Université Pierre et Marie Curie - Paris 6
–
UFR de Mathématiques
Institut de Mathématiques de Jussieu
École doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre (ED386)

Thèse de Doctorat

Discipline : Mathématiques

Benjamin Collas

Groupes de Grothendieck-Teichmüller et inertie champêtre des espaces de modules de courbes de genre zéro et un

---

Sous la direction de Leïla Schneps

Soutenue le 23 septembre 2011 devant le jury composé de :

Pierre Dèbes	Université Lille 1
Antoine Ducros	Université Paris 6
Benjamin Enriquez	Université de Strasbourg
Pierre-Vincent Koseleff	Université Paris 6
Ivan Marin	Université Paris 7
Sylvain Maugeais	Université du Maine
Luis Paris	Université de Bourgogne
Leila Schneps	Université Paris 6

Rapporteurs :

Benjamin Enriquez	Université de Strasbourg, France
Hiroaki Nakamura	Okayama University, Japan

Institut de Mathématiques de Jussieu
175, rue du chevaleret
75 013 Paris

École doctorale Paris centre Case 188
4 place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

À Maryvonne Teissier
qui il y a bien longtemps a semé une graine,
et à mes parents qui m'ont appris à les cultiver.

All good work requires self-revelation.

Sidney Lumet, 1995.

Remerciements

La thèse est une aventure personnelle qui doit cependant beaucoup aux rencontres, aux échanges – mathématiques ou personnels – construits durant ces années d'apprentissage.

Leïla a accepté de partager ses connaissances et de m'accorder sa confiance en ce qui concerne la théorie de Grothendieck-Teichmüller ; de me prodiguer conseils, encouragements et de me guider dans ce que j'appelle « mon merveilleux sujet ». Je m'y suis immergé avec plaisir comme, j'espère, elle a eu ce même plaisir à voir les résultats se concrétiser. Pierre, même parfois discrètement, n'a pas hésité à partager son engouement à construire des liens entre les mondes, à mettre les idées en relief et à prendre de son temps pour tenter de transmettre parfois l'ineffable. Que tous les deux reçoivent toute ma gratitude pour m'avoir formé au métier de mathématicien et transmis leurs visions de la recherche mathématique, dont j'espère avoir tiré mon propre et heureux mélange.

Je suis très honoré que les Pr. Hiroaki Nakamura et Benjamin Enriquez aient accepté de rapporter cette thèse et qu'ils se soient intéressés à mon travail. La version finale de ce manuscrit porte la marque de cet intérêt ainsi que de leurs remarques. Je les remercie très chaleureusement ainsi que chacun des membres de mon jury, que je n'aurais pu imaginer plus richement composé : Pierre Dèbes, Antoine Ducros, Pierre-Vincent Koseleff, Ivan Marin dont je salue la vision efficace des mathématiques et les encouragements incisifs, Sylvain Maugeais qui a accepté de partager un peu de son savoir de géomètre algébriste, ainsi que Luis Paris.

Je remercie également Marco Boggi de s'être intéressé dès le début à mes questions et Michel Vaquié pour son attention et le temps qu'il a bien voulu consacrer à des discussions champêtres.

Par ailleurs, Jean-Pierre Marco et Laurent Lazzarini m'ont fait l'honneur de m'associer à la rédaction d'un livre de cours de L3 mathématiques. Ce fut une belle et instructive aventure et les échanges qui en découlèrent furent très formateurs. Qu'ils en soient remerciés.

L'institut de Mathématiques de Jussieu m'a accueilli durant la préparation de cette thèse, m'offrant de bonnes conditions pour m'initier au métier d'enseignant-chercheur. Je remercie Gilles Godefroy, le directeur de l'école doctorale, pour ses encouragements. Je remercie aussi chaleureusement Vincent Maillot pour son soutien et son accueil kyotoïte.

J'ai aussi une pensée toute particulière pour l'équipe mancelle de mathématiques dont l'accueil a fourni des conditions favorables à la préparation de soutenance de cette thèse, et plus particulièrement pour mes conversations avec les deux Alexandre, Broust et Popier. Je remercie aussi Corentin Lacombe, pour son efficacité à circonvenir les inattendues et nombreuses embûches qui ne manquent pas de survenir lors d'un dépôt de thèse.

Parmi les doctorants, le thésard se construit naturellement un premier cercle au sein duquel se forge l'expérience de l'enseignant-chercheur. Merci à Cécile qui éclaire toujours le chemin de son expérience, à Jérôme pour nos discussions pearsonniennes, à Luc et à Banafsheh pour ses encouragements et son soutien constant. Il y a aussi les compagnons connus avant le début de l'aventure proprement dite. Merci à Clémence pour ses points de vue transverses, à Manuel pour tous nos projets scientifiques, Julien C. pour son problème des 30 000 boules sur l'île aux moines et à David Tamatoa pour leur soutien. Merci aussi à Julien G. toujours généreux à écouter ainsi qu'à partager ses connaissances mathématiques. Je pense aussi à ma proche famille mathématique, Sarah l'ainée, Yassine dont la présence est toujours remarquablement appréciée, Mirjam et notre groupe de travail généralisé, et enfin Ismaël, irremplaçable compagnon pour construire des mondes.

J'ai eu la chance de partager un bureau où se sont naturellement développés entraide, travail, et pauses café-chocolat. Merci à Tiehong ainsi qu'à Jiao et Runqiang. Merci aussi aux plus éminents représentants du bureau 7C04, Élodie et Benjamin W., camarades de combat face au dragon administratif et au tigre enseignement. J'ai côtoyé un grand nombre de thésards à l'Institut. Qu'ils soient remerciés pour la bonne ambiance qui y a régné ainsi que pour les nombreux échanges mathématiques, initiés craie au tableau, bien souvent après une brève rencontre dans un couloir. Merci à Olivier, Bora, Martin, Thomas et François ainsi qu'à ceux que je n'aurai malencontreusement pas manqué d'oublier. Merci aussi à tous les membres du BDD avec qui j'ai œuvré pour d'encore meilleures conditions de travail pour les doctorants.

Enfin, je remercie mes parents pour ce qu'ils m'ont donné, la curiosité de comprendre comme leur soutien constant, mon petit frère Mathieu avec qui j'ai dédoublé cette aventure, et bien sûr Marie, qui seule tolère l'écoute de démonstrations en souriant et sait couver mes nuits de travail d'un regard bienveillant.

Table des matières

Table des matières v

Table des figures vii

Liste des tableaux viii

Abstract 1

Introduction 5

Résumé 13

1 Action d'un groupe de Grothendieck-Teichmüller sur $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$ 15
1.1. Générateurs et relations dans $\Gamma_{g,[n]}$ 16
1.1.1. Généralités sur les twists et demi-twists 16
1.1.2. Une présentation finie 19
1.1.3. Mapping class group de genre zéro, tresses d'Artin 21
1.2. Groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GS}$, action sur $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$ 23
1.2.1. Les groupes $\widehat{GT}$ et $\mathbb{I}\Gamma$ 23
1.2.2. Le groupe $\widehat{GS}$, torsion en genre zéro 24
1.2.3. Action de $\widehat{GS}$ sur $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$ 27

2 Torsion de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,[n]})$, bonté des mapping class groups 33
2.1. Une propriété cohomologique de bonté 34
2.1.1. Quelques formulations équivalentes 35
2.1.2. Bonté et extension de groupes 37
2.1.3. Les mapping class groups $\Gamma_{0,n}$, $\Gamma_{0,[n]}$, $\Gamma_{1,n}$ et $\Gamma_{1,[n]}$ sont bons 40
2.2. Torsion géométrique, torsion profinie et théorie de Serre 41
2.2.1. La propriété (H) 41
2.2.2. La propriété $(\star)$ 45
2.2.3. Le cas des extensions par un groupe cyclique d'ordre premier 47

3 Espace de modules $\mathcal{M}_{0,[n]}$, cas associés **49**
3.1. Action de $\widehat{GT}$ sur la torsion de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$ . . . 50
3.1.1. Torsion géométrique de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$ . . . 50
3.1.2. Torsion algébrique d'ordre premier de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$ . . . 52
3.1.3. Action de $\widehat{GT}$ sur la torsion . . . 54
3.2. Espaces de modules de genre 1 de basse dimension, rotation . . . 58
3.2.1. Espace $\mathcal{M}_{1,1}$, action de $\widehat{GS}$ sur $\widehat{\Gamma}_{1,1}$ . . . 59
3.2.2. Espace $\mathcal{M}_{1,[2]}$, action de $\widehat{GT}$ sur $\widehat{\Gamma}_{1,[2]}$ . . . 62
3.2.3. Rotations de $\mathcal{M}_{0,[n]}$ et $\mathcal{M}_{1,[n]}$, action de $\widehat{GS}$ . . . 65

4 Espaces de modules de courbes $\mathcal{M}_{1,[n]}$ **69**
4.1. Généralités elliptiques, le cas $\mathcal{M}_{1,1}$ . . . 70
4.1.1. Généralités sur la ramification . . . 70
4.1.2. Torsion de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,1})$ et action de $\widehat{GS}$ . . . 71
4.2. Le cas de l'espace de modules $\mathcal{M}_{1,[3]}$ . . . 73
4.2.1. Éléments de torsion de $\Gamma_{1,[3]}$, détermination complète des classes de conjugaison . . . 74
4.2.2. La torsion de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,[3]})$ . . . 78
4.2.3. Action de $\widehat{GS}$ sur la torsion . . . 80
4.3. Le cas général, espace des modules $\mathcal{M}_{1,[n]}$ . . . 81
4.3.1. La torsion du groupe discret $\Gamma_{1,[n]}$, $n \geqslant 3$ . . . 82
4.3.2. La torsion d'ordre premier de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,[n]})$, action de $\widehat{GS}$ . . . 85

5 Espaces de modules de courbes, lieux spéciaux **89**
5.1. Lieux spéciaux, généralités . . . 90
5.1.1. Lieux spéciaux analytiques . . . 90
5.1.2. Lieux spéciaux algébriques . . . 91
5.1.3. Corps des modules arithmétique . . . 93
5.2. Action galoisienne, genre zéro . . . 94
5.2.1. Action galoisienne, généralités . . . 94
5.2.2. Lieux spéciaux de $\mathcal{M}_{0,[n]}$ . . . 96
5.2.3. Action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur la torsion géométrique de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$ . . . 97
5.3. Lieux spéciaux en genre un . . . 98
5.3.1. Action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur la torsion géométrique de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,[n]})$ . . . 98
5.3.2. Lieux spéciaux de $\mathcal{M}_{1,[2]}$ . . . 99

Bibliographie **105**

Table des figures

0.1. Élément de tresse σ_i. 5
0.2. Élément de tresse x_{ij}. 5
0.3. Courbe de $\overline{M}_{g,n}$ 9

1.1. Twist de support s. 17
1.2. Demi-twist de support a. 17
1.3. Générateurs de $\Gamma_{g,[n]}$ 19
1.4. Lanterne sur $S_{0,4}$. 21
1.5. Découpe en pantalons. 28
1.6. Quilts. 28
1.7. A-mouvement. 29
1.8. S-mouvement. 29
1.9. A/S-mouvements pour β_{2k+1} 31
1.10. A/S-mouvements pour β_1 31

3.1. Les éléments ε_n, ε_{n-1} et ε_{n-2}. 51
3.2. Générateurs de $\Gamma_{1,2}$. 63
3.3. Représentation de τ. 63
3.4. Rotation en genre zéro et un pour $n = 3$. 66

4.1. Twists générateurs de $\Gamma_{1,1}$ 72
4.2. Générateurs de $\Gamma_{1,[3]}$. 76
4.3. Relation $(1,1)$. 76
4.4. Relation $(1,2)$. 76
4.5. Twist A. 77
4.6. Twist B. 77

5.1. Représentation de $\gamma_{2,p}$ et γ_2. 101
5.2. Points de 2-torsion dans le parallélogramme fondamental. 103
5.3. Lieux spéciaux de $\mathcal{M}_{1,[2]}$. 103

Liste des tableaux

4.1. Torsion de $\Gamma_{1,[3]}$. 74
4.2. Torsion de $\Gamma_{1,[n]}$. 86

5.1. Torsion de $\Gamma_{1,[2]}$. 100

Abstract

Grothendieck-Teichmüller groups and stack inertia of moduli spaces of genus zero and one curves

Let $\mathcal{M}_{g,n}$ be the moduli space of smooth curves of genus $g \geqslant 0$ with $n \geqslant 1$ ordered marked points, and $\mathcal{M}_{g,[n]}$ the moduli space of unordered pointed curves which is the quotient of the former by the permutation group $\mathfrak{S}_n$.

The space $\mathcal{M}_{g,[n]}$ is a topological *orbifold*, i.e.a quotient of a topological simply connected space – the Teichmüller space $\mathcal{T}_{g,n}$ – by a discrete group $\Gamma_{g,[n]}$, whose action on the space is proper and fully discontinuous but non-free. In this situation, the isotropy groups are all finite and there exists a finite index subgroup in $\Gamma_{g,n}$ whose action is free. From a geometrical point of view, the $\mathcal{M}_{g[n]}$ space is an *algebraic Deligne-Mumford stack*.

The group $\Gamma_{g,n}$ (resp. $\Gamma_{g,[n]}$), called *pure (resp. full) mapping class group*, is the orbifold fundamental group of $\mathcal{M}_{g.n}$ (resp. $\mathcal{M}_{g,[n]}$) and is isomorphic to the quotient of the diffeormophism group of a topological surface of genus g with n marked points fixing each marked point (resp. permuting the points), by the ones isotopic to the identity.

In the genus zero case, the mapping class group $\Gamma_{0,[n]}$ can be expressed as a well-known quotient of the n-strands Artin braid group B_n.

In [Dri90], working in the framework of quasi-triangular quasi-Hopf algebras, V. G. Drinfel'd defined the *profinite Grothendieck-Teichmüller group* $\widehat{GT}$. In the same paper, V. G. Drinfel'd showed that $\widehat{GT}$ acts on the braids groups $\widehat{B}_n$, and this action passes to the quotient $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$.

In [NS00], H. Nakamura et L. Schneps defined a subgroup $\mathbb{I}\Gamma \subset \widehat{GT}$ acting on the pure mapping class groups $\widehat{\Gamma}_{g,n}$ in all genera. We establish a simplified presentation of the group $\mathbb{I}\Gamma$ – defined by three relations instead of four, named $\widehat{GS}$ in order to stress its relation with the groups $\widehat{GS}^1_{0,0}$ of [Sch06]. Indeed the group $\widehat{GS}$ contains $\widehat{GS}^1_{0,0}$ as a subgroup, and the latter is defined using properties of the torsion elements of $\Gamma_{0,[n]}$ which are the main objects of our study.

The first result of this thesis is the following:

Theorem 1. *The subgroup $\widehat{GS} \subset \widehat{GT}$ acts on the full mapping class groups $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$.*
This result is based on a presentation of the full mapping class groups which, while perhaps not entirely original, does not seem to appear anywhere in the litterature.

The main result of this thesis is the following theorem:

Theorem 2. *Let $g = 0$ or 1, and let $\gamma \in \widehat{\Gamma}_{g,[n]}$ be a torsion element of prime order. Let $F = (\lambda, f)$ in $\widehat{GS}$. Then the action of F on γ is given by*

$$F(\gamma) = f\gamma^{\lambda}f^{-1}$$

for an element f in $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$.

Outline of the thesis

In this description we describe the main results of the thesis. Original results are indicated by a grey line in the margin.

Chapter 1. We work in the framework of Grothendieck-Teichmüller theory, and consider the action of the Grothendieck-Teichmüller group on the pure profinite mapping class groups $\widehat{\Gamma}_{g,n}$. In section 1.1, we construct a presentation of the full mapping class group $\Gamma_{g,[n]}$, based on braid and lantern relations, starting from a presentation of the pure mapping class group $\Gamma_{g,n}$.

Then we generalise the group $\widehat{GS}^1_{0,0}$, defined in [LP01] with technical restrictions, to a group $\widehat{GS}$ which is in fact isomorphic to the group $\mathbb{I}\Gamma$ defined in [NS00], but has a simpler description; thus it contains the absolute Galois group $G_{\mathbb{Q}}$.

This brings us in 1.2.3 to the first theorem of the thesis (theorem 1.2.6), in which we prove that $\widehat{GS}$ acts on each of the *full* profinite mapping class groups $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$, and give the action explicitly.

Chapter 2. The goal of this chapter is to prepare the study of torsion elements of the profinite mapping class groups in genus zero and one. To accomplish this, we use the cohomological notion of *goodness* in the framework of discrete and profinite groups introduced by Serre [Ser94], as well as a theorem due to J.P. Serre ([Ser97, Hue79, Sch96]) relating the torsion of a (discrete or profinite) group to the decomposition of its cohomology as a product of the cohomologies of its finite subgroups.

In order to apply these results to the mapping class groups $\Gamma_{g,[n]}$ for $g = 0,\ 1$, we prove the goodness of these groups (proposition 2.1.7). The proof uses the preservation of the property of goodness by group extension ([Ser94]).

We prove a result which serve in chapters 3 and 4 to show that all torsion elements of prime order in genus zero and one are conjugate to discrete torsion elements (corollary 2.2.10).

Chapter 3. Using a description of the torsion elements of the mapping class groups $\Gamma_{0,[n]}$ in terms of Artin braids, together with the results of the previous chapter, we show that the prime order torsion of the profinite mapping class group $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ is purely geometric (comes entirely from the discrete case), and determine it completely (proposition3.1.4). We deduce from this our main theorem in genus zero (theorem 3.1.6), as well as in a few special cases in genus one which essentially come from genus zero (propositions 3.2.4, 3.2.8, 3.2.10).

An element (λ, f) of the Grothendieck-Teichmüller group $\widehat{GS}$ acts on the prime order torsion elements of the full profinite mapping class group in genus zero, and on the rotations without ramification in genus one, by conjugation and raising to the power λ.

Chapter 4. We consider the case of the moduli spaces $\mathcal{M}_{1,[n]}$ and give an explicit description of the torsion elements of the discrete groups $\Gamma_{1,[n]}$. We then completely determine the prime order torsion of the profinite groups $\widehat{\Gamma}_{1,[n]}$, by showing that like in genus zero, it is purely geometric (theorem 4.3.1). In this chapter we prove our main theorem in genus one – see 4.3.3.

An element (λ, f) of the Grothendieck-Teichmüller group $\widehat{GS}$ acts on the prime order torsion elements of the full profinite mapping class group $\widehat{\Gamma}_{1,[n]}$ by conjugation and raising to the power λ.

The difficulty that arises in genus one compared to genus zero is that one cannot use the analogy of the mapping class groups with Artin braid groups to determine the torsion. Instead, we use the theory of elliptic curves (theorem 4.3.1). We first deal with the case of $\mathcal{M}_{1,[3]}$, because it turns out that the proof in the general case is analogous to the proof for $n = 3$, and then we pass easily to the general case (theorem 4.3.2).

Chapter 5. Let $G_{\mathbb{Q}}$ the absolute Galois group of the rationnals. Then $G_{\mathbb{Q}}$ acts on $\pi_1^{geom}(M_{0,[n]})$ because $\mathcal{M}_{0,[n]}$ is a $\mathbb{Q}$-stack. By using the geometry of the situation, we prove a Galois version of our main theorem in genus zero, in which we no longer need to restrict to prime order torsion.

The absolute Galois group acts on the geometric torsion elements of any order of $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$ by conjugation and raising to the cyclotomic power.

This uses the fact that irreducible components of special loci of moduli spaces in genus zero are defined over $\mathbb{Q}$. An analogous result is not known in genus one. However, because $G_{\mathbb{Q}} \subset \widehat{GS}$, our main theorem in genus one implies that *the moduli field of the special loci in $\mathcal{M}_{1,[n]}$ related to a prime order torsion element is equal to $\mathbb{Q}$.*

The chapter contains a discussion of stack inertia and special loci, and we define *the arithmetic moduli field of a special loci.* We then recall the complete description of

the special loci in genus zero given in [Sch03]. We conclude this study by illustrating the complexity of the analogous problem in genus one by describing the special loci completely in the case of $\mathcal{M}_{1,[2]}$.

$\star$

$\star \quad \star$

Introduction

Résultat principal

Soit $\mathcal{M}_{g,n}$ l'espace de modules de courbes lisses de genre $g \geqslant 0$ à $n \geqslant 1$ points marqués ordonnés, et $\mathcal{M}_{g,[n]}$ l'espace de modules de points non-ordonnés, quotient du premier par l'action du groupe de permutations $\mathfrak{S}_n$.

Les espaces $\mathcal{M}_{g,[n]}$ sont topologiquement des *orbifolds*, c'est à dire quotient d'un espace topologique simplement connexe – l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,n}$ – par un groupe discret $\Gamma_{g,[n]}$ dont l'action est propre et totalement discontinue mais non libre. Les groupes d'isotropie sont ici tous finis et $\Gamma_{g,n}$ contient un sous-groupe d'indice fini qui agit librement. Géométriquement, $\mathcal{M}_{g[n]}$ est un *champ de Deligne-Mumford*.

Le groupe $\Gamma_{g,n}$ (resp. $\Gamma_{g,[n]}$), appelé *pure (resp. full) mapping class group*, s'identifie au groupe fondamental d'orbifold de $\mathcal{M}_{g.n}$ (resp. $\mathcal{M}_{g,[n]}$) ainsi qu'au quotient du groupe des difféomorphismes orientés d'une surface topologique de genre g à n points marqués ne permutant pas les points (resp. permutant les points), par ceux isotopes à l'identité. Dans le cas de genre zéro, le mapping class group $\Gamma_{0,[n]}$ s'identifie à un quotient bien connu du groupe de tresses d'Artin à n brins B_n. Ce groupe contient en particulier des éléments σ_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et x_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, qui correspondent aux tresses suivantes.

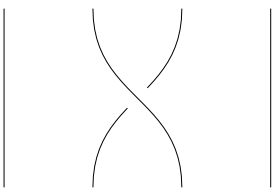


FIGURE 0.1: Élément de tresse σ_i.

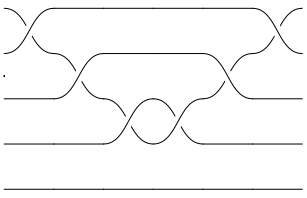


FIGURE 0.2: Élément de tresse x_{ij}.

Dans [Dri90], travaillant dans le cadre des algèbres quasi-Hopf quasitriangulaires, V. G. Drinfel'd a défini le *groupe de Grothendieck-Teichmüller profini* $\widehat{GT}$.

Le groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GT}$ *est le groupe des éléments inversibles* $(\lambda, f) \in \widehat{\mathbb{Z}}^* \times \widehat{\mathbb{F}}'_2$ *vérifiant les équations*

$$\begin{aligned} &(I) && f(x,y)f(y,x) = 1 \\ &(II) && f(z,x)z^m f(y,z)y^m f(x,y)x^m = 1 \\ &(III) && f(x_{34},x_{45})f(x_{51},x_{12})f(x_{23},x_{34})f(x_{45},x_{51})f(x_{12},x_{23}) = 1 \end{aligned}$$

où $z = (xy)^{-1}$, $m = (\lambda - 1)/2$ *et la dernière relation a lieu dans* $\widehat{\Gamma}_{0,5}$.

Dans le même article, V. G. Drinfel'd a démontré que la formule

$$\begin{aligned} \widehat{GT} &\hookrightarrow Aut(\widehat{B}_n) \\ \sigma &\mapsto \sigma_1 \mapsto \sigma_1^\lambda \\ &\quad \sigma_i \mapsto f(y_i, \sigma_i^2)^{-1}\sigma_i^\lambda f(y_i, \sigma_i^2) \end{aligned} \tag{D}$$

pour $2 \le i \le n-1$, *où* $y_i = \sigma_{i-1}\sigma_{i-2}\cdots\sigma_1^2\cdots\sigma_{i-2}\sigma_{i-1}$.

définit une action de $\widehat{GT}$ sur les groupes de tresses d'Artin profinis $\widehat{B}_n$. On montre facilement que cette action passe au quotient de tresses isomorphe à $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$.

Dans [NS00], H. Nakamura et L. Schneps définissent un sous-groupe $\mathbb{I}\Gamma \subset \widehat{GT}$ qui agit sur les pure mapping class groups $\widehat{\Gamma}_{g,n}$ pour tout g, n. Nous introduisons une présentation simplifiée de $\mathbb{I}\Gamma$ – car défini par trois relations au lieu de quatre, que nous rebaptisons $\widehat{GS}$ pour souligner sa relation avec le groupe $\widehat{GS}^1_{0,0}$ de [Sch06]. En effet, le groupe $\widehat{GS}$ contient $\widehat{GS}^1_{0,0}$ comme sous-groupe, et ce dernier est défini à partir de considérations liées aux éléments de torsion de $\Gamma_{0,[n]}$ qui sont les objets principaux de notre étude.

Sur une présentation construite suivant un procédé indiqué par [LP01], nous établissons le premier résultat de cette thèse est le suivant :

Théorème 1. *Le sous-groupe* $\widehat{GS} \subset \widehat{GT}$ *agit sur les* full mapping class groups $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$.

Ce résultat, possiblement connu des spécialistes, n'apparait nulle part.

Le résultat principal établi dans cette thèse est alors le théorème suivant :

Théorème 2. *Soit* $g = 0$ *ou* 1, *et soit* $\gamma \in \widehat{\Gamma}_{g,[n]}$ *un élément de torsion d'ordre premier. Soit* $F = (\lambda, f)$ *dans* $\widehat{GS}$. *Alors l'action de* F *sur* γ *est donnée par*

$$F(\gamma) = f\gamma^\lambda f^{-1}$$

pour un f *dans* $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$.

Nous présentons dans ce qui suit les origines ainsi que les motivations qui ont conduit à ce théorème, qui proviennent de l'étude arithmétique de l'action du groupe de Galois

absolu $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur les groupes fondamentaux des $\mathbb{Q}$-champs que sont les espaces de modules de courbes.

Action galoisienne géométrique

L'origine de la théorie de Grothendieck-Teichmüller se trouve dans le domaine de la théorie de Galois géométrique, et plus exactement dans la suite exacte fondamentale géométrique associée à une $\mathbb{Q}$-variété X – voir [Gro03]

$$1 \longrightarrow \pi_1^{alg}(X \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \pi_1^{arith}(X) \longrightarrow Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow 1 \qquad \text{(SFG)}$$

où $\pi_1^{alg}(X \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}})$ apparait comme le complété profini du groupe fondamental topologique de l'espace. Nous écrirons souvent par la suite $\pi_1^{geom}(X)$ pour $\pi_1^{alg}(X \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}})$. De cette suite exacte découle, une fois un $\mathbb{Q}$-point base choisi dans X, une représentation

$$Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to Aut(\pi_1^{geom}(X)).$$

Dans [Gro97], A. Grothendieck suggère que les espaces de modules $\mathcal{M}_{g,[n]}$ sont des espaces géométriques suffisants pour *capturer* le groupe de Galois $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Bien que cette idée ne constitue pas un énoncé précis, il est à l'origine de notre motivation pour considérer les espaces de modules dans cette thèse.

Action sur $\mathcal{M}_{0,4}$ et $\mathcal{M}_{0,5}$, groupe $\widehat{GT}$ et tresses. Prenons le cas de $\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$, dont le groupe fondamental identifié au groupe libre à deux générateurs $\mathbb{F}_2 = \langle x, y\rangle$. Il existe alors une action, fidèle d'après un résultat de Belyi [Bel80],

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{Q}} & \hookrightarrow & \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{F}}_2) \\ \sigma & \mapsto & \phi_\sigma \end{array}$$

explicitement définie par

$$\phi_\sigma(x) = x^{\chi_\sigma}, \quad \phi_\sigma(y) = f_\sigma^{-1}(x,y) y^{\chi(\sigma)} f_\sigma(x,y),$$

où $\chi_\sigma : G_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Z}$ est le caractère cyclotomique, et $f_\sigma \in \widehat{\mathbb{F}}_2'$ groupe dérivé topologique du groupe libre.

À partir des groupoïdes fondamentaux basés en l'ensemble des points bases tangentiels (voir plus bas) de $\mathcal{M}_{0,4}$ et $\mathcal{M}_{0,5}$, Y. Ihara a montré [Iha94] que la paramétrisation précédente

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{Q}} & \to & \widehat{\mathbb{Z}}^* \times \widehat{\mathbb{F}}_2' \\ \sigma & \mapsto & (\chi_\sigma, f_\sigma) \end{array}$$

vérifie les trois équations (I), (II) et (III) définissant $\widehat{GT}$, c'est-à-dire qu'il existe une injection $G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \widehat{GT}$.

Plus généralement, bien que les espaces de modules ordonnés $\mathcal{M}_{0,n}$ soient des $\mathbb{Q}$-variétés, ce n'est déjà plus le cas des espaces non-ordonnés $\mathcal{M}_{0,[n]}$. L'isomorphisme du groupe fondamental $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$ avec un quotient d'un groupe de tresses d'Artin permet néanmoins de retrouver, de manière algébrique [IM95], l'action explicite de $G_{\mathbb{Q}}$ sur les espaces de modules de genre zéro pour un nombre quelconque de points marqués.

Action en genre supérieur, le groupe $\mathbb{\Gamma}$

Action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur le champ $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,n})$. De manière générale, les espaces de modules $\mathcal{M}_{g,n}$ et $\mathcal{M}_{g,[n]}$ peuvent être munis d'une *structure complexe d'orbifold analytique* ou d'une *structure algébrique de $\mathbb{Z}$-champ de Deligne-Mumford* – voir [DM69], et sont donc définis sur $\mathbb{Q}$.

Considérons un chemin basé en un point comme une transformation naturelle du foncteur fibre, d'une catégorie galoisienne de revêtements dans la catégorie des ensembles profinis. Le groupe fondamental d'un espace se définit alors comme *le groupe d'automorphismes de ce foncteur fibre*[1], et le groupe fondamental des variétés se généralise à la catégorie des champs algébriques.

Dans ce contexte, un résultat de T. Oda [Oda97] établit, de façon théorique, une suite fondamentale géométrique (SFG) pour ce groupe fondamental champêtre. On obtient en particulier une action galoisienne géométrique sur les groupes fondamentaux d'espaces de modules $\mathcal{M}_{g,[n]}$ pour $g \geqslant 0$ et $n \geqslant 0$ quelconques.

Les groupes fondamentaux *topologiques* et *algébriques* qui interviennent dans la suite fondamentale géométrique (SFG) pour les variétés trouvent alors leurs analogues dans les groupes fondamentaux *orbifold discrets* et *champêtres profinis* associés aux structure analytiques et algébriques de $\mathcal{M}_{g,n}$. Plus précisément, ces derniers s'identifient aux versions discrètes – et profinies – du mapping class group $\Gamma_{g,n}$

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{M}_{g,n}^{an}) \simeq \Gamma_{g,n} \qquad \text{et} \qquad \pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,n}) \simeq \widehat{\Gamma}_{g,n},$$

où le premier s'identifie au groupe des difféomorphismes d'une surface de type (g,n), qui en genre zéro est un quotient de groupe de tresses comme on l'a déjà vu.

Géométrie des espaces de modules $\mathcal{M}_{g,n}$. Les espaces de modules admettent une compactification dite de *Deligne-Mumford* $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Cet espace est constitué des points de $\mathcal{M}_{g,n}$ auquel on ajoute des points représentant les classes d'isomorphisme de courbes algébriques semi-stables. D'un point de vue analytique, ce sont les surfaces de Riemann de genre g à n points marqués possédant au moins *un noeud* – c'est-à-dire une courbe géodésique dégénérée (voir figure 0.3).

1. voir [Noo04] pour une approche en terme de revêtement et [Zoo01] pour une approche en terme de topos

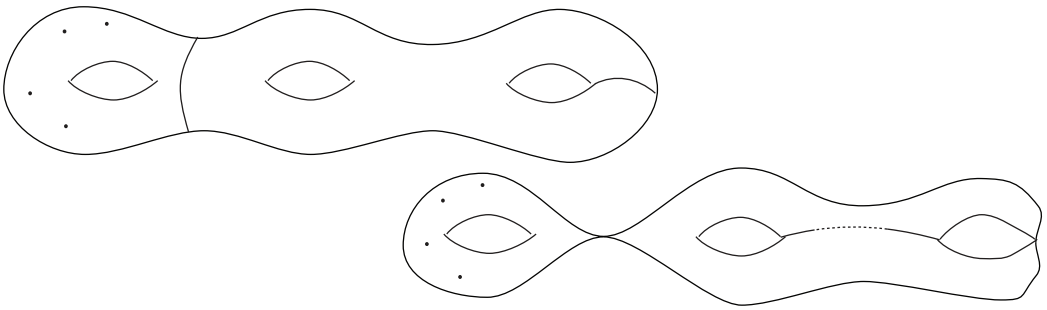


FIGURE 0.3: Courbe de $\overline{M}_{g,n}$

La composante à l'infini $D_\infty = \overline{\mathcal{M}}_{g,n} - \mathcal{M}_{g,n}$ de cette compactification $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ se décompose en réunion de diviseurs à croisements normaux que l'on appelle *l'infini de* $\mathcal{M}_{g,n}$.

Un *point base tangentiel*, notion introduite par P. Deligne dans [Del89], se définit d'un point de vue orbifold comme une région simplement connexe de la trace d'un voisinage de D_∞ dans $\mathcal{M}_{g,n}$. De tels objets définissent par ailleurs des foncteurs fibres et l'on peut ainsi baser des *groupoïdes fondamentaux* – ou groupes de transformations entre plusieurs foncteurs fibres – en un ensemble de composantes manquantes de l'espace.

D'un point de vue algébrique, ces foncteurs fibres sont définis sur $\mathbb{Q}$ et peuvent être pris comme points bases dans la définition de l'action de Galois absolu sur $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,n})$.

Action de $G_\mathbb{Q}$, morphismes d'effacement de points et d'inclusion de surfaces. Considérons $S_{g,n}$ et $S_{g,n'}$ surface topologiques pour $n' < n$ points marqués, ainsi que les espace de modules ordonnés $\mathcal{M}_{g,n}$ et $\mathcal{M}_{g,n'}$ associés. À partir du morphisme d'effacement de $n - n'$ points entre surfaces

$$S_{g,n} \to S_{g,n'}$$

et par passage au groupe fondamental, puis à la complétion profinie, on obtient un morphisme

$$\widehat{\Gamma}_{g,n} \to \widehat{\Gamma}_{g,n'}$$

qui correspond au morphisme entre groupes fondamentaux algébriques des espaces de modules

$$\mathcal{M}_{g,n} \to \mathcal{M}_{g,n'}.$$

Notons qu'algébriquement, ces morphismes d'effacements de points entre espaces de modules sont définis au niveau de leurs *compactifiés* et correspondent à la fibration

$$\mathcal{M}_{g,n+1} \to \mathcal{M}_{g,n}$$

associée à la courbe universelle $\mathcal{C}$ au dessus de $\mathcal{M}_{g,n}$ – voir [Knu83].

$$\mathcal{M}_{g_1,n_1} \times \mathcal{M}_{g_2,n_2} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

où $3g_1 - 3 + n_1 + 3g_2 - 3 + n_2 < 3g - 3 + n$. Notons $\Gamma^m_{g',n'}$ le mapping class group d'une surface topologique $S^m_{g',n'}$ de genre g' à n' points marqués et m composantes de bord. Par *inclusion de sous-surfaces*, c'est-à-dire de découpes d'une sous-surface de $S_{g,n}$ le long de courbes fermées simples pour obtenir un morceau plus petit de type (g', n', m), on obtient un morphisme

$$\Gamma^m_{g',n'} \to \Gamma_{g,n}$$

envoyant chaque twist de Dehn de la sous-surface sur lui même, vu dans la grande surface, et qui passe aux complétés profinis.

Ces morphismes sont géométriquement définis par le fait d'envoyer $\mathcal{M}^m_{g',n'}$ dans le *voisinage tubulaire de la strate à l'infini* correspondante de $\mathcal{M}_{g,n}$. Ils sont respectés par l'action galoisienne, autrement dit pour tout $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$, le carré suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Gamma}^m_{g',n'} & \longrightarrow & \widehat{\Gamma}_{g,n} \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ \widehat{\Gamma}^m_{g',n'} & \longrightarrow & \widehat{\Gamma}_{g,n}. \end{array}$$

En ce qui concerne le groupe de Grothendieck-Teichmüller, l'action du groupe $\mathbb{I}\Gamma$ définie sur chacun des groupes fondamentaux $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,n})$ respecte ces morphismes d'effacement de points et d'inclusion de surfaces (voir [NS00]).

Action sur l'inertie, le groupe $\widehat{GS}$

Inertie divisorielle à l'infini. Le groupe fondamental topologique $\mathcal{M}_{g,n}$ contient des lacets tournant autour des composantes irréductibles de D_∞. Comme ce groupe fondamental s'injecte dans $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,n})$, ces éléments s'y trouvent. On les appelle *inertie divisorielle à l'infini* de $\mathcal{M}_{g,n}$.

Suivant la théorie de Grothendieck-Murre [GM71], qui a du être affinée dans certains détails (voir par exemple [Nak97] et [Nak99]) dans le cas des espaces de modules $\mathcal{M}_{g,[n]}$, on sait que l'action galoisienne sur l'inertie divisorielle possède les propriétés suivantes, typique l'action galoisienne sur l'inertie des variétés en général.

> *L'action du groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{Q}}$ sur les groupes d'inertie divisorielle à l'infini de $\mathcal{M}_{g,[n]}$ est donnée par conjugaison et élévation à la puissance cyclotomique.*

Inertie champêtre. Mais en plus de cette inertie à l'infini, les espaces de modules $\mathcal{M}_{g,[n]}$, étant des champs et non des simples schémas, possède une *inertie* qui provient de

la structure de champ algébrique – plus précisément de l'existence de 2-morphismes issus de la structure de 2-catégorie, qui se comportent comme des transformations de foncteur fibre.

Considérons un champ de Deligne-Mumford $\mathcal{M}$. On dispose alors en tout point géométrique x de $\mathcal{M}$ d'un champ d'inertie $I_{\mathcal{M},x}$ muni d'une structure de groupe algébrique – appelé aussi *groupe fondamental des chemins cachés* par B. Noohi dans [Noo04]. Ce groupe est naturellement relié au groupe fondamental $\pi_1^{alg}(\mathcal{M})$ par un morphisme

$$\omega_x : I_{\mathcal{M},x} \to \pi_1^{alg}(\mathcal{M}).$$

Dans notre situation où $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{g,[n]}$, comme c'est le quotient de l'espace topologique de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,n}$ par le mapping class group $\Gamma_{g,[n]}$, il existe un sous-groupe d'indice fini dans $\Gamma_{g,[n]}$ qui agit librement sur $\mathcal{T}_{g,n}$, $\mathcal{M}_{g,n}$ est bien un champ de Deligne-Mumford. On vérifie que le groupe d'inertie $I_{\mathcal{M},x}$ s'identifie avec le sous-groupe d'isotropie Γ_x du groupe discret $\Gamma_{g,[n]}$ d'un point $x \in \mathcal{T}_{g,n}$. De plus, par des théorèmes fondateurs de J. Nielsen et Kerckhoff, on sait que chaque sous-groupe fini de $\Gamma_{g,[n]}$ se réalise à conjugaison près Γ_x pour un certain x.

