant $t = 0$ que l'on place brutalement à sa température critique T_c où on le laisse relaxer vers l'équilibre. La dynamique critique de ce système est alors caractérisée par l'évolution temporelle de la longueur de corrélation $\xi(t)$, qui dans ces systèmes croît algébriquement $\xi(t) \sim t^{1/z}$ où z est l'exposant dynamique : en général $z \geq 2$ est un exposant non-trivial à un point critique. Dans le régime de dynamique hors d'équilibre la longueur de corrélation est encore petite devant la taille du système, $\xi(t) \ll L$. Grâce à cette propriété il est possible de faire des progrès analytiques dans le calcul de la persistence globale $P_g(t)$. En effet, pour un système d -dimensionnel, l'aimantation globale $M(t)$ est, par définition, la somme de L^d variables aléatoires (les aimantations locales) qui ne sont corrélées que sur une échelle de longueur $\xi(t) \ll L$. Aussi peut-on évoquer le théorème de la limite centrale pour affirmer que $M(t)$ est un processus Gaussien, pour lequel différents types d'approximation ont été développés [78, 88, 89]. Sous l'hypothèse additionnelle que $M(t)$ est un processus Markovien, l'exposant θ_0 peut être relié aux autres exposants critiques (statiques et dynamiques) par la relation [92]

$$\theta_0 = \mu \equiv (\lambda - d + 1 - \eta/2)z^{-1}, \quad (4.1)$$

où η est l'exposant statique (dit exposant de Fisher) et λ l'exposant d'autocorrélation [97, 98]. Cependant, $M(t)$ est en général non-Markovien et θ_0 est donc un nouvel exposant caractérisant la dynamique hors d'équilibre de ces systèmes critiques.

Ici nous verrons deux aspects de la persistence globale à un point critique sur lesquels j'ai travaillé : les effets du désordre [95] seront présentés dans la première partie tandis que dans la seconde partie je discuterai les effets d'une aimantation finie de la condition initiale qui induit un changement de comportement intéressant de la probabilité de persistence [116] .

4.1. Persistence globale à un point critique désordonné

Si les propriétés de persistence ont beaucoup été étudiées dans les systèmes purs, il n'existe que très peu de travaux concernant les systèmes désordonnés, parmi lesquels ne figurent que des systèmes unidimensionnels [99, 100]. Dans la référence [95] nous avons étudié les effets du désordre *gelé* sur les propriétés de persistence globale à un point critique. Pour cela, nous avons considéré un prototype d'une telle situation, le modèle d'Ising dilué aléatoirement :

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} \rho_i \rho_j s_i s_j , \quad (4.2)$$

où les variables $s_i = \pm 1$ sont des spins d'Ising au sommet d'un réseau hypercubique en d dimensions tandis que les variables ρ_i sont des variables aléatoires gelées telles que $\rho_i = 1$ avec une probabilité p et 0 sinon. Dans le cas pertinent du point de vue expérimental où $d = 3$ [101], pour lequel l'exposant de la chaleur spécifique du modèle pur est positif, $\alpha_{\text{pure}} > 0$, on s'attend, d'après le critère de Harris [102]¹ à ce que le désordre modifie la classe d'universalité de la transition ferro-paramagnétique dans ce modèle (4.2). Dans la limite de faible dilution $1 - p \ll 1$, les propriétés à grande échelle de ce système (4.2), au voisinage du point critique, sont décrites par un modèle de type ϕ^4 , avec une symétrie $O(1)$ (pour le modèle d'Ising), avec un terme de masse aléatoire, parfois appelé dans la littérature le "random Ising model" (RIM) [103] :

$$H^\psi[\varphi] = \int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} [r_0 + \psi(\mathbf{x})] \varphi^2 + \frac{g_0}{4!} \varphi^4 \right] , \quad (4.3)$$

où $\varphi \equiv \varphi(\mathbf{x})$, $\psi(\mathbf{x})$ est une variable aléatoire gaussienne décorrélée de site à site $\overline{\psi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}')} = \Delta_0 \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ et r_0 , la "masse nue" (en langage du groupe de renormalisation), est ajustée de telle sorte que la masse renormalisée soit nulle (*i.e.* que le système soit au point critique). Les propriétés statiques de ce modèle (4.3) ont été abondamment étudiées dans la littérature, en particulier à l'aide des méthodes du groupe de renormalisation (RG) [103]. Pour ce faire, on introduit n répliques du système, ce qui permet de faire la moyenne sur les variables gelées $\psi(\mathbf{x})$ [42] : l'analyse par le RG se fait donc sur le hamiltonien "répliqué". L'approche standard

1. Le critère de Harris estime l'influence des fluctuations du désordre local sur les fluctuations de température critique.

4.1 Persistance globale à un point critique désordonné

conduit à un point fixe, accessible perturbativement en dimension $d = 4 - \epsilon$, qui est symétrique par rapport aux permutations des répliques (*replica symmetric*). Notons que si les travaux [104, 105] ont d'abord montré qu'à l'ordre d'une boucle – dans la théorie de perturbation – ce point fixe était instable par rapport à une perturbation infinitésimale qui brise cette symétrie des répliques, il a ensuite été montré [106, 107] que la stabilité du point fixe symétrique était restaurée si l'on incluait les corrections à l'ordre de deux boucles. Néanmoins l'existence d'une phase de type "verre de spin" dans ce modèle [108], ayant son origine dans des contributions non-perturbatives que l'approche par le RG ne prendrait pas en compte reste un problème ouvert, même si les simulations numériques disponibles sont en très bon accord avec les prédictions du RG [109].

Ici nous souhaitons décrire la dynamique relaxationnelle, vers l'équilibre thermodynamique, de ce système (4.3) couplé à un bain thermique à la température T_c . Bien qu'il n'y ait pas de façon canonique d'écrire une équation d'évolution pour un tel système classique couplé à son environnement (pour cela il faudrait revenir à une description quantique du système et du bain thermique et en dériver la limite classique [69]), on décrit souvent cette dynamique dissipative phénoménologiquement par une équation de Langevin (dite modèle A dans la nomenclature de Hohenberg et Halperin [110]) :

$$\eta \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\delta H^\psi[\varphi]}{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)} + \zeta(\mathbf{x}, t) , \quad (4.4)$$

où $\zeta(\mathbf{x}, t)$ est un bruit blanc gaussien tel que $\langle \zeta(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$ et $\langle \zeta(\mathbf{x}, t) \zeta(\mathbf{x}', t') \rangle = 2\eta T \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$ et η le coefficient de friction (fixé à 1 dans la suite, $\eta = 1$). Initialement, à $t = 0$, le système est donc dans une configuration aléatoire, de moyenne nulle $[\varphi(\mathbf{x}, t = 0)]_{\text{ini}} = 0$ caractérisée par des corrélations à courte portée $[\varphi(\mathbf{x}, t = 0) \varphi(\mathbf{y}, t = 0)]_{\text{ini}} = \tau_0^{-1} \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, où τ_0^{-1} n'est pas pertinent au sens du groupe de renormalisation [97] (et dans la suite on pose $\tau_0^{-1} = 0$). L'aimantation globale $M(t)$ est donc par définition

$$M(t) = \frac{1}{N_{\text{occ}}} \sum_i \rho_i s_i(t) = \frac{1}{L^d} \int d\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}, t) , \quad (4.5)$$

où N_{occ} est le nombre total de sites occupés. Nous cherchons à calculer la persistance globale $P_g(t)$, c'est-à-dire la probabilité (moyennée sur le désordre) pour que l'aimantation n'ait pas changé de signe dans l'intervalle de temps $[0, t]$. Comme nous l'avons expliqué plus haut, $M(t)$ est un processus Gaussien, il est donc complètement caractérisé par la fonction de corrélation à deux temps $\mathcal{C}_{tt_w} = \langle M(t) M(t_w) \rangle$. Des arguments d'analyse dimensionnelle conjuguée aux méthodes de renormalisation dynamique permettent de montrer que cette fonction de corrélation s'écrit sous la forme [68, 70, 111, 112, 113] :

$$\overline{\langle M(t) M(t_w) \rangle} = A_d t^{\frac{2-\eta}{z}} \left(\frac{t}{t_w} \right)^{\frac{d-2+\eta-\lambda}{z}} F \left(\frac{t}{t_w} \right) , \quad (4.6)$$

où $F(x)$ est une fonction d'échelle universelle et A_d est une constante non universelle définie telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$. Pour étudier les propriétés de persistance de

$M(t)$ l'idée est d'introduire le processus normalisé $m(t) = M(t)/\sqrt{\langle M^2(t) \rangle}$ comme précédemment en Eq. (3.3) qui a bien sûr les mêmes propriétés de persistence que $M(t)$ mais dont la fonction de corrélation $\langle m(t)m(t_w) \rangle$, obtenue simplement à partir de (4.6) est une fonction du rapport des temps t/t_w seulement. Si finalement on utilise une échelle de temps logarithmique $T = \ln t$ comme en Eq. (3.5), on obtient

$$\langle m(T)m(T_w) \rangle = e^{-\mu(T-T_w)} \mathcal{A}(e^{T-T_w}) , \quad \mu = (\lambda - d + 1 - \eta/2)z^{-1} , \quad (4.7)$$

où la fonction $\mathcal{A}(x)$ est telle que

$$\mathcal{A}(x) \sim \begin{cases} 1 , & x \rightarrow 1 , \\ B_d , & x \rightarrow \infty , \end{cases} \quad (4.8)$$

où B_d est une constante universelle. Si le processus $m(T)$ est Markovien, alors sa fonction de corrélation est une pure exponentielle [76], $\langle m(T)m(T_w) \rangle = e^{-\mu(T-T_w)}$, *i.e.* la fonction $\mathcal{A}(x) = 1$ pour tout x dans l'Eq. (4.7). Dans ce cas, on peut utiliser un théorème de Slepian [75] (donc pour un processus Markovien cette fois-ci) pour obtenir que la probabilité de persistence $P_g(T)$ décroît aussi exponentiellement avec le même taux μ pour $T \gg 1$, $P_g(T) \sim \exp(-\mu T)$. En rappelant que $T = \ln t$, on obtient bien que supposer que $M(t)$ est Markovien conduit à la relation $\theta_0 = \mu$ annoncée plus haut (4.1). En revanche si $M(t)$ n'est pas Markovien la fonction $\mathcal{A}(x)$ n'est pas une simple constante et un autre théorème de Slepian [75] dit seulement que $P_g(T) \sim \exp(-\theta_0 T)$ mais ne dit rien sur l'exposant θ_0 .

Il n'existe pas à ce jour de résultat exact pour la fonction $\mathcal{A}(x)$ (et d'ailleurs si tel était le cas le calcul de l'exposant θ_0 resterait non trivial). Toutefois, à l'aide de méthodes de théorie des champs et de renormalisation on peut calculer cette fonction d'échelle (ainsi que les exposants critiques) au voisinage de la dimension critique supérieure, ici en $d = 4 - \epsilon$. On montre alors que ces quantités admettent des développements perturbatifs en puissance de $\epsilon^{1/2}$ [103] (on trouvera une discussion de la convergence de ce développement perturbatif dans la référence [114]). Les exposants intervenant dans l'expression de μ dans l'Eq. (4.7) admettent alors le développement (à l'ordre le plus bas) [111] :

$$z = 2 + \sqrt{\frac{6\epsilon}{53}} + \mathcal{O}(\epsilon) , \quad \lambda = 4 + \mathcal{O}(\epsilon) , \quad \eta = \mathcal{O}(\epsilon) , \quad (4.9)$$

tandis que la fonction d'échelle $\mathcal{A}(x)$ est donnée par [112, 113]

$$\begin{aligned} \langle m(T)m(T_w) \rangle &= e^{-\mu(T-T_w)} \mathcal{A}(e^{T-T_w}) , \\ \mathcal{A}(x) &= \left(1 + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{6\epsilon}{53}} \left(x \ln \frac{x-1}{x+1} - \ln \frac{x^2-1}{4x^2} \right) \right) + \mathcal{O}(\epsilon) . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Cette expression (4.10) montre donc que $m(T)$ est un processus non-markovien mais "faiblement" non-markovien dans le sens que la partie non-triviale de $\mathcal{A}(x)$ est d'ordre $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$, qui est formellement un petit paramètre. On peut alors utiliser la théorie de perturbation proposée par Sire et Majumdar [88] puis reprise et simplifiée par Oerding *et al.* [89] qui consiste à calculer θ_0 pour un processus "faiblement"

4.2 Crossover dynamique de la persistance globale en conséquence d'une aimantation initiale finie

non-Markovien, donc ici perturbativement en puissance de $\sqrt{\epsilon}$ (4.10). On obtient alors [95]

$$\Delta \equiv \theta_0 - \mu = \sqrt{\frac{6\epsilon}{53}} \frac{\sqrt{2}-1}{2} + \mathcal{O}(\epsilon) = 0.06968... \quad \text{en } d=3, \quad (4.11)$$

où μ est la valeur correspondant à l'approximation markovienne (4.1). On notera que dans ce cas désordonné, les effets non-markoviens se font sentir sur θ_0 au premier ordre en théorie de perturbation (à l'ordre d'une boucle) tandis que dans le cas pur, l'équivalent de Δ (4.11) n'est non-nul qu'au deuxième ordre de la théorie de perturbation [88, 89]. Enfin nous avons comparé l'estimation de θ_0 , fournie par notre calcul perturbatif à une boucle qui donne, en $d=3$, $\Delta = 0.06968$ (4.11), à une simulation Monte-Carlo, dont on a extrait l'estimation $\Delta_{\text{num}} = 0.08 \pm 0.04$. Ceci montre donc que notre approche analytique, certes perturbative, permet de décrire assez précisément nos données numériques en dimension $d=3$.

4.2. Crossover dynamique de la persistance globale en conséquence d'une aimantation initiale finie

Un autre aspect de la persistance globale auquel je me suis intéressé concerne les effets d'une aimantation initiale finie $m_0 > 0$, toujours pour des modèles ferromagnétiques au point critique mais sans désordre². On considère donc un système décrit par un Hamiltonien similaire à celui donnée en Eq. (4.2) :

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j, \quad (4.12)$$

où les variables $s_i = \pm 1$ sont des spins d'Ising au sommet d'un réseau hypercubique en d dimensions. Comme précédemment, le système est initialement dans une configuration désordonnée mais avec une aimantation moyenne m_0 non nulle. On place alors brutalement ce système à sa température critique T_c et on le laisse relaxer vers l'équilibre. Dans le cas où l'aimantation initiale est finie, il est alors bien connu que l'aimantation globale moyenne commence par *augmenter* (Fig. 4.1) avant de finalement décroître à zéro [97] aux temps longs :

$$\langle M(t) \rangle \sim \begin{cases} m_0 t^{\theta'}, & t \ll \tau_m, \\ t^{-\beta/(\nu z)}, & t \gg \tau_m, \end{cases} \quad (4.13)$$

où $\theta' > 0$ est connu sous le nom d'exposant *d'initial slip*, tandis que β et ν sont les exposants critiques statiques et z l'exposant dynamique. Le comportement de τ_m avec m_0 s'obtient simplement en faisant coïncider les deux régimes temporels de (4.13), *i.e.* $\tau_m \propto m_0^{-1/\kappa}$, $\kappa = \theta' + \beta/(\nu z)$. La croissance initiale de l'aimantation, $\langle M(t) \rangle \sim m_0 t^{\theta'}$ est assez peu intuitive mais peut être comprise qualitativement de la

2. On s'attend toutefois à observer le phénomène décrit ici également pour un système ferromagnétique tel que le modèle d'Ising dilué au point critique (4.2).

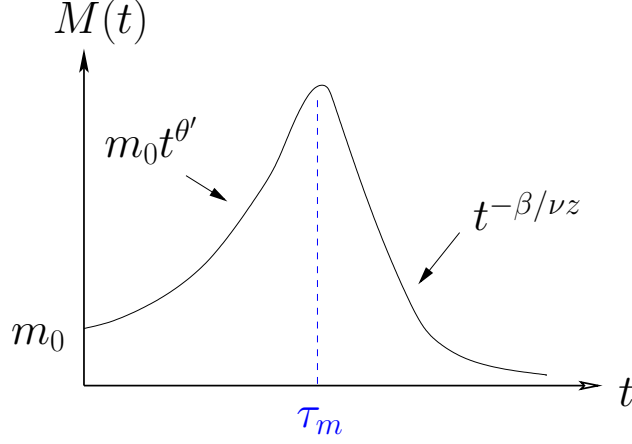


FIGURE 4.1.: Représentation (schématique) de l'évolution de l'aimantation $M(t)$ lorsque l'aimantation initiale $m_0 > 0$. On a en particulier $\tau_m \sim m_0^{-1/\kappa}$.

façon suivante [115]. A l'instant initial $t = 0$, la longueur de corrélation dans le système est essentiellement nulle, (*i.e.* de l'ordre du pas du réseau pour un modèle sur un réseau), puis $\xi(t)$ croît avec t . Néanmoins pour t petit, *i.e.* $t \ll \tau_m$, la longueur de corrélation reste petite et les effets des fluctuations dans le système sont quasiment inexistantes. On peut donc supposer que le système est alors correctement décrit par une approche de champ moyen. Dans cette approximation de champ moyen, il est bien connu que la température critique T_c^{MF} est significativement supérieure à la température critique T_c exacte (pour des systèmes en interaction à courte portée). Donc aux temps courts, le système se trouve en quelque sorte dans une phase ordonnée (du modèle en champ moyen) et l'aimantation croît en conséquence. Bien sûr, aux temps plus longs, les corrélations s'établissent dans le système et finalement $\langle M(t) \rangle$ décroît à zéro.

Dans la référence [116], nous avons étudié la probabilité de persistance $P_g(t)$ du processus $\tilde{M}(t) = M(t) - \langle M(t) \rangle$ lors de la dynamique relaxationnelle de ce système, décrit aussi par les Eqs. (4.3, 4.4) mais sans désordre, *i.e.* $\psi(\mathbf{x}) = 0$, et avec une aimantation initiale non nulle $[\varphi(\mathbf{x}, t = 0)]_{\text{ini}} \propto m_0$ et toujours des corrélations à courte portée. Notons que les études précédentes de la persistance globale, à l'exception de la référence [93] dans le contexte un peu différent d'un modèle de réaction-diffusion (dans la classe d'universalité de la percolation dirigée), avaient uniquement considéré le régime $t \ll \tau_m$ (puisque $m_0 = 0$ dans ces travaux, correspondant formellement à $\tau_m \rightarrow \infty$). Nous avons montré que la persistance $P_g(t)$ exhibe deux comportements dynamiques distincts, où dans les deux cas $P_g(t)$ décroît algébriquement mais avec deux exposants distincts θ_0 et θ_∞ . Autrement dit, le changement de comportement dans $\langle M(t) \rangle$ (4.13) admet une contrepartie dans le comportement de $P_g(t)$ sous la forme :

$$P_g(t) \sim \begin{cases} t^{-\theta_0}, & t \ll \tau_m, \\ t^{-\theta_\infty}, & t \gg \tau_m, \end{cases} \quad (4.14)$$

4.2 Crossover dynamique de la persistance globale en conséquence d'une aimantation initiale finie

où θ_∞ est un nouvel exposant de persistance caractérisant la dynamique hors d'équilibre de ce système.

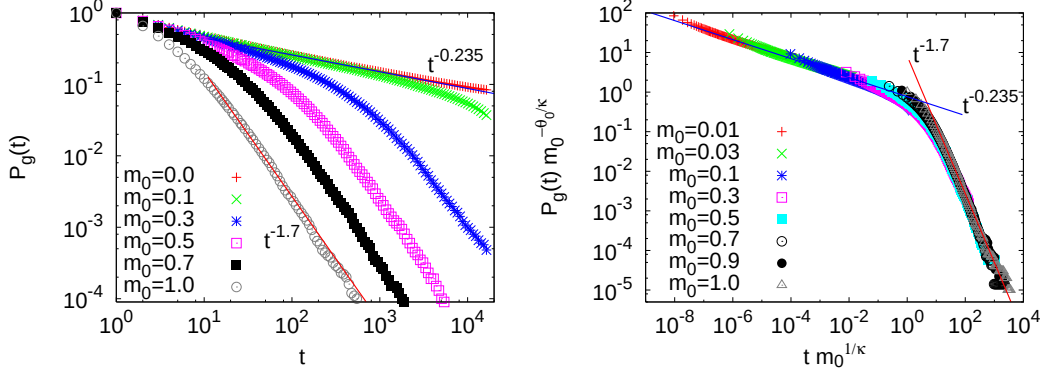


FIGURE 4.2.: **Gauche** : Probabilité de persistance globale $P_g(t)$ pour différentes valeurs de l'aimantation initiale $m_0 = 0.0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ et 1.0 . Toutes les courbes décroissent initialement avec un exposant $\theta_0 \simeq 0.235$ puis, à grand temps, avec un exposant différent $\theta_\infty \simeq 1.7$. **Droite** : $P_g(t) m_0^{-\theta_0/\kappa}$ en fonction du temps adimensionné $t m_0^{1/\kappa}$, en accord avec la forme d'échelle en Eq. (4.15) avec $\theta_0 = 0.235$ et $\kappa = 0.249$ [70], pour les mêmes données numériques que la figure de gauche.

Plus précisément, à l'aide des méthodes de théorie des champs perturbative et de renormalisation dynamique, similaires à celles utilisées précédemment dans le paragraphe 4.1, nous avons montré que $P_g(t)$ se comporte de la façon suivante :

$$P_g(t) \sim A_P t^{-\theta_0} \mathcal{P}(t/\tau_m), \quad \mathcal{P}(x \gg 1) \sim x^{\theta_0 - \theta_\infty}, \quad (4.15)$$

où A_P une constante non-universelle fixée telle que $\mathcal{P}(0) = 1$. Ce nouvel exposant θ_∞ peut-être calculé perturbativement, en suivant le même raisonnement que précédemment. En particulier, en supposant que $\tilde{M}(t)$ est Markovien, on obtient l'équivalent de la relation (4.1) sous la forme

$$\theta_\infty = \mu_\infty \equiv 1 + d/(2z), \quad (4.16)$$

et dans la Ref. [116], nous avons calculé les corrections à cette relation dues à la nature non Markovienne du processus $\tilde{M}(t)$, analogues à l'Eq. (4.11), à l'ordre d'une boucle dans un développement perturbatif en $d = 4 - \epsilon$. Nous avons également validé ce scénario de *crossover* dynamique (4.15) à l'aide d'une simulation numérique du modèle d'Ising en dimension $d = 2$. En particulier, notre calcul à une boucle donne une estimation de $\theta_\infty^{\text{one-loop}} = 1.62\dots$, qui est en bon accord avec la valeur que nous avons calculée numériquement $\theta_\infty^{MC} = 1.7 \pm 0.1$. Nos données numériques sont présentées en Fig. 4.2.

Ce travail révèle donc des propriétés intéressantes de la probabilité de persistance globale qui n'avaient jusque là pas été mises en évidence. En collaboration avec A. Gambassi et R. Paul, nous avons continué à explorer ce *crossover* causée par une

aimantation initiale finie m_0 en étudiant la persistence de variétés critiques (*e.g.* la persistence d'une ligne dans un système bidimensionnelle ou celle d'un plan dans un système tri-dimensionnelle [117]) en mettant en particulier en évidence l'existence de nouveaux exposants, analogues à θ_∞ discuté ici, associés à la dynamique critique de ces systèmes [118].

Persistence et polynômes aléatoires

5

Un problème, apparemment non relié à la persistance, concerne l'étude d'équations algébriques aléatoires qui, depuis les travaux fondateurs de Bloch et Pólya [119] dans les années 1930, ont été beaucoup étudiées par les mathématiciens [120, 121]. Plus récemment, ces questions ont connu un regain d'intérêt, dans la littérature mathématique, dans le contexte de la théorie des probabilités et de la théorie des nombres [122] et, en physique théorique dans le contexte du chaos quantique [123].

Inspirés par un article de Dembo, Poonen, Shao et Zeitouni [124], nous nous sommes intéressés à une famille de polynômes aléatoires à coefficients réels $K_n(x)$, dits polynômes de Kac généralisés, de degré n , indexés par un entier d et définis par [129, 130]

$$K_n(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i i^{\frac{d-2}{4}} x^i. \quad (5.1)$$

Ici et dans la suite, les coefficients a_i sont des variables aléatoires Gaussiennes indépendantes, de moyenne nulle et de variance unité $\langle a_i a_j \rangle = \delta_{ij}$, où l'on utilise ici la notation $\langle \cdots \rangle$ pour dénoter une valeur moyenne sur les coefficients a_i . Dans le cas où $d = 2$, ces polynômes sont les polynômes de Kac [125], qui ont été beaucoup étudiés dans la littérature et nous renvoyons le lecteur à l'article de Edelman et Kostlan pour une revue récente au sujet de ces polynômes [122]. Les racines de ces polynômes ont des propriétés statistiques tout-à-fait intéressantes. Tout d'abord, pour n grand, on peut montrer que les racines, dans le plan complexe, de ces polynômes se trouvent au voisinage du cercle unité (voir Fig. 5.1). On peut comprendre qualitativement ce phénomène, au moins pour $d = 2$, en réalisant que pour que $K_n(x)$ s'annule, il faut que les n termes soient du même d'ordre de grandeur (à condition bien sûr que les coefficients a_i aient une distribution étroite, ce qui est bien le cas ici). Ceci ne peut se produire que si $|x| \sim 1$. Cet argument peut-être rendu rigoureux et étendu à une classe assez large de polynômes aléatoires [126].

Pour les polynômes qui nous concernent ici (5.1), puisque les coefficients a_i sont réels, l'axe réel est un axe de symétrie pour l'ensemble de ces n racines et une question naturelle est : combien ce polynôme $K_n(x)$ a-t-il de racines réelles ? Le nombre de ces racines réelles N_n est bien sûr un nombre aléatoire et, dans limite où n est grand, ces racines réelles sont localisées autour de $x = \pm 1$. Le nombre moyen de ces racines réelles $\langle N_n \rangle$, pour n grand, a tout d'abord été obtenu par Kac pour $d = 2$ puis par

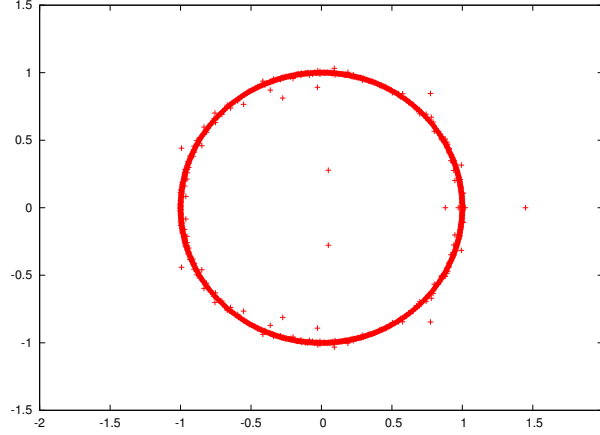


FIGURE 5.1.: Localisations des racines d'un polynôme de Kac $K_n(x)$, avec $d = 2$ (5.1), de degré $n = 100$.

Das [127] pour d quelconque :

$$\langle N_n \rangle \sim \frac{1}{\pi} \left(1 + \sqrt{\frac{d}{2}} \right) \ln(n) + \mathcal{O}(1). \quad (5.2)$$

Notons que pour, $d = 2$, les termes d'ordre suivant du développement asymptotique de $\langle N_n \rangle$ pour n grand ont été calculés par différents auteurs [122, 128], tandis que pour $d \neq 2$ ils ne sont pas connus. On montre par ailleurs que, pour $d = 2$, les propriétés statistiques des racines sur les intervalles $(-\infty, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$ et $[1, +\infty)$ sont tout-à-fait identiques (par exemple, chacun de ces 4 sous intervalles contient en moyenne le même nombre de racines réelles) [124]. En revanche, pour $d \neq 2$, ces propriétés dépendent de d pour les intervalles $[-1, 0]$, $[0, 1]$, ces deux intervalles étant statistiquement identiques, tandis qu'elles sont semblables au cas $d = 2$ pour les intervalles extérieurs $(-\infty, -1]$ et $[1, +\infty)$, ces deux intervalles-là étant aussi identiques [130]. Pour ces raisons, nous allons nous intéresser ici à la question suivante :

quelle est la probabilité $P_0([0, x], n)$, avec $0 < x < 1$, pour que $K_n(x)$ n'ait aucune racine dans l'intervalle $[0, x]$?

Ce type de questions a été beaucoup étudié dans le contexte des matrices aléatoires, où ces probabilités sont appelées "probabilité de gap" [208]. Dans le travail que nous avons mentionné plus haut [124], Dembo *et al.* ont montré que, pour $d = 2$, $P_0([0, 1], n)$ décroît algébriquement avec n , $P_0([0, 1], n) \propto n^{-\zeta(2)}$ et où cet exposant a été calculé numériquement $\zeta(2) = 0.190(8)$. Dans les Refs. [129], [130], nous avons montré que cette probabilité est intimement liée à la probabilité de persistance pour l'équation de diffusion en dimension d . Ici nous ne donnerons que les résultats les plus marquants de notre étude, sans donner tous les détails des calculs. Et avant de nous intéresser à cette probabilité, nous présenterons d'abord quelques résultats pour la densité des racines réelles de ces polynômes, qui permet de dégager les caractéristiques générales des zéros réels de ces polynômes.

5.1. Densité de racines réelles : formule de Kac-Rice

Nous considérons ici le cas où les coefficients a_i (5.1) sont des variables aléatoires Gaussiennes. $K_n(x)$ est donc également une variable aléatoire Gaussienne, de moyenne nulle, caractérisée par la fonction de corrélation $C_n(x, y)$

$$C_n(x, y) = \langle K_n(x)K_n(y) \rangle = 1 + \sum_{i=1}^n i^{\frac{d-2}{2}} (xy)^i. \quad (5.3)$$

Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les p racines réelles de ce polynôme $K_n(x)$ (5.1) (et éventuellement $p = 0$ si $K_n(x) \neq 0$ pour tout x réel). La densité moyenne de racines réelles $\rho_n(x)$ est alors donnée par la formule¹

$$\rho_n(x) = \sum_{i=1}^p \langle \delta(x - \lambda_i) \rangle = \langle |K'_n(x)| \delta(K_n(x)) \rangle. \quad (5.4)$$

Sous cette forme (5.4), on observe que le calcul de la densité moyenne implique la distribution jointe de $K_n(x)$ et de sa dérivée $K'_n(x)$ qui est simplement, dans le cas où les coefficients a_i sont des variables aléatoires gaussiennes, elle-même une distribution Gaussienne bi-variée. Ainsi donc le calcul de $\rho_n(x)$ se ramène à une double intégration de cette distribution Gaussienne qui conduit au résultat suivant

$$\rho_n(x) = \frac{\sqrt{c_n(x)[c'_n(x)/x + c''_n(x)] - [c'_n(x)]^2}}{2\pi c_n(x)}, \quad c_n(x) = C_n(x, x). \quad (5.5)$$

Cette formule (5.5) peut être écrite sous une forme compacte, comme l'ont remarqué Edelman et Kostlan, qui en ont aussi donné une interprétation géométrique [122] (voir également [132] pour discussion intéressante de l'article d'Edelman et Kostlan) :

$$\rho_n(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\partial_u \partial_v \ln C_n(u, v)} \Big|_{u=v=x}. \quad (5.6)$$

Ces deux formules (5.5) et (5.6) sont valables pour des polynômes aléatoires dont les coefficients sont Gaussiens et indépendants (mais pas nécessairement identiques). Ainsi, pour des polynômes aléatoires Gaussiens et stationnaires "réguliers", *i.e.* tels que $C_n(u, v) \equiv C_n(u-v) = 1 + \frac{1}{2}C''_n(0)(u-v)^2 + o[(u-v)^2]$, la formule (5.6) reproduit la formule de Rice $\rho_n(x) \equiv \rho_n(0) = \sqrt{-C''_n(0)/\pi}$ [71] pour la densité (uniforme) des zéros.

Une propriété remarquable de ces polynômes de Kac $K_n(x)$ est que, dans la limite des grands n , les racines de K_n dans le plan complexe s'accumulent autour du cercle unité (Fig. 5.1). Dans la partie gauche de la figure Fig. 5.2, nous avons tracé la densité moyenne des racines réelles $\rho_n(x)$, calculée à partir de l'Eq. (5.5) pour $d = 2$ pour différentes valeurs de n , $n = 10$ et $n = 50$. Dans la limite des grands n , on

1. Il s'agit d'une formule "heuristique" dont on peut donner une démonstration rigoureuse. On trouvera une discussion de cet aspect, en analogie avec le "temps local" d'un processus stochastique en temps continu, dans la thèse d'habilitation de Kratz [131].

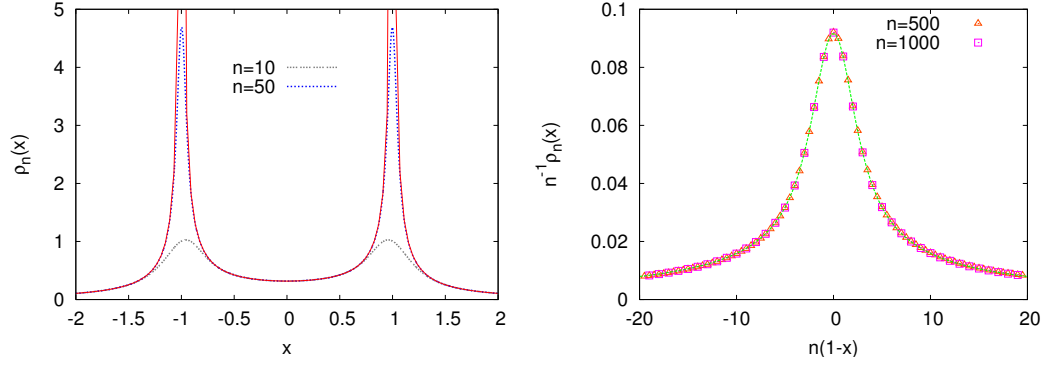


FIGURE 5.2.: **Gauche** : Densité moyenne de racines réelles $\rho_n(x)$ pour des polynômes de Kac $K_n(x)$ (5.1) et $d = 2$ en fonction de x pour différentes valeurs de $n = 10, 50$ (en pointillés). La ligne pleine correspond à l'expression analytique $\rho_\infty(x) = (\pi(1 - x^2))^{-1}$. **Droite** : Représentation de $n^{-1}\rho_n(x)$ en fonction de $n(1-x)$ pour $n = 500, 1000$ (et donc au voisinage de $x \pm 1$). La ligne en pointillé correspond à l'expression $\rho^K(y)$ en Eq. (5.8) pour $d = 2$.

observe que les racines réelles se concentrent autour de $x = \pm 1$, où la densité diverge lorsque $n \rightarrow \infty$. On peut en effet montrer [130] que

$$\rho_n(\pm 1) \sim \frac{2n}{\pi(d+2)} \sqrt{\frac{d}{d+4}}. \quad (5.7)$$

En dehors de ces points singuliers $x \pm 1$, $\rho_n(x)$ a une bonne limite $\rho_\infty(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$ que l'on peut calculer explicitement en terme de fonctions polylogarithmes [129, 130]. Une étude détaillée montre toutefois que l'on doit traiter séparément les cas $|x| < 1$ et $|x| > 1$ (pour $d \neq 2$). Par ailleurs, l'étude de la divergence de $\rho_n(x)$ autour de $x = \pm 1$ lorsque $n \gg 1$ montre que la largeur du pic est d'ordre $\mathcal{O}(n^{-1})$. On montre en effet qu'il existe un régime d'échelle intéressant pour $\rho_n(x)$ dans la limite $n \gg 1$, $1 - x \ll 1$ avec le produit $y = n(1 - x)$ fini. Ce régime, pour $d = 2$ a été étudié par Aldous et Fyodorov [133] (voir aussi l'article d'Edelman et Kostlan [122], paragraphe 2.5). Pour d quelconque, on montre que dans ce régime d'échelle [129, 130]

$$\rho_n(x) = n\rho^K(n(1-x)), \quad \rho^K(y) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{I_{d/2+1}(y)}{I_{d/2-1}(y)} - \left(\frac{I_{d/2}(y)}{I_{d/2-1}(y)}\right)^2}, \quad (5.8)$$

$$I_m(y) = \int_0^1 dx x^m \exp(-2yx). \quad (5.9)$$

En particulier les comportements asymptotiques de $\rho^K(y)$ sont donnés par

$$\rho^K(y) \sim \begin{cases} \frac{1}{2\pi y} \sqrt{\frac{d}{2}} & , \quad y \rightarrow +\infty \\ \frac{1}{2\pi|y|} & , \quad y \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (5.10)$$

5.2 Probabilité de ne trouver aucune racine réelle

Dans la partie droite de la Fig. 5.2 nous avons tracé $n^{-1}\rho_n(x)$ en fonction de $n(1-x)$ pour $d = 2$ pour différentes valeurs de $n = 500, 1000$ ainsi que le résultat asymptotique donné par l'Eq. (5.8).

A partir de la densité moyenne de racines réelles, on calcule le nombre moyen $\langle N_n[a, b] \rangle$ de racines dans l'intervalle $[a, b]$. Sur l'intervalle $[0, 1]$ la contribution la plus importante à $\langle N_n[0, 1] \rangle$, pour n grand, provient du voisinage de $x = 1$. On peut alors utiliser le comportement asymptotique ci-dessus en Eq. (5.10) pour obtenir pour $n \gg 1$

$$\langle N_n[0, 1] \rangle = \langle N_n[-1, 0] \rangle = \int_0^n \rho^K(y) dy + \mathcal{O}(1) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{d}{2}} \ln n + \mathcal{O}(1), \quad (5.11)$$

où les corrections d'ordre $\mathcal{O}(1)$ reçoivent des contributions de l'intervalle complet $[0, 1]$ (*i.e.* pas seulement du voisinage de $x = 1$) et ne peuvent pas être calculées par cette méthode.

De la même façon, on obtient à partir des Eqs (5.8, 5.10) :

$$\langle N_n(-\infty, -1] \rangle = \langle N_n[1, +\infty) \rangle = \int_0^n \rho^K(-y) dy + \mathcal{O}(1) = \frac{1}{2\pi} \ln n + \mathcal{O}(1), \quad (5.12)$$

indépendamment de d [127]. Enfin à partir des Eqs (5.11, 5.12), on obtient le nombre moyen de racines réelles (sur tout l'axe réel) [130] :

$$\langle N_n(-\infty, +\infty) \rangle = \frac{1}{\pi} \left(1 + \sqrt{\frac{d}{2}} \right) \ln n + \mathcal{O}(1). \quad (5.13)$$

Notons finalement, pour conclure, qu'une méthode similaire, en particulier l'utilisation de ce régime d'échelle comme nous l'avons présenté ici en Eq. (5.8) peut être étendu au calcul des moments d'ordre supérieur du nombre des racines sur l'axe réel $\langle N_n^k(-\infty, \infty) \rangle$, avec $k \in \mathbb{N}$ [130].

5.2. Probabilité de ne trouver aucune racine réelle

Nous en venons maintenant ici au calcul de la probabilité $P_0([0, x], n)$, avec $0 < x < 1$, pour que K_n n'ait aucune racine dans l'intervalle $[0, x]$. Tout d'abord remarquons que ces polynômes, comme fonction de x , sont des processus Gaussiens : les propriétés statistiques de leurs racines sont donc déterminées par leur fonction de corrélation $C_n(x, y)$ donnée en Eq. (5.3). Etant donnée la singularité de la densité moyenne des racines réelles $\rho_n(x)$ autour de $x = \pm 1$ (voir Fig. 5.2), et le régime d'échelle identifié précédemment (5.8), nous reparamétrisons $K_n(x)$ avec le changement de variable $x = 1 - 1/t$. On montre alors que dans le régime d'échelle $t, t', n \rightarrow \infty$ en gardant $\tilde{t} = t/n$ et $\tilde{t}' = t'/n$ fixes, la fonction de corrélation $C_n(x, y)$ s'écrit

$$C_n(x, y) \propto n^{d/2} I_{d/2-1} \left(\frac{1}{2\tilde{t}} + \frac{1}{2\tilde{t}'} \right), \quad (5.14)$$

où $I_m(y)$ est défini plus haut en Eq. (5.9). On en déduit que le corrélateur normalisé $\hat{C}_n(t, t') \rightarrow \mathcal{C}(\tilde{t}, \tilde{t}')$, avec $\hat{C}_n(t, t') = C_n(t, t')/[C_n(t, t)C_n(t', t')]^{1/2}$, a alors la forme suivante

$$\mathcal{C}(\tilde{t}, \tilde{t}') \sim \begin{cases} \left(4 \frac{\tilde{t}\tilde{t}'}{(\tilde{t}+\tilde{t}')^2}\right)^{\frac{d}{4}}, & \tilde{t}, \tilde{t}' \ll 1, \\ 1, & \tilde{t}, \tilde{t}' \gg 1. \end{cases} \quad (5.15)$$

Ainsi ce corrélateur est exactement le même que celui que nous avons calculé pour l'équation de diffusion avec des conditions initiales aléatoires, $\mathcal{C}(\tilde{t}, \tilde{t}') = a(\tilde{t}, \tilde{t}')$ en Eq. (3.4). Puisqu'un processus Gaussien est complètement caractérisé par son corrélateur à deux points, nous concluons que l'équation de diffusion et ces polynômes aléatoires (au voisinage de $x = 1$), sont des processus identiques : les propriétés statistiques de leurs zéros sont donc identiques. Ainsi, en complète analogie avec l'Eq. (3.7), nous concluons que $P_0([0, x], n)$ a la forme d'échelle suivante

$$P_0([0, x], n) = \mathcal{A}_{d,n}^- n^{-\theta(d)} h^-(n(1-x)), \quad (5.16)$$

où $\mathcal{A}_{d,n}^-$, qui est indépendant de x , est telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \mathcal{A}_{d,n}^- / \ln n = 0$ et $h^-(y) \rightarrow 1$ pour $y \ll 1$ tandis que $h^-(y) \sim y^{\theta(d)}$ pour $y \gg 1$, où $\theta(d)$ est l'exposant de persistance associé à l'équation de diffusion en dimension d . Notons que n joue le rôle de L^2 dans l'équation de diffusion tandis que la variable $1-x$ est l'analogie de l'inverse du temps $1/t$.

