# Simplifiez vos Lévy en titillant la factorisation de Wierner-Hopf

Vincent Vigon

▶ **To cite this version:**

Vincent Vigon. Simplifiez vos Lévy en titillant la factorisation de Wierner-Hopf. Mathématiques [math]. INSA de Rouen, 2002. Français. NNT : 2002ISAM0002 . tel-00567466

**HAL Id: tel-00567466**

**https://theses.hal.science/tel-00567466**

Submitted on 21 Feb 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE**

Présentée par

**Vincent Vigon**

En vue d'obtenir le titre de docteur de l'INSA de Rouen

Spécialité : Probabilités

# Simplifiez vos Lévy en titillant la factorisation de Wiener-Hopf.

**Composition du Jury :**

| | |
|---|---|
| J. Bertoin | Professeur, Université de Paris VI, *Rapporteur* |
| R.A. Doney | Professeur, Université de Manchester, *Rapporteur* |
| J.F. Le Gall | Professeur, Université de Paris VI |
| T. Jeulin | Professeur, Université de Paris VII |
| E. Lenglart | Professeur, INSA de Rouen |
| C. Dellacherie | Directeur de Recherche, L.M.R.S, *Directeur de Thèse* |
| S. Fourati | Maître de conférence, I.N.S.A de Rouen, *Directeur de Thèse* |

Thèse préparée au laboratoire de Mathématiques de L'INSA de Rouen

Pourtant, affin que je face fin à ce prologue, tout ainsi comme je me donne à cent mille panerées de beaulx diables, corps et ame, trippes et boyaultx, en cas que j'en mente en toute l'histroire d'un seul mot : pareillement, le feu de sainct Antoire vous arde, mau de terre vous vire, le lancy, le maulubec vous trousse, la caquesangue vous viengne,

*Le mau fin feu de ricqueracque,*
*Aussi menu que poil de vache,*
*Tout renforcé de vif argent,*
*Vous puisse entrer au fondement,*

et, comme Sodome et Gomorre, puissez tomber en soulphre, en feu et abysme, en cas que vous ne croyez fermement tout ce que je vous racompteray en ceste présente *Chronicque* !

François Rabelais
Pantagruel (1532).

## Remerciements

Cher lecteur, nous voilà rassemblés pour la traditionnelle remise des Mercidors. Y seront récompensées :
- toutes les personnes sans lesquelles cette thèse serait néant, vacuité ou charabia.
- toutes les personnes qui ont allégé mon dur labeur en colorant le quotidien du labo.

Pour le Mercidor du plus merveilleux chercheur étranger sont nominés et récompensés :
- Ron Doney qui, par sa conjecture, a éveillé ma curiosité reptilienne et qui fut un interlocuteur et un randonneur acharné lors de mon séjour à Manchester.
- René Schilling, qui m'accueillit chaleureusement à Brighton, et m'initia aux "Lévy type processes" et aux "Quizz Loto Pub".

Pour le Mercidor du plus formidable chercheur français est nominé et récompensé :
- Jean Bertoin, qui m'a énormément aidé par l'entremise de son livre et de ses articles ; puis en tête à tête, quand nous nous sommes rencontrés à Aarhus. La troisième partie de cette thèse repose sur ses travaux.

Pour le Mercidor du jury en or sont nominés et récompensés tous les membres du jury, en particulier MM. Jeulin et Le Gall qui, bien qu'avertis tardivement, ont accepté cette mission et l'ont accomplie avec brio.

Pour le Mercidor du plus inspiré professeur sont nominés et récompensés :
- MM. Reich, Diot et Babot, professeurs de physique pour m'avoir donné goût aux sciences expérimentales et théoriques.
- M. Fraix-Burnet et M. Stettner, pour ces deux étés studieux mais décontractés, dans le giron de l'astrophysique et des mathématiques financières.
- Eric Lenglart dont la rigueur mathématique et l'exigence m'ont appris à faire moins d'erreurs.
- Witold Respondek qui, par son dynamisme et sa gentillesse, m'a initié aux joies de l'analyse.
Merci à eux de m'avoir petit à petit orienté vers la voie palpitante de la recherche.

Pour le Mercidor du plus artistique graphiste est nominé et récompensé :
- Yves Czukerman, dompteur de CorelDraw.

Pour le Mercidor du plus rigoureux orthographiste est nominé et récompensé :
- Toute ma famille qui, par le nombre de corrections effectuées en une semaine, mériterait d'être dans le livre des records.

- M. Pauchet Alexandre qui travaille, un étage plus bas, au remplacement définitif de l'humain par la bête siliconiaque, mais qui demeure malgré tout mon ami.

Pour le Mercidor du plus chimiste machiste est nominé et récompensé :
- Wassef, qui, par ses récits dignes de Shahrâzâd, m'a permis de manger sans avoir l'estomac tordu par des équations obnubilantes.

Pour le Mercidor de la plus conviviale des pauses café sont nominés et récompensés :
- Sandra, dont les 15 cafés par jour lui fournissent l'énergie indispensable pour gérer et animer la troupe d'élèves et d'enseignant-chercheurs qui déboule chaque jour dans son secrétariat.
- Omar, responsable du réseau informatique, ne lésinant pas sur les coups de mains, Dieu sait s'ils sont nécessaires avec notre matériel...
- Sophie, qui prend la pause café avec un boc de thé (on aura tout vu !).
- Jean-Guy et ses invités qui m'ont permis de me perfectionner en anglais et en solitons.

Un Mercidor polyvalent est décerné à :
- M. Dellacherie, professeur génial et original, partenaire aux échecs qui a l'obligeance de perdre de temps en temps, co-auteur de la bible, co-directeur de thèse, patient auditeur d'exposé et enfin, fervent cultivateur de motivation.

Le prix spécial du jury est de tout cœur décerné à Magali qui, tant de fois, a lu et corrigé, écouté et conseillé, cajolé et réveillé, son petit apprenti-chercheur.

La palme d'or est attribuée sans hésitation à une personne aux indénombrables qualités :
- Une patience infaillible même quand je dis des grosses bêtises.
- Des idées plein la tête explosant sur des tableaux hiéroglyphiques.
- Une compagnie distinguée doublée d'un physique époustouflant.
J'ai nommé, la muse des probabilités : Sonia Fourati (Flash, applaudissement, standing ovation).

Je remercie sincèrement Sonia pour les nombreux midis et après-midis qu'elle n'a consacrés rien qu'à moi ; un monopole qui fait palir de jalousie tous les thésards de France et de Navarre. Je remercie Sonia pour toutes ses idées, les pratiques comme les lumineuses ; elles imprègnent cette thèse du petit lemme au théorème. Il ne serait sans doute pas sorti grand chose de ma petite tête sans la catalyse avisée de ma patronne. Nous n'étions pas toujours d'accord, et nos réunions ont parfois tourné en pugilats verbaux... les processus de Lévy déchaînent les passions. Je te remercie, Sonia, pour ces trois années qui sont de loin les plus enrichissantes et les plus agréables de toutes mes études.

## Avant les propos mathématiques

Quand j'explique en quoi consiste mon travail, immanquablement, on me gratifie d'un :
"À quoi ça sert ?"
Terrible sentence, à laquelle je réponds :
"À rien !"
Mais si mon interlocuteur, ou lecteur, est curieux, ce "rien" mérite d'être commenté.

Certe, cette réponse est fausse : $X\%$ des mathématiques actuelles trouveront une utilité dans $Y$ années. Cependant, les mathématiques se sont dispersées tous azimuts, empruntant des chemins si tortueux, si éloignés du monde physique, que le $X$ est très petit. De plus, les mathématiques se sont enfoncées si loin dans l'abstraction que le $Y$ est très grand. En vérité, le "À rien" est une bonne approximation des faits.

En outre, ne servir à rien n'est en rien dégradant. En caricaturant un peu, seuls les agriculteurs ont vraiment un métier utile : ils nourrissent les hommes. Les autres professions servent plus ou moins à "divertir". L'industrie lourde, la médecine se trouvent au bas de l'échelle du divertissement, un fabricant de téléphone portable se situe au milieu, un clown et un mathématicien siègent au sommet. Bien entendu, les mathématiques divertissent essentiellement les mathématiciens. Et alors ? Ces étudiants insatiables, ayant passé des examens que même le président de la république aurait ratés, n'ont-t-ils pas mérité de s'amuser le restant de leur vie ?

Les maths sont un jeu planétaire, un Lego universel, dont les règles sont définitives et indiscutables ; les enjeux, bien qu'immatériels, sont bien plus excitants que la finitude dérisoire des Dollars de cette terre. Dénicher un résultat, c'est extraire un diamant de vérité d'une mine d'obscurantisme. En contrepartie, sécher sur un problème est aussi frustrant que d'attendre devant la porte obstinément close de sa dulcinée. L'insomnie n'est pas loin, la folie guette, mais le jeu en vaut la chandelle.

Trêve de verbiage, les maths n'ont pas le monopole de la futilité : une thèse de linguistique (De la quille à la pomme du mât), d'histoire (La vie des chevaliers paysans de l'an mil sur les bords du lac de Paladru )[1], de littérature (Le langage poétique du vent dans 'Vents' de Saint-John Perse) n'ont aucune velléité d'utilité, elles n'en sont pas pour autant dépourvues de charme (je ne juge que par le titre). À l'inverse, certaines thèses assurément utiles semblent peu ragoûtantes (Étude expérimentale et modélisation cinétique du craquage thermique de composés aromatiques soufrés en réacteur inerte fermé). Par ailleurs, nombreuses sont les disciplines, créées dans un but précis, qui se sont peu à peu entourées d'un petit cocon

[1] Allusion au fameux film : "on connait la chanson". Les trois autres titres de thèses sont authentiques.

d'abstraction et qui évoluent maintenant à dix mille lieues des réalités terrestres.

Mais qu'importe ! Conceptualiser plutôt que confectionner, et récolter des nèfles plutôt que du blé, tel est l'apanage des thésards à l'université (pour les thésards de Bouygue télécom, c'est l'inverse).

J'ai entendu parler d'une thèse sur des capteurs d'un type nouveau (des capteurs résonateurs, si mes souvenirs sont bons), qui est restée au stade fœtal, faute de fonds pour construire les susdits capteurs. J'ai quand même de la chance d'avoir pu clôturer cette thèse malgré mes ruineuses dépenses en cartouches de stylo encre !

Sous toute argumentation se cache un vague fond de fanatisme, je vous révèle le mien sans plus tarder. Tant qu'à faire un truc pas très utile, autant faire des maths. Quitte à faire des maths autant qu'elles soient "esthétiques". Mieux vaut éviter les calculs sans fin, les objets à dix paramètres et quarante variantes, les courbes théoriques alignées sur des courbes expérimentales, les tableaux de chiffres en double précision, les preuves nécessitant 800 heures de calcul à un Cray-T1. Laissons tout cela ! Si un calcul est trop long, contournons-le, changeons de cap. Si toute la discipline se résume à des calculs, qu'à cela ne tienne, changeons de discipline. Quant aux ordinateurs, ces "prolongements de notre cerveau", ils peuvent être utiles, certes. Mais ils peuvent aussi devenir essentiels, et le docteur ès math se transforme en médecin ès bug, dont la récompense ultime est l'artefact numérique d'un calcul abscons. Plus les machines gagnent en puissance et plus elles intègrent des équations complexes, hors de notre portée ; plus l'informatique progresse et plus le chercheur interprète, à défaut de comprendre. Bon an, mal an, les ordinateurs aident les mathématiques à se replonger dans l'empirisme.

Comment aimer la programmation quand on a goûté à la démonstration ? Astucieuses ou limpides, courtes ou laborieuses, les idées s'enchaînent, se croisent, les lemmes se succèdent jusqu'à l'obtention du théorème. Les théorèmes s'agencent, engendrent des corollaires et se multiplient un siècle durant pour former une théorie, bien ficelée, reposant généralement sur des axiomes tout simples comme "accroissement indépendant et stationnaire". Quel pied !

Les processus de Lévy, les héros de cette thèse, sont de plus en plus impliqués dans les mathématiques financières, discipline qui modélise les cours de la Bourse et détermine le prix des options (opérations boursières du type : je te donne 10 petits Lu maintenant et tu me les paies dans trois mois). Ce domaine est intéressant d'un point de vue théorique, mais personnellement, je n'investirais pas ma passion, mon énergie et mon temps, pour finalement enrichir des zinzins [2] plein aux as. Les chercheurs devraient laisser les financiers spéculer, fusionner et licencier tranquillement, pour se consacrer à leur petit monde

[2] En jargon boursier, les zinzins sont les investisseurs institutionnels (banque, assurance, etc.)

enchanté. Heureusement, les mathématiques financières se développent tellement vite que la recherche se détache progressivement des banques et de leur maussade réalité.

Les travaux présentés dans cette thèse ont deux grands défauts pour être appliqués un jour dans les modélisations. Premièrement, les propriétés que nous énonçons sont relatives à des temps infiniment petits, tandis que, dans la réalité financière, le temps ne peut être découpé au delà d'un certain seuil. Deuxièmement, ils concernent des propriétés (presque) sûres, et les décideurs s'intéressent plutôt aux propriétés en loi (en moyenne), car pour la finance, les évènements sûrs et certains sont, soit flagrants, soit impossibles (par exemple, un des axiomes des mathématiques financières stipule que l'on ne peut jamais gagner d'argent, en achetant et revendant des actions, sans prendre de risques).

Mais tout n'est pas rose dans le monde des maths. Tout travailleur a besoin d'un minimum de reconnaissance. Un cadre, de retour chez lui, dira à sa femme : "Chérie, aujourd'hui j'ai passé un coup de fil qui a fait gagné 500 k$ à ma boîte". Une fois que ce cadre génial aura expliqué que 1 k$, c'est environ 1000 Euro, sa femme médusée ne tarira plus d'éloge de la soirée et de la nuit. Le soir du grand jour, quand rentrant chez moi, j'ai déclaré, "$c > 0$ équivaut à $K^+ < \infty$", ce fut plus long à expliquer alors même que mon amie est statisticienne. Il est réellement difficile de faire partager à son entourage sa passion pour des objets mathématiques impalpables (mais qui ne tente rien n'a rien : vous trouverez en annexe une courte vulgarisation sur les Lévy). Bien entendu, il y a la "reconnaissance de ses pairs". Mais, quelque part, c'est tricher. Les pairs forment un public compatissant, voire solidaire. Quand on joue un petit air de jazz dans la rue, les applaudissements d'un badaud vous procurent plus de baume au cœur que ceux d'un ami qui joue lui aussi de cette musique à faible popularité.