Rappelons que le groupe fondamental $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,[n]})$ profini est isomorphe à $\widehat{\pi}_1^{orb}(\mathcal{M}_{g,[n]}^{an})$ et s'identifie à $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$. Les mapping class groups sont résiduellement finis, c'est à dire s'injectent dans leur complété profini, et le morphisme

$$\Gamma_{g,[n]} \hookrightarrow \widehat{\Gamma}_{g,[n]}$$

envoie injectivement la torsion du groupe discret dans le profini. Il est naturel de chercher à déterminer les sous-groupes finis cycliques – c'est-à-dire la torsion – du groupe fondamental $\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{g,[n]})$. On peut en particulier énoncer la conjecture suivante [LS06] – question 3.6

Conjecture A. *Soit $\mathcal{M}_{g,[n]}$ l'espace de modules des courbes de genre g à points marqués. Alors les sous-groupes finis de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,[n]})$ sont tous conjugués aux images, sous $\Gamma_{g,[n]} \hookrightarrow \widehat{\Gamma}_{g,[n]}$, des sous-groupes finis du groupe orbifold discret $\pi_1^{orb}(\mathcal{M}_{g,[n]})$.*

Un des résultats principaux de cette thèse, indispensable à la démonstration du théorème 1 ci-dessus est le suivant.

Théorème 3. *La conjecture A est vraie pour* les sous-groupes cycliques d'ordres premiers *lorsque g égale zéro et un.*

La difficulté de cette conjecture vient de ce que, de manière générale, il est difficile de maitriser la torsion qui apparait dans un complété topologique d'un groupe discret. Nous la démontrons en genre zéro et un grâce à un développement de la théorie de J. P. Serre dans le chapitre 2 qui repose sur une propriété de *bonté* des mapping class groups.

Signalons d'autre part que cette inertie champêtre locale, bien que fondamentalement différente de l'inertie divisorielle à l'infini, induit de façon similaire une stratification géométrique de l'espace (voir [Noo04] section 11).

Action galoisienne et théorie de Grothendieck-Teichmüller La théorie de Grothendieck-Teichmüller a permis d'expliciter entièrement l'action galoisienne sur l'inertie divisorielle des $\widehat{\Gamma}_{g,n}$. En effet, il est démontré dans [HLS00] et [NS00] que le groupe $\mathbb{\Gamma}$ mentionné ci-dessus agit sur les pure groups $\widehat{\Gamma}_{g,n}$, et on en donne une expression explicite sur l'inertie divisorielle.

Sachant par [GM71] que cette action de $G_{\mathbb{Q}}$ agit en élevant l'inertie divisorielle à la puissance cyclotomique et en la conjuguant, cette expression explicite précise ce résultat en déterminant les facteurs de conjugaison. C'est un des exemples les plus importants où la théorie de Grothendieck-Teichmüller apporte une connaissance approfondie de l'action galoisienne géométrique.

La question que nous considérons dans cette thèse en est un autre exemple. En effet, la conjecture suivante exprime l'idée que l'action galoisienne possède les mêmes propriétés que celles déjà mentionnées pour l'inertie divisorielle, sur l'inertie champêtre ainsi que sur toute la torsion profinie de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$.

Conjecture B. *Pour $g = 0$, 1 ou 2, l'action du groupe de Galois absolu sur la torsion cyclique du groupe fondamental $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,[n]})$ est définie par conjugaison et élévation à la puissance cyclotomique.*

En ce qui concerne l'inertie profinie, cette conjecture a résisté jusqu'ici aux tentatives de démonstration par les méthodes de la géométrie algébrique usuelle, y compris pour les plus petits cas. Il manque en effet une caractérisation des classes de conjugaison sous l'action galoisienne. À l'inverse, la connaissance en genre zéro des lieux spéciaux géométriques – lieux fixes sous l'action d'un élément de torsion géométrique du mapping class group, permet d'établir cette conjecture pour un élément *géométrique d'ordre quelconque* par des techniques de géométrie usuelle – voir chapitre 5. Cette description géométrique n'est pas connue en genre un.

Théorème. *La conjecture B est vraie pour les sous-groupes cycliques* géométriques d'ordre quelconque *pour $g = 0$, ainsi pour les sous-groupes cycliques* quelconques d'ordre premier *lorsque $g = 0$ ou 1.*

Dans le cas des ordres premiers, ce résultat est un corollaire de notre théorème 2 principal déjà cité. En effet celui-ci établit un résultat analogue pour le groupe $\widehat{GS}$ (voir théorèmes 3.1.4 et 4.3.2) qui contient le groupe de Galois absolu.

⋆

⋆ ⋆

Résumé

Nous reprenons ici la liste des résultats originaux établis dans cette thèse. Ceux-ci sont indiqués dans la rédaction par un grisé dans la marge.

Premier chapitre. Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie de Grothendieck-Teichmüller proprement dite et de l'action de $\widehat{GT}$ sur les *pur mapping class groups* $\widehat{\Gamma}_{g,n}$. Dans la section 1.1, nous construisons une présentation du *full* mapping class group $\Gamma_{g,[n]}$ basée sur les relations de tresses et de lanternes à partir d'une présentation du *pur* mapping class group $\Gamma_{g,n}$ de [LP01].

Nous généralisons ensuite le groupe $\widehat{GS}^1_{0,0}$ défini sous restrictions techniques dans [Sch06], en un groupe $\widehat{GS}$ isomorphe au groupe $\mathbb{I}\Gamma$ défini dans [NS00] mais d'une définition plus simple ; il contient donc le groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{Q}}$.

Ceci nous mène dans 1.2.3 au premier théorème de cette thèse (théorème 1.2.6), dans lequel nous démontrons que $\widehat{GS}$ agit sur chacun des *full* mapping class groups profinis, en explicitant cette action.

Deuxième chapitre. Ce chapitre prépare l'étude de la torsion cyclique des mapping class groups en genre zéro et un. Pour ce faire, nous utilisons la notion cohomologique de *bonté* dans le cadre des groupes discrets et profinis [Ser94], ainsi qu'un théorème de J. P. Serre ([Ser97, Hue79, Sch96]) reliant torsion d'un groupe (discret ou profini) à la décomposition de sa cohomologie en produit de la cohomologie de ses sous-groupes finis.

Afin d'appliquer ces résultats aux mapping class groups $\Gamma_{g,[n]}$ pour $g = 0$ et $g = 1$, nous établissons la bonté de ces derniers (proposition 2.1.7), ce résultat découlant de la préservation de la bonté par extension [Ser94].

Nous adaptons enfin ces résultats aux extensions de groupe sans torsion par un groupe cycliques d'ordre premier (corollaire 2.2.10). Ce résultat nous sert dans les chapitres 3 et 4 dans le cadre des mapping class groups de genre zéro et un.

Troisième chapitre. En utilisant une description en terme de tresses d'Artin des éléments de torsion des mapping class groups $\Gamma_{0,[n]}$, ainsi que les résultats du chapitre précédent, nous établissons que la torsion du groupe profini est purement géométrique (i.e. provient du discret), et nous la déterminons entièrement (proposition 3.1.4). Nous en déduisons le théorème principal (théorème 3.1.6) dans le cas du genre zéro, ainsi que dans quelques cas du genre un provenant du genre zéro (propositions 3.2.4, 3.2.8 et 3.2.10).

L'action d'un élément (λ, f) du groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GS}$ sur les éléments de torsion d'ordre premier du full mapping class group profini en genre zéro, et sur les rotations d'ordre premier sans ramification en genre un, est donnée par conjugaison et élévation à la puissance λ.

Quatrième chapitre. Nous traitons le cas des espaces de modules $\mathcal{M}_{1,[n]}$. Nous déterminons entièrement la torsion d'ordre premier des groupes profinis $\widehat{\Gamma}_{1,[n]}$ en établissant qu'elle est, comme dans le cas du genre zéro, géométrique (voir théorème 4.3.1). Nous démontrons en genre un le théorème principal de cette thèse (théorème 4.3.3), à savoir

> *L'action d'um élément (λ, f) du groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GS}$ sur les éléments de torsion d'ordre premier du full mapping class group profini $\widehat{\Gamma}_{1,[n]}$ est donnée par conjugaison et élévation à la puissance λ.*

La difficulté du genre un par rapport au genre zéro est que l'on ne peut pas s'appuyer sur la connaissance des groupes de tresses d'Artin pour déterminer la torsion. À la place, nous employons la théorie des courbes elliptiques (théorème 4.3.1). En premier lieu, nous traitons le cas de $\mathcal{M}_{1,[3]}$, car il s'avère que la démonstration du résultat principal pour n quelconque est analogue à celle pour $n = 3$. Nous traitons ensuite au cas général (théorème 4.3.2).

Cinquième chapitre. Soit $G_{\mathbb{Q}}$ le groupe de Galois absolu. Alors $G_{\mathbb{Q}}$ agit sur $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$ car $\mathcal{M}_{0,[n]}$ est un $\mathbb{Q}$ champ algébrique. À partir de la situation géométrique, nous établissons une version galoisienne de notre théorème principal pour lequel il n'est plus nécessaire de se restreindre aux ordres premiers.

> *Le groupe de Galois absolu agit par conjugaison et puissance cyclotomique sur les éléments de torsion géométrique d'ordre quelconque de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$.*

Ceci utilise le fait que les composantes irréductibles des lieux spéciaux dans les espaces de modules de genre zéro sont définis sur $\mathbb{Q}$ en un sens que nous précisons.

Ce résultat n'est pas établi en genre un. Néanmoins puisque $G_{\mathbb{Q}} \subset \widehat{GS}$, il découle de notre théorème principale en genre un que *le corps des modules d'un lieu spécial de $\mathcal{M}_{1,[n]}$ associé à un élément d'ordre premier est égal à $\mathbb{Q}$.*

Ce chapitre présente le contexte géométrique de l'inertie champêtre et des lieux spéciaux et nous introduisons la notion de *corps des modules arithmétique d'un lieu spécial.* Nous rappelons ensuite la description géométrique et arithmétique des lieux spéciaux de $\mathcal{M}_{0,[n]}$ correspondant aux éléments de torsion de $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ conduite dans [Sch03]. Enfin, nous illustrons la complexité du problème analogue en genre un à travers l'exemple de $\mathcal{M}_{1,[2]}$ dont nous décrivons l'ensemble des lieux spéciaux de façon exhaustive.

⋆

⋆ ⋆

1

Action d'un groupe de Grothendieck-Teichmüller sur $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$

1.1. Générateurs et relations dans $\Gamma_{g,[n]}$ 16
1.1.1. Généralités sur les twists et demi-twists 16
1.1.2. Une présentation finie 19
1.1.3. Mapping class group de genre zéro, tresses d'Artin 21
1.2. Groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GS}$, action sur $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$ 23
1.2.1. Les groupes $\widehat{GT}$ et $\mathbb{I}\Gamma$ 23
1.2.2. Le groupe $\widehat{GS}$, torsion en genre zéro 24
1.2.3. Action de $\widehat{GS}$ sur $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$ 27

On sait depuis Drinfel'd que le groupe de Grothendieck-Teichmüller défini dans l'introduction agit sur les full mapping class groups profinis en genre zéro. Nous définissons dans ce chapitre une version modifiée de $\widehat{GT}$ appelé $\widehat{GS}$, qui comme $\widehat{GT}$ contient le groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{Q}}$. Nous démontrons que $\widehat{GS}$, d'une définition plus simple puisque comportant trois conditions au lieu de quatre, est isomorphe au groupe $\mathbb{I}\Gamma$ défini dans [NS00]. Nous déduisons de la référence précédente que ce groupe agit sur les pure mapping class groups $\widehat{\Gamma}_{g,n}$, et nous montrons dans ce chapitre que cette action s'étend à une action sur les full mapping class groups $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$. Pour ce faire, nous introduisons une nouvelle présentation de celui-ci.

Considérons $S^m_{g,n}$ une surface compacte orientée de genre $g \geqslant 0$ à $n \geqslant 0$ points marqués et à $m \geqslant 0$ bords. Le full mapping class group $\Gamma^m_{g,[n]}$ d'une telle surface est défini comme le quotient des difféomorphismes de la surface permutant les points et ne changeant pas l'orientation, par les difféomorphismes isotopes à l'identité

$$\Gamma^m_{g,[n]} = \mathrm{Diff}^+(S^m_{g,n})/\mathrm{Diff}^0(S^m_{g,n}).$$

Le pure mapping class group $\Gamma^b_{g,n}$, sous-groupe de $\Gamma^b_{g,[n]}$, est quant à lui constitué des difféormorphismes ne permutant pas les points marqués.

Nous donnons dans la première section de ce chapitre une présentation finie du full mapping class group $\Gamma_{g,[n]}$ propre à la définition de l'action du groupe $\widehat{GS}$. Une première présentation finie des mapping class groups de genre g quelconque Γ^1_g est donnée dans

[Waj83] par B. Wajnryb. Dans un contexte de tresses généralisées, M. Matsumoto en a extrait une sous-représentation dans [Mat02], que C. Labruère et L. Paris ont complété dans [LP01] en une présentation des full mapping class groups à bords $\Gamma^r_{g,[n]}$. Il existe par ailleurs une autre présentation finie donnée par S. Gervais [Ger01], très symétrique et basée sur la relation d'étoile. Notre présentation du full mapping class group est inspirée de la présentation de C. Labruère et L. Paris.

Après quelques rappels sur les groupes de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GT}$ et $\mathbb{I}\Gamma$ ainsi que sur les propriétés de leurs actions sur les mapping class group, nous définissons un groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GS}$. Il s'agit d'une généralisation d'un groupe $\widehat{GS}^1_{0,0}$ défini par L. Schneps dans [Sch06] à partir du respect de morphismes de quotient par la torsion en genre zéro. Nous montrons que ce groupe $\widehat{GS}$ est isomorphe au groupe $\mathbb{I}\Gamma$ et nous définissons son action sur les full mapping class group $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$.

Dans un contexte d'étude de l'action galoisienne sur la torsion des groupes fondamentaux $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,[n]})$ (surtout pour $g = 1$), c'est du point de vue de ce groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GS}$ que nous mènerons notre étude dans les chapitres suivants.

1.1 Générateurs et relations dans $\Gamma_{g,[n]}$

Nous rappelons de façon succinte et sans démonstration les notions et résultats *classiques* qui nous sont utiles par la suite, en particulier pour obtenir la présentation du full mapping class group $\Gamma_{g,[n]}$ (proposition 1.1.5) sur lequel s'appuie l'action du groupe de Grothendieck-Teichmüller de la section 1.2.3.

1.1.1 Généralités sur les twists et demi-twists

Rappelons les définitions rigoureuses de deux difféomorphismes particuliers d'une surface S compacte orientée à bords et munie d'un ensemble $\mathcal{P}$ de points marqués.

Définition (twist)**.** *Soit $s : \mathbb{S}^1 \to S - \mathcal{P}$ un plongement du cercle dans S tel que son image ne rencontre aucun point marqué. Considérons un voisinage tubulaire de $s(\mathbb{S}^1)$, ou encore un plongement d'un anneau $A : [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to S - \mathcal{P}$ tel que $A(1/2, z) = s(z)$ pour tout $t \in \mathbb{S}^1$. Le* twist de Dehn σ de support s *est le difféomorphisme défini par*

$$(\sigma \circ A) : (t, z) \mapsto A(t, e^{2i\pi t} z) \quad t \in [0,1], \quad z \in \mathbb{S}^1$$

et l'identité sur l'extérieur de l'image de A.

Notons que l'on peut supposer que si l'intérieur de $s(\mathbb{S}^1)$ est simplement connexe, il contient au moins un point marqué, puisque dans le cas contraire σ est isotope à l'identité. Un tel twist ne dépend que de la classe d'isotopie de s (voir M. Dehn [Deh87]).

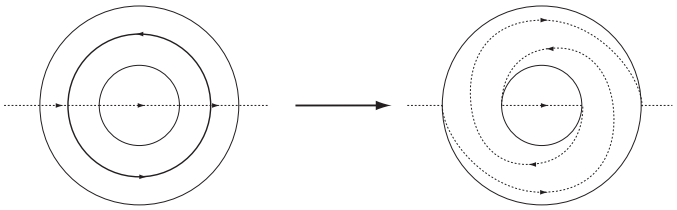


FIGURE 1.1: Twist de support s.

On notera qu'un tel difféormorphisme ne peut pas permuter les points marqués, à la différence des difféomorphismes du type suivant.

Définition (demi-twist)**.** *Soient $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ deux points marqués de S et $a : [0,1] \to S$ un plongement d'un segment dont l'image ne rencontre $\mathcal{P}$ qu'en P_1 et P_2 à ses extrémités. Considérons un plongement d'un disque $A : \mathbb{D}^2 \to S$ dont l'image ne contient que les deux points marqués P_1 et P_2, et tel que $a(t) = A(t - 1/2)$ pour tout $t \in [0,1]$. Le* demi-twist *ou* braid twist *de support a est le difféormorphisme défini par*

$$(\alpha \circ A) : z \mapsto A(e^{2i\pi|z|}z) \qquad z \in \mathbb{D}^2$$

et l'identité en dehors de l'image de A.

Un tel demi-twist ne dépend que de la classe d'isotopie de a. Remarquons que si $s : \mathbb{S}^1 \to S$ est un cercle défini par le bord de A, le twist σ et le demi-twist α qu'ils définissent vérifient la relation $\alpha^2 = \sigma$.

Un tel demi-twist entre deux points marqués se représente par un segment comme sur la figure 1.2

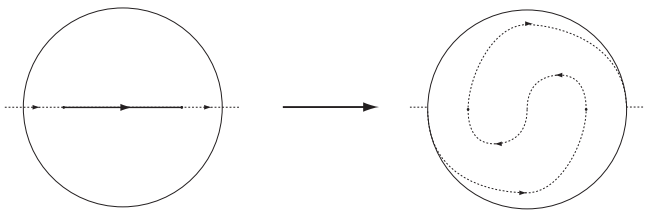


FIGURE 1.2: Demi-twist de support a.

Rappelons quelques relations élémentaires vérifiées par ces twists et demi-twists.

Proposition 1.1.1. *Considérons S une surface compacte orientée, ainsi que γ, β twists de Dehn de support a et b, et τ_1, τ_2 demi-twists de supports t_1 et t_2. Alors*

$$\begin{aligned} &\alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta && \text{si } |a \cap b| \neq \varnothing \\ &\tau_1\tau_2\tau_1 = \tau_2\tau_1\tau_2 && \text{si les extrémités des supports coïncident} \\ &\tau_1\alpha\tau_1\alpha = \alpha\tau_1\alpha\tau_1 && \text{si } |t_1 \cap a| \neq \varnothing \end{aligned}$$

et les twists et demi-twists commutent deux à deux si leurs supports sont disjoints.

Ces deux premières relations, dites de *tresses*, sont classiques. La troisième relation est quant à elle reprise et démontrée dans la proposition 1.1.5.

Ces applications de twists et demi-twists forment un système de générateurs des mapping class groups

Théorème 1.1.2 ([Deh87, Lic08])**.** *Soit $S^m_{g,n}$ une surface de genre g à m bord, à n points marqués et de caractéristique d'Euler négative.*

Le pure mapping class group $\Gamma^b_{g,n}$ *est engendré par les twists de Dehn le long de courbes fermées simples sur la surface.*

Le full mapping class group $\Gamma^b_{g,[n]}$ *est engendré par ces mêmes twists et les demi-twists joignant deux points sur $S^m_{g,n}$.*

La preuve de ce résultat fait en particulier usage de deux suites exactes qui relient pure et full mapping class groups. La première considère la permutation induite sur les points marqués par un élément du full

$$1 \to \Gamma_{g,n} \to \Gamma_{g,[n]} \to \mathfrak{S}_n \to 1.$$

La seconde, *suite exacte de Birman*

$$1 \to \pi_1(S^b_{g,n}) \to \Gamma^b_{g,n+1} \to \Gamma^b_{g,n} \to 1$$

provient de l'effacement d'un point marqué.

La dernière suite exacte établit le lien entre mapping class group *à bords* et *sans bords* : puisque les twists le long des composantes de bord sont centraux dans $\Gamma^m_{g,n}$, on obtient alors

$$1 \to \mathbb{Z}^m \to \Gamma^m_{g,n} \to \Gamma_{g,n+m} \to 1$$

qui provient du rebouchage de bords.

Tant les relations entre twists et demi-twists, que ces trois suites exactes, nous seront d'une grande utilité tout au long de notre étude.

1.1.2 Une présentation finie

Nous reprenons ici le système de générateurs de C. Labruère et L. Paris [LP01] afin de donner une présentation finie des full mapping class groups. Celle-ci nous permettra à la section 1.2.3 d'étendre aux full mapping class groups $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$ l'action du groupe de Grothendieck-Teichmüller $\mathbb{GT}$ sur les pure mapping class groups $\widehat{\Gamma}_{g,n}$.

Proposition 1.1.3 ([LP01])**.** *Soit $g \geqslant 1$, $n \geqslant 0$. Alors le* full mapping class group $\Gamma_{g,[n]}$ *admet le système de générateurs*

$$\mathcal{G}_{g,n} = \{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_{2g-1}, \gamma; \{\tau_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n-1}\}$$

composé des twists et des demi-twists τ_i de la figure 1.3

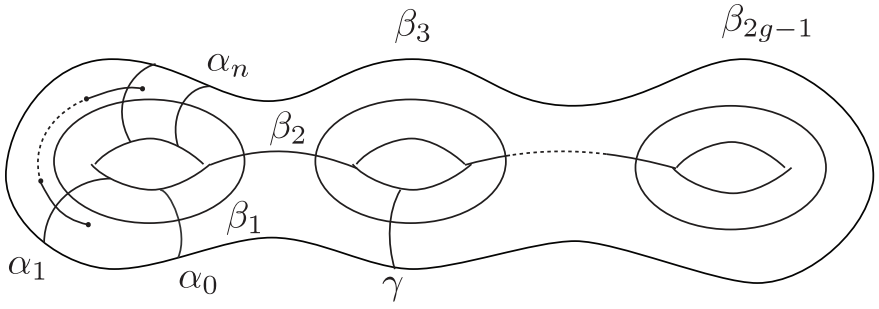


FIGURE 1.3: Générateurs de $\Gamma_{g,[n]}$

Déterminons les relations entre générateurs de ce système. Pour ce faire, considérons la situation générale de groupes H et K admettant des présentations respectives $< S_K | R_K >$ et $< S_H | R_H >$, et qui s'insèrent dans une suite exacte

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\psi} H \longrightarrow 1.$$

Notons $\tilde{S}_H$ un ensemble de préimages fixées $\tilde{h} := \psi^{-1}(h)$ pour un générateur $h \in S_H$. Un ensemble de générateurs S_G de G est alors donné par $S_G = S_K \cup \tilde{S}_H$. En plus des relations R_K de K, on distingue deux types de relations dans R_G :

– à chaque relation $w(r_1, \cdots, r_n) = 1$ de H est associé un mot $w(r_1, \cdots, r_n)$ de H qui se relève en un mot $\tilde{w}(\tilde{r_1}, \cdots, \tilde{r_n})$ de G. Puisque ce dernier est dans $Ker(\psi)$, il lui correspond un mot $\tilde{w}_0(k_1, \cdots, k_m)$ de $Im(K) \subset G$, et

$$\tilde{w}(\tilde{r}_1, \cdots, \tilde{r}_n) = \tilde{w}_0(k_1, \cdots, k_m) \tag{R1}$$

est une relation dans G ;

– pour tout générateur $\tilde{h}$ de G et k de K, $\tilde{h}k\tilde{h}^{-1}$ est dans K, et

$$\tilde{h}k\tilde{h}^{-1} = w \qquad \text{où } w \in K \tag{R2}$$

est une relation dans G.

Le résultat précis, que l'on trouvera par exemple dans [Joh97], est alors le suivant.

Proposition 1.1.4. *Soient K et H deux groupes de présentations respectives $< S_K|R_K >$ et $< S_H|R_H >$, et G une extension de K par H. Utilisant les notations précédentes, le groupe G admet alors la présentation $< S_G|R_G >$ définie par*

– *l'ensemble de générateurs $S_G = S_K \cup \tilde{S}_H$;*
– *l'ensemble de relations $R_G = R_1 \cup R_2 \cup R_K$.*

Dans notre cas, considérons la suite exacte de permutation des points

$$1 \longrightarrow \Gamma_{g,n} \longrightarrow \Gamma_{g,[n]} \longrightarrow \mathfrak{S}_n \longrightarrow 1. \tag{1.1.1}$$

Fixons une présentation de $\Gamma_{g,n}$ dont les générateurs sont inclus dans $\mathcal{G}_{g,n}$, par exemple celle de [LP01] et appliquons la proposition 1.1.4 à la suite exacte (1.1.1). On obtient alors la liste des relations entre les éléments du système de générateurs $\mathcal{G}_{g,n}$ de la proposition 1.1.3

Proposition 1.1.5. *Soit $g \geqslant 1$, $n \geqslant 0$. Considérons une présentation de $\Gamma_{g,n}$ dont le système de générateurs est inclus dans $\mathcal{G}_{g,n}$. En plus des relations propres à cette présentation, les générateurs*

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_{2g-1}, \gamma; \{\tau_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n-1}\}$$

du full mapping class group $\Gamma_{g,[n]}$ *admettent entre eux les relations de*

(C) Carrés : les τ_i^2 sont des twists purs et peuvent s'exprimer comme une formule algébrique dans les générateurs purs α_i et β_i que nous ne donnons pas explicitement ;

(T) Tresses : entre deux demi-twists $\alpha\beta = \beta\alpha$ si les supports sont disjoints, $\alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta$ si les supports s'intersectent en un point transversalement ;

(L) Lanternes : entre un twist α et un demi-twist τ s'intersectant transversalement sur une pièce de type $S_{0,4}$

$$\tau\alpha\tau\alpha = \alpha\tau\alpha\tau.$$

Démonstration. L'application de la proposition 1.1.4 est immédiate, puisque les relations (R_K) et $(R1)$ correspondent respectivement aux relations de la présentation de $\Gamma_{g,n}$ choisie et aux relations de tresses usuelles entre demi-twists τ_i en genre 0.

Les relations $(R2)$ sont de la forme $\tau_i\alpha_i\tau_i^{-1} \in \Gamma_{g,n}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Dans tous les cas, la situation géométrique est supportée sur une pièce de type $S_{0,4}$, délimitée par les deux points marqués et par les courbes a_{i-1} et a_{i+1}. Puisque $\tau\alpha\tau^{-1} = T_{\tau(a)}$, cette configuration

correspond localement à une lanterne de Johnson (voir figure 1.4) et les relations sont de la forme

$$\tau^2 \cdot \alpha \cdot \tau\alpha\tau^{-1} = \gamma\beta \tag{1.1.2}$$

où γ et β sont les twists extérieurs. Puisque les twists de bords sont centraux sur cette pièce, on obtient

$$\tau\alpha\tau\alpha = \gamma\beta$$

puis la relation annoncée. □

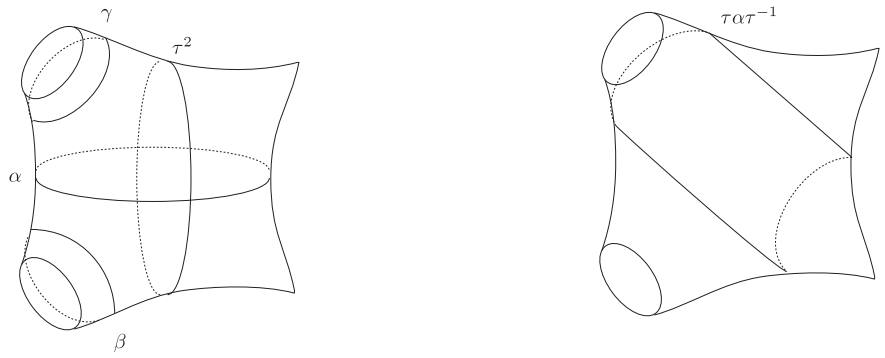


FIGURE 1.4: Lanterne sur $S_{0,4}$.

1.1.3 Mapping class group de genre zéro, tresses d'Artin

Le groupe de tresses d'Artin à n brins B_n peut être défini comme le groupe fondamental de l'espace de configuration du plan complexe

$$B_n = \pi_1((\mathbb{C}^n - \Delta)/\mathfrak{S}_n)$$

où Δ désigne la diagonale grasse. Il est engendré par $n-1$ éléments $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ admettant entre eux les relations

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \qquad \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ pour } |i-j| > 1$$

Le résultat que nous utiliserons régulièrement par la suite est le suivant – voir par exemple [Bir74].

Théorème 1.1.6. *Soit $\Gamma_{0,[n]}$ le full mapping class group d'une surface de genre zéro à n points marqués. Il existe un isomorphisme avec le quotient du groupe de tresses de la sphère*

$$\Gamma_{0,[n]} \simeq B_n/\langle W_n = 1, H_n = 1\rangle$$

où

$$W_n = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n$$
$$H_n = \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_1^2\cdots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}$$

sont respectivement le générateur du centre de B_n, et la relation d'Hurwitz de la sphère.

On obtient par ailleurs une présentation similaire pour le pure mapping class group $\Gamma_{0,n}$ à partir du *groupe de tresses pures* K_n, sous-groupe de B_n. Le groupe K_n est composé des tresses ne permutant aucun brin et admet un système de générateurs formé des éléments – voir figures de l'introduction,

$$x_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\cdots\sigma_i^2\cdots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1} \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n-1.$$

Nous ne détaillons pas ici un système de relations spécifique à ce système de générateurs, puisque nous n'en ferons pas usage par la suite.

Remarque. Les *groupes de tresses généralisés* $A(\Gamma)$ qui interviennent dans la présentation de M. Matsumoto déjà citée, sont définis de façon abstraite par générateurs et des relations de la forme

$$\underbrace{\alpha\beta\cdots\alpha\beta}_{n \text{ fois}} = \underbrace{\beta\alpha\cdots\beta\alpha}_{n \text{ fois}},$$

généralisations des relations de tresses entre twists et entre twists et demi-twists.

Considérons d'autre part un système de racines ϕ d'une algèbre de Lie semi-simple, qui engendre un groupe de réflexions de Weyl W où l'on note H_α l'hyperplan associé à la réflexion définie par $\alpha \in \phi$. C'est alors un résultat de E. Brieskorn [Bri71] que ces groupes de tresses généralisés sont isomorphes au groupe fondamental du complémentaire de tels arrangements d'hyperplans. Plus exactement

$$A(\Gamma) \simeq \pi_1((U - \cup_{\alpha\in\phi} H_\alpha)/W).$$

On retrouve en particulier l'isomorphisme définissant le groupe des tresses d'Artin lorsque le système de racines ϕ est celui de type A_{n-1}.

Notons qu'en genre un, le mapping class group $\Gamma_{1,[n]}$ admet une présentation en terme de groupe de tresses du tore marqué $B_{1,n}$ – c'est-à-dire comme groupe fondamental de l'espace de configuration associé à cette surface

$$\Gamma_{1,[n]} \simeq (\overline{B}_{1,n} \rtimes \widetilde{SL_2(\mathbb{Z})})/\mathbb{Z}$$

où $\widetilde{SL_2(\mathbb{Z})}$ est une extension centrale de $SL_2(\mathbb{Z})$, et $\overline{B}_{1,n}$ le noyau d'un morphisme $\Gamma_{1,[n]} \to SL_2(\mathbb{Z})$.

Dans ce cas, le groupe $\Gamma_{1,[n]}$ est présenté par $4n+2$ générateurs, qui en plus des relations de tresses précédentes, sont reliés par 6 types de relations – voir [Bir69b] et [Bir69a].

Étant donné la similarité du mapping class group en genre un avec le mapping class group en genre zéro, relation détaillée géométriquement dans la section 3.2 du chapitre 3, l'établissement de nos résultats ne nécessite pas l'utilisation de cette présentation.

1.2 Groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GS}$, action sur $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$

1.2.1 Les groupes $\widehat{GT}$ et $\mathbb{I}\Gamma$

Rappelons la définition du groupe de Grothendieck-Teichmüller obtenue par V.G. Drinfel'd.

Définition ([Dri90]). *Le groupe $\widehat{GT}$ est formé des éléments inversibles $F = (\lambda, f) \in \widehat{\mathbb{Z}}^* \times \widehat{\mathbb{F}}'_2$ vérifiant les relations*

$$f(x,y)f(y,x) = 1 \tag{I}$$
$$f(x,y)x^m f(z,x)z^m f(y,z)y^m = 1 \ \text{où } m = (\lambda-1)/2 \ xyz = 1 \tag{II}$$
$$f(x_{34},x_{45})f(x_{51},x_{12})f(x_{23},x_{34})f(x_{45},x_{51})f(x_{12},x_{23}) = 1 \tag{III}$$

où x_{ij} sont les éléments de $\Gamma_{0,5}$ introduits précédemment.

La définition de $\widehat{GT}$ provient de l'action d'éléments (λ, f) sur le groupe $\widehat{\mathbb{F}}_2$ définie par

$$F : (x,y) \mapsto (x^\lambda, f y^\lambda f^{-1})$$

et la loi de composition dans $\widehat{GT}$ est donnée par celle de ces automorphismes, c'est-à-dire

$$(\lambda, f).(\mu, g) = (\lambda.\mu, f.F(g)).$$

Le premier résultat concernant l'action sur les mapping class groups est le suivant.

Théorème 1.2.1 ([Dri90]). *Il existe une action du groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GT}$ sur les full mapping class groups profini de genre zéro, et cette action, donnée par la formule D de l'introduction, respecte le groupe symétrique.*

Notons $\psi : \widehat{\Gamma}_{0,[n]} \to \mathfrak{S}_n$ la surjection définie par permutation des points marqués ; le respect du groupe symétrique par l'action de $\widehat{GT}$ signifie que

$$\psi \circ F = F \qquad \forall F \in \widehat{GT}.$$

Remarque. V. G. Drinfel'd a démontré ce résultat dans le cadre des groupes de tresses prounipotents, mais ce résultat passe sans difficulté aux complétés profinis et aux quotients des groupes de tresses que sont les mapping class groups de genre zéro – voir [LS94a].

En genre supérieur, *A. Hatcher, P.Lochak* et *L. Schneps* [HLS00], puis *H. Nakamura et L. Schneps* [NS00] ont défini un sous-groupe $\mathbb{I}\Gamma \subset \widehat{GT}$.

Définition. *On note $\mathbb{I}\Gamma$ le sous-groupe de $\widehat{GT}$ constitué des éléments $(\lambda, f) \in \widehat{GT}$ vérifiant les deux équations*

$$f(\tau_1\tau_3, \tau_2^2) = g(x_{45}, x_{51})f(x_{12}, x_{23})f(x_{34}, x_{45}) \tag{III'}$$

$$f(\tau_1, \tau_2^4) = \tau_2^{\rho_2(F)} f(\tau_1^2, \tau_2^2)\tau_1^{4\rho_2(F)}(\tau_1\tau_2)^{-6\rho_2(F)} \tag{IV}$$

où $g \in \widehat{F}_2$ est l'unique élément vérifiant $f(x,y) = g(y,x)^{-1}g(x,y)$, $\rho_2 : \widehat{GT} \to \widehat{\mathbb{Z}}$ est défini par $g \equiv (xy)^{\rho_2(F)}$ dans $\widehat{\mathbb{F}}_2^{ab}$, et τ_i est le $i$ème générateur usuel de B_n.

Remarque.

1. On pourra consulter [LS97] pour une explication géométrique quant à l'origine de g.
2. A priori, le caractère de Kummer $\rho_2 : \widehat{GT} \to \widehat{\mathbb{Z}}$ est défini sur $G_{\mathbb{Q}}$; c'est un caractère de Kummer relatif à $\sqrt{2}$. On pourra consulter [Iha97] pour une justification de son prolongement à $\widehat{GT}$;

En terme d'action, ce groupe $\mathbb{I}\Gamma$ admet une représentation canonique dans $Out(\widehat{\Gamma}_{g,n}^m)$, qui possède un relèvement dans $\mathrm{Aut}(\widehat{\Gamma}_{g,n}^m)$ pour chaque *décomposition en quilt*. Nous développons cette notion de *décomposition en quilts* dans la section 1.2.3.

Théorème 1.2.2 ([NS00])**.** *Soit $\overline{\psi} : \mathbb{I}\Gamma \to Out(\widehat{\Gamma}_{g,n}^m)$ l'homorphisme canonique cité ci-dessus. Pour chaque choix de P une découpe en pantalons de $S_{g,n}^m$ et Q/P une découpe en quilts relative à P, il existe un relèvement de $\overline{\psi}$ en un homomorphisme*

$$\psi_{Q/P} : \mathbb{I}\Gamma \to Aut(\widehat{\Gamma}_{g,n}^m)$$

1.2.2 Le groupe $\widehat{GS}$, torsion en genre zéro

Dans [Sch06], L. Schneps introduit un sous-groupe $\widehat{GS}_{0,0}^1$ de $\widehat{GT}$ sous les conditions techniques $\lambda = 1$ et $\rho_2(F) = \rho_3(F) = 0$. Ces éléments vérifient deux relations supplémentaires $(\star)$ et $(\star\star)$. Nous utilisons ici une équation (R), équivalente à la relation $(\star)$ sous les mêmes conditions techniques, pour définir un groupe $\widehat{GS}$.

Ce groupe $\widehat{GS}$ contient $\widehat{GS}_{0,0}^1$ et nous montrons qu'il est isomorphe au groupe $\mathbb{I}\Gamma$.

Définition. *On note $\widehat{GS}$ l'ensemble formé des éléments inversibles $F = (\lambda, f) \in \widehat{\mathbb{Z}}^* \times \widehat{\mathbb{F}}_2'$ et vérifiant les relations*

$$f(x,y)f(y,x) = 1 \tag{I}$$

$$f(x,y)x^m f(z,x)z^m f(y,z)y^m = 1 \text{ où } m = (\lambda-1)/2 \ xyz = 1 \tag{II}$$

$$g(x_{45}, x_{51})f(x_{12}, x_{23})f(x_{34}, x_{45}) = \tau_2^{4\rho_2(F)}(\tau_2\tau_3\tau_1)^{-4\rho_2(F)} f(\tau_1^2\tau_3^2, \tau_2)(\tau_1\tau_3)^{4\rho_2(F)} \tag{R}$$

où $\rho_2 : \widehat{GT} \to \widehat{\mathbb{Z}}$ est un caractère de Kummer relatif à $\sqrt{2}$ et $g \in \widehat{F}_2$ est l'unique élément vérifiant $f(x,y) = g(y,x)^{-1}g(x,y)$, et la relation (R) *est dans $\widehat{\Gamma}_{0,[5]}$.*

Indiquons deux relations supplémentaires qui nous seront utiles par la suite, et qui sont plus généralement vérifiées par tout élément de $\widehat{GT}$, puisque la démonstration repose uniquement sur la relation (II).