Bien sûr, on peut aussi s'intéresser à la probabilité $P_0([x, \infty), n)$, pour $x > 1$, pour que $K_n(x)$ n'ait aucune racine réelle dans l'intervalle $[x, \infty)$. Dans l'intervalle $[1, \infty)$, comme nous l'avons vu précédemment, les propriétés statistiques des racines réelles sont indépendantes de d , et données par $d = 2$. Dans ce cas, on peut montrer, comme ci-dessus, que $P_0([x, \infty), n)$, dans la limite $x - 1 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, et $n(x-1)$ fixe, admet la forme d'échelle

$$P_0([x, \infty), n) = \mathcal{A}_{d,n}^+ n^{-\theta(2)} h^+(n(x-1)), \quad (5.17)$$

où $\mathcal{A}_{d,n}^+$, qui est indépendant de x , est tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \mathcal{A}_{d,n}^+ / \ln n = 0$ et $h^+(y) \rightarrow 1$ pour $y \ll 1$ tandis que $h^+(y) \sim y^{\theta(2)}$ pour $y \gg 1$.

On peut finalement montrer, à partir du corrélateur $\hat{C}_n(x, y)$, que les propriétés statistiques des racines réelles de $K_n(x)$ sur les 4 sous-intervalles $(-\infty, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$ $[1, +\infty)$ sont indépendantes [130] dans la limite où $n \rightarrow \infty$. On déduit alors des Eqs (5.16, 5.17) que la probabilité que $K_n(x)$ n'ait *aucune racine réelle* est donnée par

$$P_0((-\infty, \infty), n) \propto n^{-2(\theta(d)+\theta(2))}, \quad (5.18)$$

qui établit donc une connexion, assez inattendue a priori, entre la probabilité pour que $K_n(x)$ n'ait aucune racine réelle et les propriétés de persistance de l'équation de diffusion.

Dans la référence [130], nous avons étudié en grand détail cette probabilité en Eq. (5.16), où nous avons en particulier proposé un calcul perturbatif systématique

5.2 Probabilité de ne trouver aucune racine réelle

de la fonction d'échelle $h^+(y)$. Nous avons également étudié d'autres familles de polynômes aléatoires, les polynômes *binomiaux* et les polynômes de Weyl, que nous avons reliés à l'équation de la diffusion dans la limite où $d \rightarrow \infty$ (3.8). Ces connexions constituent un pont intéressant entre probabilistes et physiciens statisticiens et on peut bien sûr espérer que ces connexions permettront d'obtenir des résultats exacts pour ces exposants $\theta(d)$ pour la diffusion.

Statistique de la plus grande excursion

6

La probabilité de persistance $P_c(\tau)$ est simplement reliée à la distribution de probabilité $\rho(\tau) = -dP_c(\tau)/d\tau$ de la durée τ de l'intervalle entre deux zéros successifs (*i.e.* d'une excursion) d'un processus stochastique $X(t)$. Nous avons vu dans les chapitres précédents que c'est une quantité intéressante pour caractériser *l'histoire* d'un processus. Néanmoins ce n'est certainement pas la seule. Dans la Ref. [134] nous avons introduit une façon alternative et simple de caractériser un processus en étudiant la plus grande de ces excursions. Cette grandeur se trouve être reliée à la théorie des records, qui a récemment été l'objet de nombreux travaux en physique statistique dans le contexte des marches aléatoires [82, 83, 136], des réseaux en croissance [137], dans le contexte des systèmes élastiques désordonnés [138], ou bien encore dans des problématiques reliées au réchauffement climatique [139].

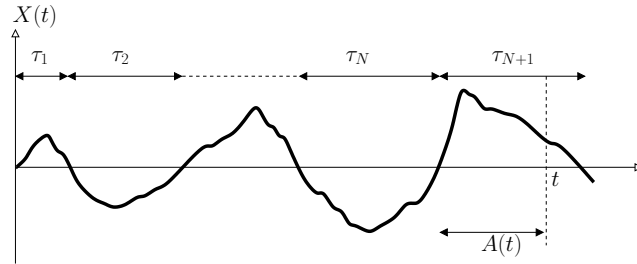


FIGURE 6.1.: Intervalles entre deux zéros successifs (excursions) d'un processus stochastique $X(t)$.

Afin de définir cette nouvelle quantité, considérons une réalisation d'un processus stochastique $X(t)$ générique ayant $N \equiv N(t)$ zéros dans l'intervalle de temps fixé $[0, t]$ (voir Fig. 6.1). Soient $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}$ les intervalles de temps entre deux zéros successifs et $A(t)$ la longueur ou *l'âge* de la dernière excursion, qui n'est donc pas terminée. L'observable que nous proposons d'étudier est la durée de la plus grande de ces excursions jusqu'à l'instant t :

$$l_{\max}(t) = \max(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N, A(t)) . \quad (6.1)$$

Nous allons voir que la valeur moyenne de cette quantité, $\langle l_{\max}(t) \rangle$, exhibe un comportement intéressant à grand temps t . En particulier, nous avons montré que $\langle l_{\max}(t) \rangle$ se comporte différemment selon que le processus $X(t)$ est *régulier* (*i.e.*

6.1 Résultats exacts pour des processus multiplicatifs et renouvellements

avec une densité finie de zéros, comme l'équation de diffusion avec des conditions initiales aléatoires (3.1)) ou *irrégulier* (donc avec une densité infinie de zéros, comme le mouvement Brownien par exemple). Contrairement à la persistance qui se comporte génériquement en loi de puissance $P_c(t) \sim t^{-\theta}$, que le processus soit régulier ou irrégulier, $\langle l_{\max}(t) \rangle$ est donc sensible à la régularité du processus. Pour un processus régulier, $\langle l_{\max}(t) \rangle$ se comporte toujours linéairement lorsque $t \rightarrow \infty$

$$\langle l_{\max}(t) \rangle \simeq Q_{\infty} t , \quad (6.2)$$

avec une amplitude $Q_{\infty} > 0$ qui dépend du modèle considéré. En revanche, pour un processus irrégulier, $\langle l_{\max}(t) \rangle$ croît soit linéairement comme en Eq. (6.2), ou bien

$$\langle l_{\max}(t) \rangle \sim t^{1-\psi} , \quad (6.3)$$

où l'exposant $0 < \psi < 1$ (correspondant à une croissance sub-linéaire), selon que l'exposant de persistance associé est plus petit ($\theta < \theta_c$) ou plus grand ($\theta > \theta_c$) qu'une certaine valeur critique θ_c .

Dans la suite, je montrerai tout d'abord comment on peut établir exactement ces comportements (6.2) et (6.3) pour deux classes de modèles relativement simples correspondant à chacune de ces deux classes : les processus multiplicatifs (réguliers) et les processus de renouvellement (irréguliers). Dans une seconde partie, je montrerai comment l'étude de cette quantité pour le mouvement Brownien fractionnaire permet de mettre clairement en évidence les effets de mémoire de ce processus non-Markovien.

6.1. Résultats exacts pour des processus multiplicatifs et renouvellements

Pour calculer cette valeur moyenne $\langle l_{\max}(t) \rangle$ nous introduisons la probabilité $Q(t)$ pour que $A(t)$ sur la Fig. 6.1 soit la plus longue excursion du processus sur l'intervalle $[0, t]$. C'est-à-dire :

$$Q(t) = \text{Prob}[l_{\max}(t) = A(t)] . \quad (6.4)$$

Ainsi $Q(t)$ est le taux auquel le *record* de la plus longue excursion est battue au temps t . En effet, lorsque l'intervalle de temps croît de t à $t + dt$, la variable aléatoire $l_{\max}(t)$ croît de dt si la dernière excursion est la plus longue – ce qui arrive donc avec une probabilité $Q(t)$ – ou bien reste la même – ce qui arrive avec une probabilité $1 - Q(t)$. On déduit donc de ce raisonnement que la valeur moyenne $\langle l_{\max}(t) \rangle$ obéit à l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{d}{dt} \langle l_{\max}(t) \rangle = Q(t) , \quad (6.5)$$

et dans la suite nous étudierons plutôt $Q(t)$ que $\langle l_{\max}(t) \rangle$.

6.1.1. Processus de renouvellement

Considérons un processus de renouvellement $X(t)$ pour lequel les intervalles τ_i (voir en Fig. 6.1) sont des variables aléatoires indépendantes et distribuées selon une loi stable, $\rho(\tau) \sim \tau^{-1-\theta}$, pour $\tau \gg 1$ [141]. La probabilité de persistance est simplement, dans ce cas, $P_c(t) = \int_t^\infty d\tau \rho(\tau) \sim t^{-\theta}$. Pour un processus de renouvellement, la distribution jointe $q_N(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N, A(t); t)$ des intervalles indiqués sur la Fig. 6.1 est donc

$$\begin{aligned} q_N(\tau_1, \dots, \tau_N, A(t); t) &= \rho(\tau_1) \rho(\tau_2) \dots \rho(\tau_N) P_c(A(t)) \\ &\times \delta(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_N + A(t) - t), \end{aligned} \quad (6.6)$$

où la fonction delta assure que la longueur de l'intervalle est bien t . $Q(t)$ en Eq. (6.4) est alors donnée par

$$Q(t) = \sum_{N=0}^{\infty} \int_0^\infty db \int_0^b d\tau_1 \dots \int_0^b d\tau_N q_N(\tau_1, \dots, \tau_N, b; t). \quad (6.7)$$

On peut alors prendre la transformée de Laplace de $Q(t)$ de cette expression en Eq. (6.7) pour obtenir (après quelques manipulations simples) :

$$\hat{Q}(s) \equiv \int_0^\infty Q(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} \int_0^\infty dx \frac{P_c(x/s) e^{-x}}{P_c(x/s) e^{-x} + \int_0^x dy P_c(y/s) e^{-y}}. \quad (6.8)$$

Pour $\theta < 1$, on peut prendre la limite $s \rightarrow 0$ directement sur l'Eq. (6.8) en utilisant $P_c(t) \sim (t_0/t)^\theta$ pour $t \gg 1$, où t_0 est une échelle de temps microscopique (et non universelle). On observe alors la propriété intéressante que la dépendance en cette échelle t_0 disparaît dans le rapport en Eq. (6.8), conduisant à $\hat{Q}(s) \sim Q_\infty^R/s$ et donc $Q(t) \rightarrow Q_\infty^R$ pour $t \rightarrow \infty$ (où R renvoie à processus de "Renouvellement"), donc comme en Eq. (6.2) avec une constante universelle qui dépend continûment de θ

$$Q_\infty^R \equiv Q_\infty^R(\theta) = \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^\theta e^x \int_0^x dy y^{-\theta} e^{-y}}. \quad (6.9)$$

Un cas particulier de ce résultat est $\theta = 1/2$ qui correspond au mouvement Brownien si l'on ne considère que des "grandes" excursions, *i.e.* τ_i en Fig. 6.1 plus grande qu'une coupure τ_ϵ . On retrouve alors d'une manière simple que $Q_\infty^R(1/2) = 0.626508\dots$, un résultat obtenu précédemment par Pitman et Yor [142] par des méthodes assez compliquées, quoique rigoureuses. On note en particulier que $Q_\infty^R(\theta)$ en Eq. (6.9) s'annule lorsque $\theta \rightarrow 1$ (voir Fig. 6.2 gauche).

En revanche, pour $\theta > 1$, si l'on remplace naïvement $P_c(t = y/s)$ par $P_c(t = y/s) \sim (t_0/t)^\theta$ dans la limite $s \rightarrow 0$, il est facile de voir que l'intégrale dans le dénominateur de l'Eq. (6.8) diverge. Une analyse plus détaillée montre que dans ce cas $\int_0^x dy P_c(y/s) e^{-y} \propto \langle \tau \rangle s$ lorsque $s \rightarrow 0$ où $\langle \tau \rangle = \int_0^\infty d\tau \tau \rho(\tau)$. On obtient alors que $\hat{Q}(s) \sim s^{-1/\theta}$ et finalement $Q(t) \sim t^{-1+1/\theta}$, comme en Eq. (6.3), avec dans ce cas

$$\psi = 1 - 1/\theta. \quad (6.10)$$

6.1 Résultats exacts pour des processus multiplicatifs et renouvellements

Dans le cas marginal $\theta = 1$, on s'attend à observer des corrections logarithmiques telles que $\langle l_{\max}(t) \rangle \sim t/(\ln t)^\alpha$.

Ainsi donc, pour un processus de renouvellement le changement de comportement de $\langle l_{\max}(t) \rangle$ se produit pour $\theta = \theta_c = 1$. On peut comprendre qualitativement ce changement de comportement avec le raisonnement suivant. Soit $N \equiv N(t)$ le nombre d'excursions dans l'intervalle $[0, t]$ tel que $t = \sum_{i=1}^{N(t)} \tau_i + A(t)$. $N(t)$ est bien sûr une variable aléatoire. Compte tenu du fait que les τ_i sont des variables aléatoires de Lévy d'indice θ on obtient une estimation de la valeur typique $N_{\text{typ}}(t)$, en supposant $\sum_{i=1}^{N(t)} \tau_i \sim t$, dont le comportement avec t dépend de la valeur de θ :

$$N_{\text{typ}}(t) \sim \begin{cases} t^{\frac{1}{\theta}}, & \theta < 1, \\ t, & \theta > 1. \end{cases} \quad (6.11)$$

Finalement si l'on suppose que $l_{\max}(t) \sim \max_{1 \leq i \leq N_{\text{typ}}(t)} \tau_i$, la théorie des statistiques d'extrêmes de variables indépendantes nous dit que $l_{\max}(t) \sim [N_{\text{typ}}(t)]^{1/\theta}$ ce qui, en utilisant la relation (6.11) conduit au comportement (6.2) pour $\theta < 1$ et (6.3) pour $\theta > 1$.

Le fait que la limite asymptotique de $\langle l_{\max}(t) \rangle/t$ pour le mouvement Brownien, un processus très irrégulier avec une densité infinie de zéros, corresponde à un cas particulier de la formule ci-dessus (6.9), avec $\theta = 1/2$, suggère que ces résultats pour des processus de renouvellement puissent fournir une bonne approximation pour d'autres processus irréguliers rencontrés en physique statistique, comme par exemple dans la dynamique de marche vers l'ordre de modèles d'Ising [144]. Ceci nous conduit également à conjecturer qu'un tel changement de comportement de $\langle l_{\max}(t) \rangle$ comme en Eq. (6.2) et (6.3) lorsque θ croise une valeur critique θ_c (pas nécessairement égale à 1) est un comportement générique pour des processus irréguliers. Toutefois, bien sûr, on s'attend à ce que la relation $\psi = 1 - 1/\theta$ (pour $\theta > \theta_c$), obtenue ici pour un processus de renouvellement ne soit pas valide en général : ψ est donc un nouvel exposant associé à la dynamique hors d'équilibre de ces systèmes. Dans la Ref. [134], nous avons effectué un certain nombre de simulations numériques pour le modèle d'Ising, avec une dynamique de Glauber, en dimensions $d = 1$ (à $T = 0$) et $d = 2$ (à $T = T_c > 0$) et pour différentes observables qui confirment ce scénario. Sur la Fig. 6.2 (droite) nous avons indiqué les valeurs numériques de Q_∞ mesurées numériquement. Dans le cas $d = 1$ les deux valeurs correspondent à l'aimantation locale ($\theta = 3/8$) et à l'aimantation globale ($\theta = 1/4$). Dans le cas $d = 2$, le processus considéré est l'aimantation globale.

6.1.2. Processus multiplicatifs

Un processus $X(t)$ est dit *multiplicatif* si les positions de ses zéros $\{t_1, t_2, \dots\}$ (*i.e.* $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ sur la Fig. 6.1) sont tels que les rapports successifs $U_k = t_{k-1}/t_k$ sont des variables aléatoires indépendantes, chacune distribuée sur l'intervalle $[0, 1]$ selon une densité de probabilité $\tilde{\rho}(U)$. Le calcul de $Q(t)$ pour une distribution $\tilde{\rho}(U)$ arbitraire est en général très compliqué mais il se trouve que pour la famille de densités, paramétrisée par θ , de la forme $\tilde{\rho}(U) = \theta U^{\theta-1}$, on peut utiliser un résultat

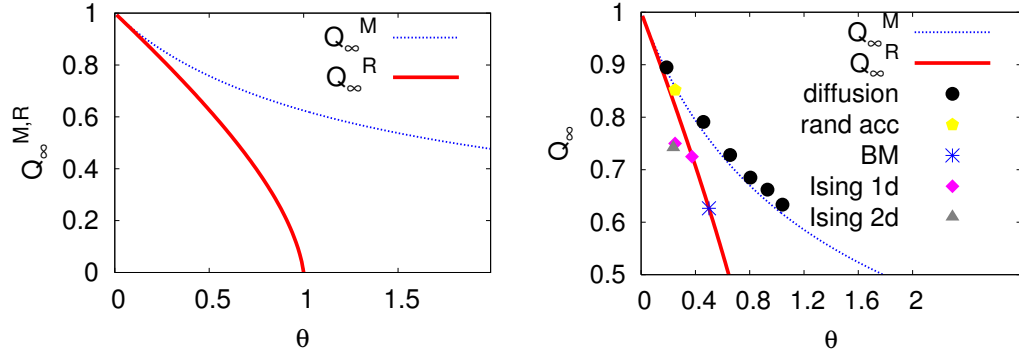


FIGURE 6.2.: **Gauche :** Q_∞ en fonction de θ . La ligne pleine représente $Q_\infty^R(\theta)$ (6.9) pour un processus de renouvellement tandis que la ligne en pointillés représente $Q_\infty^M(\theta)$ (6.12) pour un processus multiplicatif. **Droite :** Les points représentent les valeurs numériques de Q_∞ obtenues pour différents processus stochastiques (discutés dans le texte) tandis que 'BM' correspond au mouvement Brownien pour lequel la formule (6.9) avec $\theta = 1/2$ est un résultat exact.

de Godrèche et Luck [137] pour montrer que dans ce cas $Q(t) \rightarrow Q_\infty^M$ (où l'indice M renvoie à Multiplicatif), conduisant à une croissance linéaire de $\langle l_{\max}(t) \rangle$ comme en Eq. (6.2) avec

$$Q_\infty^M \equiv Q_\infty^M(\theta) = \int_0^\infty ds e^{-s-\theta E(s)}, \quad (6.12)$$

où $E(s) = \int_s^\infty dx e^{-x}/x$. En particulier, pour une distribution uniforme, *i.e.* $\theta = 1$, on obtient $Q_\infty^M(1) = 0.624329\dots$ qui est la constante de Golomb-Dickman [143] caractérisant la croissance linéaire asymptotique du plus long cycle d'une permutation aléatoire¹. En Fig. 6.2 gauche, nous avons tracé $Q_\infty^M(\theta)$ comme une fonction de θ . On notera que, à la différence des processus de renouvellement, $\langle l_{\max}(t) \rangle \simeq Q_\infty^M(\theta) t$ pour toute valeur de θ .

Pour apprécier la portée ce résultat, notons tout d'abord qu'un processus multiplicatif n'est, par construction, pas stationnaire. Cependant, si on l'étudie comme une fonction d'un temps logarithmique $T = \ln(t)$, il le devient puisque les intervalles entre deux zéros consécutifs sur l'axe du temps T , $T_k - T_{k-1}$ sont identiques et de plus ici indépendants. De façon similaire, dans de nombreuses situations hors d'équilibre, comme la diffusion avec des conditions initiales aléatoires (3.1), le processus original non stationnaire en temps réel t (3.4) le devient une fois qu'il est exprimé en temps logarithmique $T = \ln t$ (3.6). Si l'on fait ensuite l'hypothèse que, comme fonction de T , le processus est un processus de renouvellement, on obtient précisément l'approximation des intervalles indépendants (ou IIA pour *Independent*

1. Dans la Ref. [137], cette quantité Q_∞^M intervient dans le contexte de la théorie des records pour des variables indépendantes, qui se trouve être directement reliée aux propriétés statistiques des permutations aléatoires (voir aussi la référence [136] et les notes de cours [82]).

6.2 Statistique de la plus longue excursion du mouvement Brownien fractionnaire

Interval Approximation) [73], qui est connue pour être une excellente approximation pour des processus réguliers [78, 85]. Cela signifie que l'approximation d'un processus régulier (rendu stationnaire en temps logarithmique T) par un processus multiplicatif en temps réel est, en général, très bonne. Dans cette approximation d'intervalles indépendants, la distribution des intervalles entre deux zéros consécutifs décroît exponentiellement $\sim \exp[-\theta T]$, à grand temps logarithmique T , avec un taux θ , qui est l'exposant de persistance. En temps réel, cela correspond à un processus multiplicatif avec $\tilde{\rho}(U) \sim \theta U^{\theta-1}$ pour U petit. Si l'on suppose que cette loi de puissance est valide sur tout l'intervalle $U \in [0, 1]$, on obtient exactement le modèle mentionné plus haut pour lequel on peut calculer exactement $Q(t)$ conduisant au résultat en Eq. (6.12). Donc le processus multiplicatif avec $\tilde{\rho}(U) = \theta U^{\theta-1}$ est une bonne approximation pour un processus régulier générique, conduisant à une croissance linéaire de $\langle l_{\max}(t) \rangle$ (6.2) pour toute valeur de θ . Dans la Ref. [134], nous avons confirmé cette conjecture en étudiant numériquement différents processus réguliers (voir Fig. 6.2 droite) comme le processus accéléré aléatoirement ('rand acc' sur la Fig. 6.2 droite) ou bien l'équation de diffusion avec des conditions aléatoires (3.1) en dimension $d = 2, 10, 20, 30, 40$ et 50 (par ordre croissant de la valeur de l'exposant de persistance θ sur la Fig. 6.2 droite). On voit sur cette figure que la valeur de $Q_{\infty}^R(\theta)$ (6.12), bien qu'étant une approximation, décrit très bien nos données numériques.

6.2. Statistique de la plus longue excursion du mouvement Brownien fractionnaire

Dans la Ref. [140], nous avons étudié cette quantité $Q(t)$ (6.4) pour le mouvement Brownien fractionnaire, fBm (pour *fractional Brownian motion*). Ce processus, initialement introduit par Mandelbrot et van Ness [145], a été beaucoup utilisé ces dernières années pour décrire diverses situations de diffusions anormales où, génériquement, les fluctuations d'un processus $X(t)$, de moyenne temporelle nulle, sont telles que $\langle X^2(t) \rangle \sim t^{2H}$ où H est l'exposant de Hurst (donc $H = 1/2$ correspond au mouvement Brownien). Le fBm $X(t)$ est un processus stochastique Gaussien caractérisé par sa fonction de corrélation à deux temps

$$C(t_1, t_2) \equiv \langle X(t_1)X(t_2) \rangle = t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H} . \quad (6.13)$$

Ceci implique en particulier que la fonction de corrélation incrémentale est stationnaire, *i.e.* $\langle [X(t_1) - X(t_2)]^2 \rangle = |t_1 - t_2|^{2H}$. Pour $H = 1/2$, $X(t)$ est donc le mouvement Brownien. Pour $H < 1/2$ le fBm décrit une dynamique sub-diffusive tandis que pour $H > 1/2$ la dynamique est super-diffusive. Par ailleurs pour toute valeur de $0 < H < 1$ le fBm est un processus irrégulier, dont la densité de zéros est donc infinie. Un résultat remarquable pour le fBm est la relation exacte entre l'exposant de persistance θ et l'exposant H [146, 147, 148] :

$$\theta = 1 - H . \quad (6.14)$$

Notons que ce résultat (6.14) reste valide pour un processus non Gaussien, dont la fonction de corrélation est donnée par l'Eq. (6.13).

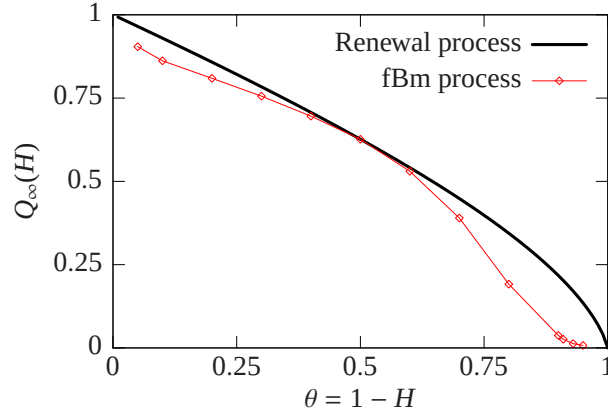


FIGURE 6.3.: Les symboles indiquent les valeurs numériques extraites par une procédure de 'fit' dans [140]. A titre de comparaison, nous avons également tracé $Q_\infty^R(\theta = 1 - H)$ pour un processus de renouvellement 'Renewal process' (6.9). Ceci montre clairement que, sauf pour $H = 1/2$, qui correspond au mouvement Brownien, le fBm n'est pas un processus de renouvellement.

De tels processus (6.13) apparaissent naturellement dans différents modèles de physique statistique. Par exemple, le fBm pour $H = 1/4$ décrit la dynamique d'une particule marquée ("tagged particle") dans le modèle d'exclusion symétrique en une dimension [149]. Il décrit aussi les fluctuations temporelles, à l'équilibre, du champ de hauteur d'une interface d'Edwards-Wilkinson (9.1) en d dimensions, et dans ce cas $H = (1 - d/2)/2$ [147]. Un autre exemple où un tel processus, quoique non-Gaussien, intervient est le modèle de Matheron-de Marsily qui décrit un écoulement hydrodynamique en milieux poreux. Dans ce cas-là, $X(t)$ décrit la coordonnée longitudinale d'une particule en $d + 1$ dimensions dans un champ de vitesse aléatoire et $H = \max(1 - d/4, 1/2)$ [150].

Pour $H \neq 1/2$, le fBm est un processus non-Markovien [145]. Cependant, les propriétés des zéros de ce processus n'avaient, jusqu'à notre travail [140], pas montré de façon convaincante la signature de ces effets de mémoire. Par exemple, si l'on suppose que les intervalles entre les zéros sont statistiquement indépendants et identiques (*i.e.* si l'on assimile le fBm à un processus de renouvellement), on obtient le résultat correct pour l'exposant de persistance $\theta = 1 - H$ [151]. Plus récemment, sur la base de simulations numériques calculant la fonction de corrélation entre la longueur de deux intervalles entre deux zéros successifs, les auteurs de la Ref. [152] ont même prétendu que le fBm pouvait être décrit par un processus de renouvellement.

Dans la Ref. [140], nous avons donc utilisé cette probabilité $Q(t)$ pour exhiber une propriété du fBm qui montre clairement les effets des corrélations entre les zéros du processus. Pour cela, en utilisant une méthode numérique exacte pour générer le fBm (fondée sur l'algorithme de Levinson [153]), nous avons calculé numériquement $Q(t)$ (6.4) pour différentes valeurs de $0 < H < 1$. Nous avons montré que, dans tous les cas, $Q(t) \rightarrow Q_\infty$ quand $t \rightarrow \infty$. Nous avons ensuite extrait précisément la valeur

6.2 Statistique de la plus longue excursion du mouvement Brownien fractionnaire

asymptotique $Q_\infty \equiv Q_\infty(H)$. Sur la Figure 6.3 nous avons reporté cette valeur en fonction de $\theta = 1 - H$ (6.14). Sur cette même figure nous avons également tracé $Q_\infty^R(1 - \theta)$, donné par l'Eq. (6.9) et correspondant à un processus de renouvellement d'exposant de persistance $\theta = 1 - H$. Ces deux valeurs Q_∞ et Q_∞^R sont clairement différentes dès que H est différent de $1/2$: ceci montre clairement que Q_∞ porte la signature des effets de mémoire du fBm pour $H \neq 1/2$.

Le dernier chapitre de cette partie montre que des observables associées à des comportements extrêmes de processus stochastiques, telles que $l_{\max}(t)$, permettent une description assez fine des dynamiques hors d'équilibre. Cela illustre l'importance des statistiques d'extrêmes dans ces situations. La partie qui suit s'intéresse plus en détail à ces statistiques d'extrêmes, notamment de processus stochastiques.

Troisième partie .

Statistique d'extrêmes

Introduction

7.1. Contexte et motivations

La statistique des valeurs extrêmes (EVS pour *Extreme Value Statistics*) est une question majeure dans le contexte des sciences de l'ingénieur [154], de la finance [155, 156] ou des sciences de l'environnement [157, 158] où les événements extrêmes peuvent avoir des conséquences dramatiques. En effet, dans ces différentes situations, les statistiques d'extrêmes ont des applications concrètes comme la prédiction de la distribution de probabilité des plus hautes crues de rivières, la taille des vagues scélérates, le montant d'importantes pertes financières dûes aux fluctuations du marché boursier, etc...

Durant ces quinze dernières années, l'étude des systèmes complexes et désordonnés a naturellement conduit les statistiques d'extrêmes à jouer un rôle crucial en physique statistique [159, 160]. En effet, la caractérisation des propriétés statistiques du maximum $X_{\max}$ ou du minimum $X_{\min}$ d'un ensemble de N variables aléatoires $x_1, x_2, \dots, x_N$ a trouvé de nombreuses applications en physique statistique [159]. Par exemple, pour décrire les propriétés thermodynamiques des systèmes vitreux à basse température, on s'intéresse souvent à l'état fondamental du système, c'est-à-dire à l'état d'énergie minimale. En ce sens, les statistiques d'extrêmes sont au cœur des problèmes d'optimisation. De même, la dynamique à basse température de ces systèmes est dominée, aux temps longs, par les plus hautes barrières du paysage d'énergie libre sous-jacent. Ainsi donc la distribution des temps de relaxation du système est-elle directement reliée à la statistique des plus grandes barrières du système. Il n'est donc pas surprenant que les statistiques d'extrêmes aient émergé dans différentes situations physiques comme les verres de spin [159], les modèles de fragmentation aléatoire [161], les interfaces fluctuantes [162, 163, 164, 165], les densités d'états de gaz quantique [166] ou bien encore les structures aléatoires comme les arbres de recherche binaires en informatique théorique [167]...

Les statistiques d'extrêmes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sont maintenant très bien comprises, grâce notamment à l'identification, dans la limite (thermodynamique) où N est grand, de trois classes d'universalité : (a) Gumbel, (b) Fréchet ou (c) Weibull, selon le comportement à grand argument de la distribution initiale $p(x)$ des variables aléatoires x_n . Nous rappellerons dans la suite les résultats principaux de la théorie des valeurs extrêmes pour des variables indépendantes.

Le cas de variables aléatoires faiblement corrélées, où les corrélations entre les

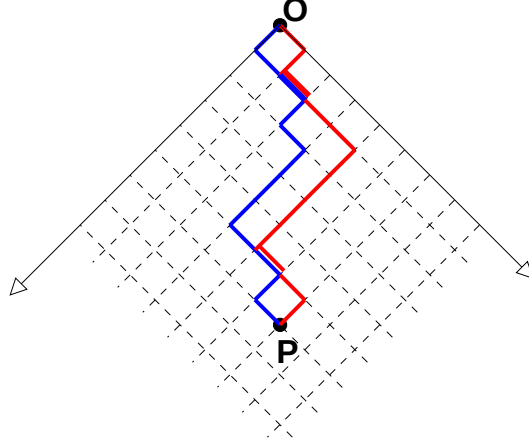


FIGURE 7.1.: Deux configurations distinctes du polymère dirigé sur un réseau carré désordonné. Les énergies de ces configurations sont manifestement très corrélées.

variables x_n sont caractérisées par une longueur de corrélation finie $\xi \ll N$ est aussi bien compris. Ce peut être par exemple le cas d'un système ferromagnétique dans la phase paramagnétique ou lors de la dynamique relaxationnelles de surfaces élastiques (on pourra consulter les notes de cours [201] pour une discussion détaillée du cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck). Dans ce cas, on peut diviser le système en blocs de taille typique ξ de telle sorte que deux variables appartenant à deux blocs distincts soient essentiellement indépendantes. Le maximum global est alors le maximum d'un ensemble de variables indépendantes, les maxima locaux de chaque bloc : ses fluctuations sont donc décrites par une des trois classes d'universalité mentionnées ci-dessus. Pour des variables aléatoires x_n Gaussiennes dont les corrélations sont "stationnaires", *i.e.* telles que $\langle x_m x_n \rangle \equiv C(|m - n|)$, ce résultat reste valide même pour des corrélations à longue portée. En effet, un théorème dû à Berman [168] affirme que dans ce cas si $\lim_{k \rightarrow \infty} C(k) \ln k = 0$ ou $\sum_{k=1}^{\infty} C^2(k) < \infty$ alors la distribution du maximum est encore donnée par la distribution de Gumbel lorsque $N \rightarrow \infty$.

Ainsi donc le cas difficile à traiter apparaît-il lorsque les variables x_n sont *fortement corrélées*, ce qui est le cas dans de nombreux problèmes rencontrés en physique statistique. Le prototype de telles situations est le modèle du polymère dirigé en milieu aléatoire, qui a été étudié depuis plus d'une trentaine d'années. Au-delà du fait qu'il s'agisse d'un "modèle jouet" de systèmes désordonnés, ce modèle a d'importantes connexions avec d'autres problèmes intéressants tels que le piégeage d'interface élastique [169], des modèles de croissance d'interface dans la classe d'universalité de Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) [170], la turbulence de Burgers [171], les verres de spin [172] ou les problèmes d'alignement de séquences d'ADN [173]. Une version discrète du polymère dirigé est représentée en Fig. 7.1. En chaque site (i, j) du réseau il y a une énergie ϵ_{ij} distribuée indépendamment de site à site, qui est

7.2 Statistique d'extrêmes de variables aléatoires identiques et indépendantes

une variable aléatoire gelée. Supposons par exemple que l'on considère l'ensemble des marches dirigées partant de l'origine, comme indiquées sur la Fig. 7.1. L'énergie totale $E(W)$ d'une marche W est simplement la somme des énergies le long de la marche, $E(W) = \sum_{(i,j) \in W} \epsilon_{ij}$ et l'on s'intéresse au chemin optimal, *i.e.* le chemin ayant l'énergie la plus basse. A cause du recouvrement entre les différentes marches, les variables aléatoires $E(W)$, lorsque W parcourt l'ensemble des chemins possibles, sont des variables aléatoires fortement corrélées : les fluctuations de l'énergie du chemin optimal ne sont donc pas décrites par l'une des classes d'universalité mentionnées ci-dessus et nécessitent une autre approche [26, 221, 232, 233].

Un autre exemple très riche de variables aléatoires fortement corrélées est celui d'une particule dans un potentiel aléatoire $V(\mathbf{r})$ avec des corrélations logarithmiques, *i.e.* où la fonction de corrélation du potentiel $(V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}'))^2$ croît comme $\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Carpentier et Le Doussal [174] ont montré que ce modèle en dimension finie exhibe une transition de gel (*freezing transition*), similaire au modèle à énergie aléatoire (REM) [175] introduit par Derrida ou au modèle du polymère dirigé sur l'arbre de Cayley [176]. A haute température, la particule est délocalisée sur l'ensemble du système tandis qu'à basse température la mesure de Boltzmann-Gibbs est concentrée dans les quelques minima de l'énergie libre, un scénario similaire à celui de la brisure de la symétrie des répliques dans les modèles de verres de spins en champ moyen [42]. Cette transition de gel est contrôlée par les états d'énergie les plus bas et il n'est donc pas étonnant que la physique à basse température de ce modèle soit contrôlée par les statistiques d'extrêmes de variables aléatoires fortement corrélées, où l'on s'attend à des déviations par rapport à la loi de Gumbel [174, 177, 178]. Ce type de potentiel corrélé logarithmiquement est donc un exemple particulièrement intéressant, qui a de nombreuses applications en physique, notamment dans l'étude d'une particule dans un paysage d'énergie aléatoire en grande dimension [177, 178].

7.2. Statistique d'extrêmes de variables aléatoires identiques et indépendantes

La théorie des statistiques d'extrêmes s'est initialement développée en parallèle des travaux menés sur le théorème de la limite centrale et ces deux théories ont d'ailleurs quelques ressemblances. Les premiers articles introduisant de façon nominative le concept de distribution de plus grande valeur voient le jour au cours des années 1920. En particulier Fréchet, en 1927, identifie une des distributions asymptotiques possibles des statistiques d'extrêmes [180] tandis que Fisher et Tippet en 1928 montrent qu'elles sont en fait au nombre de trois [181]. En 1943, Gnedenko présente une preuve rigoureuse de ce résultat et en fournit les conditions nécessaires et suffisantes dans le cas de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) [182]. Ici nous décrivons les caractéristiques principales de ces trois classes d'universalité et renvoyons aux livres de Gumbel [154], de Galambos [183], ou de de Haan et Ferreira [184] pour plus de détails.

Considérons donc un ensemble de variables aléatoires i.i.d. $x_1, x_2, \dots, x_N$ distribuées selon une densité de probabilité $p(x)$. Alors que le théorème de la limite centrale concerne le comportement de sommes partielles $x_1 + x_2 + \dots + x_N$ dans la

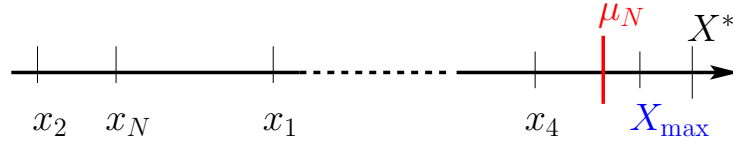


FIGURE 7.2.: Une réalisation des variables aléatoires $x_1, x_2, \dots, x_N$: μ_N est la valeur "typique" du maximum (7.2).

limite asymptotique $N \rightarrow \infty$, la théorie des statistiques d'extrêmes, elle, s'intéresse à la distribution de la plus grande de ces variables, $X_{\max}$,

$$X_{\max} = \max_{1 \leq n \leq N} x_n . \quad (7.1)$$

Si l'on dénote par X^* la borne supérieure du support de $p(x)$ (éventuellement $X^* = \infty$), alors dans la limite $N \rightarrow \infty$, il est clair que $X_{\max} \rightarrow X^*$ (c'est en quelque sorte l'équivalent de la loi des grands nombres dans le cas de la somme de variables aléatoires). Pour N fini et grand, on obtient une estimation de l'ordre de grandeur μ_N de $X_{\max}$ en considérant que μ_N est tel qu'il y ait une et une seule des variables x_n dans l'intervalle $[\mu_N, X^*]$ (Fig. 7.2), c'est-à-dire

$$P_{>}(\mu_N) = 1 - P_{<}(\mu_N) \equiv \int_{\mu_N}^{X^*} p(x) dx = \frac{1}{N} . \quad (7.2)$$

Pour des variables i.i.d. on peut décrire la statistique des extrêmes au-delà de l'estimation ci-dessus (7.2) et calculer la distribution cumulative, $F_N(M) = \Pr[X_{\max} \leq M]$:

$$F_N(M) = \Pr[X_{\max} \leq M] = [\Pr[x_n \leq M]]^N = [P_{<}(M)]^N , \quad P_{<}(M) = \int_{-\infty}^M p(x) dx . \quad (7.3)$$

Afin d'obtenir un résultat non trivial pour $F_N(M)$ dans la limite $N \rightarrow \infty$, il est indispensable (7.2) de normaliser et de centrer cette variable aléatoire $X_{\max}$ et de considérer la variable réduite $Y = (X_{\max} - b_N)/a_N$. Le problème des statistiques d'extrêmes de variables i.i.d. est donc de trouver les constantes a_N et b_N et la distribution limite $G(Y)$ telles que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{<}^N(a_N Y + b_N) = G(Y) . \quad (7.4)$$

En d'autres termes : quelles sont les distributions limites $G(Y)$ possibles et comment choisir ces constantes a_N et b_N ? Grâce aux résultats obtenus dans la littérature mathématique, notamment par Fréchet [180], Fisher et Tippet [181] et Gnedenko [182], on sait qu'il existe *trois classes* d'universalité, *i.e.* trois familles distinctes de fonctions $G(Y)$, dépendant uniquement du comportement asymptotique de la loi initiale $p(x)$ au voisinage de X^* .