Cependant, le statut de thésard a cet énorme avantage : chaque semaine vous pouvez faire partager à votre responsable de thèse, toutes vos joies et toutes vos déconvenues. C'est vraiment très agréable, surtout quand on travaille avec une déesse.

En bref, à l'heure où les scientifiques nous annoncent la venue des ordinateurs intelligents, l'imminence des clones, des virus aux gènes mutants, la fin de toutes les tares, des maladies et de la vieillesse chez les gens qui ont une bonne couverture sociale... À l'heure où, tout compte fait, on trouve que la technologie, telle qu'elle est, n'est pas si mal ; on se contente de la climatisation intérieure, du home theater et du shampoing racines-grasses-pointes-sèches... A l'heure où il est peut-être temps d'arrêter d'avancer (tous les deux millénaires, une pause s'impose), il n'est pas vain de rechercher des vérités qui ne servent à rien.

# Table des matières

**INTRODUCTION** **13**

**OUTILS ET BRICOLAGES UTILES** **17**

**0 Plantons le décor** **19**

0.1 Définition d'un processus de Lévy . . . . . 19

0.2 Définition de l'exposant . . . . . 20

0.3 Les subordinateurs d'échelle . . . . . 21

0.4 La factorisation de Wiener-Hopf . . . . . 23

0.5 Les exposants des subordinateurs d'échelle . . . . . 25

0.6 Mesure potentielle et transformation de Fourier/Laplace . . . . . 26

0.7 Notations et bizarreries . . . . . 26

**1 La formule Lévy-Khintchine de l'autre côté du miroir** **31**

1.1 Les compensées de mesures . . . . . 31

1.2 Queues, compensations et dérivations . . . . . 32

1.3 La formule de Lévy-Khintchine . . . . . 33

1.4 Quand $X$ est à variation finie . . . . . 35

1.5 Quelques comportements de $\psi(iu)$ en $+\infty$ . . . . . 35

1.6 Comportement de $\psi(iu)$ en $0+$ . . . . . 39

**2 Les 2+1 critères de Rogozine** **43**

2.1 Les deux critères de Rogozine . . . . . 43

2.2 Rappels sur la reptation . . . . . 44

2.3 Un critère pour la reptation . . . . . 45

**3 Factorisation de Wiener-Hopf de la somme de deux processus de Lévy** **49**

3.1 Introduction . . . . . 49

3.2 Soustraction d'un subordinateur . . . . . 50

3.3 Passons Wiener-Hopf au logarithme ! . . . . . 53

3.4 Factorisation de Wiener-Hopf de $X + Y$ . . . . . 54

**4 Factorisation de Wiener-Hopf sur l'axe réel** **59**

4.1 Introduction . . . . . 59

4.2 Prolongement de la factorisation de Wiener-Hopf . . . . . 60

4.3 Le théorème d'inversion . . . . . 61

4.4 Transformation de Girsanov . . . . . 62

4.5 La loi de $S$ caractérise celle de $X$ ? . . . . . 64

**AUTOUR DES ÉQUATIONS AMICALES** **67**

**5 Équations amicales** **69**

5.1 Énoncé des équations amicales . . . . . 70

5.2 Démonstrations . . . . . 72

5.3 Théorème de Rogozine . . . . . 75

5.4 Supports de *dpo* et *dne* . . . . . 76

5.5 Annexe du chapitre . . . . . 79

**6 Comparaison des mesures de Lévy de $X$ et de $H$ 83**

6.1 Préliminaire : Le lemme de l'encadreur . . . . . 83

6.2 Les fonctions intégrables par $d\pi$ et *dpo* . . . . . 85

6.3 Comparaison des queues en 0+ . . . . . 88

6.4 Densité de *dpo* quand $X$ rampe vers le bas. . . . . 91

6.5 Comparaison des régularités . . . . . 94

6.6 Points de croissance quand $X$ rampe vers le haut . . . . . 94

**7 Le problème des amis 97**

7.1 Introduction . . . . . 97

7.2 Théorème des amis . . . . . 98

7.3 Philanthropes . . . . . 101

**8 Lévy à variation finie 107**

8.1 Prédominance de la dérive . . . . . 107

8.2 Visite immédiate . . . . . 108

**9 Les vieux jours du processus de Lévy 111**

9.1 Introduction . . . . . 111

9.2 Quand l'espérance est bien définie . . . . . 111

9.3 Théorème de Kesten . . . . . 113

9.4 Théorème d'Erickson . . . . . 115

**10 Reptation 119**

10.1 Théorème Kaa . . . . . 119

10.2 Renforcement des hypothèses . . . . . 120

10.3 Démonstration du théorème Kaa . . . . . 121

10.4 Corollaires du théorème Kaa . . . . . 123

10.5 Les sauts de $S$ s'accumulent-ils ? . . . . . 124

**RELIEF DES TRAJECTOIRES** **129**

**11 Étude d'un subordinateur bivarié et comportement de $\frac{S_t}{t}$** **131**

11.1 Introduction . . . . . 131

11.2 Étude de $\frac{\Delta Y_t}{Z_t^-}$ en 0+ . . . . . 132

11.3 Étude de $\frac{Y_t}{Z_t}$ en 0+ . . . . . 133

11.4 Comportement de $\frac{\Delta Y_t}{Z_t^-}$ en $+\infty$ . . . . . 135

11.5 Comportement de $\frac{Y_t}{Z_t}$ en $+\infty$ . . . . . 136

11.6 Comportement de $\frac{S_t}{t}$ en 0+ . . . . . 138

11.7 Comportement de $\frac{S_t}{t}$ en $+\infty$ . . . . . 139

**12 Processus Abrupts, exemples et caractérisation** **143**

12.1 Definition, caractérisation et exemples . . . . . 143

12.2 Démonstrations . . . . . 145

**13 Les dérivées de Dini le long des trajectoires Abrupts** **153**

13.1 Comportement $dL$-presque-partout . . . . . 153

13.2 Comportement partout . . . . . 155

13.3 Classification des points . . . . . 157

**ANNEXES** **165**

A : Simulations de processus de Lévy stables . . . . . $\oplus$

B : Tout, tout, tout, vous saurez tout sur les Lévy . . . . . $\otimes$

# Introduction

Cette thèse est consacrée à la théorie des fluctuations des processus de Lévy, discipline qui consiste à observer les trajectoires en se focalisant plus précisément sur les extrema locaux et globaux. L'outil central pour cela est la factorisation de Wiener-Hopf qui décompose l'exposant de Lévy en un produit de deux termes, l'un décrivant les maxima et l'autre les minima.

Dans les première et deuxième parties, nous "titillons" la factorisation de Wiener-Hopf en l'inversant par Fourier et en exploitant son prolongement analytique. Cela nous permet de redémontrer divers résultats classiques (Théorèmes de Rogozin, de Bertoin, de Kesten-Erickson, loi forte des grands nombres) avec une méthode analytique simple. Par ce même chemin, nous aboutissons à un critère de reptation basé uniquement sur la mesure de Lévy.

Dans la troisième partie nous étudions le subordinateur d'échelle bivarié (dont l'exposant est l'un des deux termes de la factorisation). En comparant la composante spatiale et la composante temporelle de ce subordinateur bivarié, nous calculons des dérivées de Dini relatives aux trajectoires.

### Partie I : OUTILS ET BRICOLAGES UTILES

**Chapitre 1 : La formule Lévy-Khintchine de l'autre côté du miroir .** La formule de Lévy-Khintchine indique que l'exposant de Lévy est la transformée de Fourier d'une distribution tempérée. La double primitive de cette distribution est, sous certaines hypothèses, une fonction intégrable. Cette propriété très simple constitue l'un des fondements de nos travaux. Elle permet notamment d'appliquer à l'exposant de Lévy des théorèmes classiques sur la transformée de Fourier des fonctions.

**Chapitre 2 : Les 2+1 critères de Rogozine.** L'intégrale $\int_0^1 \mathbf{P}[X_t > 0]\frac{dt}{t}$ est infinie ssi le processus de Lévy $X$ visite $]0,\infty[$ immédiatement. L'intégrale $\int_1^\infty \mathbf{P}[X_t > 0]\frac{dt}{t}$ est infinie ssi le maximum global de $X$ est infini. Ce sont les deux critères de Rogozine dont nous rappelons brièvement les démonstrations. Nous obtenons un critère de reptation en considérant la fonction $x \mapsto \int_0^1 \mathbf{P}[X_t > x]\frac{dt}{t}$

**Chapitre 3 : Factorisation de Wiener-Hopf de la somme de deux processus de Lévy.** Nous donnons des expressions des subordinateurs d'échelle relatifs à $X + Y$ :
- Quand $(X, Y)$ est un processus de Lévy bivarié avec $Y$ décroissant,
- Quand $X$ et $Y$ sont indépendants.

Ces expressions, d'aspect technique, ont des applications sympathiques. Par exemple à la

fin de ce chapitre, nous les utilisons pour montrer la propriété suivante : Si $X$ est à variation infinie et $Y$ à variation finie, alors $X+Y$ rampe vers le haut ssi $X$ rampe vers le haut. Plus loin, chapitre 9, nous les exploiterons pour redémontrer la loi des grands nombres et un théorème de Kesten.

**Chapitre 4 : Factorisation de Wiener-Hopf sur l'axe réel.** Lorsque le procesus de Lévy admet un moment exponentiel ($\exists q \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tel que $\mathbf{E}|e^{qX_1}| < \infty$), la factorisation de Wiener-Hopf en espace-temps se prolonge sur un domaine contenant un intervalle de $\mathbb{R}$. En exploitant cela, nous montrons que la loi du processus des suprema $S_t = \sup\{X_t : s \leq t\}$ détermine la loi du processus de Lévy $X$ (dans le sens où deux processus de Lévy de loi différente ne peuvent avoir des processus des suprema de même loi).

## Partie II : AUTOUR DES ÉQUATIONS AMICALES

Dans cette partie, nous travaillons avec la factorisation de Wiener-Hopf en espace que nous notons :

$$\psi(z) = \check{\kappa}(z)\kappa(z)$$

où :

- $\psi$ est l'exposant de Lévy de notre processus de Lévy générique $X$.
- $\kappa$ est l'exposant de $H$ : le subordinateur d'échelle ascendant.
- $\check{\kappa}$ est l'exposant de $\check{H} = -\widehat{H}$ : le co-subordinateur d'échelle descendant.

**Chapitre 5 : Équations amicales.**
$\hookrightarrow$ En transformant l'équation $\psi = \check{\kappa}\kappa$ par l'inversion de Fourier, nous obtenons l'équation amicale : une égalité de convolution reliant la mesure de Lévy de $X$ à celles de $H$ et $\check{H}$.
$\hookrightarrow$ En transformant l'équation $\kappa = \psi(1/\check{\kappa})$ par l'inversion de Fourier, nous obtenons l'équation amicale inversée : une égalité de convolution reliant la mesure de Lévy de $H$ à la mesure de Lévy de $X$ et à la mesure potentielle de $\check{H}$.
Nous donnons ensuite deux applications immédiates :
$\hookrightarrow$ Avec l'équation amicale nous redémontrons très simplement le théorème de Rogozin (Si $X$ est à variation infinie alors $\overline{\lim}_{t\to 0} \frac{X_t}{t} = +\infty$).
$\hookrightarrow$ Avec l'équation amicale inversée nous déterminons le support de la mesure de Lévy relative à $H$.

**Chapitre 6 : Comparaison des mesures de Lévy de $X$ et de $H$.** Notons $d\pi$ la mesure de Lévy de $X$ et *dpo* celle de $H$. Nous comparons $d\pi 1_{\mathbb{R}^+}$ et *dpo* en observant leur queue, leur régularité (absolue continuité, atome et partie singulière) et les fonctions qu'elles intègrent. Les trois propriétés suivantes : $X$ rampe vers le bas, $X$ ne visite pas $]-\infty, 0[$ immédiatement,

$X$ converge vers $+\infty$, traduisent une certaine domination des sauts positifs de $X$ sur les sauts négatifs. Dans ces trois cas, nous constatons logiquement que les mesures $d\pi 1_{\mathbb{R}^+}$ et *dpo* présentent de fortes similitudes (fonctions de queue équivalentes, même régularité...). Nous en déduisons un critère d'existence des points de croissance, formulé avec la mesure de Lévy, valable lorsque $X$ rampe vers le haut. Par ailleurs, quand $X$ rampe vers le bas, *dpo* admet une densité que nous étudions en détails.

**Chapitre 7 : Le problème des amis.** Étant donné deux subordinateurs quelconques, $H$ et $\widehat{H}$, nous nous demandons s'il existe un processus de Lévy $X$ tel que $H$ et $\widehat{H}$ soient les deux subordinateurs d'échelle relatifs à $X$ ; si tel est le cas, nous disons que $H$ et $\widehat{H}$ sont amis. Cette question fut à l'origine des équations amicales.

Ce travail nous a amené à distinguer une classe particulière de subordinateurs : les philanthropes. Ce sont les subordinateurs dont la mesure de Lévy admet une densité décroissante. Deux philanthropes sont toujours amis.

**Chapitre 8 : Processus de Lévy à variation finie.** J. Bertoin dans [3] donne un critère permettant de déterminer si un processus de Lévy à variation finie, sans dérive, visite $]0, \infty[$ immédiatement. Nous donnons une démonstration alternative de ce théorème en utilisant les équations amicales.

**Chapitre 9 : Les vieux jours du processus de Lévy.** A l'aide du résultat du chapitre 3 et des équations amicales, nous redémontrons la loi des grands nombres et son homologue quand l'espérance n'est pas bien définie : le théorème de Kesten-Erickson.

**Chapitre 10 : Reptation.** En utilisant une technique similaire à celle employée dans les redémonstrations des théorèmes de Bertoin et de Kesten-Erickson, nous donnons un nouveau critère de Reptation, construit uniquement avec la mesure de Lévy. Ce critère répond à une conjecture de R.A. Doney et R.A. Maller formulée dans [15].