Lemme 1.2.3. *Soient x, y, z dont le produit $xyz = c$ commute avec chacun des éléments x, y et z. Alors, pour tout $F \in \widehat{GT}$, on a*

$$f(x,y)x^m f(z,x)z^m f(y,z)y^m = c^m \text{ où } m = (\lambda-1)/2 \tag{1.2.1}$$

$$f(x,y)x^{\tilde{m}} f(z,x)z^{\tilde{m}} f(y,x)y^{\tilde{m}} = c^m \text{ où } \tilde{m} = -(m+1). \tag{1.2.2}$$

Démonstration. Utilisons le morphisme ψ défini par $x \mapsto x$, $y \mapsto y$, $z \mapsto zc^{-1}$. Alors $\psi(x)\psi(y)\psi(z) = 1$ et l'on peut appliquer la relation (II) aux images, soit

$$f(x,y)x^m f(zc^{-1},x)z^m c^{-m} f(y,zc^{-1})y^m = 1$$

où $m = (\lambda-1)/2$. De plus puisque $f \in \widehat{F}'_2$, si b commute avec x et y, alors

$$f(xb,y) = f(x,yb) = f(x,y)$$

ce qui dans notre cas donne la relation (1.2.1)

$$f(x,y)x^m f(z,x)z^m f(y,z)y^m = c^m.$$

Remarquons enfin que si $(\lambda, f) \in \widehat{GT}$ alors $(-\lambda, f) \in \widehat{GT}$, ce qui appliqué à la relation (1.2.1) donne la relation (1.2.2) énoncée. □

Proposition 1.2.4. *Soit $F \in \widehat{GT}$. Alors F vérifie les relations* (III') *et* (IV) *si et seulement si F vérifie l'unique relations* (R).

Dans [Sch06], il est prouvé que des éléments vérifiant les deux relations $(\star)$ et $(\star\star)$ ajoutés à la relation (I) vérifient alors les relations $(II), (III')$ et (IV). Notre démonstration est une généralisation de ce résultat.

Démonstration. Montrons que la relation (R) implique la relation (IV).

La relation (R) est colorée par rapport au cinquième brin dans $\Gamma_{0,[5]}$. On peut donc lui appliquer le morphisme $\widehat{\Gamma}_{0,[5]} \to \widehat{\Gamma}_{0,[4]}$ défini au niveau des groupes de tresse par suppression du cinquième brin. Puisque f appartient à $\widehat{F}'_2$ et en utilisant la relation $\tau_1^2 = \tau_3^2$ de $\widehat{\Gamma}_{0,[4]}$, la relation (R) devient

$$\tau_2^{4\rho_2(F)}(\tau_2\tau_3\tau_1)^{-4\rho_2(F)} f(\tau_1^4,\tau_2)\tau_1^{8\rho_2(F)} = f(\tau_1^2,\tau_2^2)$$

avec $x_{12} = \tau_1^2$ et $x_{23} = \tau_2^2$. Par passage à l'inverse et en utilisant la relation (I), on obtient

$$f(\tau_2,\tau_1^4) = \tau_1^{8\rho_2(F)} f(\tau_2^2,\tau_1^2)\tau_2^{4\rho_2(F)}(\tau_2\tau_1\tau_3)^{-4\rho_2(F)}.$$

En utilisant les relations de tresses et la relation $\tau_1^2 = \tau_3^2$ précédente, on montre que $(\tau_2\tau_1\tau_3)^4 = (\tau_2\tau_1)^6$. Ainsi

$$f(\tau_2, \tau_1^4) = \tau_1^{8\rho_2(F)} f(\tau_2^2, \tau_1^2) \tau_2^{4\rho_2(F)} (\tau_2\tau_1)^{-6\rho_2(F)}$$

d'où la relation (IV) cherchée par symétrie sur les générateurs τ_1 et τ_2

$$f(\tau_1, \tau_2^4) = \tau_2^{8\rho_2(F)} f(\tau_1^2, \tau_2^2) \tau_1^{4\rho_2(F)} (\tau_1\tau_2)^{-6\rho_2(F)}.$$

Pour obtenir la relation (III'), partons de la relation (IV), dont on vient de montrer qu'elle découle de (R)

$$f(\tau_1, \tau_2^4) = \tau_2^{8\rho_2(F)} f(\tau_1^2, \tau_2^2) \tau_1^{4\rho_2(F)} (\tau_1\tau_2)^{-6\rho_2(F)}. \tag{IV}$$

Par relations de tresses, celle-ci se réécrit dans le sous-groupe $< \tau_1, \tau_2^2 >$ de $\widehat{\Gamma}_{0,[4]}$

$$f(\tau_1, \tau_2^4) = \tau_2^{8\rho_2(F)} f(\tau_1^2, \tau_2^2) \tau_1^{4\rho_2(F)} (\tau_1\tau_2^2)^{-4\rho_2(F)}.$$

Considérons son image par l'homorphisme ψ défini par $\tau_1 \mapsto \tau_2$ et $\tau_2^2 \mapsto \tau_1\tau_3$ entre les sous-groupes de $\widehat{\Gamma}_{0,[4]}$ et de $\widehat{\Gamma}_{0,[5]}$ correspondants (voir plus bas pour la bonne définition de cet homorphisme)

$$f(\tau_2, \tau_1^2\tau_3^2) = (\tau_1\tau_3)^{4\rho_2(F)} f(\tau_2^2, \tau_1\tau_3) \tau_2^{4\rho_2(F)} (\tau_2\tau_1\tau_3)^{-4\rho_2(F)},$$

ou encore

$$f(\tau_1^2\tau_3^2, \tau_2) = (\tau_2\tau_1\tau_3)^{4\rho_2(F)} \tau_2^{-4\rho_2(F)} f(\tau_1\tau_3, \tau_2^2) (\tau_1\tau_3)^{-4\rho_2(F)}.$$

Le membre de gauche s'identifie dans la relation (R) et il en découle la relation (III') recherchée

$$f(\tau_1\tau_3, \tau_2^2) = g(x_{45}, x_{51}) f(x_{12}, x_{23}) f(x_{34}, x_{45}).$$

Réciproquement, on vérifie directement en utilisant le morphisme ψ ci-dessus que des éléments vérifiant les deux relations (III') et (IV) vérifient l'unique relation (R). □

Justifions que l'application $\psi : H \subset \widehat{\Gamma}_{0,[4]} \to \widehat{\Gamma}_{0,[5]}$, où $H =< \tau_1, \tau_2^2 >$, utilisée précédemment est bien un morphisme de groupe.

Démonstration de l'homorphisme précédent. Utilisons l'identification usuelle des mapping class groups $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ avec le groupe de tresse $\widehat{B}_n$ quotienté par les relations de centre et d'Hurwitz

$$(\tau_1\tau_2\cdots\tau_{n-1})^n = 1$$
$$\tau_{n-1}\tau_{n-2}\cdots\tau_1^2\cdots\tau_{n-2}\tau_{n-1} = 1.$$

Dans cette présentation, les générateurs de H ne sont soumis qu'à la relation $(\tau_1\tau_2^2)^4 = 1$. Il suffit de vérifier que cette relation est respectée par ψ. Tout d'abord, dans $\widehat{\Gamma}_{0,[5]}$, on montre en utilisant les relations de tresses que

$$\begin{aligned}(\tau_1\tau_2\tau_3)^4 &= (\tau_1\tau_2\tau_3)^4(\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1^2\tau_2\tau_3\tau_4)\\ &= (\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4)^5\\ (\tau_1\tau_2\tau_3)^4 &= 1.\end{aligned}$$

Or, $\psi((\tau_1\tau_2^2)^4) = (\tau_2\tau_1\tau_3)^4$ et, toujours par relations de tresses, $(\tau_2\tau_1\tau_3)^4 = (\tau_1\tau_2\tau_3)^4$. On obtient ainsi la relation cherchée. □

Reprenons les relations $(\star)$ et $(\star\star)$. Celles-ci correspondent au respect de morphismes de torsion entre espaces de modules de dimensions un et deux en genre zéro – plus exactement entre les mapping class groups $\widehat{\Gamma}_{0,4}$, $\widehat{\Gamma}_{0,[5]}$ et $\widehat{\Gamma}_{0,[6]}$. Cette approche permet d'établir que l'ensemble $\widehat{GS}^1_{0,0}$ est un groupe.

Dans le cas de $\widehat{GS}$, ce résultat découle de la structure de groupe de $\mathbb{\Gamma}$ et de la loi de composition des automorphismes qui la définissent.

Proposition 1.2.5. *L'ensemble $\widehat{GS}$ est un groupe isomorphe à $\mathbb{\Gamma}$ et il contient le groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{Q}}$.*

Il s'agit de la conséquence essentielle de la levée des restrictions techniques qui definissent $\widehat{GS}^1_{0,0}$. Remarquons que H. Tsunogai [Tsu06] a par ailleurs établi une forme complète des relations $(\star)$ et $(\star\star)$ dont il a montré, par des méthodes d'automorphismes de revêtements, qu'elles étaient vérifiées par les éléments de $G_{\mathbb{Q}}$.

1.2.3 Action de $\widehat{GS}$ sur $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$

Nous montrons dans cette section que le groupe $\widehat{GS}$ admet une action sur les full mapping class groups $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$ qui étend les actions connues en genre zéro et en genre supérieur sur les pure mapping class group des théorèmes 1.2.1 et 1.2.2. Nous définissons cette action sur le système de générateurs $\mathcal{G}_{g,n}$ de la proposition 1.1.3.

Pour ce faire, munissons la surface topologique $S^m_{g,n}$ de la découpe en pantalons P de la figure 1.5, ainsi que d'une décomposition en quilts Q/P relative à P – voir figure 1.6 pour les pièces élémentaires constituant une découpe en quilts.

Cette décomposition définit une action de $\mathbb{\Gamma}$ sur $\widehat{\Gamma}_{g,n}$, et suivant [NS00] – proposition 8.1, son expression sur les générateurs $\mathcal{G}_{g,n}$ s'obtient de la manière suivante. On fixe d'abord une découpe en pantalons P. Pour chaque élément de $\mathcal{G}_{g,n}$, on fait coïncider son support avec une courbe d'une découpe en pantalon P' obtenue à partir de P par une suite de A et de S mouvements – voir figures 1.7 et 1.8. Pour chaque A/S-mouvement, l'action est

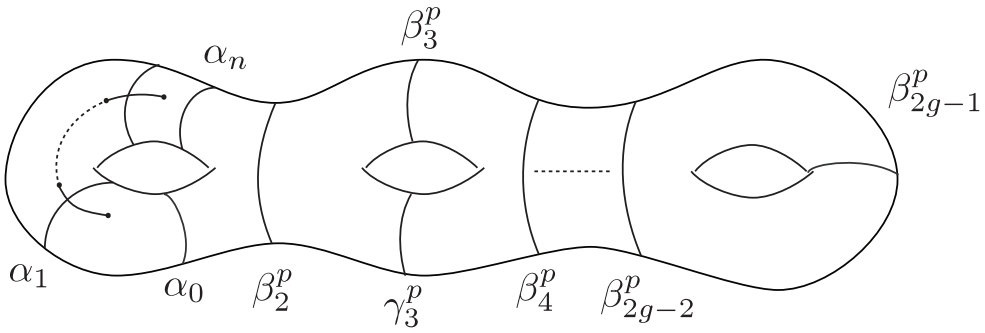


FIGURE 1.5: Découpe en pantalons.

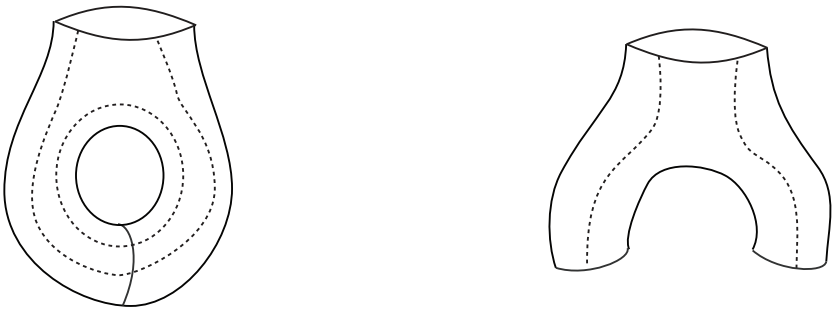


FIGURE 1.6: Quilts.

alors explicitement donnée par

$\psi_{Q/P}(F) : \alpha \to \alpha^\lambda$ si $a \in P$
$\psi_{Q/P}(F) : \beta \to \mathrm{Inn}[f(\beta,\alpha)](\beta^\lambda)$ si $b \to a$ est un A-mouvement.
$\psi_{Q/P}(F) : \gamma \to \mathrm{Inn}[\gamma^{-8\rho_2} f(\gamma^2,\alpha^2)\alpha^{8\rho_2}(\gamma\alpha\gamma)^2](\gamma^\lambda)$ si $c \to a$ est un S-mouvement.

où $\mathrm{Inn}(g)(x) = gxg^{-1}$. Remarquons que un A/S-mouvement transforme une découpe en pantalons en une autre ; c'est-à-dire qu'une courbe fermée simple de la découpe est changée en une autre courbe, qui n'intersecte pas les autres courbes de la découpe originelle (voir figures 1.7 et 1.8). Topologiquement, un A (resp. S) mouvement ne concerne qu'une sous-surface de type $(0,4)$ (resp. $(1,1)$)

L'action issue de la composition des mouvements est alors donnée par

$$\psi_{Q/P}(F):\ \alpha \to \mathrm{Inn}[\prod_{i=1}^{n} f(P_i \overset{A/S}{\to} P_{i+1})](\alpha^\lambda)$$

où $f(P_i \overset{A/S}{\to} P_{i+1})$ est l'une des expressions précédente et dépend du type de A/S-mouvement, $P_0 = P$ et P_n est la découpe en pantalons contenant a.

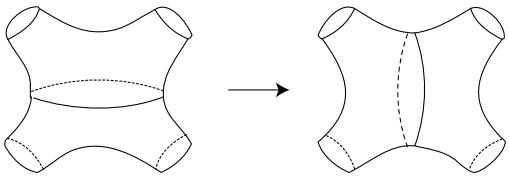


FIGURE 1.7: A-mouvement.

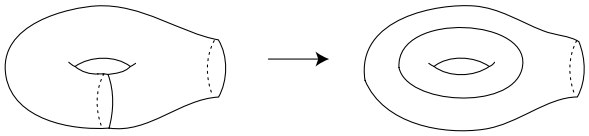


FIGURE 1.8: S-mouvement.

Nous pouvons maintenant établir le résultat annoncé.

Théorème 1.2.6. *Soit P une découpe en pantalons de la surface $S_{g,n}$, et Q une décomposition en quilt relative à P. Il existe une action explicite de $\widehat{GS}$ sur $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$*

$$\psi_{P/Q} : \widehat{GS} \to Aut_P(\widehat{\Gamma}_{g,[n]}).$$

Pour $F \in \widehat{GS}$, elle est définie par

$$\begin{aligned}
F(\alpha_i) &= \alpha_i^\lambda \quad 0 \leqslant i \leqslant n \\
F(\beta_{2k}) &= Inn[f(\beta_{2k}, \beta_{2k}^p)](\beta_{2k}^\lambda) \quad 1 \leqslant k \leqslant g-1 \\
F(\beta_{2k+1}) &= Inn[f(\tilde{\beta}_{2k+1}^p, \beta_{2k+1}^p)(\beta_{2k+1}^p)^{-8\rho_2} f(\beta_{2k+1}^2, (\gamma_{2k+1}^p)^2) \\
&\qquad (\gamma_{2k+1}^p)^{8\rho_2}(\beta_{2k+1}^p \gamma_{2k+1}^p \beta_{2k+1}^p)^2](\beta_{2k+1}^\lambda) \quad 1 \leqslant k \leqslant g-1 \\
F(\beta_1) &= Inn[\prod_{i=1}^{n-1} f(y_{i+1}, \alpha_i) f(\tilde{\alpha}_n^p, \alpha_n) \beta_1^{-8\rho_2} f(\beta_1^2, \alpha_0^2) \alpha_0^{8\rho_2} (\beta_1 \alpha_0^{8\rho_2} \beta_1)^2](\beta_1^\lambda) \\
F(\tau_i) &= f(\tau_i^2, \alpha_i)\tau_i^\lambda f(\alpha_i, \tau_i^2) \quad 1 \leqslant i \leqslant n
\end{aligned}$$

où $y_i := \tau_{i-1}\tau_{i-2}\cdots\tau_1\tau_1\cdots\tau_{i-2}\tau_{i-1}$ et les twists $\tilde{\alpha}_n$ et $\tilde{\beta}_{2k+1}^p$ sont définis selon les figures 1.9 et 1.10.
De plus, cette action respecte le groupe symétrique.

Démonstration. Il s'agit de vérifier que les relations de la proposition 1.1.5 entre les générateurs sont respectées pout tout élément $F \in \widehat{GS}$. C'est le cas des relations entre générateurs

de $\Gamma_{g,n}$ d'après le théorème 1.2.2, ainsi que des relations de tresses entre demi-twists τ_i d'après le théorème 1.2.1 et la remarque qui le suit.

Considérons la relation (C). Il n'est pas nécessaire de connaitre la décomposition exacte de τ_i^2 en terme de générateurs purs puisque τ_i^2 est un twist de Dehn le long d'un lacet obtenu par un mouvement A sur le lacet α_i – voir figure 1.7. Or, il est démontré dans [NS00] que l'action de $(\acute{I}ambda, f) \in \widehat{GS}$ correspondant à la découpe en pantalon figure 1.5 envoie τ_i^2 sur $f(\tau_i^2, \alpha_i)\tau_i^{2\lambda} f(\alpha_i, \tau_i^2)$. C'est donc compatible avec l'action définie.

Considérons maintenant le cas des relations de lanterne (L) entre γ, β, τ^2, α et $\tau\alpha\tau^{-1}$ où $\gamma = \alpha_i$ et $\beta = \alpha_{i+1}$ sont les composantes de bord, et $\tau = \tau_i$. Les supports des γ, β et α appartenant à la découpe en pantalons P, ils sont élevés à la puissance λ. Sur une lanterne, les courbes support de τ^2 et α diffèrent d'un A-mouvement, d'où l' expression

$$F(\tau^2) = f(\tau^2, \alpha)\tau^2 f(\alpha, \tau^2).$$

Pour appliquer $F \in \widehat{GS}$ à la relation de lanterne (1.1.2), posons $x = \tau^2$, $y = \alpha$ et $z = \tau\alpha\tau^{-1}$, et calculons $F(z)$ terme à terme. Ainsi

$$F(\tau) = f(\tau^2, \alpha)\tau^\lambda f(\alpha, \tau^2),$$

et puique $xyz = \gamma\beta$ commute avec x, y et z, on peut appliquer la relation (1.2.1) du lemme 1.2.3. Avec $f(\alpha, \tau^2) = \tau^{-1} f(\tau\alpha\tau^{-1}, \tau^2)\tau$, on obtient

$$F(\tau) = y^{-m} f(z, y) z^{-m} \tau y^{-m} \gamma^m \beta^m.$$

D'où l'expression

$$F(z) = y^{-m} f(z, y) z^\lambda f(y, z) y^m.$$

L'action sur la lanterne devient alors

$$f(x, y)x^\lambda f(y, x)y^{m+1} f(z, y)z^\lambda f(y, z)y^m = \gamma^\lambda \beta^\lambda,$$

ou encore, scindant $\lambda = 2m + 1$,

$$x^{m+1} f(y, x)y^{m+1} f(z, y)z^{m+1} \cdot z^m f(y, z)y^m f(x, y)x^m = \gamma^\lambda \beta^\lambda.$$

On reconnait ici les relations (1.2.1) et (1.2.2) du lemme 1.2.3, ce qui donne bien la relation cherchée, et ceci prouve que l'action de $\widehat{GS}$ liée à la découpe en pantalons P est bien définie.

Le respect du groupe symétrique par cette action découle alors directement de son expression sur les demi-twists et de cette même propriété vérifiée par $\widehat{GT}$ en genre zéro. □

Notons que cette action de $\widehat{GS}$ sur $\widehat{\Gamma}_{g,[n]}$ est compatible avec celle de $\mathbb{\Gamma}$ sur le pure mapping class group $\widehat{\Gamma}_{g,n}$. En effet, la découpe en pantalons induite sur la surface S_g^2 définit une action

$$\psi_{0,P} : \widehat{GS} \to Aut(\widehat{\Gamma}_g^2).$$

dont l'expression sur les générateurs $\beta_2, \cdots, \beta_{2g-1}$ de $\widehat{\Gamma}_{g,n}$ s'obtient en transformant localement la découpe en pantalons P par des A/S-mouvements en une découpe en pantalons dont les courbes contiennent les supports des générateurs :

- pour $1 \leqslant k \leqslant g-1$, les courbes b^p_{2k} de P s'envoient sur une découpe en pantalons contenant les supports des générateurs β_{2k} par un A-mouvement,
- pour $1 \leqslant k \leqslant g-1$, les courbes b^p_{2k+1} de P s'envoient sur une découpe en pantalons contenant les supports des générateurs β_{2k+1} par un A-mouvement puis un S-mouvement – voir figure 1.9.

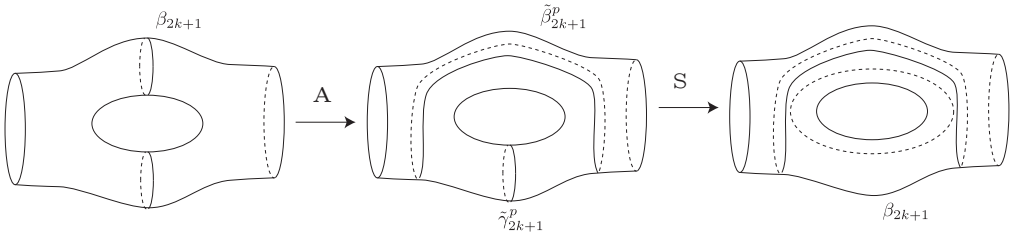


FIGURE 1.9: A/S-mouvements pour β_{2k+1}

- les courbes a_i de P s'envoient sur une découpe en pantalons contenant le support de β_1 par une succession de $n+1$ A-mouvement et un S-mouvement – voir figure 1.10.

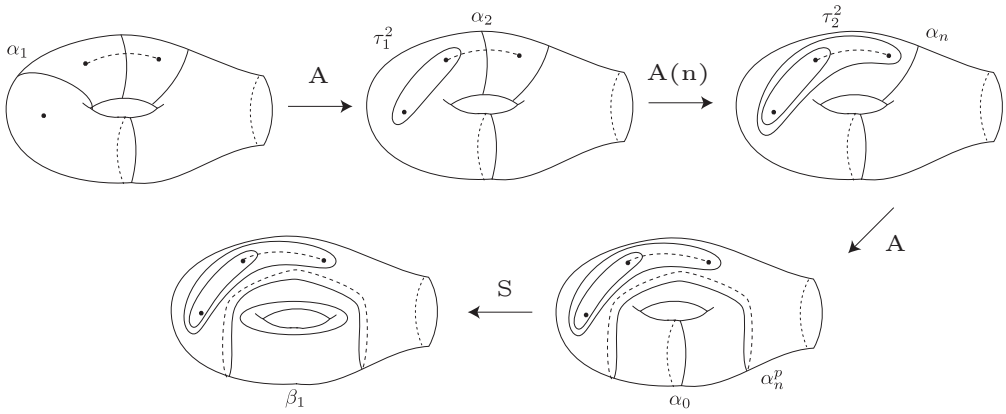


FIGURE 1.10: A/S-mouvements pour β_1

On calcule ainsi

$$F(\beta_1) = \mathrm{Inn}(f(Q/P_0 \overset{S,A}{\dashrightarrow} P_n))[\beta_1^\lambda]$$

où $P_0 = P$ et P_n désigne la découpe en pantalons de la figure 1.10. Plus précisément

$$\begin{aligned} f(Q/P_0 \overset{S,A}{\dashrightarrow} P_n) &= \prod_{i=0}^{n-2} f(Q/P_i \overset{A}{\dashrightarrow} P_{i+1}).f(Q/P_{n-1} \overset{S}{\dashrightarrow} P_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} f(y_{i+1},\alpha_i).f(\tilde{\alpha}_n^p,\alpha_n)\beta_1^{-8\rho_2} f(\beta_1^2,\alpha_0^2)\alpha_0^{8\rho_2}(\beta_1\alpha_0^{8\rho_2}\beta_1)^2. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi les expressions du théorème 1.2.6.

De la même façon, la découpe en pantalons induite sur la surface $S^2_{0,n}$ définit une action

$$\psi_{1,P} : \widehat{GS} \to Aut(\widehat{\Gamma}^2_{0,[n]})$$

dont l'expression sur les τ_i correspond à celle énoncée dans le théorème 1.2.6. On notera toutefois que celle-ci correspond à l'action standard de $\widehat{GT}$ qu'à conjugaison près.

⋆

⋆ ⋆

2

Torsion de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,[n]})$, bonté des mapping class groups

2.1. Une propriété cohomologique de bonté 34
2.1.1. Quelques formulations équivalentes 35
2.1.2. Bonté et extension de groupes 37
2.1.3. Les mapping class groups $\Gamma_{0,n}$, $\Gamma_{0,[n]}$, $\Gamma_{1,n}$ et $\Gamma_{1,[n]}$ sont bons 40
2.2. Torsion géométrique, torsion profinie et théorie de Serre 41
2.2.1. La propriété (H) 41
2.2.2. La propriété $(\star)$ 45
2.2.3. Le cas des extensions par un groupe cyclique d'ordre premier 47

Il est difficile de caractériser entièrement les éléments de torsion du groupe fondamental algébrique $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,[n]})$; on ne sait même pas que ces éléments proviennent du groupe discret. En effet puisque le groupe fondamental algébrique $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,[n]})$ est le complété profini $\widehat{\pi}_1^{orb}(\mathcal{M}_{g,[n]})$ du groupe fondamental orbifold, une partie au moins de sa torsion provient du groupe fondamental *discret* $\pi_1^{orb}(\mathcal{M}_{g,[n]})$. Pour $g \geqslant 0$ et $n \geqslant 0$ quelconques, c'est une question ouverte de savoir si la totalité de la torsion provient de cette torsion dite géométrique (voir [LS06], question 3.6).

Le résultat principal de ce chapitre est de donner une réponse affirmative à cette question pour les genres zéro et un *concernant les éléments d'ordre premier* : tous les éléments de torsion d'ordre premier de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$ et $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,[n]})$ viennent du groupe discret. Dans le chapitre suivant, nous déterminerons entièrement ces éléments, résolvant ainsi le problème dans ces deux cas.

La restriction aux ordres premiers trouve sa source dans une difficulté plus générale de la cohomologie des groupes : en toute généralité, la connaissance de la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un groupe – définie comme somme alternée des dimensions chomologiques, ne permet de retrouver que le plus petit commun multiple des ordres des éléments de torsion du groupe (voir théorème 9.3 [Bro94, chap. IX])).

L'essentiel de ce chapitre est abordé du point de vue de la théorie des groupes. Nous reprenons une idée de J. P. Serre (voir [Ser97]) qui permet de réduire certaines propriétés du complété profini d'un groupe $\widehat{G}$ au groupe lui-même. Plus précisément, considérant un groupe G discret ainsi qu'une famille finie $\{G_i\}_I$ de sous-groupe finis de G, il s'agit d'établir

que la propriété $(\star)$ suivante est vérifiée pour le complété profini $\widehat{G}$ de G relativement à cette même famille $\{G_i\}_I$.

Tout sous-groupe fini de G est conjugué à un sous-groupe de l'un des G_i ;
Et pour $i \neq j$ ou $g \notin G_i$ alors $G_j \cap gG_ig^{-1} = \{1\}$. $(\star)$

En vue d'une application aux mapping class groups $\Gamma_{g.[n]}$ dans les chapitres suivants, qui comme nous l'indiquons ne vérifient pas directement la propriété $(\star)$, nous adaptons cette idée au cas de sous-groupes particuliers. Cette idée, déjà exploitée dans [LS94b] a conduit à une définition du groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GT}$ en terme de cocyles. Les relations entre un groupe et son complété profini ont par ailleurs été développées pour des complétions plus générales dans [Nak94] en vue de propriétés de rigidité du groupe fondamental $\pi_1^{alg}(X)$, où X est une surface hyperbolique.

Nous commençons par rappeler la notion cohomologique de bonté d'un groupe, ainsi que quelques formulations équivalentes (lemme 2.1.1). Nous rappelons ensuite sous quelles conditions cette propriété de bonté est préservée par extension et nous l'appliquons à notre contexte de mapping class group à points marqués en genres zéro et un. Nous exprimons la question de la torsion sous la forme d'une propriété $(\star)$ que nous relions à une propriété (H) cohomologique. On formule ainsi un critère pour que la torsion d'un groupe profini provienne exactement de la torsion discrète (propriété 2.2.2) que nous adaptons aux cas d'extensions cycliques d'ordre premier spécifiques (corollaire 2.2.10).

2.1 Une propriété cohomologique de bonté

Considérons un groupe G discret et formons son complété profini

$$\widehat{G} = \varprojlim G/N$$

où N parcourt le système projectif de l'ensemble des sous-groupes normaux d'indice fini de G. On dispose alors d'une application $i : G \to \widehat{G}$ d'image dense.

Pour un groupe G discret, rappelons que les groupes de cohomologies $H^n(G, M)$ sont définis comme les n-èmes foncteurs dérivés droit de l'application invariante $M \to M^G$ pour un G-module de coefficient M. On construit de façon analogue une théorie cohomologique pour un groupe profini K quelconque à partir de la catégorie abélienne des K-modules *discrets*. Cette dernière est composée des K-modules se décomposant en

$$M = \bigcup_{N \text{ ouvert de } K} M^N$$

où M^N dénote le sous-groupe invariant sous l'action de N. On définit alors les groupes de cohomologie de K profini à partir des groupes de cohomologie de groupes discrets [1] par

$$H^n(K, M) = \varprojlim H^n(G/N, M^N).$$

1. On peut aussi prendre comme définition les groupes de cohomologies associés à un complexe d'applications *continues* en terme de cobords, ou bien en tant que foncteur dérivé droit de l'application invariante.

Nous rappelons ici la notion de *bonté* liée au morphisme $i : G \to \widehat{G}$ ainsi que quelques reformulations équivalentes. Cette notion est introduite par J. P. Serre dans une lettre adressée à A. Grothendieck en 1962 [GSC01] ainsi que dans [Ser94]. Nous donnons un résultat général de préservation de la bonté par extension et nous l'appliquons aux cas des mapping class groups de genres zéro et un.

2.1.1 Quelques formulations équivalentes

Définition. *Soit G un groupe d'image dense dans son complété profini $\widehat{G}$. Le groupe G est dit* bon *s'il vérifie*

$$H^n(G, M) \simeq H^n(\widehat{G}, M)$$

pour tout $n \geqslant 0$ et tout G-module M fini.

La notion de groupe de type FP permet de considérer plus généralement des modules de coefficients de torsion au lieu de modules finis.

Définition. *Un groupe discret G est dit de type FP_n lorsqu'il existe une résolution*

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où les P_i sont des $\mathbb{Z}G$-modules projectifs de type fini.
Lorsqu'il n'existe pas de résolution pour tout n fini, on dit que G est FP_∞.

Puisque la limite inductive sur le module des coefficients commute avec le foncteur de cohomologie pour les groupe de type FP_∞, on considère dans la suite la notion de bonté pour un groupe discret FP_∞ relativement à la catégorie plus général des modules de torsion.

Le résultat suivant d'équivalences de la bonté, dans le cadre de la complétion profinie a été établie par J. P. Serre (voir [Ser94, ex. 1.2]). Ce résultat a été généralisé aux *complétions relativement à $\mathcal{C}$*, où $\mathcal{C}$ est une classe de sous-groupes finis fixée, par H. Nakamura dans [Nak94]. Mais dans la suite, nous nous restreignons au cas de Serre.

Lemme 2.1.1. *Soient G un groupe discret de type FP_∞ et $i : G \to \widehat{G}$ son complété profini, d'image dense. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :*

- (A_n) *Pour tout $\widehat{G}$-module de torsion discret M, l'application $H^p(\widehat{G}, M) \to H^p(G, M)$ est bijective pour $p \leqslant n$ et injective pour $p = n + 1$.*
- (B_n) *Pour tout $\widehat{G}$-module de torsion discret M, l'application $H^p(\widehat{G}, M) \to H^p(G, M)$ est surjective pour $p \leqslant n$.*
- (C_n) *Pour tout $x \in H^p(G, M)$, $1 \leqslant 0 \leqslant n$, il existe un sous-groupe $G_0 \subset G$ image réciproque d'un sous-groupe ouvert de $\widehat{G}$ tel que x induise zéro dans $H^p(G_0, M)$.*

Démonstration. Puisque $(A_n) \implies (B_n)$ est immédiate, montrons que $(B_n) \implies (A_n)$. Suivant la remarque déjà faite, on peut supposer que les modules de coefficients sont finis. Considérons un tel module M ainsi que le module coinduit $M' = \mathrm{Coind}_{\{1\}}^{G}(\widehat{G}, M)$. La démonstration s'effectue par récurrence sur p suivant un argument de décalage de dimension.

En effet, de la suite exacte courte de $\widehat{G}$-modules de torsion,

$$1 \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow M'/M \longrightarrow 1$$

et de l'homomorphisme canonique $G \to \widehat{G}$, on déduit les suites exactes longues de cohomologie ainsi que les morphismes de restriction verticaux

$$\begin{array}{ccccccc} H^{p-1}(\widehat{G}, M') & \longrightarrow & H^{p-1}(\widehat{G}, M'/M) & \longrightarrow & H^{p}(\widehat{G}, M) & \longrightarrow & H^{p}(\widehat{G}, M') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^{p-1}(G, M') & \longrightarrow & H^{p-1}(G, M'/M) & \longrightarrow & H^{p}(G, M) & \longrightarrow & H^{p}(G, M') \end{array}$$

Par hypothèse de récurrence, les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes. On applique le lemme de Shapiro

$$H^p(H, Coind_{\{1\}}^{H}(M)) = H^p(\{1\}, M) = 1$$

pour H égal G et $\widehat{G}$ dans la dernière flèche verticale. On en déduit ainsi

$$H^p(\widehat{G}, M) \hookrightarrow H^p(G, M)$$

et enfin d'après l'hypothèse (B_p)

$$H^p(G, M) \simeq H^p(\widehat{G}, M).$$

L'injectivité s'établit par un raisonnment similaire à l'indice p au lieu de $p-1$.

Puisque $G \hookrightarrow \widehat{G}$ est d'image dense, alors $H^0(G, M) = H^0(\widehat{G}, M)$ amorce la récurrence selon le même argument.

L'implication $(C_n) \implies (B_n)$ se prouve de manière identique à l'implication précèdente en considérant, pour $x \in H(G, M)$ et M module fixés, le module coinduit $M' = Coind_{G}^{G_0}(M)$ où $G_0 \subset G$ est un sous-groupe tel que dans la propriété (C_n).

Montrons donc que $(B_n) \implies (C_n)$. Par hypothèse, un cocyle $x \in H^p(G, M)$ se relève en un cocycle $\tilde{x} \in H^p(\widehat{G}, M)$ représenté par une p-cochaîne continue $\tilde{x} : \widehat{G}^p \to M$ et il existe un sous-groupe ouvert $\widehat{U} \subset \widehat{G}$ pour lequel $\tilde{x}_{|U} = 0$. Considérant $U \subset G$ image réciproque de $\widehat{U} \subset \widehat{G}$, le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H^p(\widehat{G}, M) & \longrightarrow & H^p(G, M) \\ {\scriptstyle res}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle res} \\ H^p(\widehat{U}, M) & \longrightarrow & H^p(U, M) \end{array}$$

entraine que x égale zéro dans $H^p(U, M)$ puisque la bonté est préservée pour les sous-groupe ouverts.

□

Du résultat suivant on déduit quantité d'exemples de groupes bons à partir du lemme

Lemme 2.1.2. *Tout groupe discret vérifie la propriété* (A_1).

Citons ainsi certains groupes fondamentaux ainsi que les groupes libres.

Proposition 2.1.3. *Soit $S_{g,n}$ une surface de Riemann de genre $g \geqslant 0$ à $n \geqslant 1$ points marqués. Alors le groupe fondamental $\pi_1(S_{g,n})$ est un groupe bon.*

Démonstration. Pour $n \geqslant 1$ le groupe fondamental $\pi_1(S_{g,n})$ d'une telle surface de Riemann est libre, donc de dimension cohomologique égale à un. Il suffit donc de vérifier la propriété (A_1). On conclut en appliquant le lemme 2.1.2. □

Pour $n = 0$, la dimension cohomologique de $\pi_1(S_{g,n})$ est égale à deux. Suivant [Bog06], on démontre alors la bonté de ces groupes en se ramenant par dualité de Pontryagin $H^p(G, M)^* = H_p(G, M^*)$ aux groupes d'homologie $H_2(\Gamma_g, M) \simeq H_2(S_g, M)$.

2.1.2 Bonté et extension de groupes

Nous rappelons dans notre de cadre de complétion profinie que le caractère de bonté d'un groupe se préserve par extension.

Commençons par le résultat essentiel suivant.

Lemme 2.1.4. *Soit l'extension de groupes discrets*

$$1 \to H \to G \to K \to 1$$

tel que H soit de type fini et K un groupe bon. Alors la suite suivante est exacte

$$1 \to \widehat{H} \to \widehat{G} \to \widehat{K} \to 1$$

Démonstration. Puisque le foncteur limite projective est exacte à droite, il suffit d'établir l'exactitude à gauche, c'est à dire que les systèmes cofinaux des sous-groupes distingués d'indice finis de G et de H coincident. Fixons un tel sous-groupe $U_H \subset H$ et trouvons un sous-groupe $U_G \subset G$ tel que $U_G \cap H \subset U_H$.

On suppose dans un premier temps que H est fini. Considérons $I_H \subset G$ le centralisateur de H dans G, sous-groupe d'indice fini dans G puisque

$$I_H = \cap_{h \in H} I_h$$
$$I_H = \cap_{h \in H} \{g \in G | ghg^{-1} = h\}$$

est intersection finie de sous-groupes d'indices finis. On obtient ainsi un groupe $I/(I \cap H)$ d'indice fini dans K.

Construisons un sous-groupe $G_0 \subset G$ d'indice fini tel que $G_0 \cap H = \{1\}$. Considérons la suite exacte

$$1 \longrightarrow I \cap H \longrightarrow I \longrightarrow I/(I \cap H) \longrightarrow 1$$

dont les sections correspondent aux cocycles de $H^2(I/(I \cap H), I \cap H)$. Puisque la propriété (B_n) est préservée pour les sous-groupes ouverts, alors le groupe $I/(I \cap H)$ est bon. D'après la propriété (C_n), il existe donc un module M' contenant $I \cap H$ tel que

$$H^2(I/(I \cap H), M') = 0$$

c'est-à-dire tel que la suite exacte suivante soit scindée

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow X \longrightarrow I/I \cap H \longrightarrow 0.$$

On en déduit un sous-groupe $X_0 \subset X$ vérifiant

$$X_0 \cap H = \{1\}$$
$$X_0 = I/(I \cap H).$$

Considérant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I \cap H & \longrightarrow & I & \longrightarrow & I/(I \cap H) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow f & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & I/I \cap H & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

il en découle, par image réciproque par f, un sous-groupe $G_0 \subset G$ d'indice fini dans G tel que souhaité.