7.2 Statistique d'extrêmes de variables aléatoires identiques et indépendantes

7.2.1. La classe de Gumbel

Dans ce cas-là, la borne supérieure du support de $p(x)$, X^* , peut être finie ou infinie. C'est toutefois le cas $X^* = \infty$ qu'on rencontre le plus couramment. Dans ces conditions, la classe de Gumbel correspond alors au cas où la loi initiale $p(x)$ décroît plus vite que n'importe quelle loi de puissance à grand argument, $p(x) \ll x^{-\alpha}$, $\forall \alpha$: la distribution limite $G(Y)$ est donnée par la loi de Gumbel, ou loi double exponentielle,

$$G(Y) \equiv \Lambda(Y) = \exp[-\exp(-Y)] . \quad (7.5)$$

Dans ce cas $b_N = \mu_N$ est donné par l'estimation en Eq. (7.2), tandis que a_N est donné par

$$a_N = a(b_N) , \text{ avec } a(z) = \frac{1}{P_{>}(z)} \int_z^{X^*} P_{>}(x) dx . \quad (7.6)$$

On peut comprendre qualitativement cette relation (7.6) en la ré-écrivant sous la forme :

$$a_N = \frac{\int_{b_N}^{X^*} (x - b_N) p(x) dx}{\int_{b_N}^{\infty} p(x) dx} , \quad (7.7)$$

où l'on interprète a_N comme la distance moyenne entre $X_{\max}$ et b_N , conditionnée au fait qu'il n'y ait qu'une seule variable entre b_N et X^* (Fig. 7.2). Analysons quelques exemples.

Exemple 1 : L'exemple le plus simple est certainement le cas de la distribution exponentielle $p(x) = \exp(-x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Dans ce cas on a $F_N(x) = (1 - e^{-x})^N$ que l'on écrit comme

$$F_N(x) = \left(1 - \frac{1}{N} e^{-(x - \ln N)}\right)^N \sim \exp\left[-e^{-(x - \ln N)}\right] , \text{ pour } N \rightarrow \infty , \quad (7.8)$$

en gardant $(x - \ln N)$ fixé. On vérifie donc explicitement dans ce cas que $G(x) = \Lambda(x)$ (7.5) avec $b_N = \ln N$, en accord avec l'estimation donnée en Eq. (7.2) et $a_N = 1$, en accord avec l'Eq. (7.6).

Exemple 2 : Un autre exemple rencontré couramment est celui de la loi Gaussienne, $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Dans ce cas également, $F_N(x)$ est dans le bassin d'attraction de la loi de Gumbel. Le calcul est un peu plus délicat dans ce cas et on obtient, en utilisant les formules (7.2), (7.6) :

$$a_N = \frac{\sigma}{\sqrt{2 \ln N}} , \quad b_N = \sigma \sqrt{2 \ln N} - \frac{\sigma \ln(\ln N)}{2 \sqrt{2 \ln N}} + \mathcal{O}\left[(\ln N)^{-1/2}\right] . \quad (7.9)$$

Ainsi, dans ce cas, quand $N \rightarrow \infty$, $a_N \rightarrow 0$ et la distribution de $X_{\max}$ est d'autant plus piquée autour de b_N que N est grand [ce qui n'est pas vrai dans le cas de la distribution exponentielle où la largeur reste finie (7.8)]. Pour illustrer ce résultat considérons N mouvements Browniens unidimensionnels, tous identiques, de coefficient de diffusion D et indépendants et tous situés à l'origine, en $x = 0$, à $t = 0$. On

peut alors déterminer la statistique de la position du "leader" $x_{\text{lead}}(t)$, c'est-à-dire la position du marcheur le plus à droite après un temps t , en utilisant le résultat précédent avec $\sigma = \sqrt{2Dt}$. Dans la limite où t est fixé et $N \rightarrow \infty$ la position du leader est, avec une probabilité un, donnée par $x_{\text{lead}}(t) \sim \sqrt{4D \ln N t}$. Ce type d'argument intervient par exemple dans des problèmes de diffusion de prédateurs et de leurs proies [185].

Remarque : Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, X^* n'est pas nécessairement infini dans ce cas. On peut alors énoncer un critère plus général sur $p(x)$ qui assure la convergence de $F_N(x)$ vers la loi de Gumbel $\Lambda(x)$. On a alors à notre disposition un théorème qui dit que $F_N(x)$ est dans le bassin d'attraction de la loi de Gumbel si et seulement si

$$\lim_{b \rightarrow X^*} \frac{P_{>}[b + Y a(x)]}{P_{>}(b)} = e^{-Y} , \quad (7.10)$$

où $a(x)$ est définie plus haut (7.6). On peut comprendre ce théorème en remarquant que l'on peut écrire

$$F_N(b_N + a_N Y) = [P_{<}(b_N + a_N Y)]^N = \left[1 - \frac{1}{N} \frac{P_{>}[b_N + a(b_N)Y]}{P_{>}(b_N)} \right]^N , \quad (7.11)$$

où l'on utilisé les conditions qui déterminent b_N (7.2) et a_N (7.6). Finalement, en utilisant le fait que $b_N \rightarrow X^*$ quand $N \rightarrow \infty$, on comprend l'origine de cette condition nécessaire et suffisante (7.10). On vérifie aisément que les distributions exponentielles et Gaussienne satisfont ce critère (7.10), avec $X^* = \infty$. Un autre exemple intéressant est celui d'une loi $p(x)$ définie sur l'intervalle $[0, 1[$, présentant une singularité essentielle en $x = 1$, $p(x) \propto e^{-1/(1-x)^\nu}$, avec $\nu > 0$. On vérifie, dans ce cas, que le critère ci-dessus (7.10) est satisfait et la distribution du maximum dans la limite $N \rightarrow \infty$ est donnée par la loi de Gumbel.

7.2.2. La classe de Fréchet

Dans le cas où X^* est infini et où la loi initiale des x_n , $p(x)$, décroît comme une loi de puissance caractérisée par un exposant $\alpha > 0$, $p(x) \sim x^{-\alpha-1}$, la situation est radicalement différente. Tout d'abord l'ordre de gandeur μ_N de $X_{\max}$ croît ici comme une loi de puissance $\mu_N \propto N^{1/\alpha}$ et la distribution limite est donnée par la loi de Fréchet

$$G(Y) \equiv \Phi_\alpha(Y) = \begin{cases} \exp[-Y^{-\alpha}] , & Y > 0 , \\ 0 , & Y \leq 0 . \end{cases} \quad (7.12)$$

Dans ce cas, on a $b_N = 0$ tandis que $a_N = \mu_N$ est donné par la relation (7.2).

Exemple : la loi de Cauchy. Considérons par exemple la loi de Cauchy $p(x) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$, qui correspond donc à $\alpha = 1$. On a dans ce cas $a_N = \mu_N \sim N/\pi$ et on obtient alors que la distribution cumulative de $\pi X_{\max}/N$ est une loi de Fréchet d'indice $\alpha = 1$, $\Phi_1(x) = \exp(-1/x)$.

7.2 Statistique d'extrêmes de variables aléatoires identiques et indépendantes

7.2.3. La classe de Weibull

Enfin dans le cas où le support de la distribution $p(x)$ est bornée, *i.e.* X^* fini, et que le comportement de $P_>(x)$ au voisinage de X^* est de la forme $P_>(X^* - x) \sim x^\alpha$, lorsque $x \nearrow X^*$, avec $\alpha > 0$, alors $F_N(x)$ est dans la classe d'universalité dite de Weibull

$$G(Y) \equiv \Psi_\alpha(Y) = \begin{cases} 1, & Y \geq 0 \\ \exp[-|Y|^\alpha] & Y < 0. \end{cases} \quad (7.13)$$

On a bien sûr dans ce cas $b_n = X^*$ tandis que a_n est donné par

$$\int_{X^* - a_N}^{X^*} p(t) dt = \frac{1}{N}. \quad (7.14)$$

Et l'on remarque que quand $N \rightarrow \infty$, $a_N \rightarrow 0$ de sorte que la distribution du maximum est d'autant plus piquée autour de X^* que N est grand. Analysons ici aussi quelques exemples.

Exemple 1 : L'exemple le plus simple est certainement la distribution uniforme, $p(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $p(x) = 0$ si $x \notin [0, 1]$. Dans ce cas on a $P_>(x) = \int_x^1 dt = (1 - x)$, pour $x \in [0, 1]$ et dans ce cas la distribution du maximum est décrite, pour $N \rightarrow \infty$, par une loi de Weibull d'indice 1, $\Psi_1(Y)$, tandis que $a_N = 1/N$.

Exemple 2 : On peut considérer plus généralement des distribution Beta, $p(x) = x^{a-1}(1-x)^{b-1}\Gamma(a+b)/(\Gamma(a)\Gamma(b))$ pour $x \in]0, 1[$. Dans ce cas-là également, $P_>(x) \propto (1-x)^b$ et $F_N(x)$ est décrite, pour $N \rightarrow \infty$, par une loi de Weibull $\Psi_b(Y)$ avec $a_N \sim N^{-1/b}$. Notons que la distribution cumulée du *minimum* est quant à elle décrite par une loi de Weibull d'indice a , $\Psi_a(Y)$.

Nous terminons cette partie par une série de remarques.

Remarque 1 : Ces trois familles de distributions $\Lambda(Y)$ en Eq. (7.5), $\Phi_\alpha(Y)$ en Eq. (7.12) et $\Psi_\alpha(Y)$ en Eq. (7.13) admettent une écriture "unifiée" sous la forme

$$G_\gamma(Y) = \exp[-(1 + \gamma Y)^{-1/\gamma}], \quad 1 + \gamma Y > 0, \quad (7.15)$$

où γ est réel. En effet dans la limite $\gamma \rightarrow 0$, $G_0(x) = \exp[-(\exp(-Y))] = \Lambda(Y)$, *i.e.* la distribution de Gumbel (7.5). Par ailleurs, pour $\gamma > 0$, on a $G_\gamma[(Y-1)/\gamma] = \Phi_\alpha(Y)$ avec $\alpha = 1/\gamma > 0$, *i.e.* la distribution de Fréchet (7.12). Enfin pour $\gamma < 0$, on a $G_\gamma[(Y-1)/\gamma] = \Psi_\alpha(x)$ avec $\alpha = -1/\gamma > 0$, *i.e.* la distribution de Weibull (7.13). Cette famille de distributions $G_\gamma(x)$ paramétrisée par γ apparaît parfois dans la littérature sous le nom de distribution de valeurs extrêmes généralisées.

Remarque 2 : La distribution initiale des x_n , $p(x)$, est dite *max-stable* lorsqu'il existe des constantes a_N, b_N telles que

$$\Pr\left(\frac{X_{\max} - b_N}{a_N} \leq Y\right) = \Pr(x_1 \leq Y). \quad (7.16)$$

On montre que l'ensemble des fonctions max-stables est formé par $\Lambda(x)$, $\Phi_\alpha(x)$ et $\Psi_\alpha(x)$, c'est-à-dire qu'il coïncide avec les distributions $G_\gamma(x)$ introduites ci-dessus (7.15).

Remarque 3 : On remarque aussi que si une variable aléatoire X est distribuée selon une loi de Fréchet $\Phi_\alpha(x)$ alors la variable aléatoire $\alpha \ln X$ est distribuée selon une loi de Gumbel $\Lambda(x)$ tandis que $-1/X$ est distribuée selon une loi de Weibull Ψ_α , ce que schématiquement on note

$$X \sim \Phi_\alpha \iff \alpha \ln X \sim \Lambda \iff -1/X \sim \Psi_\alpha . \quad (7.17)$$

Remarque 4 : Nous nous sommes focalisés ici sur les distributions limites décrivant la statistique d'extrêmes de variables i.i.d. dans la limite $N \rightarrow \infty$. Toutefois ces résultats ne disent rien sur les effets de taille finie. Pourtant dans de nombreuses situations concrètes, comme les simulations numériques par exemple, ces effets de taille finie peuvent être importants. L'importance de ces effets de taille finie a été reconnue dès les premiers pas de la théorie des statistiques d'extrêmes [181]. Il a en effet été réalisé assez tôt que dans le cas de N variables aléatoires i.i.d., ces corrections de taille finie ne décroissent que *logarithmiquement* avec N , jetant même le doute sur l'intérêt pratique de la théorie des statistiques d'extrêmes dans ces cas-là [186]. Depuis, les effets de taille finie, dans le cas des variables i.i.d., ont été étudiés en détail dans la littérature mathématique [187]. Plus récemment, ils ont été étudiés par des physiciens, à l'aide des méthodes du groupe de renormalisation [188] et nous renvoyons le lecteur à ces articles pour une étude détaillée de ces effets de taille finie pour des variables i.i.d.

Ces résultats illustrent que la description statistique des extrêmes d'une collection de variables i.i.d. est bien comprise. Comme nous l'avons indiqué précédemment, le cas de variables aléatoires identiques mais faiblement corrélées peut se ramener facilement au cas des variables i.i.d. Le cas vraiment difficile reste donc celui de variables fortement corrélées, dont nous allons maintenant décrire quelques exemples fondamentaux.

7.3. Quelques exemples fondamentaux de variables aléatoires fortement corrélées

Dans le cas de variables aléatoires fortement corrélées, on ne dispose pas de théorèmes aussi généraux que ceux évoqués précédemment pour des variables i.i.d. Il est alors naturel d'étudier des exemples relativement simples mais non triviaux pour lesquels des résultats exacts pour la statistique des extrêmes peuvent être obtenus. Durant ces dernières années, en suivant cette ligne de recherche, deux axes se sont révélés particulièrement fructueux : (i) les marches aléatoires et en particulier le mouvement Brownien, (ii) la plus grande valeur propre de matrices aléatoires. Le but de cette section est d'exposer les résultats importants (certains bien connus, d'autres moins) et les méthodes développées dans ces contextes.

7.3.1. Extrêmes de marches aléatoires

Pour un physicien, l'exemple le plus naturel d'un ensemble de variables aléatoires $x_1, x_2, \dots, x_N$ fortement corrélées est certainement celui de la marche aléatoire en

7.3 Quelques exemples fondamentaux de variables aléatoires fortement corrélées

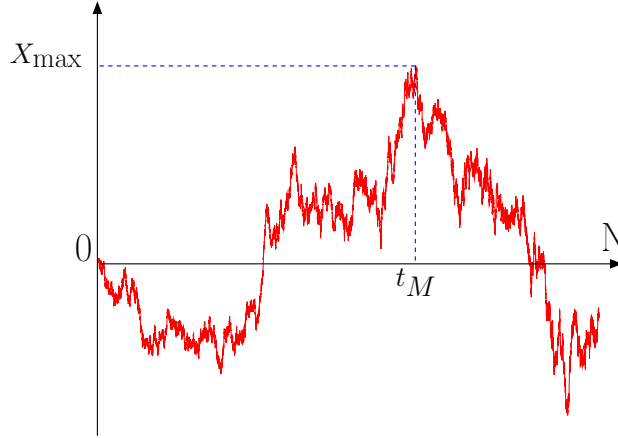


FIGURE 7.3.: Trajectoire d'une marche aléatoire (7.18) après N pas de temps. Ici nous nous intéressons à la distribution de $X_{\max}$ (7.19) tandis que la distribution de l'instant auquel ce maximum est atteint sera étudiée dans le chapitre 8.

temps discret et en espace continu. La position du marcheur x_n après n pas évolue, pour $n \geq 1$, selon la règle

$$x_n = x_{n-1} + \eta_n , \quad (7.18)$$

avec la condition initiale $x_0 = 0$ et où les longueurs des incréments η_n sont des variables i.i.d. distribuées selon une densité de probabilité $\phi(\eta)$. Nous restreignons ici l'étude au cas où $\phi(\eta)$ est symétrique, bien que certains des résultats énoncés ici restent vrais en présence d'une dérive. On dénote alors $X_{\max}$ le déplacement maximal (positif) du marcheur après N pas (Fig. 7.3) :

$$X_{\max} = \max(0, x_1, x_2, \dots, x_N) , \quad (7.19)$$

et l'on s'intéresse au calcul de la distribution cumulée $F_N(M) = \Pr(X_{\max} \leq M)$. Pour ce faire, on considère la probabilité $Q_n(x, y)$ pour que, partant de $x_0 = x$, le maximum après n pas soit plus petit que (ou égal à) y . Bien sûr, on a $F_N(M) = Q_N(0, M)$. Si l'on considère le premier pas de temps où la particule saute d'une longueur $x_1 - x$, ce qui arrive avec une densité de probabilité $p(x_1 - x)$, on déduit facilement, pour une marche markovienne, la relation de récurrence

$$Q_n(x, y) = \int_{-\infty}^y Q_{n-1}(x_1, y) \phi(x_1 - x) dx_1 , \quad (7.20)$$

avec la condition initiale $Q_0(x, y) = \theta(y - x)$. On s'intéresse ici à des marches aléatoires libres qui sont donc invariantes par translation. Dans ce cas on a $Q_n(x, y) \equiv q_n(z \equiv y - x)$ et l'équation (7.20) s'écrit plus simplement

$$q_n(z) = \int_0^\infty q_{n-1}(z') \phi(z - z') dz' , \text{ pour } z > 0 , \quad (7.21)$$

avec la condition initiale $q_0(z) = \theta(z)$, la fonction de Heaviside. On peut transformer cette récurrence pour $q_n(z)$ en une équation intégrale pour sa fonction génératrice $\tilde{q}(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(z) s^n$

$$\tilde{q}(z, s) = s \int_0^{\infty} \tilde{q}(z', s) \phi(z - z') dz' + s \int_0^{\infty} \phi(z - z') dz' , \quad z \geq 0 . \quad (7.22)$$

Il s'agit donc d'une équation intégrale de Wiener-Hopf inhomogène [190] et pour un noyau arbitraire $\phi(z - z')$ il est très difficile de résoudre cette équation (7.22)¹. Toutefois, lorsque $\phi(z - z')$ est une densité de probabilité (normalisée), on peut utiliser l'identité de Pollaczek-Spitzer [191, 192] pour obtenir un certain nombre de propriétés de la solution de cette équation (7.22). Afin d'expliciter cette identité, nous introduisons les transformées de Laplace suivantes :

$$\Phi_n(\rho) = \int_0^{\infty} e^{-\rho z} q'_n(z) dz = \langle \exp(-\rho X_{\max}) \rangle , \quad (7.23)$$

$$\Psi_n(\rho) = \langle \exp[-\rho(\max(0, S_n))] \rangle , \quad (7.24)$$

où $\langle \dots \rangle$ signifie une valeur moyenne sur les variables η_n . Dans l'Eq. (7.23) $q'_n(z)$ est donc la distribution de probabilité du maximum après n pas et dans l'Eq. (7.24) $S_n = \sum_{k=1}^n \eta_k$. L'identité de Pollaczek-Spitzer est une relation entre les fonctions génératrice de $\Phi_n(\rho)$ et $\Psi_n(\rho)$, qui s'écrit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\rho) s^n = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Psi_n(\rho) s^n \right) . \quad (7.25)$$

Remarquons que puisque la densité de probabilité de la somme partielle S_n a pour fonction caractéristique $\langle \exp(ikS_n) \rangle = [\hat{\phi}(k)]^n$, où $\hat{\phi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\eta) e^{ik\eta} d\eta$ est la fonction caractéristique de $\phi(\eta)$, la relation de Pollaczek-Spitzer (7.25) s'écrit encore

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\rho) s^n = \frac{1}{\sqrt{1-s}} \tilde{\phi}(s, \rho) , \quad \text{avec } \tilde{\phi}(s, \rho) = \exp - \left[\frac{\rho}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln(1 - s\hat{\phi}(k))}{\rho^2 + k^2} dk \right] . \quad (7.26)$$

Nous renvoyons à la référence [193] pour une dérivation élégante de cette identité (7.26).

Applications au calcul des moments $\langle X_{\max}^k \rangle$.

Cette identité est particulièrement utile pour le calcul des moments de $X_{\max}$ et en particulier sa valeur moyenne $\langle X_{\max} \rangle$ [189]. La question du calcul de cette quantité, pour des marches aléatoires, s'est récemment posée dans le contexte de problèmes d'empilements bi-dimensionnels où n rectangles de tailles différentes sont empilés dans un ruban semi-infini de largeur unité [194]. $\langle X_{\max} \rangle$ intervient également dans le calcul du périmètre de l'enveloppe convexe d'une marche aléatoire bidimensionnelle [195, 196]. A partir de cette identité (7.25), Comtet et Majumdar ont obtenu le comportement asymptotique de $X_{\max}$ dans le cas où $p(x)$ admet un second moment

1. Un cas particulier soluble est le cas où $\phi(z) = (1/2) \exp(-|z|)$ où cette équation intégrale peut être transformée en une équation différentielle du second ordre [189] et résolue exactement.

7.3 Quelques exemples fondamentaux de variables aléatoires fortement corrélées

$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \phi(x) dx = \sigma^2$ (et dans ce cas la marche aléatoire tend vers le mouvement Brownien pour $N \rightarrow \infty$) sous la forme

$$\frac{\langle X_{\max} \rangle}{\sigma} = \sqrt{\frac{2N}{\pi}} + \gamma + \mathcal{O}(N^{-1/2}) . \quad (7.27)$$

Tandis que le comportement dominant est universel, et est donc donné par le mouvement Brownien (nous y reviendrons dans la suite), la première correction γ dépend de toute la distribution $\phi(x)$ [189]

$$\gamma = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{dk}{k^2} \ln \left[\frac{1 - \hat{\phi}(\sqrt{2}k/\sigma)}{k^2} \right] , \quad \hat{\phi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\eta} \phi(\eta) d\eta . \quad (7.28)$$

Par exemple, pour une distribution uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$, cette formule (7.28) redonne de façon très simple $\gamma = -0.516068$, un résultat obtenu par une approche combinatoire assez compliquée en Ref. [194].

De même, à partir de cette identité (7.25), on peut calculer le comportement asymptotique de $X_{\max}$ dans le cas où $\phi(x)$ est une loi stable, telle que $\hat{\phi}(k) = e^{-|k|^\nu}$, $1 < \nu \leq 2$ et dans ce cas on a [189]

$$\langle X_{\max} \rangle = \frac{\nu}{\pi} \Gamma \left(1 - \frac{1}{\nu} \right) N^{1/\nu} + \gamma + \mathcal{O}(N^{1/\mu-1}) , \quad (7.29)$$

avec $\gamma = \zeta(1/\nu)/[(2\pi)^{1/\nu} \sin(\pi/2\nu)]$, où ζ est la fonction zêta de Riemann.

Applications au calcul de la distribution limite pour des lois stables.

Dans le cas de lois stables $\hat{\phi}(k) = e^{-|k|^\nu}$ cette relation de Pollaczek-Spitzer (7.25) permet d'obtenir des informations sur la distribution complète de la densité de probabilité $f_N(M) = F'_N(M)$. En effet, dans la Ref. [197], Darling a montré que dans la limite $N \rightarrow \infty$

$$F'_N(M) \equiv f_N(M) \sim \frac{1}{N^{1/\nu}} f \left(\frac{M}{N^{1/\nu}} \right) , \quad (7.30)$$

où la transformée de Laplace de f , $\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx$, vérifie l'équation intégrale suivante :

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \hat{f}(\xi x^{1/\nu}) dx = g(\xi) , \quad \text{avec } g(\xi) = \exp \left(-\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln(1 + \xi^\nu y^\nu)}{1 + y^2} dy \right) . \quad (7.31)$$

On peut montrer que cette équation a une solution unique et peut être résolue par transformée de Mellin. Si l'on dénote par $\mathfrak{f}(s)$ la transformée de Mellin de la distribution $f(x)$ et par $\mathfrak{g}(s)$ celle de $g(x)$, *i.e.*

$$\mathfrak{f}(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx , \quad \mathfrak{g}(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} g(x) dx , \quad (7.32)$$

l'équation (7.31) devient

$$\mathfrak{f}(s) = \frac{\mathfrak{g}(1-s)}{\Gamma(1-s)\Gamma(1-\nu^{-1}+s\nu^{-1})} , \quad (7.33)$$

valide pour $\Re(s)$ suffisamment petite. Pour une valeur quelconque de $0 < \nu \leq 2$, il semble très difficile d'inverser cette transformée de Mellin $\mathfrak{f}(s)$ donnée par l'équation (7.33). Toutefois pour $\nu = 2$ et $\nu = 1$, on peut obtenir une expression simple pour $f(x)$.

- Pour $\nu = 2$, on a simplement $g(\xi) = (1 + \xi)^{-1}$ et donc $\mathfrak{g}(s) = \Gamma(s)\Gamma(1 - s)$ et l'équation (7.33) s'écrit

$$\mathfrak{f}(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1/2 + s/2)} = \pi^{-1/2} 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \pi^{-1/2} \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x^2/4} dx, \quad (7.34)$$

et dont on tire simplement

$$f(x) = \pi^{-1/2} e^{-x^2/4}, \quad x \geq 0, \quad (7.35)$$

un résultat bien connu pour le mouvement Brownien [198].

- Le cas $\nu = 1$, correspondant donc aux sommes de variables de Cauchy, *i.e.* $\phi(\eta) = \pi^{-1}(1 + \eta^2)^{-1}$ est beaucoup plus compliqué. Néanmoins, Darling est parvenu à inverser cette transformée de Mellin et a obtenu le joli résultat [197]

$$f(x) = \frac{1}{\pi x^{1/2}(1 + x^2)^{3/4}} \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\ln w}{1 + w^2} dw\right). \quad (7.36)$$

Ses comportements asymptotiques sont donnés par

$$f(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{\pi} x^{-1/2}, & x \rightarrow 0 \\ \frac{1}{\pi} x^{-2}, & x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (7.37)$$

Notons en particulier que la queue de la distribution $f(x) \sim x^{-2}$ a le même comportement asymptotique que la distribution des variables d'incrément η_n (7.18). Cette propriété demeure vraie pour tout ν , et plus généralement pour toute distribution des incréments η_n dont la queue décroît plus lentement qu'une exponentielle [199]. Ce résultat est en accord avec l'image selon laquelle, dans ce cas-là, les grandes fluctuations du maximum de la marche aléatoire ne sont dûs qu'à un seul "saut". Terminons ce paragraphe en mentionnant que cette formule pour $f(x)$ (7.37) a été étendue au cas d'une marche aléatoire de Cauchy en présence d'une force extérieure [200], *i.e.* pour $\phi(\eta) = \pi^{-1}(1 + (\eta - a)^2)^{-1}$. Dans ce cas on a

$$f(x) = \frac{1}{\pi} x^{\gamma-1} (1 + (x - a)^2)^{-(1+\gamma)/2} (1 + a^2)^{h(x)} \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\ln w}{1 + (w - a)^2} dw\right), \quad (7.38)$$

où $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan a$, $h(x) = \frac{1}{2\pi} (\arctan(x - a) + \arctan a)$.

7.3.2. Etrêmes du mouvement Brownien : approche par l'intégrale de chemin

Comme nous l'avons dit, les marches aléatoires fournissent un exemple naturel, physiquement intéressant, de variables aléatoires fortement corrélées. Si la relation

7.3 Quelques exemples fondamentaux de variables aléatoires fortement corrélées

de Pollaczek-Spitzer est un outil puissant pour étudier les statistiques de ces marches aléatoires en temps discret, d'autres techniques deviennent disponibles dans la limite du temps continu. C'est tout particulièrement vrai dans le cas où $\phi(\eta)$ a un second moment bien défini, où la marche aléatoire converge, dans la limite continue, vers le mouvement Brownien,

$$\dot{x}(t) = \eta(t), \quad x(0) = 0, \quad (7.39)$$

où $\eta(t)$ est un bruit blanc Gaussien, $\langle \eta(t) \rangle = 0$, $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t - t')$ (et le coefficient de diffusion est donc $D = 1/2$). Comme précédemment (7.19), on s'intéresse au maximum du mouvement Brownien $X_{\max}$ sur l'intervalle de temps $[0, T]$, où la variable continue T joue donc le rôle de N dans le cas discret (7.19) :

$$X_{\max} = \max_{0 \leq t \leq T} x(t), \quad (7.40)$$

et l'on veut calculer la distribution cumulée $F_T(M) = \Pr(X_{\max} \leq M)$. Dans ce cas relativement simple, il existe 3 grands types de méthodes pour ce calcul :

1. La méthode des images,
2. La méthode de Fokker-Planck,
3. La méthode d'intégrale de chemin, ou formule de Feynman-Kac.

Nous renvoyons aux ouvrages de références [80, 81], ainsi qu'aux notes de cours [201] pour un exposé des méthodes (1) et (2) et nous nous restreignons ici à la présentation de la méthode par l'intégrale de chemin, qui est assez générale, et que nous rencontrerons dans la suite. Bien que la représentation de $F_T(M)$ en terme d'une intégrale de chemins puisse être obtenue comme la solution d'une équation de Fokker-Planck, à partir de la formule de Feynman-Kac, nous en donnons ici une dérivation un peu plus heuristique directement à partir de l'équation de Langevin (7.39). Le point départ de cette approche est l'écriture de la distribution jointe des positions $\{x(t)\}$ où $x(t)$ évolue selon l'équation de Langevin (7.39) sur l'intervalle $[0, T]$. La densité de probabilité $\rho_{\text{joint}}[\{x(t)\}]$ d'une trajectoire $\{x(t)\}$ sur cet intervalle s'écrit

$$\rho_{\text{joint}}[\{x(t)\}] = Z_T^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^T dt \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \right] \delta[x(0)], \quad (7.41)$$

où Z_T est une constante de normalisation et où la fonction delta assure simplement la condition initiale (7.39). A partir de ce poids (7.41), on obtient une expression formelle de la distribution cumulée $F_T(M) = \Pr(X_{\max} \leq M)$ sous la forme

$$F_T(M) = Z_T^{-1} \int \mathcal{D}x(t) e^{-\frac{1}{2} \int_0^T dt (\partial_t x)^2} \times \prod_{0 \leq t \leq T} \theta(M - x(t)) \times \delta[x(0)], \quad (7.42)$$

où le produit des fonctions theta contraint les chemins Browniens à rester en-dessous de M . On remarque que la constante de normalisation Z_T s'écrit comme le numérateur dans l'Eq. (7.42) mais sans la contrainte imposée par les fonctions theta. On

peut maintenant utiliser les techniques d'intégrale de chemin en mécanique quantique pour écrire

$$F_T(M) = \frac{\int_{-\infty}^M \langle 0 | \exp(-T\hat{H}_M) | u \rangle du}{\int_{-\infty}^{\infty} \langle 0 | \exp(-T\hat{H}_{\text{libre}}) | u \rangle du} \quad (7.43)$$

où $\hat{H}_{\text{libre}} = -(1/2)\partial_x^2$ est le Hamiltonien d'une particule libre et $\hat{H}_M = -(1/2)\partial_x^2 + V_M(x)$ est le Hamiltonien d'une particule confinée sur la demi-droite réelle $(-\infty, M]$, *i.e.*

$$V_M(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq M, \\ +\infty, & x \geq M. \end{cases} \quad (7.44)$$

Le numérateur et le dénominateur dans l'Eq. (7.43) peuvent se calculer simplement : si l'on dénote génériquement par $|E\rangle$ les vecteurs (normalisés) d'un Hamiltonien de Schrödinger $\hat{H}$ associés aux valeurs propres E , *i.e.* $\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle$, alors on a simplement

$$\langle y | \exp(-T\hat{H}) | x \rangle = \sum_E \Psi_E^*(x) \Psi_E(y) e^{-ET}, \quad (7.45)$$

avec $\Psi_E(x) = \langle x | E \rangle$. Dans le cas de $\hat{H}_M$, les vecteurs propres sont simplement $\Psi_k = (2/\pi)^{1/2} \sin(k(M-x))$ et les énergies propres sont $E_k = k^2/2$, $k > 0$, et le numérateur dans l'Eq. (7.43) est simplement donné par

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \langle 0 | \exp(-T\hat{H}_M) | u \rangle du &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^M du \int_0^{\infty} dk \sin(kM) \sin(k(M-u)) e^{-Tk^2/2} \\ &= \operatorname{erf}\left(\frac{M}{\sqrt{2T}}\right), \end{aligned} \quad (7.46)$$

où $\operatorname{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x e^{-t^2} dt$, tandis que le dénominateur dans l'Eq. (7.43) est simplement égal à 1. Finalement, on obtient

$$F_T(M) = \operatorname{erf}\left(\frac{M}{\sqrt{2T}}\right), \quad (7.47)$$

qui redonne bien, après dérivation par rapport à M le résultat mentionné ci-dessus (7.35) (en se rappelant toutefois que le coefficient de diffusion est $D = 1/2$ dans (7.47) tandis que $D = 1$ dans (7.35)).

Bien que cette méthode soit un peu lourde pour le cas simple du mouvement Brownien libre, elle est particulièrement intéressante car elle peut être étendue à l'étude de mouvements Browniens plus compliqués comme ceux indiqués sur la figure (7.4). Par exemple, le cas de l'excursion (Fig. 7.4 c)) ou du méandre (Fig. 7.4 d)) où $x(t)$ est contraint à rester positif (c'est-à-dire en présence d'un mur *absorbant* en $x = 0$) peuvent être simplement étudiés par cette méthode d'intégrale de chemin en incluant un potentiel infini pour $x < 0$ dans l'Eq. (7.44). Le mouvement Brownien réfléchi (Fig. 7.4 b)) peut être traité de façon similaire en imposant un mur *réfléchissant* en $x = 0$. Nous renvoyons aux Ref. [201, 202] pour plus de détail sur

7.3 Quelques exemples fondamentaux de variables aléatoires fortement corrélées

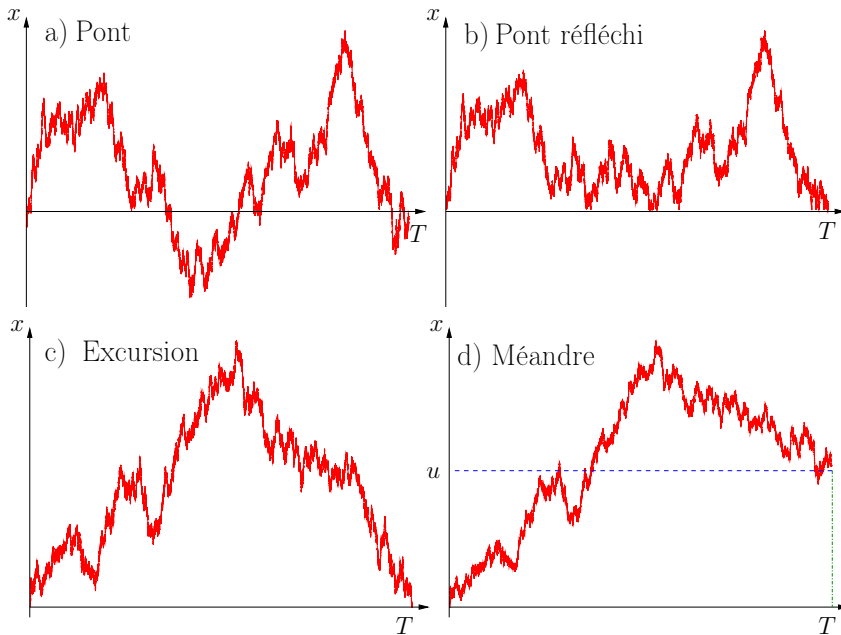


FIGURE 7.4.: Quelques mouvements Browniens contraints : a) pont Brownien $B(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$ qui est un mouvement Brownien contraint à commencer et terminer en 0, *i.e.* $B(0) = B(T) = 0$. b) Pont Brownien réfléchi sur l'intervalle $[0, T]$, *i.e.* $|B(t)|$ où le pont Brownien $B(t)$ est défini en a). c) Excursion Brownienne sur l'intervalle $[0, T]$, *i.e.* un mouvement Brownien contraint à commencer et à terminer en 0 et à rester positif sur l'intervalle $[0, T]$. d) Méandre Brownien sur l'intervalle $[0, T]$, *i.e.* un mouvement Brownien contraint à commencer en 0 et terminant en n'importe quel point $u > 0$ à l'instant T et contraint à rester positif sur cet intervalle.

les techniques d'intégrale de chemin pour le calcul de la distribution du maximum dans ces différents cas.

Le cas du maximum du pont Brownien réfléchi (Fig. 7.4 b)) mérite toutefois une attention particulière car il intervient en statistiques dans le *test de Kolmogorov-Smirnov* [203]. Supposons que l'on ait N échantillons indépendants $z_1, z_2, \dots, z_N$ d'une même variable aléatoire dont on cherche à déterminer la distribution cumulative $g(Z) = \Pr(z \leq Z)$. Le test de Kolmogorov-Smirnov consiste à considérer la fonction de répartition empirique

$$g_N(Z) = \frac{1}{N} \sum_i^N \theta(Z - z_i). \quad (7.48)$$

Dans la limite $N \rightarrow \infty$, la loi des grands nombres nous dit que $g_N(Z) \rightarrow g(Z)$ et le théorème centrale limite nous dit que la variable $\tilde{B}(Z) = \sqrt{N}(g_N(Z) - g(Z))$ est

une variable aléatoire Gaussienne. On vérifie par ailleurs à partir de la définition de $g_N(Z)$ (7.48) que

$$\langle \tilde{B}(Z)\tilde{B}(Z') \rangle = g(Z) - g(Z)g(Z') , \quad Z < Z' . \quad (7.49)$$

Si l'on définit la variable de temps $t = g(Z)$, $0 < t < 1$, alors cette fonction de corrélation coïncide avec celle d'un pont Brownien sur l'intervalle de temps unité et comme un processus Gaussien est complètement caractérisée par sa fonction à deux points on en déduit que $\tilde{B}(Z)$ a les mêmes fluctuations statistiques qu'un pont Brownien $B(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. En particulier, la distribution du maximum de $|\tilde{B}(Z)|$, pour $Z \in \mathbb{R}$ est donnée par la distribution du maximum d'un pont Brownien réfléchi $|B(x)|$ sur l'intervalle de temps unité, que l'on peut calculer assez simplement avec ces méthodes d'intégrale de chemin [202],

$$\begin{aligned} \Pr \left(\max_{Z \in \mathbb{R}} \sqrt{N} |g_N(Z) - g(Z)| \leq M \right) &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-2n^2 M^2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{M} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 / (8M^2)} , \end{aligned} \quad (7.50)$$

où l'on remarque que le membre de droite est *indépendant* de $g(x)$. Ainsi ce résultat (7.50) permet de décider si un échantillon provient bien d'une loi donnée, ou si deux échantillons ont la même loi, lorsque leurs fonction de répartitions sont continues². Nous terminons ce paragraphe en mentionnant que l'extension de ce test de Kolmogorov-Smirnov à des distributions multidimensionnelles est un problème ouvert.

Nous terminons ce paragraphe sur une remarque d'ordre général concernant le formalisme d'intégrale de chemin. Cette formulation de la mesure d'une trajectoire (7.41) peut en effet être généralisée à n'importe quelle équation de Langevin de la forme

$$\dot{x}(t) = \mathcal{F}[x(t), t] + \eta(t) , \quad x(T_i) = x_i , \quad x(T_f) = x_f . \quad (7.51)$$

On a alors dans ce cas

$$\begin{aligned} \rho_{\text{joint}}[\{x(t)\}] &= \exp \left[- \int_{T_i}^{T_f} dt \left(\frac{1}{2} (\dot{x}(t) - \mathcal{F}[x(t), t])^2 + \partial_x \mathcal{F}[x(t), t] \right) \right] \\ &\times \delta(x(T_i) - x_i) \delta(x(T_f) - x_f) , \end{aligned} \quad (7.52)$$

où le terme $\exp \left[- \int_{T_i}^{T_f} dt \partial_x \mathcal{F}[x(t), t] \right]$ provient du Jacobien de la transformation des variables $\eta(t)$ en $x(t)$. Notons que si l'on effectue une transformation de Hubbard-Stratanovitch du terme en $\exp \left[- \int_{T_i}^{T_f} dt \frac{1}{2} (\dot{x}(\tau) - \mathcal{F}[x(t), t])^2 \right]$, on obtient alors la

2. Notons que l'on pourrait également considérer $\max_{Z \in \mathbb{R}} \sqrt{N} (g_N(Z) - g(Z))$ ou $\max_{Z \in \mathbb{R}} \sqrt{N} (g(Z) - g_N(Z))$ dont la distribution est celui du maximum d'un pont Brownien sur l'intervalle unité.