Dans un deuxième temps, nous donnons un critère nécessaire et suffisant pour que le processus des suprema $S$ soit continu par morceaux.

## Troisième partie : RELIEF DES TRAJECTOIRES

**Chapitre 11 : Étude d'un subordinateur bivarié et comportement de $\frac{S_t}{t}$ .** Soient $Y$ et $Z$ deux subordinateurs indépendants sans dérive. J. Bertoin dans [3] fournit un critère nécessaire et suffisant pour que le rapport $\frac{Y_t}{Z_t}$ tende vers zéro quand $t$ tend vers zéro. Nous généralisons ce théorème lorsque $(Y, Z)$ est un subordinateur bivarié (mais nous perdons le caractère nécessaire du critère). De la même manière, nous généralisons le théorème

de Kesten-Erickson. Ces résultats, appliqués au processus bivarié d'échelle, permettent de déterminer la limite inférieure de $S_t t$, quand $t$ tend vers $0+$ ou $+\infty$.

**Chapitre 12 : Processus Abrupts, exemples et caractérisation.** Nous étudions une classe particulière de processus de Lévy à variation infinie : Les processus abrupts, caractérisés par des sommets infiniment pointus. Tous les processus rampants sont abrupts ainsi que les processus stables d'indice $\alpha > 1$.

**Chapitre 13 : Les dérivées de Dini le long des trajectoires Abrupts.** Pour un processus de Lévy abrupt, la dérivée à gauche en presque tout temps de record (au sens du temps local) vaut $+\infty$. La dérivée en presque-tout point de croissance vaut $+\infty$. Mais le plus étonnant est le résultat suivant : pour toutes les trajectoires p.s., nous pouvons séparer l'espace des temps en quatre ensembles disjoints en fonction de la finitude des dérivées de Dini. Nous en déduisons que les processus abrupts n'admettent en aucun point des dérivées finies.

# Partie I

# OUTILS ET BRICOLAGES UTILES

A noir, E blanc, I rouge, U vert, O bleu : voyelles,
Je dirai quelque jour vos naissances latentes :
A, noir corset velu de mouches éclatantes
Qui bombinent autour des puanteurs cruelles,

Golfes d'ombres ; E, candeurs des vapeurs et des tentes,
Lances des glaciers fiers, rois blancs, frissons d'ombelles ;
I, pourpres, sang craché, rire des lèvres belles
Dans la colère ou les ivresses pénitentes ;

U, cycles, vibrements divins des mers virides,
Paix des pâtis semés d'animaux, paix des rides
Que l'alchimie imprime aux grands fronts studieux ;

O, suprême Clairon plein des strideurs étranges,
Silences traversés des Mondes et des Anges :
- O l'Oméga, rayon violet des Ses yeux !

Voyelles
Arthur Rimbaud

# Chapitre 0

# Plantons le décor

## 0.1 Définition d'un processus de Lévy

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus sur $\Omega$, càdlàg, à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{\dagger\}$ (ou dans $\mathbb{R}^d \cup \{\dagger\}$, mais nous nous occuperons essentiellement du cas $d = 1$). Le processus $X$ meurt éventuellement en un temps $\zeta$ i.e. l'ensemble $\{t \ : \ X_t = \dagger\}$ est de la forme $[\zeta, +\infty[$. Soit enfin $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration telle que pour tout $t$, $X_t$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$.

Nous dirons que $X$ est un processus de Lévy dans la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si pour toute fonction $f$ sur $\mathbb{R} \cup \{\dagger\}$, telle que $f(\dagger) = 0$, pour tout $s, t > 0$, nous avons :

$$\mathbf{E}[f(X_{t+s} - X_t) \ / \ \mathcal{F}_t]\, 1_{\{t<\zeta\}} \ = \ \mathbf{E}[f(X_s)]\, 1_{\{t<\zeta\}} \qquad \text{p.s.}$$

Cette définition implique que le temps de mort $\zeta$ est, soit nul p.s, soit infini p.s, soit distribué selon une loi exponentielle. Le premier cas ($\zeta = 0$ p.s.) sera tacitement exclu. On aura donc toujours $X_0 = 0$ p.s.

$\hookrightarrow$ Nous appelons subordinateur tout processus de Lévy croissant sur $[0, \zeta[$.
$\hookrightarrow$ Nous appelons co-subordinateur tout processus de Lévy décroissant sur $[0, \zeta[$.
$\hookrightarrow$ Nous appelons Processus de Poisson composé (PPC), les processus de Lévy dont les trajectoires sont constantes par morceaux. Remarquons qu'un Processus de Poisson composé peut être un subordinateur ou un co-subordinateur.

**N.B.** Par la suite, toutes les fonctions que nous considérerons, associeront à † la valeur zéro. Notamment $\mathbf{E}[e^{-zX_t}]$ et $\mathbf{E}[|X_t|^n]$ signifierons $\mathbf{E}[e^{-zX_t}\, 1_{\{t<\zeta\}}]$ et $\mathbf{E}[|X_t|^n\, 1_{\{t<\zeta\}}]$.

## 0.2 Définition de l'exposant

Nous nous donnons maintenant un processus de Lévy $X$ qui nous accompagnera tout au long de cette thèse. Tous les objets mathématiques lui seront implicitement liés. Sa loi est caractérisée par son exposant de Lévy. Il existe de nombreuses conventions pour définir cet exposant. Celle que nous avons adoptée est celle qui est la plus couramment employée quand $X$ est un subordinateur (mais nous l'utilisons ici pour $X$ quelconque).

La Bande Analytique est :

$$BA \quad = \quad \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathbf{E}|e^{-zX_1}| < \infty\}$$

$BA$ est une bande verticale du plan complexe qui contient toujours $i\mathbb{R}$.
Si les sauts positifs de $X$ sont bornés alors $BA$ contient $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Re z \geq 0\}$.
Si les sauts négatifs de $X$ sont bornés alors $BA$ contient $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Re z \leq 0\}$.

L'exposant de Lévy est la fonction d'une variable complexe définie sur $BA$ par les trois propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1/ & \forall z \in BA \quad \mathbf{E}[e^{-zX_1}] = e^{-\psi(z)} \\ 2/ & \psi \text{ est continu sur } BA \\ 3/ & \psi(0) \in \mathbb{R} \end{array}$$

**N.B.** A chaque fois que nous écrirons "$\psi(z)$", il sera sous-entendu, "$\psi(z)$ pour $z$ dans $BA$". Quand nous voudrons parler de la restriction de $\psi$ à l'axe imaginaire, nous noterons $\psi(iu)$. Dans le chapitre 4, nous regarderons $\psi$ sur l'axe réel, nous écrirons alors $\psi(u)$.

Listons quelques propriétés de $\psi$ :

$$\begin{array}{ll} (i) & \forall t \geq 0 \ \forall z \in BA \quad \mathbf{E}[e^{-zX_t}] = e^{-t\psi(z)} \\ (ii) & \psi(z) \text{ est analytique à l'intérieur de } BA \\ (iii) & \forall z \in \mathbb{R} \cap BA \qquad \psi(z) \in \mathbb{R} \\ (iv) & \forall z \in i\mathbb{R} \qquad \Re\psi(z) \geq \psi(0) \geq 0 \end{array}$$

Pour finir, nous notons $\psi_o = \psi(0) \geq 0$.
$\hookrightarrow$ Si $\psi_o = 0$ alors $\zeta = +\infty$ p.s. et nous disons que $X$ ne meurt pas.
$\hookrightarrow$ Si $\psi_o > 0$ alors $\zeta$ suit une loi exponentielle de paramètre $\psi_o$. Nous disons alors que $X$ meurt ou qu'il est tué.

## 0.3 Les subordinateurs d'échelle

Notons $M$ l'ensemble des temps de record, i.e.

$$M = \{t \ : \ \forall s < t \ X_s < X_t\}$$

Notons $S_t = \sup\{X_s : s \leq t\}$ le processus des suprema. À l'exception du cas où $X$ est un PPC, $M$ est p.s. égal à l'ensemble des $t$ tel que $S_t = X_t$.

Nous dirons que $X$ visite $]0,\infty[$ immédiatement si $\inf\{t : X_t > 0\}$ est nul p.s. Dans le cas contraire, $\inf\{t : X_t > 0\}$ est strictement positif p.s. et nous dirons que $X$ ne visite pas $]0,\infty[$ immédiatemment.

### ↬ Quand $X$ visite $]0,\infty[$ immédiatement

Lorsque $X$ visite $]0,\infty[$ immédiatement, $M$ est un ensemble régénératif sans points isolés. On peut alors définir le temps local $L$ de $\{S = X\}$ (voir [1] chap. IV). Ce temps local est défini de façon unique à une constante multiplicative près. Nous fixons cette constante par la condition :

$$\mathbf{E}\int_0^{\zeta} e^{-(1-\psi_o)\,t}\,dL_t \ = \ e^{-1} \qquad \text{ⓝ}$$

Le subordinateur d'échelle spatial $\urcorner$ est l'inverse continu à droite du temps local :

$$t > 0 \qquad \urcorner_t = \inf\{s \ : \ L_s > t\} \qquad\qquad \text{avec } \inf\emptyset = \dagger$$

Le subordinateur d'échelle temporel $H$ est défini par :

$$\forall t \geq 0 \qquad H_t = X_{\urcorner_t} \qquad\qquad \text{avec } H_\dagger = \dagger$$

Le couple $(\urcorner, H)$ est le subordinateur d'échelle bivarié. C'est un processus de Lévy de dimension 2, dont les deux coordonnées sont des subordinateurs. La normalisation que nous lui imposons (ⓝ), s'avère parfois encombrante. Aussi, nous dirons qu'un processus $(\urcorner', H')$ est un subordinateur d'échelle bivarié relatif à $X$ si $\exists c > 0 \ \forall t \ \ (\urcorner'_t, H'_t) = (\urcorner_{ct}, H_{ct})$.

### ↬ Quand $X$ ne visite pas $]0,\infty[$ immédiatement

Quand $X$ ne visite pas $]0,\infty[$ immédiatemment, $M$ est un ensemble régénératif discret. Il s'écrit donc comme la réunion d'une suite $(T_n)$ de temps d'arrêt :

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_n &= \inf\big(\ \{S=X\}\cap\,]T_{n-1},+\infty[\ \big) \qquad\qquad \text{Avec } \inf\emptyset=\dagger \end{aligned}$$

Posons

$$j=\frac{1}{1-\mathbf{E}[\exp\{-(1-\psi_o)T_1\}]} \qquad \text{ⓜ}$$

Donnons nous un processus de Poisson standard $P$ d'intensité $j$, indépendant de $X$ (éventuellement, on peut augmenter l'espace $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ pour obtenir un tel processus).

Le subordinateur d'échelle spatial $\urcorner$ est le processus de Poisson composé défini par :

$$\forall t>0 \qquad \urcorner_t=\sum_{n\geq 0} T_n\ 1_{\{P_t=n\}}$$

Le subordinateur d'échelle temporel $H$ est défini par :

$$\forall t\geq 0 \qquad H_t=X_{\urcorner_t} \qquad\qquad \text{avec } H_\dagger=\dagger$$

Le couple $(\urcorner,H)$ est le subordinateur d'échelle bivarié. C'est un processus de Lévy de dimension 2 dans la filtration $\big(\mathcal{F}_{\urcorner_t}\vee\sigma(P_s:s\leq t)\big)_{t\geq 0}$. Ces deux composantes sont à la fois des subordinateurs et des processus de Poisson composés. Remarquons que la définition de $(\urcorner,H)$ est subordonnée au choix arbitraire du processus de Poisson standard $P$.

Lorsque $X$ ne visite pas $]0,\infty[$ immédiatement, nous dirons qu'un processus $(\urcorner',H')$ sur $\Omega$ est un subordinateur d'échelle bivarié si c'est un processus de Lévy de dimension 2 dans une filtration éventuellement plus grosse que $(\mathcal{F}_{\urcorner_t})_{t\geq 0}$ et si les images de $(\urcorner',H')$ et de $(\urcorner,H)$ sont p.s. égales.

**Remarque.** Lorsque $X$ est un co-subordinateur, le processus d'échelle bivarié est quand même bien défini. C'est le processus $(\urcorner_t,H_t)=(0,0)1_{P_t=0}\ +\ (\dagger,\dagger)1_{P_t>0}$ .

### ↬ Propriété fondamentale

Le couple $(\daleth, H)$ est maintenant défini dans tous les cas. C'est un processus de Lévy de dimension 2 appelé subordinateur d'échelle bivarié. Nous notons $\Upsilon$ son instant de mort : $\Upsilon = \inf\{t : \daleth_t = \dagger\} = \inf\{t : H_t = \dagger\}$. Le principal intérêt de $(\daleth, H)$ vient de la relation suivante :

$$\overline{\big\{(\daleth_t, H_t) \ : \ t \in [0, \Upsilon[\ \big\}} \quad = \quad \overline{\big\{(t, X_t) \ : \ t \in M\big\}} \qquad \text{p.s.}$$

Notons $S_\infty = \sup\{X_t : t < \zeta\}$ le maximum global de $X$. Notons $\sigma = \sup M$. Si $X$ n'est pas un processus de Poisson composé, alors $\sigma$ est p.s. l'unique instant pour lequel $X$ ou $X^-$ vaut $S_\infty$ (cf. [1]. p.159). Si $X$ est un processus de Poisson composé alors $\sigma$ est le premier instant pour lequel $X$ vaut $S_\infty$. Dans les deux cas :

$$(\daleth_\Upsilon^-, H_\Upsilon^-) = (\sigma, S_\infty) \qquad \text{p.s.}$$

## 0.4 La factorisation de Wiener-Hopf

Nous notons $\Bbbk(\alpha, \beta)$ l'exposant de Lévy de $(\daleth, H)$ :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}^+ \qquad \mathbf{E}[\exp\{-\alpha\daleth_1 - \beta H_1\}] = \exp\{-\Bbbk(\alpha, \beta)\} \ .$$

Les normalisations ⓝ et ⓜ imposent : $\Bbbk(1 - \psi_o, 0) = 1$.

Nous notons :
$\widehat{X} = -X$.
$(\widehat{\daleth}, \widehat{H})$ le subordinateur d'échelle bivarié relatif à $\widehat{X}$.
$\widehat{\Bbbk}(\alpha, \beta)$ l'exposant de Lévy relatif à $(\widehat{\daleth}, \widehat{H})$.