Supposons maintenant que H est de type fini. On se ramène au cas précédent *via* la suite exacte

$$1 \longrightarrow H/U_H \longrightarrow G/U_H \longrightarrow K \longrightarrow 1$$

où U_H est le sous-groupe distingué d'indice fini de H fixé précédemment.

Il existe alors $\tilde{G}_U \subset G/U_H$ d'indice fini tel que

$$(G_U \cap H) \subset U_H$$

où G_U, préimage de $\tilde{G}_U$ dans G, est bien d'indice fini dans G. Ceci conclut la preuve. □

Proposition 2.1.5. *Soit H, G et K des groupes discrets s'insérant dans une suite exacte*

$$1 \to H \to G \to K \to 1.$$

Si H est FP_∞ de type fini et bon et K est bon, alors G est bon.

Démonstration. D'après le lemme précédent, considérant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \widehat{H} & \longrightarrow & \widehat{G} & \longrightarrow & \widehat{K} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

ainsi que des deux suites spectrales de *Hochschild-Serre* associées à chacune des lignes

$$\widehat{E}_2^{pq} = H^p(\widehat{G/H}, H^q(\widehat{H}, M)) \Rightarrow H^{p+q}(\widehat{G}, M)$$
$$E_2^{pq} = H^p(G/H, H^q(H, M)) \Rightarrow H^{p+q}(G, M)$$

Puisque les groupes H et K sont bons alors

$$H^q(\widehat{H}, M) \simeq H^q(H, M)$$
$$H^p(\widehat{G/H}, M) \simeq H^p(G/H, M)$$

pour tout M module de torsion discret.

On a un isomorphisme en E_2, ainsi que l'isomorphisme

$$H^{p+q}(\widehat{G}, M) \simeq H^{p+q}(G, M)$$

pour tout module M de torsion, d'où la bonté de G. □

Rappelons deux exemples de groupes bons.

Proposition 2.1.6. *Les groupes de tresses colorées K_n et les groupes de tresses non-colorées B_n sont bons.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la suite exacte d'effacement de points

$$1 \to F_{n-1} \to K_{n+1} \to K_n \to 1$$

en raisonnant par récurrence sur $n \geqslant 0$ amorcée par $K_2 = F_1$.

La bonté du groupe des tresses B_n s'en déduit alors à partir de la suite exacte

$$1 \to F_n \to B_n \to \mathfrak{S}_n \to 1$$

par récurrence sur n, amorcée par $B_2 = F_1$. □

2.1.3 Les mapping class groups $\Gamma_{0,n}$, $\Gamma_{0,[n]}$, $\Gamma_{1,n}$ et $\Gamma_{1,[n]}$ sont bons

Associant cette propriété de bonté par extension à des présentations particulières des mapping class groups Γ_0 et Γ_1 en terme de groupe de tresses et de groupe modulaire, on obtient le résultat suivant, déjà cité dans [Oda97].

Proposition 2.1.7. *Soit $2g-2+n>0$. Les mapping class groups $\Gamma_{g,n}$ et $\Gamma_{g,[n]}$ sont bons pour $g=0$ et $g=1$ avec $n\geqslant 0$.*

Rappelons que l'expression $2-2g-n$ n'est autre que $\chi(\mathcal{M}_{g,n})$, caractéristique d'Euler de l'espace de modules.

Démonstration. Ces résultat s'obtiennent en construisant les mapping class groups à partir d'extensions de groupes bons et en raisonnant par récurrence sur n.

Commençons par le genre zéro, et considérons le cas du pur mapping class group $\Gamma_{0,n}$. La récurrence s'initialise avec $\Gamma_{0,3}=\{1\}$ et $\Gamma_{0,4}$ qui est libre à deux générateurs. On considère ensuite la suite exacte de Birman définie par effacement de points

$$1\to\pi_1(S_{0,n-1})\to\Gamma_{0,n}\to\Gamma_{0,n-1}\to 1$$

où comme remarqué précédemment $\pi_1(S_{0,n-1})=F_{n-2}$ est libre donc bon. On conclut alors par la proposition 2.1.5. Le cas du full mapping class group $\Gamma_{0,[n]}$ se traite de la même façon en considérant l'extension usuelle

$$1\to\Gamma_{0,n}\to\Gamma_{0,[n]}\to\mathfrak{S}_n\to 1$$

où le groupe $\mathfrak{S}_n$ est bon en tant que groupe fini.

Considérons maintenant le cas de $\Gamma_{1,[n]}$. Rappelons que $\Gamma_{1,1}=SL_2(\mathbb{Z})$ et montrons qu'il est bon. Pour $m\geqslant 3$ tout sous-groupe de congruence $\Gamma_2(m)\subset SL_2(\mathbb{Z})$ est libre. En particulier, pour $m=3$, on a la suite exacte suivante

$$1\to\Gamma_2(3)\to SL_2(\mathbb{Z})\to SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\to 1.$$

Puisque $\Gamma_2(3)$ est libre il est de dimension cohomologique égale à un et donc libre d'après le lemme 2.1.2. Le groupe $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est bon en tant que groupe fini. On considère comme précédemment la suite exacte d'effacement de points

$$1\to\pi_1(S_{1,n-1})\to\Gamma_{1,n}\to\Gamma_{1,n-1}\to 1.$$

ainsi que la suite exacte

$$1\to\Gamma_{1,n}\to\Gamma_{1,[n]}\to\mathfrak{S}_n\to 1.$$

dont on déduit par récurrence la bonté des mapping class groups $\Gamma_{1,[n]}$ pour $n\geqslant 1$. □

La question de la bonté pour $\Gamma_{g,n}$ en toute généralité reste ouverte, et l'on remarquera que dès lors que $\Gamma_{g,1}$ est bon, la bonté de $\Gamma_{g,[n]}$ découle des arguments précédents pour $n \geqslant 0$ quelconque.

La bonté des mapping class groups *pure* et *full* est connue pour $g = 2$, puisque suivant [Bir74] le mapping class group Γ_2 modulo son élément central d'ordre 2 est isomorphe à $\Gamma_{0,6}$. Dans le cas $g \geqslant 3$, M. Boggi a prouvé dans [Bog06] que les mapping class group vérifient la propriété (A_4).

2.2 Torsion géométrique, torsion profinie et théorie de Serre

Dans cette section, nous donnons les outils qui nous permettront de réduire l'étude de la torsion du groupe fondamental champêtre $\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{g,[n]})$ à celle du groupe fondamental orbifold, dans le cas des genres zéro et un.

Pour ce faire, on établit en toute généralité l'équivalence de la propriété $(\star)$ avec une propriété *cohomologique* – dite propriété (H), tout d'abord dans le cadre des groupes discrets, puis dans le cadre des groupes profinis. On conclut en appliquant ces résultats à certains sous-groupes des mapping class groups.

2.2.1 La propriété (H)

Considérons la propriété $(\star)$ citée dans l'introduction.

Soit G un groupe discret ou profini et $\{G_i\}_I$ une famille finie de sous-groupes finis de G.

1. *Tout sous-groupe fini de G est conjugué à un sous-groupe de l'un des G_i ;*
2. *Pour $i \neq j$ ou $g \notin G_i$ alors $G_j \cap gG_ig^{-1} = \{1\}$.* $(\star)$

Afin d'illustrer la propriété $(\star)$, remarquons que c'est une propriété en relation avec les groupes fondamentaux de surfaces hyperboliques. Dans ce cas, la propriété 1. est de nature *arboricole* selon le théorème suivant (voir [Ser03] - théorème 8).

Théorème 2.2.1. *Considérons le groupe amalgamé $G = G_1 \star_A G_2$. Alors tout sous-groupe fini de G est conjugué à un sous-groupe fini de G_1 ou G_2.*

Cette situation intervient notamment pour $PSL_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ainsi que pour le groupe fondamental orbifold $\pi_1^{orb}(\mathcal{M}_{1,1}) = SL_2(\mathbb{Z})$: appliquant un théorème de Van Kampen orbifold, on calcule géométriquement

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{M}_{1,1}) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \star_2 \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

Remarque. En dimension supérieure, les mapping class groups ne s'expriment plus comme produits amalgamés de groupes de dimensions inférieures comme nous le verrons par la

suite. Citons pour mémoire uniquement, puisque nous ne l'utiliserons pas, qu'il existe un théorème de Van Kampen général pour les champs algébriques – ici le mapping class group profini, et que celui-ci fait intervenir la commutativité de diagrammes entre groupoïdes *à 2-isomorphisme près* (voir [Zoo02]). Mais ce résultat ne semble pas suffire à généraliser aux cas $g \geqslant 1$ la méthode que nous utilisons.

Nous allons montrer que cette propriété $(\star)$ est reliée à la propriété cohomologique (H) suivante.

Soit G un groupe discret de dimension cohomologique virtuelle $vcd(G)$ finie. Considérons une famille finie $\{G_i\}_I$ de sous-groupes finis de G. Pour tout G-module discret M, l'application restriction

$$H^n(G, M) \to \prod H^n(G_i, M) \tag{H}$$

est un isomorphisme pour n suffisament grand.

Plus précisément, nous nous proposons d'établir le résultat suivant.

Proposition 2.2.2. *Soit $G \hookrightarrow \widehat{G}$ un groupe discret d'image dense et bon, ainsi qu'une famille finie $\{G_i\}_I$ de sous-groupes finis de G. Si G est de dimension virtuelle cohomologique finie et vérifie la propriété $(\star)$ relativement aux G_i, alors son complété profini $\widehat{G}$ vérifie la propriété $(\star)$ relativement aux mêmes G_i.*

Cette propriété est en fait une équivalence. Elle repose sur les équivalences entre les propriétés $(\star)$ et (H) dans le cas discret (voir [Hue79] et le théorème de K. S. Brown cité ci-après) ainsi que dans le cas profini (voir [LS97] - appendice de C. Scheiderer). Nous nous arrêtons ici à prouver l'implication qui nous est utile.

Considérons le cas où G est un groupe discret.

Proposition 2.2.3. *Soit G un groupe discret de dimension cohomologique virtuelle finie vérifiant la propriété $(\star)$ relativement à des sous-groupes finis G_i. Alors G vérifie la propriété (H) relativement à ces mêmes sous-groupes.*

La preuve se déroule dans le cadre de la *cohomologie G-équivariante de Farrell* $\widehat{H}^\star_G(\mathcal{A}G)$ pour G agissant sur le simplexe $\mathcal{A}G$ de ses sous-groupes finis de G et dont nous rappelons la construction. Considérons un groupe G discret de type FP_∞ et on construisons l'espace simplicial ordonné $\mathcal{A}G = \{\mathcal{A}_nG\}$, composé des sous-groupes abéliens de G. Pour $i \in I$ fini, on considère d'autre part le sous-espace simplicial $\mathcal{A}^iG$ de $\mathcal{A}G$ dont l'espace des n-simplexes est défini par

$$\mathcal{A}^i_nG = \{(A_0, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}_nG,\ A_n \text{ est conjugué à un sous-groupe de } G_i\}.$$

La cohomologie équivariante $\widehat{H}^\star_G(\mathcal{A}G, M)$ est la cohomologie associée à ces espaces simpliciaux, où les simplices sont ordonnés par l'inclusion, et où l'action par conjugaison de G munit cet espace d'une structure de G-module respectant l'ordre.

Plus précisément, on dispose ainsi d'un complexe de chaîne G-simplicial

$$\cdots \to \mathcal{A}_n G \to \mathcal{A}_{n-1} G \to \ldots,$$

et pour un G-module M de coefficient donné, on construit un complexe de chaîne de G-module $C_*(\mathcal{A}G, M) = \mathcal{A}G_* \otimes M$, transformé en complexe de cochaîne par dualité $C^*(\mathcal{A}G, M) = Hom(C_*(\mathcal{A}G, M), \mathbb{Z})$.

À partir d'une résolution projective de $\mathbb{Z}G$-modules de type fini $F_* \to \mathbb{Z} \to 0$ associée à G, on construit un double complexe de cohomologie $C^{pq} = Hom(F_p, C^q(\mathcal{A}G, M))$ qui définit une suite spectrale convergente – l'espace simplicial étant de dimension finie. La limite de cette suite spectrale est par définition la cohomologie G-équivariante annoncée

$$E_1^{pq} = H^p(G, C^q(\mathcal{A}G, M)) \Rightarrow \widehat{H}_G^{p+q}(\mathcal{A}G, M).$$

Par ailleurs nous aurons besoin d'une forme plus exploitable des termes en E_1 qui interviennent dans la définiton de la cohomologie équivariante.

Lemme 2.2.4. *Soit G un groupe discret agissant sur l'espace simplicial $\mathcal{A}G$ défini comme précédemment. On a alors l'identifcation des groupes de cohomologie suivant*

$$H^p(G, C^q(\mathcal{A}G, M)) \simeq \prod_{A \in \Sigma_q} H^p(G_A, M)$$

où Σ_q est un système de représentants de $\mathcal{A}_q G$ sous l'action de G, et G_A sous-groupe des stabilisateurs de A.

Une preuve de ce lemme suit la démonstration de la proposition précédente.

Démonstration de la proposition 2.2.3. La démonstration repose sur l'utilisation d'un théorème de K. S. Brown qui relie la cohomologie du groupe à la cohomologie équivariante. Puisque G est supposé de dimension cohomologique virtuelle $vcd(G)$ finie, alors d'après le théorème de Brown (théorème 7.1 de [Bro94, chap. X]), on a pour n suffisament grand

$$H^n(G, M) \simeq \widehat{H}^n_G(\mathcal{A}G, M).$$

Remarquons que, puisque $\mathcal{A}G$ est réunion disjointe des sous-espaces simpliciaux $\mathcal{A}^i G$, on a,

$$H^\star_G(\mathcal{A}G, M) = \bigoplus_{i \in I} \widehat{H}^\star_G(\mathcal{A}^i G, M).$$

Il suffit donc de montrer que le morphisme de restriction

$$H^n_G(\mathcal{A}^i G, M) \to \widehat{H}^n_{G_i}(\mathcal{A}G_i, M),$$

est un isomorphisme.

Pour cela, appliquons le lemme 2.2.4 à chacune des définitions des groupes de cohomologie $\widehat{H}^*(\mathcal{A}^iG, M)$ et $\widehat{H}^*_{G_i}(\mathcal{A}G_i, M)$. On obtient ainsi

$$E_1^{rs} = \prod_{A\in\Sigma_r^i} H^s(N_G(A), M) \Rightarrow \widehat{H}_G^{r+s}(\mathcal{A}^iG, M)$$

où Σ_r^i est un système de représentants de $\mathcal{A}_r^i$ sous l'action de G, et $N_G(A)$ sous-groupe des stabilisateurs. Plus explicitement

$$G_A = \bigcap_k N_G(A_k) = N_G(A)$$

pour $A = (A_0, \ldots, A_n)$. D'autre part

$$E_1^{rs} = \prod_{B\in\Sigma_r} H^s(N_{G_i}(B), M) \Rightarrow \widehat{H}_{G_i}^{r+s}(\mathcal{A}G_i, M)$$

où Σ_r est un système de représentants de $\mathcal{A}_r$ sous l'action de G_i.

Selon les hypothèses, les deux ensembles d'indexation sont en bijection et les normalisateurs correspondants sont identiques. On obtient donc un isomorphisme entre les suites spectrales en E_1, dont il découle l'isomorphisme entre les groupes de cohomologie équivariante recherché. □

Donnons maintenant la preuve laissée en attente.

Démonstration du lemme 2.2.4. Pour une dimension q fixée et pour un q-simplexe A donné, le groupe G_A agit sur le complexe $C^q(\mathcal{A}G, M)$. Décomposant en produit selon les orbites, on obtient

$$C^q(\mathcal{A}G, M) = \prod_{A\in\Sigma_q} \prod_{g\in G_A} M_A$$

où M_A est un $\mathbb{Z}G$-module dépendant de A.

Or, puisque le groupe G agit sur l'ensemble des morphismes de projection $\{\pi_j : \prod_{g\in G_A} M_j \to M_j\}_j$, le second produit du membre de droite de l'expression précédente est isomorphe au module coinduit $CoInd_{G_A}^G(M_A)$ où M_A est l'un des module M_j. Dans notre cas, les simplexes étant ordonnés on a l'isomorphisme $M_A \simeq M$ en tant que G-module.

Ainsi

$$\begin{aligned} H^p(G, C^q(\mathcal{A}G, M)) &= H^p(G, \prod_{A\in\Sigma_q} CoInd_{G_A}^G(M)) \\ &= \prod_{A\in\Sigma_q} H^p(G, CoInd_{G_A}^G(M)) \end{aligned}$$

et d'après le lemme de Shapiro

$$H^p(G, C^q(\mathcal{A}G, M)) =\simeq \prod_{A\in\Sigma_q} H^p(G_A, M))$$

qui est bien l'égalité recherchée. □

2.2.2 La propriété $(\star)$

Abordons maintenant la relation entre les propriétés $(\star)$ et (H) dans le cadre profini. Le résultat suivant, dont la démonstration est tirée de [LS97] - Appendice de C. Scheiderer, repose sur deux lemmes que nous admettrons.

Proposition 2.2.5. *Soit G un groupe profini et une famille finie des sous-groupes finis G_i. Supposons que G vérifie la propriété (H) relativement aux G_i. Alors G vérifie la propriété $(\star)$ relativement à ces mêmes sous-groupes.*

Le résultat suivant découle d'un résultat de J. P. Serre dont on trouvera une démonstration en fin d'article [Hue79]

Lemme 2.2.6. *Soit G un groupe fini qui vérifie la propriété (H) relativement à des sous-groupes finis $\{G_i\}_I$. Alors pour un certain i on a $G_i = G$ et $G_j = \{1\}$ pour les autres.*

Suivant C. Scheiderer dans [Sch96], pour un groupe profini G agissant sur un espace profini S, ainsi que $M \to S$ groupe abélien sur S et homéomorphisme local, nous définissons la cohomologie équivariante $H^{\cdot}_G(S, M)$ comme le foncteur dérivé droit du faisceau des sections globales G-invariantes. On retrouve alors

$$H^n_G(S, M) = H^n(G, H^0(S, M))$$

où le membre de gauche est le groupe de cohomologie usuel et $H^0(S, M)$ un G-module discret.

On considère aussi pour $\pi : S \to S/G$ le faisceau $\mathcal{H}^n(M)$ sur S/G associé au préfaisceau, qui à un ouvert $V \in S/G$ associe $H^n_G(\pi^{-1}(U), M)$. D'après [Sch94] – remarque 8.9, le résultat suivant provient de ce que

$$H^n_G(S, M) \simeq H^0(S/G, \mathcal{H}^n(M))$$

et de ce que pour $x \in S$, la fibre en $\pi(x)$ du faisceau $\mathcal{H}(M)$ est isomorphe à $H^n(G_x, M)$.

Lemme 2.2.7. *Soit G un groupe profini ainsi que H et K deux sous-groupes fermés de G. Pour N un H-module discret fixé, on associe le G-module coinduit $M = CoInd^H_G(N)$.*

Le morphisme canonique suivant est alors un plongement dense

$$H^n(K, M) \longrightarrow \prod_{HxK\in H\backslash G/K} H^n(H \cap xKx^{-1}, N)$$

La démonstration de la proposition 2.2.5 repose alors sur le raisonnement suivant.

Démonstration. Soit G groupe profini vérifiant (H) relativement à une famille $\{G_i\}_I$, et considérons un sous-groupe fermé H de G ainsi qu'un H-module discret N. On forme le module coinduit $M = CoInd_G^H(N)$ et l'on a alors le diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} H^n(G,M) & \xrightarrow{\rho} & \prod_I H^n(G_i,M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(H,N) & \xrightarrow{\rho'} & \prod_I \prod_{HxG_i} H^n(H\cap xG_ix^{-1},N) \end{array}$$

où ρ et ρ' sont les applications restrictions usuelles.

D'après le lemme de *Shapiro*, l'application verticale de gauche est un isomorphisme, et d'après le lemme 2.2.7 l'application verticale de droite est un plongement dense. Puisque l'application ρ est un plongement dense pour n suffisament grand, alors l'application ρ' est un plongement dense pour n suffisament grand.

Considérons maintenant un sous-groupe fini H de G, alors en particulier dans ce qui précède, le groupe H vérifie la propriété (H) relativement aux sous-groupes $H\cap xG_ix^{-1}$. D'après le lemme 2.2.6 on a alors

$$H = H\cap xG_ix^{-1}$$

pour un certain i et le groupe fini H est donc inclus dans le conjugué de l'un des G_i.

D'autre part, si $H = G_j$ alors $G_j\cap xG_ix^{-1} = \{1\}$ pour $j\neq i$ suivant le lemme 2.2.6 et le groupe profini G vérifie donc la propriété $(\star)$ relativement aux sous-groupes G_i. □

Remarque. On note que dans [LS97] C. Scheiderer introduit une variante de la propriété (H) faisant intervenir des coefficients de modules p-primaires. Cette modification lui est nécessaire pour prouver la réciproque profinie de cette proposition en utilisant un analogue local du théorème de Brown pour les groupes profinis (voir [Sch96]).

La preuve de la proposition 2.2.2 est alors immédiate : puisque le groupe G est bon, les isomorphismes entre groupes de cohomologies transfèrent la propriété (H) relativement aux sous-groupes G_i du groupe discret G à son complété profini $\widehat{G}$.

Notons que la théorie qui précède nous donne le résultat essentiel pour la suite.

Proposition 2.2.8. *Soit G un groupe discret résiduellement fini et bon. Si G est sans torsion, alors le complété profini $\widehat{G}$ est sans torsion.*

Démonstration. Nous appliquons la proposition 2.2.2 à la famille triviale $G_1 = \{1\}$. □

2.2.3 Le cas des extensions par un groupe cyclique d'ordre premier

Dans cette section, nous établissons le cadre théorique qui permet de réduire la torsion d'ordre premier d'un groupe profini $\widehat{G}$ à la torsion discrète de G. On suppose par la suite que les groupes G considérés sont de dimension cohomologique en p finie.

Nous nous plaçons dans le contexte des chapitres suivants, où il nous suffira d'établir la propriété $(\star)$ relativement à une certaine famille finie de sous-groupes pour des groupes G extensions de la forme

$$1 \to H \to G = H \rtimes \langle \rho \rangle \to \langle \rho \rangle \to 1 \tag{2.2.1}$$

où H est un sous-groupe de G sans torsion et ρ est un automorphisme de H d'ordre fini induit par une élément de même ordre de G. Rappelons que de manière générale, les classes de G-conjugaison des sections d'une telle extension sont en bijection avec les éléments de l'ensemble de cohomologie non abélien $H^1(\langle \rho \rangle, G)$.

Proposition 2.2.9. *Soit H un groupe discret sans torsion et g un automorphisme d'ordre p premier de H. Supposons que le produit semi-direct $H \rtimes \langle g \rangle$ possède un nombre fini de classes de conjugaison de groupes cycliques d'ordre p. Alors le groupe $H \rtimes \langle g \rangle$ vérifie la propriété $(\star)$ relativement à la famille $\{G_i\}_I$, constituée d'un représentant de chacune de ces classes.*

La preuve est immédiate du fait que la torsion est supposée d'ordre premier.

Démonstration. Par hypothèse, la famille $\{G_i\}_I$ est finie, et puisque H est sans torsion, tout sous-groupe fini propre du groupe $H \rtimes \langle g \rangle$ est d'ordre p, donc contenu dans l'un des G_i.

D'autre part, si deux représentants s'intersectent à conjugaison près de façon non-triviale en un groupe G

$$G_i \cap gG_jg^{-1} = G$$

avec $G \neq \{1\}$, alors en tant que sous-groupe G de G_i d'ordre premier, on a $G_i = G$ ce qui entraine $G_j = G$ et $g \in G$ puisque G_i et G_j sont supposés dans des classes de conjugaison distinctes. □

Dès lors qu'un groupe est bon et extension de groupes comme en 2.2.1, la torsion d'ordre première de son complété profini est ainsi conjuguée à la torsion discrète.

Corollaire 2.2.10. *Soit H un groupe discret et sans torsion et $G = H \rtimes \langle g \rangle$ un groupe discret où g est un automorphisme d'ordre p premier de H. Si G est bon et possède un nombre fini de classes de conjugaison de groupes cycliques d'ordre p, alors $\widehat{G}$ vérifie la propriété $(\star)$ relativement à la famille $\{G_i\}_I$ de sous-groupes* discrets *de G, constituée d'un représentant de chaque classe de conjugaison d'ordre p.*

En terme de cohomologie non abélienne, ceci signifie que les ensembles

$$H^1(\langle g\rangle, \widehat{H}) \simeq H^1(\langle g\rangle, H)$$

sont en bijection et constitués des G_i définis précédemment.

Démonstration. La preuve est immédiate : suivant la proposition précédente, le goupe $H \rtimes \langle g\rangle$ vérifie la propriété $(\star)$ relativement à la famille $\{G_i\}_I$ considérée, et selon la proposition 2.2.2, il en est alors de même pour son complété profini. □

Dans l'optique d'une extension de ce résultat à un élément de torsion g d'ordre n quelconque, remarquons que dans la vérification de la propriété $(\star)$, les groupes cycliques peuvent s'intersecter non-trivialement.

Il est d'autre part nécessaire de considérer tous les sous-groupes maximaux du produit semi-direct $H \rtimes \langle g\rangle$. Or, déjà dans le cas où l'ordre n de g est une puissance d'un premier p^n, les sous-groupes maximaux d'une telle extension ne sont pas tous d'ordre exactement p^n commme le montre l'exemple suivant

$$1 \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to G \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to 1$$

où l'on peut vérifier que G admet des sous-groupes maximaux d'ordre 2.

Pour ces raisons, nous nous restreindrons dans les chapitres suivants à déterminer les éléments de torsion d'un groupe profini d'ordre p premier uniquement.

Dans les chapitres 3 et 4 suivants, on considère les mapping class groups $\Gamma_{g,[n]}$ pour les genres zéro et un, et l'on établit que la torsion d'ordre p des groupes fondamentaux $\pi_1(\mathcal{M}_{g,[n]})$ est purement géométrique en genres zéro et un.

⋆

⋆ ⋆

3

Espace de modules $\mathcal{M}_{0,[n]}$, cas associés

3.1. Action de $\widehat{GT}$ sur la torsion de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$ 50
3.1.1. Torsion géométrique de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$ 50
3.1.2. Torsion algébrique d'ordre premier de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$ 52
3.1.3. Action de $\widehat{GT}$ sur la torsion 54
3.2. Espaces de modules de genre 1 de basse dimension, rotation 58
3.2.1. Espace $\mathcal{M}_{1,1}$, action de $\widehat{GS}$ sur $\widehat{\Gamma}_{1,1}$ 59
3.2.2. Espace $\mathcal{M}_{1,[2]}$, action de $\widehat{GT}$ sur $\widehat{\Gamma}_{1,[2]}$ 62
3.2.3. Rotations de $\mathcal{M}_{0,[n]}$ et $\mathcal{M}_{1,[n]}$, action de $\widehat{GS}$ 65

Dans ce chapitre nous établissons dans le cadre du genre zéro les deux *conjectures A et B* présentées dans l'introduction concernant la torsion du groupe fondamental $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,[n]})$ et l'action du groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GT}$ sur celle-ci. Plus exactement, nous démontrons le résultat suivant dont les résultats du genre un proviennent essentiellement du genre zéro.

Théorème.
La torsion d'ordre premier des groupes profinis $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$ pour $n \geqslant 4$, de $\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{1,1})$ et de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,[2]})$ est purement géométrique. L'action du groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GT}$ est donnée par conjugaison et élévation à la puissance λ.

De plus, l'action de $\widehat{GT}$ a la même propriété sur les rotations de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,[n]})$ pour $n \geqslant 2$.

Cette action de $\widehat{GT}$, similaire à son action sur les twists de Dehn le long de courbes fermées simples, qui correspondent à l'inertie divisorielle à l'infini dans les espaces de modules, renforce l'analogie entre *inertie à l'infini* et *inertie champêtre* de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0[n]})$.

Pour déterminer les classes de conjugaison comme pour déterminer l'action, une large utilisation est faite du corollaire 2.2.10 afin de réduire la propriété $(\star)$ au mapping class group discret : nous l'établissons relativement à un sous-groupe du mapping class group $\Gamma_{0,[n]}$.

Ces résultats sont repris pour les espaces de modules de genre un $\mathcal{M}_{1,1}$ et $\mathcal{M}_{1,[2]}$ de dimensions respectives un et deux, qui présentent des similarités avec les espaces de genre

zéro $\mathcal{M}_{0,[4]}$ et $\mathcal{M}_{0,[5]}$ de même dimension, puisque

$$\mathcal{M}_{1,1} \twoheadrightarrow \mathcal{M}_{0,[4]} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{1,2} \twoheadrightarrow \mathcal{M}_{0,[5]}.$$

Cette similarité se traduit au niveau des présentations des mapping class groups $\Gamma_{1,1}$ et $\Gamma_{1,2}$ sous la forme d'un isomorphisme avec un quotient de groupe de tresses. Nous montrons que de cette présentation découle la détermination de la torsion ainsi que l'action explicite de $\widehat{GS}$. Dans chacun des cas, nous en donnons une explication géométrique dans le cadre des structures orbifold des espaces de modules.

Pour le dernier cas, nous notons que les éléments de torsion qui ne fixent aucun point de la surface sont tous conjugués à des rotations de la suface de type $(1, n)$ autour d'un axe qui passe par le trou du genre ; ces éléments interviennent donc dans tous les mapping class groups $\widehat{\Gamma}_{1,[n]}$. Nous démontrons que l'action de $\widehat{GT}$ sur ces éléments est telle qu'annoncée dans le théorème à partir de méthode provenant du genre zéro.

Les autres éléments de torsion des mapping class groups $\Gamma_{1,[n]}$ ne proviennent pas du genre zéro et sont traités dans le chapitre qui suit.

3.1 Action de $\widehat{GT}$ sur la torsion de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$

3.1.1 Torsion géométrique de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$

Comme rappelé dans le chapitre précédent, les mapping class groups sont résiduellement finis, c'est-à-dire que le morphisme $\Gamma_{0,[n]} \hookrightarrow \widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ est injectif. Ainsi la torsion du groupe discret $\Gamma_{0,[n]}$ reste de la torsion dans $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$.

Nous rappelons dans cette section quelles sont les classes de conjugaison dans le mapping class group discret $\Gamma_{0,[n]}$, caractérisées par W. J. Harvey et C. MacLachlan (voir [HM75]).

Théorème 3.1.1. *Un élément d'ordre fini de $\Gamma_{0,[n]}$ est d'ordre divisant n, $n-1$ ou $n-2$. Pour chaque ordre fixé, il existe une unique classe de conjugaison de cet ordre dans $\Gamma_{0,[n]}$.*

Géométriquement, chacun de ces cas correspond à une puissance d'une rotation dont l'axe passe respectivement par aucun, un ou deux points marqués, les points restants étant répartis le long de parallèles pour former des orbites de longueurs adéquates. On nomme *réalisation standard* une telle réalisation géométrique, qui correspond à un choix particulier dans chaque classe de conjugaison.

Rappelons en détail d'où provient l'unicité des classes de conjugaison. Tout d'abord, tout élément γ d'ordre fini agissant sur une surface X se ramène par conjugaison à agir sur une réalisation standard de la façon suivante. Considérons l'application de revêtement $\pi : X \to X/K$, où $\pi(X)$ est homéomorphe à une sphère marquée épointée en les pôles,

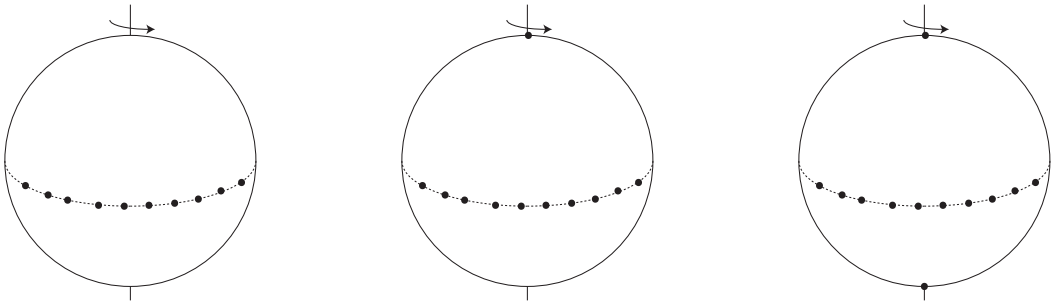


FIGURE 3.1: Les éléments ε_n, ε_{n-1} et ε_{n-2}.

il existe un homéomorphisme f de X/K isotope à l'identité tel que l'image des points marqués de X soit envoyée sur l'image des points de la réalisation standard. Considérant $\tilde{f}$ le relèvement de f à X prolongé à la sphère. Puisque la sphère n'admet qu'une structure analytique, alors $\tilde{f}\gamma\tilde{f}^{-1}$ est une rotation euclidienne et il agit sur la réalisation standard de la sphère.

Considérons maintenant K_1 et K_2 deux sous-groupes cycliques de $\Gamma_{0,[n]}$ de même ordre agissant sur un même modèle topologique X ainsi que les deux homéomorphismes $f_i : X \to \tilde{X}_i = X_i/K_i$ tels que $\tilde{f}_i K_i \tilde{f}_i^{-1}$ agissent comme la rotation euclidienne sur la même réalisation standard de la sphère $X_i = \mathbb{S}^2$. Notant $\phi : X_1 \to X_2$ l'application identité sur la sphère qui permute les points, on vérifie alors que $\psi = f_1^{-1}\phi f_2$ conjugue les groupes K_1 et K_2.

Une classe de conjugaison d'un élément de torsion est donc déterminée par la manière combinatoire de marquer les points sur la surface topologique en genre zéro. Du raisonnement précédent découle par ailleurs le résultat suivant.

Proposition 3.1.2. *Soit $\gamma \in \Gamma_{0,[n]}$ d'ordre fini et notons $[\gamma] \in \mathfrak{S}_n$ la permutation induite sur les points. La classe de conjugaison de γ est entièrement déterminée par le type de décomposition en cycles disjoints de $[\gamma]$.*

Nous verrons par la suite qu'en genre supérieur la combinatoire est plus riche et que cet invariant n'est plus suffisant.

À travers l'isomorphisme du mapping class group avec le quotient du groupe de tresses d'Hurwitz de la sphère

$$\Gamma_{0,[n]} \simeq H_n/\langle w_n \rangle$$

où w_n est le générateur du centre, on obtient la description de la torsion en terme de twists de Dehn.

Corollaire 3.1.3. *Tout élément fini de $\Gamma_{0,[n]}$ est conjugué à la puissance de l'un des éléments ε_k d'ordre k suivant*

$$\varepsilon_n = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1} \qquad \varepsilon_{n-1} = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-2} \qquad \varepsilon_{n-2} = \sigma_1^2\sigma_2\cdots\sigma_{n-2}.$$

Notons que pour n pair, il existe en réalité deux classes de conjugaison d'ordre deux, celle de $\varepsilon_n^{n/2}$ et celle de $\varepsilon_{n_2}^{(n-2)/2}$.

Démonstration. La vérification des ordre de ces éléments est immédiate en utilisant quelques relations de tresse ainsi que les expressions du groupe d'Hurwitz

$$H_n = B_n/\langle\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\cdots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}\rangle$$

et du générateur du centre

$$w_n = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n.$$

□

3.1.2 Torsion algébrique d'ordre premier de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$

Nous établissons dans cette section que la torsion d'ordre premier de $\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{0,[n]})$ est géométrique, c'est-à-dire que les classes de conjugaison proviennent de celles du groupe discret $\pi_1^{orb}(\mathcal{M}_{0,[n]})$.

Proposition 3.1.4. *Soit $\gamma \in \widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ un élément de torsion d'ordre premier. Alors γ est conjugué à une puissance de l'un des éléments ε_n, ε_{n-1} ou ε_{n-2}.*

Cette proposition nécessite le lemme suivant.

Lemme 3.1.5. *Soit γ un élément de torsion d'ordre premier de $\Gamma_{0[n]}$. Alors le groupe $\Gamma_{0,n} \rtimes \langle\gamma\rangle$ possède un nombre fini de classes de conjugaison.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe T_1, T_2, $\cdots$ un nombre infini de classes de conjugaison de groupes cycliques d'ordre p dans $\Gamma_{0,n} \rtimes \langle\gamma\rangle$. Pour chaque permutation dans $\mathfrak{S}_n$, fixons par ailleurs un élément $\sigma \in \Gamma_{0,[n]}$ qui donne cette permutation et notons $\mathfrak{S}$ leur réunion.

On note que suivant le théorème 3.1.1 il n'y a qu'une seule classe de conjugaison d'ordre p dans $\Gamma_{0,[n]}$ (ou deux dans le cas $p = 2$ et n pair), c'est-à-dire que les classes de conjugaison engendrées dans $\Gamma_{0,[n]}$ par T_1, $T_2, \cdots$ sont toutes égales à une unique classe notée T - ou deux classes si $p = 2$. Or

$$T = \bigsqcup_{\sigma\in\mathfrak{S}} \sigma^{-1}T_i\sigma$$

Dans cette union disjointe, chaque $\sigma^{-1}T_i\sigma$ correspond à une classe de conjugaison dans $\Gamma_{0,n} \rtimes \langle\gamma\rangle$, donc à un T_j, et réciproquement tout T_j appartient à cette union. On obtient donc une bijection entre l'ensemble infini des T_j et l'ensemble fini des σ, d'où la contradiction. □

On passe maintenant à la démonstration de la proposition 3.1.4. On montre tout d'abord que la permutation induite par un élément de torsion provient d'un élément géométrique. Le relèvement de cette permutation à un tel élément permet d'établir le résultat annoncé à partir des résultats cohomologiques du chapitre précédent.

Preuve de la proposition 3.1.4. Soit $\gamma \in \widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ un élément de torsion d'ordre p premier. On considère les deux suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \widehat{\Gamma}_{0,n} & \longrightarrow & \widehat{\Gamma}_{0,[n]} & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & 1 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & \Gamma_{0,n} & \longrightarrow & \Gamma_{0,[n]} & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

et l'on note $[\gamma] \in \mathfrak{S}_n$ la permutation induite. Montrons tout d'abord que la permutation $[\gamma]$ est géométrique, c'est-à-dire qu'il existe un élément de torsion $\gamma_0 \in \Gamma_{0,[n]}$, possédant la même permutation. Supposons que $[\gamma]$ n'est pas géométrique et considérons le groupe discret

$$H = \langle \Gamma_{0,n}, \sigma \rangle \subset \Gamma_{0,[n]}$$

où $\sigma \in \Gamma_{0,[n]}$ est un relèvement d'ordre fini de $[\gamma]$. Alors H est sans torsion car tous les éléments de H ont comme permutation une puissance de $[\gamma]$. Or aucun élément de torsion n'admet $[\gamma]$ comme permutation par hypothèse, et si $\tau \in H$ est de torsion et de permutation $[\gamma]^i$, alors pour $ji = 1 \ mod \ ord([\gamma])$ l'élément τ^j est de torsion et de permutation $[\gamma]$, ce qui est impossible.