7.3 Quelques exemples fondamentaux de variables aléatoires fortement corrélées

fonctionnelle de Martin-Siggia-Rose-Janssen-de Dominicis [204, 205, 206]. Finalement, si la force ne dépend pas explicitement du temps, *i.e.* si $\mathcal{F}[x(t), t] \equiv \mathcal{F}[x(t)] = -W'[x(t)]$ on alors

$$\rho_{\text{joint}}[\{x(t)\}] \propto e^{W(x_i) - W(x_f)} \exp \left[- \int_{T_i}^{T_f} dt \left(\frac{1}{2} \dot{x}(t)^2 + V[x(t)] \right) \right], \quad (7.53)$$

où le potentiel de Schrödinger associé est $V(x) = \mathcal{F}' + \mathcal{F}^2/2 = W'^2/2 - W''$.

7.3.3. Valeurs propres maximales de matrices aléatoires : distribution de Tracy-Widom

Une autre direction de recherche importante dans le contexte des statistiques d'extrêmes de variables fortement corrélées concerne les valeurs propres de matrices aléatoires. Depuis les travaux fondateurs de Wigner [207], la théorie des matrices aléatoires (RMT pour *Random Matrix Theory*) a trouvé de nombreuses applications en physique théorique, allant de la physique nucléaire, au chaos quantique en passant par les systèmes désordonnés ou à la théorie des nombres [208]. Selon les problèmes étudiés, et les symétries associées, diverses classes de matrices aléatoires ont été étudiées. Trois d'entre elles, dont les éléments sont des variables aléatoires Gaussiennes, ont suscité un intérêt particulier : les matrices de taille $N \times N$ réelles et symétriques (l'ensemble GOE pour *Gaussian Orthogonal Ensemble*), les matrices $N \times N$ hermitiennes (l'ensemble GUE pour *Gaussian Unitary Ensemble*) et les matrices $2N \times 2N$ quaternioniques self-duales (l'ensemble GSE pour *Gaussian Symplectic Ensemble*). Un résultat central de la théorie des matrices aléatoires, dû à Wigner [207], est que la densité de probabilité jointe des valeurs propres (réelles) pour tous ces ensembles de matrices aléatoires est donnée par

$$\begin{aligned} P_{\text{joint}}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) &= B_N \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \exp \left(-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 \right) \\ &= B_N \exp \left(-\frac{\beta}{2} \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i^2 - \sum_{i \neq j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| \right) \right), \end{aligned} \quad (7.54)$$

où B_N est une constante de normalisation et $\beta = 1, 2, 4$ (parfois appelé indice de Dyson) correspond respectivement aux ensembles GOE, GUE et GSE. Cette loi jointe (7.54) nous permet d'interpréter les valeurs propres λ_i comme les positions de particules ponctuelles chargées qui se repoussent mutuellement via le potentiel Coulombien bi-dimensionnel et contraintes à rester sur une ligne en présence d'un potentiel harmonique extérieur. Le paramètre β peut donc être interprété comme l'inverse d'une température.

Une quantité importante associée à ce gaz de Coulomb est la densité moyenne $\rho(\lambda, N)$, *i.e.* la distribution de probabilité marginale d'une valeur propre

$$\rho(\lambda, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \delta(\lambda - \lambda_i) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^N d\lambda_i P_{\text{joint}}(\lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_N). \quad (7.55)$$

Dans la limite de N grand, la densité s'écrit sous la forme d'échelle³

$$\rho(\lambda, N) = \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{\rho}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\right), \quad \tilde{\rho}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}. \quad (7.56)$$

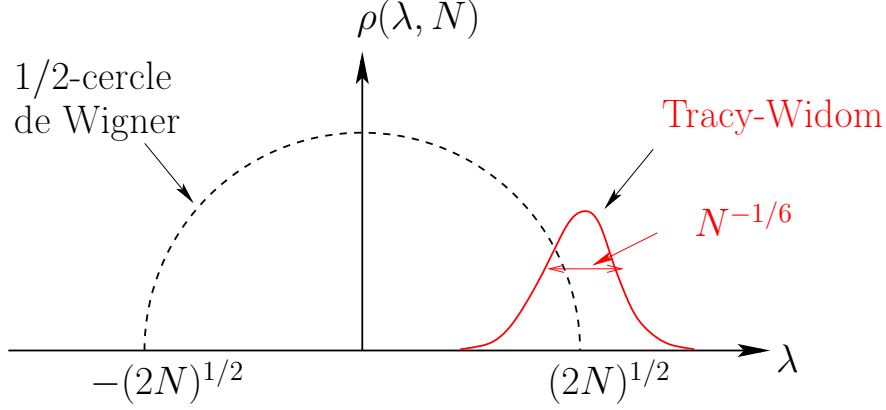


FIGURE 7.5.: La ligne en pointillé indique la forme semi-circulaire de la densité d'état. La plus grande valeur propre est centrée autour d'une valeur moyenne $\sqrt{2N}$ et fluctue sur une échelle d'ordre $\mathcal{O}(N^{-1/6})$. Sur cette échelle, les fluctuations sont décrites par la distribution de Tracy-Widom.

Alors que la densité d'état $\rho(\lambda, N)$ donne des informations *globales* sur le spectre de ces matrices aléatoires, elle ne contient pas d'information sur les événements rares. Par exemple, la loi du demi-cercle nous dit que la plus grande des valeurs propres

$$\lambda_{\max} = \max(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \quad (7.57)$$

a pour valeur moyenne $\langle \lambda_{\max} \rangle \sim \sqrt{2N}$. Pourtant pour $N \gg 1$ mais fini $\lambda_{\max}$ fluctue et une question naturelle est donc : quelle est la distribution de probabilité de $\lambda_{\max}$? La fonction de répartition de cette variable aléatoire $\lambda_{\max}$ s'écrit facilement en fonction de la densité de probabilité jointe (7.54) comme

$$F_{N,\beta}(\Lambda) = \text{Proba}[\lambda_{\max} \leq \Lambda] = \int_{-\infty}^{\Lambda} \prod_{i=1}^N d\lambda_i P_{\text{joint}}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N). \quad (7.58)$$

Assez récemment, Tracy et Widom [209, 210, 211, 212] ont montré que l'amplitude des fluctuations de $\lambda_{\max}$ sont d'ordre $N^{-1/6}$ autour de sa valeur moyenne $\sqrt{2N}$. Leurs résultats montrent que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_{N,\beta} \left(\sqrt{2N} + \frac{s}{\sqrt{2N^{1/6}}} \right) = \mathcal{F}_{\beta}(s), \quad \beta = 1, 2, 4, \quad (7.59)$$

3. Cette forme peut s'obtenir assez simplement par la méthode du col : la condition de stationnarité donne alors une équation intégrale singulière, de type Tricomi, pour $\tilde{\rho}(x)$ pour laquelle il existe une solution explicite sous la forme (7.56).

7.3 Quelques exemples fondamentaux de variables aléatoires fortement corrélées

où les distributions limites dites de “Tracy-Widom” pour $\beta = 1, 2, 4$ s’expriment en fonction de l’unique solution $q(s)$ de l’équation de Painlevé de type II

$$q''(s) = s q(s) + q^3(s), \quad (7.60)$$

satisfaisant la condition

$$q(s) \sim \text{Ai}(s) \text{ pour } s \rightarrow \infty, \quad (7.61)$$

où $\text{Ai}(s)$ est la fonction d’Airy. Explicitement on a

$$\mathcal{F}_2(s) = \exp \left(- \int_s^\infty (x - s) q^2(x) dx \right), \quad (7.62)$$

$$\mathcal{F}_1(s) = \exp \left(- \frac{1}{2} \int_s^\infty q(x) dx \right) (F_2(s))^{1/2}, \quad (7.63)$$

$$\mathcal{F}_4(s) = \cosh \left(- \frac{1}{2} \int_s^\infty q(x) dx \right) (F_2(s))^{1/2}. \quad (7.64)$$

Ces distributions sont assez asymétriques : par exemple, pour $\beta = 2$, $\mathcal{F}_2(x)$ a les comportements asymptotiques suivants

$$\mathcal{F}_2(x) \sim 1 - \mathcal{O} \left(\exp \left(-4x^{3/2}/3 \right) \right), \quad x \rightarrow \infty, \quad (7.65)$$

$$\mathcal{F}_2(x) \sim \exp \left[-|x^3|/12 \right], \quad x \rightarrow -\infty. \quad (7.66)$$

Un autre ensemble de matrices aléatoires particulièrement intéressant est celui des matrices de Wishart (parfois appelées aussi matrices de Laguerre). Une matrice de Wishart W est une matrice carrée de taille $N \times N$ qui est formée par le produit $W = X^\dagger X$ où X est une matrice rectangulaire de taille $M \times N$, dont les éléments peuvent être réels ou complexes, et où $X^\dagger$ est la matrice Hermitienne conjuguée de X . Si les éléments de la matrice X sont des variables aléatoires Gaussiennes indépendantes, *i.e.* si $P(X) \propto \exp \left[-\frac{\beta}{2} \text{Tr}(X^\dagger X) \right]$, avec $\beta = 1, 2$ pour des matrices réelles ou complexes respectivement, la matrice W est une matrice aléatoire de Wishart. Ces matrices ont initialement été introduites par Wishart dans le contexte de l’analyse statistique multi-variée [213] où elles jouent rôle central dans les méthodes dites d’analyse en composantes principales (PCA pour *Principal Component Analysis*) [214]. Depuis ces matrices de Wishart ont été étudiées dans une grande variété de contextes allant des algorithmes de traitement d’images [215], à la génétique des populations [216], la finance [217, 218] ou bien encore la météorologie ou l’océanographie [219].

Les propriétés spectrales de ces matrices de Wishart ont été abondamment étudiées et en particulier, pour $M > N$, la distribution jointe des N valeurs propres (toutes positives) est donnée par

$$P_{\text{joint}}^W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = K_N \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \prod_{k=1}^N \lambda_k^{\frac{\beta}{2}(M-N+1)-1} \exp \left(-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i \right), \quad (7.67)$$

où K_N est une constante de normalisation. Au contraire des matrices de Wigner, le scaling typique des valeurs propres est, pour $M > N \gg 1$, $\lambda \sim N$ et la densité des valeurs propres $\rho^W(\lambda, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \delta(\lambda - \lambda_i) \rangle$ est, dans ce cas, donné par la densité de Marcenko-Pastur [220] :

$$\rho^W(\lambda, N) = \frac{1}{N} \tilde{\rho}^W\left(\frac{\lambda}{N}\right), \quad \tilde{\rho}^W(x) = \frac{1}{2\pi x} \sqrt{(x_+ - x)(x - x_-)}, \quad (7.68)$$

où $x_{\pm} = \left(\sqrt{\frac{M}{N}} \pm 1\right)^2$. Ces valeurs propres des matrices de Wishart forment donc un ensemble de variables aléatoires fortement corrélées et il est intéressant de se demander quelle est la distribution du maximum d'entre elles $\lambda_{\max} = \max(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$. Récemment, Johansson [221] et, indépendamment, Johnstone [222] ont montré que les fluctuations de $\lambda_{\max}$ autour de sa valeur moyenne $\langle \lambda_{\max} \rangle \sim x_+ N$ sont d'ordre $N^{1/3}$ et décrites elles aussi par une distribution de Tracy-Widom $\mathcal{F}_{\beta}$, *i.e.* :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Proba}[\lambda_{\max} \leq x_+ N + s N^{1/3}] = \mathcal{F}_{\beta}(s), \quad (7.69)$$

où $\mathcal{F}_{\beta}(s)$ est la distribution de Tracy-Widom d'index $\beta = 1, 2$ donnée en Eq. (7.62).

Remarque : Bien que les distributions de Tracy-Widom aient été initialement obtenues pour le cas de matrices aléatoires Gaussiennes, on s'attend à ce que, dans la limite des grandes matrices $N \rightarrow \infty$ ces résultats restent valables pour une classe plus grande de matrices aléatoires. Par exemple, pour des matrices (de Wigner ou de Wishart) dont la distribution des éléments est symétrique et sous-Gaussienne (*i.e.* dont la distribution décroît au moins aussi vite qu'une Gaussienne à grand argument), il existe des résultats rigoureux qui montrent que la loi de $\lambda_{\max}$ est encore donnée par la loi de Tracy-Widom [223, 224]. Récemment, Biroli, Bouchaud et Potters [225] ont étendu ces résultats au cas où les éléments sont distribués selon une loi de puissance. Ils ont alors montré que si le quatrième moment de cette distribution est défini alors la loi de $\lambda_{\max}$ est encore donnée par une distribution de Tracy-Widom (une forme plus faible de ce résultat a été montré rigoureusement dans la référence [226]). Dans le cas contraire, les fluctuations de $\lambda_{\max}$ sont décrites par une loi de Fréchet (7.12) : ce résultat a ensuite été prouvé rigoureusement dans la référence [227].

Ces résultats pour la distribution des plus grandes valeurs propres de matrices aléatoires sont intéressants pour eux-mêmes mais un certain nombre de travaux récents, tant en mathématique qu'en physique ont montré que ces distributions de Tracy-Widom dépassaient largement le domaine des matrices aléatoires. Une succession assez remarquable de travaux ont en effet montré que ces distributions apparaissent dans des domaines très variés allant de la combinatoire en passant par des problèmes de croissance stochastique ou à des problèmes d'alignement de séquences d'ADN.

1. En 1999, dans un papier fondateur, Baik, Deift et Johansson [228] ont montré que la distribution de Tracy-Widom $\mathcal{F}_2$ décrit la statistique de la plus longue sous-séquence croissante d'une permutation aléatoire (connu aussi sous le nom de problème de Ulam [229]). Soit donc l'ensemble des n premiers entiers $\{1, 2, \dots, n\}$ et considérons les $n!$ permutations possibles de ces n entiers. Pour

7.3 Quelques exemples fondamentaux de variables aléatoires fortement corrélées

une permutation donnée de ces entiers, on identifie toutes les sous-séquences croissantes (et dont les termes ne sont pas forcément consécutifs). Par exemple pour $n = 6$, on considère la permutation $\{2, 1, 3, 4, 6, 5\}$. Dans cette permutation, on identifie plusieurs sous-séquences croissantes telles que $\{2, 3\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{3, 4, 5\}$. Les plus longues de ces sous-séquences sont $\{2, 3, 4, 6\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 3, 4, 6\}$ et $\{1, 3, 4, 5\}$. La longueur l_n de la plus longue sous-séquence croissante (LIS pour *longest increasing subsequence*) est donc une variable aléatoire, $l_n = 4$ dans le cas présenté ici. Si l'on considère une mesure uniforme sur l'ensemble des permutations, quelle est la distribution de l_n ? Dans ce papier de 1999 [228] Baik, Deift et Johansson ont obtenu la distribution complète de l_n et ils ont montré que pour $n \rightarrow \infty$, $l_n \rightarrow 2\sqrt{n} + n^{1/6}\chi$ où la variable aléatoire χ_2 est distribuée selon la distribution de Tracy-Widom $\mathcal{F}_2$, *i.e.* $\Pr[\chi_2 \leq \xi] = \mathcal{F}_2(\xi)$. Nous renvoyons à l'article de revue de Aldous et Diaconis [230] et les notes de cours de Majumdar [231] pour plus de détail au sujet de ce problème fascinant.

2. Juste après, Johansson [221] et, indépendamment, Baik et Rains [232] ont montré que cette même distribution $\mathcal{F}_2$ apparaît dans une classe de modèle de polymères dirigés en milieu aléatoire.
3. A peu près au même moment, Prähofer et Spohn [233] ont montré que les distributions $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_1$ apparaissent dans un modèle stochastique de croissance sur un substrat unidimensionnel appelé “Polynuclear Growth Model” (PNG) (Figs. 10.3 et 10.4). Ce modèle est particulièrement intéressant puisqu'il est dans la classe d'universalité de Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) [170] en dimension $1 + 1$. Suite à ces résultats sur le modèle PNG, un certain nombre de travaux ont montré que ces distributions $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_1$ apparaissent également dans d'autres modèles de croissance dans l'universalité de KPZ, comme dans l'automate cellulaire connu sous le nom de “oriented digital boiling” [234], le modèle de déposition ballistique [235] ou bien encore des variantes du modèle PNG [236]. Ces différents résultats semblent confirmer que les fluctuations d'interface en dimension $1 + 1$ dont la dynamique est décrite par l'équation KPZ sont décrites par ces distributions de Tracy-Widom. Ces différents résultats ont été essentiellement obtenus en mettant en évidence une correspondance entre ces modèles de croissance et la statistique de la plus longue sous-séquence d'une permutation aléatoire. Une fois cette correspondance établie on peut ensuite utiliser le résultat de Baik, Deift et Johansson [228] et obtenir ces distributions de Tracy-Widom. Par ailleurs, les travaux de Spohn et de ses collaborateurs sur les processus ponctuels déterminantaux ont montré des liens directs entre les modèles de croissance PNG et le mouvement Brownien de Dyson. Ils ont en effet montré que le processus qui décrit les fluctuations de hauteur dans ces modèles, baptisé processus d'Airy, est le même processus qui décrit la dynamique de la plus grande valeur propre du mouvement Brownien de Dyson (ou marcheurs aléatoires répulsifs) [233]. Nous reviendrons en détail sur cette connexion plus directe entre modèle de croissance et matrices aléatoires au chapitre 10.
4. Parallèlement, en 2002, Johansson a montré [241] que la distribution de Tracy-Widom apparaît dans un problème classique de combinatoire : le pavage du

“diamant aztèque” par des dominos. Un diamant aztèque d’ordre n , $\mathcal{A}_n$ est l’ensemble des cases carrées $[m, m+1] \times [l, l+1]$ où $m, n \in \mathbb{Z}$ qui sont à l’intérieur de la région du plan $\{(x, y) : |x| + |y| \leq n+1\}$. Sur la figure 7.6 on a représenté

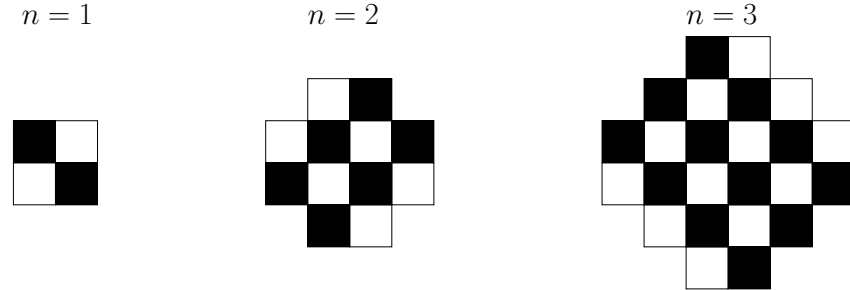


FIGURE 7.6.: Diamants aztèques pour $n = 1, n = 2$ et $n = 3$. Les cases du diamant ont été “artificiellement” coloriées en échiquier afin de mieux comprendre l’organisation du pavage.

les diamants Aztèques d’ordre $n = 1, 2, 3$. Les dominos, à l’aide desquels on veut paver (sans qu’ils ne se chevauchent) ce diamant sont, eux, des rectangles de taille 1×2 ou 2×1 (Fig. 7.7). On peut montrer qu’il y a $2^{n(n+1)/2}$ façons



FIGURE 7.7.: Les deux façons de paver le diamant d’ordre $n = 1$ (voir Fig. 7.6) avec les types de dominos 2×1 considérés ici (verticaux ou horizontaux). On différencie les dominos verticaux recouvrant une case blanche en haut ou en bas (et de même pour les horizontaux selon que la case blanche est à droite ou à gauche).

différentes de paver un diamant d’ordre n [237]. Pour cette géométrie particulière du diamant aztèque il existe un algorithme, dit “algorithme de glissement de dominos” (*domino shuffling*) [238] qui permet non seulement d’énumérer ces pavages mais aussi de construire un générateur aléatoire (uniforme ou non) de pavages du diamant. Sur la figure 7.8, on peut voir un pavage typique pour $n = 100$ dans le cas où ces pavages sont générés uniformément. On observe que, au centre du diamant, le pavage est désordonné (c’est la région *tempérée*) tandis que, près des bords, les dominos sont tous gelés dans le même sens (c’est la *région polaire*). Un théorème dû à Jockush, Propp et Shor [239] établit que, dans la limite $n \rightarrow \infty$, la frontière entre ces deux régions converge vers un cercle (c’est le théorème du cercle arctique). Bien sûr pour n grand mais fini cette frontière fluctue autour de ce cercle. Un résultat remarquable, dû à Johansson [241], est que ces fluctuations sont décrites par la distribution de Tracy-Widom $\mathcal{F}_2$. Notons qu’il s’agit d’un modèle où les conditions aux bords ont des conséquences macroscopiques sur le comportement de ce système, ce qui

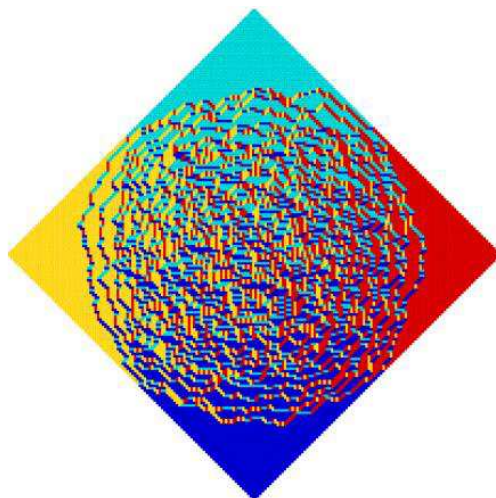


FIGURE 7.8.: Pavage d'un diamant pour $n = 100$ réalisé à l'aide de l'algorithme du glissement de dominos (prise de la référence [240]). Le code de couleur est expliqué en Fig. 7.7.

est assez peu courant en mécanique statistique. Ce phénomène est d'ailleurs absent dans d'autres géométries comme le carré par exemple. Terminons ce paragraphe sur le pavage du diamant aztèque en mentionnant qu'il existe une bijection entre ce problème et la mécanique statistique d'interfaces élastiques en dimension $2+1$ [33, 242, 243]. On notera que cet algorithme de déplacement de dominos, qui est un algorithme polynomial, a d'ailleurs été utilisé pour étudier la thermodynamique du modèle SOS sur un substrat désordonné décrit dans la première partie de ce manuscrit (1.1).

5. Finalement un peu après, Majumdar et Nechaev ont montré que la distribution de Tracy Widom $\mathcal{F}_2$ apparaît dans un problème bien connu d'alignement de séquences d'ADN [244]. Nous renvoyons le lecteur à l'article de revue [231] pour plus de détails sur ce problème.

Ces quelques travaux fondateurs ont donné lieu à une véritable "avalanche" de publications et nous renvoyons le lecteur à plusieurs articles de revues récents en mathématique [212, 245, 246], en informatique théorique [247], en finance [218] et en physique statistique [231, 248].

Extrêmes de marches aléatoires : une approche par le groupe de renormalisation dans l'espace réel

8

Comme nous l'avons vu en introduction, l'exemple le plus important de variables aléatoires fortement corrélées est sans doute la marche aléatoire (7.18) et sa contrepartie en temps continu, le mouvement Brownien (7.39). Et bien que le mouvement Brownien (unidimensionnel) ait déjà été abondamment étudié dans la littérature [80, 249, 250], il y a, depuis quelques années, un vif intérêt pour l'étude des fonctionnelles du mouvement Brownien, et tout particulièrement dans le contexte des statistiques d'extrêmes [163, 164, 165, 189, 162, 202, 251]. Si l'on considère donc un Brownien $x(t)$ sur l'intervalle $x \in [0, T]$, et partant de 0 à l'instant initial $x(0) = 0$, il atteint son maximum $X_{\max}$ au temps $t = t_M$ (voir Fig. 7.3 où le nombre de pas N correspond à T). Jusqu'à maintenant, on s'est essentiellement intéressé à la distribution du maximum $F_T(M) = \Pr[X_{\max} \leq M]$. Dans ce chapitre, nous obtiendrons une description plus fine de la statistique des extrêmes de marches aléatoires en considérant la *distribution jointe* $P_T(M, t_M)$ du maximum et du temps auquel il est atteint sur l'intervalle fixé $[0, T]$. Par exemple, pour un Brownien libre, la distribution marginale de t_M , $\mathcal{P}_T(t_M)$, est donnée par $\mathcal{P}_T(t_M) = \frac{1}{\pi} t_M^{-1/2} (T - t_M)^{-1/2}$: sa fonction de répartition est donc donnée par $\Pr(t_m \leq t) = \frac{2}{\pi} \sin^{-1}(\sqrt{t/T})$, qui est la célèbre loi de l'arcsinus de Lévy [252]. Ces résultats pour le mouvement Brownien, et ses variantes telles que le pont Brownien, l'excursion, le méandre ou le Brownien réfléchi (voir Fig. 7.4) peuvent être obtenus de façon très élégante en utilisant les méthodes d'intégrale de chemin [202], que l'on a exposées précédemment dans le paragraphe 7.3.2.

Le but de ce chapitre est d'exposer une méthode alternative, le groupe de renormalisation dans l'espace réel, pour l'étude de la statistique d'extrêmes de processus stochastiques unidimensionnels. Une bonne partie des résultats présentés dans ce chapitre sont publiés dans la Ref. [253].

8.1. Introduction à la méthode de renormalisation dans l'espace réel

Le groupe de renormalisation dans l'espace réel (RSRG pour *Real Space Renormalization Group*), dit renormalisation à la Ma-Dasgupta, a initialement été proposé pour étudier les chaînes de spin quantiques désordonnées [254, 255, 256, 257]. Cette méthode a ensuite été appliquée [258] au modèle de Sinai [259], *i.e.* la dynamique acti-

8.1 Introduction à la méthode de renormalisation dans l'espace réel

vée d'une particule dans un potentiel aléatoire $V(x)$ qui est lui-même un mouvement Brownien. On peut décrire les idées de la renormalisation de type Ma-Dasgupta de la façon suivante [261]. Considérons un système décrit par une collection de variables aléatoires z_i , $1 \leq i \leq N$, qui ont des relations de voisinage données dans l'espace physique, par exemple un réseau hyper-cubique d -dimensionnel. La renormalisation consiste à décimer de manière itérative la plus petite valeur $z_{\min} = \min_{1 \leq i \leq N} z_i$ (et éventuellement une partie de son voisinage) afin de reconstruire une nouvelle collection de variables aléatoires z'_i , $1 \leq i \leq N' < N$, reliées par de nouvelles relations de voisinage dans l'espace physique. Par exemple, pour le modèle de Sinai en dimension $d = 1$, les variables pertinentes sont les barrières d'énergie $z_i \equiv |V(\tilde{x}_i) - V(\tilde{x}_{i+1})|$ où les $(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1})$ sont les paires de minima et maxima locaux. A une étape donnée de la décimation, indexée par l'échelle de renormalisation Γ , le paysage d'énergie ne contient plus de barrière plus petite que Γ . Bien que cette procédure de décimation ne soit qu'asymptotiquement exacte pour le modèle de Sinai (ou les chaînes de spins quantiques désordonnées évoquées ci-dessus), nous exploitons ici la propriété remarquée par Le Doussal et Monthus [260] que cette procédure de renormalisation est en fait exacte, et très puissante, pour étudier les statistiques d'extrêmes d'une large classe de processus stochastiques unidimensionnels.

Illustrons l'application de cette méthode à l'étude des extrêmes d'une marche aléatoire partant de x_0 et définie par,

$$x_n = x_{n-1} + \eta_n, \quad (8.1)$$

où les η_n sont des variables aléatoires symétriques, indépendantes et identiquement distribuées selon une densité de probabilité $\phi(\eta)$. En vue de futures applications de la méthode à des marches aléatoires contraintes (comme des "ponts" par exemple), nous considérons des marches conditionnées à terminer en x_N après N pas de temps. La première étape du RSRG consiste à identifier la position des extrêmes locaux $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{2k-1} < t_N = N$ et la position du marcheur en ces temps, $x_0 \equiv \tilde{x}(t_0), \tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_N) \equiv x(N)$ (Fig. 8.1). La mesure "initiale" de la marche aléatoire peut alors s'écrire comme la somme des probabilités que la marche ait k extrêmes locaux $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ situés en $t_1, \dots, t_k$ [260]. A partir de ces variables, on définit les *longueurs des liens* $\ell_i = t_i - t_{i-1}$ ainsi que les *barrières* $F_i = |\tilde{x}(t_{i+1}) - \tilde{x}(t_i)|$ (Fig. 8.2). La seconde étape du RSRG est une étape de décimation où l'on élimine progressivement les plus petites barrières de la marche de telle sorte qu'à l'échelle de renormalisation Γ il n'y ait plus de barrières plus petites que Γ (et initialement $\Gamma = 0$). Cette étape de décimation consiste donc à réduire itérativement la liste des extrêmes en éliminant une paire d'extrêmes voisins correspondant à la plus petite barrière dans le système lorsque l'échelle de renormalisation Γ croise cette valeur, agrégeant ainsi 3 liens en un seul (Fig. 8.2). Si l'on dénote par F_1, F_2, F_3 et ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 les barrières et les longueurs des liens concernées ($F_2 \equiv \Gamma$ étant alors la plus petite barrière dans le système), les nouvelles variables de ce lien sont données par les règles de décimation suivantes (voir Fig. 8.2)

$$F = F_1 - F_2 + F_3, \quad \ell = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3. \quad (8.2)$$

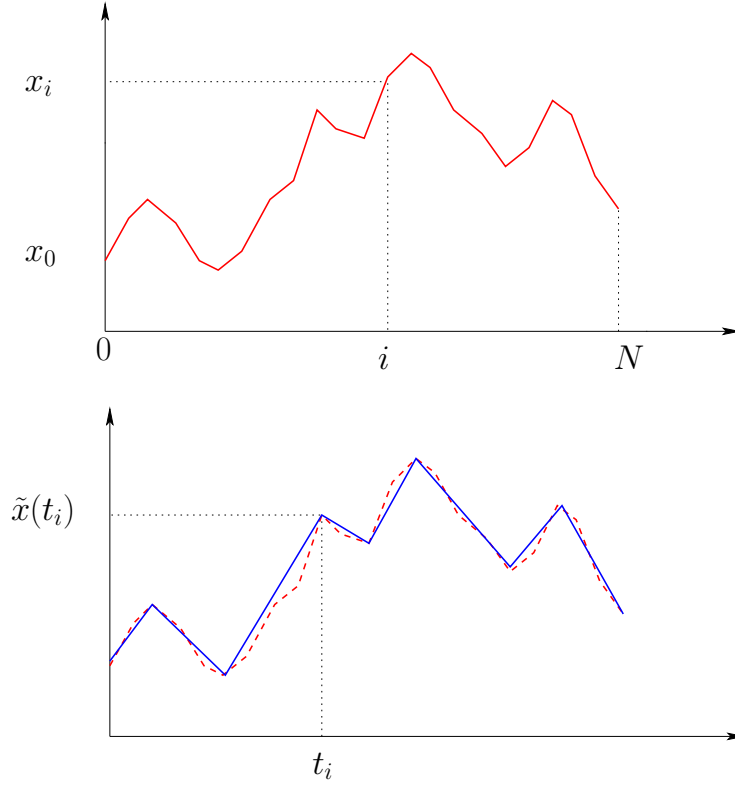


FIGURE 8.1.: Première étape du RSRG : identification des minima et maxima locaux.

Pour décrire mathématiquement cette procédure de décimation, nous considérons une marche aléatoire alternée ("en zig-zag"), résultant de la première étape de RSRG (voir Fig. 8.1). Il est facile de voir que cette structure en zig-zag est préservée sous renormalisation (Fig. 8.2). Par ailleurs, et sans perte de généralité [260], nous nous restreignons à une marche telle que x_0 et x_N soient tous deux des minima locaux : la marche est donc formée par un nombre pair de liens ($N = 2K$) où les minima sont indexés par $\tilde{x}(2k)$ et les maxima par $\tilde{x}(2k + 1)$. Notons que dans ce processus de décimation, les deux liens du bord (*i.e.* connectés à x_0 et x_N) jouent un rôle particulier puisqu'ils ne peuvent pas être décimés : leur longueur ne peut que croître à mesure que leurs plus proches voisins sont décimés. Initialement, la marche est Markovienne et il est facile de voir que cette propriété est préservée lors du processus de décimation. Ainsi à l'échelle de renormalisation Γ , la mesure de la marche (dite

8.1 Introduction à la méthode de renormalisation dans l'espace réel

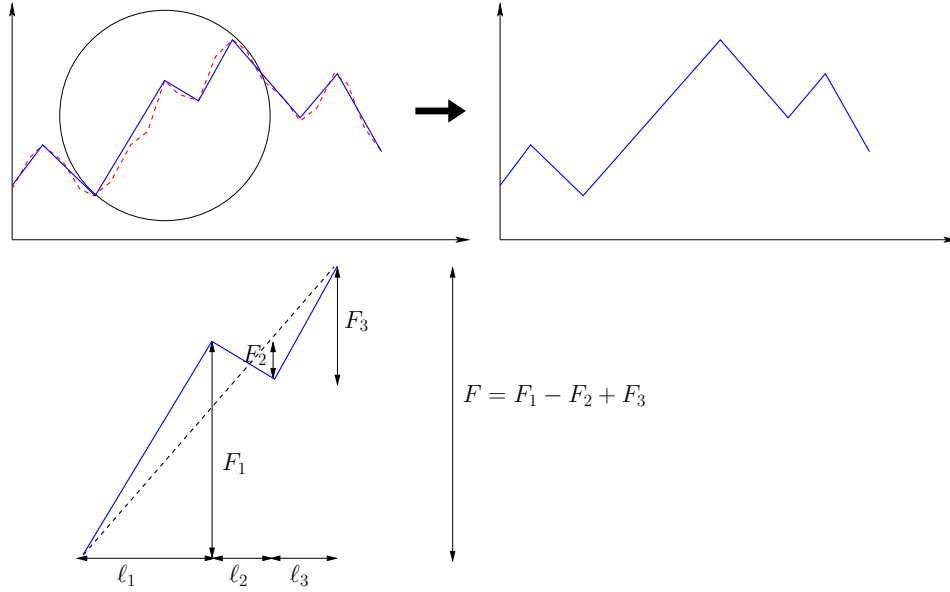


FIGURE 8.2.: Deuxième étape du RSRG : décimation.

”mesure de taille finie”) s’écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{L,\Gamma}[u] = & \bar{l}_\Gamma E_\Gamma(F_1, \ell_1) E_\Gamma(F_2, \ell_2) \delta(N - (\ell_1 + \ell_2)) \delta(x_N - (x_0 + F_1 - F_2)) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{l}_\Gamma E_\Gamma(F_1, \ell_1) \prod_{j=2}^{2k+1} P_\Gamma(F_j, \ell_j) E_\Gamma(F_{2k+2}, \ell_{2k+2}) \delta(N - \sum_{i=1}^{2k+2} \ell_i) \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\times \delta(x_N - (x_0 + \sum_{j=1}^{2k+2} (-1)^{j+1} F_j)) . \quad (8.4)$$

Dans cette expression (8.3), $P_\Gamma(F, \ell)$, respectivement $E_\Gamma(F, \ell)$, est la distribution de probabilité (p.d.f. pour *probability distribution function*) jointe de la barrière F et de la longueur ℓ du lien pour un lien du ”coeur”, respectivement pour un lien du bord, de la marche à l’échelle de renormalisation Γ (pour simplifier les calculs nous considérons une distribution continue des variables ℓ_i). La p.d.f. jointe $P_\Gamma(F, \ell)$ correspond donc à la probabilité pour que le marcheur partant de 0 à l’instant initial arrive en F à l’instant ℓ , tout en restant dans l’intervalle $[0, F[$ et en n’effectuant pas de retour de plus de Γ . La p.d.f. jointe $E_\Gamma(F, \ell)$ correspond à la même probabilité mais pour un marcheur contraint à rester dans l’intervalle $] - \infty, F[$. Par ailleurs, $\bar{l}_\Gamma = \Gamma^2$, qui est la longueur moyenne des liens, assure la normalisation de la mesure (8.3). Cette mesure de taille finie (8.3) est donc la somme des probabilités pour que la marche renormalisée à l’échelle Γ , aient $2k + 2$ liens, *i.e.* k ”vallées” constituées de liens du coeur et 2 liens du bord, avec $k = 0, 1, \dots$. Pour N fini et Γ arbitrairement grand, il ne reste que le terme $k = 0$ dans cette somme (8.3). Cette propriété traduit simplement le fait que, pour N fini, le processus de décimation en Fig. 8.2 s’arrête

lorsqu'il ne reste plus que deux liens, en l'occurrence ces deux liens du bord : on a alors directement accès au maximum et à sa position (voir plus bas).

La forme factorisée de chacun des termes de cette somme (8.3) reflète le caractère Markovien de la marche aléatoire étudiée. Cette propriété d'indépendance statistique entre les liens de la marche aléatoire permet d'écrire des équations de renormalisation (équation d'évolution) relativement simples pour $P_\Gamma(F, \ell)$ et $E_\Gamma(F, \ell)$. Dans le cas d'une marche symétrique ces équations s'écrivent, en introduisant $\tilde{P}_\Gamma(\zeta, \ell) = P_\Gamma(\zeta + \Gamma, \ell)$, avec $\zeta \geq 0$:

$$(\partial_\Gamma - \partial_\zeta)\tilde{P}_\Gamma(\zeta, \ell) = \int_{\ell_1+\ell_2+\ell_3=\ell} \tilde{P}_\Gamma(0, \ell_2) \int_0^\zeta d\zeta' \tilde{P}_\Gamma(\zeta', \ell_1) \tilde{P}_\Gamma(\zeta - \zeta', \ell_3) , \quad (8.5)$$

et pour le lien du bord

$$\begin{aligned} \partial_\Gamma E_\Gamma(F, \ell) &= -\tilde{P}_\Gamma(0) E_\Gamma(F, \ell) \\ &+ \int_{\ell_1+\ell_2+\ell_3=\ell} \int_0^\infty dF_1 \int_0^\infty d\zeta_3 E_\Gamma(F_1, \ell_1) \tilde{P}_\Gamma(0, \ell_2) \tilde{P}_\Gamma(\zeta_3, \ell_3) \delta(F - (F_1 + \zeta_3)) , \end{aligned} \quad (8.6)$$

avec

$$\tilde{P}_\Gamma(0) = \int_0^\infty \tilde{P}_\Gamma(0, \ell) d\ell . \quad (8.7)$$

Ces équations d'évolution possèdent a priori plusieurs points fixes (dans la limite $\Gamma \rightarrow \infty$) associés à différents types de diffusion. Le point fixe associé au mouvement Brownien a déjà été étudié en détail dans la littérature. Dans les deux premières sections qui suivent, nous exploitons ces solutions pour obtenir des résultats sur la distribution des extrêmes (i) de mouvements Browniens contraints puis (ii) de processus de Bessel. Dans la dernière partie, nous montrons l'existence d'un nouveau point fixe de ces équations qui décrit la marche aléatoire en temps continu (CTRW pour Continuous Time Random Walk).