### ↬ Quand $X$ n'est pas un processus de Poisson composé

Dans le cas où $X$ n'est pas un processus de Poisson composé, les exposants $\Bbbk$ et $\widehat{\Bbbk}$ sont reliés par :

La factorisation de Wiener-Hopf en espace-temps :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \ \ \forall z \in i\mathbb{R} \qquad \lambda + \psi(z) = \widehat{\Bbbk}(\lambda, -z)\Bbbk(\lambda, z)$$

L'égalité ci-dessus est prouvée dans [1] p.166. Dans le chapitre 4 nous verrons qu'elle se prolonge pour $z \in BA$ et $\lambda \in \mathbb{C}^+$.

Nous notons $\ell(\lambda) = \Bbbk(\lambda, 0)$ et $\widehat{\ell}(\lambda) = \widehat{\Bbbk}(\lambda, 0)$. Ce sont les exposants des subordinateurs $\gamma$ et $\widehat{\gamma}$. En écrivant la factorisation de Wiener-Hopf en espace-temps pour $z = 0$, on obtient :

La factorisation de Wiener-Hopf en temps :

$$\forall \lambda \geq 0 \qquad \lambda + \psi_o = \widehat{\ell}(\lambda)\ell(\lambda)$$

Nous notons $\kappa(\beta) = \Bbbk(0, \beta)$ et $\widehat{\kappa}(\beta) = \widehat{\Bbbk}(0, \beta)$. Ce sont les exposants des subordinateurs $H$ et $\widehat{H}$. La factorisation de Wiener-Hopf en espace-temps pour $\lambda = 0$ donne :

La factorisation de Wiener-Hopf en espace (ou factorisation de Wiener-Hopf) :

$$\forall z \in i\mathbb{R} \qquad \psi(z) = \widehat{\kappa}(-z)\kappa(z)$$

**Commentaires.** Ceci est une très belle formule ! Elle décompose un objet complexe et muet en deux objets simples et parlants : le couple $(\widehat{\kappa}, \kappa)$ permet de déterminer de nombreux comportements de $X$ (la reptation notamment). Malheureusement, $\psi$ est une "donnée initiale", tandis que $\kappa$ et $\widehat{\kappa}$ ne s'expriment pas explicitement en fonction de $\psi$. Néanmoins, on réussit parfois à décrire les caractéristiques de $\kappa$ ou de $\widehat{\kappa}$ en fonction de celles de $\psi$. Cela permet alors de construire des critères analytiques décrivant certains comportements de $X$. (Nous ferons cela dans la deuxième partie de la thèse).

### ↬ Quand $X$ est un processus de Poisson composé

Lorsque $X$ est un processus de Poisson composé, les exposants $\Bbbk$ et $\widehat{\Bbbk}$ préalablement définis sont reliés par la propriété suivante :

Il existe une fonction strictement positive $\mathbb{I}$ telle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \; \forall z \in i\mathbb{R} \qquad \psi(z) + \lambda = \widehat{\Bbbk}(\lambda, -z)\, \mathbb{I}(\lambda)\, \Bbbk(\lambda, z)$$

**Remarque.** La normalisation implique que $\mathbb{I}(0) = 1$. Ainsi, que $X$ soit un processus de Poisson composé ou non, la factorisation de Wiener-Hopf en espace s'écrit toujours de la même manière : $\psi(z) = \widehat{\kappa}(-z)\kappa(z)$.

## 0.5 Les exposants des subordinateurs d'échelle

L'exposant de $(\daleth, H)$ admet l'expression suivante (cf. [1] p.166) :

$$\forall \alpha > -\psi_o \ \forall \beta \geq 0 \quad \Bbbk(\alpha,\beta) = \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_{]0,\infty[} \Big( e^{-(1-\psi_o)t} - e^{-\alpha t - \beta x} \Big) \mathbf{P}[X_t \in dx] \quad \text{ⓐ}$$

L'exposant de $\daleth$ admet donc l'expression suivante :

$$\forall \alpha > -\psi_o \qquad \ell(\alpha) = \Bbbk(\alpha, 0) = \exp \int_0^\infty \Big( e^{-(1-\psi_o)t} - e^{-\alpha t} \Big) \mathbf{P}[X_t > 0] \, \frac{dt}{t} \qquad \text{ⓑ}$$

Lorsque $\kappa_o \stackrel{\text{def}}{=} \Bbbk(0,0)$ est non nul, nous pouvons calculer le rapport $\Bbbk(0,\beta)/\Bbbk(0,0)$, ce qui nous donne l'expression suivante pour l'exposant de $H$ :

$$\forall \beta \geq 0 \qquad \kappa(\beta) = \Bbbk(0,\beta) = \kappa_o \exp \int_{]0,\infty[} \Big( 1 - e^{-\beta x} \Big) \int_0^\infty \mathbf{P}[X_t \in dx] \frac{dt}{t} \qquad \text{ⓒ}$$

À partir de l'équation ⓐ, R.A. Doney et J. Bertoin ont obtenu dans [6] une égalité très pratique de mesures $\sigma$-finies :

$$\text{sur } \ ]0,\infty[\times]0,\infty[ \qquad \mathbf{P}[X_t \in dx] \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \mathbf{P}[H_u \in dx \ , \ \daleth_u \in dt] \ \frac{du}{u} \qquad \text{ⓓ}$$

En intégrant cette égalité pour $t \in \mathbb{R}^+$ nous obtenons :

$$\text{sur } \ ]0,\infty[ \qquad \int_0^\infty \mathbf{P}[X_t \in dx] \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \mathbf{P}[H_t \in dx] \frac{dt}{t} \qquad \text{ⓔ}$$

Pour finir, donnons l'expression de la fonction $\mathbb{I}$ apparaissant dans la factorisation de Wiener-Hopf en espace temps quand $X$ est un PPC :

$$\forall \alpha > -\psi_o \qquad \mathbb{I}(\alpha) = \exp \int_0^\infty \Big( e^{-(1-\psi_o)t} - e^{-\alpha t} \Big) \mathbf{P}[X_t = 0] \, \frac{dt}{t} \qquad \text{ⓕ}$$

Les fonctions $\mathbb{I}(\alpha)\widehat{\Bbbk}(\alpha,\beta)$ et $\mathbb{I}(\alpha)\Bbbk(\alpha,\beta)$ sont elles aussi des exposants de subordinateurs bivariés. Souvent l'on définit l'exposant d'échelle bivarié comme étant $\mathbb{I}\Bbbk$, mais cela rompt la symétrie.

**N.B.** Quand $X$ meurt, $\mathbf{P}[X_t \in dx]$ n'est pas une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ puisque $\mathbf{P}[X_t \in \mathbb{R}] = e^{-\psi_o t}$. Pour faciliter les calculs, nous utiliserons parfois ${}^\circ X$ le processus $X$ réssuscité i.e. ${}^\circ X$ est un processus de Lévy immortel qui, tué en un temps exponentiel indépendant de paramètre $\psi_o$, a même loi que $X$. On a alors $\mathbf{P}[X_t \in dx] = e^{-\psi_o t}\mathbf{P}[X_t \in dx]$. On peut définir de la même façon $({}^\circ\daleth, {}^\circ H)$ le réssucité de $(\daleth, H)$ mais attention, $({}^\circ\daleth, {}^\circ H)$ n'est pas le processus d'échelle relatif à ${}^\circ X$.

## 0.6 Mesure potentielle et transformation de Fourier/Laplace

Les symboles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{F}$ désignent les transformées de Laplace et de Fourier des fonctions et des distributions. Pour la transformée de Laplace nous prenons la convention habituelle : Si $\varphi$ est une fonction portée par $\mathbb{R}^+$, bornée,

$$\forall z \in \mathbb{C}^+ \backslash i\mathbb{R} \qquad \mathcal{L}[\varphi](z) = \int_0^\infty \varphi(x) e^{-zx} dx$$

Pour la transformée de Fourier nous adoptons la convention suivante : Si $\varphi$ une fonction intégrable,

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{F}[\varphi](iu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-iux} dx$$

La mesure potentielle de $X$ est la mesure $d\mathcal{U}$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\mathcal{U}(x) = \mathbf{E} \int_0^\infty f(X_t) dt$$

où $f$ est une fonction de $\mathbb{R}$ prolongée sur $\mathbb{R} \cup \{\dagger\}$ par la convention $f(\dagger) = 0$.

Quand $d\mathcal{U}$ est $\sigma$-finie, $X$ est dit transient. Mais en pratique, pour les besoins de cette thèse, nous n'utiliserons la mesure potentielle que dans l'un des 3 cas suivants : $X$ meurt, $X$ est un subordinateur ou $X$ est un co-subordinateur.

• Si $X$ meurt ($\psi_o > 0$), $d\mathcal{U}$ est une mesure finie car :

$$\int_{\mathbb{R}} d\mathcal{U} = \int_0^\infty \mathbf{P}[X_t \in \mathbb{R}] dt = \int_0^\infty e^{-\psi_o t} dt = \frac{1}{\psi_o} < \infty$$

et sa transformée de Fourier est donnée par :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \, d\mathcal{U}(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\psi(iu)} \, du \quad = \quad \frac{1}{\psi(iu)}$$

• Si $X$ est un subordinateur alors $d\mathcal{U}$ est portée par $\mathbb{R}^+$. On vérifie facilement que la transformée de Laplace de $d\mathcal{U}$ est bien définie pour $z \in \mathbb{C}^+ \backslash i\mathbb{R}$ et qu'elle vaut $\frac{1}{\psi(z)}$.

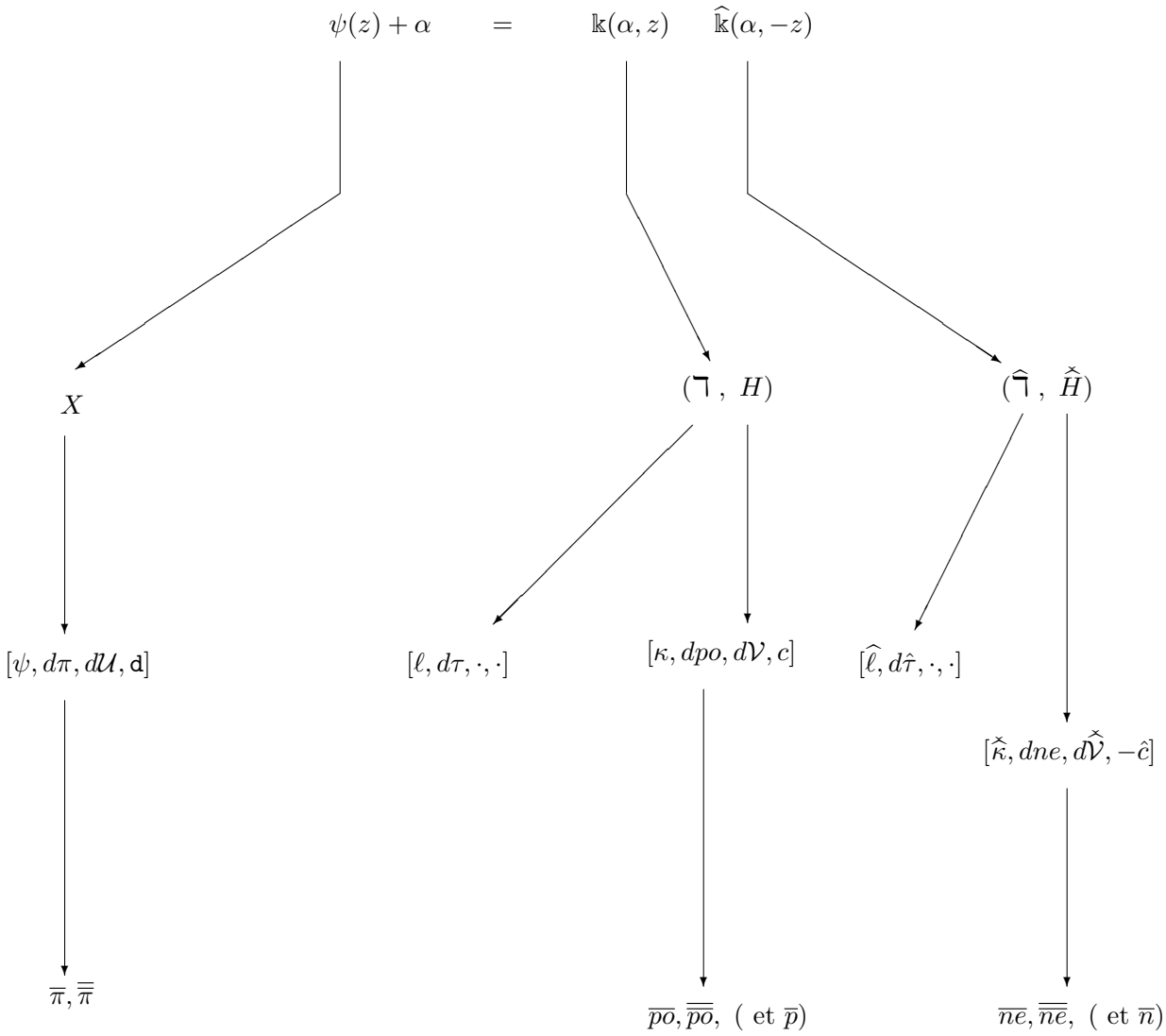
## 0.7 Notations et bizarreries

Voici les abréviations que nous emploierons :

| | |
|---|---|
| PPC | Processus de Poisson Composé |
| VF | Variation Finie |
| VI | Variation Infinie |
| $\mathbb{C}^+$ | $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \Re(z) \geq 0\}$ |

Si $f$ est une fonction localement intégrable et $x$ un réel positif, nous écrirons plus simplement $\int_0^x f$ à la place de $\int_0^x f(u)du$.

Ci-dessous nous donnons un arbre de notation qui pourra vous être utile en cours de lecture. Certaines notations n'ont pas encore été introduites, elles le seront au moment opportun.