Par ailleurs le groupe H est un groupe bon en tant qu'extension des groupes bons

$$1 \to \Gamma_{0,n} \to H \to \langle [\gamma] \rangle \to 1,$$

où $\Gamma_{0,n}$ est bon d'après la proposition 2.1.5. Selon la propriété 2.2.8, l'absence de torsion dans H implique alors l'absence de torsion dans son complété $\widehat{H}$. Puisque ce dernier est la préimage de $\langle [\gamma] \rangle$ dans $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$, ceci fournit une contradiction. On en conclut que $[\gamma]$ est toujours géométrique, ce que l'on suppose par la suite.

On choisit donc γ_0 de torsion dans $\Gamma_{0,[n]}$ tel que $[\gamma_0] = [\gamma]$. Puisque $\widehat{\Gamma}_{0,n}$ est sans torsion, le sous-groupe préimage de $[\gamma]$ est le produit semi-direct $\widehat{\Gamma}_{0,n} \rtimes \langle \gamma \rangle$. Il existe alors $h \in \widehat{\Gamma}_{0,n}$ tel que

$$\gamma = h\gamma_0.$$

On note alors que les deux éléments γ_0 et γ ont même ordre p. En effet, puisque $p = ord([\gamma_0])$ alors $\gamma_0^i \neq 1$ pour $i < p$ d'une part et $\gamma_0^p \in \Gamma_{0,n}$ puisque de permutation triviale ; donc $\gamma_0^p = 1$ car $\Gamma_{0,n}$ est sans torsion.

Considérons maintenant la relation

$$\gamma^p = (h\gamma_0)^p = h\gamma_0(h)\cdots\gamma_0^{p-1}(h) = 1 \tag{3.1.1}$$

où γ_0 agit par conjugaison sur h. On en déduit que h est un cocycle d'ordre p de $H^1(\langle\gamma_0\rangle, \widehat{\Gamma}_{0,[n]})$. Suivant le lemme 3.1.5, le groupe $\Gamma_{0,n} \rtimes \langle\gamma\rangle$ admet un nombre fini de classes de conjugaison.

Or, puisque $\gamma_0 = h^{-1}\gamma$ appartient à $\widehat{\Gamma}_{0,n} \rtimes \langle\gamma\rangle$ on a

$$\widehat{\Gamma}_{0,n} \rtimes \langle\gamma\rangle = \widehat{\Gamma}_{0,n} \rtimes \langle\gamma_0\rangle$$

D'après le corollaire 2.2.10 et la bonté de $\Gamma_{0,n} \rtimes \langle\gamma_0\rangle$ les ensembles de cohomologie non abéliens

$$H^1(\langle\gamma_0\rangle, \widehat{\Gamma}_{0,n}) \simeq H^1(\langle\gamma_0\rangle, \Gamma_{0,n})$$

sont en bijection. Il existe donc $h_0 \in \Gamma_{0,[n]}$ qui fournit le même cocycle que h et les deux cocycles h et h_0 diffèrent d'un cobord

$$\begin{aligned} h &= kh_0\gamma_0(k^{-1}) \\ &= kh_0\gamma_0k^{-1}\gamma_0^{-1} \qquad\qquad \text{pour } k \in \widehat{\Gamma}_{0,[n]}. \end{aligned}$$

Remplaçant cette relation dans la relation $\gamma = h\gamma_0$, on en déduit

$$\gamma = k.h_0\gamma_0.k^{-1}$$

où l'élément $h_0\gamma_0$ est lui même un élément de torsion de $\Gamma_{0,[n]}$ en tant que conjugué de γ.

Ainsi tout élément de torsion d'ordre premier de $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ est bien conjugué à un élément de torsion géométrique de $\Gamma_{0,[n]}$.

□

Remarque. Dans ce contexte de torsion, la proposition 3 de [LS94b] s'interprète comme la détermination de la torsion d'ordre 2 et 3 (resp. 5) dans $\widehat{\Gamma}_{0,[4]}$ (resp. $\widehat{\Gamma}_{0,[5]}$).

3.1.3 Action de $\widehat{GT}$ sur la torsion

Connaissant explicitement l'action du groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GT}$ sur les générateurs de tresses des mapping class groups $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ – voir chapitre 1, théorème 1.2.1, ainsi que certaines classes de conjugaison, on en déduit l'action sur les éléments de torsion d'ordre premier en utilisant la propriété $(\star)$.

Théorème 3.1.6. *Le groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GT}$ agit par conjugaison et élévation à la puissance λ sur la torsion d'ordre p premier de $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$. Soit $F = (\lambda, f) \in \widehat{GT}$ et $\varepsilon \in \widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ un élément de torsion d'ordre p premier, alors il existe $g \in \widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ tel que*

$$F(\varepsilon) = g\varepsilon^{\lambda}g^{-1}.$$

La preuve de ce résultat nécessite de faire intervenir un quotient particulier de groupe de tresses pour lequel on établit la proposition suivante.

Proposition 3.1.7. *Notons z_n et y_n respectivement le générateur du centre et l'élément d'Hurwitz du groupe de tresses B_n et considérons le groupe*

$$G = B_n/\langle z_n y_n^{-1}\rangle.$$

Alors G est bon et tout élément de p-torsion de $\widehat{G}$ est conjugué à une puissance de $\tilde{\varepsilon}_{n-2}$, $\tilde{\varepsilon}_{n-1}$ ou $\tilde{\varepsilon}_n$, élément respectivement d'ordre $n-2$, $n-1$ et n et relèvement respectifs à G de ε_{n-2}, ε_{n-1} et ε_n de $\Gamma_{0,[n]}$ de même expression.

Démonstration. Commençons par établir la bonté de G. Considérons la suite exacte suivante, et identifions $Ker(\psi)$:

$$1 \longrightarrow Ker(\psi) \longrightarrow G = B_n/\langle y_n^{-1} z_n\rangle \xrightarrow{\psi} \Gamma_{0,[n]} = B_n/ < y_n, z_n > \longrightarrow 1 \qquad (3.1.2)$$

L'image $\bar{y}_n$ de y_n dans G est centrale puisque $\bar{y}_n = \bar{z}_n$ dans G. Donc si $\omega \in Ker(\psi)$ alors $\omega = \bar{y}_n^j \bar{z}_n^k = \bar{z}_n^{j+k}$ dans G. Ainsi $Ker(\psi)$ est cyclique.

Le groupe G apparait comme une extension de groupes bons de type fini et FP, et l'on conclut avec la proposition 2.1.5.

Soit γ un élément de torsion d'ordre p premier de $\widehat{G}$. Puisque G est bon et de type fini, alors d'après le lemme 2.1.4, le foncteur de complétion profini est exact à droite et à gauche et la suite exacte 3.1.2 induit

$$1 \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}} \longrightarrow \widehat{G} \xrightarrow{\psi} \widehat{\Gamma}_{0,[n]} \longrightarrow 1. \qquad (3.1.3)$$

Considérons $\psi(\gamma) \in \widehat{\Gamma}_{0,[n]}$. Alors puisque $Ker(\psi) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$ est un groupe libre profini, il est sans torsion (théorème de Serre) et donc $\psi(\gamma)$ et γ ont même ordre. En effet, notant k l'ordre de $\psi(\gamma)$, alors $\gamma^k \in Ker(\psi)$ implique $\gamma^k = 1$.

En particulier, suivant la proposition 3.1.4, $\psi(\gamma)$ est conjugué à une puissance d'un élément géométrique de même ordre de $\Gamma_{0,[n]}$

$$\psi(\gamma) = g\varepsilon_i^k g^{-1} \text{ pour } g \in \Gamma_{0,[n]} \text{ et } i \in \{n-2, n-1, n\}.$$

Relevons un tel élément en un élément de $\widehat{G}$ on obtient

$$\gamma = \tilde{g}\tilde{\varepsilon}_i^r \tilde{g}^{-1}\omega^j \qquad (3.1.4)$$

où ω engendre $Ker(\psi)$, $\tilde{g}$ est un relèvement de g et $\tilde{\varepsilon}_i$ est le relèvement de ε_i de même expression en terme de générateurs de B_n. Élévant la relation précédente à l'ordre k de γ on obtient

$$\tilde{\varepsilon}_i^{rk} = \omega^{-jk} \qquad (3.1.5)$$

et puisque $\gamma = \varepsilon_i^r$ est d'ordre p, on obtient

$$\omega^{pj} = 1$$

qui implique $j = 0$ puisque $Ker(\psi) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$ est sans torsion. On en conclut par l'équation 3.1.4 que γ est conjugé dans $\widehat{G}$ à un élément géométrique puisque

$$\gamma = \tilde{g}\tilde{\varepsilon}_i^r\tilde{g}^{-1}$$

pour $i \in \{n-2, n-1, n\}$ comme annoncé. □

Lemme 3.1.8. *L'action de $\widehat{GT}$ définie sur le groupe de tresses $\widehat{B}_n$ passe au quotient dans le groupe $\widehat{G} = \widehat{B}_n/\langle z_n y_n^{-1}\rangle$. De plus cette action est compatible avec le morphisme $\widehat{G} \to \widehat{\Gamma}_{0,[n]}$.*

Démonstration. La démonstration est immédiate et découle de l'action sur B_n définie dans [Dri90]. En effet pour $F \in \widehat{GT}$ on a

$$F(y_n) = y_n^\lambda \qquad F(z_n) = z_n^\lambda.$$

Ainsi $F(z_n y_n^{-1}) = (z_n y_n^{-1})^\lambda$ et l'action de $\widehat{GT}$ sur $\widehat{B}_n$ définie sur chacun des générateurs σ_i passe au quotient dans $\widehat{G}$ et respecte la factorisation

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B}_n & \longrightarrow & \widehat{\Gamma}_{0,[n]} \\ & \searrow & \uparrow \\ & & \widehat{G} = \widehat{B}_n/\langle z_n y_n^{-1}\rangle \end{array}$$

et donc le morphisme $\widehat{G} \to \widehat{\Gamma}_{0,[n]}$. □

Établissons l'expression de l'action de $\widehat{GT}$ sur les éléments de torsion d'ordre premier de $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$.

Démonstration du théorème 3.1.6. Soit γ un élément d'ordre premier p de $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ et $F = (\lambda, f)$ un élément de $\widehat{GT}$. Suivant la proposition 3.1.4, γ est conjugué à une puissance r d'un des éléments d'ordre fini maximal ε_n, ε_{n-1} ou ε_{n-2}.

D'autre part, l'élément $F(\gamma)$ étant de même ordre que γ, il est conjugué à une puissance de ces mêmes éléments d'après la même proposition. Puisque le groupe $\widehat{GT}$ préserve les permutations, et que chacun des éléments ε_k admet un nombre de points fixes différents, on a

$$F(\gamma) = \alpha\gamma^k\alpha^{-1}$$

pour un certain $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Gamma}_{g,[n]} & \longrightarrow & \widehat{\Gamma}^{ab}_{g,[n]} \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ \widehat{\Gamma}_{g,[n]} & \longrightarrow & \widehat{\Gamma}^{ab}_{g,[n]} \end{array}$$

dont se déduit la relation

$$F(\gamma^{ab}) = F(\gamma)^{ab}. \tag{3.1.6}$$

Utilisons l'abélianisé de $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ pour calculer la puissance k, avec

$$\widehat{\Gamma}^{ab}_{0,[n]} \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/(n-1) \text{ si n impair} \\ \mathbb{Z}/2(n-1) \text{ si n pair.} \end{cases}$$

Considérons le cas où $\gamma \sim \varepsilon_{n-1}^r$. Dans ce cas l'équation 3.1.6 devient

$$\sigma^{r(n-2)\lambda} = \sigma^{r(n-2)k}$$

et en raisonnant modulo l'ordre p de l'élément γ

$$\begin{gathered} (n-2)\lambda = (n-2)k \quad mod\ p \\ \lambda = k \quad mod\ p \end{gathered}$$

puisque p divise $n-1$.

Pour le cas de $\gamma \sim \varepsilon_n^r$ dans $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$, considérons le sous-groupe $\widehat{\Gamma}^1_{0,[n+1]}$ de $\widehat{\Gamma}_{0,[n+1]}$ constitué des éléments fixant un point, ainsi que l'homomorphisme de groupes fondamentaux orbifold induit par *effacement du point fixe*

$$\widehat{\Gamma}^1_{0,[n+1]} \to \widehat{\Gamma}_{0,[n]}.$$

Alors $\gamma = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^r \in \widehat{\Gamma}^1_{0,[n+1]}$ est envoyé sur ε_n^r d'ordre n dans $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ et l'action de $\widehat{GT}$ sur γ est induite par son action sur ε_n.

Le cas de $\gamma \sim \varepsilon_{n-2}^r$ est plus délicat puisque dans ce cas $\gamma^{ab} = 1$ dans $\widehat{\Gamma}^{ab}_{0,[n]}$. Ceci nécessite de revenir au quotient $\widehat{G} = \widehat{B}_n/\langle z_n y_n^{-1} \rangle$ dans le groupe de tresses à travers la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccc} B_n & \longrightarrow & \Gamma_{0,[n]} \\ & \searrow & \uparrow \\ & & B_n/\langle z_n y_n^{-1} \rangle \end{array}$$

dont l'abélianisé est isomorphe à

$$\widehat{G} \simeq \widehat{\mathbb{Z}}/(n-1)(n-2).$$

Considérant $\tilde{\varepsilon}_{n-2}$ relèvement dans $\widehat{G}$ de ε_{n-2} de même ordre comme dans la proposition 3.1.3, on remarque que son abélianisé $\tilde{\varepsilon}^{ab}_{n-2}$ reste d'ordre $n-2$ dans $\widehat{G}^{ab}$.

Notons $\tilde{\gamma}$ un relèvement de γ à $\widehat{G}$. Établissons l'expression de l'action d'un élément F de $\widehat{GT}$ sur $\tilde{\gamma}$ dans $\widehat{G}$ dont l'existence dont est garantie par le lemme 3.1.8. Suivant la

proposition l'élément γ est conjugué à une élément géométrique et $F(\tilde{\gamma})$ de même ordre est conjugué à ce même élément, soit

$$F(\tilde{\gamma}) = \beta^{-1}\tilde{\gamma}^m\beta \text{ avec } \beta \in \widehat{G}. \tag{4}$$

En passant dans l'abélianisé $\widehat{G}^{ab}$ comme précédemment, et puisque l'action de $\widehat{GT}$ sur $\widehat{G}$ commute à l'abélianisation, l'équation

$$F(\tilde{\gamma})^{ab} = F(\tilde{\gamma}^{ab})$$

ainsi que l'équation précédente impliquent

$$g^{\lambda(n-1)} = g^{m(n-1)}$$

d'où $\lambda = m \ mod \ n-2$ et enfin

$$F(\tilde{\gamma}) = \beta^{-1}\tilde{\gamma}^{\lambda}\beta \ \text{ avec } \beta \in \widehat{G}.$$

Suivant le lemme 3.1.8, cette relation précédente reste vraie dans $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$. □

Corollaire 3.1.9. *Le groupe de Galois absolu agit par conjugaison et élévation à la puissance cyclotomique sur l'inertie champêtre d'ordre premier de $\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{0,[n]})$.*

Notons que le résultat précédent repose sur la connaissance de l'expression des éléments de torsion géométrique en terme de tresses. Dès lors qu'il est établi que l'action de $\widehat{GT}$ stabilise chaque groupe engendré par un élément de torsion, il est alors possible de généraliser cette action à un élément de torsion d'ordre quelconque.

C'est ce résultat que nous établissons dans le chapitre 5 pour l'action du sous-groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{Q}} \subset \widehat{GT}$, qui vient étendre le résultat du corollaire précédent.

3.2 Espaces de modules de genre 1 de basse dimension, rotation

On exploite dans cette section le lien entre espaces de modules de genre un et de genre zéro présent en dimension un et deux. Cette relation se traduit par des présentations des mapping class groups $\Gamma_{1,1}$ et $\Gamma_{1,2}$ en terme de quotient de groupes de tresses qui permet de déterminer torsion et action des groupes de Grothendieck-Teichmüller. On aborde de plus le cas d'un élément particulier de $\Gamma_{1,[n]}$ pour n quelconque, rotation du tore dont on montre qu'elle provient du genre zéro. Les autres éléments de torsion de $\Gamma_{1,[n]}$ sont traités au chapitre 4.

Dans chacun des cas, on donne un aperçu de cette relation au niveau des espaces de modules et de leur structure orbifold.

3.2.1 Espace $\mathcal{M}_{1,1}$, action de $\widehat{GS}$ sur $\widehat{\Gamma}_{1,1}$

Suivant le théorème de réalisation de Nielsen, chacun des éléments de torsion de $\Gamma_{1,1}$ correspond à un automorphisme de surface de Riemann de genre un fixant un point. Le résultat suivant n'est rien d'autre que la liste des automorphismes usuels de courbes elliptiques.

Proposition 3.2.1. *Tout élément d'ordre fini de $\Gamma_{1,1}$ est d'ordre 2, 3, 4 ou 6 et un groupe maximal fini de $\Gamma_{1,1}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_4$ ou $\mathbb{Z}_6$ groupes cycliques d'ordre 4 et 6. Il existe une unique classe de conjugaison pour chaque ordre donné.*

Démonstration. Considérons γ élément d'ordre fini de $\Gamma_{1,1}$. Puisque $\Gamma_{1,1} = SL_2(\mathbb{Z})$, on dispose de la représentation en terme de produit amalgamé

$$\Gamma_{1,1} = \mathbb{Z}_4 \star_2 \mathbb{Z}_6.$$

D'après le théorème de Serre 2.2.1 un sous-groupe fini $\langle\gamma\rangle$ est contenu dans $\mathbb{Z}_4$ ou $\mathbb{Z}_6$. L'unicité des classes de conjugaison de chaque ordre fini provient de ce que $\Gamma_{1,1}$ est un produit libre. □

Utilisant l'isomorphisme de $\Gamma_{1,1}$ avec le quotient de groupe de tresses suivant

$$SL_2(\mathbb{Z}) \simeq \frac{B_3}{\langle(\sigma_1\sigma_2)^6 = 1\rangle}$$

où σ_1 et σ_1 sont les générateurs usuels de B_3 – voir [KT08] - Annexe A, on a plus exactement.

Proposition 3.2.2. *Soit γ un élément d'ordre fini de $\Gamma_{1,1}$. Alors γ est conjugué à une puissance de l'un des éléments γ_k d'ordre k suivant*

$$\gamma_4 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \qquad \gamma_6 = \sigma_1\sigma_2$$

où σ_i désigne un générateur usuel de B_3.

Notons que $\Gamma_{1,1,}$ ne vérifie pas la propriété $(\star)$ puisque suivant les relations

$$\langle\gamma_4\rangle \cap g\langle\gamma_6\rangle g^{-1} \supset \langle\gamma_2\rangle.$$

Comme précédemment la torsion d'ordre premier de $\widehat{\Gamma}_{1,1}$ se réduit à conjugaison près à celle de $\Gamma_{1,1}$ en exhibant un sous-groupe $H \subset \Gamma_{1,1}$ sans torsion. Prenant pour H le sous-groupe libre de congruence $SL_2(3)$ des matrices congrues à l'identité modulo 3, alors pour g d'ordre premier p, le groupe $G = H \rtimes \langle g\rangle$ est bon et ne possède qu'un nombre fini de classes de conjugaisons d'ordre p, qui doivent être celles recensées dans la proposition 3.2.1.

Mettant ces résultats ensembles, on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.2.3. *Soit γ un élément d'ordre 2 ou 3 de $\widehat{\Gamma}_{1,1}$. Alors γ est conjugué à l'un des éléments γ_k d'ordre k suivant*

$$\gamma_2 = (\sigma_1\sigma_2)^3 \qquad \gamma_3 = (\sigma_1\sigma_2)^2$$

où σ_i désigne un générateur usuel de B_3.

Nous pouvons maintenant établir l'action explicite de $\widehat{GT}$ sur ces éléments.

Proposition 3.2.4. *Le groupe de Grothendieck-Teichmüller agit par conjugaison et élévation à la puissance λ sur la torsion d'ordre premier de $\widehat{\Gamma}_{1,1}$.*

La conjugaison provient de l'unicité des classes. Le groupe de tresses intervient pour identifier la puissance λ, et comme dans la section précédente, on raisonne dans l'abélianisé du mapping class group.

Démonstration. Considérons γ un élément de torsion d'ordre premier de $\widehat{\Gamma}_{1,1}$ ainsi que $F \in \widehat{GT}$. Puisque les groupes cycliques engendrés par γ et $F(\gamma)$ sont de même ordre, alors ils sont conjugués l'un à l'autre et

$$F(\gamma) = g\gamma^k g^{-1}$$

pour $g \in \widehat{\Gamma}_{1,1}$ où $k \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$ est une puissance à déterminer.

Pour ce faire, utilisons les expressions sous forme de tresses de la proposition 3.2.3. D'après le théorème 1.2.1 l'action sur un générateur est donnée par

$$F(\sigma_i) = h\sigma_i^{\lambda}h^{-1}$$

où $h \in \widehat{B}_3$.

À partir de la relation $F(\gamma)^{ab} = F(\gamma^{ab})$, on passe alors à l'abélianisé de $\widehat{\Gamma}_{1,1}$ où $\sigma_1^{ab} = \sigma_2^{ab}$. Puisque $\Gamma_{1,1}^{ab} \simeq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ est engendré par σ_1^{ab} et

$$\gamma_2^{ab} = (\sigma_1^{ab})^6 \qquad \gamma_3^{ab} = (\sigma_1^{ab})^4,$$

les ordres des éléments sont préservés. On identifie alors la puissance

$$k = \lambda$$

dont il découle l'expression annoncée. □

Anticipons sur le chapitre 5 et donnons une explication géométrique de l'isomorphisme entre mapping class group $\Gamma_{1,1}$ et quotient de groupe de tresses – pour plus de simplicité, on ne détaillera pas la correspondance entre points bases à l'infini en lesquels sont basés les groupoïdes considérés.

L'espace de modules des courbes de genre un à un point marqué est défini comme le quotient *orbifold*

$$\mathcal{M}_{1,1} \coloneqq \Gamma_{1,1} \backslash\!\backslash \mathcal{T}_{1,1}$$

où $\mathcal{T}_{1,1}$ est l'espace de Teichmüller et joue le rôle de revêtement universel pour l'espace de modules. On retrouve ainsi l'action du groupe modulaire

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{M}_{1,1}) = SL_2(\mathbb{Z})$$

sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$, la structure orbifold provenant de cette action non-fidèle. En tant qu'espace topologique $\mathcal{M}_{1,1}$ est isomorphe à une sphère épointée, et la structure orbifold en chaque point est définie par le groupe d'isotropie $\Gamma_x \subset \Gamma_{1,1}$ qui agit sur $\mathcal{T}_{1,1}$. Plus précisément, tout point de $\mathcal{M}_{1,1}$ possède une inertie orbifold isomorphe à $\mathbb{Z}_2$ et deux points spéciaux possèdent une inertie orbifold isomorphe à $\mathbb{Z}_6$ et $\mathbb{Z}_4$. Notant $\Gamma_X \coloneqq \{g \in \Gamma_{1,1} \ g.x = x, \ \forall x \in \mathcal{T}_{1,1}\}$ le groupe d'isotropie de l'espace, on définit par ailleurs l'orbifold réduite

$$\mathcal{M}'_{1,1} \coloneqq (\Gamma_{1,1}/\Gamma_X) \backslash\!\backslash \mathcal{T}_{1,1}$$

de groupe fondamental $\pi_1^{orb}(\mathcal{M}'_{1,1}) = PSL_2(\mathbb{Z})$ et accompagné du morphisme

$$\mathcal{M}_{1,1} \twoheadrightarrow \mathcal{M}'_{1,1}.$$

Par ailleurs, considérons la définition d'une courbe elliptique comme revêtement de degré deux de $\mathbb{P}^1$ ramifié en quatre points. La 3-transitivité de $PSL_2(\mathbb{C})$ définit une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3 \hookrightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ et permet de ramener les points de ramifications à $(0, 1, \infty, \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$. Une classe d'isomorphisme de courbe elliptique est ainsi caractérisée par ce paramètre λ modulo l'action de $\mathfrak{S}_3$. On obtient plus exactement la description des espaces de modules suivante

$$\mathcal{M}_{1,1} \simeq (\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{S}_3) \backslash\!\backslash (\mathbb{P} - \{0, 1, \infty\}) \qquad \mathcal{M}'_{1,1} \simeq \mathfrak{S}_3 \backslash\!\backslash (\mathbb{P} - \{0, 1, \infty\})$$

en tant qu'espace orbifold, où $\mathbb{Z}_2$ correspond à l'involution dont est munie toute courbe elliptique.

Considérons les espaces de modules de courbes de genre zéro à quatre points marqués

$$\mathcal{M}_{0,4} \coloneqq \Gamma_{0,4} \backslash\!\backslash \mathcal{T}_{0,4} \qquad \mathcal{M}_{0,[4]} \coloneqq \mathfrak{S}_4 \backslash\!\backslash \mathcal{M}_{0,4}.$$

Le raisonnement précédent donne une description de la classe d'isomorphisme de quatre points de $\mathbb{P}^1$ modulo l'action de $PSL_2(\mathbb{C})$, ainsi que les identifications suivantes

$$\mathcal{M}_{0,4} \simeq (\mathbb{P} - \{0, 1, \infty\}) \qquad \mathcal{M}_{0,[4]} \simeq \mathfrak{S}_4 \backslash\!\backslash (\mathbb{P} - \{0, 1, \infty\})$$

où $\mathfrak{S}_4$ agit sur $\{0, 1, \infty\}$ comme $\mathfrak{S}_3 \simeq \mathfrak{S}_4/V_4$, puisque le paramètre $\lambda \in \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ est défini comme l'image d'un birapport et est donc invariant sous l'action du Vierergruppe V_4 de Klein.

En tant qu'espace topologique, l'espace $\mathcal{M}_{0,[4]}$ est isomorphe à une sphère épointée. En tant qu'orbifold, chaque point admet un groupe d'isotropie $\Gamma_X \simeq V_4$ et deux points spéciaux admettent un groupe d'isotropie isomorphe à D_4 et $\mathcal{A}_4$. À travers l'isomorphisme du groupe fondamental orbifold avec quotient de groupe de tresses

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{M}_{0,[4]}) = B_4/<Z, H>.$$

ces groupes d'inertie correspondent aux éléments γ_2 et γ_3 rencontrés.

Il résulte de cette analyse que les espaces de modules $\mathcal{M}'_{1,1}$, $\mathcal{M}_{1,1}$ et $\mathcal{M}_{0,[4]}$ sont reliés entre eux par les morphismes.

$$\mathcal{M}_{1,1} \twoheadrightarrow \mathcal{M}'_{1,1} \twoheadrightarrow \mathcal{M}_{0,[4]}$$

qui donnent par passage aux groupes fondamentaux orbifold

$$\Gamma_{1,1} \twoheadrightarrow \Gamma'_{1,1} \twoheadrightarrow \Gamma_{0,[4]}.$$

L'isomorphisme entre $SL_2(\mathbb{Z})$ et le quotient du groupe de tresses provient ainsi de l'identification de l'orbifold réduite de l'espace de modules de genre un à un sous-espace de l'espace de modules de genre zéro.

3.2.2 Espace $\mathcal{M}_{1,[2]}$, action de $\widehat{GT}$ sur $\widehat{\Gamma}_{1,[2]}$

L'étude menée dans cette section repose sur un isomorphisme du mapping class group $\Gamma_{1,[2]}$ discret avec une extension d'un quotient du groupe de tresses.

Proposition 3.2.5. *Le full mapping class group $\Gamma_{1,[2]}$ admet la présentation*

$$\Gamma_{1,[2]} \simeq B_4/Z \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

où Z est le centre du groupe des tresses B_4.

Démonstration. Cette identification provient de la suite exacte scindée usuelle

$$1 \to \Gamma_{1,2} \to \Gamma_{1,[2]} \to \mathfrak{S}_2 \to 1$$

dont on identifie chacun des termes.

Considérons les twists s_i de supports tels que sur la figure 3.2, ainsi que le morphisme

$$B_4 \to \Gamma_{1,2}$$
$$\sigma_i \to s_i$$

Les twists s_i vérifient entre eux les relations de tresses usuelles, ainsi que la relation (voir Luo [Luo97]).

$$(s_1 s_2 s_3)^4 = 1$$

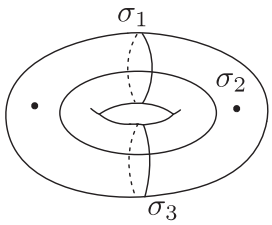


FIGURE 3.2: Générateurs de $\Gamma_{1,2}$.

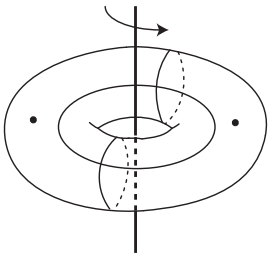


FIGURE 3.3: Représentation de τ.

qui n'est autre que la relation de centre de B_4. On obtient ainsi l'isomorphisme entre le groupe des tresses et le groupe pur.

D'autre part, un élément τ de $\Gamma_{1,[2]}$ dont l'image engendre $\mathfrak{S}_2$ s'identifie avec la rotation d'ordre deux passant par le trou du tore. Elle vérifie $\Gamma_{1,2} \cap \langle\tau\rangle = \{1\}$ puisqu'un pur ne permute aucun point. On vérifie ensuite sur une base d'homologie de $S_{1,2}$ que τ commute avec chacun des s_i. Le produit est donc direct et conduit à l'isomorphisme annoncé. □

Proposition 3.2.6. *Considérons $\Gamma_{1,[2]}$ présenté comme dans la proposition précédente, ainsi que γ un élément de torsion. Alors γ est conjugué à l'un des éléments suivant*

$$\begin{array}{lll} \gamma_{2,p} = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^2 & \gamma_{3,p} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1 & \gamma_{4,p} = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3) \\ \gamma_2 = \gamma_{2,p}\tau & \gamma_4 = \gamma_{4,p}\tau & \gamma_6 = \gamma_{3,p}\tau \end{array}$$

où $\gamma_{k,(p)}$ désigne un élément (pur) d'ordre k. Si l'on considère un sous-groupe fini maximal M de $\Gamma_{1,[2]}$, alors M est isomorphe à $\mathbb{Z}_6$ ou à $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

Démonstration. Il s'agit de déterminer les éléments de torsion du quotient de groupe de tresses B_4/Z. Puisque les groupes de tresses sont sans torsion, celle-ci se réduit à la relation de centre

$$(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4 = 1.$$

Quelques relations de tresses démontrent les expressions annoncées.

D'autre part, les relations entre les éléments de torsion impliquent le résultat sur les sous-groupes finis maximaux. □

Remarque. D'après les relations entre générateurs, notons que $\Gamma_{1,[2]}$ ne vérifie pas la propriété $(\star)$. En effet, les groupes maximaux $M_1 = <\gamma_6>$ et $M_2 = <\gamma_4>$ contiennent tous les deux les éléments τ et $\gamma_{2,p}$.

Comme précédemment, exhibons un sous-groupe H de $\Gamma_{1,[2]}$ sans torsion afin d'appliquer le corollaire 2.2.10 pour réduire la torsion algébrique d'ordre premier de $\widehat{\Gamma}_{1,[2]}$ à celle de $\Gamma_{1,[2]}$.

Puisque le pure mapping class group $\Gamma_{1,2}$ contient de la torsion, nous utilisons l'isomorphisme de $\Gamma_{1,2}$ avec le quotient B_4/Z. Rappelons que B_4/Z est le mapping class group du disque à bord à 4 points marqués et qu'il existe une injection

$$\Gamma_{0,5} \hookrightarrow B_4/Z$$

d'image dans le quotient du groupe de tresses pur, où le bord du disque s'identifie à un point fixe de la sphère. On obtient ainsi le groupe $H = \Gamma_{0,5} \subset \Gamma_{1,[2]}$ souhaité.

Proposition 3.2.7. *Soit $H = \Gamma_{0,5}$ sous-groupe de $\Gamma_{1,[2]}$ et g élément de torsion d'ordre premier de $\Gamma_{1,[2]}$. Alors H est sans torsion, le groupe $G = H \rtimes \langle g \rangle$ est bon et $\widehat{G}$ vérifie la propriété $(\star)$ relativement à une famille finie de sous-groupes discrets de G.*

Démonstration. Le pur mapping class group $\Gamma_{0,5}$ est bon, ce qui entraine la bonté de G, et il est sans torsion.

Notons p l'ordre premier de g. Par un raisonnement identique à celui effectué dans la proposition 3.1.5 pour $\Gamma_{0,n} \rtimes \langle g \rangle$, le groupe $G \subset \Gamma_{1,[2]}$ admet un nombre fini de classes de conjugaison d'ordre p [1]. On conclut alors en appliquant le corollaire 2.2.10. □

Un raisonnement similaire à ceux déjà effectués conduit alors à l'action annoncée du groupe de Grothendieck-Teichmüller sur la torsion algébrique d'ordre premier.

Proposition 3.2.8. *Le groupe de Grothendieck-Teichmüller agit par conjugaison et élévation à la puissance λ sur la torsion d'ordre 2 et 3 de $\widehat{\Gamma}_{1,[2]}$.*

Démonstration. Soit $\gamma \in \widehat{\Gamma}_{1,[2]}$ un élément de torsion d'ordre premier et $F = (\lambda, f) \in \widehat{GT}$. Considérant l'ordre de γ, alors $F(\gamma)$ est conjugué à une puissance de γ d'après la proposition 3.2.7, i.e.

$$F(\gamma) = g\gamma^k g^{-1}$$

où $g \in \Gamma_{1,[2]}$ et $k \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$ est une puissance à déterminer pour chacun des éléments de torsion.

Supposons que $\gamma \in \widehat{\Gamma}_{1,2}$. À partir de la présentation $\Gamma_{1,2} \simeq B_4/Z$, on obtient $\Gamma_{1,2}^{ab} \simeq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Les éléments de torsion du groupe pur ne chutent donc pas d'ordre dans l'abélianisé. Un raisonnement similaire à ceux déjà effectués sur l'expression de l'action de $\widehat{GT}$ sur les générateurs de tresses permet d'identifier $k = \lambda$.

Pour $\gamma = \tau \in \Gamma_{1,[2]} - \Gamma_{1,2}$ calculons $F(\tau)$. Puisque l'action de $\widehat{GT}$ préserve les permutations, alors $k = 1 \mod 2$. De plus $\lambda \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$ est donc inversible modulo tout nombre premier, ce qui conclut la preuve. □

Abordons l'origine géométrique de la relation entre pur mapping class group $\Gamma_{1,2}$ et groupe de tresses. Considérant comme dans la section précédente une courbe elliptique

1. Ceci provient du nombre fini de classes de conjugaisons de torsion de $\Gamma_{1,[2]}$, qui découle par exemple de Riemann-Hurwitz – voir théorème 4.3.1

donnée par quatre points de ramification $(0, 1, \infty, \lambda)$. On peut supposer que les deux points marqués P_1 et P_2 sur la courbe sont dans la même fibre d'un point $\mu \in \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ (voir par exemple [Har77], lemme 4.2). Une classe d'isomorphisme d'une telle courbe elliptique est donc donnée par deux paramètres $\lambda \neq \mu$ modulo l'action de $\mathfrak{S}_3$. On identifie ainsi

$$\mathcal{M}_{1,2} \simeq \mathfrak{S}_3 \backslash\backslash ((\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\})^2 - \Delta)$$

où Δ désigne la diagonale grasse. Rappelons que par un raisonnement similaire à celui mené pour $\mathcal{M}_{0,4}$, l'espace de modules $\mathcal{M}_{0,5}$ admet l'identification

$$\mathcal{M}_{0,5} \simeq (\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\})^2 - \Delta$$

On obtient ainisi les morphismes suivant entre espaces de modules

$$\mathcal{M}_{1,2} \twoheadrightarrow \mathcal{M}_{0,[5]} := \mathfrak{S}_5 \backslash\backslash \mathcal{M}_{0,5}$$

qui induit entre groupes fondamentaux orbifold le morphisme

$$\Gamma_{1,2} \twoheadrightarrow \Gamma_{0,[5]}.$$

3.2.3 Rotations de $\mathcal{M}_{0,[n]}$ et $\mathcal{M}_{1,[n]}$, action de $\widehat{GS}$

Nous traitons ici le cas d'un élément de torsion de $\widehat{\Gamma}_{1,[n]}$ particulier. Celui-ci, totalement différent des éléments elliptiques rencontrés précédemment puisqu'il n'admet aucun point fixe sur la surface, généralise l'élément $\tau \in \Gamma_{1,[2]}$. On montre que l'élément provient du genre zéro. Sa réalisation géométrique correspond à une rotation passant par le trou du genre du tore qui agit sur une distribution cyclique des n points marqués de la surface.

À la différence des cas précédents, il est nécessaire de considérer l'action du groupe $\widehat{GS}$ – voir définition 1.2.2.

Proposition 3.2.9. *Soit $\varepsilon_{n-2} \in \widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ élément de torsion d'ordre $n-2$. Considérons le morphisme*

$$\begin{aligned} \psi : \widehat{\Gamma}^2_{0,n-2} &\to \widehat{\Gamma}_{1,[n-2]} \\ b_i &\mapsto b \qquad 1 \leqslant i \leqslant 2 \\ \sigma_i &\mapsto \tau_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-2 \end{aligned}$$

Alors $r_{n-2} := \psi(\varepsilon_{n-2})$ est un élément d'ordre $n-2$ de $\widehat{\Gamma}_{1,[n-2]}$.

Rappelons que $\Gamma^b_{g,n}$ désigne le pure mapping class group associé à la surface $S^b_{g,n}$ de genre g à n points marqués et b bords.

Démonstration. L'application ψ est bien un morphisme de groupe puisqu'elle est définie entre des générateurs des mapping class groups et que les relations entre eux sont bien respectées : les σ_i vérifient entre eux des relations de tresses et les twists b_i commutent avec tous les générateurs de tresses.

On remarque ensuite que puisque ε_{n-2} fixe les deux points marqués des pôles de la sphère, alors $\varepsilon_{n-2} \in \widehat{\Gamma}^2_{0,n-2}$. Enfin le morphisme $\psi : \widehat{\Gamma}^2_{0,n-2} \to \widehat{\Gamma}_{1,[n-2]}$ est de noyau $Ker(\psi) = \widehat{\mathbb{Z}}^2$ engendré par les deux twists de bord entourant les pôles b_1 et b_2. Ainsi $\varepsilon^k_{n-2} \notin Ker(\psi)$ pour tout $k < n-2$ et r_n est bien d'ordre $n-2$ dans $\widehat{\Gamma}_{1,[n-2]}$. □

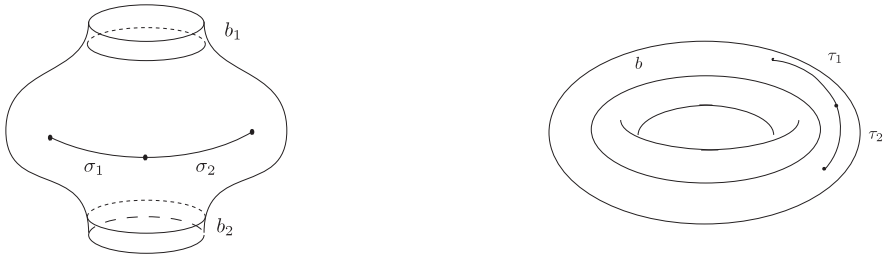


FIGURE 3.4: Rotation en genre zéro et un pour $n = 3$.