8.2. Les résultats standards du Brownien

Le point fixe associé à un mouvement Brownien de constante de diffusion D a la forme d'échelle suivante

$$\tilde{P}_\Gamma(\zeta, \ell) = \Gamma^{-3} Q\left(\eta \equiv \frac{\zeta}{\Gamma}, \lambda \equiv D \frac{\ell}{\Gamma^2}\right) , \quad E_\Gamma(F, \ell) = \Gamma^{-3} R\left(\eta \equiv \frac{F}{\Gamma}, \lambda \equiv D \frac{\ell}{\Gamma^2}\right) , \quad (8.8)$$

où les fonctions Q et R ont les expressions suivantes

$$Q(\eta, p) = \int_0^\infty e^{-p\lambda} Q(\eta, \lambda) d\lambda = a(p) e^{-\eta b(p)} , \quad (8.9)$$

$$R(\eta, p) = \int_0^\infty e^{-p\lambda} R(\eta, \lambda) d\lambda = e^{-\eta b(p)} , \quad (8.10)$$

où les fonctions $a(p)$ et $b(p)$ sont données par

$$a(p) = \frac{\sqrt{p}}{\sinh(\sqrt{p})} , \quad b(p) = \sqrt{p} \coth(\sqrt{p}) . \quad (8.11)$$

8.2 Les résultats standards du Brownien

A partir de ces expressions (8.8), nous pouvons maintenant calculer la pdf jointe $P_N(M, t_M, x_N)$ pour qu'un mouvement Brownien libre, terminant en x_N atteigne son maximum M au temps t_M . Pour établir le lien avec les résultats présentés précédemment, nous choisissons ici et dans la suite $D = 1/2$. Au vue de ce qui a été dit précédemment, cette pdf est donnée par le dernier "bloc", correspondant donc au terme $k = 0$ dans la mesure de taille finie (8.3), c'est-à-dire

$$P_N(M, t_M, x_N) = \lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \Gamma^2 E_\Gamma(M, t_M) E_\Gamma(M - x_N, N - t_M), \quad (8.12)$$

En utilisant l'expression pour le lien du bord (8.9), on obtient, dans la limite $\Gamma \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \Gamma E_\Gamma(F, p) = e^{-F\sqrt{2p}}, \quad (8.13)$$

qui donne, en effectuant une transformée inverse de Laplace :

$$\lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \Gamma E_\Gamma(F, \ell) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{F}{\ell^{3/2}} e^{-F^2/(2\ell)}. \quad (8.14)$$

Ainsi en utilisant l'Eq. (8.12) et l'expression pour le lien du bord en Eq. (8.14) nous obtenons

$$P_N(M, t_M, x_N) = \frac{2}{\pi} \frac{M(M - x_N)}{t_m^{3/2} (N - t_M)^{3/2}} e^{-\frac{M^2}{2t_M} - \frac{(M - x_N)^2}{2(N - t_M)}} \theta(M - x_N) \theta(M). \quad (8.15)$$

En intégrant cette expression (8.15) sur la position finale x_N , on obtient la distribution jointe de x_m et t_m pour un Brownien libre :

$$P_N^{\text{free}}(M, t_M) = \int_{-\infty}^M dx_N P_N(M, t_M, x_N) = \theta(M) \frac{M}{\pi \sqrt{N - t_M} t_M^{3/2}} e^{-\frac{M^2}{2t_M}}. \quad (8.16)$$

En intégrant cette expression sur t_M on en déduit la distribution marginale du maximum, mentionnée précédemment en Eq. (7.35) ainsi que la distribution marginale de la position du maximum t_M

$$\mathcal{P}_N^{\text{free}}(t_M) = \frac{1}{N} \tilde{\mathcal{P}}^{\text{free}}\left(\frac{t_M}{N}\right), \quad \tilde{\mathcal{P}}^{\text{free}}(t) = \frac{1}{\pi \sqrt{t(1-t)}}, \quad (8.17)$$

qui est la fameuse loi d'arcsinus de Lévy [252].

A partir de l'Eq. (8.15) nous obtenons également le résultat pour le pont Brownien, où $x_N = 0$ (Fig. 7.4 a)) :

$$\begin{aligned} P_N^{\text{bridge}}(M, t_M) &= \frac{P_N(M, t_M, x_N = 0)}{\int_0^\infty dx_N \int_0^N dx_N P_N(M, t_M, x_N = 0)} \\ &= \theta(M) \sqrt{\frac{2N}{\pi}} \frac{M^2}{t_M^{3/2} (N - t_M)^{3/2}} e^{-\frac{NM^2}{2t_M(N - t_M)}}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

On en déduit aisément la distribution marginale du maximum x_m et de sa position t_m

$$\mathcal{P}_N^{\text{bridge}}(x_m) = \frac{1}{N^{1/2}} \tilde{\mathcal{P}}^{\text{bridge}}\left(\frac{x_m}{N^{1/2}}\right), \quad \tilde{\mathcal{P}}^{\text{bridge}}(x) = \theta(x) 4x e^{-2x^2}, \quad (8.19)$$

$$\mathcal{P}_N^{\text{bridge}}(t_m) = \frac{1}{N}. \quad (8.20)$$

Ce paragraphe montre donc que cette méthode de RSRG permet de retrouver les résultats standard du Brownien libre (8.15) et du pont Brownien (8.18). Cette même méthode peut être adaptée pour étudier les statistiques d'extrêmes d'autres mouvements Browniens contraints, comme le méandre Brownien ou le mouvement Brownien réfléchi [253].

8.3. Processus de Bessel

Cette méthode permet également d'obtenir des résultats exacts pour les statistiques d'extrêmes du *processus de Bessel* $R_d(t)$, qui est le rayon du mouvement Brownien d -dimensionnel,

$$R_d(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2(t)}, \quad (8.21)$$

où les processus $x_i(t)$ sont des Browniens identiques, de coefficient de diffusion D et tels que $x_i(0) = 0$, et indépendants. $R_d(t)$ est alors le processus de Bessel d'indice d . En adoptant la règle de lecture d'Itô, on montre que $R_d(t)$ satisfait l'équation de Langevin

$$\dot{R}_d(t) = \frac{d-1}{R_d(t)} + \zeta(t), \quad (8.22)$$

où $\zeta(t)$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance $\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$ et dans la suite, on pose $D = 1/2$. En s'appuyant sur les travaux de Le Doussal et Monthus [260], nous avons montré comment le RSRG permet de calculer la distribution jointe du maximum M et de sa position t_M . Ici nous ne donnons que les résultats principaux, en nous restreignant au pont de Bessel de taille N , *i.e.* un processus de Bessel (8.22) conditionné à revenir à l'origine après un temps N . Il se trouve en effet que la distribution du maximum $\mathcal{P}_N(M)$ pour un pont de Bessel a été beaucoup étudiée en théorie des probabilités et en statistiques, en particulier dans le contexte de généralisation du test de Kolmogorov-Smirnov discuté précédemment (7.48) et qui, lui, met en jeu la distribution du maximum du pont de Bessel pour $d = 1$ (7.50). La distribution marginale $\mathcal{P}_N(M)$ a été tout d'abord obtenue par Gikhman [262] et Kiefer [263], indépendamment, pour d entier. Bien après, ce résultat a été généralisé par Pitman et Yor pour d quelconque [264]. En revanche, il existe à notre connaissance beaucoup moins de résultats pour la distribution $\mathcal{P}_N(t_M)$ de l'instant t_M auquel ce maximum est atteint.

8.4 Marche aléatoire en temps continu (CTRW)

Nous avons obtenu, en particulier, la distribution jointe de x_m et t_m pour un processus de Bessel sous la forme explicite [253] :

$$P_N^{\text{Bessel bridge}}(M, t_M) = \frac{8N^{\nu+1}}{\Gamma(1+\nu)M^{5+2\nu}} \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{j_{\nu,k}^{\nu+1} j_{\nu,l}^{\nu+1}}{J_{\nu+1}(j_{\nu,k}) J_{\nu+1}(j_{\nu,l})} e^{-\frac{j_{\nu,k}^2 t_M}{M^2}} e^{-\frac{j_{\nu,l}^2 (N-t_M)}{M^2}}, \quad (8.23)$$

avec $\nu = -1 + d/2$ et où $0 < j_{\nu,1} < j_{\nu,2} < \dots$ sont les zéros positifs de la fonction de Bessel J_ν .

En intégrant cette expression (8.23) sur t_M (et après quelques manipulations [253]), on retrouve la distribution du maximum [262, 263, 264]

$$\begin{aligned} P_N^{\text{Bessel bridge}}(M) &= \frac{1}{N^{1/2}} \tilde{P}^{\text{Bessel bridge}}\left(\frac{M}{N^{1/2}}\right) \\ \tilde{P}^{\text{Bessel bridge}}(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{4}{\Gamma(\nu+1)x^{2\nu+2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{\nu,n}^{2\nu}}{J_{\nu+1}^2(j_{\nu,n})} \exp\left(-\frac{j_{\nu,n}^2}{x^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (8.24)$$

En particulier pour $d = 1$, où $\nu = -1/2$ et $j_{-1/2,n} = (n + \frac{1}{2})\pi$, cette expression (8.24) redonne bien le résultat pour le mouvement Brownien réfléchi (7.50). Par ailleurs si on intègre (8.23) sur x_m , on obtient le résultat pour la distribution marginale de t_M sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N^{\text{Bessel bridge}}(t_M) &= \frac{1}{N} \tilde{\mathcal{P}}^{\text{Bessel bridge}}\left(\frac{t_M}{N}\right) \\ \tilde{\mathcal{P}}^{\text{Bessel bridge}}(t) &= 4(1+\nu) \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{j_{\nu,k}^{\nu+1} j_{\nu,l}^{\nu+1}}{J_{\nu+1}(j_{\nu,k}) J_{\nu+1}(j_{\nu,l}) \left[j_{\nu,k}^2 t + j_{\nu,l}^2 (1-t) \right]^{\nu+2}}, \end{aligned} \quad (8.25)$$

et l'on peut en principe obtenir des formules analogues pour des processus de Bessel libres.

8.4. Marche aléatoire en temps continu (CTRW)

Nous en venons maintenant aux statistiques d'extrêmes pour la marche aléatoire en temps continu (CTRW pour *Continuous Time Random Walks*), qui a été introduite par Montroll et Weiss [265]. Dans ce modèle, la particule effectue une marche aléatoire comme dans l'Eq. (8.1) décrite plus haut mais elle attend un certain "temps de piégeage" τ avant chaque saut. Ce temps de piégeage est lui-même une variable aléatoire distribuée selon une loi $\psi(\tau)$ large, caractérisée par une queue algébrique $\psi(\tau) \propto \tau^{-1-\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$, tandis que les sauts eux-mêmes, les variables aléatoires η_m dans l'Eq. (8.1), gardent une distribution étroite. Ce type de modèle a été initialement suggéré par Scher et Montrol [266] pour modéliser les propriétés de transport électronique dans les matériaux désordonnés et depuis ces marches aléatoires ont été beaucoup utilisées pour modéliser, phénoménologiquement, des propriétés de diffusions anormales dans différents systèmes complexes [267, 268]. En effet, pour $\alpha < 1$, le temps de moyen de piégeage est infini et donc la CTRW est caractérisée par un

comportement sous-diffusif avec un exposant dynamique $z = 2/\alpha > 1$ ainsi que des fluctuations non-Gaussiennes. Bien que les CTRW aient été abondamment étudiées dans la littérature, il semble que les statistiques d'extrêmes de ces marches aléatoires n'aient pas vraiment été analysées.

Dans la publication [253], nous avons montré que les CTRW sont décrites par un nouveau point fixe du RSRG, indexé par α et qui s'obtient assez simplement à partir du point fixe décrivant la marche aléatoire Brownienne (8.8). À partir de ces solutions de point fixe, nous avons obtenu, d'une façon similaire à l'Eq. (8.12), quoique légèrement différente, la distribution jointe $P_N^{\text{free}}(M, t_M)$ du maximum M et de sa position t_M pour une CTRW libre sur un intervalle de temps $[0, N]$:

$$P_N^{\text{free}}(M, t_M) = \theta(M)\theta(N - t_M) \frac{1}{\Gamma[1 - \nu]} \frac{1}{M^{1/\nu}(N - t_M)^\nu} \mathcal{L}_\nu \left(\frac{t_M}{N^{1/\nu}} \right). \quad (8.26)$$

où $\nu = \alpha/2$. Cette expression (8.26) fait intervenir la loi (stable) de Lévy tronquée d'indice ν , $\mathcal{L}_\nu(x)$, dont la transformée de Laplace est donnée par $\int_0^\infty e^{-px} \mathcal{L}_\nu(x) dx = e^{-p^\nu}$, dont on trouvera quelques propriétés intéressantes dans notre article [253].

À partir de l'Eq. (8.26) on obtient la distribution marginale de t_M sous la forme relativement simple

$$\mathcal{P}_L^{\text{free}}(t_m) = \frac{1}{N} \tilde{\mathcal{P}}^{\text{free}} \left(\frac{t_m}{N} \right), \quad \tilde{\mathcal{P}}^{\text{free}}(t) = \frac{\sin \nu \pi}{\pi} \frac{1}{t^{1-\nu}(1-t)^\nu}, \quad (8.27)$$

qui dans la littérature est connue sous le nom de distribution d'arcsinus généralisée. De même on obtient la distribution marginale du maximum M sous la forme

$$P_T^{\text{free}}(M) = \frac{1}{N^\nu} \tilde{\mathcal{P}}^{\text{free}} \left(\frac{M}{N^\nu} \right), \quad \tilde{\mathcal{P}}^{\text{free}}(x) = \theta(x) \frac{1}{\nu} x^{-(1+1/\nu)} \mathcal{L}_\nu \left(x^{-1/\nu} \right). \quad (8.28)$$

Ces méthodes de renormalisation dans l'espace réel sont donc très puissantes pour étudier les statistiques d'extrêmes de marches aléatoires. Bien sûr il serait très intéressant d'étendre ces méthodes à d'autres processus. Une extension naturelle des résultats présentés ici concernerait les marches aléatoires de Lévy. Des progrès dans cette direction permettraient également de mieux comprendre une extension du modèle Sinai où une particule diffuse dans un potentiel qui est lui-même une marche aléatoire de Lévy, pour laquelle il existe aujourd'hui très peu de résultats.

Interface élastique et distribution d'Airy

9

Les statistiques d'événements rares et extrêmes dans les systèmes spatialement étendus ont été récemment l'objet d'un vif intérêt. C'est en particulier le cas d'interfaces élastiques en dimension $1+1$ dans la classe d'universalité d'Edwards-Wilkinson [269] et de Kardar-Parisi-Zhang [170]. Par exemple les propriétés de persistance spatiale et temporelle dans ces systèmes ont été abondamment étudiées à la fois théoriquement [147, 148, 270, 271, 272] et expérimentalement [273], notamment grâce aux techniques de STM (Scanning Tunneling Microscope). Un autre exemple intéressant concerne par exemple la statistique des intensités spectrales extrêmes des modes de Fourier d'une interface Gaussienne [274]. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à une quantité extrême encore différente et considérons la statistique de la hauteur relative maximale (MRH pour *maximal relative height*). La hauteur relative signifie ici la hauteur mesurée par rapport à la moyenne spatiale du champ de hauteur pour des interfaces fluctuantes dans leur état stationnaire. Cette question, initialement soulevée et étudiée numériquement dans la Ref. [275] a ensuite été résolue exactement pour le modèle d'une interface Gaussienne par S. N. Majumdar et A. Comtet [163, 164]. Depuis, cette question a suscité de nombreux travaux [165, 276, 277, 278, 251, 279].

Un des modèles les plus simples d'interface fluctuante est le modèle d'Edwards-Wilkinson [269] en dimension $1+1$ où le champ de hauteur $H(x, t)$ au point x et à l'instant t évolue selon une équation de diffusion en présence d'un bruit thermique

$$\partial_t H(x, t) = \nabla^2 H(x, t) + \zeta(x, t) , \quad (9.1)$$

où $\zeta(x, t)$ est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et variance $\langle \zeta(x, t) \zeta(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t')$, *i.e.* que l'on fixe la température à $T = 1/2$. Dans la limite des grands temps, le système atteint un état stationnaire décrit par le poids de Boltzmann $P_{st} \propto \exp[-\mathcal{H}]$, avec un Hamiltonien Gaussien

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 dx , \quad (9.2)$$

où l'on dénote également par $H(x)$ le champ de hauteur de l'interface dans le régime stationnaire et par L la taille du système. Pour des conditions au bord périodiques telles que $H(0) = H(L)$, le processus $H(x)$ défini par le Hamiltonien dans l'Eq. (9.2) est simplement un pont Brownien où x joue le rôle du temps et H dénote la position du marcheur Brownien [Fig. 7.4 a)]. Ce Hamiltonien (9.2) est invariant par une

translation globale du champ de hauteur $H(x) \rightarrow H(x) + c$ où c est une constante, aussi une quantité physique plus pertinente est-elle la hauteur relative

$$h(x) = H(x) - L^{-1} \int_0^L H(x') dx' , \quad (9.3)$$

mesurée par rapport à la moyenne spatiale du champ de hauteur. Bien que le Hamiltonien du système $\mathcal{H}$ en Eq. (9.2) garde la même expression en fonction des hauteurs relatives $\mathcal{H} = (1/2) \int_0^L (\partial h / \partial x)^2 dx$, le champ $h(x)$ satisfait à une contrainte globale $\int_0^L h(x) dx = 0$. Nous allons voir que cette contrainte joue un rôle crucial dans le calcul de la distribution de la hauteur relative maximale [163, 164, 165].

On peut aisément montrer que ces variables $h(x)$ sont fortement corrélées. Par exemple, pour des conditions aux limites périodiques, la fonction de corrélation à deux points est donnée par [164]

$$C(x, L) = \langle h(x_0) h(x_0 + x) \rangle = \frac{L}{12} \left[1 - \frac{6x}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right] . \quad (9.4)$$

En particulier la largeur de l'interface est donnée par $w_L = \sqrt{\langle h^2(x) \rangle} = \sqrt{L/12}$. Ainsi l'échelle typique du champ de hauteur est donnée par $h \sim L^{1/2}$. Dans ce chapitre nous nous intéressons au maximum h_m des hauteurs relatives

$$h_m = \max_{0 \leq x \leq L} h(x) . \quad (9.5)$$

Bien sûr h_m est une variable aléatoire et la question que l'on pose ici est : *quelle est la densité de probabilité $P(h_m, L)$ de h_m ?* Et puisque les variables $h(x)$ sont ici fortement corrélées (9.4), le calcul de $P(h_m, L)$ est non trivial (cf chapitre 7).

Cette distribution $P(h_m, L)$ a tout d'abord été étudiée numériquement dans la Ref. [275] puis calculée dans les Refs. [163, 164], par une méthode d'intégrale de chemin (voir paragraphe 7.3.2) pour le modèle continu Gaussien (9.3). Pour des conditions aux bords périodiques, ils ont montré que $P(h_m, L)$ s'exprime en fonction de la distribution d'Airy $f_{\text{Airy}}(x)$. En fonction de la largeur $w_L = \sqrt{L/12}$, on a explicitement [163, 164] :

$$P(h_m, L) = \frac{1}{\sqrt{12}w_L} f_{\text{Airy}} \left(\frac{h_m}{\sqrt{12}w_L} \right) \quad (9.6)$$

$$\int_0^\infty f_{\text{Airy}}(x) e^{-sx} dx = s \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^\infty e^{-\alpha_k s^{2/3} 2^{-1/3}} , \quad (9.7)$$

où les α_k sont les amplitudes des zéros de la fonction d'Airy $\text{Ai}(z)$ sur l'axe réel négatif. Par exemple, on a $\alpha_1 = 2.3381 \dots$, $\alpha_2 = 4.0879 \dots$, $\alpha_3 = 5.5205 \dots$ etc [281]. En utilisant un résultat de Takacs [280] il est possible d'inverser la transformée de Laplace dans cette expression (9.7) pour obtenir [163, 164]

$$f_{\text{Airy}}(x) = \frac{2\sqrt{6}}{x^{10/3}} \sum_{n=1}^\infty e^{-b_n/x^2} b_n^{2/3} U(-5/6, 4/3, b_n/x^2) , \quad (9.8)$$

où $b_n = 2\alpha_n^3/27$ et $U(a, b, z)$ est une fonction hypergéométrique confluyente, de Tricomi [281]. Cette expression (9.8) est assez utile puisqu'elle peut être évaluée numériquement. Elle permet également d'obtenir le comportement de $f_{\text{Airy}}(x)$ à petit argument :

$$f_{\text{Airy}}(x) \sim \frac{8}{81} \alpha_1^{9/2} x^{-5} e^{-2\alpha_1^3/27x^2} \quad \text{quand } x \rightarrow 0. \quad (9.9)$$

Le comportement à grand argument est plus délicat à obtenir. En analysant en détail le comportement des moments M_n de la distribution d'Airy $M_n = \int_0^\infty x^n f_{\text{Airy}}(x) dx$ pour n grand on obtient [164, 282]

$$f_{\text{Airy}}(x) \sim 72 \sqrt{\frac{6}{\pi}} x^2 e^{-6x^2} \quad \text{quand } x \rightarrow \infty. \quad (9.10)$$

Notons d'ailleurs que si la transformée de Laplace de $f_{\text{Airy}}(x)$ est assez explicite, le calcul de ses moments M_n est assez difficile. Comme l'a montré Takacs [280], si l'on définit les variables K_n de la façon suivante

$$M_n = \frac{4\sqrt{\pi}n!}{\Gamma(\frac{3n-1}{2})2^{\frac{n}{2}}} K_n, \quad (9.11)$$

alors elles satisfont une relation de récurrence

$$K_n = \frac{3n-4}{4} K_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} K_j K_{n-j}, \quad (9.12)$$

avec $K_0 = -1/2$. Plus récemment, Kearney, Majumdar et Martin ont obtenu une représentation intégrale de ces moments sous la forme [284]

$$K_n = \frac{3}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{z^{\frac{3(n-1)}{2}}}{\text{Ai}^2(z) + \text{Bi}^2(z)} dz, \quad (9.13)$$

où $\text{Ai}(z)$ et $\text{Bi}(z)$ sont les fonctions d'Airy [281].

Cette distribution d'Airy a fait l'objet de nombreux travaux car il se trouve qu'elle intervient dans un certain nombre de problèmes, a priori non reliés, notamment en théorie des probabilités, en informatique théorique et en théorie des graphes [164, 283, 285, 286]. En particulier f_{Airy} décrit la distribution de l'aire sous une excursion Brownienne (Fig. 9.1). Nous rappelons qu'une excursion Brownienne $x(t)$ sur un intervalle de temps $[0, T]$ est un mouvement Brownien commençant et terminant en 0, *i.e.* $x(T) = x(0) = 0$ et conditionné à rester positif sur cet intervalle de temps [Fig. 7.4 c)]. Si l'on dénote par $A = \int_0^T x(t) dt$, il s'agit bien sûr d'une variable aléatoire et on peut montrer que la densité de probabilité de A , $P(A, T)$, est elle aussi donnée par la distribution d'Airy (9.8), *i.e.* $P(A, T) = T^{-3/2} f_{\text{Airy}}(A/T^{3/2})$ [163, 164]. Il est donc tout-à-fait remarquable que cette distribution apparaisse également dans un problème de statistique d'extrêmes d'une interface élastique Gaussienne.

Ce chapitre s'articule autour de trois aspects de mon travail relatifs à cette distribution d'Airy. Dans une première partie, je me suis intéressé à la notion d'universalité

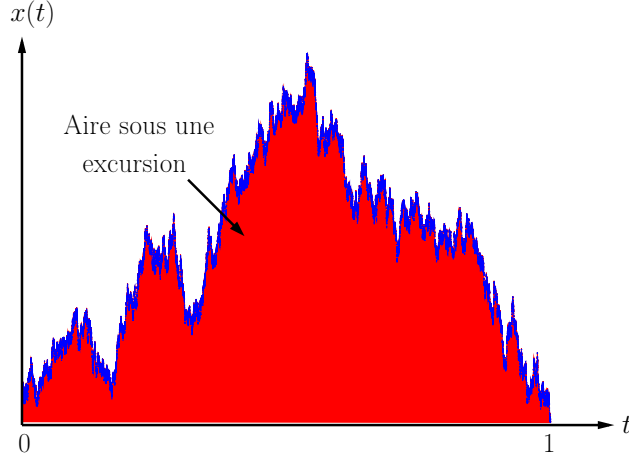


FIGURE 9.1.: Aire (en rouge) sous une excursion brownienne (en bleu).

de la distribution de h_m (9.5) au-delà du modèle Gaussien (9.2) étudié par Majumdar et Comtet. Dans une seconde partie, je mentionnerai brièvement une définition alternative de la hauteur relative (9.3) dont la distribution du maximum interpole entre la distribution de Rayleigh et la distribution d'Airy. Enfin je discuterai, dans une troisième partie, l'occurrence d'une généralisation de la distribution de la MRH à un autre modèle d'interface qui intervient, de façon inattendue, dans un problème de géométrie aléatoire, connu sous le nom de problème de Sylvester.

9.1. Universalité de la distribution d'Airy et correction de taille finie

Une question naturelle est de se demander dans quelle mesure la distribution de la MRH, $P(h_m, L)$, est universelle. Par exemple, on peut montrer que cette distribution est sensible aux conditions aux bords [164], et c'est assez naturel puisque h_m (9.5) est un maximum global sur tout le système. Donc si l'on fixe les conditions aux bords périodiques, on peut se demander combien $P(h_m, L)$ est sensible aux interactions (à courte portée) dans le Hamiltonien $\mathcal{H}$ en Eq. (9.2) caractérisant la mesure d'équilibre (*i.e.* l'état stationnaire) du système. Dans la Ref. [165], nous avons étudié, à la fois analytiquement et numériquement, une classe de modèles 'Solid-on-Solid' (SOS) unidimensionnels [287]. Le modèle SOS est défini sur un réseau dont les L sites sont indexés par un entier $i = 0, 1, \dots, L-1$ avec des conditions aux bords périodiques (de telle sorte que le site L est identifié au site 0). Le modèle à l'équilibre est donc décrit par le Hamiltonien

$$\mathcal{H}_p = K \sum_{i=0}^{L-1} |H_i - H_{i+1}|^p, \quad (9.14)$$

9.1 Universalité de la distribution d’Airy et correction de taille finie

où $H_i \in]-\infty, +\infty[$ est une variable de hauteur continue et $p > 0$ un paramètre réel positif. Ce modèle (9.14) où le champ de hauteur est continue est donc une généralisation des modèles SOS où la hauteur est discrète, décrivant différentes situations physiques lorsque l’on varie le paramètre p [287]. Par exemple, le cas $p = 1$ correspond au modèle d’Ising bi-dimensionnel dans la limite de grande anisotropie. Notons aussi que plusieurs auteurs ont étudié le cas $p = 1$, pour des hauteurs discrètes [288] ou continues [289], dans le contexte du mouillage en dimension $1 + 1$.

Commençons par présenter un argument, fondé sur le théorème de la limite centrale, qui établit l’universalité de la distribution $P(h_m, L)$ pour les modèles décrits par l’Eq. (9.14). En fait cet argument est valide pour une classe encore plus large de modèles d’interfaces avec des interactions à courte portée décrit par la Hamiltonien suivant :

$$\exp[-\mathcal{H}] \propto \prod_i g(|H_i - H_{i+1}|) , \quad (9.15)$$

où $g(x)$ est une fonction positive, paire et normalisée avec un second moment bien défini : $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)x^2 dx$. La forme factorisée du membre de droite de l’Eq. (9.15) indique que l’on peut interpréter les différences de hauteurs voisines $H_{i+1} - H_i = \xi_i$ comme des nombres aléatoires ayant une distribution jointe donnée par

$$P[\{\xi_i\}] = N_L g(\xi_1) g(\xi_2) \dots g(\xi_L) \delta\left(\sum_{i=1}^L \xi_i\right) , \quad (9.16)$$

où N_L assure la normalisation de cette distribution et où $g(x)$ est interprétée comme une distribution de probabilité admettant un second moment σ^2 . La fonction delta dans l’Eq. (9.16) assure les conditions aux bords périodiques, $H(0) = H(L)$. C’est pourquoi le champ de hauteur H_i peut être interprétée comme un pont aléatoire discret. Dans la limite où la taille du système L tend vers l’infini, le théorème de la limite centrale garantit que ce pont aléatoire discret converge vers le pont Brownien (à condition bien sûr que σ^2 reste fini). Bien sûr, la même conclusion vaut également pour la hauteur relative $h_i = H_i - L^{-1} \sum_i H_i$. Plus précisément, les fluctuations de la variable adimensionnée h_i/w_L où w_L est la largeur de l’interface auront la même statistique, dans la limite $L \rightarrow \infty$, que son équivalent continu $h(x)/\sqrt{L}/12$. Et naturellement, le maximum, adimensionné, de hauteur relative h_m/w_L où $h_m = \max(\{h_i\}, i = 0, 1, \dots, L-1)$, aura asymptotiquement, la même statistique que son équivalent continu. D’après cet argument, on s’attend donc à ce que, quelle que soit la distribution $g(x)$, paire et admettant un second moment σ^2 , la distribution de h_m soit donnée, dans la limite $L \rightarrow \infty$ par

$$P(h_m, L) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{12}w_L} f_{\text{Airy}}\left(\frac{h_m}{\sqrt{12}w_L}\right) , \quad (9.17)$$

où $f_{\text{Airy}}(x)$ est la distribution d’Airy, définie en Eq. (9.7).

Cet argument, quoique très général, ne concerne que le comportement dominant de la distribution $P(h_m, L)$ dans la limite $L \rightarrow \infty$ mais ne dit rien sur les effets de taille finie. Pourtant dans de nombreuses situations concrètes, comme les simulations numériques par exemple, ces effets de taille finie peuvent être importants. Pour des

variables i.i.d. ces corrections de taille finie décroissent génériquement logarithmiquement avec le nombre de variables (ici L). Pour des variables i.i.d., ces corrections de taille finie ont été étudiées en détail dans la littérature mathématique [187]. Plus récemment, elles ont été étudiées par des physiciens, à l'aide des méthodes du groupe de renormalisation [188]. En revanche il n'existe que très peu de cas où l'on peut faire une étude de taille finie pour la statistique d'extrêmes de variables fortement corrélées.

Pour ce type de modèle SOS évoqué plus haut (9.14), il est toutefois possible d'étudier analytiquement les effets de taille finie pour $P(h_m, L)$. En effet, dans le cas particulier $p = 1$ on peut calculer la distribution $P(h_m, L)$ pour tout L fini à l'aide des techniques de matrice de transfert [165]. A partir de cette expression exacte, on peut en déduire les premiers termes du développement asymptotique pour L grand. On obtient alors [165] :

$$P(h_m, L) = \frac{1}{\sqrt{12} w_L} f\left(\frac{h_m}{\sqrt{12} w_L}\right) + \frac{1}{\sqrt{2} \sigma_1 L} f'\left(\frac{h_m}{\sqrt{12} w_L}\right) + \mathcal{O}(L^{-3/2}), \quad (9.18)$$

avec $\sqrt{12} w_L = \sigma_1 L^{1/2} + \mathcal{O}(L^{-3/2})$, $\sigma_1 = \sqrt{2}/K$. En particulier, à partir de l'Eq. (9.18), on obtient le développement de la valeur moyenne $\langle h_m \rangle$:

$$\langle h_m \rangle = \sigma_1 \sqrt{L} - \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} + \mathcal{O}(L^{-1/2}). \quad (9.19)$$

La correction dominante au comportement en $L^{1/2}$ de la valeur moyenne de h_m est négative, comme dans le cas de la valeur moyenne du maximum pour une marche aléatoire ordinaire (7.28) [189, 194].

Inspiré par ce résultat exact (9.18) pour un modèle SOS (9.14) pour $p = 1$, nous avons vérifié numériquement que pour tout p la distribution de h_m pour L grand s'écrit [165]

$$P(h_m, L) = \frac{1}{\sqrt{12} w_L} \left[f\left(\frac{h_m}{\sqrt{12} w_L}\right) + \frac{1}{\mu_p \sqrt{L}} f'\left(\frac{h_m}{\sqrt{12} w_L}\right) \right] + \mathcal{O}(L^{-3/2}). \quad (9.20)$$

Cette étude indique donc que, pour cet ensemble de variables aléatoires fortement corrélées, les corrections de taille finie sont plus faibles (décroissance algébrique avec L) que pour des variables indépendantes (décroissance logarithmique). A la suite des travaux récents [188] proposant d'étudier ces effets de taille finie pour des variables indépendantes à l'aide de méthode de renormalisation (ce qui, pour un physicien statisticien, apparaît comme la méthode "canonique"), il serait intéressant d'étendre ce type d'approche, par exemple en utilisant la renormalisation dans l'espace réel [253] discutée au chapitre 8, pour discuter la généralité de ce résultat.

9.2. D'autres définitions de la hauteur relative

Comme nous l'avons déjà mentionné, le Hamiltonien décrivant une interface élastique (9.2) est invariant par une translation du champ de hauteur $H(x) \rightarrow H(x) + c$ où c est une constante. Aussi est-il nécessaire de définir une hauteur relative, par

9.2 D'autres définitions de la hauteur relative

rapport à une référence a priori arbitraire. La définition adoptée plus haut est certes physiquement pertinente mais d'autres définitions sont a priori possibles. Récemment, Burkhardt, Györgyi, Moloney et Racz se sont intéressés à la hauteur relative par rapport au champ de hauteur en $x = 0$, $H(0)$ (ou, de façon équivalente, par rapport à n'importe quel autre point, puisque l'on considère ici des conditions aux bords périodiques) [279]. Il existe donc deux définitions de hauteur relative qui ont été étudiées récemment :

$$(i) \ h^1(x) = H(x) - L^{-1} \int_0^L H(x') dx' , \ (ii) \ h^0(x) = H(x) - H(0) . \quad (9.21)$$

Ces deux définitions (9.21) conduisent à deux distributions du maximum $h_{\max}$ (9.5) des hauteurs relatives qualitativement très différentes. En effet, dans le premier cas (9.21) la distribution de la MRH $P^1(h_m, L)$ est donnée par la distribution d'Airy $f_{\text{Airy}}(x)$ étudiée précédemment (9.7), tandis que dans le deuxième cas (9.21) la distribution du maximum $P^0(h_m, L)$ est décrite par la distribution de Rayleigh [279]. En effet on a

$$(i) \ P^1(h_m, L) = \frac{1}{L^{1/2}} f_{\text{Airy}} \left(\frac{h_m}{L^{1/2}} \right) , \quad (9.22)$$

$$(ii) \ P^0(h_m, L) = \frac{1}{L^{1/2}} f_{\text{Ray}} \left(\frac{h_m}{L^{1/2}} \right) , \quad (9.23)$$

où $f_{\text{Ray}}(x)$ est la distribution de Rayleigh

$$f_{\text{Ray}}(x) = 4x \exp(-2x^2) . \quad (9.24)$$

Notons que ce dernier résultat (9.24) peut s'obtenir aisément en remarquant que, dans ce cas (ii) (9.21), la distribution de h_m est simplement la distribution du maximum d'un pont Brownien, donnée par l'Eq. (8.19). Cette distribution (9.24) est connue dans la littérature sous le nom de distribution de Rayleigh. Elle apparaît notamment dans la théorie des matrices aléatoires où elle décrit approximativement la distribution de l'espacement entre deux valeurs propres des ensembles Gaussiens de matrices aléatoires (GOE, GUE, GSE) : c'est ce qu'on appelle la conjecture de Wigner ou "*Wigner surmise*".

Bien que ces deux définitions de hauteurs relatives (9.21) soient a priori assez similaires, les distributions du maximum dans les deux cas, en Eq. (9.7) et Eq. (9.24) ont des expressions analytiques très différentes. Ces deux définitions conduisent donc à des distributions d'extrême qualitativement différentes : c'est particulièrement vrai si l'on considère le comportement de ces distributions à petit argument (9.9), (9.24). Dans la Ref. [251], nous avons voulu comprendre comment la distribution du MRH évolue lorsque l'on change la définition de hauteur relative de $h^1(x)$ à $h^0(x)$ (9.21). Pour cela, nous avons introduit une définition alternative de la hauteur relative $h^\kappa(x)$ indexée par un paramètre continu $0 \leq \kappa \leq 1$

$$h^\kappa(x) = H(x) - \frac{1}{\kappa L} \int_0^{\kappa L} H(x') dx' , \quad (9.25)$$

telle que $\lim_{\kappa \rightarrow 1} h^\kappa(x) = h^1(x)$ et $\lim_{\kappa \rightarrow 0} h^\kappa(x) = h^0(x)$: $h^\kappa(x)$ interpole donc entre $h^1(x)$ et $h^0(x)$. A l'aide des méthodes d'intégrale de chemin, nous avons obtenu une expression exacte pour la distribution $P^\kappa(h_m, L)$ du maximum des hauteurs relatives $h_m = \max_{0 \leq x \leq L} h^\kappa(x)$ et montré que $P^\kappa(h_m, L) = L^{-\frac{1}{2}} f^\kappa(h_m L^{-\frac{1}{2}})$ où $f^\kappa(x)$, qui interpole entre la distribution d'Airy pour $\kappa = 1$ et la distribution de Rayleigh pour $\kappa = 0$, est donnée par

$$f^\kappa(x) = \frac{4\sqrt{6}}{\pi} x^{-10/3} \int_0^\infty dq \sum_{n=1}^\infty [F_n(q)]^2 b_n(q, \kappa)^{2/3} e^{-b_n(q, \kappa)/x^2} \times U(-5/6, 4/3, b_n(q, \kappa)/x^2), \quad (9.26)$$

où $b_n(q, \kappa) = (2\kappa/27)(\alpha_n + (1 - \kappa)q^2/\kappa)^3$ et où les coefficients $F_n(q)$ sont donnés par

$$F_n(q) = \int_0^\infty du \frac{\text{Ai}(u - \alpha_n)}{\text{Ai}'(-\alpha_n)} \sin(qu). \quad (9.27)$$

En particulier, à petit argument, $f^\kappa(x)$ se comporte comme

$$f^\kappa(x) \sim \left(\frac{\kappa}{1 - \kappa} \right)^{3/2} x^{-2} \exp \left(-\frac{2\alpha_1^3}{27} \frac{\kappa}{x^2} \right). \quad (9.28)$$

Ainsi donc $P^\kappa(h_m, L)$ décroît exponentiellement pour $h_m \ll \sqrt{\kappa L}$. Ce comportement peut se comprendre qualitativement en remarquant que les configurations telles que $h_m \ll \sqrt{\kappa L}$ sont essentiellement plates sur l'intervalle $[0, \kappa L]$.

9.3. Un problème relié : la question de Sylvester

Pour terminer ce chapitre sur la distribution d'Airy, nous présentons ici une généralisation de la distribution de la hauteur maximale définie plus haut (9.3, 9.5) à une autre classe d'interface appelé modèle de Mullins-Herring [290] où le champ de hauteur $H(x, t)$ évolue selon l'équation

$$\partial_t H(x, t) = \nabla^4 H(x, t) + \zeta(x, t), \quad (9.29)$$

où $\zeta(x, t)$ est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et variance $\langle \zeta(x, t) \zeta(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t')$, *i.e.* que l'on fixe la température à $T = 1/2$. L'état stationnaire est décrit dans ce cas par le poids de Boltzmann $P_{st} \propto \exp[-\mathcal{H}]$, avec un Hamiltonien Gaussien

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (9.30)$$

où l'on dénote également par $H(x)$ le champ de hauteur de l'interface dans le régime stationnaire et par L la taille du système. Comme précédemment, nous considérons des conditions aux bords périodiques, $H(0) = H(L)$. Si le cas précédent (9.2) correspondait à un pont Brownien, le modèle d'interface considéré ici (9.30) correspond

9.3 Un problème relié : la question de Sylvester

au processus accéléré aléatoirement (RAP pour *Random Acceleration Process*), en configuration de pont, qui est défini par l'équation stochastique

$$\ddot{x}(t) = \zeta(t) , \quad (9.31)$$

où $\zeta(t)$ est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance $\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \delta(t-t')$. Ce modèle (9.31) a été abondamment étudié dans le contexte des processus stochastiques, comme un des processus non-Markoviens les plus simples et pourtant non-trivial, ainsi que dans le contexte des polymères où le Hamiltonien (9.30) décrit un polymère semi-flexible [291].

Récemment, Györgyi *et al.* ont étudié la distribution du maximum $h_{\max}$ (9.5) des hauteurs relatives définies comme en Eq. (9.3) pour ce modèle d'interface (9.30) [278]. Ils ont montré que la distribution $\mathcal{P}(h_m, L)$ du maximum relatif a la forme d'échelle

$$\mathcal{P}(h_m, L) = \frac{1}{L^{3/2}} f_{\text{RAP}} \left(\frac{h_m}{L^{3/2}} \right) , \quad (9.32)$$

et ont donné une formule de trace pour la transformée de Laplace de $f_{\text{RAP}}(x)$. Cette formule de trace implique l'opérateur différentiel du second ordre

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} - u \frac{\partial}{\partial r} - r , \quad (9.33)$$

qui est le générateur du processus de Markov $(r(\phi), u(\phi))$. Si l'on considère le problème aux valeurs propres suivants

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\psi(r, u) &= -\epsilon\psi(r, u), & 0 < r < \infty, \quad -\infty < u < \infty, \\ \psi(0, u) &= 0, & u > 0, \end{aligned} \quad (9.34)$$

et si l'on suppose qu'il admet un spectre discret $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots$ (l'expression analytique de ces valeurs propres n'étant pas connue) et des vecteurs propres associés bien définis, alors la transformée de Laplace de $f_{\text{RAP}}(x)$ s'écrit [278]

$$\hat{f}_{\text{RAP}}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_{\text{RAP}}(x) dx = \sqrt{2\pi s} \sum_{k=1}^\infty e^{-\epsilon_k s^{2/5}} , \quad (9.35)$$

qui est donc l'équivalent de l'expression (9.7) pour la distribution d'Airy.