Paul Lévy, le père de Marie-Hélène, n'était pas professeur à la Sorbonne mais à l'École polytchnique. C'était un très grand mathématicien, un des fondateurs du calcul des probabilités avec Kolmogorov, et un des plus grands probabilistes de son temps, sinon de tous les temps. [..] Puis un jour, après la mort d'Henri Poincaré, on lui demanda de donner un cycle de six leçons de probabilités pour les polytechniciens. Il ignorait tout des probabilités à cette époque. Il avait trois semaines pour préparer son cours. Dans une lettre à sa femme, il écrivit : ¡¡ Trois semaines, ce n'est pas assez pour lire toute la littérature sur les probabilités, mais c'est suffisant pour tout retrouver moi-même.¿¿ Et c'est ce qu'il fit. Plus que moi encore, il ressentait toute lecture comme une agression. Il lisait donc peu et était régulièrement mis au courent de tout ce qui paraissait par ces collègues. Il resta probabiliste toute sa vie.

Laurent Schwartz
Un mathématicien aux prises avec le siècle (1997)

# Chapitre 1

# La formule Lévy-Khintchine de l'autre côté du miroir

La formule de Lévy-Khintchine indique que l'exposant de Lévy est la transformée de Fourier d'une distribution tempérée. La double primitive de cette distribution est, sous certaines hypothèses, une fonction intégrable. Cette propriété très simple constitue l'un des fondements de nos travaux. Elle permet notamment d'appliquer à l'exposant de Lévy des théorèmes classiques sur la transformée de Fourier des fonctions.

## 1.1 Les compensées de mesures

Soit $d\mu$ une mesure signée qui intègre $1_{[-1,1]^c}$ et $x^2 1_{[-1,1]}$. Notons $BA(d\mu)$ l'ensemble des fonctions $\varphi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, deux fois dérivables en 0 et tel que $\int_{[-1,1]^c} |\varphi| d|\mu| < \infty$.

Nous définissons $\mathsf{CC}_1 d\mu$ : la double compensée tronquée de $d\mu$ par :

$$\forall \varphi \in BA(d\mu) \qquad \left\langle \mathsf{CC}_1 d\mu, \varphi \right\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}} \big(\varphi(x) - \varphi(0) - x 1_{\{-1 \le x \le 1\}}\, \varphi'(0)\big) d\mu(x)$$

$BA(d\mu)$ contient l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$. Le lecteur se convaincra facilement que la restriction de $\mathsf{CC}_1 d\mu$ à $\mathcal{S}$ est une distribution tempérée.

Si en plus $d\mu$ intègre $|x| 1_{[-1,1]^c}$, nous pouvons définir $\mathsf{CC} d\mu$ la double compensée de $d\mu$ :

$$\forall \varphi \in BA(d\mu) \qquad \left\langle \mathsf{CC} d\mu, \varphi \right\rangle \;=\; \int \big(\varphi(x) - \varphi(0) - x\, \varphi'(0)\big) d\mu(x)$$

C'est aussi une distribution tempérée

Si $d\mu$ intègre $|x|1_{[-1,1]}$, nous définissons $\mathsf{C}d\mu$, la compensée de $d\mu$ :

$$\forall \varphi \in BA(d\mu) \qquad \big\langle \mathsf{C}d\mu, \varphi \big\rangle \;=\; \int \big(\varphi(x) - \varphi(0)\big) d\mu(x) \;.$$

qui est encore une distribution tempérée.

La fonction $u \mapsto e^{-iux}$ est dans $BA(d\mu)$ et $f(iu) \;=\; \big\langle \mathsf{CC}_1 d\mu \;,\; e^{iu\cdot} \big\rangle$ est la transformée de Fourier de $\mathsf{CC}_1 d\mu$ au sens des distributions tempérées.

## 1.2 Queues, compensations et dérivations

Une mesure de Lévy est une mesure positive qui intègre $x^2 \wedge 1$. Soit $d\pi$ une mesure de Lévy. Nous définissons sa queue et sa queue intégrée par :

$$\begin{aligned} \overline{\pi}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1_{\{0<x<s\}} + 1_{\{s<x<0\}}) d\pi(s) \\ \overline{\overline{\pi}}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1_{\{0<x<s\}} + 1_{\{s<x<0\}}) \overline{\pi}(s) ds \end{aligned}$$

Nous définissons aussi :

$$\begin{aligned} d\pi^{\circ} &\stackrel{\text{def}}{=} d\pi 1_{[-1,1]} \\ d\pi^{\times} &\stackrel{\text{def}}{=} d\pi 1_{[-1,1]^c} \end{aligned}$$

Puis nous notons $\overline{\pi}^{\circ}$ et $\overline{\pi}^{\times}$ les queues respectives de ces mesures. Pour mémoire : le '$\circ$' renferme l'Origine tandis que le '$\times$' l'eXclut. Pour finir, nous notons $\epsilon(x) = 1_{\{x>0\}} - 1_{\{x<0\}}$ la fonction signe.

**N.B.** Toutes les dérivations qui vont apparaître sont à prendre au sens des distributions tempérées.

**Proposition 1.2.1**

• Si $d\pi$ est une mesure de Lévy qui intègre $|x|1_{[-1,1]^c}$ alors :

$$\Big(\mathsf{C}\,\epsilon\overline{\pi}\Big)' \;=\; -\mathsf{CC}d\pi$$

• Si $d\pi$ est une mesure de Lévy quelconque alors :

$$\Big(\mathsf{C}\,\epsilon\overline{\pi}^{\circ} + \epsilon\overline{\pi}^{\times}\Big)' \;=\; -\mathsf{CC}_1 d\pi$$

• Si $d\pi$ est une mesure de Lévy qui intègre $x^2 1_{[-1,1]^c}$ alors :

$$\overline{\overline{\pi}}'' \quad = \quad \mathsf{CC} d\pi$$

• Si $d\pi$ est une mesure de Lévy qui intégre $x \wedge 1$ alors :

$$\left(\epsilon\overline{\pi}\right)' \quad = \quad -\mathsf{C} d\pi$$

*Démonstration.* Nous ne montrons que les deux premiers points, la démonstration des suivants étant similaire.

*Montrons le premier point.* Supposons donc que $d\pi$ intègre $|x|1_{[-1,1]^c}$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ :

$$\langle\ (\mathsf{C}\epsilon\overline{\pi})'\ ,\ \varphi\rangle \quad = \quad -\langle \mathsf{C}\epsilon\overline{\pi}\ ,\ \varphi'\rangle \quad = \quad -\int_{\mathbb{R}} [\varphi'(x) - \varphi'(0)]\overline{\pi}(x)\epsilon(x)dx$$

$$= \quad -\iint_{\mathbb{R}^2} [\varphi'(x) - \varphi'(0)]1_{\{0<x<u\}} d\pi(u)dx + \iint_{\mathbb{R}^2} [\varphi'(x) - \varphi'(0)]1_{\{u<x<0\}} d\pi(u)dx$$

$$= \quad -\int_{\mathbb{R}} [\varphi(u) - \varphi(0) - u\varphi'(0)]1_{\{u>0\}} d\pi(u) + \int_{\mathbb{R}} [\varphi(0) - \varphi(u) + u\varphi'(0)]1_{\{u<0\}} d\pi(u)$$

$$= \quad \langle -\mathsf{CC} d\pi\ ,\ \varphi\rangle\ .$$

Ainsi la dérivée de $\mathsf{C}\epsilon\overline{\pi}$ est $-\mathsf{CC}d\pi$.

*Montrons le deuxième point :* En utilisant le premier point nous avons $\left(\mathsf{C}\epsilon\overline{\pi}^{\circ}\right)' = -\mathsf{CC}d\pi^{\circ}$ Mais comme $d\pi^{\circ}$ est portée par $[-1,1]$, nous avons : $\mathsf{CC}d\pi^{\circ} = \mathsf{CC}_1 d\pi^{\circ}$.

Regardons $\epsilon\overline{\pi}^{\times}$. C'est une fonction bornée qui présente un saut de hauteur $\int_{\mathbb{R}} d\pi^{\times}$ en zéro. Nous avons donc :

$$\left(\epsilon\overline{\pi}^{\times}\right)' = -d\pi^{\times} + \delta \int_{\mathbb{R}} d\pi^{\times} \quad = \quad -\mathsf{CC}_1 d\pi^{\times}$$

Par linéarité de $\mathsf{CC}_1$ nous avons :

$$\left(\mathsf{C}\epsilon\overline{\pi}^{\circ} + \overline{\pi}^{\times}\right)' = -\mathsf{CC}_1 d\pi^{\circ} - \mathsf{CC}_1 d\pi^{\times} = -\mathsf{CC}_1 d\pi$$

□

## 1.3 La formule de Lévy-Khintchine

La formule de Lévy-Khintchine indique que l'exposant $\psi(iu)$ se met sous la forme suivante :

$$\forall z \in i\mathbb{R} \qquad \psi(z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-zx} - 1 + zx1_{[-1,1]}) d\pi(x) \ -\ \mathtt{b}z^2 \ +\ \mathtt{a}z \ +\ \psi_o$$

où $\mathtt{a}$ est un réel, $\mathtt{b}$ et $\psi_o$ sont des réels positifs et $d\pi$ est une mesure de Lévy.

Définissons maintenant la distribution tempérée suivante :

$$\mathcal{G} \quad = \quad -\,\mathtt{CC}_1 d\pi \;-\; \mathtt{b}\delta'' \;+\; \mathtt{a}\delta' \;+\; \psi_o\delta$$

On a $\langle \mathcal{G}, e^{-iu\cdot}\rangle = \psi(iu)$. Ainsi $\mathcal{G}$ est la transformée de Fourier inverse de $\psi(iu)$. Par ailleurs, l'opérateur

$$f \mapsto \mathcal{G} * f$$

est le générateur infinitésimal du processus $X$ (voir [1] p.24).

Dans [30] p.159 il est montré que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\mathbf{E}|e^{-zX_1}| < \infty \;\Leftrightarrow\; \int_{[-1,1]^c} |e^{-zx}| d\pi(x) < \infty \;.$$

En d'autres termes, $z \in BA$ si et seulement si $\varphi(u) = e^{-zu}$ est dans $BA(d\pi)$. Ainsi pour tout $z$ élément de $BA$, $\langle -\mathtt{CC}_1 d\pi, e^{-z\cdot}\rangle$ a un sens et $\psi(z) = \langle \mathcal{G}, e^{-z\cdot}\rangle$.

Notre marotte tout au long de cette thèse, sera de travailler avec le générateur $\mathcal{G}$ plutôt qu'avec l'exposant $\psi$. En effet, la proposition 1.2.1 permet d'extraire des primitives de $\mathcal{G}$ et ces primitives se manipulent facilement (on peut les convoluer, les tronquer, les majorer...). Dans un premier temps, ces primitives nous permettent d'obtenir les formules suivantes :

**Proposition 1.3.1**
• Si $d\pi$ intègre $|x|1_{[-1,1]^c}$, on a :

$$\forall z \in BA \qquad \frac{\psi(z) - \psi_o}{z} \quad = \quad \left\langle \mathtt{C}\,\epsilon\overline{\pi} - \mathtt{b}\delta' + \tilde{\mathtt{a}}\delta \;,\; e^{-z\cdot} \right\rangle \qquad \text{avec } \tilde{\mathtt{a}} = \mathtt{a} + \int_{[-1,1]^c} x d\pi$$

• Si $d\pi$ intègre $x^2 1_{[-1,1]^c}$, on a :

$$\forall z \in BA \qquad \frac{\psi(z) - \psi_o - \tilde{\mathtt{a}}z}{z^2} \quad = \quad \left\langle \; -\overline{\overline{\pi}} - \mathtt{b}\delta \;,\; e^{-z\cdot} \right\rangle \qquad \text{avec } \tilde{\mathtt{a}} = \mathtt{a} + \int_{[-1,1]^c} x d\pi$$

Ces deux formules découlent directement de la proposition 1.2.1. Nous ferons référence à la première par l'expression : "La formule de Lévy-Khintchine intégrée", et à la deuxième par : "la formule de Lévy-Khintchine deux fois intégrée".

## 1.4 Quand $X$ est à variation finie

On dit que $X$ est à variation finie ($X$ est VF) lorsque p.s. les trajectoires de $X$ sont à variations finies sur tout compact. On montre que $X$ est à variation finie ssi $\int_{[-1,1]} |x| d\pi < \infty$ et $\mathtt{b} = 0$ (cf. [1] p.16). Dans ce cas, l'exposant et le générateur s'écrivent plus simplement :

$$\psi(z) \;=\; -\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-zx} - 1) d\pi(x) \;+\; \mathtt{d}z \;+\; \psi_o$$

$$\mathcal{G} \;=\; -\,\complement d\pi \;+\; \mathtt{d}\delta' \;+\; \psi_o \delta$$

où $\mathtt{d} = \mathtt{a} - \int_{[-1,1]} x d\pi$ est appelée coefficient de dérive ou simplement dérive.

Dans ce cas, la formule de Lévy-Khintchine intégrée est plus simple :

Si $d\pi$ intègre $|x| 1_{[-1,1]^c}$, on a :

$$\forall z \in BA \qquad \frac{\psi(z) - \psi_o}{z} \;=\; \left\langle \epsilon\overline{\pi} + \mathtt{d}\delta \;,\; e^{-z\cdot} \right\rangle$$

## 1.5 Quelques comportements de $\psi(iu)$ en $+\infty$

Les propositions qui suivent, explicitent quelques-uns des liens existant entre le comportement de $X$ en zéro et le comportement de $\psi(iu)$ quand $u$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$, par conjugaison). Les différents points de cette proposition sont des applications simples de la théorie de Fourier, en particulier des deux théorèmes suivants :

**Théorème 1.5.1 (Riemann-Lebesgue)** Si $f$ est une fonction intégrable alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} f(x)\, dx \quad \xrightarrow[|u| \to +\infty]{} \quad 0$$

**Théorème 1.5.2 (Fourier single-integral formula)** Si $f$ est une fonction vérifiant :
• $f$ est intégrable sur $]0, \infty[$.
• $f$ est la différence de deux fonctions décroissantes sur $]0, \infty[$.
• $f(x)$ admet une limite dans $[-\infty, +\infty]$ quand $x$ tend vers zéro.
Alors :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x}\; f(x)\, dx \quad \xrightarrow[|u| \to +\infty]{} \quad \frac{\boldsymbol{\pi}}{4} \lim_{x \to 0+} f(x)$$

On pourra trouver les démonstrations de ces deux théorèmes dans le livre de E.C. Titchmarsh [32], page 11 pour le premier, page 25 pour le second.