L'expression de l'action de $\widehat{GS}$ sur cet élément r_n de $\widehat{\Gamma}_{1,[n]}$ est alors immédiat pour peu que l'ordre de l'élément soit premier. On considère donc p un nombre premier divisant n et posons $a = n/p$. Nous sommes maintenant en mesure de calculer l'action de $\widehat{GS}$ sur r^a_n dans $\widehat{\Gamma}_{1,[n]}$.

Proposition 3.2.10. *Soit $F \in \widehat{GS}$. Alors F agit sur r^a_n par conjugaison et élévation à la puissance λ*

$$F(r^a_n) = g r^{a\lambda}_n g^{-1}$$

où $g \in \widehat{\Gamma}_{1,[n]}$.

Démonstration. Soit $F \in \widehat{GS}$. D'après la proposition précédente l'élément $r^a_n \in \widehat{\Gamma}_{1,[n]}$ se relève en l'élément $\varepsilon^a_n \in \widehat{\Gamma}^2_{0,[n+2]}$ d'ordre $p = n/a$ par le morphisme ψ.

On vérifie alors sur le système de générateurs que le carré suivant commute à conjugaison près

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Gamma}^2_{0,[n+2]} & \xrightarrow{\psi} & \widehat{\Gamma}_{1,[n]} \\ \Big\downarrow F & & \Big\downarrow F \\ \widehat{\Gamma}^2_{0,[n+2]} & \xrightarrow{\psi} & \widehat{\Gamma}_{1,[n]} \end{array}$$

où l'action de la première colonne est définie en genre zéro dans le théorème 1.2.1 et celle de la seconde colonne dans le théorème 1.2.6.

Suivant l'action de $\widehat{GT}$ sur les éléments de torsion d'ordre premier en genre zéro du début de chapitre on a

$$F(\varepsilon_n^a) = g\varepsilon_n^{a\lambda}g^{-1},$$

et d'après le diagramme commutatif précédent, on en déduit

$$F(r_n^a) = h\psi(g)\, r_n^{a\lambda}\, \psi(g)^{-1}h^{-1}$$

qui est le résultat annoncé. □

Remarque.

1. Le calcul de cette action par abélianisation comme précédemment échoue puisqu'il s'avère que $r_n^{ab} = 1$.
2. De la même façon que $\Gamma_{0,[n]}$ ne vérifie pas la propriété $(\star)$ – ce qui présente un obstacle à déterminer les classes de conjugaisons de la torsion algébrique *d'ordre quelconque*, l'approche par propriété $(\star)$ ne permet pas de déterminer les sous-groupe des rotations de $\widehat{\Gamma}_{1,[n]}$ d'ordre quelconque.

Dans le chapitre suivant, nous généralisons de manière systématique l'étude de cette action sur la torsion des mapping class groups en genre un.

⋆

⋆ ⋆

4

Espaces de modules de courbes $\mathcal{M}_{1,[n]}$

4.1. Généralités elliptiques, le cas $\mathcal{M}_{1,1}$ 70
4.1.1. Généralités sur la ramification 70
4.1.2. Torsion de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,1})$ et action de $\widehat{GS}$ 71
4.2. Le cas de l'espace de modules $\mathcal{M}_{1,[3]}$ 73
4.2.1. Éléments de torsion de $\Gamma_{1,[3]}$, détermination complète des classes de conjugaison 74
4.2.2. La torsion de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,[3]})$ 78
4.2.3. Action de $\widehat{GS}$ sur la torsion 80
4.3. Le cas général, espace des modules $\mathcal{M}_{1,[n]}$ 81
4.3.1. La torsion du groupe discret $\Gamma_{1,[n]}$, $n \geqslant 3$ 82
4.3.2. La torsion d'ordre premier de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,[n]})$, action de $\widehat{GS}$ 85

Nous abordons dans ce chapitre le cas des espaces de modules de genre un, en partie traité dans le chapitre précédent. Nous généralisons les résultats du chapitre précédent à tous les espaces de modules $\mathcal{M}_{1,[n]}$ en considérant les cas inaccessibles par les méthodes du genre zéro. Plus exactement nous établissons que

> *La torsion d'ordre premier de $\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{1,[n]})$ est purement géométrique et l'action du groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GS}$ est donnée par conjugaison et élévation à la puissance λ.*

L'approche employée est similaire à celle du chapitre précédent : nous établissons qu'un sous-groupe du mapping class group $\Gamma_{1,[n]}$ vérifie la propriété $(\star)$ afin de ramener la situation de $\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{1,[n]})$ à celle discrète de $\pi_1^{orb}(\mathcal{M}_{1,[n]})$.

Dans un premier temps, nous établissons le résultat pour l'espace de modules $\mathcal{M}_{1,1}$ – déjà obtenu dans la section 3.2.1 – sans référence au groupe de tresses d'Artin, mais en utilisant les propriétés des automorphismes de courbes elliptiques restrancrite dans le cadre du mapping class group $\Gamma_{1,[n]}$. Cette section contient quelques rappels généraux sur le *théorème de réalisation de Nielsen* qui permettent de souligner la différence de richesse de structure entre genres zéro et un : là où un point de $\mathcal{M}_{0,[n]}$ est uniquement repéré par les coordonnées de ses points marqués – puisque la sphère n'admet qu'une unique structure

analytique, un point de $\mathcal{M}_{1,[n]}$ dépend de l'une des trois types de structure analytique dont peut être muni le tore – voir proposition 4.1.2.

Par ailleurs, ceci prépare à la caractérisation des classes de conjugaison de torsion de $\Gamma_{1,[n]}$ en terme d'automorphismes de surfaces de Riemann.

Dans la section deux, nous présentons à partir de l'étude détaillée de l'espace de modules $\mathcal{M}_{1,[3]}$ comment s'agencent *en toute généralité* les différents résultats et méthodes abordés jusqu'ici : l'égalité de Riemann-Hurwitz pour déterminer la torsion ou bien la dichotomie entre rotation issue du genre zéro et éléments elliptiques. On en profite pour souligner de quelle façon se traduit la richesse combinatoire du genre un par rapport au genre zéro.

Dans la section trois, la reprise de ces résultats dans le cas général de l'espace de modules $\mathcal{M}_{1,[n]}$ conclut notre étude.

4.1 Généralités elliptiques, le cas $\mathcal{M}_{1,1}$

Après des rappels rapides sur l'action conforme de groupes finis sur les surfaces de Riemann, nous reprenons de manière intrinsèque et sans référence au genre zéro les résultats, déjà établis dans le chapitre précédent, sur la torsion de $\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{1,1})$ et l'action de $\widehat{GS}$ sur celle-ci.

4.1.1 Généralités sur la ramification

Considérons un groupe G agissant sur une surface $S_{g,n}$, alors G se réalise comme sous-groupe du mapping class group $\Gamma_{g,[n]}$. Dans le cas des groupes finis, la réciproque fait l'objet du *problème de réalisation de Nielsen*, résolu par J. Nielsen [Nie27] dans le cas des groupes cycliques – et dans [Ker83] par S. P. Kerckhoff dans le cas général. Plus exactement

> *Tout sous-groupe fini d'un mapping class group $\Gamma_{g,[n]}$ se réalise comme groupe d'automorphismes d'une surface hyperbolique.*

Prenons le cas de la sphère topologique. Suivant une application du théorème de Riemann-Roch, celle-ci admet une unique structure analytique, admettant $PSL_2(\mathbb{C})$ comme groupe d'automorphismes. Les groupes cycliques finis sont les rotations traitées dans le chapitre précédent.

Dans le cas général, il existe ainsi une surface de Riemann à points marqués $S_{g,n}$ sur laquelle G agit de manière conforme. On note $S_{\tilde{g},m} = S_{g,n}/G$ la surface quotient obtenue, de genre $\tilde{g}$ et à m points marqués.

Les caractéristiques d'Euler de ces surfaces sont reliées par la formule de Riemann-Hurwitz rappelée ci-dessous

$$2g - 2 + n = k(2\tilde{g} - 2 + m) + k\sum_{ell}(1 - 1/e_x) \tag{4.1.1}$$

où k est l'ordre de G et e_x est l'indice de ramification elliptique d'un point $x \in S_{\tilde{g},m}$.

Conformément aux pratiques usuelles, on nomme *signature* associée à l'action d'un tel groupe G sur une surface $S_{g,n}$ les données

$$\Sigma_G = (\tilde{g}, m, \{m_1, \cdots, m_r\})$$

où les *données de ramification* désigne le r-plet $\{m_1, \cdots, m_r\}$).

D'autre part, considérons la surface et l'application quotient

$$S_{g,n} \to S_{g,n}/G$$

sous le revêtement universel, que l'on peut supposer isomorphe à $\mathcal{H}$ dès lors que $S_{g,n}$ est hyperbolique. Il existe alors un groupe Fuchsien $\Gamma \simeq \pi_1^{top}(S_{g,n}/G)$ qui admet la présentation

$$\Gamma \simeq \frac{\langle \alpha_i, \beta_i, \gamma_j \rangle_{\ 1\leqslant i\leqslant \tilde{g},\ 1\leqslant j\leqslant r}}{\langle \prod[\alpha_i, \beta_i] \prod \gamma_j = 1, \gamma_j^{m_j} = 1 \rangle}$$

De ceci, il découle que la signature d'un groupe est une donnée nécessaire dans la classification des classes de conjugaison.

Proposition 4.1.1. *Soient $G, G' \subset \Gamma_{g,[n]}$ deux sous-groupes finis, supposés de même ordre, agissant sur une surface $S_{g,n}$. Si les signatures Σ_G et $\Sigma_{G'}$ sont distinctes, alors les groupes G et G' ne sont pas conjugués dans la mapping class group.*

Notons ici que cette approche par générateurs de tels groupes Γ, ou plus exactement de morphismes surjectifs $\Gamma \to G$ a conduit à la notion de *vecteurs générateurs*. Celle-ci a permis à J. Gilman [Gil76] de dénombrer les classes de conjugaison des automorphismes d'ordre premier, puis à S. A. Broughton [Bro90a], d'établir la liste exhaustive des groupes finis agissant sur une surface S_g *sans point marqué* de genre $g \geqslant 2$.

Dans cette classification, on constate que cet invariant de classes de vecteurs générateurs permet de distinguer des groupes non-conjugués et de signatures identiques.

4.1.2 Torsion de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,1})$ et action de $\widehat{GS}$

D'après Nielsen, un élément γ de torsion de $\Gamma_{1,1}$ correspond à un automorphisme de courbe elliptique. À la différence de la sphère, le tore admet différentes structure analytiques, et les automorphismes de structures possibles se regroupent selon trois possibilités que l'on rappelle ici.

Proposition 4.1.2. *Soit X une surface analytique de genre 1. Alors*

$$Aut(X) = T \rtimes G_0$$

où T est le groupe des translations par un point du tore et G_0 est le groupe des automorphismes fixant au moins un point.

Selon la structure analytique, le groupe G_0 s'identifie au groupe cyclique $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4$ ou $\mathbb{Z}_6$ selon que l'invariant $j \in \mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$ est respectivement différent de 0 et 12^3, égal à 12^3 ou égal à 0.

Dans cette section, nous retrouvons le résultat d'action du groupe de Grothendieck-Teichmüller sur la torsion de la proposition 3.2.4. Nous calculons la puissance λ en exprimant les éléments en termes de twists de Dehn, ce qui sera généralisé par la suite. Les expressions suivantes sont bien connues depuis Dehn lui-même [Deh87].

Proposition 4.1.3. *Soit $\gamma \in \Gamma_{1,1}$ un élément de torsion d'ordre fini. Alors γ est conjugué à une puissance de*

$$\gamma_4 = \alpha\beta\alpha \qquad \gamma_6 = \alpha\beta,$$

où α et β sont les générateurs de $\Gamma_{1,1}$ – voir figure 4.1. On a d'autre part les relations

$$\gamma_2 = \gamma_4^2 \qquad \gamma_6 = \gamma_4^2\gamma_3^{-1},$$

où γ_k est un élément d'ordre k.

Les relations entre éléments de torsion découlent directement de relations de tresses entre twists. Les familles des groupes finis maximaux de $\Gamma_{1,1}$ s'obtiennent à partir des groupes finis d'automorphismes courbes elliptiques et des relations de la proposition précédente.

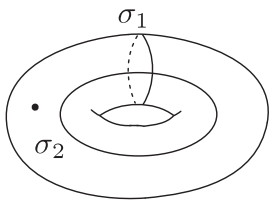


FIGURE 4.1: Twists générateurs de $\Gamma_{1,1}$

Utilisons maintenant les expressions en twists de la proposition précédente pour retrouver la preuve de la proposition 3.2.4 du chapitre précédent. Nous menons uniquement le calcul de la puissance λ, calcul qui sera repris dans le cas général.

Démonstration de 3.2.4. Soient $\gamma \in \widehat{\Gamma}_{1,1}$ un élément de torsion d'ordre premier et $F \in \widehat{GS}$. On a déjà établit dans la première démonstration qu'il existe $g \in \widehat{\Gamma}_{1,1}$ et $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$ tels que

$$F(\gamma) = g\gamma^k g^{-1}.$$

À partir de la présentation de $\Gamma_{1,1}$ rappelée, on identifie l'abélianisé $\Gamma_{1,1}^{ab} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, groupe cyclique engendré par β^{ab} image du twist β – ou de n'importe quel twist le long

d'une courbe non-séparante, puisqu'ils sont tous conjugués d'après la classification des surfaces. En remarquant que $\beta = \gamma_3\gamma_4^{-1}$, on obtient la décomposition

$$\Gamma_{1,1}^{ab} = \langle \gamma_3^{ab} \rangle \times \langle \gamma_4^{ab} \rangle.$$

Ainsi, les éléments de torsion gardent même ordre dans l'abélianisé.

Utilisant le fait que l'action du groupe passe à l'abélianisé, la forme a priori $F(\gamma) = g\gamma^k g^{-1}$ devient ainsi

$$F(\gamma)^{ab} = (\gamma^{ab})^k \tag{4.1.2}$$

Calculons cette expression ainsi que le membre de gauche de l'égalité précédente pour chacun des éléments de torsion.

Pour $\gamma_3 = \alpha\beta\alpha\beta$, on obtient ainsi $\gamma_3^{ab} = \beta^4$, et puisque $\widehat{GS}$ agit par conjugaison et élévation à la puissance λ sur les twists le long de courbes fermées simples (voir théorème 1.2.6 du chapitre 1), alors $F(\gamma_3^{ab}) = \beta^{4\lambda}$. L'égalité 4.1.2 dans $\Gamma_{1,1}^{ab}$ devient alors $\beta^{4k} = \beta^{4\lambda}$ qui se réduit à

$$k = \lambda \mod 3$$

et termine le cas de γ_3.

On conclut de manière similaire pour $\gamma_2 = (\alpha\beta)^3$, le calcul de l'action sur γ_2 se réduisant dans ce cas à l'équation

$$k = \lambda \mod 2.$$

□

Au lieu d'aborder le cas de $\Gamma_{1,[2]}$, dont nous avons développé la relation avec les groupes de tresses d'Artin dans le chapitre précédent, nous traitons maintenant le cas de $\Gamma_{1,[3]}$ première composante de genre un à ne pas possèder cette propriété.

4.2 Le cas de l'espace de modules $\mathcal{M}_{1,[3]}$

Nous abordons le cas de l'espace de modules $\mathcal{M}_{1,[3]}$ et du mapping class group associé, première pièce de la tour des espaces de modules de genre un à points marqués pour lequel on ne dispose pas d'une présentation en terme de tresses d'Artin, et qui en ce sens ne provient pas du genre zéro.

	γ	Signature (Σ_γ)	Nombre de points fixes	Groupe fini maximal
ordre 2	$\gamma_{2,p}$	$(0,3,\{2\})$	3	$\mathbb{Z}_4$ et $\tilde{C}_6$
	γ_2	$(0,2,\{2,2,2\})$	1	D_6 et C_6
ordre 3	$\gamma_{3,p}$	$(0,3,\varnothing)$	3	C_6
	γ_3	$(0,1,\{3,3,3\})$	0	$\tilde{C}_6$
ordre 3	r_3	$(1,1,\varnothing)$	0	D_6
ordre 4	γ_4	$(0,2,\{4\})$	1	$\mathbb{Z}_4$
ordre 6	γ_6	$(0,2,\{2\})$	1	C_6
	$\tilde{\gamma}_6$	$(0,1,\{3,6\})$	0	$\tilde{C}_6$

TABLE 4.1: Torsion de $\Gamma_{1,[3]}$.

4.2.1 Éléments de torsion de $\Gamma_{1,[3]}$, détermination complète des classes de conjugaison

D'après le théorème de réalisation de Nielsen, les classes de conjugaison des éléments de torsion se classifient par Riemann-Hurwitz. Avant toute chose, nous aurons besoin du lemme suivant, conséquence immédiate de la formule de Riemann-Hurwitz 4.1.1.

Proposition 4.2.1. *Soit $\gamma \in \Gamma_1$ d'ordre fini. Alors γ est sans point fixe si et seulement si le genre $\tilde{g}$ de la surface quotient est égale à 1.*

Un tel élément correspond plus exactement à la translation par un point du tore, c'est-à-dire une des rotations vues au chapitre précédent.

Proposition 4.2.2. *Soit $\gamma \in \Gamma_{1,[3]}$ un élément de torsion. Alors γ est conjugué à l'un des huit éléments du tableau 4.1.*

Démonstration. Considérant des modèles topologiques distincts pour réaliser chaque automorphisme, il s'avère que la signature Σ_γ suffit à caractériser les classes de conjugaison. Cette caractérisation des signatures repose sur la formule de Riemann-Hurwitz (4.1.1) ainsi que sur le dénombrement des points dont les groupes d'inertie ont même cardinal.

Considérons $\gamma \in \Gamma_{1,[3]}$ un élément de torsion et raisonnons selon le nombre de points fixes de ce dernier.

Supposons que γ n'admet aucun point fixe. Dans ce cas $\tilde{g} = 1$ d'après la proposition 4.2.1 et la formule de Riemann-Hurwitz devient

$$3 = k\ m + k \sum_{ell} (1 - 1/e_x). \tag{4.2.1}$$

Ceci implique immédiatement $ord(\gamma) = 3$ ainsi que la signature $\Sigma_\gamma = (1, 1, \varnothing)$. Cet élément γ correspond à la rotation passant par le trou du tore.

Supposons maintenant que γ admet au moins un point fixe. Alors $\tilde{g} = 0$ et $ord(\gamma) \in \{2, 3, 4, 6\}$ puisque γ est un automorphisme de courbe elliptique. Un ordre étant fixé, notons r_q le nombre de points elliptiques d'ordre q, divisant $k = ord(\gamma)$, de la surface quotient $S_{\tilde{g},m}$. La formule de Riemann-Hurwitz devient alors

$$\frac{k}{2}r_2 + 2\frac{k}{3}r_3 + 3\frac{k}{4}r_4 + 5\frac{k}{6}r_6 = k(2 - m) + 3$$

équation à coefficients entiers positifs dont on cherche les solutions entières positives en (r_2, r_3, r_6) pour chaque couple (k, m) fixé, où $0 \leqslant m \leqslant 3$.

Le tableau 4.1 récapitule l'ensemble de ces solutions en terme d'ordres, de signatures et de nombres de points fixes.

En ce qui concerne l'unicité de chacune des classes de conjugaison, celle-ci provient de ce qu'il n'existe pour chaque signature, qu'une unique distribution topologique des points marqués sur la surface pour réaliser l'automorphisme. □

La correspondance entre *réalisation géométrique* – voir les deux exemples généraux de la page 83, et conjugaison se justifie alors par un raisonnement similaire à celui effectué dans le cas du genre zéro dans le chapitre précédent – voir théorème 3.1.1 : pour une signature fixée, on se ramène par conjugaison à un unique modèle standard géométrique de distributions des points sur le tore. À la différence du genre zéro, aux deux types de structures analytiques dont peut être muni le tore correspondent deux modèles d'automorphismes – voir encore page 83.

Les automorphismes r_3 et γ_3, bien qu'admettant des modèles géométriques identiques, ne sont pas conjugués car de signatures de type $(1, --)$ et de type $(0, --)$ différentes (voir proposition 4.2.1).

Cette exemple d'ailleurs bien que, à la différence du genre zéro, le critère de permutation des points n'est à lui seul plus suffisant pour distinguer les classes de conjugaison.

De manière similaire au cas de $\Gamma_{1,1}$, déterminons maintenant l'expression des éléments de torsion d'ordre premier en termes de twists de Dehn – voir la présentation 1.1.5 du chapitre 1 [1]. Cette proposition ne sera pas nécessaire par la suite.

1. * dessin presentation

Proposition 4.2.3. *Soit $\gamma_{i,(p)} \in \Gamma_{1,[3]}$ un élément de torsion du le tableau précédent d'ordre différent de 4 et 6. Alors $\gamma_{i,(p)}$ est conjugué à l'une des expressions en twists suivantes*

$$\gamma_{2,p} \sim a_1 b a_2 b a_3 b \qquad \gamma_2 \sim (a_3 b a_1)^2 \tau_2^{-1}$$
$$\gamma_{3,p} \sim a_1 a_2 a_3 b \qquad \gamma_3 \sim (a_3 b)^2 (\tau_1 \tau_2)^{-1} \qquad r_3 \sim a_3 a_2^{-1} b a_2 a_3^{-1} \tau_2 \tau_1 b^{-1}$$

Pour démontrer ces expressions, nous aurons besoin des relations générales suivantes.

Proposition 4.2.4. *Considérant des twists dont les supports sont dans les configurations des figures 4.2. Ils vérifient les relations suivantes*

1. *Relation étoile*
$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta)^3 = \tau_{\partial(a_1,a_2,a_3,b)}; \qquad (\star)$$
2. *Relation de type* $(1,1)$
$$(\alpha_i \beta)^6 = \delta \qquad (T_I)$$
3. *Relation de type* $(1,2)$
$$(\alpha_i \beta \alpha_j)^4 = \tau_k^2 \qquad (T_{II})$$

Remarque. Ces relations étendent la relation $(\tau_\alpha \tau_\beta)^6 = \tau_{\partial(\alpha,\beta)}$ portée sur le tore à un bord – voir [Deh87], comme on peut le voir en considérant les morphismes successifs d'effacement de points entre pure mapping class groups

$$\Gamma_{1,3} \to \Gamma_{1,2} \to \Gamma_{1,1}.$$

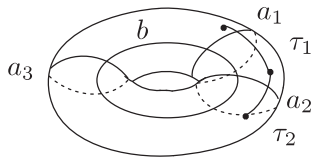


FIGURE 4.2: Générateurs de $\Gamma_{1,[3]}$.

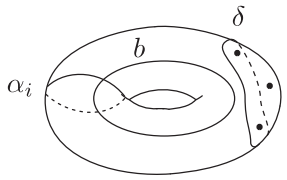


FIGURE 4.3: Relation $(1,1)$.

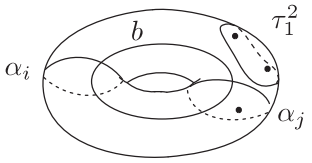


FIGURE 4.4: Relation $(1,2)$.

Démonstration de la proposition 4.2.3. Il suffit de vérifier les ordres et les permutations des éléments donnés.

Ordre 2. L'élément $a_1 b a_2 b a_3 b$ est pur et des transformations de tresses montrent que

$$(a_1 b a_2 b a_3 b)^2 = (a_1 a_2 a_3 b)^3$$

l'expression de droite n'étant autre que la relation étoile. Ainsi $\gamma_{2,p} \sim a_1 b a_2 b a_3 b$.

L'élément $(a_3ba_1)^2\tau_2^{-1}$ fixe un point, et puisque $(a_3ba_1)^4 = \tau_2^2$ par la relation (T_{II}), il est d'ordre 2. Il induit la permutation (23). Ainsi $\gamma_2 \sim (a_3ba_1)^2\tau_2^{-1}$.

Ordre 3. L'élément $a_1a_2a_3b$ est pur et d'ordre 3 d'après la relation $(\star)$. D'où $\gamma_3 = a_1a_2a_3b$.
L'élément $(a_3b)^2(\tau_1\tau_2)^{-1}$ induit la permutation (123). D'après la relation (T_I) on a $(a_3b)^6 = d$ et il suffit donc de vérifier que $(\tau_1\tau_2)^3 = d$. Une relation de tresse donne

$$(\tau_1\tau_2)^3 = \tau_1\tau_2^2\tau_1^{-1}\cdot\tau_1^2\cdot\tau_2^2$$

où l'on identifie une relation de lanterne supportée par τ_1^2, τ_2^2 et δ. Il en découle la relation cherchée

$$\tau_1\tau_2^2\tau_1^{-1}\cdot\tau_1^2\cdot\tau_2^2 = d,$$

ainsi que $\gamma_{3,p} = (a_3b)^2(\tau_1\tau_2)^{-1}$.
Le cas de la rotation $r_3 = a_3a_2^{-1}ba_2a_3^{-1}\tau_2\tau_1b^{-1}$ est plus délicat. Notant $A = a_3a_2^{-1}ba_2a_3^{-1}$, twist qui commute avec b (voir figure 4.5) ainsi qu'avec τ_1, on obtient

$$r^3 = (A\tau_2A\tau_2)(\tau_1\tau_2A\tau_1\tau_2)b^{-3} \tag{4.2.2}$$

Introduisant $B = \tau_1\tau_2A\tau_1\tau_2$, on identifie alors la relation de lanterne suivante

$$A\tau_2A\tau_2 = bB.$$

On vérifie d'autre part sur les générateurs du premier groupe d'homologie que

$$\tau_1\tau_2A\tau_1\tau_2 = b^2B^{-1}.$$

Substituant ces relations dans l'équation (4.2.2), on obtient bien $r^3 = 1$.

□

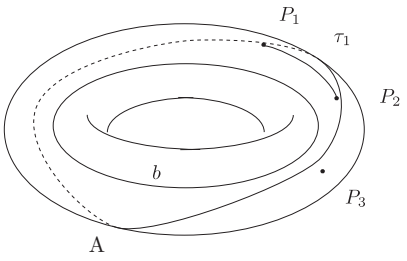


FIGURE 4.5: Twist A.

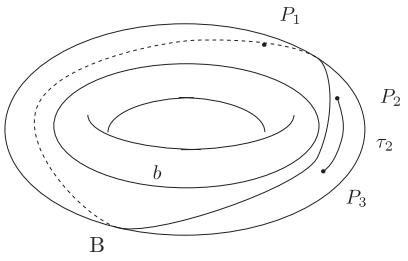


FIGURE 4.6: Twist B.

L'élément r_3 n'est autre que l'élément provenant d'une rotation de genre zéro déjà considéré dans la section 3.2.3 du chapitre précédent.

Par ailleurs, puisque les twists le long de courbes séparantes et les twists le long de courbes non-séparantes forment deux classes de conjugaisons distinctes, on remarque que les éléments d'ordre 3 sans point fixe r_3 et γ_3 ne peuvent pas être conjugués, puisqu'ils stabilisent respectivement la courbe d séparante, et la courbe b non-séparante (voir figure 4.4).

4.2.2 La torsion de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,[3]})$

Dans cette section, nous établissons que $\Gamma_{1,[3]}$ ne vérifie pas la propriété $(\star)$ relativement à ses sous-groupes maximaux.

Rappelons les identifications entre le groupe orbifold discret et le groupe fondamental algébrique champêtre

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{M}_{1,[3]}) \simeq \Gamma_{1,[3]} \qquad \pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{1,[3]}) \simeq \widehat{\Gamma}_{1,[3]}.$$

Dans le cas de l'espace de modules $\mathcal{M}_{1,1}$ nous disposons d'une description géométrique orbifold

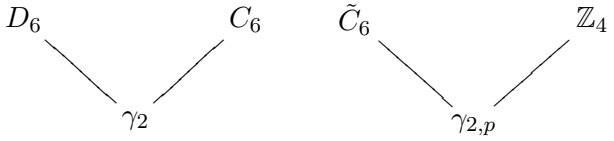
$$\mathcal{M}_{1,1} \simeq (\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{S}_3) \backslash\backslash (\mathbb{P} - \{0, 1, \infty\})$$

à partir de laquelle un théorème de Van Kampen orbifold identifie le groupe fondamental $\pi_1^{orb}(\mathcal{M}_{1,1})$ comme 1-produit amalgamé – voir par exemple [Zoo01]. Nous ne disposons plus d'une telle description dans le cas de $\mathcal{M}_{1,[3]}$.

La liste des éléments de torsion montre par ailleurs qu'il n'est pas possible d'exprimer le mapping class group $\Gamma_{1,[3]}$ comme produit amalgamé à partir des mapping class groups de dimension inférieure $\Gamma_{0,4}$, $\Gamma_{0,5}$, $\Gamma_{1,1}$ et $\Gamma_{1,2}$. Le théorème de J. P. Serre de [Ser03] concernant le produit amalgamé n'est donc pas applicable pour classifier les classes de conjugaisons d'éléments de torsions géométriques.

Utilisant des modèles de courbes elliptiques marquées, on établit la liste des groupes finis maximaux de $\Gamma_{1,[3]}$ suivante.

Proposition 4.2.5. *Les groupes finis maximaux de $\Gamma_{1,[3]}$ sont, à conjugaison près, les groupes cycliques $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_6$ et le groupe diédrale D_6. Ils contiennent les éléments de torsion tel que décrit dans le tableau 4.1, où l'on a noté C_6 et $\tilde{C}_6$ des groupes isomorphes à $\mathbb{Z}_6$ et non-conjugués.*



Ainsi la famille $\{G_i\} = \{D_6, \mathbb{Z}_4, C_6, \tilde{C}_6\}$ constituée d'un représentant de chaque classe de conjugaison des groupes maximaux de $\Gamma_{1,[3]}$ ne vérifie pas $(\star)$ puisqu'il existe des intersections non-vides.

Établissons maintenant la proposition précédente. Comme rappelé dans la preuve de la proposition 4.2.2, un élément du mapping class group est induit par un automorphisme du tore et *géométriquement réalisé* par le choix des coordonnées des points marqués. Dans la preuve suivante, nous identifions les éléments de torsion à de telles réalisations afin de déterminer les classes de conjugaison des groupes finis maximaux de $\Gamma_{1,[3]}$.

Démonstration. Soit X une surface de genre 1. Fixons O_1 un point de manière à la munir d'une structure de courbe elliptique. On distingue alors trois cas.

Cas $Aut_0(X) \simeq \mathbb{Z}_6$. Notons ψ_6, ψ_3 et ψ_2 respectivement les éléments d'ordre 6, 3 et 2. Utilisant le modèle $\mathcal{E} : y^2 = x^3 - 1$, on exprime ces automorphismes en coordonnées sur $\mathcal{E}$, ce qui permet d'obtenir les propriétés suivantes :

- L'automorphisme ψ_2 fixe trois points $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ en plus de l'origine et permute les autres points deux à deux. Selon le marquage, on réalise $\gamma_{2,p}$ ou la rotation elliptique γ_2 ;
- L'automorphisme ψ_3 fixe trois points O_1, O_2 et O_3 et permute les trois points $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$. Selon le marquage choisi, on réalise ainsi $\gamma_{3,p}$ ou γ_3 ;
- L'automorphisme ψ_6 admet un unique point fixe O_1. On vérifie qu'il admet des orbites de points d'ordre 2 et 3, respectivement $\{P_1, P_2\}$ et $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$. En marquant ces orbites, on réalise respectivement γ_6 et $\tilde{\gamma}_6$.

Cas $Aut_0(X) \simeq \mathbb{Z}_4$. Par le même raisonnement que précédemment, on exprime l'automorphisme ψ_4 d'ordre 4 en coordonnées sur le modèle $y^2 = x(x^2 + 1)$. On vérifie alors qu'il admet deux points fixes O_1 et O_2 ainsi qu'une orbite d'ordre 2. Ceci réalise γ_4.

Cas $Aut_0(X) \simeq \mathbb{Z}_2$. L'involution échange les points de la surface deux à deux, exceptés quatres points fixes. On réalise alors γ_2 ou $\gamma_{2,p}$.

D'après ce qui précéde, on obtient les relations suivantes : puisque γ_6 permute deux points $\gamma_6^2 = \gamma_{3,p}$; puisque $\tilde{\gamma}_6$ permute trois points $\tilde{\gamma}_6^2 = \gamma_3$; et selon le même raisonnement $\tilde{\gamma}_6^3 = \gamma_{2,p}$, $\gamma_6^3 = \gamma_2$ et $\gamma_4^2 = \gamma_{2,p}$.

Considérons les groupes finis maximaux. Lorsque la réalisation géométrique d'un des automorphisme elliptique précédent admet un automorphisme associé à une translation du tore, le groupe maximal est isomorphe à un produit semi-direct

$$T_n \rtimes G_0.$$

Dans le cas contraire, c'est un groupe cyclique d'automorphismes de courbes elliptiques. Ainsi :

- La translation/rotation r_3 d'ordre 3 et la rotation elliptique γ_2 d'ordre 2 engendrent un groupe diédrale D_6 ;
- Les éléments elliptiques γ_6 et $\tilde{\gamma}_6$ engendrent tous les deux des groupes cycliques C_6 et $\tilde{C}_6$ isomorphes à $\mathbb{Z}_6$. Ces derniers ne sont pas conjugués puisqu'associés à des réalisations géométriques différentes. De plus, d'après les relations précédentes, $\gamma_{2,p}, \gamma_3 \in \tilde{C}_6$ et $\gamma_{3,p}, \gamma_2 \in C_6$;

– Enfin, l'élément γ_4 engendre un groupe cyclique isomorphe à $\mathbb{Z}_4$.
Ceci termine la preuve. □

4.2.3 Action de $\widehat{GS}$ sur la torsion

Utilisant les résultats cohomologiques du chapitre 2, nous allons établir à la section 4.3 que la torsion algébrique *d'ordre premier* dans $\widehat{\Gamma}_{1,[n]}$ pour $n \geqslant 3$ est géométrique (voir théorème 4.3.2). Admettons ce résultat pour le moment dans le cas $n = 3$ et passons au calcul de l'action de $\widehat{GS}$ sur la torsion de $\widehat{\Gamma}_{1,[3]}$. Nous verrons dans la section suivante que la preuve concentre toute la technique nécessaire et de façon suffisament générale pour être retranscrite dans le cas de n points marqués quelconques.

Théorème 4.2.6. *Soient $\gamma \in \widehat{\Gamma}_{1,[3]}$ de torsion d'ordre premier et $F \in \widehat{GS}$. Alors $\widehat{GS}$ agit par conjugaison et élévation à la puissance λ*

$$F(\gamma) = f\gamma^{\lambda}f^{-1}$$

où $f \in \widehat{\Gamma}_{1,[3]}$.

Démonstration. La preuve s'établit en considérant chaque classe de conjugaison d'éléments de torsion d'ordre premier. Puisque r_3 correspond à la rotation d'ordre 3 provenant de $\mathcal{M}^2_{0,[3]}$, l'action de $\widehat{GS}$ sur cet élément est traitée dans la proposition 3.2.10. Établissons le résultat pour les éléments elliptiques $\widehat{\Gamma}^{ell}_{1,[3]} \subset \widehat{\Gamma}_{1,[3]}$.

Soit donc $\gamma \in \widehat{\Gamma}^{ell}_{1,[3]}$ un élément elliptique de torsion d'ordre premier et $F \in \widehat{GS}$. Alors $F(\gamma)$ est de même ordre que γ et conjugué à un élément géométrique du tableau 4.1 selon le théorème 4.3.2. Puisque le groupe $\widehat{GS}$ préserve les permutations (voir théorème 1.2.6 du chapitre 1) on en déduit

$$F(\gamma) = f\gamma^{k}f^{-1} \tag{4.2.3}$$

pour $f \in \widehat{\Gamma}_{1,[3]}$ et où $k \in \widehat{\mathbb{Z}}$ est une puissance à déterminer.

Identifions cette puissance. Puisque les éléments de torsion étudiés sont elliptiques, ils fixent un point de la surface et l'on peut considérer, pour chaque automorphisme, le morphisme induit par l'effacement des points

$$\psi : \Gamma^{ell}_{1,[3]} \to \Gamma_{1,1}$$

où le point marqué est le point fixé. Ce morphisme préserve leur ordre puisque chacun d'eux est induit par l'automorphisme du tore correspondant.

Notant $\tilde{\gamma}$ l'image de γ par ψ, alors $F(\tilde{\gamma}) = g\tilde{\gamma}^{\lambda}g^{-1}$ d'après la proposition 3.2.3 dans $\mathcal{M}_{1,1}$. Comme précédemment, la commutativité du diagrame suivant

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{1,[n]} & \longrightarrow & \Gamma_{1,1} \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ \Gamma_{1,[n]} & \longrightarrow & \Gamma_{1,1} \end{array}$$

entraine l'égalité

$$\tilde{f}\tilde{\gamma}^k\tilde{f}^{-1} = g\tilde{\gamma}^\lambda g^{-1}$$

où le membre de gauche provient de la relation (4.2.3). On conclut que $k = \lambda$ en passant dans l'abélianisé $\widehat{\Gamma}^{ab}_{1,1}$. □

Terminons ce chapitre par une remarque comparant les méthodes utilisées en genres zéro et un pour obtenir le résultat principal. En genre zéro, l'isomorphisme du mapping class group avec un quotient du groupe des tresses d'Artin a permis l'expression explicite des éléments de torsions, et il a suffit de procéder par abélianisation pour identifier la puissance qui intervient dans l'action.

En genre un, ne disposant pas d'un tel isomorphisme en général, nous avons raisonné par effacement de points. On notera néanmoins que les deux approches sont reliées par le résultat suivant.

Proposition 4.2.7. *Le groupe abélianisé du* pur *mapping class group* $\Gamma_{1,n}$ *est indépendant du nombre* n *de points marqués*

$$\Gamma^{ab}_{1,n} \simeq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}.$$

Le groupe abélianisé du full *mapping class group* $\Gamma_{1,[n]}$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dans le cas du pure mapping class group, ce résultat peut s'obtenir directement à partir de la représentation de S. Gervais par exemple, ou bien justement en réduisant la proposition à $\Gamma_{1,1}$ par effacement de points.

L'identification de l'abélianisé du full mapping class group provient en réalité du résultat plus général suivant [Luo], où le pur mapping class group joue un rôle particulier.