Nous avons montré que cette distribution (9.35) apparaît, de façon assez inattendue, dans un problème de géométrie convexe aléatoire bien connu : la question de Sylvester [292]. En 1864, J. J. Sylvester a posé la question du calcul de la probabilité que quatre points indépendants jetés uniformément dans un ensemble convexe fixé du plan soient les sommets d'un quadrilatère convexe [293]. Depuis on entend plus généralement par *problème de Sylvester* le calcul de la probabilité $p_n(K)$ que n points indépendants et uniformément distribués dans un convexe K du plan soient en position convexe, c'est-à-dire tous situés sur la frontière de leur enveloppe convexe (voir Fig. 9.2). Dans le cas où K est un triangle ou un parallélogramme, cette probabilité

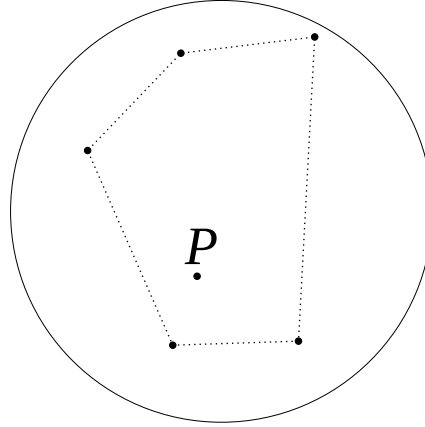


FIGURE 9.2.: Un exemple d'un ensemble de $n = 6$ points choisis aléatoirement dans un disque D . L'enveloppe convexe (en pointillé) de cet ensemble de points ne passe pas par le point P et est donc un polygone à cinq côtés. Cet ensemble de points ne contribue donc pas à la probabilité $p_6(D)$.

$p_n(K)$ peut être calculée explicitement pour tout n par des méthodes combinatoires [294]. En général, et en particulier où K est le disque unité D , on ne sait pas obtenir de formule élémentaire pour $p_n(D)$. Bárány a toutefois montré rigoureusement un développement à deux termes de $\ln[p_n(K)]$, dans la limite asymptotique où n est grand, qui fait intervenir la notion de périmètre affine de K [295]. Dans le cas où K est le disque unité, il obtient, dans la limite $n \rightarrow \infty$

$$\ln p_n(D) = -2n \ln n + n \ln(2\pi^2 e^2) + \mathcal{R}_n, \quad (9.36)$$

où le reste $\mathcal{R}_n$ est tel que $\mathcal{R}_n = o(n)$. Dans la Ref. [292], nous avons montré que $\mathcal{R}_n$ peut s'exprimer en terme de la transformée de Laplace $\hat{f}_{\text{RAP}}(s)$ donnée en Eq. (9.35) :

$$\mathcal{R}_n = \ln \left[\hat{f}_{\text{RAP}} \left(\sqrt{3 \cdot 2^5 \cdot \pi^4 n} \right) \right]. \quad (9.37)$$

Nous avons obtenu ce résultat (9.36, 9.37) en étendant une approche analytique, initialement développée par H. J. Hilhorst [296, 297, 298] dans le contexte des mosaïques de Voronoi, et également utilisée par lui et P. Calka pour le problème de la cellule de Crofton [299]. L'idée d'utiliser cette méthode ici repose sur l'observation que les deux premiers termes du développement asymptotique en Eq. (9.36) coïncident avec le développement de $\ln p_n^{\text{Vor}}$ où p_n^{Vor} est la probabilité pour qu'une cellule typique de Poisson-Voronoi ait n côtés. De plus, la Ref. [300] suggère que ces deux problèmes sont reliés par une inversion des coordonnées radiales. En utilisant ce résultat (9.37) ainsi que le résultat de György *et al.* (9.35), on obtient

$$\ln p_n(D) = -2n \ln n + n \ln(2\pi^2 e^2) - 2\epsilon_1 (3\pi^4 n)^{1/5} + \dots, \quad (9.38)$$

où $\epsilon_1 > 0$ est donc la plus petite valeur propre du problème linéaire énoncé en Eq. (9.34). Ce résultat (9.38) montre en particulier le fait surprenant que le troisième

9.3 Un problème relié : la question de Sylvester

terme du développement de la quantité $\ln p_n(D)$ est non-analytique en n . Enfin ce travail montre une connexion assez inattendue entre les statistiques d'extrême et un problème de géométrie aléatoire.

Marcheurs répulsifs : du mouvement Brownien aux matrices aléatoires

10

Jusqu'à présent nous avons étudié des statistiques d'extrêmes de systèmes "sans interaction". Un modèle minimal, et non trivial, de systèmes de particules en interactions consiste en une collection de p marcheurs Browniens $x_1(t), \dots, x_p(t)$ conditionnés à ne pas se croiser, c'est-à-dire $x_1(t) < \dots < x_p(t), \forall t$ (Fig. 10.1). De tels marcheurs sont parfois appelés *vicious walkers* et nous les appellerons aussi marcheurs répulsifs.

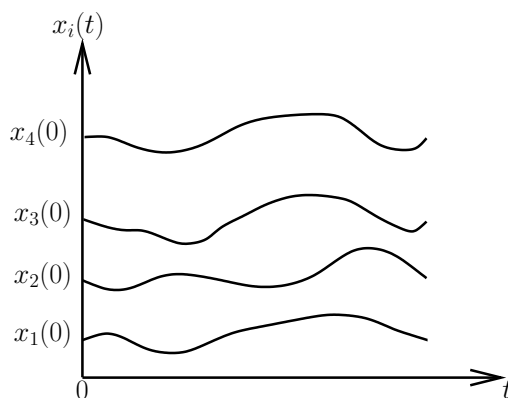


FIGURE 10.1.: Croquis, dans le plan (x, t) des trajectoires de $p = 4$ marcheurs contraints à ne pas se croiser.

De tels modèles ont été abondamment étudiés par le passé en physique statistique. Tout d'abord introduits (en physique) par P. G. de Gennes [301] dans le contexte des polymères, ils ont ensuite été "popularisés" par M. E. Fisher [302] pour décrire la phénoménologie des transitions de mouillage et de fusion en dimension $1 + 1$. Ces travaux pionniers ont ensuite connu des développements intéressants dans le contexte des réseaux de polymères [303] ou des propriétés de persistance de systèmes hors d'équilibre [304].

Plus récemment, ces modèles ont connu un regain d'intérêt notamment en raison de leurs connexions avec la théorie des matrices aléatoires [208] (voir ci-dessous), et en particulier avec le mouvement Brownien de Dyson [306, 307]. Ils apparaissent aujourd'hui comme un modèle à la croisée d'un certain nombre de problèmes fondamentaux de mécanique statistique comme les modèles de croissance stochastique dans la classe

10.1 Mouvements Browniens répulsifs et matrices aléatoires

d'universalité de Kardar-Parisi-Zhang en dimension $1+1$ [170], le polymère dirigé en milieu désordonné [308, 309] ou bien des problèmes de pavages aléatoires de région du plan, comme le pavage du diamant aztèque [241]. Ces connexions reposent en particulier sur le processus d'Airy₂, introduit par Spohn et Prähofer [310] qui est le processus stochastique sous-jacent à ces différents problèmes.

10.1. Mouvements Browniens répulsifs et matrices aléatoires

10.1.1. Une approche par intégrale de chemin

Nous considérons donc une collection de p particules Browniennes $x_i(t)$, $i = 1, \dots, p$ dont l'équation du mouvement est simplement

$$\dot{x}_i(t) = \eta_i(t) \text{ , avec la condition initiale } x_i(0) = x_i^0 \text{ ,} \quad (10.1)$$

où les η_i sont des bruits blancs gaussiens indépendants $\langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t-t')$. Ces particules Browniennes n'interagissent pas excepté le fait qu'elles sont contraintes à ne pas se croiser (Fig. 10.1). C'est pourquoi, si on choisit d'étiqueter ces particules telles que $x_1^0 < x_2^0 < \dots < x_p^0$, cet ordre est préservé aux temps ultérieurs

$$x_1(t) < x_2(t) < \dots < x_p(t) \text{ , } \forall t \geq 0 \text{ .} \quad (10.2)$$

L'objet essentiel que nous souhaitons calculer est le propagateur

$$\mathcal{P}_p(\mathbf{v}, t_2 | \mathbf{u}, t_1) \equiv \mathcal{P}_p(v_1, v_2, \dots, v_p, t_2 | u_1, u_2, \dots, u_p, t_1) \text{ ,} \quad (10.3)$$

c'est-à-dire la probabilité pour que le système atteigne la configuration $x_1(t_2) = v_1, x_2(t_2) = v_2, \dots, x_p(t_2) = v_p$ au temps t_2 en sachant qu'il était dans la configuration $x_1(t_1) = u_1, x_2(t_1) = u_2, \dots, x_p(t_1) = u_p$ au temps t_1 . Notons que dans l'Eq. (10.3) et dans la suite nous utilisons la notation $\mathbf{v} \equiv (v_1, v_2, \dots, v_p)$. Ce propagateur vérifie l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \mathcal{P}_p(\mathbf{v}, t_2 | \mathbf{u}, t_1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2}{\partial v_i^2} \mathcal{P}_p(\mathbf{v}, t_2 | \mathbf{u}, t_1) \text{ ,} \quad (10.4)$$

assortie de la condition initiale

$$\mathcal{P}_p(\mathbf{v}, t_2 = t_1 | \mathbf{u}, t_1) = \delta^{(p)}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \text{ ,} \quad (10.5)$$

et de la condition de "non-croisement", spécifique à ce problème

$$\mathcal{P}_p(\mathbf{v}, t_2 | \mathbf{u}, t_1) = 0 \text{ , si } v_i = v_j \text{ , } \forall (t_1, t_2) \text{ .} \quad (10.6)$$

Nous allons écrire la solution de cette équation (10.4) satisfaisant à ces conditions (10.5, 10.6) en terme d'une intégrale de chemin (méthode décrite, dans le cas d'une seule particule, dans le paragraphe 7.3.2). Pour cela, nous notons tout d'abord que la densité de probabilité associée à la trajectoire de p marcheurs Browniens *non*

constraints [*i.e.* sans la condition de non-croisement (10.6)] $x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t)$ (10.1) sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ (*i.e.* la généralisation de la formule (7.41) à p marcheurs) s'écrit

$$\rho_{\text{joint}}(\{x_1(t)\}, \{x_2(t)\}, \dots, \{x_p(t)\}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 dt \right] \times \delta^{(p)}(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{u}) \delta^{(p)}(\mathbf{x}(t_2) - \mathbf{v}), \quad (10.7)$$

où les fonctions delta assurent les conditions initiales en t_1 et finales en t_2 . Comme nous l'avons montré plus haut (7.42, 7.43), on peut utiliser les techniques d'intégrales de chemin pour écrire ce propagateur libre (10.7) sous la forme

$$\mathcal{P}_{p,\text{free}}(\mathbf{v}, t_2 | \mathbf{u}, t_1) = \langle \mathbf{v} | \exp -\hat{H}_0(t_2 - t_1) | \mathbf{u} \rangle, \quad (10.8)$$

où $\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^p \hat{h}_{0,i}$, avec $h_{0,i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, est le Hamiltonien de p particules quantiques libres. Si l'on dénote par E les valeurs propres de $\hat{H}_0$ et par $|E\rangle$ les vecteurs propres associés, on obtient

$$\mathcal{P}_{p,\text{free}}(\mathbf{v}, t_2 | \mathbf{u}, t_1) = \sum_E \Psi_E^*(\mathbf{u}) \Psi_E(\mathbf{v}) e^{-E(t_2 - t_1)}, \quad (10.9)$$

où l'on a introduit la notation $\langle \mathbf{u} | E \rangle = \Psi_E(\mathbf{u})$. Pour des Browniens sans la contrainte de non-croisement, cette fonction d'onde $\Psi_E(\mathbf{u})$ de p particules est simplement le produit de p fonctions d'onde à une particule $\langle u_i | E_i \rangle = \psi_{E_i}(u_i)$ (avec $\hat{h}_{0,i} | E_i \rangle = E_i | E_i \rangle$), *i.e.* $\Psi_E(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^p \psi_{E_i}(u_i)$. Dans le cas où ces marcheurs sont conditionnés à ne pas se croiser ("vicious walkers"), on impose $\mathcal{P}_p(\mathbf{v}, t_2 | \mathbf{u}, t_1) = 0$, dès lors que $v_i = v_j$, et ce pour temps t_2 . On reconnaît alors que cette fonction d'onde à p particules $\Psi_E(\mathbf{u}) \equiv \Psi_E(u_1, \dots, u_p)$ est une fonction d'onde fermionique, *i.e.* qu'elle s'annule si deux des coordonnées de position sont égales. Cette fonction d'onde complètement anti-symétrique est donc construite en formant le déterminant de Slater à partir des fonctions propres à une particule, *i.e.*

$$\mathcal{P}_p(\mathbf{v}, t_2 | \mathbf{u}, t_1) = \sum_E \Psi_E^*(\mathbf{u}) \Psi_E(\mathbf{v}) e^{-E(t_2 - t_1)},$$

$$\Psi_E(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{p!}} \det_{1 \leq i, j \leq p} \psi_{E_i}(u_j). \quad (10.10)$$

Ce formalisme va nous permettre d'établir assez simplement un premier lien entre ces systèmes et les matrices aléatoires.

10.1.2. Le lien avec les matrices aléatoires

Dans la suite, nous allons nous intéresser à des configurations particulières de ces marcheurs répulsifs dits en "pastèque" (*watermelons*) où les p marcheurs commencent, à l'instant $t = 0$, et terminent, à l'instant $t = 1$, à l'origine. Nous nous intéresserons en particulier au cas de ponts Browniens contraints à ne pas se croiser [Fig. 10.2 a)]. Nous considérerons aussi les excursions Browniennes contraintes

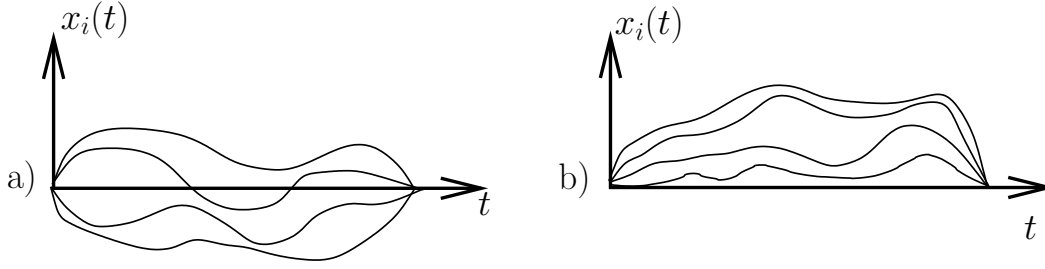


FIGURE 10.2.: **a)** : Croquis de ponts Browniens contraints à ne pas se croiser (pastèque sans mur). **b)** : Croquis d'excursions Browniennes contraintes à ne pas se croiser, où les marcheurs sont, en plus, contraints à rester positifs (pastèque avec mur).

à ne pas se croiser : dans ce cas les marcheurs sont en plus contraints à rester sur le demi-axe $x > 0$ [Fig. 10.2 b)]. Toutefois, de telles configurations ne sont pas bien définies pour des processus continus en espace et en temps, comme les mouvements Browniens que nous souhaitons considérer ici (10.1, 10.2). En effet, il est bien connu que si deux tels marcheurs se croisent, ils se re-croiseront une infinité de fois immédiatement après. Autrement dit, il est impossible d'imposer la contrainte $x_i(0) = x_{i+1}(0) = 0$ et simultanément $x_i(0^+) < x_{i+1}(0^+)$. Une façon de traiter ce problème consiste à considérer des marcheurs aléatoires en temps discret sur un réseau discret (c'est ce que l'on appelle des chemins de Dyck) : c'est la méthode qui est par exemple utilisée dans les références [311, 315, 316, 317]. Dans la limite continue, on s'attend à retrouver le problème des mouvements Browniens en exclusion (on consultera la Ref. [318] pour une démonstration rigoureuse de ce résultat). Ici, nous utilisons une méthode alternative proposée par Majumdar et Comtet [78, 164] qui consiste à régulariser cette singularité en supposant que les positions initiales et finales des Browniens sont distinctes et données par $0 < \epsilon_1 < \dots < \epsilon_p$ et la limite $\epsilon_i \rightarrow 0$ n'est prise qu'à la fin du calcul (en vérifiant bien sûr que cette limite est bien définie). Dans les deux cas (ponts Browniens et excursions Browniennes), nous allons tout d'abord calculer la distribution de probabilité des positions $x_1, x_2, \dots, x_p$ des positions à un instant t fixé.

Le cas des ponts Browniens contraints à ne pas se croiser. Dans le cas des ponts, on peut calculer la distribution de probabilité des positions $P_{\text{joint}}(x_1, \dots, x_p; t)$ en terme du propagateur de ce processus (10.8) et en utilisant la régularisation expliquée dans le paragraphe ci-dessus :

$$P_{\text{joint}}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \frac{\langle \epsilon | e^{-t\hat{H}_0} | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} | e^{-(1-t)\hat{H}_0} | \epsilon \rangle}{\langle \epsilon | e^{-\hat{H}_0} | \epsilon \rangle}, \quad (10.11)$$

où $\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^p \hat{h}_{0,i}$ où $\hat{h}_{0,i} = -\frac{1}{2} \partial_{x_i}^2$. On peut ensuite calculer explicitement les deux propagateurs dans cette équation (10.11) en utilisant la formule (10.10). On obtient

dans ce cas où les fonctions propres de $\hat{h}_{0,i}$ sont simplement les ondes planes :

$$\begin{aligned} \langle \epsilon | e^{-t\hat{H}_0} | \mathbf{x} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dk_p \left[\det_{1 \leq m, n \leq p} e^{-ik_m \epsilon_m} \right] \left[\det_{1 \leq m, n \leq p} e^{+ik_m x_m} \right] \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2} (k_1^2 + \cdots + k_p^2) t \right]. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Pour prendre la limite $\epsilon_i \rightarrow 0$ (pour tout marcheur i) dans cette formule (10.12) on utilise que, dans cette limite, on a à l'ordre dominant

$$\left[\det_{1 \leq m, n \leq p} e^{-ik_m \epsilon_m} \right] \sim a_p \prod_{i < j} (k_i - k_j) \prod_{i < j} (\epsilon_i - \epsilon_j), \quad (10.13)$$

où l'amplitude a_p ne joue pas de rôle ici. Finalement, en utilisant ce comportement asymptotique (10.13) ainsi que les expressions (10.11, 10.12) on obtient que les puissances de $(\epsilon_i - \epsilon_j)$ s'annulent entre le dénominateur et le numérateur de l'Eq. (10.11) pour donner :

$$P_{\text{joint}}(\mathbf{x}, t) = A_p Q(\mathbf{x}, t) Q(\mathbf{x}, 1-t), \quad (10.14)$$

$$Q(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \prod_{i < j} (k_i - k_j) e^{-\frac{t}{2} k^2} \left[\det_{1 \leq m, n \leq p} e^{+ik_m x_m} \right], \quad (10.15)$$

où on utilise la notation $\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dk_p$ et où l'amplitude A_p est déterminée par la condition de normalisation, *i.e.* $\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x} P_{\text{joint}}(\mathbf{x}, t) = 1$. On peut ensuite effectuer l'intégrale sur les variables k_i en utilisant la formule d'Harish-Chandra-Itzykson-Zuber [319] [ou bien ici l'identité de Cauchy-Binet (10.51)] pour obtenir finalement

$$P_{\text{joint}}(\mathbf{x}, t) = Z_p^{-1} \sigma(t)^{-p^2} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2 e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2\sigma^2(t)}}, \quad (10.16)$$

avec $\sigma(t) = \sqrt{t(1-t)}$ et où $Z_p = \prod_{j=1}^p j!$ peut être évaluée en utilisant une intégrale de Selberg [208]. Cette formule montre donc que, à temps t fixé, les positions de marcheurs adimensionnées $\tilde{x}_i(t) = x_i / [\sqrt{2}\sigma(t)]$ ont la même distribution que les valeurs propres des matrices de l'ensemble GUE, *i.e.* $\beta = 2$ (7.54).

Cette relation (10.16) pose naturellement la question de l'identité entre, d'une part, ces configurations de pastèques, *i.e.* le système de p ponts Browniens conditionnés à ne pas se croiser, et, d'autre part, les valeurs propres de matrices Hermitiennes dont les éléments sont eux-mêmes des ponts Browniens indépendants, *i.e.* un mouvement brownien de Dyson [306]. Pour établir l'identité entre ces deux processus, au-delà d'une quantité à un temps (10.16), nous étudierons, dans le paragraphe 10.1.3 l'équation de Fokker-Planck régissant ces deux processus.

Le cas des excursions Browniennes contraintes à ne pas se croiser. Dans ce cas, on peut calculer la distribution jointe des positions à t fixé en utilisant une formule similaire à celle utilisée pour les ponts (10.11) où l'on doit en plus conditionner les marcheurs à rester sur le demi-axe $x > 0$. Pour cela, comme nous

10.1 Mouvements Browniens répulsifs et matrices aléatoires

l'avons fait plus haut dans un contexte très similaire (7.44), il suffit d'ajouter au Hamiltonien $\hat{H}_0$ qui entre dans l'Eq. (10.11) un potentiel ayant un mur infini en 0 avec une condition absorbante. On a donc dans ce cas

$$P_{\text{joint}}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \frac{\langle \epsilon | e^{-t\hat{H}_W} | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} | e^{-(1-t)\hat{H}_W} | \epsilon \rangle}{\langle \epsilon | e^{-\hat{H}_W} | \epsilon \rangle} . \quad (10.17)$$

où $\hat{H}_W = \sum_{i=1}^p \hat{h}_{W,i}$ où $\hat{h}_{W,i} = -\frac{1}{2}\partial_{x_i}^2 + V_W(x_i)$ où V_W est un potentiel avec un mur infini en zéro (7.44), *i.e.*

$$V_W(x) = \begin{cases} +\infty, & -\infty < x \leq 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

En effectuant le même type de manipulations que précédemment (10.11)-(10.16), on obtient ici

$$P_{\text{joint}}(\mathbf{x}, t) = Z_p'^{-1} \sigma(t)^{-p(2p+1)} \prod_{i < j}^p (x_i^2 - x_j^2)^2 e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2\sigma^2(t)}}, \quad (10.18)$$

où Z_p' est une constante de normalisation que l'on calcule de nouveau en utilisant une intégrale de Selberg [208]. Ainsi cette relation (10.18) montre que la distribution des quantités $y_i = x_i^2/2\sigma^2(t)$ est identique, formellement, aux valeurs propres des matrices de Wishart (7.67) avec $\beta = 2$, $M - N = \frac{1}{2}$, et $N = p$. Nous verrons aussi dans la suite que cette distribution (10.18) correspond à la distribution des valeurs propres (positives) de matrices hermitiennes symplectiques, de taille $2p \times 2p$.

10.1.3. Mouvement Brownien de Dyson

Pour établir encore un peu plus précisément le lien entre ces modèle de marcheurs répulsifs et la théorie des matrices aléatoires nous allons discuter ici le mouvement Brownien de Dyson [306, 307]. Pour cela, nous considérons des matrices aléatoires des ensembles GOE ($\beta = 1$), GUE ($\beta = 2$) ou GSE ($\beta = 4$), dont les éléments dépendent du temps t et sont eux-mêmes des Browniens. Par exemple, dans le cas où $\beta = 2$, nous considérons des matrices Hermitiennes $H \equiv H(t)$ de taille $p \times p$ dont les éléments $H_{mn}(t)$ sont donnés par

$$H_{mn}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(b_{mn}(t) + i\tilde{b}_{mn}(t) \right), & m < n, \\ b_{mm}(t), & m = n \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(b_{nm}(t) - i\tilde{b}_{nm}(t) \right), & m > n, \end{cases} \quad (10.19)$$

où $b_{mn}(t)$ et $\tilde{b}_{mn}(t)$ sont des mouvements Browniens identiques et indépendants, de coefficient de diffusion $D = 1/2$. Soient $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \dots < \lambda_p(t)$ les p valeurs propres de cette matrice $H(t)$ (10.19) ou plus généralement d'une matrice d'un des ensembles $\beta = 1, 2$ ou 4 construites de façon similaires à (10.19) avec la symétrie adaptée. On peut montrer que les $\lambda_i(t)$ obéissent à l'équation du mouvement, dit mouvement Brownien de Dyson [208, 306]

$$\frac{d\lambda_i(t)}{dt} = \frac{\beta}{2} \sum_{1 \leq j \neq i \leq p} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} + \eta_i(t), \quad (10.20)$$

où $\eta_i(t)$ sont des bruits blancs Gaussiens indépendants $\langle \eta_i(t)\eta_j(t') \rangle = \delta_{ij}\delta(t-t')$. Soit $\mathcal{P}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t|\boldsymbol{\mu}, 0) \equiv \mathcal{P}_{\text{Dyson}}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, t|\mu_1, \dots, \mu_p, t=0)$ le propagateur associé à ce processus (10.20). Il vérifie l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_{\text{Dyson}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} \mathcal{P}_{\text{Dyson}} - \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^p \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[\sum_{1 \leq j \neq i \leq p} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \mathcal{P}_{\text{Dyson}} \right] . \quad (10.21)$$

Bien sûr on a ici aussi $\mathcal{P}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t|\boldsymbol{\mu}, 0) = 0$ si $\lambda_i = \lambda_j$, et ce pour tout temps t et d'après l'Eq. (10.21) on obtient

$$\mathcal{P}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t|\boldsymbol{\mu}, 0) \sim (\lambda_j - \lambda_i)^\beta, \quad \lambda_i \rightarrow \lambda_j . \quad (10.22)$$

Cette équation de Fokker-Planck peut être transformée en une équation de Schrödinger [312] en posant

$$\mathcal{P}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t|\boldsymbol{\mu}, 0) = \frac{\exp \left[\frac{\beta}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq p} \ln (\lambda_j - \lambda_i) \right]}{\exp \left[\frac{\beta}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq p} \ln (\mu_j - \mu_i) \right]} \mathcal{W}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t|\boldsymbol{\mu}, 0) , \quad (10.23)$$

où $\mathcal{W}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t|\boldsymbol{\mu}, 0)$ (ainsi définie) est telle que

$$\mathcal{W}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t=0|\boldsymbol{\mu}, 0) = \delta^{(p)}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}) , \quad (10.24)$$

et par ailleurs, compte tenu de (10.22), et de (10.23) on a

$$\mathcal{W}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t|\boldsymbol{\mu}, 0) \sim (\lambda_j - \lambda_i)^{\beta/2}, \quad \lambda_i \rightarrow \lambda_j . \quad (10.25)$$

A partir des l'Eqs (10.21) et (10.23), on obtient que $\mathcal{W}_{\text{Dyson}}$ satisfait à l'équation de Schrödinger

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W}_{\text{Dyson}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} \mathcal{W}_{\text{Dyson}} - \frac{\beta}{8} (\beta - 2) \sum_{i=1}^p \sum_{1 \leq j \neq i \leq p} \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_i)^2} \mathcal{W}_{\text{Dyson}} . \quad (10.26)$$

Ainsi pour une valeur générique de β , (10.26) est l'équation de Schrödinger associée à l'Hamiltonien de Calogero-Sutherland (sur une ligne infinie) [313, 314]. En revanche pour la valeur particulière $\beta = 2$, le terme d'interaction disparaît et dans ce cas l'équation vérifiée par $\mathcal{W}_{\text{Dyson}}$ (10.22, 10.24, 10.26) est identique au propagateur du modèle de marcheurs répulsifs (10.4, 10.5, 10.6) : dans ce cas l'Eq. (10.26) correspond à l'équation de Schrödinger pour un modèle de fermions libres. Autrement dit pour $\beta = 2$ il existe une relation simple entre le propagateur du mouvement Brownien de Dyson (10.19, 10.20) et celui du modèle de p marcheurs Browniens contraints à ne pas se croiser :

$$\mathcal{P}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t|\boldsymbol{\mu}, 0) = \frac{\prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i)}{\prod_{i < j} (\mu_j - \mu_i)} \mathcal{P}_p(\boldsymbol{\lambda}, t|\boldsymbol{\mu}, 0) . \quad (10.27)$$

Cette relation (10.27) peut aussi s'obtenir directement en écrivant le propagateur du mouvement Brownien de Dyson (10.20) en terme d'une intégrale de chemin (7.53).

10.1 Mouvements Browniens répulsifs et matrices aléatoires

En particulier, dans le cas des configurations en pastèque où les positions initiales et finales des marcheurs sont les mêmes (Fig. 10.2), cette relation (10.27) montre que ce processus est identique au mouvement Brownien de Dyson (10.19) où les éléments sont des *ponts Browniens* sur l'intervalle $[0, 1]$, *i.e.* $b_{ij} \rightarrow B_{ij}$, $\tilde{b}_{ij} \rightarrow \tilde{B}_{ij}$ en Eq. (10.19) tels que $B_{ij}(0) = B_{ij}(1) = 0$ et $\tilde{B}_{ij}(0) = \tilde{B}_{ij}(1) = 0$ [voir Fig. (7.4 a)], ce qui étend la relation "à un temps" obtenue précédemment (10.16). Cette propriété permet aussi de simuler facilement ces configurations en "pastèque", puisque l'on peut générer un pont Brownien $B_{ij}(t)$ sur l'intervalle $[0, 1]$ à partir d'un Brownien $b_{ij}(t)$ via la relation $B_{ij}(t) = b_{ij}(t) - t b_{ij}(1)$.

Dans le cas des excursions Browniennes, dont la distribution jointe des positions à t fixé est donnée par l'Eq. (10.18), la dynamique correspond au mouvement Brownien de Dyson pour des matrices symplectiques et hermitiennes [307] $C(t) \in \text{Sp}(2p)$ définies comme suit

$$C(t) = \begin{pmatrix} H(t) & S(t) \\ S^\dagger(t) & -{}^t H(t) \end{pmatrix}, \quad (10.28)$$

où $H(t)$ est une matrice Hermitienne comme en Eq. (10.19) tandis que $S(t)$ est une matrice symétrique à coefficient dans $\mathbb{C}$, dont les éléments sont aussi des mouvements Browniens. Cette matrice $C(t)$ est hermitienne, on vérifie aussi qu'elle est symplectique, $C(t) \in \text{Sp}(2p)$, *i.e.* :

$${}^t C(t) J + J C(t) = 0, \quad J = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & \mathbb{I}_p \\ -\mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p \end{pmatrix}, \quad (10.29)$$

où $\mathbb{O}_p$ est la matrice $p \times p$ ne contenant que des zéros tandis que $\mathbb{I}_p$ est la matrice unité $p \times p$. A cause de cette relation (10.29), les valeurs propres de $C(t)$ sont de la forme $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, -\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_p$, avec $\lambda_i > 0$ et si les éléments des matrices $H(t)$ et $S(t)$ sont des ponts Browniens, la dynamique des valeurs propres $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \dots < \lambda_p(t)$ est exactement celles d'excursions Browniennes contraintes à ne pas se croiser. Nous reparlerons un peu plus loin, dans le paragraphe 10.3, de ce groupe symplectique $\text{Sp}(2p)$.

10.1.4. La limite du grand nombre de marcheurs $p \rightarrow \infty$ et le processus d'Airy₂

Revenons au cas des ponts Browniens contraints à ne pas se croiser, dont les positions $\tilde{x}_i(t) = x_i(t)/\sqrt{2t(1-t)}$, $1 \leq i \leq p$, à l'instant t fixé sont distribuées comme les valeurs propres de matrices aléatoires de l'ensemble GUE (10.16). Considérons la trajectoire du macheur le plus à droite (la branche du haut de la configuration en pastèque), $x_p(t)$. On peut donc identifier $x_p(t)/\sqrt{2t(1-t)}$ avec la plus grande valeur propre $\lambda_{\max}$ (7.57) des matrices aléatoires de l'ensemble GUE. En utilisant les résultats de Tracy et Widom pour la distribution de $\lambda_{\max}$ [209, 210, 211], on obtient alors que dans la limite où p est grand, on a d'après l'Eq. (7.59)

$$\frac{x_p(t)}{\sqrt{2t(1-t)}} \sim \sqrt{2p} + \frac{\chi_2}{\sqrt{2}p^{1/6}} + \mathcal{O}(p^{-1/3}), \quad (10.30)$$

où χ_2 est une variable aléatoire distribuée selon la distribution de Tracy-Widom pour $\beta = 2$, *i.e.* $\Pr[\chi_2 \leq \xi] = \mathcal{F}_2(\xi)$ où $\mathcal{F}_2(\xi)$ est donnée en Eqs (7.60), (7.62). Cette formule indique donc que les fluctuations de $x_p(t)$ sont d'ordre $\mathcal{O}(p^{-1/6})$ et concerne les fluctuations de $x_p(t)$ à t fixé. Dans la Ref. [310], Prähofer et Spohn ont étudié le processus complet $x_p(t)$ et ils ont montré qu'il existait un régime d'échelle intéressant autour de $t = 1/2$ faisant apparaître un processus qu'ils ont baptisé le processus d'Airy₂, noté ici $\mathcal{A}_2(u)$. Ils ont en effet montré que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{x_p(\frac{1}{2} + \frac{u}{2}p^{-\frac{1}{3}}) - \sqrt{p}}{p^{-\frac{1}{6}}} \equiv \mathcal{A}_2(u) - u^2. \quad (10.31)$$

Ce processus d'Airy₂ est un processus déterminantal, *i.e.* que les fonctions de corrélation s'expriment en terme d'un déterminant de Fredholm dont le noyau fait intervenir la fonction d'Airy. Nous renvoyons à l'article original [310] ainsi qu'aux notes de cours de Ferrari [246], pour plus de détails à ce sujet. Ici nous mentionnons seulement qu'il s'agit d'un processus stationnaire et non Markovien. On note aussi que

$$\Pr(\mathcal{A}_2(0) \leq \xi) = \mathcal{F}_2(\xi), \quad (10.32)$$

en accord avec l'Eq. (10.30).

Dans le cas des excursions, les fluctuations de la branche supérieure, $x_p(t)$, sont insensibles à la présence du mur absorbant dans la limite $p \rightarrow \infty$ et on s'attend à ce qu'elles soient qualitativement similaires à celles du cas des ponts Browniens (10.30). En utilisant le fait que dans ce cas $\tilde{x}_i = x_i^2/2\sigma^2(t)$ se comportent comme les valeurs propres de matrice de Wishart (10.18), ainsi que les résultats asymptotiques de Johansson [221] et Johnstone [222] pour les fluctuations de la plus grande valeur propre de ces ensembles de matrices (7.69), on obtient que dans la limite $p \rightarrow \infty$

$$\frac{x_p(t)}{\sqrt{2t(1-t)}} = 2\sqrt{p} + \frac{\chi_2}{4p^{1/6}} + \mathcal{O}(p^{-1/3}). \quad (10.33)$$

Dans ce cas aussi, on s'attend à ce que les fluctuations de $x_p(t)$ soient aussi gouvernées par le processus d'Airy₂ (10.31).

L'existence de ce processus d'Airy₂ comme processus limite est certainement intéressant en soi mais ce qui le rend encore plus intéressant c'est le fait remarquable que ce processus, plus précisément $\mathcal{A}_2(u) - u^2$, intervient dans un certain nombre d'autres problèmes de mécanique statistique. C'est par exemple le cas des modèles de croissance stochastique dans la classe d'universalité de KPZ [170] en dimension 1+1 en géométrie courbe. Un prototype de ces modèles est le *Polynuclear Growth Model* (PNG) en géométrie circulaire (ou en "gouttelette") [320], qui est schématiquement représenté en Fig. 10.3. Il est défini de la façon suivante. Au temps $t = 0$, un seul îlot commence à s'étendre, avec une vitesse unité, sur un substrat plat à l'origine $x = 0$. Par la suite, d'autres germes sont nucléés aléatoirement avec un taux constant et uniforme $\rho = 2$ par unité d'espace et de temps et croissent aussi latéralement avec une vitesse unité. Lorsque deux îlots se rencontrent ils coalescent. Pendant ce temps, le processus de nucléation aléatoire génère de nouvelles couches et dans la géométrie

10.1 Mouvements Browniens répulsifs et matrices aléatoires

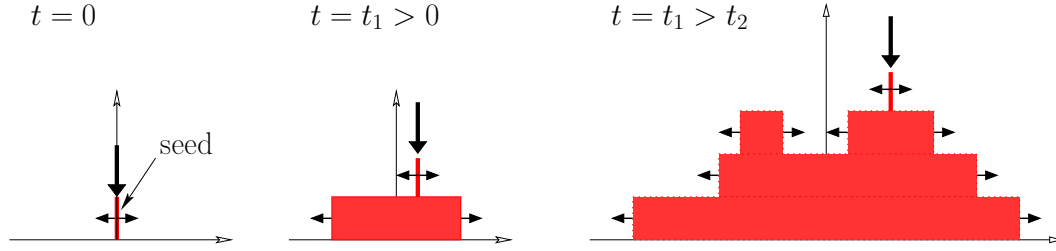


FIGURE 10.3.: Dynamique du modèle PNG (en temps continu) décrit dans le texte.

”en gouttelette”, les nucléations n’ont lieu qu’au dessus de couches déjà formées (les nucléations sur le substrat sont donc interdites pour $t > 0$, ce qui n’est pas le cas dans la géométrie dite ”plate”).

Dans la limite des grand temps t , le profil de hauteur est circulaire $h_{\text{drop}}(x, t) \sim 2t\sqrt{1 - (x/t)^2}$ (Fig. 10.4 gauche), mais il reste bien sûr des fluctuations autour de ce profil déterministe. On caractérise en général ces fluctuations par la rugosité de l’interface $W_L(t) = \langle (h(x, t) - \langle h(x, t) \rangle)^2 \rangle \sim L^\zeta \mathcal{W}(t/L^z)$ avec les exposant $\zeta = \frac{1}{2}$ et $z = \frac{3}{2}$ [321, 322], en accord avec le fait que ce modèle est dans la classe d’universalité de l’équation KPZ en dimension $1 + 1$. Dans la Ref. [310], les auteurs ont montré que ces fluctuations sont précisément gouvernées par ce processus d’Airy₂, comme en Eq. (10.31) plus haut, *i.e.*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h_{\text{drop}}(ut^{\frac{2}{3}}, t) - 2t}{t^{\frac{1}{3}}} = \mathcal{A}_2(u) - u^2. \quad (10.34)$$

Bien que cette identité (10.34) soit établie rigoureusement pour le modèle PNG (d’où l’intérêt qu’a suscité ce modèle particulier), on s’attend à ce qu’elle reste valable [323], à une échelle de temps et de longueur non universelles près, pour les systèmes décrits par l’équation KPZ en dimension $1 + 1$ [170]

$$\partial_t h(x, t) = \nu \nabla^2 h(x, t) + \frac{\lambda}{2} (\nabla h(x, t))^2 + \zeta(x, t), \quad (10.35)$$

où $\zeta(x, t)$ est un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance $\langle \zeta(x, t) \zeta(x', t') \rangle = D \delta(x - x') \delta(t - t')$. Ces deux égalités (10.31, 10.34) permettent donc une approche analytique des fluctuations dans les modèles de croissance stochastique dans la classe d’universalité de KPZ (10.35) par ces modèles de marcheurs répulsifs. On en déduit que les fluctuations du champ de hauteur en géométrie circulaire sont génériquement décrites par $\mathcal{F}_2(\xi)$, *i.e.* qu’il existe des paramètres a et b non universels (reliés aux paramètres ν et λ dans l’Eq. (10.35)) tels que, lorsque $t \rightarrow \infty$

$$\Pr \left[\frac{h_{\text{drop}}(0, t) - at}{bt^{1/3}} \leq \xi \right] = \mathcal{F}_2(\xi). \quad (10.36)$$

Ces fluctuations du champ de hauteur en géométrie circulaire ont récemment été mesurées expérimentalement par Takeuchi et Sano [324] lors d’expériences d’électro-convection dans des cristaux liquides nématiques, montrant un excellent accord avec la distribution de Tracy-Widom pour $\beta = 2$ (10.36).

Dans le cas de la géométrie plate, on peut également montrer l'existence d'un processus limite, similaire à l'Eq. (10.34) dans le cas de la géométrie courbe : ce processus a été baptisé le processus d'Airy₁ [325]. En effet, dans ce cas on peut montrer qu'il existe des paramètres a et b non universels tels que, quand $t \rightarrow \infty$ [326]

$$\Pr \left[\frac{h_{\text{flat}}(0, t) - a t}{b t^{1/3}} \leq \xi \right] = \mathcal{F}_1(\xi) . \quad (10.37)$$

Toutefois, bien que le processus Airy₂ soit relié à la plus grande valeur propre du mouvement Brownien de Dyson pour des matrices GUE (10.27, 10.31), on peut montrer que le processus Airy₁ *n'est pas* relié à la plus grande valeur propre du mouvement Brownien de Dyson pour des matrices GOE ($\beta = 1$) [327], contrairement à ce que pourrait laisser penser cette équation (10.37). Ces fluctuations du champ de hauteur en géométrie plate ont été mesurées dans des études expérimentales de front de combustion [328], montrant un accord qualitatif avec cette relation (10.37).