**Proposition 1.5.3**
1/ $X$ est un processus de Poisson composé ssi $\psi(iu)$ est bornée.

2/ Si $X$ est à variation finie alors $\lim_{u\to+\infty} \dfrac{\psi(iu)}{u} = i\mathtt{d}$.

3/ Pour tout processus de Lévy $X$, $\lim_{u\to+\infty} \dfrac{\psi(iu)}{u^2} = \mathtt{b}$.

4/ $X$ est à variation finie ssi $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\Re\psi(iu)}{u^2} du < \infty$.

5/ Si $x\big(\overline{\pi}(x) + \overline{\pi}(-x)\big)$ admet une limite dans $[0,\infty]$ quand $x$ tend vers $0+$ alors

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\Re\psi(iu)}{u} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{4} \lim_{x\to 0+} x\big(\overline{\pi}(x) + \overline{\pi}(-x)\big) \;+\; \mathtt{b}(+\infty) \qquad \text{en convenant } 0(+\infty) = 0$$

Les points 1/, 2/ et 3/ sont extraits du livre de J. Bertoin, ils nous serviront à de nombreuses reprises. Nous donnons des démonstrations légèrement différentes des points 2/ et 3/. Nous n'avons pas trouvé de référence pour les points 4/ et 5/, ni pour la proposition suivante.

Soit $f$ une fonction. Nous disons que $\int_0^1 f(x)\,dx$ a un sens si $\int_0^1 f(x)\vee 0\,dx < +\infty$ ou $\int_0^1 f(x)\wedge 0\,dx > -\infty$ et dans ce cas nous notons $\int_0^1 f(x)\,dx$ la différence de ces deux intégrales.

**Proposition 1.5.4** Si $\int_0^1 [\overline{\pi}(x) - \overline{\pi}(-x)]\,dx$ a un sens alors

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\Im\psi(iu)}{u} = \mathtt{a} - \overline{\pi}(1) + \overline{\pi}(-1) + \int_0^1 [\overline{\pi}(x) - \overline{\pi}(-x)]\,dx$$

Pour montrer cette deuxième proposition nous aurons besoin de ce petit lemme :

**Lemme 1.5.5** Supposons que $d\pi \ll dx$.
• Si $X$ est un PPC alors $\lim_{u\to+\infty} \psi(iu) = \int_{\mathbb{R}} d\pi + \psi_o$.
• Si $X$ n'est pas un PPC alors $\lim_{u\to+\infty} \Re\psi(iu) = +\infty$.

**Commentaires.** La morale de la première proposition est : plus le processus de Lévy fait de petits sauts et plus $\Re\psi(iu)$ est grand en $+\infty$. La morale de la deuxième est : plus le processus de Lévy est dissymétrique et plus $|\Im\psi(iu)|$ est grand en $+\infty$.

### ↬ Démonstrations

Dans les démonstrations, nous emploierons les notations suivantes :

$$\begin{array}{lrcl} \forall x>0 & \overline{\pi}_{\Sigma}(x) & = & \overline{\pi}(x)+\overline{\pi}(-x) \\ \forall x>0 & \overline{\overline{\pi}}_{\Sigma}(x) & = & \overline{\overline{\pi}}(x)+\overline{\overline{\pi}}(-x) \\ \forall x>0 & \overline{\pi}_{\Delta}(x) & = & \overline{\pi}(x)-\overline{\pi}(-x) \end{array}$$

*Démonstration de la proposition 1.5.3.*

Pour le point 1/ nous renvoyons le lecteur à [1] p.17.

Tout processus de Lévy peut être décomposé en la somme indépendante d'un PPC et d'un processus de Lévy dont la mesure de Lévy est portée par $[-1,1]$. L'exposant du PPC étant borné, nous supposons sans perdre de généralité que $d\pi$ est portée par $[-1,1]$. Cela nous permet d'utiliser les formes intégrées de la formule de Lévy Khintchine (proposition 1.3.1).

Montrons 2 : Si $X$ est VF alors la formule de Lévy-Khintchine intégrée s'écrit :

$$\frac{\psi(iu)}{iu} \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux}\epsilon(x)\overline{\pi}(x)dx \;+\; \mathtt{d} \;+\; \frac{\psi_o}{iu}$$

Et nous appliquons le théorème de Riemann-Lebesgue à la fonction $\epsilon\overline{\pi}$.

Montrons 3 : la formule de Lévy-Khintchine deux fois intégrée donne :

$$\frac{\psi(iu)}{-u^2} \quad = \quad -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux}\,\overline{\overline{\pi}}(x)dx \;-\; \mathtt{b} \;+\; \frac{\tilde{\mathtt{a}}}{iu} \;+\; \frac{\psi_o}{-u^2}$$

Le théorème de Riemann-Lebesgue, appliqué à la fonction $\overline{\overline{\pi}}$, permet encore de conclure.

Montrons 4. Il s'agit de montrer :

$$X \text{ est VF } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{\Re\psi(iu)}{u^2}du < \infty$$

De la formule de Lévy-Khintchine deux fois intégrée, on déduit :

$$\frac{\Re\psi(iu)}{u^2} \quad = \quad \int_0^{\infty} \cos(ux)\;\overline{\overline{\pi}}_{\Sigma}(x)\,dx \;+\; \mathtt{b}$$

Intégrons cela de 0 à $k>0$ :

$$\int_0^k \frac{\Re\psi(iu)}{u^2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin(kx)}{x}\;\overline{\overline{\pi}}_{\Sigma}(x)\,dx + \mathtt{b}k \quad \xrightarrow[k\to\infty]{} \quad \frac{\boldsymbol{\pi}}{4}\;\overline{\overline{\pi}}_{\Sigma}(0+) + \mathtt{b}\,(+\infty)$$

La convergence provenant du théorème 1.5.2. Par ailleurs, nous avons $\overline{\overline{\pi}}_\Sigma(0+) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| d\pi$. La limite précédente est donc finie ssi $\int_{\mathbb{R}} |x| d\pi(x) < \infty$ et $\mathtt{b} = 0$, ce qui équivaut au fait que $X$ est VF.

Montrons 5. Il s'agit de montrer : Si $x\overline{\pi}_\Sigma(x)$ admet une limite $l \in [0, +\infty]$ quand $x$ quand vers $0+$ alors

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{\Re\psi(iu)}{u} \quad = \quad \frac{\boldsymbol{\pi}}{4} l \ + \ \mathtt{b}(+\infty)$$

Avec la formule de Lévy Khintchine intégrée une fois :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\Re\psi(iu)}{u} & = & -\Im\dfrac{\psi(iu)}{iu} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ux)\epsilon(x)\overline{\pi}(x)\, dx \ + \ \mathtt{b}\, u \\ & = & \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x}\ x\overline{\pi}^{\pm}(x) dx \ + \ \mathtt{b}\, u \\ \xrightarrow[u\to+\infty]{} & & l\ \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{4} \ + \ \mathtt{b}\,(+\infty) \end{array}$$

Le passage à la limite provenant du théorème 1.5.2.

*Démonstration du lemme 1.5.5* Supposons donc que $d\pi \ll dx$.

▷ Si $X$ est un PPC alors

$$\mathcal{G} = -\complement d\pi + \psi_o\delta = -d\pi + (\int_{\mathbb{R}} d\pi + \psi_o)\delta$$

Puisque $d\pi$ admet une densité intégrable, le théorème de Riemann-Lebesgue implique que la transformée de Fourier de $d\pi$ tend vers 0 quand $u$ tend vers $+\infty$. Ainsi

$$\psi(iu) = \mathcal{F}[\mathcal{G}](iu) \quad \xrightarrow[u\to+\infty]{} \quad \int_{\mathbb{R}} d\pi + \psi_o$$

▷ Supposons maintenant que $X$ n'est pas un PPC. Prenons $X'$ une copie indépendante de $X$, puis posons $Y = X - X'$. La mesure de Lévy de $Y$ est absolument continue, ce qui implique que la mesure 1-potentielle de $Y$ est absolument continue (voir [30] p.159). En appliquant le théorème de Riemann-Lebesgue à la densité de cette mesure, nous obtenons :

$$\frac{1}{\psi(iu) + \psi(-iu) + 1} = \frac{1}{2\Re\psi(-iu) + 1} \quad \xrightarrow[u\to+\infty]{} \quad 0$$

Ce qui implique $\Re\psi(iu) \to +\infty$. □

*Montrons maintenant la proposition 1.5.4.* Rappelons qu'il s'agit de montrer l'implication suivante :

$$\int_0^1 \overline{\pi}_\Delta \text{ a un sens } \ \Rightarrow \ \lim_{u\to\infty} \frac{\Im\psi(iu)}{u} \quad = \quad \mathtt{a} \ - \ \overline{\pi}(1) \ + \ \overline{\pi}(-1) \ + \ \int_0^1 \overline{\pi}_\Delta$$

Montrons d'abord cela dans le cas où $\mathtt{a} = 0$ et $d\pi$ est portée par $[-1, 1]$, donc $\overline{\pi}(1) = \overline{\pi}(-1) = 0$. Par la formule de Lévy-Khintchine une fois intégrée nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\Im\psi(iu)}{u} = \Re\left[\frac{\psi(iu)}{iu}\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty}(1-\cos(ux))\ \epsilon\overline{\pi}(x)\ dx \\ &= \int_0^{\infty}(1-\cos(ux))\ \overline{\pi}_{\Delta}(x)\ dx\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned}\phi^+(iu) &= \int_0^{\infty}(1-e^{-iux})(\overline{\pi}_{\Delta}\wedge 0)(x)dx \\ \phi^-(iu) &= \int_0^{\infty}(1-e^{-iux})(\overline{\pi}_{\Delta}\vee 0)(x)dx\end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ Si $\int_0^1 |\overline{\pi}_{\Delta}\vee 0| < \infty$ et $\int_0^1 |\overline{\pi}_{\Delta}\wedge 0| < \infty$ alors $\phi^+$ et $\phi^-$ sont des exposants de PPC. De plus leurs mesures de Lévy sont absolument continues. Le lemme 1.5.5, donne donc :

$$\begin{aligned}\phi^+(iu) &\xrightarrow[u\to+\infty]{} \int_0^{\infty}(\overline{\pi}_{\Delta}\vee 0) \\ \phi^-(iu) &\xrightarrow[u\to+\infty]{} \int_0^{\infty}(\overline{\pi}_{\Delta}\wedge 0)\end{aligned}$$

Or $\Re[\phi^+(iu)+\phi^-(iu)] = \frac{\Im\psi(iu)}{u}$.

$\hookrightarrow$ Si $\int_0^1(\overline{\pi}_{\Delta}\vee 0) = \infty$ et $\int_0^1 |\overline{\pi}_{\Delta}\wedge 0| < \infty$ alors $\phi^+$ n'est pas un PPC tandis que $\phi^-$ est un PPC. Le lemme 1.5.5 annonce que $\Re\phi^+(iu)$ tend vers $+\infty$ tandis que $\phi^-(iu)$ reste bornée.

Ainsi 6/ est montré dans le cas où $d\pi$ est portée par $[-1, 1]$ et où $\mathtt{a} = 0$. Le cas général s'obtient assez facilement, en décomposant $X$ en la somme d'un Lévy à sauts bornés, d'un PPC et d'une dérive pure. □

## 1.6 Comportement de $\psi(iu)$ en $0+$

Le comportement de $\psi(iu)$ quand $u$ tend vers 0 est lié au comportement de $X$ en $+\infty$. La plupart des points de la proposition 1.5.3 peuvent se transposer. Par exemple, pour le point 4/ :

**Proposition.** Supposons $\psi_o = 0$.

$$\mathbf{E}|X_1| < \infty \ \Leftrightarrow\ \int_0^1 \frac{\Re\psi(iu)}{u^2}du < \infty$$

*Démonstration.* Manifestement, nous pouvons nous ramener au cas où $X$ est un PPC sans composante brownienne. Ceci étant fait, notons $\psi^n$ l'exposant du PPC dont la mesure de Lévy est $d\pi 1_{[-n,n]}$. Reprenons le même calcul que dans la démonstration du point 4 :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\Re\psi^n(iu)}{u^2}\,du &= \lim_{k\to\infty} \int_0^k \frac{\Re\psi^n(iu)}{u^2}\,du \qquad\qquad (\text{car } \Re\psi^n(iu)\geq 0)\\
&= \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin(kx)}{x}\,\overline{\overline{\pi}}^n_\Sigma(x)\,dx\\
&= \frac{\boldsymbol{\pi}}{4}\,\overline{\overline{\pi}}^n_\Sigma(0) \qquad\qquad (\text{théorème 1.5.2})\\
&= \frac{\boldsymbol{\pi}}{4}\int_{[-n,n]} |x| d\pi(x)
\end{aligned}$$

$\Re[\psi^{n+1}(iu)-\psi^n(iu)]$ est positif car c'est la partie réelle de l'exposant du PPC associé à la mesure $d\pi 1_{[-n+1,-n[\cup]n,n+1]}$. La suite $\Re\psi^n(iu)$ est donc croissante, le théorème de Béppo-Lévi s'applique. □

Nous n'avons aucunes envies, Mr. Humbird, de voir nos élèves devenir des rats de bibliothèque ou débiter les noms de toutes les capitales d'Europe que personne ne connaît de toute façon, ou apprendre par cœur les dates de batailles oubliées depuis longtemps. Ce qui nous intéresse, c'est d'aider l'enfant à s'adapter à la vie en société. [..] Nous avons banni une quantité de sujet inutiles que l'on présentait traditionnellement aux jeunes filles, et qui ne laissaient aucune place, aux connaissances, aux compétences et aux attitudes dont elles auront besoin pour organiser leurs vies et aussi - comme pourrait ajouter le cynique - celles de leurs maris. Disons les choses autrement, Mr. Humerson : la position d'une étoile est certes importante, mais l'emplacement le plus pratique pour un réfrigérateur dans une cuisine peut-être plus important encore pour la ménagère en herbe.