Proposition 4.2.8. *Pour* $g > 0$ *considérons les morphismes* $\phi : \Gamma_{g,[n]} \to \Gamma_g$ *provenant du morphisme d'effacement de points, et* $\psi : \Gamma_{g,[n]} \to \mathfrak{S}_n$. *Alors les morphismes* ϕ *et* ψ *induisent un isomorphisme* $H_1(\Gamma_{g,[n]}) \simeq H_1(\Gamma_g) \oplus H_1(\mathfrak{S}_n)$.

Enfin, soulignons les limites de ces méthodes en ce qui concerne le genre supérieur. Pour un groupe G discret, le groupe d'homologie $H_1(G, \mathbb{Z})$ s'identifie à l'abélianisé $G^{ab} = G/[G, G]$. Dans [Mum67], D. Mumford a prouvé de manière géométrique que $H_1(\Gamma_2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, puis J. Powell dans [Pow78] que $H_1(\Gamma_g, \mathbb{Z}) = 0$ pour $g \geqslant 3$. De même que précédemment on en déduit les résultats identiques pour les pure et full mapping class groups à points marqués.

4.3 Le cas général, espace des modules $\mathcal{M}_{1,[n]}$

Nous établissons dans cette section l'expression de l'action de $\widehat{GS}$ sur les classes de conjugaison de torsion de $\widehat{\Gamma}_{1,[n]}$. L'approche est similaire à celle adoptée dans le cas de $\mathcal{M}_{1,[3]}$. On détermine dans un premier temps les classes de conjugaison de la torsion du groupe discret $\Gamma_{1,[n]}$. On établit montre ensuite que les classes de conjugaison de la

torsion profini correspondent aux classes de conjugaisons de ces éléments discrets grâce à la propriété $(\star)$. Enfin l'action de $\widehat{GS}$ sur cette torsion profini s'obtient suivant un raisonnement maintenant devenu usuel.

4.3.1 La torsion du groupe discret $\Gamma_{1,[n]}$, $n \geqslant 3$

Par rapport à $n = 3$, la complexité de la combinatoire pour un nombre de points quelconque se reflète dans le résultat suivant.

Théorème 4.3.1. *Les éléments de torsion du mapping class group $\Gamma_{1,[n]}$ se répartissent entre les classes de conjugaison distinctes du tableau 4.2, selon la congruence de n modulo* 12.

La méthode de démonstration généralise celle employée dans le cas de $\mathcal{M}_{1,[3]}$. Elle repose sur des utilisations de la formule de Riemann-Hurwitz afin d'énumérer les cas possibles, puis des automorphismes de la structure analytique correspondante pour distinguer les cas se réalisant ou non.

Démonstration. Considérons $S_{1,n}$ un tore à n points marqués, γ un élément de torsion d'ordre k et notons $S'_{g,m} = S_{1,n}/\langle\alpha\rangle$ la surface quotient, de genre $g \leq 1$ à m points marqués. Rappelons la formule de Riemann-Hurwitz

$$2g - 2 + n = k(2\tilde{g} - 2 + m) + k\sum_{ell}(1 - 1/e_x) \tag{4.3.1}$$

où k est l'ordre de $G = \langle\gamma\rangle$ et e_x est l'indice de ramification elliptique d'un point $x \in S_{\tilde{g},m}$. Par la suite, on notera r_l le nombre de points elliptiques d'ordres l.

Notons t_q le nombre de points de la surface $S'_{g,m}$ dont le groupe d'inertie est d'ordre q divisant k. Dénombrant respectivement les points marqués de la surface quotient $S'_{g,m}$ – à partir des fibres de même cardinal, et de la surface initiale $S_{1,n}$, on obtient les équations suivantes

$$n = t_1 + \sum_{q|ord(G)} t_q q \tag{4.3.2}$$

$$m = t_1 + \sum_{q|ord(G)} t_q. \tag{4.3.3}$$

Si γ n'admet aucun point fixe, alors d'après la proposition 4.2.1 on a $g = 1$. Puisque les points fixes correspondent dans les formules précédentes aux points de ramification elliptiques et au paramètre t_1, la formule de Riemann-Hurwitz se réduit à

$$n = km.$$

On en déduit que $ord(\gamma)$ divise n. L'automorphisme de surface de Riemann correspond à la rotation-translation déjà rencontrée au chapitre précédent.

Considérons le cas où γ admet un point fixe, i.e. induit un automorphisme de courbe elliptique. Dans ce cas, $\tilde{g} = 0$ et $k \in \{2,3,4,6\}$ que l'on peut supposer fixé. Substituant tour à tour les valeurs de m et de n des équations (4.3.2) puis (4.3.3) dans la formule de Riemann-Hurwitz, on obtient l'équation de la forme générale

$$(k-1)t_1 + (k-2)t_2 + (k-3)t_3 + (k-4)t_4 + (k-6)t_6 + \frac{k}{2}r_2 + 2\frac{k}{3}r_3 + 3\frac{k}{4}r_4 + 5\frac{k}{6}r_6 = 2k$$

d'inconnues entières et positives $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_6, r_2, r_3, r_4, r_6)$. Pour chaque valeur de k, on résout alors une équation à coefficients entiers positifs. Il découle 38 signatures possibles au total.

Parmi celles-ci, on distingue les signatures réalisables : soit $\gamma \in \Gamma_{1,[n]}$ et X une surface de Riemann à points marqués dont γ est un automorphisme. Considérons $\tilde{X}$ la surface précédente dont on a oublié le marquage. Elle est munie d'un automorphisme $\tilde{\gamma}$, induit par γ, et tel que $\tilde{\gamma}$ fixe un point de X :

Les donnés de ramification elliptique de $\tilde{\gamma}$ correspondent donc à des données de ramification d'automorphisme de courbe elliptique et appartiennent à la liste suivante

$$\{\{2,2,2,2\}, \{2,4,4\}, \{3,3,3\}, \{2,3,6\}\}.$$

Ceci exclut toutes les signatures Σ_γ dont les informations de ramifications ne sont incluses dans aucune des listes précédentes.

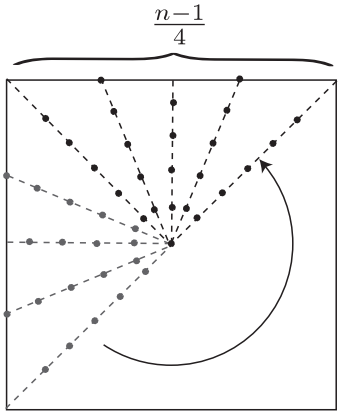
Dans ce contexte, les valeurs des données numériques d'inerties $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_6)$ correspondent à la possibilité de marquer différents points de ramifications elliptiques d'une courbe non marquée. Plus précisément, un paramètre d'inertie $t_e = 1$ correspond au marquage de $ord(\gamma)/e$ points elliptiques d'ordre e sur la surface $S_{1,n}$ ce qui diminue d'autant le nombre de points à distribuer. Ceux-ci se répartissent alors selon des orbites de longueurs $ord(\gamma)$. Le marquage de points totalement ramifiés augmente quant à lui d'autant la valeur du paramètre t_1.

Cette analyse exclut la réalisation de certaines signatures et justifie les restantes, regroupées dans le tableau 4.2. □

Remarque. La preuve précédente explique la nature combinatoire d'un modèle topologique de genre 1 ayant comme automorphisme un élément de torsion. Il s'agit de *réaliser une distribution des points marqués* de manière cohérente selon l'ordre de l'automorphisme analytique associé, en marquant ou non certains points fixes elliptiques. Nous illustrons ce principe avec les deux exemples suivants.

Exemples

1. Prenons le cas d'un automorphisme d'ordre 4. Dans ce cas, le réseau de $\mathbb{C}$ associé au modèle du tore est celui du carré dont on identifie les cotés opposés.



L'automorphisme d'ordre 4 correspond alors à la rotation d'angle $\pi/2$ de ce modèle. Les deux points d'ordre 4 sont le centre et les sommets du carré, et les 2 points d'ordre 2 sont les milieux des cotés. La figure ci-contre illustre la réalisation de l'automorphisme de signature

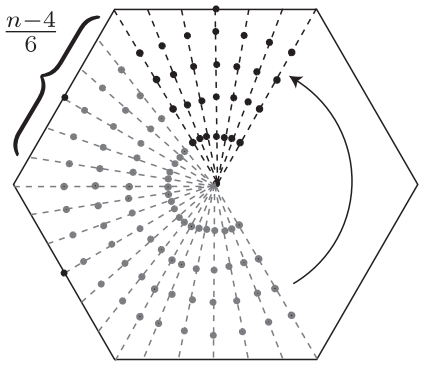
$$\left\{0, \frac{n-1}{4} + 1, \{2, 4\}\right\}$$

On a marqué un point d'ordre 4 (le centre du carré) et réparti les $(n-1)$ points restants en orbites d'ordre 4 répartis uniformément dans le domaine fondamental de l'automorphisme et son image.

La permutation induite est constituée de $(n-1)/4-1$ orbites de longueurs 4 :

$$[\gamma] = (1)(2,3,4,5)(6,7,8,9)\cdots(n-4, n-3, n-2, n-1).$$

2. Considérons le cas d'un automorphisme d'ordre 6. Le réseau de $\mathbb{C}$ associé à ce modèle du tore est un hexagone dont on identifie les cotés opposés deux à deux.



L'automorphisme d'ordre 6 correspond à la rotation de même ordre de l'hexagone. Il y a 3 points d'ordre 2 – les milieux des cotés, 2 points d'ordre 3 – les sommets, et un point d'ordre 6 qui est le centre de l'hexagone. La figure ci-contre illustre la réalisation de l'automorphisme de signatures

$$\left\{0, \frac{n-4}{6} + 2, \{2\}\right\}.$$

On a marqué le centre d'ordre 6 ainsi que les 3 milieux des cotés d'ordre 2. On distribue les $(n-4)$ points restants en orbites d'ordre 6.

La permutation induite est de type suivant :

$$[\gamma] = (1)(2,3,4)(5,6,7,8,9,10)\cdots(n-9, n-8, n-7, n-6, n-5, n-4).$$

Remarque. Pour terminer cette section, signalons dans le domaine de la recherche des groupes d'automorphismes agissant sur une surface topologique S_g *sans points marqués*, deux résultats qui permettraient de préciser nos résultats.

De la même façon que nous sommes partis de la formule de Riemann-Hurwitz, à laquelle nous avons ajouté des conditions nécessaires pour caractériser les classes de conjugaison d'éléments de torsions agissant sur $S_{1,n}$, W. J. Harvey [Har66] donne des conditions combinatoire *nécessaires et suffisantes* pour les classes de conjugaisons des groupes cycliques d'automorphismes agissant sur S_g pour $g \geqslant 2$.

La méthode déjà citée de S. A. Broughton [Bro90a] permet de se libérer de la combinatoire *des distributions de points* illustrée dans les deux exemples précédents, et dont la complexité augmente avec le genre, en se ramenant à un critère *algébrique* en terme de classes d'équivalence de représentations de groupe. De cette méthode, qui permettraient de caractériser les groupes finis maximaux dans notre étude, il obtient la liste exhaustive des 20 et 47 groupes finis agissant sur les surfaces *sans points marqués*, respectivement de genre 2 et 3.

4.3.2 La torsion d'ordre premier de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,[n]})$, action de $\widehat{GS}$

Nous abordons maintenant le deuxième résultat principal de cette thèse, analogue en genre un de celui déjà établi en genre zéro.

Théorème 4.3.2. *La torsion d'ordre premier des groupes profinis $\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{1,[n]})$ pour n quelconque provient de la torsion géométrique, c'est-à-dire de celle du groupe discret $\pi_1^{orb}(\mathcal{M}_{1,[n]})$.*

Afin d'établir ce résultat, et suivant le corollaire 2.2.10, il nous suffit de trouver un sous-groupe H de $\Gamma_{1,[n]}$ sans torsion tel que pour $g \in \Gamma_{1,[n]}$ d'ordre p premier le sous-groupe $G = H \rtimes \langle g \rangle \subset \Gamma_{1,[n]}$ soit bon et admette un nombre fini de classes de conjugaisons d'ordre p.

Démonstration. L'existence d'un sous-groupe H de $\Gamma_{1,[n]}$ sans torsion s'établit par récurrence sur n à partir de la suite exacte

$$1 \to \pi_1(S_{1,n-1}) \to \Gamma_{1,n} \xrightarrow{\psi} \Gamma_{1,n-1} \to 1$$

puisque $\pi_1(S_{1,n-1})$ est sans torsion. Supposons que $\Gamma_{1,n-1}$ contienne un sous-groupe G d'indice fini sans torsion, alors $H = \psi^{-1}(G) \subset \Gamma_{1,n}$ est sans torsion. En effet, soit $\gamma \in H$ de torsion d'ordre k. Alors $\psi(x)^k = 1$ et $\psi(x)$ est de torsion dans $G \subset \Gamma_{1,n-1}$ sans torsion. Ainsi $\psi(x) = 1$ et x est dans le noyau $\pi_1(S_{1,n-1})$. Puisque celui-ci est sans torsion, alors $x = 1$. Notons que H est d'indice fini dans $\Gamma_{1,n}$.

La récurrence s'initialise pour $\Gamma_{1,1}$ avec le sous-groupe de congruence $SL_2(3)$ libre et d'indice fini.

D'autre part H est bon comme sous-groupe d'indice fini d'un groupe bon, ce qui implique la bonté de $G = H \rtimes \langle g \rangle$ pour $g \in \Gamma_{1,[n]}$ élément de torsion.

TABLE 4.2: Torsion de $\Gamma_{1,[n]}$.

	Ramification (t_1,t_2,t_3,t_4,t_6)	Signature (Σ_γ)
ordre 2	$(4,(n-4)/2,0,0,0)$	$\left(0,\frac{n-4}{2}+4,\varnothing\right)$
	$(3,(n-3)/2,0,0,0)$	$\left(0,\frac{n-3}{2}+3,\{2\}\right)$
	$(2,(n-2)/2,0,0,0)$	$\left(0,\frac{n-2}{2}+2,\{2,2\}\right)$
	$(1,(n-1)/2,0,0,0)$	$\left(0,\frac{n-1}{2}+1,\{2,2,2\}\right)$
	$(0,n/2,0,0,0)$	$\left(0,\frac{n}{2},\{2,2,2,2\}\right)$
ordre 3	$(3,0,n/3,0,0)$	$\left(0,\frac{n-2}{3}+3,\varnothing\right)$
	$(2,0,(n-3)/3,0,0)$	$\left(0,\frac{n-3}{3}+2,\{3\}\right)$
	$(1,0,(n-1)/3,0,0)$	$\left(0,\frac{n-1}{3}+1,\{3,3\}\right)$
	$(0,0,n/3,0,0)$	$\left(0,\frac{n}{3},\{3,3,3\}\right)$
ordre 4	$(2,0,0,(n-2)/4,0)$	$\left(0,\frac{n-2}{4}+2,\{2\}\right)$
	$(1,1,0,(n-3)/4,0)$	$\left(0,\frac{n-3}{4}+2,\{4\}\right)$
	$(1,0,0,(n-1)/4,0)$	$\left(0,\frac{n-1}{4}+1,\{2,4\}\right)$
	$(0,1,0,(n-2)/4,0)$	$\left(0,\frac{n-2}{4}+1,\{4,4\}\right)$
	$(0,0,0,n/4,0)$	$\left(0,\frac{n}{4},\{2,4,4\}\right)$

CONTINUE À DROITE

SUITE	Ramification (t_1,t_2,t_3,t_4,t_6)	Signature (Σ_γ)
ordre 6	$\left(0,0,0,0,n/6\right)$	$\left(0,\frac{n}{6},\{2,3,6\}\right)$
	$\left(0,1,1,0,\left(n-5\right)/6\right)$	$\left(0,\frac{n-5}{6}+2,\{6\}\right)$
	$\left(1,0,0,0,\left(n-1\right)/6\right)$	$\left(0,\frac{n-1}{6}+1,\{2,3\}\right)$
	$\left(1,0,1,0,\left(n-4\right)/6\right)$	$\left(0,\frac{n-4}{6}+2,\{2\}\right)$
	$\left(1,1,0,0,\left(n-3\right)/6\right)$	$\left(0,\frac{n-3}{6}+2,\{3\}\right)$
	$\left(1,1,1,0,\left(n-6\right)/6\right)$	$\left(0,\frac{n-6}{6}+3,\varnothing\right)$
ordre $k\|n$	$\varnothing$	$\left(1,\frac{n}{k},\varnothing\right)$

Enfin, la finitude du nombre de classes de conjugaisons de $H \rtimes \langle g \rangle$ découle de la finitude du nombre de classes de conjugaisons de $\Gamma_{1,[n]}$ – voir tableau 4.2, comme utilisé dans la preuve du lemme 3.1.5 en genre zéro.

On conclut comme annoncé avec le corollaire 2.2.10. □

Remarque. De cette construction du sous-groupe d'indice fini sans torsion dans $\Gamma_{1,[n]}$ découle le résultat bien connu suivant : les mapping class groups $\Gamma_{g,[n]}$ sont de dimension cohomologique virtuelle finie.

Remarque. Dès que $n > 2g + 2$, il est bien connu que les pure mapping class group $\Gamma_{g,n}$ sont sans torsion, soit dans le cas du genre 1 lorsque $n \geqslant 5$. Ceci découle d'une application de la formule de Riemann-Hurwitz.

On peut finalement établir le résultat principal de cette thèse :

Théorème 4.3.3. *Soient $\gamma \in \widehat{\Gamma}_{1,[n]}$ de torsion d'ordre premier et $F \in \widehat{GS}$. Alors $\widehat{GS}$ agit par conjugaison et élévation à la puissance λ*

$$F(\gamma) = f\gamma^{\lambda}f^{-1}$$

où $f \in \widehat{\Gamma}_{1,[n]}$.

D'après le résultat précédent et la classification établie par le tableau 4.2, on peut distinguer deux cas : soit l'élément provient d'un automorphisme elliptique, soit il provient d'une translation.

Démonstration. Soit $\gamma \in \widehat{\Gamma}_{1,[n]}$ élément de torsion d'ordre premier et $F = (f, \lambda) \in \widehat{GS}$.

Le cas où γ est une puissance de la rotation r_n a été traité dans la proposition 3.2.10.

Considérons le cas où $\gamma \in \Gamma^{ell}_{1,[n]}$. Suivant le résultat précédent, le groupe $\langle F(\gamma) \rangle$ est de même ordre que γ et conjugué à un groupe géométrique. Suivant le tableau 4.2, on remarque que pour un ordre donné aucunes des permutations induites par les éléments ne sont conjuguées. Puisque l'action du groupe $\widehat{GS}$ préserve les permutations, on obtient alors

$$F(\gamma) = g\gamma^{k}g^{-1}$$

où $k \in \widehat{\mathbb{Z}}^{*}$ et $g \in \widehat{\Gamma}_{1,[n]}$.

L'identification de k s'effectue alors par effacement de tous les points

$$\widehat{\Gamma}^{ell}_{1,[n]} \to \widehat{\Gamma}_1 \simeq \widehat{\Gamma}_{1,1}$$

On obtient alors, d'après l'action de $\widehat{GS}$ sur la torsion d'ordre premier de $\widehat{\Gamma}_{1,1}$ – voir la proposition **??**

$$\tilde{g}\tilde{\gamma}^{k}\tilde{g}^{-1} = h\tilde{\gamma}^{\lambda}h^{-1}$$

où $\tilde{g}$ désigne l'image de g dans $\widehat{\Gamma}_{1,1}$. La puissance s'identifie alors dans l'abélianisé $\Gamma^{ab}_{1,1}$. □

Le morphisme d'effacement de points $\Gamma^{ell}_{1,[n]} \to \Gamma_1$ se construit de manière explicite à partir de la présentation de $\Gamma_{1,n}$ donnée dans le chapitre 1 et par composition avec

$$1 \to \Gamma_{1,n} \to \widetilde{SL_2(\mathbb{Z})} \to SL_2(\mathbb{Z}) \to 1$$

où $\widetilde{SL_2(\mathbb{Z})} \simeq B_3$ – voir [Bir69a].

$\star$

$\star \quad \star$

5

Espaces de modules de courbes, lieux spéciaux

5.1. Lieux spéciaux, généralités 90
5.1.1. Lieux spéciaux analytiques 90
5.1.2. Lieux spéciaux algébriques 91
5.1.3. Corps des modules arithmétique 93
5.2. Action galoisienne, genre zéro 94
5.2.1. Action galoisienne, généralités 94
5.2.2. Lieux spéciaux de $\mathcal{M}_{0,[n]}$ 96
5.2.3. Action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur la torsion géométrique de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$ 97
5.3. Lieux spéciaux en genre un 98
5.3.1. Action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur la torsion géométrique de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,[n]})$ 98
5.3.2. Lieux spéciaux de $\mathcal{M}_{1,[2]}$ 99

Dans ce chapitre nous étudions l'action du groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{Q}}$ sur les éléments de torsion *géométrique*, c'est-à-dire du mapping class group discret $\Gamma_{g,[n]}$. Dans ce cadre nous énonçons un analogue des résultats des chapitres précédents dans le cadre galoisien, et pour un ordre de torsion quelconque pour $g = 0$:

Théorème 5.2.5 : *Le groupe de Galois absolu agit par conjugaison et puissance cyclotomique sur les éléments de torsion géométrique et* d'ordre quelconque *de* $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$.

L'action galoisienne sur les classes de conjugaison d'éléments de torsion est ici déterminée par la nature géométrique des lieux fixés par l'action du mapping class group, nommés encore *lieux spéciaux*.

Ne disposant pas d'une connaissance aussi détaillée des lieux spéciaux en genre un, on ne peut dans ce cas qu'énoncer le résultat suivant, corollaire immédiat du théorème 4.3.3 établi dans le cadre de la théorie de Grothendieck-Teichmüller.

Théorème : *Le groupe de Galois absolu agit par conjugaison et puissance cyclotomique sur les éléments de torsion géométrique et d'ordre premier de* $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,[n]})$.

L'essentiel de ce chapitre est employé à établir le théorème 5.2.5 précédent.

Dans cette optique, nous rappelons les notions de lieux spéciaux analytiques – en relation avec les espaces de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,n}$, et de lieux spéciaux algébriques – en tant que groupes d'inertie champêtre de $\mathcal{M}_{g,[n]}$. Cette dernière approche conduit à introduire

la notion de *corps des modules arithmétique*, corps de nombre dont le groupe de Galois préserve les classe d'isomorphismes de lieux spéciaux.

Il en découle une action galoisienne sur les composantes irréductibles des lieux spéciaux – ou de façon équivalente sur les classes de conjugaison d'un élément de torsion, dont nous montrons qu'elle coïncide avec l'action galoisienne issue de la suite fondamentale arithmétique-géométrique usuelle. Cette étude se conclut par l'établissement du théorème 5.2.5 annoncé .

Afin d'illustrer les difficultés que présente une généralisation de ces résultats en genre un, nous présentons dans la section 5.3.2 un aperçu de la situation dans ce contexte. Le champ $\mathcal{M}_{1,[n]}$ ne possédant pas une description aussi élémentaire que $\mathcal{M}_{0,[n]}$, l'action du groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GS}$ établie au chapitre 4 implique néanmoins que *le corps des modules arithmétique des lieux spéciaux associés à la torsion discrète* d'ordre premier *de* $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,[n]})$ *est égal à* $\mathbb{Q}$. Prolongeant l'étude systématique des lieux spéciaux menée dans [Sch03] par L. Schneps, nous donnons par ailleurs une description complète des lieux spéciaux de l'espace de modules $\mathcal{M}_{1,[2]}$.

5.1 Lieux spéciaux, généralités

L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,n}$ se définit comme les *classes d'équivalence de marquages de surface de Riemann* de type topologique $S = S_{g,n}$, de genre g et à n points marqués. Les actions des full et pure mapping class group étant non-fidèles sur l'espace topologique de Teichmüller, certains points de cet espace $\mathcal{T}_{g,n}$ sont stabilisés par des sous-groupes d'inertie finis de $\Gamma_{g,n}$. L'image de ces points dans les espaces de modules quotients $\mathcal{M}_{g,n} = \mathcal{T}_{g,n}/\Gamma_{g,n}$ et $\mathcal{M}_{g,[n]} = \mathcal{M}_{g,n}/\mathfrak{S}_n$ constituent, pour chaque élément de torsion de $\Gamma_{g,[n]}$, les *lieux spéciaux* de l'espace de modules.

Nous donnons dans un premier temps les définitions relatives à cette notion de lieu spécial. Suivant [HM75], on rappelle de quelle façon un lieu spécial associé à un élément de torsion γ du mapping class group $\Gamma_{g,n}$ est relié à l'espace de modules de l'espace quotient $S/\langle\gamma\rangle$.

Nous traduisons cette notion dans le cadre de la structure de champ algébrique de $\mathcal{M}_{g,[n]}$ ce qui nous permet de caractériser géométriquement les classes de conjugaison de $\Gamma_{g,[n]}$. Plus exactement, nous établissons l'équivalence entre classe de conjugaison d'un sous-groupe de $\Gamma_{g,[n]}$ et composante irréductible d'un lieu spécial $\mathcal{M}(G)$.

Suivant cette étude, le corps des modules arithmétique d'une composante se définit relativement à l'espace des modules grossiers de la gerbe au point générique de la composante. De cette notion découle une action du groupe de Galois sur les classes de conjugaison.

5.1.1 Lieux spéciaux analytiques

Dans la suite on note S une surface topologique de type (g,n), $\Gamma(S)$ (resp. $\Gamma([S])$) le pure (resp. full) mapping class group associé et $\mathcal{M}(S)$ (resp. $\mathcal{M}([S])$) l'espace de module

ordonné (resp. non-ordonné) associé.

Le lieu spécial associé à un élément de torsion γ est le sous-espace de l'espace des modules non-ordonné image du sous-espace de l'espace de modules ordonné composé des points admettant γ comme automorphisme.

Définition. *Soit $\gamma \in \Gamma_{g,[n]}$ d'ordre fini et soit $\tilde{\gamma}$ la permutation associée, ainsi que $G = \langle\tilde{\gamma}\rangle \subset \mathfrak{S}_n$. On nomme* lieu spécial de γ dans $\mathcal{M}([S])$ (resp. $\mathcal{M}(S)$) *l'image dans l'espace de modules $\mathcal{M}([S])$ (resp. $\mathcal{M}(S)$) de l'ensemble des points de l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,n}$ fixes par γ.*

On notera qu'un lieu spécial associé à un élément de torsion ne dépend que de la classe de conjugaison de cet élément. On pourra consulter [Sch03] paragraphes 3.1.1 et 3.3.1 pour des exemples explicites de lieux spéciaux dans les espaces de modules $\mathcal{M}_{0,[4]}$ et $\mathcal{M}_{0,[5]}$.

La relation entre lieu spécial et espace de modules de l'espace quotient $T = S/\langle\gamma\rangle$ est donnée par le résultat suivant.

Proposition 5.1.1 ([HM75])**.** *Soit $\gamma \in \Gamma_{g,[n]}$ d'ordre fini. Supposons que la surface quotient est de type (g', n'), alors le sous-espace de $\mathcal{T}_{g,n}$ fixé par γ est isomorphe à $\mathcal{T}_{g',n'}$*

En particulier la dimension du lieu spécial est la même que celle de l'espace de modules quotient, puisque définie par la dimension de l'espace de Teichmüller qui est un espace de dimension complexe $3g'-3+n'$. Rappelons le résultat suivant – voir par exemple [GDH92].

Proposition 5.1.2. *L'ensemble des lieux spéciaux associé à un sous-groupe fini de $\Gamma_{g,[n]}$ est une sous-variété analytique irréductible de $\mathcal{M}_{g,[n]}$.*

5.1.2 Lieux spéciaux algébriques

Dans le contexte algébrique, l'espace des modules $\mathcal{M}_{g,[n]}$ admet la définition suivante : il est constitué de morphismes plats $\pi : C \to S$ de fibres géométriques C_s des courbes réduites de genres g, où S un schéma de base et C est muni d'un *marquage*. Rappelons qu'un marquage est la donnée d'un sous-schéma fermé $D \subset C$ contenu dans le lieu lisse de C tel que le morphisme $D \to S$ soit étale fini de degré constant.

Cette notion généralise celle de courbes pointées ordonnées où les points sont donnés par des sections et correspond à accepter la permutation des points, puisqu'en termes de champs

$$\mathcal{M}_{g,[n]} = [\mathcal{M}_{g,n}/\mathfrak{S}_n].$$

Suivant [DM69], l'espace de modules de courbes pointées ordonnées peut être muni d'une structure de $\mathbb{Q}$-champ algébrique de Deligne-Mumford, et il en est de même pour $\mathcal{M}_{g,[n]}$ comme quotient fini de celui-ci.

Fixons G un sous-groupe fini de $\Gamma_{g,[n]}$ et étudions les familles de courbes de genre g à n points marqués admettant G comme groupe d'automorphismes.

Définition. *Soit G un sous-groupe fini de $\Gamma_{g,[n]}$. On nomme ensemble des lieux spéciaux algébriques et l'on note $\mathcal{M}(G)$ le sous-champ de $\mathcal{M}_{g,[n]}$ dont les points fermés représentent des courbes admettant une action fidèle de G*

$$\mathcal{M}(G) = \{X \in \mathcal{M}_{g,[n]} \ , \ G \overset{\iota}{\hookrightarrow} Aut(X)\}.$$

L'existence d'au moins un point de cet espace est assuré par le théorème de réalisation de Nielsen-Kerckhoff [Ker83] : pour tout sous-groupe fini G de $\Gamma_{g,[n]}$, il existe un groupe fini H d'homéomorphismes de la surface topologique X de type (g,n) ainsi qu'une structure conforme sur X pour lesquelles H est le groupe des automorphismes conformes $Aut(X)$.

En terme de structure, on a le résultat suivant.

Proposition 5.1.3 ([Rom09])**.** *L'ensemble des lieux spéciaux $\mathcal{M}(G)$ est un $\mathbb{Q}$ sous-champ fermé de $\mathcal{M}_{g,[n]}$.*

Un groupe d'automorphismes $Aut(X)$ s'identifie à un sous-groupe de $\Gamma_{g,[n]}$ à conjugaison près. À une classe de conjugaison fixée d'un groupe fini G, on associe le sous-espace géométrique suivant du champ des lieux spéciaux.

Définition. *Soit G un sous-groupe fini du mapping class group. On suppose fixée une classe de conjugaison <G> de G dans $\Gamma_{g,[n]}$. On nomme lieu spécial de <G> et l'on note*

$$\mathcal{M}_{<G>} = \{X \in \mathcal{M}(G),\ G \overset{\iota}{\hookrightarrow} Aut(X) \hookrightarrow \Gamma_{g,[n]},\ Aut(X) \subset <G>\}$$

le sous-ensemble de $\mathcal{M}(G)$ dont le groupe d'automorphismes des courbes se réalise dans une même classe de conjugaison de $\Gamma_{g,[n]}$.

L'approche fonctorielle de [Rom09] permet d'étudier les composantes irréductibles sans fixer de corps de base. Couplé au résultat d'irréductibilité algébrique de [Bro90b] on obtient.

Proposition 5.1.4. *Soit G un sous-groupe fini du mapping class group, et <G> une classe de conjugaison fixée de G dans $\Gamma_{g,[n]}$. Alors le lieu spécial $\mathcal{M}_{<G>}$ est une composante irréductible du champ des lieux spéciaux $\mathcal{M}(G)$.*

Démonstration. Suivant la preuve de [Rom09, prop. 3.4.1], considérons $\mathcal{H}$ le champ de Hurwitz classifiant les pairs (X,ι) comme dans la définition. On dispose ainsi d'un morphisme $\mathcal{H} \to \mathcal{M}_{g,[n]}$ défini par oubli de l'action et dont l'image est $\mathcal{M}(G)$. En particulier une composante irréductible de $\mathcal{M}(G)$ provient d'une composante irréductible de $\mathcal{H}$.

Or selon [Bro90b], les composantes irréductibles de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{C}$ sont exactement image dans $\mathcal{M}_{g,[n]}$ des points de l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,n}$ fixés par une classe de conjugaison de G dans le mapping class group. □

Remarque. L'irréductibilité de telles composantes est établie par S. Broughton [Bro90b] pour les lieux spéciaux d'espace des modules sans points marqués $\mathcal{M}_g$ et repose sur un théorème de Riemann généralisé de D. Mumford [Mum67] de type GAGA. Suivant cette approche, on trouvera une extension de ce résultat aux courbes marqués $\mathcal{M}_{g,[n]}$ dans [Cui08].

Pour chaque composante irréductible $\mathcal{M}<G>$, on dispose ainsi d'un morphisme $\mathcal{M}<G> \to \mathcal{M}(G)$, qui à la différence de $\mathcal{M}(G) \hookrightarrow \mathcal{M}_{g,[n]}$, n'est a priori pas défini sur $\mathbb{Q}$ comme le montre l'exemples suivant pris dans l'espace des modules ordonné :

Exemple d'un lieu spécial de $\mathcal{M}_{0,n}$. Suivant [Sch03], le lieu spécial associé à la rotation d'ordre n est composé de $|(\mathbb{Z}/j\mathbb{Z})^*|$ composantes irréductibles

$$\mathcal{M}<G>_\zeta = (1, \zeta, \ldots, \zeta^{j-1}, a_1, a_1\zeta, \ldots, a_1\zeta^{j-1}, \ldots, a_{-1}k, a_{k-1}\zeta, \ldots, a_{k-1}\zeta^{j-1})$$

où ζ parcourt les racines primitives $j$èmes de l'unité et les a_s sont des coordonnées d'une composante. En particulier, chaque morphisme $\mathcal{M}<G> \to \mathcal{M}(G)$ est défini sur $\mathbb{Q}^{ab}$.

5.1.3 Corps des modules arithmétique

Soit $\mathcal{C} \in \mathcal{M}_{g,[n]}$ une classe d'isomorphisme de courbes fixée. Lorsque $\mathcal{C} : Spec(K) \to \mathcal{M}_{g,[n]}$ est un point géométrique on forme $k_\mathcal{C}$ le *corps des modules de* $\mathcal{C}$, à la fois corps dont le groupe de Galois fixe la classe d'isomorphisme de $\mathcal{C}$ et corps résiduel de $\mathcal{C}$

$$k = \overline{\mathbb{Q}}^{\{\sigma \in G_\mathbb{Q},\ \sigma(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}\}}.$$

Par produit fibré avec l'espace des modules grossier $M_{g,[n]}$ de $\mathcal{M}_{g,[n]}$, on forme ainsi la gerbe des modèles $\mathcal{G}_\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_\mathcal{C} & - - \succ & \mathcal{M}_{g,[n]} \\ \vdots & & \downarrow \\ Spec(k_\mathcal{C}) & \longrightarrow & M_{g,[n]} \end{array}$$

qui classifie les classes d'isomorphismes de $\mathcal{C}$ définies sur une extension $L/k_\mathcal{C}$ et dont $Spec(k_\mathcal{C})$ est l'espace des modules grossier.

Adaptons cette notion de corps des modules en une définition arithmétique pour le point générique $\eta \in \mathcal{M}<G>$ d'une composante irréductible $\mathcal{M}<G>$.

Définition. *On nomme corps de module arithmétique d'une composante irréductible $\mathcal{M}<G>$ et l'on note k_G la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\kappa(\eta)$ espace des modules grossier de la gerbe au point générique η de $\mathcal{M}<G>$.*

En particulier, le groupe de Galois $Gal(\overline{k}_G/k_G)$ fixe chacune des composantes irréductibles $\mathcal{M}_{<G>}$, tandis que le groupe de Galois absolu $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ permute ces composantes.

Remarque. Le corps résiduel $\kappa(\eta)$ est un analogue du corps de fonction de la composante, ce qui motive cette définition.

5.2 Action galoisienne, genre zéro

Nous établissons ici l'action du groupe de Galois absolu sur la torsion géométrique de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$ suivant l'approche employée dans le théorème 3.1.6. Il s'agit de déterminer le comportement des classes de conjugaison des éléments de torsion sous l'action galoisienne, ou selon la section précédente à déterminer l'action galoisienne sur les lieux spéciaux de $\mathcal{M}_{g,[n]}$.

Après avoir établi l'équivalence entre l'action champêtre galoisienne et l'action induite par le corps des modules arithmétique sur les composantes irréductibles de l'espaces des modules de courbes, nous rappelons brièvement suivant [Sch03] la situation idéale du genre zéro. Celle-ci permet une description explicite de tous les lieux spéciaux relatifs à un élément de torsion donné, ainsi que les composantes irréductibles. Nous illustrons cette situation sur l'exemple d'une rotation particulière.

La dernière section établit le résultat d'action galoisienne proprement dit.

5.2.1 Action galoisienne, généralités

À partir de la structure analytique orbifold de $\mathcal{M}_{g,n}$ T. Oda a établi une suite exacte fondamentale champêtre dont découle l'action du groupe de Galois sur les mapping class groups profinis $\widehat{\Gamma}_{g,n}$. Plus précisément le résultat suivant généralise le théorème de A. Grothendieck [Gro03] des schémas aux champs.

Théorème 5.2.1 ([Zoo01])**.** *Soit X un champ algébrique sur un corps k, géométriquement connexe et quasi-compact, $\overline{k}$ une cloture séparable de k et x un point de $\overline{X} = X \otimes \overline{k}$. On a une suite exacte au niveau des groupes fondamentaux*

$$1 \to \pi_1(\overline{X}, x) \to \pi_1(X, x) \to Gal(\overline{k}/k) \to 1.$$

On dispose ainsi d'une action du groupe de Galois absolu $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur le groupe fondamental

$$Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to Aut(\pi_1(\mathcal{M}(G) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, x)).$$

Reprenant la notion de *corps de modules arithmétique*, on dispose par ailleurs d'une action du groupe de Galois absolu sur l'ensemble des composantes irréductibles $\mathcal{M}(G)$, ou de manière identique selon la proposition 3.2.2, sur l'ensemble des classes de conjugaison de G dans $\Gamma_{g,[n]}$.

Proposition 5.2.2. *Soient G un groupe fini et $\mathcal{M}(G)$ le champ de l'ensemble des lieux spéciaux associés. Alors il existe une action champêtre du groupe de Galois $G_{\mathbb{Q}}$ sur les composantes irréductibles de $\mathcal{M}(G)$ et celle-ci est identique à l'action de $G_{\mathbb{Q}}$ définie par le corps des modules arithmétique.*

La preuve est immédiate puisque suivant la suite exacte fondamentale, le groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{Q}}$ agit en permutant les classes de conjugaisons de la torsion géométrique à travers le morphisme $\pi_1^{orb}(\mathcal{M}_{g,[n]}) \hookrightarrow \pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{g,[n]})$. Pour un groupe fini G fixé, l'action galoisienne champêtre agit donc en permutant les composantes irréductibles de $\mathcal{M}(G)$ de la même manière que l'action galoisienne relative au corps des modules arithmétiques.