Dans la référence [330], nous avons proposé de caractériser les fluctuations du champ de hauteur $h_{\text{drop}}(x, t)$ en géométrie circulaire, au-delà de la "simple" rugosité, en considérant la hauteur maximale M ainsi que sa position X_M , voir Fig. 10.4. Bien sûr on s'attend à ce que $M - 2t \sim t^{1/3}$ et $X_M \sim t^{2/3}$. D'après l'Eq. (10.34), la distribution de probabilité jointe $P_t(M, X_M)$ de M et X_M s'écrit

$$P_t(M, X_M) \sim t^{-1} \mathcal{P}_{\text{Airy}} \left((M - 2t)t^{-\frac{1}{3}}, X_M t^{-\frac{2}{3}} \right) , \quad (10.38)$$

où $\mathcal{P}_{\text{Airy}}(y, x)$ est la distribution de probabilité jointe du maximum y et de sa position x du processus $\mathcal{A}_2(u) - u^2$. Par ailleurs, la relation (10.31) nous dit aussi que cette distribution jointe peut être calculée à partir des statistiques d'extrêmes du modèle de pastèques que nous avons étudié dans les références [329, 330, 331] et sur lesquelles je reviendrai dans la suite dans le paragraphe 10.2. L'étude des statistiques d'extrême d'interfaces dans la classe de KPZ, grâce à ces relations avec les modèles de pastèques, constitue une part importante de la thèse de J. Rambeau que j'encadre depuis septembre 2008.

Ces questions sont intéressantes pour un autre modèle : celui du polymère dirigé en milieu aléatoire (DPRM pour *Directed Polymer in Random Media*). En effet, il est bien connu que ces modèles de croissance dans la classe de KPZ sont reliés à des modèles de DPRM [308, 309]. C'est aussi bien sûr le cas du modèle PNG et pour rendre cette connexion aussi claire que possible, nous considérons une version discrète, en temps et en espace, du modèle PNG où $h(x, t) \in \mathbb{N}$, avec $x \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{N}$. A l'instant $t = 0$ on a

$$h(x, 0) = 0 , \quad \forall x \in \mathbb{Z} , \quad (10.39)$$

et $h(x, t)$ évolue ensuite selon la dynamique

$$h(x, t + 1) = \max [h(x - 1, t), h(x, t), h(x + 1, t)] + \omega(x, t + 1) , \quad (10.40)$$

où le premier terme, déterministe, du membre de droite correspond à la croissance latérale des îlots (Fig. 10.3) tandis que $\omega(x, t) \in \mathbb{N}$ est une variable aléatoire positive,

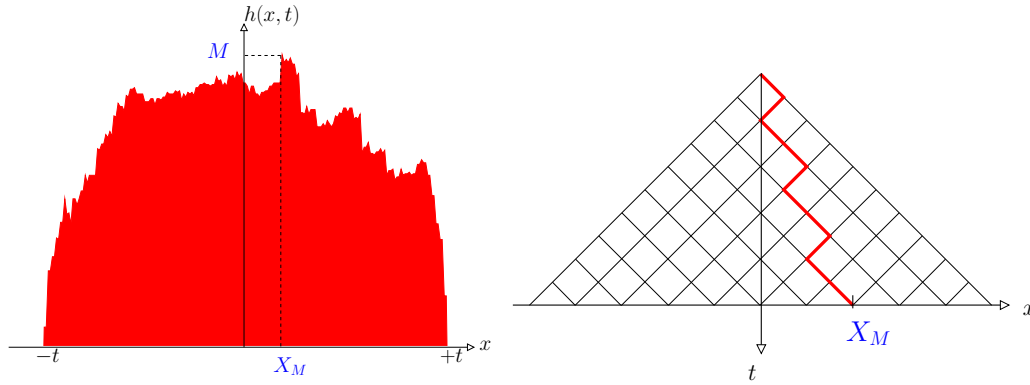


FIGURE 10.4.: **Gauche** : Profil de hauteur $h(x, t)$ à t fixé, comme une fonction de x dans le modèle PNG. X_M est la position pour laquelle ce champ de hauteur atteint sa valeur maximale M . **Droite** : Polymère dirigé avec une extrémité fixe. Dans ce modèle, M correspond à l'énergie du polymère optimal tandis que $X_M \sim \mathcal{O}(t^{2/3})$ correspond à la position terminale de ce polymère.

indépendante de site à site, qui correspond donc au processus de nucléation. Dans le cas de la géométrie circulaire, on a $\omega(x, t) = 0$ si $|x| > t$ tandis que cette contrainte est absente dans la géométrie plate. Pour "visualiser" le lien entre ce modèle (10.40) et le modèle correspondant du polymère dirigé il est commode de faire une rotation des axes x, t (Fig. 10.5) et de définir

$$\omega(i - j, i + j - 1) \equiv w(i, j) . \quad (10.41)$$

On peut alors montrer simplement (par exemple par récurrence sur t) que le champ de hauteur $h_{\text{drop}}(x, t)$ évoluant avec (10.40) dans la géométrie circulaire est donné par

$$h_{\text{drop}}(X, t) = \max_{\mathcal{C} \in \mathfrak{P}_t(0, X)} \left[\sum_{(i, j) \in \mathcal{C}} w(i, j) \right] , \quad (10.42)$$

où $\mathfrak{P}_t(0, X)$ est l'ensemble des chemins de longueur t partant de $x = 0$ et terminant en un point d'abscisse X (Fig. 10.5), ce qui établit un lien direct entre ce modèle PNG et un modèle de polymère dirigé. En effet le champ de hauteur $h_{\text{drop}}(x, t)$, dans la géométrie circulaire, correspond à l'énergie du polymère dirigé optimal (c'est-à-dire ici d'énergie maximale) dont les deux extrémités sont fixées en 0 et en x et dont l'énergie, en chaque site, est $w(i, j)$. Le résultat énoncé plus haut (10.36) montre donc que la distribution de l'énergie du polymère optimal est, dans ce cas, décrite par $\mathcal{F}_2$, la distribution de Tracy-Widom pour $\beta = 2$. L'étude de cette distribution pour des modèles de DPRM en espace continu a récemment été l'objet de nombreux travaux en physique [26, 27] et en mathématiques [332].

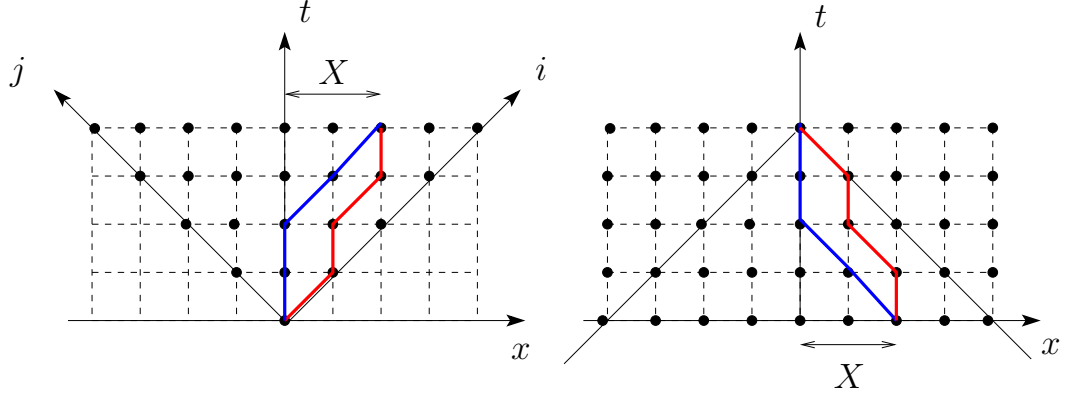


FIGURE 10.5.: **Gauche** : Modèle de polymère dirigé en milieu aléatoire correspondant au modèle PNG en géométrie circulaire (10.42). Les points $\bullet$ correspondent aux nucléations dans le modèle de croissance. En rouge et bleu on a représenté deux configurations du polymère appartenant à l'ensemble $\mathfrak{P}_t(0, X)$. **Droite** : Modèle de polymère dirigé en milieu aléatoire correspondant au modèle PNG en géométrie plate (10.43). En rouge et bleu on a figuré deux configurations du polymère appartenant à l'ensemble $\mathfrak{P}_t(X, 0)$, qui est équivalent à $\mathfrak{P}_t(0, X)$ représenté à gauche.

De façon similaire, on peut aussi écrire la valeur du champ de hauteur $h_{\text{flat}}(0, t)$ en géométrie plate (ici bien sûr les fluctuations du champ de hauteur sont invariantes par translation le long de l'axe des x). On a en effet :

$$h_{\text{flat}}(0, t) = \max_{-t \leq X \leq t} \left[\max_{\mathcal{C} \in \mathfrak{P}_t(X, 0)} \left[\sum_{(i, j) \in \mathcal{C}} w(i, j) \right] \right], \quad (10.43)$$

où $\mathfrak{P}_t(X, 0)$ est l'ensemble des chemins de longueur t partant de X et terminant au point d'abscisse 0. Puisque ces deux ensembles $\mathfrak{P}_t(X, 0)$ et $\mathfrak{P}_t(0, X)$ sont identiques (Fig. 10.5), ces deux équations (10.42) et (10.43) permettent en particulier d'écrire [333]

$$h_{\text{flat}}(0, t) = \max_{-t \leq X \leq t} h_{\text{drop}}(X, t). \quad (10.44)$$

Pour le polymère dirigé, $h_{\text{flat}}(0, t)$ correspond donc à l'énergie du polymère optimal dont seule une extrémité est fixée tandis que X dans (10.44) correspond à l'abscisse du polymère optimal (Fig. 10.4). Le résultat en Eq. (10.37) montre que dans ce cas l'énergie du polymère optimal est distribuée selon $\mathcal{F}_1$, un résultat qui semble beaucoup moins connu. Ce modèle de polymère dirigé avec une seule extrémité fixée a été beaucoup étudié dans le contexte de la physique des systèmes désordonnés [334], notamment dans l'approximation du "toy model" où le processus d'Airy₂, $\mathcal{A}_2(u)$ dans

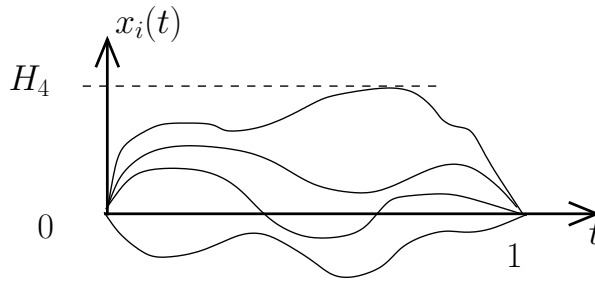


FIGURE 10.6.: Hauteur maximale H_p pour $p = 4$ d'une configuration en pastèques sans mur (ponts Browniens contraints à ne pas se croiser).

(10.44, 10.34) est remplacé par un mouvement Brownien [260, 334]. Nous renvoyons à la référence [335] pour une discussion récente des propriétés du "toy model". Notons enfin que des propriétés analogues à la distribution de la position terminale du polymère ont été étudiées dans la littérature pour d'autres géométries, comme la distribution du nombre de tours que fait le polymère optimal sur un cylindre [336].

Nous terminons ce paragraphe sur le processus d'Airy en mentionnant qu'il intervient également dans des problèmes de pavage de région du plan, comme celui du "diamant aztèque", où ce processus $\mathcal{A}_2(u) - u^2$ décrit les fluctuations autour du "cercle arctique" (Fig. 7.8). Nous renvoyons le lecteur à l'article de Johansson [241] pour plus de détail sur ce problème très intéressant.

10.2. Statistiques d'extrêmes pour le modèle de marcheurs répulsifs

Nous revenons maintenant au cas où p est fini et allons nous intéresser aux statistiques d'extrêmes dans ces modèles de "pastèques" (avec et sans mur) en considérant la hauteur maximale H_p d'une telle configuration [voir Fig. 10.6]

$$H_p = \max_{0 \leq t \leq 1} x_p(t) . \quad (10.45)$$

En particulier, nous nous intéressons à la distribution cumulée de cette variable aléatoire $F_p(M) = \Pr[H_p \leq M]$ et à ses moments $\langle H_p^s \rangle$. Pour $p = 1$, il existe un résultat bien connu [337] pour le pont Brownien $\langle H_1 \rangle = \sqrt{\pi/8}$ [que l'on obtient aisément à partir de la formule obtenue précédemment (8.19)]. De même, pour une excursion, on a $\langle H_1 \rangle = \sqrt{\pi/2}$, un résultat dû à de Bruijn, Knuth et Rice [338]. Plus récemment, Bonichon et Mosbah (B&M) [339], en utilisant un algorithme fondé sur des formules d'énumération exactes de ces configurations de marcheurs (où le temps *et* l'espace sont discrétisés) [311], ont conjecturé, à partir de leurs simulations numériques que pour $p > 1$

$$\langle H_p \rangle_{\text{num}} \simeq \begin{cases} \sqrt{0.82p - 0.46} , & \text{sans mur} , \\ \sqrt{1.67p - 0.06} , & \text{avec un mur} . \end{cases} \quad (10.46)$$

Ces résultats ont récemment stimulé un certain nombre de travaux, [315, 316, 317, 340, 341] visant à une compréhension analytique de ces estimations de B&M (10.46).

En fait, en utilisant les formules que nous avons établies plus haut (10.30, 10.33), reposant sur la connexion entre ces modèles de marcheurs répulsifs et les matrices aléatoires, il est facile de voir que cette estimation (10.46) ne peut pas être le comportement asymptotique exact de $\langle H_p \rangle$ pour $p \rightarrow \infty$. En effet ces formules (10.30, 10.33) indiquent que dans les deux cas $x_p(t)$ a une trajectoire, à l'ordre dominant en p , qui est déterministe et donnée simplement par $x_p(t) \sim A\sqrt{p}\sqrt{t(1-t)}$ avec $A = 2$ pour les ponts Browniens et $A = 2^{3/2}$ pour les excursions. Le maximum H_p est donc atteint pour $t = 1/2$ (nous étudierons ci-dessous les fluctuations de la position du maximum autour de $t = 1/2$) et on obtient donc les résultats, exacts dans la limite $p \rightarrow \infty$

$$\langle H_p \rangle \simeq \begin{cases} \sqrt{p}, & \text{sans mur,} \\ \sqrt{2p}, & \text{avec un mur,} \end{cases} \quad (10.47)$$

qui sont en contradiction avec les estimations numériques de B&M (10.46). Motivés par cette observation, nous proposons dans la suite un calcul exact de la distribution cumulée du maximum $F_p(M)$.

Comme nous l'avons déjà observé plus haut, ces configurations en pastèques sont mal définies et nous utilisons ici la même régularisation que celle utilisée plus haut où les p marcheurs commencent, en $t = 0$, et terminent, en $t = 1$, en $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots < \epsilon_p$. Une fois cette régularisation faite, nous calculons $F_p(M)$ en procédant comme nous l'avons fait précédemment dans le cas d'une seule particule (7.43), c'est-à-dire en imposant un mur absorbant en $x = M$ (7.44). $F_p(M)$ est alors donnée par

$$F_p(M) = \lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \left[\frac{N(\epsilon, M)}{N(\epsilon, M \rightarrow \infty)} \right], \quad (10.48)$$

où $N(\epsilon, M)$ est le propagateur des p marcheurs Browniens, partant de $0 < \epsilon_1 < \dots < \epsilon_p$ à $t = 0$ et terminant aux mêmes points à $t = 1$, conditionnés à ne pas se croiser et à rester dans l'intervalle $[\mu, M]$, avec $\mu \rightarrow -\infty$ (respectivement $\mu = 0$) pour les ponts Browniens (respectivement pour les excursions).

Pour calculer ce propagateur $N(\epsilon, M)$, nous utilisons la méthode introduite plus haut utilisant l'intégrale de chemin (10.8-10.10) en incorporant ici la contrainte que les Browniens sont contraints à rester dans l'intervalle $[\mu, M]$. On obtient alors

$$N(\epsilon, M) = \langle \epsilon | e^{-\hat{H}_M} | \epsilon \rangle, \quad (10.49)$$

avec $\hat{H}_M = \sum_{i=1}^p \hat{h}_{M,i}$, $\hat{h}_{M,i} = \frac{-1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x_i)$, où $V(x)$ est un potentiel confinant avec $V(x) = 0$ si $x \in [\mu, M]$ et $V(x) = \infty$ en dehors de cet intervalle. On peut alors exprimer $N(\epsilon, M)$ en terme des déterminants de Slater (10.10) formés à partir des fonctions propres du Hamiltonien à une seule particule $\hat{h}_{M,i}$.

Pastèques sans mur. Dans le cas des ponts Browniens, pour lesquels $\mu \rightarrow -\infty$, les fonctions propres de $\hat{h}_{M,i}$ sont données simplement par $\psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin[k(M-x)]$

10.2 Statistiques d'extrêmes pour le modèle de marcheurs répulsifs

avec un spectre continu $E_k = k^2/2$, et $k \in \mathbb{R}^+$. Dans la limite $\epsilon_i \rightarrow 0$, on obtient alors, après quelques manipulations [329]

$$\begin{aligned}
 F_p(M) &= \frac{B_p}{M^{p^2}} \int_0^\infty dy_1 \cdots \int_0^\infty dy_p e^{-\frac{\mathbf{y}^2}{2M^2}} \Theta_p(\mathbf{y})^2, \\
 \Theta_p(\mathbf{y}) &= \det_{1 \leq i, j \leq p} y_i^{j-1} \cos(y_i + j \frac{\pi}{2}) \\
 &= \begin{vmatrix} \cos(y_1 + \frac{\pi}{2}) & \cos(y_2 + \frac{\pi}{2}) & \cdots & \cos(y_p + \frac{\pi}{2}) \\ y_1 \cos(y_1 + \pi) & y_2 \cos(y_2 + \pi) & \cdots & y_p \cos(y_p + \pi) \\ y_1^2 \cos(y_1 + \frac{3\pi}{2}) & y_2^2 \cos(y_2 + \frac{3\pi}{2}) & \cdots & y_p^2 \cos(y_p + \frac{3\pi}{2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{p-1} \cos(y_1 + \frac{p\pi}{2}) & y_2^{p-1} \cos(y_2 + \frac{p\pi}{2}) & \cdots & y_p^{p-1} \cos(y_p + \frac{p\pi}{2}) \end{vmatrix},
 \end{aligned} \tag{10.50}$$

où $B_p = 2^{2p}/[(2\pi)^{p/2} \prod_{j=1}^p \Gamma(j+1)]$. On peut encore effectuer les intégrales sur les variables y_i dans cette expression (10.50) en utilisant l'identité de Cauchy-Binet

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^\infty dx_1 \cdots \int_{-\infty}^\infty dx_p \det_{1 \leq i, j \leq p} f_i(x_j) \det_{1 \leq i, j \leq p} g_i(x_j) \\
 = p! \det_{1 \leq i, j \leq p} \int_{-\infty}^\infty dx f_i(x) g_j(x), \tag{10.51}
 \end{aligned}$$

pour toutes fonctions $f_i(x)$ et $g_i(x)$ intégrables sur $\mathbb{R}$. On obtient alors une expression de $F_p(M)$ sous la forme d'un déterminant, retrouvant l'expression obtenue par Feierl en Ref. [317] (par une méthode combinatoire),

$$\begin{aligned}
 F_p(M) &= \frac{1}{\prod_{j=0}^{p-1} (j! 2^j)} \det D \\
 D_{i,j} &= (-1)^{i-1} H_{i+j-2}(0) - e^{-2M^2} H_{i+j-2}(\sqrt{2}M), \tag{10.52}
 \end{aligned}$$

où $H_n(x)$ dénote le polynôme d'Hermite d'ordre n . A partir de cette expression (10.52), on obtient par exemple $F_2(M) = 1 - 4M^2 e^{-2M^2} - e^{-4M^2}$. A l'aide de ces expressions (10.50), (10.52), on peut bien sûr calculer les moments $\langle H_p^s \rangle$, par exemple

$$\langle H_2 \rangle = \frac{1+\sqrt{2}}{4} \sqrt{\pi}, \quad \langle H_3 \rangle = \frac{45+36\sqrt{2}-8\sqrt{6}}{96} \sqrt{\pi}, \tag{10.53}$$

en accord (à l'ordre dominant) avec les résultats obtenus par Feierl [317] par une approche combinatoire du problème des marcheurs en temps et espace discrets (chemins de Dyck) conditionnés à ne pas se croiser.

Sur la Fig. 10.7, nous montrons une comparaison entre les valeurs exactes de $\langle H_p \rangle^2$ qui peuvent être calculées aisément avec Mathematica à partir de (10.52) et l'estimation de M&B pour ce cas (10.46). Cette comparaison montre clairement que cette estimation, à partir de résultats numériques, correspond au régime pré-asymptotique. Pour $p \gg 1$, on s'attend au comportement $\langle H_p \rangle \propto \sqrt{p}$ (10.47). Nous renvoyons le lecteur à la Ref. [329] pour une étude un peu plus détaillée de ce régime pré-asymptotique à partir de la formule ci-dessus (10.50).

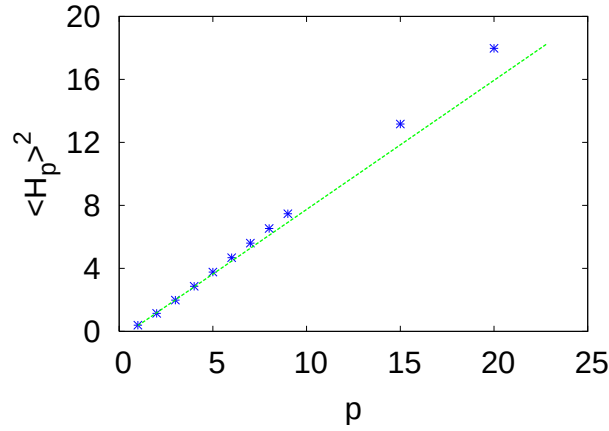


FIGURE 10.7.: $\langle H_p \rangle^2$ en fonction de p pour des ponts Browniens contraints à ne pas se croiser. Les points correspondent aux valeurs exactes calculées à partir de l'Eq. (10.52) tandis que la ligne en pointillés correspond à l'estimation de B&M (10.46). Cette comparaison indique que cette estimation ne décrit que le régime pré-asymptotique, au-delà duquel $\langle H_p \rangle^2 \sim p$.

Pastèques avec un mur. La même méthode peut être appliquée dans ce cas où $\mu = 0$ dans le Hamiltonien $\hat{H}_M$ (10.49). Les fonctions propres du Hamiltonien à une particule $\hat{h}_{M,i}$ sont ici données par $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{M}} \sin \frac{n\pi x}{M}$ et les valeurs propres intervenant dans la formule (10.9) pour évaluer $N(\epsilon, M)$ dans (10.48), (10.49) sont discrètes. On obtient alors dans ce cas [329]

$$F_p(M) = \frac{A_p}{M^{2p^2+p}} \sum_{n_1, \dots, n_p} \prod_{i=1}^p n_i^2 \prod_{1 \leq j < k \leq p} (n_j^2 - n_k^2)^2 e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} \sum_{i=1}^p n_i^2}, \quad (10.54)$$

où $A_p = \pi^{2p^2+p} / [2^{p^2-p/2} \prod_{j=0}^{p-1} \Gamma(2+j) \Gamma(\frac{3}{2}+j)]$ peut être obtenu à partir d'une intégrale de Selberg [329]. Nous mentionnons également que, en utilisant les formules de Poisson-Jacobi ainsi qu'une version discrète de la formule de Cauchy-Binet (10.51), $F_p(M)$ peut encore s'écrire comme un déterminant, similaire au cas sans mur (10.52). En effectuant ces manipulations dans le cas $p = 2$, on vérifie que cette formule (10.54) redonne le résultat de Katori, Kobayashi et Izumi [340]. Ces mêmes manipulations conduisent, pour p quelconque à l'expression suivante [342] :

$$F_p(M) = (-1)^p \frac{1}{2^{p^2} \prod_{j=1}^p (2j-1)!} \det D_E$$

$$D_{E,i,j} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{2(i+j-1)}(\sqrt{2}Mn) e^{-2M^2 n^2}. \quad (10.55)$$

Dans ce cas, l'étude des moments $\langle H_p^s \rangle$ se révèle beaucoup plus délicate, à cause de sommes discrètes (10.54), (10.55) que dans le cas précédent. Le calcul de ces moments

10.3 Liens avec les théories de Yang-Mills et distribution de Tracy-Widom

impliquent des sommes de Dirichlet multi-dimensionnelles particulièrement difficiles à analyser [315, 316]. Toutefois, comme dans le cas sans mur, on s'attend à ce que l'estimation de B&M (10.46) ne décrive que le régime préasymptotique de $\langle H_p \rangle$, le comportement exact dans la limite $p \rightarrow \infty$ étant donné par $\langle H_p \rangle \sim \sqrt{2p}$ (10.47). Nous reviendrons sur ce résultat (10.54) plus en détail dans le paragraphe suivant 10.3.

Avant cela, nous mentionnons que dans la référence [330] nous avons étendu l'approche présentée ici au calcul de la distribution $P_p(M, t_M)$ jointe du maximum et de sa position $t_M \in [0, 1]$, *i.e.* telle que $x_p(t_M) = H_p$ en Eq. (10.45) (voir Fig. 7.3). Par exemple, dans le cas des excursions Browniennes, nous avons obtenu l'expression suivante :

$$P_p(M, t_M) = \frac{C_p}{M^{2p^2+p+3}} \sum_{n_1, \dots, n_p, n'_p} (-1)^{n_p+n'_p} n_p^2 n'_p{}^2 \prod_{i=1}^{p-1} n_i^2 \Delta_p(n_1^2, \dots, n_{p-1}^2, n_p^2) \\ \times \Delta_p(n_1^2, \dots, n_{p-1}^2, n'_p{}^2) e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} [\sum_{i=1}^{p-1} n_i^2 + (1-t_M) n'_p{}^2 + t_M n_p^2]}, \quad (10.56)$$

où $\Delta_p(x_1, \dots, x_p) = \prod_{1 \leq i < j \leq p} (x_i - x_j)$ et C_p est une constante de normalisation. Dans la limite $p \rightarrow \infty$, cette distribution $P_p(M, t_M)$ donne accès à la distribution de M, X_M pour le modèle du PNG ou, de façon équivalente, pour le problème du polymère dirigé avec une extrémité libre (Fig. 10.4). D'après l'Eq. (10.31), on a en effet

$$P_p(M, t_M) \sim 2p^{\frac{1}{2}} \mathcal{P}_{\text{Airy}} \left((M - \sqrt{p}) p^{\frac{1}{6}}, 2(t_M - \frac{1}{2}) p^{\frac{1}{3}} \right), \quad (10.57)$$

où la même distribution jointe $\mathcal{P}_{\text{Airy}}(y, x)$ intervient dans l'Eq. (10.38). L'étude analytique de cette expression (10.56) dans la limite $p \rightarrow \infty$ reste toutefois difficile. Néanmoins, nous allons montrer dans le paragraphe suivant, comment on peut étudier analytiquement la distribution du maximum (10.54) dans la limite $p \rightarrow \infty$.

10.3. Liens avec les théories de Yang-Mills et distribution de Tracy-Widom

Récemment, nous avons montré que l'expression que nous avons obtenue pour $F_p(M)$ pour des excursions Browniennes (10.54) apparaissait dans un tout autre contexte : les théories de Yang-Mills (YM) bi-dimensionnelles sur une sphère. Plus généralement, considérons une surface bi-dimensionnelle orientable $\mathcal{M}$ (dont l'élément de surface est donnée par $\sqrt{g} d^2x$) sur laquelle est définie une théorie de Yang-Mills avec un groupe de jauge $\mathcal{G}$. A partir du champ de jauge $A_\mu(x) \equiv A_\mu^a(x) T^a$, où les T^a sont les générateurs du groupe $\mathcal{G}$, on définit le tenseur de Faraday $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu], \quad (10.58)$$

où $[C, D] \equiv CD - DC$, de telle sorte que $\text{Tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ est un invariant de jauge. La fonction de partition de YM est alors donnée par l'intégrale fonctionnelle

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{M}} = \int [\mathcal{D}A^\mu] e^{-(1/4\lambda^2) \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g} \text{Tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^2x}. \quad (10.59)$$

Dans le cas où $\mathcal{M}$ est une sphère d'aire $A/(\lambda^2 p)$, cette fonction de partition peut être évaluée comme une somme sur les représentations irréductibles du groupe de jauge [343]. Dans le cas particulier où ce groupe de jauge est le groupe symplectique $\text{Sp}(2p)$, cette fonction de partition s'écrit (nous renvoyons à notre article [331] pour une description plus détaillée et "pédagogique" du calcul de cette fonction de partition)

$$\mathcal{Z}(A; \text{Sp}(2p)) = \hat{c}_p e^{A(p-1/2)(p-1)/12} \sum_{n_1, \dots, n_p = -\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^p n_j^2 \prod_{1 \leq i < j \leq p} (n_i^2 - n_j^2)^2 e^{-\frac{A}{4p} \sum_{j=1}^p n_j^2}, \quad (10.60)$$

où la constante $\hat{c}_p$ est indépendant de l'aire A . En comparant cette expression à l'expression que nous avons obtenue plus haut pour la distribution cumulative $F_p(M)$ (10.54), on obtient l'identité

$$F_p(\sqrt{2ph}) = \frac{A_p}{(\sqrt{2ph})^{2p^2+p}} e^{-\pi^2(p-1/2)(p-1)/12h^2} \mathcal{Z}\left(\frac{\pi^2}{h^2}; \text{Sp}(2p)\right). \quad (10.61)$$

Nous remarquons que ce groupe symplectique est apparu précédemment lorsque nous avons discuté le mouvement Brownien de Dyson associé à ces excursions Browniennes (10.29). Grâce à cette connexion (10.61), on peut exploiter les résultats obtenus dans la limite où $p \rightarrow \infty$ obtenus dans le contexte de la théorie de Yang-Mills sur la sphère [344, 345, 346]. Comme l'ont montré Douglas et Kazakov [344], cette fonction de partition $\mathcal{Z}(A; \text{Sp}(2p))$ présente une transition de phase du troisième ordre¹ à la valeur critique $A = \pi^2$ qui sépare une phase de faible couplage pour $A < \pi^2$ et une phase de fort couplage pour $A > \pi^2$. En utilisant la correspondance $M^2 = 2p(\pi^2/A)$, on identifie le régime de faible couplage avec la région $M < \sqrt{2p}$ et la région de fort couplage avec la région $M > \sqrt{2p}$. Le régime critique de la théorie des champs, autour de $A = \pi^2$, le régime de "double limite d'échelle" dans le contexte du modèle de matrice, et qui est d'ordre $p^{-2/3}$ pour le modèle de matrice, correspond précisément à la région, d'ordre $\mathcal{O}(p^{-1/6})$, où $F_p(M)$ est décrit par la distribution de Tracy-Widom $\mathcal{F}_1$. Ces résultats asymptotiques utilisent la méthode des polynômes orthogonaux initialement développés pour le modèle $U(p)$ par Gross et Matytsin [345]. Ils permettent en effet de montrer que $F_p(M)$, dans ce régime d'échelle, peut s'exprimer en terme de la solution d'une équation de Painlevé II (7.60) comme indiqué plus haut (7.62). Nous avons en effet montré que [331]

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F_p\left(\sqrt{2p}(1 + t/(2^{7/3}p^{2/3}))\right) = \mathcal{F}_1(t), \quad (10.62)$$

où $\mathcal{F}_1(t)$ est donnée en Eq. (7.62). Ce résultat avait été obtenu précédemment par Johansson, mais de façon très indirecte [221]. En effet on utilisant tout d'abord la relation entre le modèle de pastèques et le modèle de croissance $x_p(\tau) \sim h_{\text{drop}}(x, t)$ (10.31) puis la relation entre $h_{\text{drop}}(x, t)$ en géométrie circulaire et $h_{\text{flat}}(0, t)$ (10.44) en géométrie plate, on s'attend en effet, en utilisant le résultat pour les fluctuations de

1. Douglas et Kazakov ont obtenu ce résultat dans le cas où le groupe de jauge est le groupe unitaire $U(p)$ mais le scénario est identique ici.

10.3 Liens avec les théories de Yang-Mills et distribution de Tracy-Widom

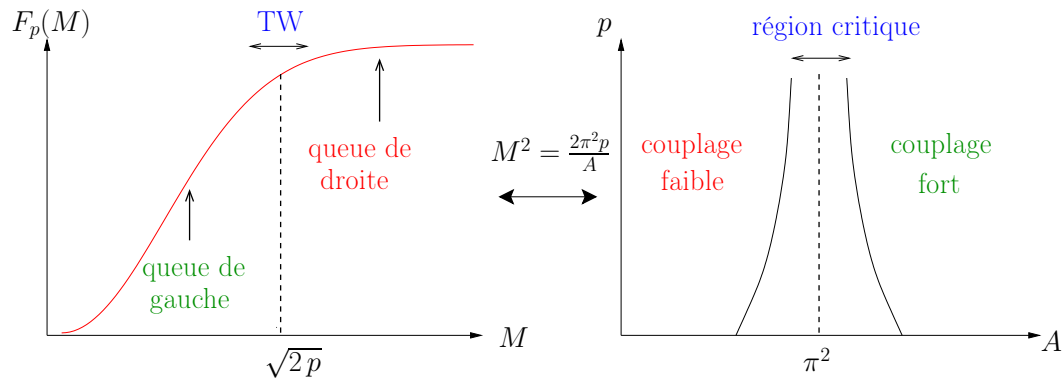


FIGURE 10.8.: **Gauche** : Représentation schématique de $F_p(M)$ en fonction de M à p fixé mais grand. **Droite** : Schéma du diagramme des phases de la théorie de YM sur la sphère avec le groupe de jauge $\text{Sp}(2p)$. Le régime de faible (fort) couplage correspond à la queue droite (gauche) de la distribution $F_p(M)$. La région critique autour de $A = \pi^2$ dans la figure de droite correspond au régime où $F_p(M)$ est donnée par la distribution de Tracy-Widom, pour $\beta = 1$ autour du point critique $M = \sqrt{2p}$.

$h_{\text{flat}}(0, t)$ (10.37) à ce que $F_p(M)$, correctement centrée et a-dimensionnée, converge vers $\mathcal{F}_1(t)$, la distribution de Tracy-Widom pour $\beta = 1$. Ici [331], nous avons obtenu cette distribution $\mathcal{F}_1(t)$ par un calcul direct (10.62). Nous renvoyons le lecteur à notre article [331] pour plus de détail sur la dérivation de cette relation ainsi que sur l'analyse des grandes déviations autour de $M = \sqrt{2p}$. Dans cet article nous avons également mis en évidence d'autres modèles de mouvements Browniens reliés aux théories de YM avec d'autres groupes de jauge, $\mathcal{G} = \text{U}(p)$ et $\mathcal{G} = \text{SO}(2p)$. Une compréhension plus profonde de ces connexions entre modèles de marcheurs Browniens contraints à ne pas se croiser et les théories de YM bi-dimensionnelles est certainement un axe de recherche intéressant pour le futur.

Conclusion et perspectives

11

Dans ce manuscrit j'ai donc montré comment mes travaux sur les systèmes élastiques désordonnés m'ont naturellement conduit à l'étude des statistiques d'événements rares (propriétés de persistance) et les statistiques d'extrêmes. Bon nombre des questions soulevées ici sont, par nature, à la frontière entre la physique et les mathématiques. J'ai voulu montrer que mon travail, s'appuyant sur diverses méthodes de physique théorique, comme la théorie des champs et la renormalisation, l'intégrale de chemin ou l'étude des processus stochastiques, permettait d'apporter un éclairage nouveau, notamment en établissant des connexions entre différents problèmes a priori non reliés, et dans certains cas des réponses concrètes, à certaines de ces questions.

Certains résultats que j'ai présentés ici posent de nouvelles questions sur lesquelles j'ai l'intention de travailler dans le futur. Dans la première partie sur les systèmes élastiques désordonnés, j'ai attiré l'attention sur les propriétés de basse température du modèle SOS sur un substrat désordonné (1.1) qui demeurent mal comprises et il n'est pas exclu que ce modèle présente, à basse température, une transition de *gel*. En effet certaines de ses propriétés, notamment le fait que les fluctuations d'énergie libre soient logarithmiques (en fonction de la taille du système), laissent penser qu'il présente une physique assez proche de celle décrite par la brisure de symétrie des répliques dans les modèles en champ moyen [42] ou aux propriétés d'une particule dans un potentiel aléatoire avec des corrélations logarithmiques [174, 177, 178]. On peut par ailleurs étudier ce modèle numériquement à l'aide de l'algorithme de glissement de dominos [238] que j'ai évoqué au sujet du pavage du diamant aztèque (Fig. 7.8), qui est un algorithme polynomial et permet de s'affranchir des inconvénients d'une simulation Monte-Carlo pour de tels systèmes. Cet algorithme devrait permettre de comprendre en détail la phase de basse température de ce modèle.

Un autre axe de recherche concerne l'extension des méthodes de renormalisation dans l'espace réel que j'ai présentées au chapitre 8 pour étudier les statistiques d'extrêmes d'autres processus stochastiques. Durant ces dernières années, ces méthodes ont été étendues pour décrire diverses situations de dynamiques en milieu désordonnés [255], y compris en dimension spatiale $d = 2$ [347] et il serait intéressant d'en extraire des informations concernant les statistiques d'extrêmes.

Enfin le dernier chapitre de ce manuscrit m'a permis de montrer que ces modèles de marcheurs répulsifs sont un sujet d'étude très riche sur lequel j'ai encore l'intention de travailler dans le futur.

Bibliographie

- [1] S. Lemerle, J. Ferré, C. Chappert, V. Mathet, T. Giamarchi, P. Le Doussal, Phys. Rev. Lett. **80**, 849 (1998).
- [2] M. Bauer, A. Mougin, J. P. Jamet, V. Repain, J. Ferré, S. L. Stamps, H. Bernas, C. Chappert, Phys. Rev. Lett. **94**, 207211 (2005).
- [3] M. Yamanouchi, D. Chiba, F. Matsukura, T. Dietl, H. Ohno, Phys. Rev. Lett. **96**, 096601 (2006).
- [4] P. J. Metaxas, J. P. Jamet, A. Mougin, M. Cormier, J. Ferré, V. Baltz, B. Rodmacq, B. Dieny, R. L. Stamps, Phys. Rev. Lett. **99**, 217208 (2007).
- [5] P. Paruch, T. Giamarchi, J. M. Triscone, Phys. Rev. Lett. **94**, 197601 (2005).
- [6] P. Paruch, J. M. Triscone, Appl. Phys. Lett. **88**, 162907 (2006).
- [7] S. Moulinet, A. Rosso, W. Krauth, E. Rolley, Phys. Rev. E **69**, 35103(R) (2004).
- [8] P. Le Doussal, K. J. Wiese, S. Moulinet, E. Rolley, Europhys. Lett. **87**, 56001 (2009).
- [9] N. Martys, M. Cieplak, M. O. Robbins, Phys. Rev. Lett. **66**, 1058 (1991).
- [10] I. Hecht, H. Taitelbaum, Phys. Rev. E **70**, 046307 (2004).
- [11] E. Bouchaud, J. P. Bouchaud, D. S. Fisher, S. Ramanathan, J. R. Rice, J. Mech. Phys. Solids **50**, 1703 (2002).
- [12] M. Alava, P. K. V. V. Nukalaz, S. Zapperi, Adv. Phys. **55**, 349 (2006).
- [13] D. Bonamy, S. Santucci, L. Ponson, Phys. Rev. Lett. **101**, 045501 (2008).
- [14] L. Ponson, D. Bonamy, E. Bouchaud, Phys. Rev. Lett. **96**, 35506 (2006).
- [15] T. Nattermann, S. Brazovskii, Adv. Phys. **53**, 177 (2004).
- [16] G. Blatter, M. V. Feigelman, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, V. M. Vinokur, Rev. Mod. Phys. **66**, 1125 (1994).
- [17] T. Giamarchi, S. Bhattacharya, in *High Magnetic Fields : Applications in Condensed Matter Physics and Spectroscopy*, édité par C. Berthier et al. (Springer-Verlag, Berlin, 2002) p. 314, cond-mat/0111052.
- [18] X. Du, G. Li, E. Y. Andrei, M. Greenblatt, P. Shuk, Nature Physics **3**, 111 (2007).
- [19] T. Giamarchi, *Electronic glasses*, in *Quantum phenomena in mesoscopic systems*, edited by Italian Physical Society (IOS Press, Bologna, 2004) cond-mat/0403531.
- [20] A. I. Larkin, Y. N. Ovchinnikov, J. Low Temp. Phys **34**, 409 (1979).