Lolita
Nabokov

# Chapitre 2

# Les 2+1 critères de Rogozine

L'intégrale $\int_0^1 \mathbf{P}[X_t > 0]\frac{dt}{t}$ est infinie ssi le processus de Lévy $X$ visite $]0,\infty[$ immédiatement. L'intégrale $\int_1^\infty \mathbf{P}[X_t > 0]\frac{dt}{t}$ est infinie ssi le maximum global de $X$ est infini. Ce sont les deux critères de Rogozine dont nous rappelons brièvement les démonstrations. Nous obtenons un critère de reptation en considérant la fonction $x \mapsto \int_0^1 \mathbf{P}[X_t > x]\frac{dt}{t}$

## 2.1 Les deux critères de Rogozine

### ↬ Visite immédiate de $]0,\infty[$

Par construction, $\urcorner$ est un PPC ssi $X$ ne visite pas $]0,\infty[$ immédiatement. Par ailleurs, $\urcorner$ est un PPC ssi $\lim_{\alpha\to+\infty} \ell(\alpha)$ est finie. Cette limite se calcule explicitement au moyen de l'expression ⓑ p.25, et nous en déduisons :

$$X \text{ visite } ]0,\infty[ \text{ immédiatement} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \mathbf{P}[X_t > 0]\frac{dt}{t} = +\infty$$

C'est le premier critère de Rogozine.

**Remarque.** Grâce à la factorisation de Wiener-Hopf en temps : $\widehat{\ell}(\alpha)\ell(\alpha) = \alpha + \psi_o$, on montre très facilement que $X$ ne visite pas $]-\infty,0[$ ssi $\urcorner$ a une dérive. Ceci est encore équivalent au fait que l'ensemble de ses temps de record n'est pas négligeable pour la mesure de Lebesgue.

### ↬ Comportement assymptotique

Le deuxième critère de Rogozine concerne le comportement de $X_t$ quand $t$ tend vers $+\infty$. Supposons donc que $X$ ne meurt pas. Par construction, le couple $(\sigma, S_\infty)$ (instant du maximum, maximum) est p.s. égal à $(\daleth_\Upsilon^-, H_\Upsilon^-)$ où $\Upsilon$ est l'instant de mort de $(\daleth, H)$. Ainsi $\overline{\lim}_{+\infty} X_t = +\infty$ ssi $\daleth$ ne meurt pas, ce qui équivaut à $\ell(0+) = 0$. De l'expression ⓑ nous déduisons :

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} X_t = +\infty \quad \Leftrightarrow \int_1^\infty \mathbf{P}[X_t > 0]\frac{dt}{t} = +\infty$$

C'est le deuxième critère de Rogozine.

**Remarque.** En utilisant $\widehat{\ell}(\alpha)\ell(\alpha) = \alpha$, on montre que $X$ tend vers $+\infty$ ssi $\daleth$ ne meurt pas et $\mathbf{E}[\daleth_1] < \infty$.

## 2.2 Rappels sur la reptation

On note $T_x = \inf\{t \ : \ X_t > x\}$.

**Définition.** $X$ rampe vers le haut s'il existe $x > 0$ tel que $\mathbf{P}[X_{T_x} = x] > 0$.

Et on dit que $X$ rampe vers le bas si $-X$ rampe vers le haut. On observe que $X$ rampe vers le haut ssi $H$ rampe vers le haut. En effet $H$ a même image que $S$ et donc $H_{T_x^H} = S_{T_x} = X_{T_x}$. Une étude classique sur les subordinateurs (cf. [1], chap. 3) montre qu'un subordinateur rampe vers le haut ssi il dérive, ce qui est encore équivalent au fait que l'image de $H$ est de mesure de Lebesgue non-nulle. En outre, si $X$ rampe vers le haut alors pour tout $x > 0$, $\mathbf{P}[X_{T_x} = x] > 0$ (cf. [1] théo.5 p.77). Pour finir, de la factorisation de Wiener-Hopf, on déduit que : $X$ rampe vers le haut et vers le bas ssi $X$ a une composante brownienne. En effet :

$$\frac{\psi(iu)}{(iu)^2} = \frac{\widehat{\kappa}(-iu)}{iu}\frac{\kappa(iu)}{iu}$$

Quand $u$ tend vers $+\infty$, d'après la proposition 1.5.3, le terme de gauche ne tend pas vers 0 ssi $X$ a une composante brownienne, le terme de droite ne tend pas vers zéro ssi $H$ et $\widehat{H}$ ont une dérive. Cette dernière proposition, comme beaucoup d'autres, était difficile à démontrer avant que la factorisation de Wiener-Hopf ne soit mise en exploitation sur les Lévy (voir [26] pour une démonstration sans la factorisation).

**Remarque.** La reptation n'est pas déterminée par la fonction $t \mapsto \mathbf{P}[X_t > 0]$. Nous allons construire un contre exemple à l'aide des processus stables.

Soit $\alpha \in ]1,2[$. Rappelons que pour tout $p \in [1-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}]$ il existe un processus de Lévy $\alpha$-stable $X$ tel que $\forall t$, $\mathbf{P}[X_t > 0] = p$. (voir [1], chap 8).

Soit $Y$ un processus stable, sans sauts positifs, d'indice $\alpha = \frac{3}{2}$. Il vérifie $\mathbf{P}[Y_t > 0] = \frac{2}{3}$. Considerons maintenant $Z$ le processus stable d'indice $\alpha = \frac{4}{3}$ et qui vérifie $\mathbf{P}[Z_t > 0] = \frac{2}{3}$. $Z$ ne rampe ni vers le haut ni vers le bas tandis que $Y$ rampe vers le haut. Pourtant $\forall t$ $\mathbf{P}[Z_t > 0] = \mathbf{P}[Y_t > 0]$. Donc la reptation ne peut être déterminée par la fonction $t \mapsto \mathbf{P}[X_t > 0]$.

## 2.3 Un critère pour la reptation

**Proposition 2.3.1** Pour tout processus de Lévy $X$, la fonction

$$x \quad \mapsto \quad \int_0^1 \mathbf{P}[X_t > x]\frac{dt}{t} \; - \; |\ln(x)|$$

est bornée supérieurement sur $]0,1[$.

**Théorème 2.3.2** $X$ rampe vers le haut si et seulement si :

$$x \quad \mapsto \quad \int_0^1 \mathbf{P}[X_t > x]\frac{dt}{t} \; - \; |\ln(x)|$$

est bornée inférieurement sur $]0,1[$.

*Remarques préliminaires aux deux démonstrations :* Nous avons vu que $X$ rampe vers le haut ssi l'image de $S$ est de mesure de Lebesgue non nulle. Donc, si l'on tue ou si l'on ressuscite un processus qui rampe vers le haut, le processus ainsi obtenu rampera encore vers le haut. Par ailleurs, pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$\Big| \int_0^1 \mathbf{P}[X_t > x]\frac{dt}{t} - \int_0^1 e^{-\lambda t}\mathbf{P}[X_t > x]\frac{dt}{t} \Big| \leq \int_0^1 |1 - e^{-\lambda t}|\frac{dt}{t} < \infty$$

En recoupant ces deux informations, nous voyons que l'on ne perd pas de généralité en supposant que $X$ meurt. Ainsi nous avons $\psi_o > 0$ et $\kappa_o > 0$.

Rappelons que $^\circ X$ et $^\circ H$ désignent les ressuscités respectifs de $X$ et de $H$. De l'égalité ⓓ p.25 on déduit :

$$\forall x > 0 \quad \int_0^\infty e^{-\psi_o t}\mathbf{P}[\,^\circ X_t > x]\frac{dt}{t} \; = \; \int_0^\infty e^{-\kappa_o t}\mathbf{P}[\,^\circ H_t > x]\frac{dt}{t}$$

Par conséquent, les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} 0<x &\mapsto \int_0^1 \mathbf{P}[\,{}^\circ H_t > x]\frac{dt}{t} \\ 0<x &\mapsto \int_0^\infty e^{-\kappa_o t}\mathbf{P}[\,{}^\circ H_t > x]\frac{dt}{t} \\ 0<x &\mapsto \int_0^\infty e^{-\psi_o t}\mathbf{P}[\,{}^\circ X_t > x]\frac{dt}{t} \\ 0<x &\mapsto \int_0^1 \mathbf{P}[\,{}^\circ X_t > x]\frac{dt}{t} \end{aligned}$$

sont toutes adjacentes quand $x$ tend vers $0+$ (i.e. leurs différences deux à deux sont bornées dans un voisinage de zéro). Pour montrer la proposition et le théorème, nous pouvons donc travailler indifféremment avec l'une ou l'autre de ces quatre fonctions.

*Démonstration de la proposition 2.3.1 :* Notons $c \geq 0$ la dérive de ${}^\circ H$. Soit $x < 1$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathbf{P}[\,{}^\circ H_t > x]\frac{dt}{t} &= \int_0^1 \mathbf{P}[\,{}^\circ H_t > x,\, {}^\circ H_t > (c+1)t]\frac{dt}{t} + \int_0^1 \mathbf{P}[\,{}^\circ H_t > x,\, {}^\circ H_t \leq (c+1)t]\frac{dt}{t} \\ &\leq \underbrace{\int_0^1 \mathbf{P}[\,{}^\circ H_t \geq (c+1)t]\frac{dt}{t}}_{(*)} \;-\; \ln\frac{x}{c+1} \end{aligned}$$

Comme ${}^\circ H_t - (c+1)t$ ne visite pas $]0,\infty[$ immédiatement, par le critère de Rogozine, l'intégrale $(*)$ est finie. Cela montre la proposition. □

*Démonstration du théorème 2.3.2 :* Supposons maintenant que $X$ rampe vers le haut, donc $c > 0$. Comme ${}^\circ H_t \geq ct$, on a :

$$\int_0^1 \mathbf{P}[\,{}^\circ H_t > x]\frac{dt}{t} \geq \int_0^1 1_{\{ct>x\}}\frac{dt}{t} = |\ln x| + \ln c$$

*Réciproquement.* Supposons que $x \mapsto \int_0^1 \mathbf{P}[\,{}^\circ X_t > x]\frac{dt}{t} - |\ln x|$ soit bornée inférieurement sur $]0,1[$.

Rappelons l'identité ⓒ :

$$\forall \beta > 0 \qquad \kappa(\beta) = \kappa_o \exp \int_{]0,\infty[} (1-e^{-\beta x}) \int_0^\infty e^{-\kappa_o t}\mathbf{P}[\,{}^\circ H_t \in dx]\frac{dt}{t}$$

et l'intégrale "de Frullani" :

$$\forall \beta > 0 \qquad \beta + 1 = \exp \int_0^\infty (1-e^{-\beta x})e^{-x}\,\frac{dx}{x}$$

Définissons les deux mesures suivantes :

$$\begin{aligned} dP(x) &= \int_0^\infty e^{-\psi_o t}\mathbf{P}[\,^\circ X_t \in dx]1_{\{x>0\}}\,\frac{dt}{t} = \int_0^\infty e^{-\kappa_o t}\mathbf{P}[\,^\circ H_t \in dx]1_{\{x>0\}}\,\frac{dt}{t} \\ dR(x) &= e^{-x}1_{\{x>0\}}\frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Ce sont des mesures de Lévy qui intègrent $x\wedge 1$ (pour vérifier cela sur la première mesure, on peut, par exemple, utiliser la proposition 2.3.1).

Rappelons que $\mathcal{L}$ désigne la transformation de Laplace. L'identité © et l'intégrale de Frullani s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall\beta>0 \qquad \ln[\frac{\kappa(\beta)}{\kappa_o}] &= \mathcal{L}[-\complement dP](\beta) \\ \forall\beta>0 \qquad \ln[\beta+1] &= \mathcal{L}[-\complement dR](\beta) \end{aligned}$$

Soient $\overline{P}$ et $\overline{R}$ les queues des mesures $dP$ et $dR$. Ces deux fonctions sont aussi les primitives des distributions $-\complement dP$ et $-\complement dR$, ainsi $\mathcal{L}[-\complement dP](\beta) = \beta\mathcal{L}[\overline{P}]$ et $\mathcal{L}[-\complement dR](\beta) = \beta\mathcal{L}[\overline{R}]$. Par différence :

$$\forall\beta>0 \qquad \ln\frac{\kappa(\beta)}{(\beta+1)\kappa_o} = \beta\,\mathcal{L}[\overline{P}-\overline{R}\,](\beta)$$

Par hypothèse $\int_0^1 \mathbf{P}[\,^\circ X_t > x]\frac{dt}{t} - \ln(x)$ est bornée inférieurement sur $]0,1[$. Cela implique que $\overline{P}-\overline{R}$ est bornée infèrieurement. Ainsi :

$$\exists cst\in\mathbb{R} \quad \forall\beta>0 \qquad \ln\frac{\kappa(\beta)}{(\beta+1)\kappa_o} \geq cst$$

Donc $H$ a une dérive. □

En réalité, pensait Simon, la recherche scientifique n'a d'intérêt indiscutable que comme outil surréaliste, en créant des solutions presque parfaites à des problèmes inventés. Si la fonction essentielle de la science est de rassurer les hommes, pourquoi le faux n'y réussirait-il pas aussi bien, pourvu qu'on parvienne à le faire passer pour le vrai ? Le faux a l'avantage de la plasticité...

Jacques Testart
Simon l'embaumeur

# Chapitre 3

# Factorisation de Wiener-Hopf de la somme de deux processus de Lévy

## 3.1 Introduction

**N.B.** Dans tout ce chapitre, nous supposons que $X$ n'est pas un processus de Poisson composé.

Dans un premier temps nous donnons une construction trajectorielle du subordinateur d'échelle bivarié relatif à $X - R$, quand $R$ est un subordinateur et $(X, R)$ un processus de Lévy de dimension 2. Nous nous appercevons notamment que le subordinateur temporel de $X - R$ est un changé de temps de celui relatif à $X$.

Dans un deuxième temps nous établissons que l'exposant du subordinateur spatial de $X+Y$, quand $Y$ est indépendant de $X$, est le produit des deux exposants des subordinateurs d'échelle relatifs à $(X + Y)^{\uparrow}$ et $(X + Y)^{\hat{\uparrow}}$. Pour cela nous utilisons une idée originale de S. Fourati : Il s'agit de passer la factorisation de Wiener-Hopf par la fonction logarithme. On obtient ainsi une version additive de la décomposition de Wiener-Hopf qui se manipule facilement.