Remarque. Considérant la gerbe $\mathcal{G}_\eta$ au point générique η d'une composante irréductible de $\mathcal{M}(G)$, et décrivons de quelle façon on obtient une action du groupe de Galois du corps des modules tout entier $Gal(\overline{\kappa}(\eta)/\kappa(\eta))$ sur le groupe fini G. Suivant B. Noohi [Noo04] il existe une suite exacte de décomposition-inertie

$$1 \to I_x \to \pi_1(\mathcal{G}_\eta, x) \to \pi_1(\mathcal{G}_\eta /\!/ G, x) \to 1$$

où $I_x = G$ est le groupe d'inertie en $x \in \mathcal{G}_\eta$ et $\mathcal{G}_\eta /\!/ G$ est le champ génériquement réduit pris dans les 2-quotients.

Formant une suite exacte analogue par extension des scalaires au niveau de $\overline{\mathcal{G}}_\eta = \mathcal{G}_\eta \times_{\kappa(\eta)} \overline{\kappa}(\eta)$, ainsi que les suites exactes fondamentales géométriques relatives aux espaces $\mathcal{G}_\eta$ et $\mathcal{G}_\eta /\!/ G$ réduit, on forme le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \pi_1(\overline{\mathcal{G}}_\eta, x) & \longrightarrow & \pi_1(\overline{\mathcal{G}}_\eta /\!/ G, x) & \longrightarrow & 1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{G}_\eta, x) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{G}_\eta /\!/ G, x) & \longrightarrow & 1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow\uparrow & & \\
 & & & & Gal(\overline{\kappa}(\eta)/\kappa(\eta)) & & Gal(\overline{\kappa}(\eta)/\kappa(\eta)) & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

On définit ainsi par relèvement une représentation monodromique

$$\overline{\mu} : \pi_1(\overline{\mathcal{G}}_\eta /\!/ G, x) \to Out(G).$$

et il découle de ce qui précède l'action du groupe de Galois du corps des modules annoncée

$$Gal(\overline{\kappa}(\eta)/\kappa(\eta)) \to Out(G)/Im(\overline{\mu})$$

5.2.2 Lieux spéciaux de $\mathcal{M}_{0,[n]}$

L'espaces des modules de courbes de genre zéro *ordonné* est une variété affine définie sur $\mathbb{Q}$

$$\mathcal{M}_{0,n} = (\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\})^{n-3} - \Delta.$$

Suivant la description des lieux spéciaux en genre zéro donnée dans [Sch03] – qui s'appuie sur la description géométrique des éléments d'ordre fini en tant que rotations de la sphère, les lieux spéciaux admettent une description explicite : il suffit de donner en coordonnées un ensemble de points marqués permutés par un tel automorphisme.

En termes de composantes irréductibles, le résultat est le suivant.

Théorème 5.2.3 ([LS94b])**.** *Soit G un groupe cyclique fini de $\Gamma_{0,[n]}$. Dans $\mathcal{M}_{0,[n]}$, l'ensemble des lieux spéciaux $\mathcal{M}(G)$ comporte une unique composante irréductible sur $\mathbb{Q}$.*

On établit plus précisément que $\mathcal{M}(G)$ est isomorphe à $\mathcal{M}([S/G])$ espace des modules non-ordonné de l'orbifold S/G, où S est une surface topologique de type $(0,k)$. Par exemple, le lieu spécial associé au sous-groupe engendré par l'élément ε_{n-2} est défini comme le quotient de $(\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\})^{k-3} - \Delta$ par le groupe de permutation engendré par $(12)(3\cdots k)$.

Exemple : rotation avec deux points fixes. Illustrons cette construction pour γ élément de torsion d'ordre k de $\Gamma_{0,[n]}$ conjugué à $\varepsilon_{n-2}^{n/k}$, rotation d'ordre k fixant les deux pôles de la sphère.

Posons $j = (n-2)/k$. Dans *l'espace des modules ordonné* $\mathcal{M}_{0,n}$, le lieu spécial de γ est composé de $|\mathbb{Z}_j^*|$ composantes connexes C_ζ, indexées par ζ racines $j$èmes de l'unité. Chaque composante C_ζ est alors isomorphe à

$$C_\zeta = (P^1 - \{0,1,\zeta,\zeta^2,\cdots,\zeta^{j-1},\infty\})^{k-1}$$

privé de $j(k-1)$ droites affines. Chacune de ces composantes est définie sur $\mathbb{Q}^{ab}$.

Dans l'espace des modules quotient $\mathcal{M}_{0,n}/G$, le lieu spécial est composé de $|\mathbb{Z}_j^*|$ composantes connexes $\overline{C}_\zeta$ chacune isomorphe à

$$\overline{C}_\zeta = (P^1 - \{0,1,\infty\})^{k-1} - \Delta,$$

et l'on remarque que

$$\overline{C}_\zeta = \mathcal{M}(T) \simeq \mathcal{M}_{0,k+2}.$$

Ces composantes sont définies sur $\mathbb{Q}$, tandis que chacun des plongements $\mathcal{M}(T) \to \overline{C}_\zeta$ est défini sur $\mathbb{Q}^{ab}$, puisque faisant intervenir ζ racine $j$ème de l'unité.

Dans *l'espace de modules non-ordonné* $\mathcal{M}_{0,[n]}$, le lieu spécial est composé d'une unique composante connexe C isomorphe à

$$C = \mathcal{M}_{0,k+2}/G$$

où G est le sous-groupe des permutations admissibles, c'est-à-dire permutant les points de même indice de ramification. Dans le cas de $\varepsilon_{n-2}^{n/k}$, ces permutations se décomposent en un cycle de longueur k qui permute les points marqués non-ramifiés, et un cycle de longueur 2 qui échange les deux pôles d'indice de ramification égale à j.

Le lieu spécial $\mathcal{M}[\varepsilon_{n-2}^{n/k}]$ est constitué d'une unique composante C définie sur $\mathbb{Q}$ ainsi que le morphisme $\mathcal{M}_{0,k}/G \to C$. En corollaire, on retrouve le fait que le lieu spécial

$$\mathcal{M}[\varepsilon_{n-2}^{n/k}] \simeq \mathcal{M}_{0,k+2}/G$$

est défini sur $\mathbb{Q}$, puisqu'il est isomorphe au quotient d'un espace de module ordonné de genre zéro.

Notons que cet exemple est tout à fait représentatif de la situation générale des lieux spéciaux en genre zéro puisque les éléments d'ordre fini sont tous des rotations.

5.2.3 Action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur la torsion géométrique de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{0,[n]})$

Cette connaissance explicite des composantes irréductibles de l'ensemble des lieux spéciaux de $\mathcal{M}_{0,[n]}$, nous permet de donner une description plus précise de l'action galoisienne sur les groupes d'inertie correspondants.

En effet, en corollaire du théorème précédent, on obtient en termes de corps des modules arithmétique.

Proposition 5.2.4. *Dans $\mathcal{M}_{0,[n]}$, le corps de module arithmétique de tout lieu spécial $\mathcal{M}(G)$ est égal à $\mathbb{Q}$. En particulier l'action du groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{Q}}$ induite sur les groupes d'inertie stabilise les classes de conjugaison.*

Démonstration. D'après le théorème précédent et la proposition 5.2.2, puisque l'ensemble des lieux spéciaux ne comporte qu'une unique composante irréductible, alors le groupe de Galois tout entier stabilise cette composante. Le corps de module arithmétique de ce lieu spécial est donc égal à $\mathbb{Q}$ et l'action d'un élément $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ respecte la classe d'isomorphisme de G

$$\sigma(\langle\gamma\rangle) = g\langle\gamma\rangle g^{-1}$$

pour $g \in \widehat{\Gamma}_{0,[n]}$. □

Ceci nous permet d'établir le résultat d'action galoisienne annoncé.

Théorème 5.2.5. *Soit $\gamma \in \widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ un élément de torsion* géométrique *d'ordre quelconque. Alors l'action du groupe de Galois absolu sur γ est donnée par conjugaison et élévation à la puissance cyclotomique :*

$$\sigma(\gamma) = g\gamma^{\chi(\sigma)}g^{-1}$$

où $g \in \widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ et $\chi : G_{\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathbb{Z}}$ est le caractère cyclotomique.

La démonstration est immédiate étant donné ce qui précède pour déterminer la puissance cyclotomique, en utilisant les méthodes développées dans le chapitre 3 dans le contexte de l'action du groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GT}$.

Démonstration. Puisque γ est un élément de torsion géométrique, le groupe $G = \langle\gamma\rangle$ est conjugué à un sous-groupe de l'un des trois sous-groupes cyclique maximaux $G_n = \langle\varepsilon_n\rangle$, $G_{n-1} = \langle\varepsilon_{n-1}\rangle$ ou $G_{n-2} = \langle\varepsilon_{n-2}\rangle$. Il suffit donc d'établir l'action annoncée sur chacun des générateurs.

Puisque d'après le corollaire précédent, chaque groupe de torsion géométrique G_k est préservé par l'action galoisienne, alors pour ε_k fixé

$$\sigma(\varepsilon_k) = g\varepsilon_k^m g^{-1}$$

où $g \in \widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ et $m \in \widehat{\mathbb{Z}}$ est à déterminer.

On considére alors tour à tour chacun des ε_k sous son expression de tresses. L'action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur chacun des générateurs de tresses σ_i étant donné par conjugaison et élévation à la puissance cyclotomique

$$\sigma_i \mapsto h\sigma_i^{\chi(\sigma)}h^{-1} \text{ où } h \in \widehat{B}_n$$

on raisonne alors comme dans la preuve du théorème 3.1.6 et l'on identifie cette puissance m par abélianisation – en introduisant le morphisme d'effacement de point ou le groupe $\widehat{B}_n/\langle z_n y_n^{-1}\rangle$ lorsque nécessaire.

On obtient alors $m = \chi(\sigma)$ et

$$\sigma(\varepsilon_k) = g\varepsilon_k^{\chi(\sigma)}g^{-1}$$

pour $g \in \widehat{\Gamma}_{0,[n]}$ comme annoncé. □

5.3 Lieux spéciaux en genre un

Dans le cas du genre un, nous ne disposons pas d'une description aussi explicite des lieux spéciaux que dans le cas du genre zero. On obtient cependant un résultat analogue à celui du théorème 5.2.5 dans le cas restreint de la torsion d'ordre premier.

Une étude complète des lieux spéciaux semble néanmoins réalisable, comme nous l'amorçons dans la dernière section où l'étude du premier cas intéressant $\mathcal{M}_{1,[2]}$ est complètement réalisé.

5.3.1 Action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur la torsion géométrique de $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,[n]})$

Puisque le groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GS}$ contient le groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{Q}}$, et que les deux actions définies sur les groupes fondamentaux $\pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,[n]})$ sont compatibles – voir proposition 5.2.2, le résultat suivant est un corollaire immédiat du théorème 4.3.3.

Proposition 5.3.1. *Soit $\gamma \in \pi_1^{geom}(\mathcal{M}_{1,[n]})$ un élément de torsion* géométrique *et d'ordre* premier*. Alors l'action du groupe de Galois absolu sur γ est donnée par conjugaison et élévation à la puissance cyclotomique :*

$$\sigma(\gamma) = g\gamma^{\chi(\sigma)}g^{-1}$$

où $g \in \widehat{\Gamma}_{1,[n]}$ et $\chi : G_{\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathbb{Z}}$ est le caractère cyclotomique.

En termes d'espace des modules de lieux spéciaux, on obtient une réciproque à la proposition 5.2.4 du genre zéro comme conséquence directe de la proposition précédente.

Corollaire 5.3.2. *Le lieu spécial de l'espace des modules $\mathcal{M}_{1,[n]}$ associé à un élément de torsion* d'ordre premier *admet un corps des modules arithmétique égal à $\mathbb{Q}$.*

5.3.2 Lieux spéciaux de $\mathcal{M}_{1,[2]}$

En genre un, la description d'un lieu spécial associé à un élément de torsion est a priori plus délicate qu'en genre zéro pour deux raisons. Tout d'abord, l'espace de modules ordonné $\mathcal{M}_{1,n}$ est *déjà* une orbifold, et la description qui en découle est plus difficile à manier pour obtenir des descriptions explicites – voir [CEE07],

$$\mathcal{M}_{1,n} \simeq ((\mathbb{Z}^2)^n \times \mathbb{C} \rtimes SL_2(\mathbb{Z}))\backslash\backslash(\mathbb{C}^n \times \mathcal{H} - Diag_n)$$

où $Diag_n = \{(\mathbf{z}, \tau) \in \mathbb{C}^n \times \mathcal{H}$ tel que $z_i - z_j \in \Lambda_\tau$ pour certains $i \neq j\}$, où l'action d'un élément $(\mathbf{n}, \mathbf{m}, z_0) \in ((\mathbb{Z}^n)^2 \times \mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^n \times \mathcal{H} - Diag_n$ est donnée par

$$(\mathbf{n}, \mathbf{m}, z_0).(\mathbf{z}, \tau) = (\mathbf{n} + \mathbf{m}\tau + z_0(1, 1, \cdots, 1), \tau).$$

Dans ce cas, l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}^n \times \mathcal{H}$ est donnée sur les coordonnées par $\sigma.(z_1, \cdots, z_n, \tau) = (z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(n)}, \tau)$.

Mais cette description n'est pas adaptée à nos besoins et nous emploierons une approche différente.

La seconde raison provient de ce qu'un élément de torsion peut être de quatre types d'automorphismes différents : trois de type elliptique et un de type rotation. Reprenons les éléments de torsion de $\Gamma_{1,[2]}$ déterminés dans la propriété 3.2.6 du chapitre 3, et donnons une description exhaustive de l'ensemble des lieux spéciaux de $\mathcal{M}_{1,[2]}$.

Pour chaque $\gamma \in \Gamma_{1,[2]}$ du tableau 5.1, on note $\mathcal{M}(\gamma)$ le lieu spécial associé dans $\mathcal{M}_{1,[2]}$.

Proposition 5.3.3. *L'ensemble des lieux spéciaux de $\mathcal{M}_{1,[2]}$ est constitué d'une strate connexe de dimension deux égale à l'espace tout entier, une strate de dimension un et de deux strates de dimension zéro dont la correspondance avec les éléments de torsion est donnée dans le tableau 5.1. Par ailleurs le lieu spécial de dimension un s'identifie à*

$$\mathcal{M}(\tau) = \mathcal{M}(\gamma_{2,p}) \simeq D_4\backslash\backslash(\mathbb{P}^2 - \{0, 1, \infty\})$$

	γ	(g', n')	$dim(\mathcal{M}([S_{g',n'}]))$
ordre 2	γ_2	$(0,5)$	2
	$\gamma_{2,p}$	$(0,4)$	1
ordre 2	τ	$(1,1)$	1
ordre 3	$\gamma_{3,p}$	$(0,3)$	0
ordre 4	γ_4	$(0,3)$	0
	$\gamma_{4,p}$	$(0,3)$	0
ordre 6	γ_6	$(0,3)$	0

TABLE 5.1: Torsion de $\Gamma_{1,[2]}$.

> *en tant qu'orbifold, où D_4 est engendré dans $\mathfrak{S}_4$ par une transposition et le Vierergruppe V_4.*

La configuration des strates composant les lieux spéciaux de $\mathcal{M}_{1,[2]}$ est illustrée dans la figure 5.3

Démonstration. Pour chaque $\gamma \in \Gamma_{1,[2]}$ de torsion se réalisant sur une surface de Riemann de type topologique $S_{1,2}$, on considère les points de ramification ainsi que les points marqués, ramifiés ou non, et l'on identifie la surface quotient $S_{g',n'} = S/\langle\gamma\rangle$ suivant le tableau 5.1.

Les lieux spéciaux de *dimension zéro* sont des points. On les identifie en donnant l'équation d'une courbe elliptique avec deux points marqués sur laquelle se réalise l'automorphisme.

Ordre 6. La courbe spéciale est isomorphe à $\mathcal{E} : y^2 = x^3 - 1$ d'invariant $j = 0$. L'automorphisme γ_6 est donné en coordonnées par $\psi_6 : (x, y) \mapsto (\rho x, -y)$ où ρ est une racine troisième de l'unité. Sur $\mathcal{E}$ on marque les deux points $(0, i)$ et $(0, -i)$ échangés par ψ_6. On appelle P_6 ce point de $\mathcal{M}_{1,[2]}$. Dans l'espace quotient $S_{0,3}$, les points marqués correspondent aux images des deux points de ramification restants et de l'image des deux points marqués et permutés.

Ordre 4. La courbe spéciale est isomorphe à $\mathcal{E} : y^2 = x(x^2 + 1)$. L'automorphisme d'ordre 4 est donné par $\psi_4 : (x, y) \mapsto (-x, iy)$. L'élément $\gamma_{4,p}$ agit sur cette courbe dont on a marqué les deux points fixes $(0, 0)$ et ∞ de ψ_4. On appelle $P_{4,p}$ ce point de $\mathcal{M}_{1,[2]}$. Dans l'espace quotient $S_{0,3}$, les points marqués correspondent aux deux images des deux points marqués fixés, ainsi qu'à l'image des deux points de ramification d'ordre 2 restant.

L'automorphisme γ_4 agit sur cette même courbe $\mathcal{E}$ dont on a marqué les points $(i, 0)$ et $(-i, 0)$ échangés par ψ_4. On appelle P_4 ce point de $\mathcal{M}_{1,[2]}$. Dans la surface quotient

$S_{0,3}$, les points marqués correspondent à l'image de ces deux points permutés et aux deux points de ramification d'ordre 4.

Nous montrons plus bas que $P_4 = P_{4,p}$.

Ordre 3. La courbe spéciale est isomorphe à celle réalisant l'élément d'ordre 6 et l'automorphisme d'ordre 3 est donné en coordonnées par $\psi_3 = \psi_6^2 : (x, y) \mapsto (\rho^2 x, y)$. On marque deux parmi les trois points $\{(0, i), (0, -i), \infty\}$ fixés par cet automorphisme. Notons que, quelque soit les deux points choisis, le point de l'espace de modules $M_{1,[2]}$ est le même. En effet, si l'on marque ∞ et $(0, i)$, en translatant par $(0, i)$ on obtient la paire $\{(0, i), (0, -i)\}$ – et de même pour la paire $\{(0, -i), \infty\}$. On appelle P_3 ce point de $\mathcal{M}_{1,[2]}$. Dans la surface quotient $S_{0,3}$, les trois points marqués sont images des trois points de ramification.

Considérons le cas de γ_2 dont le lieu spécial est de *dimension deux*. Le lieu spécial $\mathcal{M}(\gamma_2)$ est égal à l'espace tout entier puisque tout point de $\mathcal{M}_{1,[2]}$ admet comme représentant de sa classe d'isomorphisme une courbe elliptique munie de deux points symétriques (x, y) et $(x, -y)$. Sur ces courbes l'élément γ_2 est réalisé par l'involution ψ_2.

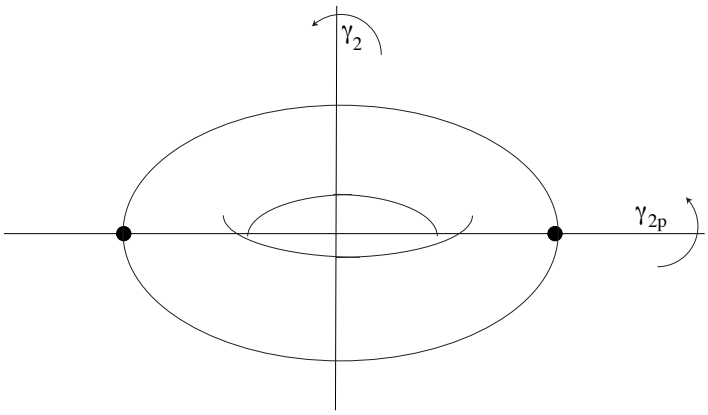


FIGURE 5.1: Représentation de $\gamma_{2,p}$ et γ_2.

Traitons le cas de $\gamma_{2,p}$. Ce difféomorphisme correspond à la rotation d'ordre 2 qui transperce le tore en quatre points de ramification dont deux points sont marqués et fixés. Réalisé sur une courbe elliptique $\mathcal{E}$, ces quatre points de ramification sont exactement les points de 2-torsion de $\mathcal{E}$. Les points marqués sont donc deux parmi les points de 2-torsion de $\mathcal{E}$ et il y a a priori six façons de choisir *deux points parmi quatre*. On voit cependant aisément par une translation, que choisir deux points ou les deux autres complémentaires fournissent le même point de l'espace de modules. Il découle de ceci que le lieu spécial est

un revêtement de degré trois de $\mathcal{M}_{1,1}$ (et aussi que les points P_4 et $P_{4,p}$ correspondant à γ_4 et $\gamma_{4,p}$ sont égaux).

Démontrons que ce lieu spécial est isomorphe au quotient de $\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ par l'application revètement $z \mapsto 1/2(z + 1/z)$, et par l'action du Vierergruppe de $\mathfrak{S}_4$ qui agit « trivialement » sur $\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}$, mais fournit une structure de champ.

En effet, selon la remarque ci-dessus, munir la courbe elliptique de deux points marqués qui sont deux points de 2-torsion équivaut à choisir une partition des quatre points en deux groupes de deux, $\{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\}\}$ où les x_i correspondant aux coordonnées x des points de 2-torsion. L'isomorphisme du lieu spécial $\mathcal{M}(\gamma_{2,p})$ vers $(\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\})/\langle\lambda \sim 1/\lambda\rangle$ est donné par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(\gamma_{2,p}) & \to & (\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\})/\langle\lambda \sim 1/\lambda\rangle \\ \{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\}\} & \mapsto & \lambda = [x_1,x_2,x_3,x_4] \end{array}$$

où $[x_1,x_2,x_3,x_4]$ dénote le birapport des quatres valeurs.

Comme chacun des deux couples déterminant un point de $\mathcal{M}(\gamma_{2,p})$ n'est pas ordonné, l'image du morphisme est également donnée par les birapports

$$[x_2,x_1,x_3,x_4], \quad [x_1,x_2,x_4,x_3], \quad [x_2,x_1,x_4,x_3]$$

et l'on obtient a priori quatre valeurs pour l'image. Mais comme le Vierergruppe V_4 agit trivialement sur le birapport, on obtient deux valeurs, λ et $1/\lambda$.

Ceci montre l'isomorphisme du lieu spécial de $\gamma_{2,p}$ suivant

$$\mathcal{M}(\gamma_{2,p}) \simeq (\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\})/\langle\lambda \sim 1/\lambda\rangle$$

en dehors de la structure supplémentaire de champ donnée par le fait que chaque point admet également d'autres automorphismes.

En effet, chaque point du lieu spécial admet γ_2 comme automorphisme (comme tout point de l'espace de modules). Mais de plus, démontrons que chaque point de ce lieu spécial admet aussi la rotation τ, définie par un axe passant par le trou de genre.

Montrons maintenant que $\mathcal{M}(\gamma_{2,p}) = \mathcal{M}(\tau)$. Pour ce faire, on note que les points de $\mathcal{M}(\tau)$ sont représentés par des courbes elliptiques avec deux points de 2-torsion marqués ; ce sont donc les mêmes points que ceux de $\mathcal{M}(\gamma_{2,p})$. En effet, τ peut être vu comme une translation d'ordre 2 sur le parallélogramme fondamental d'une courbe elliptique, et comme τ échange les 2 points marqués, ils sont donc des points de 2-torsion.

En conclusion, *chaque point du lieu spécial $\mathcal{M}(\gamma_2)$ admet un groupe diédral D_4 comme groupe d'automorphisme engendré par $\gamma_{2,p}$ et τ* (voir figure 5.1), et les lieux spéciaux $\mathcal{M}(\tau)$ et $\mathcal{M}(\gamma_{2,p})$ sont confondus.

Ceci montre que le lieu spécial $\mathcal{M}(\gamma_{2,p})$ est isomorphe à

$$\mathcal{M}(\gamma_{2,p}) \simeq D_4 \backslash\backslash (\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}) \tag{5.3.1}$$

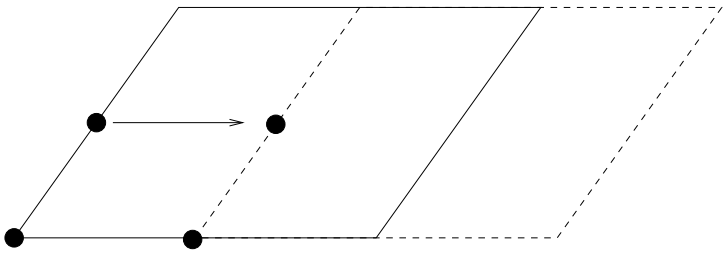


FIGURE 5.2: Points de 2-torsion dans le parallélogramme fondamental.

en tant que champ, où le D_4 est engendré par γ_2, $\gamma_{2,p}$ et τ.

La détermination du lieu spécial de τ a par ailleurs été traité en détail d'un point de vue différent dans [Sch03].

Le quotient 5.3.1 possède deux points marqués – images sous $z \mapsto 1/2(z + 1/z)$ de 0, 1 et ∞, et un point d'orbifold – image de -1. Sur le lieu spécial $\mathcal{M}(\gamma_{2,p})$, ce point d'orbifold correspond à P_4 qui, étant la courbe $y^2 = x(x^2+1)$ munie des points $(0,0)$ et ∞, appartient bien au lieu spécial qui consiste en les points de $\mathcal{M}_{1,[2]}$ représenté par une courbe elliptique avec deux points de 2-torsion marqué.

Bien que n'appartenant pas au lieu spécial $\mathcal{M}(\gamma_{2,p})$, les points P_3 et P_6 réalisant γ_6 et γ_3 se confondent parce que P_3 admet γ_2 comme automorphisme.

□

La figure ci-dessous synthétise la configuration totale des lieux spéciaux de $M_{1,[2]}$.

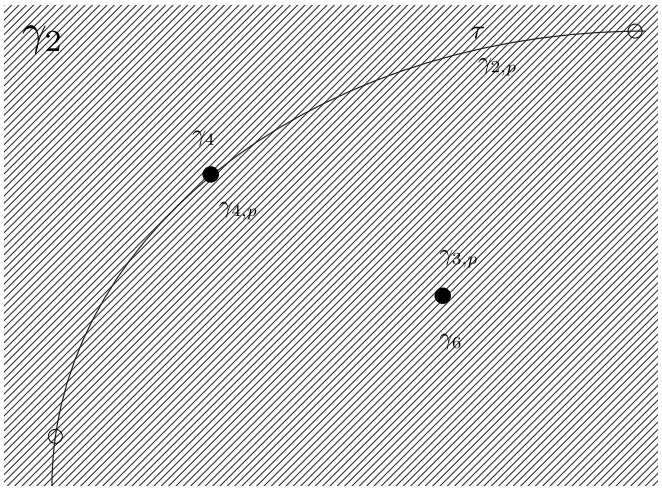


FIGURE 5.3: Lieux spéciaux de $\mathcal{M}_{1,[2]}$.

À partir de l'étude de la torsion de $\Gamma_{1,[n]}$ menée dans le chapitre 4, il semble possible d'utiliser l'approche précédente afin de prolonger cette étude à la détermination de *tous les lieux spéciaux des espaces* $\mathcal{M}_{1,[n]}$, travail que l'auteur souhaite réaliser prochainement.

⋆

⋆ ⋆

Bibliographie

[Bel80] G V Belyi : On Galois extensions of a maximal cyclotomic field. *Math USSR Izv.*, 14:247–256, 1980.

[Bir69a] Joan S. Birman : Mapping class groups and their relationship to braid groups. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 22(2):213–238, 1969.

[Bir69b] Joan S. Birman : On braid groups. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 22(1):41–72, 1969.

[Bir74] Joan Birman : *Braids, links, and mapping class groups.* Annals of mathematics studies. Princeton university press, 1974.

[Bog06] Marco Boggi : Profinite Teichmüller theory. *Math. Nachr.*, 279(9-10):953–987, 2006.

[Bri71] E. Brieskorn : Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe. *Inventiones mathematicae*, 12(1):57–61, 1971.

[Bro90a] S. Allen Broughton : Classifying finite group actions on surface of low genus. *Journal of Pure Applied Algebra*, 69:233–270, 1990.

[Bro90b] S. Allen Broughton : The equisymmetric stratification of the moduli space and the Krull dimension of mapping class groups. *Topology Appl.*, 37(2):101–113, 1990.

[Bro94] Kenneth S. Brown : *Cohomology of groups.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1994.

[CEE07] D. Calaque, B. Enriquez et P. Etingof : Universal KZB equations I : the elliptic case. *Arxiv preprint math/0702670*, 2007.

[Cui08] Yin Cui : Special loci in moduli of marked curves. *Michigan Math. J*, 56:459–512, 2008.

[Deh87] Max Dehn : *Papers on group theory and topology*. Springer-Verlag, New York, 1987. Translated from the German and with introductions and an appendix by John Stillwell, With an appendix by Otto Schreier.

[Del89] Pierre Deligne : Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points. *In* Springer-Verlag, éditeur : *Galois groups over Q*, volume 16, pages 72–297. MSRI publication, 1989.

[DM69] P. Deligne et D. Mumford : The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'IHES*, 36(1):75–109, 1969.

[Dri90] V. G. Drinfel′d : On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. *Algebra i Analiz*, 2(4):149–181, 1990.

[GDH92] G. Gonzalez-Diez et WJ Harvey : Moduli of Riemann surfaces with symmetry. *London Math. Soc. Lect. Note Ser*, 173:75–93, 1992.

[Ger01] Sylvain Gervais : A finite presentation of the mapping class group of a punctured surface. *Topology*, (40):703–725, 2001.

[Gil76] J. Gilman : On conjugacy classes in the Teichmüller modular group. *Michigan Math. J*, 23(1):53–63, 1976.

[GM71] A. Grothendieck et J. Murre : *The Tame Fundamental Group of a Formal Neighbourhood of a Divisor with Normal Crossings on a Scheme*, volume 208 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1971.

[Gro97] Alexandre Grothendieck : Esquisse d'un programme. *In* Pierre Lochak et Leila Schneps, éditeurs : *Geometric Galois Actions I*, volume 242, pages 5–48, 1997.

[Gro03] Alexandre Grothendieck : *Revêtements étales et groupe fondamental*. Documents mathématiques. Société Mathématique de France, 2003.

[GSC01] Alexandre Grothendieck, Jean-Pierre Serre et Pierre Colmez : *Correspondance Grothendieck-Serre*. Societe Mathematique De France, 2001.

[Har66] W.J. Harvey : Cyclic groups of automorphisms of a compact Riemann surface. *Quartely Journal Mathematics Oxford Series*, 17(2):87–97, 1966.

[Har77] Robin Hartshorne : *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[HLS00] Allen Hatcher, Pierre Lochak et Leila Schneps : On the Teichmüller tower of mapping class groups. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 521:1–24, 2000.

[HM75] W. J. Harvey et C. Maclachlan : On mapping class groups and Teichmüller spaces. *Proc. London Math. Soc.*, 30(3):496–512, 1975.

[Hue79] J. Huebschmann : Cohomology theory of aspherical groups and of small cancellation groups. *Journal of Pure Applied Algebra*, 14:137–143, 1979.

[Iha94] Yasutaka Ihara : On the embedding of Gal(Q/ Q) into $\widehat{GT}$. *In* Leila Schneps et Pierre Lochak, éditeurs : *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants*, volume 200, pages 289–305. Cambridge University Press, 1994.

[Iha97] Yasutaka Ihara : The Grothendieck-Teichmüller group and the adelic beta function. *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku*, (998):44–53, 1997. Algebraic number theory and related topics (Japanese) (Kyoto, 1996).

[IM95] Yasutaka Ihara et Makoto Matsumoto : On Galois actions of profinite completions of braid groups. *In Recent Developments in the inverse Galois problem.* M. Fried et al. Eds., AMS, 1995.

[Joh97] D. L. Johnson : *Presentations of groups*, volume 15 de *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, second édition, 1997.

[Ker83] Steven P. Kerckhoff : The Nielsen realization problem. *Ann. of Math. (2)*, 117(2):235–265, 1983.

[Knu83] Finn F. Knudsen : The projectivity of the moduli space of stable curves. II. The stacks M_g, n. *Math. Scand.*, 52(2):161–199, 1983.

[KT08] Christian Kassel et Vladimir Turaev : *Braid Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2008.

[Lic08] W.B.R Lickorish : A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold. *In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 60, pages 769–778. Cambridge Univ Press, 2008.

[LP01] Catherine Labruere et Luis Paris : Presentations for the punctured mapping class groups in terms of Artin groups. *Algebraic & Geometric Topology*, 1(February):73–114, February 2001.

[LS94a] Pierre Lochak et Leila Schneps : The Grothendieck-Teichmüller group and automorphisms of braid groups. *In The Grothendieck theory of dessins d'enfants (Luminy, 1993)*, volume 200 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 323–358. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[LS94b] Pierre Lochak et Leila Schneps : The Grothendieck-Teichmüller group as automorphisms of braid groups. *In The Grothendieck theory of dessins d'Enfants.* L. Schneps, London Mathematical Society, 1994.

[LS97] Pierre Lochak et Leila Schneps : A cohomological interpretation of the Grothendieck-Teichmüller group. *Inventiones mathematica*, (127):571–600, 1997.

[LS06] Pierre Lochak et Leila Schneps : Open problems in Grothendieck-Teichmüller theory. *In Problems on mapping class groups and related topics*, volume 74 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 165–186. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[Luo] Feng Luo : Torsion Elements in the Mapping Class Group of a Surface.

[Luo97] Feng Luo : A Presentation of the Mapping Class Groups. *Mathematical Research Letters*, 4:735, 1997.

[Mat02] Makoto Matsumoto : A simple presentation of mapping class groups in term of Artin groups. *Sugaku Expositions*, 15(2):223–236, 2002.

[Mum67] D. Mumford : Abelian quotients of the teichmüller modular group. *Journal d'Analyse Mathématique*, 18(1):227–244, 1967.

[Nak94] Hiroaki Nakamura : Galois rigidity of pure sphere braid groups and profinite calculus. *Journal Mathematical Sciences University Tokyo*, 1:71–136, 1994.

[Nak97] Hiroaki Nakamura : Galois representations in the profinite Teichmüller modular groups. *London Math. Soc. Lecture Note Series*, pages 159–174, 1997.

[Nak99] Hiroaki Nakamura : Limits of Galois representations in fundamental groups along maximal degeneration of marked curves. I. *Amer. J. Math.*, 121(2):315–358, 1999.

[Nie27] Jakob Nielsen : Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. *Acta Math.*, 50(1):189–358, 1927.

[Noo04] B. Noohi : Fundamental groups of algebraic stacks. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 3(01):69–103, 2004.

[NS00] Hiroaki Nakamura et Leila Schneps : On a subgroup of the Grothendieck-Teichmüller group acting on the tower of profinite Teichmüller modular groups. *Inventiones mathematica*, 141(141):503–560, 2000.

[Oda97] Takayuki Oda : Etale homotopy type of the moduli spaces of algebraic curves. *In Geometric Galois actions, 1*, volume 242 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 85–95. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[Pow78] Jerome Powell : Two theorems on the mapping class group of a surface. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 68(3):347–350, 1978.

[Rom09] Matthieu Romagny : Composantes connexes et irréductibles en familles. ArXiv, 2009.

[Sch94] Claus Scheiderer : *Real and étale cohomology*, volume 1588 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Sch96] Claus SCHEIDERER : Farrell cohomology and Brown theorems for profinite groups. *Manuscripta Math.*, 91(2):247–281, 1996.

[Sch03] Leila SCHNEPS : Special loci in moduli spaces of curves. *In Galois groups and fundamental groups*, volume 41, chapitre 4. Cambridge University Press, 2003.

[Sch06] Leila SCHNEPS : Automorphisms of curves and their role in Grothendieck-Teichmüller theory. *Mathematische Nachrichten*, 279(5-6):656–671, 2006.

[Ser94] Jean-Pierre SERRE : *Cohomologie galoisienne*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1994.

[Ser97] Jean-Pierre SERRE : Two letters on non-abelian cohomology. *In Geometric galois actions : around Grothendieck's esquisse d'un programme*, chapitre 14. Cambridge University Press, 1997.

[Ser03] Jean-Pierre SERRE : *Trees*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Translated from the French original by John Stillwell, Corrected 2nd printing of the 1980 English translation.

[Tsu06] Hiroshi TSUNOGAI : Some new-type equations in the Grothendieck-Teichmüller group arising from geometry of $M_0,5$. *In Primes and knots*, volume 416 de *Contemp. Math.*, pages 263–284. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[Waj83] Bronislaw WAJNRYB : A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface. *Israel J. Math.*, 45(2-3):157–174, 1983.

[Zoo01] Vincent ZOONEKYND : *La tour de Teichmüller-Grothendieck*. Thèse de doctorat, Institut de Mathématiques de Jussieu, 2001.

[Zoo02] Vincent ZOONEKYND : Théorème de Van Kampen pour les champs algébriques. *Annales mathématiques Blaise Pascal*, 9(1), 2002.

Abstract

This thesis deals with Grothendieck-Teichmüller theory and moduli spaces of curves with unordered marked points, more specially with different types of inertia in the corresponding geometric fundamental groups. We extend the known absolute Galois action on divisorial inertia at infinity to an analogous action on stack inertia in genus zero, and on all prime order profinite torsion elements in genus zero and one. In fact, we show that the latter result holds not only for the absolute Galois group but for a new version $\widehat{GS}$ of the Grothendieck-Teichmüller group coming from torsion conditions in genus zero, which as we show, acts on full profinite mapping class groups in all genera.

We show this result by adapting a cohomological principle due to J. P. Serre which reduces torsion of a profinite group to discrete torsion in certain cases. We use this theory to show that prime order profinite torsion in the genus zero and one mapping class groups is conjugate to discrete torsion. We then use this to determine the action of $\widehat{GS}$ on prime order profinite torsion. Finally, we show in genus zero how to obtain the absolute Galois group action on stack inertia by using geometry of special loci.

Keywords. Grothendieck-Teichmüller group, mapping class groups, special loci, moduli spaces of curves with marked points, group cohomology, bonté, discrete and profinite torsion, stack inertia.

Résumé

Cette thèse traite de la théorie de Grothendieck-Teichmüller et des espaces de modules de courbes à points marqués non-ordonnés, plus particulièrement des différents types d'inertie présents dans leurs groupes fondamentaux géométriques. On étend l'action connue du groupe de Galois absolu sur l'inertie divisorielle à l'infini en une action ayant les mêmes propriétés sur l'inertie champêtre en genre zéro, et sur toute la torsion profinie d'ordre premier en genre zéro et un. En fait, nous montrons que ce dernier résultat est valable non seulement pour le groupe de Galois absolu mais pour un nouveau groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{GS}$ issu de conditions de torsion en genre zéro, dont on montre qu'il agit sur les full mapping class groups de genre quelconque.

On établit ce résultat en adaptant un principe cohomologique de J. P. Serre pour réduire, dans certains cas, la torsion d'un groupe profini à celle d'un groupe discret. On utilise cette théorie pour établir que, dans les cas des genre zéro et un, la torsion profinie d'ordre premier est conjugée à la torsion discrète. Ceci permet d'expliciter l'action du groupe $\widehat{GS}$ sur la torsion profine d'ordre premier.

Mots clefs. Groupe de Grothendieck-Teichmüller, mapping class groups, lieux spéciaux, espaces de modules de courbes à points marqués, cohomologie des groupes, bonté, torsion discrète et profinie, inertie champétre.