Bibliographie

- [21] D. S. Fisher, Phys. Rev. B **31**, 1396 (1985).
- [22] M. Mézard, G. Parisi, J. de Phys. I **4**, 809 (1991).
- [23] P. Le Doussal, Ann. Phys. **325**, 49 (2010) ; K. J. Wiese, P. Le Doussal, Markov Processes Relat. Fields **13**, 777 (2007).
- [24] M. Kardar, Nucl. Phys. B **290**, 582 (1987).
- [25] J. P. Bouchaud, H. Orland, J. Stat. Phys. **61**, 877 (1990).
- [26] E. Brunet, B. Derrida, Phys. Rev. E **61**, 6789 (2000) ; Physica A **279**, 395 (2000).
- [27] V. Dotsenko, B. Klumov, J. Stat. Mech. P03022 (2010) ; P. Calabrese, P. Le Doussal, A. Rosso, Europhys. Lett. **90**, 20002 (2010).
- [28] S. Guruswamy, A. LeClair, A. W. W. Ludwig, Nucl. Phys. B **583** FS 475 (2000).
- [29] A. K. Hartmann, H. Rieger, *Optimization Algorithms in Physics*, Wiley-VCH, Berlin, (2001).
- [30] A. Rosso, W. Krauth, Phys. Rev. Lett. **87**, 187002 (2001).
- [31] J. L. Cardy, S. Ostlund, Phys. Rev. B **25**, 6899 (1982).
- [32] D. Carpentier, P. Le Doussal, Phys. Rev. B **55**, 12128 (1997).
- [33] C. Zeng, P. L. Leath, T. Hwa, Phys. Rev. Lett. **83**, 4860 (1999).
- [34] C. Zeng , A. A. Middleton, Y. Shapir, Phys. Rev. Lett. **77**, 3204 (1996).
- [35] H. Rieger, U. Blasum, Phys. Rev. B **55**, R7394 (1997).
- [36] T. Hwa, D. S. Fisher, Phys. Rev. Lett. **72**, 2466 (1994).
- [37] B. Drossel, M. Kardar, Phys. Rev. E **52**, 484 (1995).
- [38] G. Schehr, P. Le Doussal, Europhys. Lett. **71**(2), 290 (2005).
- [39] G. Schehr, H. Rieger, Phys. Rev. B **71**, 184202 (2005).
- [40] G. Schehr, P. Le Doussal, Phys. Rev. E **68**, 046101 (2003).
- [41] C. Mudry, S. Ryu, A. Furusaki, Phys. Rev. B **67**, 064202 (2003).
- [42] M. Mézard, G. Parisi, M. Virasoro, *Spin-Glass Theory and Beyond*, (Singapore : World Scientific), (1997).
- [43] T. Nattermann et al., J. Phys. I (France) **5**, 565 (1995).
- [44] D. Carpentier, P. Le Doussal, Phys. Rev. Lett. **81** 2558 (1998), Nucl. Phys. B **588** 565 (2000), Phys. Rev. E **63** 026110 (2001).
- [45] P. Le Doussal, G. Schehr, Phys. Rev. B **75**, 184401 (2007)
- [46] G. Parisi, N. Sourlas, Phys. Rev. Lett. **43**, 744 (1979).
- [47] S. Ryu, C. Mudry, A. W. W. Ludwig, A. Furusaki, Nucl. Phys. B **839**, 341 (2010)
- [48] A. J. Bray, M. A. Moore, Phys. Rev. Lett. **58**, 57 (1987).
- [49] M. Ney-Nifle, A. P. Young, J. Phys. A **30**, 5311 (1997).
- [50] D. S. Fisher, D. Huse, Phys. Rev. B **43**, 10728 (1991).

-
- [51] F. Krzakala, J.-P. Bouchaud, Europhys. Lett., **72** (3), 472 (2005).
 - [52] Y. Shapir, Phys. Rev. Lett. **66**, 1473 (1991).
 - [53] P. Le Doussal, Phys. Rev. Lett. **96**, 235702 (2006).
 - [54] K. Schwarz, A. Karrenbauer, G. Schehr, H. Rieger, J. Stat. Mech., P08022 (2009).
 - [55] O. Duemmer, P. Le Doussal, preprint arXiv :0709.1378v1.
 - [56] M. Bauer, D. Bernard, Phys. Rep. **432**, 115 (2006).
 - [57] J. Cardy, Ann. Phys. **318**, 81 (2005).
 - [58] A. B. Kolton, A. Rosso, E. V. Albano, T. Giamarchi, Phys. Rev. B **74**, 140201(R) (2006) .
 - [59] A. B. Kolton, G. Schehr, P. Le Doussal, Phys. Rev. Lett. **103**, 160602 (2009).
 - [60] L. F. Cugliandolo, *Dynamics of glassy systems in Slow relaxation and none-equilibrium dynamics in condensed matter*, J. L. Barrat *et al.*, Springer-Verlag, 2002.
 - [61] P. Calabrese, A. Gambassi, J.Phys. A **38**, R133 (2005).
 - [62] O. Narayan, D. S. Fisher, Phys. Rev. B **48**, 7030 (1993).
 - [63] T. Nattermann, S. Stepanow, L.H. Tang, H. Leschhorn, J. Phys. II (France) **2** (1992) 1483
 - [64] P. Chauve, T. Giamarchi, P. Le Doussal, Phys. Rev. B **62**, 6241 (2000).
 - [65] P. Chauve, P. Le Doussal, K.J. Wiese, Phys. Rev. Lett. **86**, 1785 (2001) ; P. Le Doussal, K. J. Wiese, P. Chauve, Phys. Rev. B **66**, 174201 (2002).
 - [66] A. Rosso, W. Krauth, Phys. Rev. B **65**, 012202 (2001).
 - [67] A. Rosso, A. K. Hartmann, W. Krauth ; Phys. Rev. E **67**, 021602 (2003).
 - [68] A. J. Bray, Adv. Phys. **43**, 357 (1994).
 - [69] Cugliandolo L. F., Dynamics of glassy systems, dans *Slow relaxation and none-equilibrium dynamics in condensed matter*, J. L. Barrat *et al.*, Springer-Verlag, (2002).
 - [70] P. Calabrese, A. Gambassi, J. Phys. A **38**, R133-R193 (2005).
 - [71] S. O. Rice, Bell Syst. Tech. J. **23**, 282 (1944) ; **24**, 46 (1945).
 - [72] E. Sparre Andersen, Matematica Scandinavica **2**, 195 (1954).
 - [73] J. A. McFadden, IRE Trans. Inform. Theor **IT-4**, 14 (1957).
 - [74] G. F. Newell, M. Rosenblatt, Ann. Math. Stat. **33**, 1306 (1962).
 - [75] D. Slepian, Bell. Syst. Tech. J. **41**, 463 (1962).
 - [76] S. C. Chaturvedi, dans *Stochastic Processes, Formalism and Applications*, Lecture Notes in Physics, Vol. **184**, ed. par G. S. Agarwal et S. Dattagupta (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983), p. 19.
 - [77] B. Derrida, A. J. Bray, C. Godrèche, J. Phys. A **27**, L357 (1994) ; A. J. Bray, B. Derrida, C. Godrèche, Europhys. Lett. **27**, 175 (1994).

- [78] S. N. Majumdar, *Curr. Sci.* **77**, 370 (1999).
- [79] W. Y. Tam, R. Zeitak, K. Y. Szeto, J. Stavans, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1588 (1997); G. P. Wong, M. W. Ross, W. Ronald, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4156 (2001); D. B. Dougherty, I. Lyubinetzky, E. D. Williams, M. Constantin, C. Dasgupta, S. Das Sarma, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 136102 (2002); M. Constantin, S. Das Sarma, C. Dasgupta, O. Bondarchuk, D. B. Dougherty, E. D. Williams, *Phys. Rev. Lett.* **91** 086103 (2003); B. R. Conrad, W. G. Cullen, D. B. Dougherty, I. Lyubinetzky, E. D. Williams, *Phys. Rev. E* **75** 021603 (2007); J. Soriano, I. Braslavsky, D. Xu, O. Krichevsky, J. Stavans *Phys. Rev. Lett.* **103**, 226101 (2009).
- [80] W. Feller, *An introduction to Probability Theory and its applications*, (Wiley, New York, 1971), Vol. 1 & 2.
- [81] S. Redner, *A Guide to First-Passage Processes*, (Cambridge University Press, 2001).
- [82] S. N. Majumdar, notes d'un cours donné lors de l'école d'été "Fundamental Problems in Statistical Physics : XII" à Leuven, Belgique (2009), arXiv :0912.2586
- [83] J. -P. Bouchaud, notes d'un cours donné lors de l' "Ecole d'été de Beg Rohu" à Beg Rohu, France, (2008), [http ://ipht.cea.fr/Meetings/BegRohu2008/](http://ipht.cea.fr/Meetings/BegRohu2008/)
- [84] B. Derrida, V. Hakim, V. Pasquier, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 751 (1995); *J. Stat. Phys.* **85**, 763 (1996).
- [85] S. N. Majumdar, C. Sire, A. J. Bray, S. J. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2867 (1996); B. Derrida, V. Hakim, R. Zeitak, *ibid.* 2871.
- [86] T. J. Newman, W. Loinaz, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2712 (2001).
- [87] G. P. Wong, R. W. Mair, R. L. Walsworth, D. G. Cory, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4156 (2001).
- [88] S. N. Majumdar, C. Sire, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1420 (1996); C. Sire, S. N. Majumdar, A. Rudinger, *Phys. Rev. E* **61**, 1258 (2000).
- [89] K. Oerding, S. J. Cornell, A. J. Bray, *Phys. Rev. E* **56**, R25 (1997).
- [90] H. J. Hilhorst, *Physica A*, **277**, 124 (2000).
- [91] G. C. M. A. Ehrhardt, A. J. Bray, *Phys. Rev. Lett* **88**, 070601 (2002). 672 (1956).
- [92] S. N. Majumdar, A. J. Bray, S. J. Cornell, C. Sire, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3704 (1996).
- [93] K. Oerding, F. van Wijland, *J. Phys. A* **31**, 7011 (1998)
- [94] S. Cueille, C. Sire, *Eur. Phys. J. B* **7**, 111 (1999); E.V. Albano, M.A. Munoz, *Phys. Rev. E* **63**, 031104 (2001); S. Lubeck, A. Misra, *Eur. Phys. J. B* **26**, 75 (2002); R. da Silva, N. A. Alves, J. R. Drugowich de Felicio, *Phys. Rev. E* **67**, 057102 (2003)).
- [95] R. Paul, G. Schehr, *Europhys. Lett.* **72**, 719 (2005).
- [96] M. Henkel, M. Pleimling, *J. Stat. Mech.* P12012 (2009).

-
- [97] H. K. Janssen, B. Schaub, B. Schmittmann, Z. Phys. B **73**, 539 (1989).
 - [98] D. A. Huse, Phys. Rev. B **40**, 304 (1989).
 - [99] D. S. Fisher, P. Le Doussal, C. Monthus, Phys. Rev. Lett. **80**, 3539 (1998).
 - [100] H. Rieger, F. Igloi, Europhys. Lett. **45**, 673 (1999).
 - [101] D. P. Belanger, Braz. Journ. Phys. **30**(4), 682 (2000).
 - [102] A. B. Harris, J. Phys. C **7**, 1671 (1974).
 - [103] R. Folk, Y. Holovatch, T. Yavors'kii, Physics Uspekhi **46**, 169 (2003).
 - [104] Vik. S. Dotsenko, A. B. Harris, D. Sherrington, R. B. Stinchcombe, J. Phys. A : Math. Gen. **28**, 3093 (1995).
 - [105] Vik. S. Dotsenko, D. E. Feldman, J. Phys. A : Math. Gen. **28**, 5183 (1995).
 - [106] V. V. Prudnikov, P. V. Prudnikov, A. A. Fedorenko, Phys. Rev. B **63** 184201 (2001).
 - [107] A. A. Fedorenko, J. Phys. A : Math. Gen. **36** 1239 (2003).
 - [108] G. Tarjus, Vik. S. Dotsenko, J. Phys. A : Math. Gen. **35**, 1627 (2002).
 - [109] H. G. Ballesteros, L. A. Fernandez, V. Martin-Mayor, A. Munoz-Sudupe, Phys. Rev. B **58**, 2740 (1998).
 - [110] P. C. Hohenberg, B. I. Halperin, Rev. Mod. Phys. **49**, 435 (1977).
 - [111] J. G. Kissner J. G., Phys. Rev. B **46**, 2676 (1992).
 - [112] P. Calabrese, A. Gambassi, Phys. Rev. B **66**, 212407 (2002).
 - [113] G. Schehr, R. Paul, Phys. Rev. E **72**, 016105 (2005).
 - [114] Y. Holovatch, V. Blavatska, M. Dudka, C. von Ferber, R. Folk, T. Yavors'kii, notes de cours donné lors du "Second International Pamporovo Workshop on Cooperative Phenomena in Condensed Matter", à Pamporovo, Bulgarie (2001).
 - [115] U. Ritschel, H. W. Diehl, Nucl. Phys. B **464** [FS], 512 (1996).
 - [116] R. Paul, A. Gambassi, G. Schehr, Europhys. Lett. **78**, 10007, (2007).
 - [117] S. N. Majumdar, A. J. Bray, Phys. Rev. Lett. **91**, 030602 (2003).
 - [118] A. Gambassi, R. Paul, G. Schehr, à paraître dans J. Stat. Mech., preprint arXiv :1010.0560.
 - [119] A. Bloch, G. Pólya, Proc. London Math. Soc. (3) **33**, 102 (1932).
 - [120] A. T. Bharucha-Reid, M. Sambandham, *Random Polynomials*, Academic Press, New York, 1986.
 - [121] K. Farahmand, in *Topics in random polynomials*, Pitman research notes in mathematics series **393**, (Longman, Harlow) (1998).
 - [122] A. Edelman, E. Kostlan, Bull. Amer. Math. Soc. **32**, 1 (1995).
 - [123] E. Bogomolny, O. Bohigas and P. Leboeuf, Phys. Rev. Lett. **68**, 2726 (1992) ; J. Stat. Phys. **85**, 639 (1996).
 - [124] A. Dembo, B. Poonen, Q.-M. Shao, O. Zeitouni, J. Amer. Math. Soc. **15**, 857 (2002).

Bibliographie

- [125] M. Kac, Bull. Amer. Math. Soc. **49**, 314 (1943) ; Erratum : Bull. Amer. Math. Soc. **49**, 938 (1943).
- [126] P. Erdős, P. Turán, Ann. of Math. **51**, 105 (1950).
- [127] M. Das, J. Indian Math. Soc. **36**, 53 (1972).
- [128] J. E. Wilkins, Proc. Am. Math. Soc. **42**, 1249 (1988).
- [129] G. Schehr, S. N. Majumdar, Phys. Rev. Lett. **99**, 060603 (2007).
- [130] G. Schehr, S. N. Majumdar, J. Stat. Phys. **132**, 235 (2008).
- [131] M. Kratz, Thèse d'Habilitation à diriger les recherches, Université Pierre et Marie Curie, Paris I (2005).
- [132] C. Doche, M. Mendès-France, *Real roots!*, notes disponibles à l'url <http://web.science.mq.edu.au/~doche/realroots.pdf>.
- [133] A. P. Aldous, Y. V. Fyodorov, J. Phys. A : Math. Gen. **37**, 1231 (2004).
- [134] C. Godrèche, S. N. Majumdar, G. Schehr, Phys. Rev. Lett. **102**, 240602 (2009).
- [135] R. Garcia-Garcia, A. Rosso, G. Schehr, Phys. Rev. E **81**, 010102(R) (2010)
- [136] S. N. Majumdar, R. M. Ziff, Phys. Rev. Lett. **101**, 050601 (2008).
- [137] C. Godrèche, J. M. Luck, J. Stat. Mech., P11006 (2008).
- [138] P. Le Doussal, K. Wiese, Phys. Rev. E **79**, 051105 (2009).
- [139] G. Wergen, J. Krug, Europhys. Lett. **92**, 30008 (2010).
- [140] R. Garcia-Garcia, A. Rosso, G. Schehr, Phys. Rev. E **81**, 010102(R) (2010)
- [141] C. Godrèche, J. M. Luck, J. Stat. Phys. **104**, 489 (2001).
- [142] J. Pitman, M. Yor, Ann. Probab. **25**, 855 (1997).
- [143] S. R. Finch, *Mathematical constants*, p. 284-292, Cambridge University Press (2003).
- [144] A. Baldassari, J.-P. Bouchaud, I. Dornic, C. Godrèche, Phys. Rev. E **59**, R20 (1999).
- [145] B. B. Mandelbrot, J. W. van Ness, SIAM Review **10**, 422 (1968).
- [146] A. Hansen, T. Engoy, K. J. Maloy, Fractals **2**, 527 (1994) ; S. Maslov, M. Paczuski, P. Bak, Phys. Rev. Lett. **73**, 2162 (1994) ; M. Ding, W. Yang, Phys. Rev. E **52**, 207 (1995).
- [147] J. Krug, H. Kallabis, S. N. Majumdar, S. J. Cornell, A. J. Bray, C. Sire, Phys. Rev. E **56**, 2702 (1997).
- [148] M. Constantin, C. Dasgupta, P. P. Chatrathorn, S. N. Majumdar, S. Das Sarma, Phys. Rev. E **69**, 061608 (2004).
- [149] R. Arratia, Ann. Probab. **11**, 362 (1983).
- [150] S. N. Majumdar, Phys. Rev. E **68**, 050101(R) (2003).
- [151] J. Krug, H. T. Dobbs, Phys. Rev. Lett. **76**, 4096 (1996).
- [152] R. Cakir, P. Grigolini, A. A. Krokhin, Phys. Rev. E **74**, 021108 (2006).
- [153] T. Dieker, 'Simulation of fractional Brownian motion', master thesis, <http://www2.isye.gatech.edu/~adieker3>.

-
- [154] E. J. Gumbel, *Statistics of Extremes*, Dover, (1958).
 - [155] P. Embrecht, C. Klüppelberg, T. Mikosh, *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance* (Springer), Berlin (1997).
 - [156] S. N. Majumdar, J.-P. Bouchaud, *Quant. Fin.* **8**, 753 (2008).
 - [157] R. W. Katz, M. P. Parlange, P. Naveau, *Adv. Water Resour.* **25**, 1287 (2002).
 - [158] L. O'Malley, G. Korniss, T. Caraco, *Bull. Math. Bio.* **71**, 1160 (2009).
 - [159] J.-P. Bouchaud, M. Mézard, *J. Phys. A* **30**, 7997 (1997).
 - [160] G. Biroli, J.-P. Bouchaud, M. Potters, *J. Stat. Mech.* P07019 (2007).
 - [161] P. Krapivsky, S. N. Majumdar, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5492 (2000).
 - [162] G. Gyorgyi, P.C. Holdsworth, B. Portelli, Z. Racz, *Phys. Rev. E* **68**, 056116 (2003).
 - [163] S. N. Majumdar, A. Comtet, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 225501 (2004).
 - [164] S. N. Majumdar, A. Comtet, *J. Stat. Phys.* **119**, 777, (2005).
 - [165] G. Schehr, S. N. Majumdar, *Phys. Rev. E* **73**, 056103 (2006).
 - [166] A. Comtet, P. Leboeuf, S. N. Majumdar, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 070404 (2007).
 - [167] S. N. Majumdar, P. L. Krapivsky, *Phys. Rev. E* **65**, 036127 (2002).
 - [168] S. M. Berman, *Ann. Math. Stat.* **35**, 502 (1964).
 - [169] D. A. Huse, C. L. Henley, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2708 (1985).
 - [170] M. Kardar, G. Parisi, Y. C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 889 (1986).
 - [171] D. Forster, D. R. Nelson, M. J. Stephen, *Phys. Rev. A* **16**, 732 (1977).
 - [172] M. Mézard, *J. Phys. Paris* **51**, 1831 (1990).
 - [173] T. Hwa, M. Lässig, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2591 (1996); R. Bundschuh, T. Hwa, *Discrete Appl. Math.* **104**, 113 (2000).
 - [174] D. Carpentier, P. Le Doussal, *Phys. Rev. E* **63**, 026110 (2001).
 - [175] B. Derrida, *Phys. Rev. B* **24**, 2613 (1981).
 - [176] B. Derrida, H. Spohn, *J. Stat. Phys.* **51**, 817 (1988).
 - [177] Y. V. Fyodorov, J.-P. Bouchaud, *JETP Lett.* **86** 487 (2007).
 - [178] *J. Phys. A* **41**, 324009 (2008); *J. Phys. A* **41**, 372001 (2008).
 - [179] M. Clusel, E. Bertin, *Int. J. Mod. Phys. B* **22**, 3311 (2008).
 - [180] M. Fréchet, *Ann. Soc. Polonaise Math. Cracovie* **6**, 93 (1927).
 - [181] R. Fisher, L. Tippet, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **24**, 180 (1928).
 - [182] B. Gnedenko, *Ann. of Math. (2)* **44**, 423 (1943).
 - [183] J. Galambos, *The Asymptotic Theory of Extreme Value Statistics*, (John Wiley & Sons), (1978).
 - [184] L. de Haan, A. Ferreira, *Extreme Value Theory : An Introduction*, (Springer), (2006).
 - [185] P. L. Krapivsky, S. Redner, *J. Phys. A* **29**, 5347 (1996).

Bibliographie

- [186] P. Hall, J. of App. Proba. **16**, 433 (1979).
- [187] L. de Haan, S. Resnick, Ann. of Proba. **24**, 97 (1996); L. de Haan, U. Stadtmüller, J. Austral. Math. Soc. **61**, 381 (1996).
- [188] G. Györgyi, N. R. Moloney, K. Ozogány, Z. Rácz, Phys. Rev. Lett. **100**, 210601 (2008); G. Györgyi, N. R. Moloney, K. Ozogány, Z. Rácz, M. Droz, Phys. Rev. E **81**, 041135 (2010); E. Bertin, G. Györgyi J. Stat. Mech. P08022 (2010).
- [189] A. Comtet, S. N. Majumdar J. Stat. Mech. Theor. Exp. **06**, P06013 (2005).
- [190] F. Spitzer, Duke Math. J. **24**, 327 (1957).
- [191] F. Pollaczek, Comptes Rendus **234**, 2334 (1952).
- [192] F. Spitzer, Trans. Am. Math. Soc. **82**, 323 (1956).
- [193] S. N. Majumdar, A. Comtet, R. M. Ziff, J. Stat. Phys. **122**, 833 (2006).
- [194] E. G. Coffman, P. Flajolet, L. Flato, M. Hofri, Proba. in Eng. and Infor. Sci. **12**, 373 (1998).
- [195] J. Randon-Furling, S. N. Majumdar, A. Comtet, Phys. Rev. Lett. **103**, 140602 (2009).
- [196] S. N. Majumdar, A. Comtet, J. Randon-Furling, J. Stat. Phys. **138**, 955 (2010).
- [197] D. A. Darling, Trans. Am. Math. Soc., **83**, 164 (1956).
- [198] P. Erdős, M. Kac, Bull. Am. Math. Soc. **52**, 292 (1946).
- [199] M. S. Sgibnev, Statistics and Probability Letters **28**, 235 (1996).
- [200] V. B. Nevzorov, J. Soviet Math. **20**, 2221 (1982).
- [201] S. N. Majumdar, notes d'un cours donné à Beg-Rohu, disponibles à l'adresse suivante : <http://ipht.cea.fr/Meetings/BegRohu2008/>.
- [202] S. N. Majumdar, J. Randon-Furling, M. J. Kearney, M. Yor, J. Phys. A Math. Theor. **41**, 365005 (2008).
- [203] A. N. Kolmogorov, Giorn. Ist. Ital. Attuari **4**, 1 (1933); N. V. Smirnov, Bul. Math. de l'Univ. de Moscou **2**, 3 (1939).
- [204] P. C. Martin, E. D. Siggia, H. A. Rose, Phys. Rev. A **8**, 423 (1973).
- [205] C. De Dominicis, Nuovo Cimento Lett. **12**, 567 (1975).
- [206] H. K. Janssen, Z. Phys. B **23**, 377 (1976).
- [207] E. P. Wigner, P. Camb. Philos. Soc. **47**, 790 (1951).
- [208] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 2nd Edition, Academic Press, (1991).
- [209] C. A. Tracy, H. Widom, Phys. Lett. B **305**, 115 (1993).
- [210] C. A. Tracy, H. Widom, Commun. Math. Phys. **159**, 151 (1994).
- [211] C. A. Tracy, H. Widom, Commun. Math. Phys. **177**, 727 (1996).
- [212] C. A. Tracy, H. Widom, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. I, Ed. L. Tatsien, Higher Education Press, Beijing, 587 (2002).
- [213] J. Wishart, Biometrika **20**, 32 (1928).
- [214] L. I. Smith, *A tutorial on Principal Component Analysis* (2002).

- [215] K. Fukunaga, *Introduction to Statistical Pattern Recognition*, Elsevier, New-York, (1990).
- [216] L.-L. Cavalli-Sforza, P. Menozzi, A. Piazza, *The History and Geography of Human Genes*, Princeton Univ. Press (1994).
- [217] J.-P. Bouchaud, M. Potters, *Theory of Financial Risks* (Cambridge University Press), Cambridge (2001).
- [218] J.-P. Bouchaud, M. Potters, *Financial Applications of Random Matrix Theory : a short review*, à paraître dans *Handbook on Random Matrix Theory*, Oxford University Press.
- [219] R. W. Preisendorfer, *Principal Component Analysis in Meteorology and Oceanography*, Elsevier, New York, (1988).
- [220] V. A. Marcenko, L. A. Pastur, Math. USSR-Sb, **1**, 457 (1967).
- [221] K. Johansson, Comm. Math. Phys. **209**, 437 (2000).
- [222] I. M. Johnstone, Ann. Statist. **29**, 295 (2001).
- [223] A. Soshnikov, Commun. Math. Phys. **207**, 697 (1999).
- [224] J. Baik, G. Ben Arous, S. Péché, Ann. Probab. **33**, 1643 (2005).
- [225] G. Biroli, J.-P. Bouchaud, M. Potters, Europhys. Lett. **78**, 10001 (2007).
- [226] A. Ruzmaikina, Comm. Math. Phys. **261**(2), 277 (2006).
- [227] A. Auffinger, G. Ben Arous, S. Péché, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **45**(3), 589 (2009).
- [228] J. Baik, P. Deift, K. Johansson, J. Amer. Math. Soc. **12**, 1119 (2000).
- [229] S. M. Ulam, *Modern Mathematics for the Engineers*, ed. par E.F. Beckenbach, Mc Graw-Hill, New-York, (1961).
- [230] D. Aldous, P. Diaconis, Bull. Amer. Soc. **12**, 1119 (1999).
- [231] S. N. Majumdar, *Les Houches lecture notes on "Complex Systems"*, ed. par J.-P. Bouchaud, M. Mézard, J. Dalibard, (2006).
- [232] J. Baik, E. M. Rains, J. Stat. Phys. **100**, 523 (2000).
- [233] M. Prähofer, H. Spohn, Phys. Rev. Lett. **84**, 4882 (2000); Physica A **279**, 342 (2000).
- [234] J. Gravner, C. Tracy, H. Widom, J. Stat. Phys. **102**, 1085 (2001).
- [235] S. N. Majumdar, S. Nechaev, Phys. Rev. E **69**, 011103 (2004).
- [236] T. Imamura, T. Sasamoto, Nucl. Phys. B **699**, 503 (2004); J. Stat. Phys. **115**, 749 (2004).
- [237] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, J. Propp, J. Alg. Combin. **1**, 111 (1992).
- [238] J. Propp, Theor. Comput. Sci. **303**, 267 (2003).
- [239] W. Jockush, J. Propp, P. Shor, preprint arXiv :math/9801068 **REF**.
- [240] T. de la Rue, E. Janvresse, *Pavages aléatoires par touillage de dominos* paru dans Images des Mathématiques (2009), [http ://images.math.cnrs.fr/Pavages-aleatoires-par-touillage.html](http://images.math.cnrs.fr/Pavages-aleatoires-par-touillage.html)

Bibliographie

- [241] K. Johansson, Probab. Th. Rel. Fields **123**, 225 (2002).
- [242] C. L. Henley, J. Stat. Phys. **89**, 483 (1997).
- [243] S. Bogner, T. Emig, A. Taha, C. Zeng, Phys. Rev. B **69**, 104420 (2004).
- [244] S. N. Majumdar, S. Nechaev, Phys. Rev. E **72**, 020901 (2005).
- [245] K. Johansson, *Les Houches lecture notes on "Mathematical Statistical Physics"*, Ed. par A. Bovier, F. Dunlop, F. den Hollander, A. van Enter, J. Dalibard (2005).
- [246] P. L. Ferrari, notes d'un cours donné à l'Ecole d'été de Beg-Rohu", à Beg-Rohu (France) en 2008, disponibles sur le web à <http://ipht.cea.fr/Meetings/BegRohu2008>.
- [247] N. O'Connell, Séminaire de Probabilités XXXVI, 165, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, (2003).
- [248] T. Kriecherbauer, J. Krug, J. Phys. A : Math. Theor. **43**, 403001 (2010).
- [249] D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, (Springer), Berlin (1999).
- [250] A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae*, Birkhäuser, Basel (2002).
- [251] J. Rambeau, G. Schehr, J. Stat. Mech. Theor. Exp., P09004 (2009).
- [252] P. Lévy, Comp. Math. **7**, 283 (1939).
- [253] G. Schehr, P. Le Doussal, J. Stat. Mech. P01009 (2010).
- [254] D. S. Fisher Phys. Rev. B **50**, 3799 (1994); Phys. Rev. B **51**, 6411 (1995).
- [255] F. Igloi, C. Monthus, Phys. Rep. **412**, 277 (2005).
- [256] D. S. Fisher, A. P. Young, Phys. Rev. B **58**, 9131 (1998).
- [257] C. Monthus, Phys. Rev. B **69**, 054431 (2004).
- [258] D. S. Fisher, P. Le Doussal, C. Monthus, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 3539; P. Le Doussal, C. Monthus, D. S. Fisher, Phys. Rev. E **59**, 4795 (1999).
- [259] Ya. G. Sinai, Theory of Prob. and Appl. **27**(2), 247 (1982).
- [260] P. Le Doussal, C. Monthus, Physica A **317**, 140 (2003).
- [261] C. Monthus, Thèse d'Habilitation à diriger les recherches, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI (2004).
- [262] I. I. Gikhman, Theory Probab. Appl. **2**, 369 (1957).
- [263] J. Kiefer, Ann. Math. Stat. **30**, 420 (1959).
- [264] J. Pitman, M. Yor, Elec. J. Proba. **4**, 1 (1999).
- [265] E. W. Montroll, G. H. Weiss, J. Math. Phys. **6**, 167 (1965).
- [266] H. Scher, E. W. Montroll, Phys. Rev. B **12**, 2455 (1975).
- [267] J.-P. Bouchaud, A. Georges, Phys. Rep. **195**, 127 (1990).
- [268] R. Metzler, J. Klafter, Phys. Rep. **339**, 1 (2000).
- [269] S. F. Edwards, D.R. Wilkinson, Proc. R. Soc. London A **381**, 17 (1982).

-
- [270] H. Kallabis, J. Krug, Europhys. Lett. **45**, 20 (1999) ; J. Krug, Physica A **340**, 647 (2004) ; S.N. Majumdar, D. Das, *ibid*, **71**, 036129 (2005).
 - [271] S. N. Majumdar, A. J. Bray, Phys. Rev. Lett. **86**, 3700 (2001) ; M. Constantin, S. Das Sarma, C. Dasgupta, Phys. Rev. E **69**, 051603 (2004).
 - [272] S. N. Majumdar, C. Dasgupta, Phys. Rev. E **73**, 011602 (2006).
 - [273] O. Bondarchuk, D. B. Dougherty, M. Degawa, E. D. Williams, M. Constantin, C. Dasgupta, S. Das Sarma, Phys. Rev. B **71**, 045426 (2005) ; D. B. Dougherty, C. Tao, O. Bondarchuk, W. G. Cullen, E. D. Williams, M. Constantin, C. Dasgupta, S. Das Sarma, Phys. Rev. E **71**, 021602 (2005).
 - [274] G. Gyorgyi, P.C.W. Holdsworth, B. Portelli, Z. Racz, Phys. Rev. E, **68**, 056116 (2003).
 - [275] S. Raychaudhuri, M. Cranston, C. Przybyla, Y. Shapir, Phys. Rev. Lett. **87**, 136101 (2001).
 - [276] H. Guclu, G. Korniss, Phys. Rev. E **69**, 065104(R) (2004) ; Fluctuation and Noise Letters, **5** (1), L43 (2005).
 - [277] D.S. Lee, Phys. Rev. Lett. **95**, 150601 (2005).
 - [278] G. Györgyi, N. R. Moloney, K. Ozogány, Z. Rácz, Phys. Rev. E **75** 021123 (2007).
 - [279] T. Burkhardt, G. Györgyi, N. R. Moloney, Z. Rácz, Phys. Rev. E **76** 041119 (2007).
 - [280] L. Takacs, J. Appl. Prob. **32**, 375 (1995).
 - [281] M. Abramowitz, I. A. Stegun in *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1973).
 - [282] S. Janson, G. Louchard, Elec. Journ. Prob. **12**, 1600 (2007).
 - [283] S. Janson, Proba. Surveys **4**, 80 (2007).
 - [284] M. J. Kearney, S. N. Majumdar, R. J. Martin, J. Phys. A : Math. Theor. **40**, F863 (2007).
 - [285] P. Flajolet, P. Poblete, A. Viola, Algorithmica, **22**, 490 (1998).
 - [286] S. N. Majumdar, Curr. Sci. (India) **89**, 2076 (2005).
 - [287] G. Forgacs, R. Lipowsky, Th. M. Nieuwenhuizen, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* ed. by C. Domb and J.L. Lebowitz (Academic Press, London, 1991), vol. **14**, 136 (1991).
 - [288] D. B. Abraham, Phys. Rev. Lett. **44**, 1165 (1980) ; S.T. Chui and J. D. Weeks, Phys. Rev. B **23**, 2438 (1981) ; J. M. J. van Leeuwen, H. J. Hilhorst, Physica, **107 A**, 319 (1981).
 - [289] T. W. Burkhardt, J. Phys. A **14**, L63 (1981).
 - [290] W.W. Mullins, J. Appl. Phys. **28**, 333 (1957) ; C. Herring, J. Appl. Phys. **21**, 301 (1950).
 - [291] T. W. Burkhardt, J. Stat. Mech. P07004 (2007).
 - [292] H. J. Hilhorst, P. Calka, G. Schehr, J. Stat. Mech., P10010 (2008).

Bibliographie

- [293] J. J. Sylvester, Problem 1491, *The Educational Times*, London (April 1864).
- [294] P. Valtr, Discrete Comput. Geom. **13**, 637 (1995); *Combinatorica* **16**, 567 (1996). triangle).
- [295] I. Bárány, The Annals of Probability **27**, 2020 (1999).
- [296] H. J. Hilhorst, J. Stat. Mech. L02003 (2005).
- [297] H. J. Hilhorst, J. Stat. Mech. P09005 (2005).
- [298] H. J. Hilhorst, Eur. Phys. J. B : Proceedings of Statphys 23, Genoa, Italy, July 9-13, 2007.
- [299] H.J. Hilhorst, P. Calka, J. Stat. Phys.**132**, 627 (2008).
- [300] P. Calka, T. Schreiber, *Ann. Probab.* **33**, 1625 (2005).
- [301] P. G. de Gennes, J. Chem. Phys. **48**, 2257 (1968).
- [302] M. E. Fisher, J. Stat. Phys. **34**, 667 (1984).
- [303] J. W. Essam, A. J. Guttmann, Phys. Rev. E **52**, 5849 (1995).
- [304] A. J. Bray, K. Winkler, J. Phys. A **37**, 5493 (2004).
- [305] H. L. Richards, T. L. Einstein, Phys. Rev. E **72**, 016124 (2005) ; J. Juntunen, O. Pulkkinen, J. Merikoski, Phys. Rev. E **76**, 041607 (2007).
- [306] F. J. Dyson, J. Math. Phys. **3**, 1191 (1962) ; ibid. 1198.
- [307] M. Katori, H. Tanemura, J. Math. Phys. **45**, 3058 (2004).
- [308] J. Krug, H. Spohn, in *Solids far from equilibrium* (ed. by C. Godrèche), Cambridge University Press, New York (1991).
- [309] T. Halpin-Healy, Y. C. Zhang, Phys. Rep. **254**, 215 (1995).
- [310] M. Prähofer, H. Spohn, Phys. Rev. Lett. **84**, 4882-4885 (2000) ; J. Stat. Phys., **108**, 1071 (2002).
- [311] C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, X. G. Viennot, J. Phys. A : Math. Gen. **33**, 8835 (2000).
- [312] H. Risken, *The Fokker-Plank Equation*, Springer (1984).
- [313] F. Calogero, J. Math. Phys. **10**, 2197 (1969).
- [314] B. Sutherland, J. Math. Phys. **12**, 246 (1971).
- [315] M. Fulmek, Electron. J. Comb. **14**, R64/1-20 (2007).
- [316] T. Feierl, Proceedings of the AofA2007, DMTCS Proceedings (2007). Preprint arXiv :math.CO/0802.2691.
- [317] T. Feierl, Preprint arXiv :math.CO/0806.0037.
- [318] F. Gillet, Preprint arXiv :math.PR/0307204.
- [319] Harish Chandra, Amer. J. Math. **79**, 87 (1957) ; C. Itzykson, J. B. Zuber, J. Math. Phys. **21**, 411 (1980).
- [320] F. C. Franck, J. Cryst. Growth **22**, 233 (1974) ; J. Krug, H. Spohn, Europhys. Lett. **8**, 219 (1989).
- [321] D. Dhar, Phase Transitions **9**, 51 (1987).

-
- [322] L.-H. Gwa, H. Spohn, Phys. Rev. Lett. **68**, 725 (1992).
- [323] T. Sasamoto, H. Spohn, Phys. Rev. Lett. **104**, 230602 (2010); Nucl. Phys. B **834**, 523 (2010).
- [324] K. A. Takeuchi, M. Sano, Phys. Rev. Lett. **104**, 230601 (2010).
- [325] T. Sasamoto, J. Phys. A **38**, L549 (2005).
- [326] J. Baik, E. M. Rains, in *Random matrix models and their applications*, MSRI Publications **40**, Cambridge Univ. Press (2001).
- [327] F. Bornemann, P. L. Ferrari, M. Prähofer, J. Stat. Phys. **133**, 405 (2008).
- [328] L. Miettinen, M. Myllys, J. Merikoski, J. Timonen, Eur. Phys. J. B **46**, 55 (2005).
- [329] G. Schehr, S. N. Majumdar, A. Comtet, J. Randon-Furling, Phys. Rev. Lett. **101**, 150601 (2008).
- [330] J. Rambeau, G. Schehr, Europhys. Lett. **91**, 60006 (2010).
- [331] P. J. Forrester, S. N. Majumdar, G. Schehr, preprint arXiv :1009.2362, à paraître dans Nuclear Physics B.
- [332] G. Amir, I. Corwin, J. Quastel, arXiv :1003.0443.
- [333] J. Krug, P. Meakin, T. Halpin-Healy, Phys. Rev. A **45**, 638 (1992).
- [334] M. Mézard, J. Phys. **51**, 1831 (1990); G. Parisi, J. Phys. **51**, 1595 (1990).
- [335] E. Agoritsas, V. Lecomte, T. Giamarchi, Phys. Rev. B **82**, 184207 (2010).
- [336] E. Brunet, Phys. Rev. E **68**, 041101 (2003).
- [337] A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae*, Birkhäuser, Basel (2002).
- [338] N. G. de Bruijn, D. E. Knuth, S. O. Rice, in *Graph Theory and Computing*, ed. R. C. Read, Academic Press, San Diego (1972).
- [339] N. Bonichon, M. Mosbah, Theoret. Comput. Sci. **307**, 241 (2003).
- [340] M. Katori, M. Izumi, N. Kobayashi, J. Stat. Phys. **131**, 1067 (2008).
- [341] S. R. Finch, “Stars and watermelons”, unpublished, <http://algo.inria.fr/csolve/wm.pdf>.
- [342] N. Kobayashi, M. Izumi, M. Katori, Phys. Rev. E **78** 051102 (2008).
- [343] B. Rusakov, Mod. Phys. Lett. A **5**, 693–703 (1990).
- [344] M. R. Douglas, V. A. Kazakov, Phys. Lett. B **319**, 219 (1993).
- [345] D. J. Gross, A. Matytsin, Nucl. Phys. B **429**, 50 (1994).
- [346] M. Crescimanno, S. G. Naculich, H. J. Schnitzer, Phys. Rev. D **54**, 1809–1813 (1996).
- [347] C. Monthus, T. Garel, Phys. Rev. E **82**, 021125 (2010).