Nous déduisons une propriété intéressante, bien que naturelle, qui nous servira par la suite :

"Soient $X$ un processus de Lévy à variation infinie et $Y$ un processus de Lévy à variation finie. $X + Y$ rampe vers le haut ssi $X$ rampe vers le haut."

La propriété précédente admet un analogue pour les grands temps :

"Soient $X$ un processus de Lévy tel que $\mathbf{E}|X_1| = \infty$ et soit $Y$ un processus de Lévy tel que $\mathbf{E}|Y_1| < \infty$. Quand $t$ tend vers $+\infty$, $X_t + Y_t$ tend vers $+\infty$ ssi $X_t$ tend vers $+\infty$"

Cette dernière propriété, montrée par Kesten [24], sera redémontrée en même temps que la loi forte des grands nombres dans le chapitre 9, à l'aide des résultats de ce chapitre.

## 3.2 Soustraction d'un subordinateur

### ↬ Énoncé

Prenons $R$ un subordinateur tel que $(X, R)$ soit un processus de Lévy de dimension 2 dans une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Ceci implique que $H - R_{\neg} = (X - R)_{\neg}$ est un processus de Lévy dans la filtration $(\mathcal{F}_{\neg_t})_{t\geq 0}$. Soit $(\gamma, \Gamma)$ le subordinateur d'échelle bivarié relatif à $H - R_{\neg}$.

**Théorème 3.2.1** Un subordinateur d'échelle bivarié de $X - R$ est donné par $(\neg_\gamma\ ,\ \Gamma)$.

**Corollaire 3.2.2** Pour tout processus de Lévy VI $X$, il existe un processus de Lévy VF $Y$, qui n'est pas un subordinateur, et qui admet le même subordinateur d'échelle spatial que $X$.

*En effet :* Soit $a > 0$ et $X^a_t = X_t + at$. Notons $(\neg^a, H^a)$ le subordinateur d'échelle bivarié de $X^a$. D'après le théorème précédent, $X_t = X^a_t - at$ admet le même subordinateur d'échelle spacial que $Y_t = H^a_t - a\neg^a_t$.

Ainsi le subordinateur $H$ fournit peu d'"information" sur le processus de Lévy $X$. À l'inverse, dans le chapitre qui suit, moyennant une hypothèse technique, nous montrerons que la loi du processus bivarié $(\neg, H)$ caractérise celle de $X$.

### ↬ Démonstration du théorème

**Notations.**
↪ Nous notons $X^r = X - R$, puis $S^r$ sont processus des suprema, puis $M^r$ l'ensemble de ses temps de record.
↪ Nous notons $\widetilde{X^r} = (X - R)_{\neg}$ puis $\widetilde{S^r}$ sont processus des suprema, puis $\widetilde{M^r}$ l'ensemble de ses temps de record.

**Lemme 3.2.3** Nous avons l'inclusion suivante :

$$M^r \subset M \ .$$

*Démonstration.* Rappelons que par définition $M^r = \{t \ : \ \forall s < t \ X_s - R_s < X_t - R_t\}$ Les trajectoires de $R$ étant croissante, pour $s < t$ on a $R_s \leq R_t$. Donc $X_s - R_s < X_t - R_t$ implique $X_s < X_t$, d'où l'inclusion. □

**Lemme 3.2.4** Les processus $\widetilde{S^r}$ et $(S^r)_{\urcorner}$ sont égaux.

*Démonstration.* Notons $\breve{M}$ l'image de $\urcorner$. Si $\urcorner$ est un PPC alors $\breve{M} = M$, sinon $\breve{M}$ est égal à $M$ privé de ces points isolés à droite. On a :

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{S^r}\right)_t = \sup\{X^r_{\urcorner_s} \ : \ s \leq t\} &= \sup\left\{X^r_u \ : \ u \in \breve{M} \text{ et } u \leq \urcorner_t\right\} \\ &\leq \sup\left\{X^r_u \ : \ u \leq \urcorner_t\right\} = S^r_{\urcorner_t}\end{aligned}$$

Par ailleurs, on vérifie facilement que $S_t = \sup\{X_s \ : \ s \in M \cap [0,t]\}$ ( ceci est vrai si l'on remplace $X$ par n'importe quel processus càdlàg). Ainsi :

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{S^r}\right)_t &= \sup\left\{X^r_u \ : \ u \in \breve{M} \text{ et } u \leq \urcorner_t\right\} = \sup\left\{X^r_u \ : \ u \in M \text{ et } u \leq \urcorner_t\right\} \\ &\geq \sup\{X^r_u \ : \ u \in M^r \text{ et } u \leq \urcorner_t\} = S^r_{\urcorner_t}\end{aligned}$$

(l'inégalité finale venant du fait que $M^r \subset M$). □

**Lemme 3.2.5** On a l'équivalence suivante :

$$\urcorner_u \in M^r \quad \Leftrightarrow \quad u \in \widetilde{M^r}$$

*Démonstration.* Elle est immédiate lorsque l'on considère l'égalité $(S^r - X^r)_{\urcorner} = \widetilde{S^r} - \widetilde{X^r}$.

*Démonstration du théorème 3.2.1 :* Nous rappelons que $(\gamma, \Gamma)$ est un subordinateur d'échelle bivarié relatif au processus de Lévy $H - R_{\urcorner}$. Nous devons montrer que $(\urcorner_\gamma, \Gamma)$ est un subordinateur d'échelle bivarié du processus $X^r$.

▷ Supposons dans un premier temps que $X^r$ visite $]0, \infty[$ immédiatement. Notons $(\urcorner^r, H^r)$ le processus d'échelle bivarié relatif à $X^r$. Nous devons montré que :

$$\exists c > 0 \ \forall t > 0 \qquad (\urcorner^r_t, H^r_t) = (\urcorner_{\gamma_{ct}}, \Gamma_{ct})$$

Notons $L^r$ l'inverse de $\urcorner^r$. Pour montrer l'égalité ci-dessus, il suffit de montrer que $L^r_{\urcorner}$ est un temps local de $\widetilde{M^r}$. En effet, supposons ceci vrai. Notons $\gamma'$ l'inverse de $L^r_{\urcorner}$, explicitement :

$\gamma' = L_{\urcorner r}$ (et on a $\gamma'_t = \gamma_{ct}$). Grâce à l'inclusion $M \subset M^r$, $\gamma' = L_{\urcorner r}$ implique $\urcorner_{\gamma'} = \urcorner^r$. La suite est un jeu d'écriture :

$$H^r = (X-R)_{\urcorner r} = (X-R)_{\urcorner_{\gamma'}} = (\widetilde{X^r})_{\gamma'} = \Gamma_{ct} \ .$$

Montrons que $L^r_{\urcorner}$ est un temps local de l'ensemble régénératif $\widetilde{M^r}$. D'après la proposition 5 p.111 de [1], il nous suffit de vérifier les trois points suivants :
$(i)$ La mesure $dL^r_{\urcorner}$ est portée par $\widetilde{M^r}$.
$(ii)$ $L^r_{\urcorner}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_{\urcorner_t})_{t\geq 0}$.
$(iii)$ Pour tout temps d'arrêt $T$ de la filtration $(\mathcal{F}_{\urcorner_t})_{t\geq 0}$ tel que $(\widetilde{S^r} - \widetilde{X^r})_T = 0$, le processus translaté

$$\Big( (\widetilde{S^r} - \widetilde{X^r})_{T+t} \ , \ L^r_{\urcorner_{T+t}} - L^r_{\urcorner_T} \Big)_{t\geq 0} \ ,$$

sous $\mathbf{P}[\cdot \ / \ T < \Upsilon]$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_{\urcorner_T}$ et a même loi que

$$\Big( (\widetilde{S^r} - \widetilde{X^r})_t \ , \ L^r_{\urcorner_t} \Big)_{t\geq 0} \ .$$

Le point $(i)$ découle du 3.2.5. Le point $(ii)$ est trivial.

Pour vérifier le point $(iii)$, avec l'accord du Vatican, nous canonisons le processus $X$ : $\Omega$ devient l'ensemble des trajectoires càdlàg à durée de vie, $X$ le processus canonique, $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par les $(X_t)_{t\geq 0}$, et $\mathbf{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui fait de $X$ un processus de Lévy. Nous notons $\theta$ l'opérateur de translation sur $\Omega$. Soit $T$ un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_{\urcorner_t})_t \geq 0$ dont le graphe est inclus dans l'ensemble $\widetilde{M^r}$. Nous allons vérifier les relations suivantes, valables presque-sûrement :

$$\forall s > 0 \qquad L^r_{\urcorner_{T+s}} - L^r_{\urcorner_T} \ = \ L^r_{\urcorner_s} \circ \theta_{\urcorner_T} \qquad \heartsuit$$

$$\forall s > 0 \qquad (\widetilde{S^r} - \widetilde{X^r})_{T+s} \ = \ (\widetilde{S^r} - \widetilde{X^r})_s \circ \theta_{\urcorner_T} \qquad \diamondsuit$$

Vérifions $\heartsuit$. Puisque $T \in \widetilde{M^r}$, $\urcorner_T \in M^r$. Pour tout $\omega$ hors d'un négligeable on a :

$$\begin{aligned}
\forall s > 0 \qquad (L^r_{\urcorner_{T+s}} - L^r_{\urcorner_T})(\omega) &= \int_0^\Upsilon 1_{[\![ \urcorner_T(\omega), \urcorner_{T+s}(\omega) [\![} \ dL^r(\omega) \\
&= \int_0^\Upsilon 1_{[\![ 0, \urcorner_{T+s}(\omega) - \urcorner_T(\omega) [\![} \ dL^r(\theta_{\urcorner_T}\omega) \\
&= \int_0^\Upsilon 1_{[\![ 0, \urcorner_s(\theta_{\urcorner_T}\omega) [\![} \ dL^r(\theta_{\urcorner_T}\omega) \\
&= (L^r_{\urcorner_s})(\theta_{\urcorner_T}\omega)
\end{aligned}$$

Vérifions $\diamondsuit$ : Presque sûrement on a :

$$\forall s \quad (\widetilde{S^r} - \widetilde{X^r})_{T+s} = (S^r - X^r)_{\urcorner_{T+s}} = (S^r - X^r)_{\urcorner_{T+s} - \urcorner_T + \urcorner_T} = \Big( (S^r - X^r)_{\urcorner_s} \Big) \circ \theta_{\urcorner_T}$$

Pour montrer (*iii*) il suffit alors d'appliquer la propriété des accroissements indépendants et stationnaires au $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt $\urcorner_T$ en se servant de $\diamondsuit$ et de $\heartsuit$.

▷ Pour finir, traitons le cas où $X^r$ ne visite pas $]0,\infty[$ immédiatement. Par les lemmes 3.2.4 et 3.2.5, l'image de $(\urcorner_\gamma, \Gamma)$ coïncide avec celle de $\{(t, X^r_t) : t \in \widetilde{M^r}\}$. On montre assez facilement que $(\urcorner_\gamma, \Gamma)$ est un processus de Lévy de dimension 2. Par définition (cf. 0.3), cela implique que $(\urcorner_\gamma, \Gamma)$ est un subordinateur bivarié de $X^r$. □

## 3.3 Passons Wiener-Hopf au logarithme !

Cette petite section est essentielle pour la suite de ce chapitre, c'est aussi le début d'une histoire passionnante que m'a racontée un jour S. Fourati et qui sera publiée un jour, peut-être, inch'Allah !

Supposons que $X$ meure. Notons ln la détermination principale du logaritme. Définissons les mesures de Lévy suivantes :

$$\begin{aligned} dP(x) &= \int_0^\infty \mathbf{P}[X_t \in dx] 1_{\{x>0\}} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \mathbf{P}[H_t \in dx] 1_{\{x>0\}} \frac{dt}{t} \\ dN(x) &= \int_0^\infty \mathbf{P}[X_t \in dx] 1_{\{x<0\}} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \mathbf{P}[-\widehat{H}_t \in dx] 1_{\{x<0\}} \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

L'expression © de la page 25 nous donne ceci :

$$\begin{aligned} \ln \frac{\psi(iu)}{\psi_o} &= \mathcal{F}[-\complement dN - \complement dP](iu) \\ \ln \frac{\kappa(iu)}{\kappa_o} &= \mathcal{F}[-\complement dP](iu) \\ \ln \frac{\widehat{\kappa}(-iu)}{\widehat{\kappa}_o} &= \mathcal{F}[-\complement dN](iu) \end{aligned}$$

Ainsi la factorisation de Wiener-Hopf, passée au logarithme, apparait comme la décomposition d'un processus de Lévy VF en somme d'un subordinateur et d'une co-subordinateur :

$$\ln \frac{\psi(iu)}{\psi_o} = \ln \frac{\kappa(iu)}{\kappa_o} + \ln \frac{\widehat{\kappa}(-iu)}{\widehat{\kappa}_o} = \mathcal{F}[-\complement dN](iu) + \mathcal{F}[-\complement dP](iu)$$

## 3.4 Factorisation de Wiener-Hopf de $X + Y$

Nous prenons $Y$ un processus de Lévy indépendant de $X$ et nous notons $\phi_Y$ son exposant. Par convention, pour tout réel $x$, $x + \dagger = \dagger$. Ainsi $X + Y$ est un processus de Lévy qui meurt avec un taux de mortalité de $\psi(0) + \phi_Y(0)$.

**Théorème 3.4.1** Soient $(\widehat{h}, h)$ et $(\widehat{\rho}, \rho)$ les décompositions de Wiener-Hopf respectives de $(X+Y)_{\neg}$ et $(X+Y)_{\widehat{\neg}}$. La factorisation de Wiener-Hopf relative à $X + Y$ est donnée par :

$$\forall z \in i\mathbb{R} \qquad \psi(z) + \phi_Y(z) = \Big(cst\, \widehat{h}(-z)\widehat{\rho}(-z)\Big)\ \Big(\frac{1}{cst}\, h(z)\rho(z)\Big)$$

où $cst > 0$ est une constante de normalisation.

**N.B.** Si $Y$ est un subordinateur, alors $(X + Y)_{\neg} = H + Y_{\neg}$ est aussi un subordinateur. Sa factorisation de Wiener-Hopf est donc triviale. En pratique, c'est ce cas particulier que nous utiliserons (cf. corollaire 3.4.3).

**Lemme 3.4.2** Soit $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de processus de Lévy qui converge en loi vers $X$. Alors le subordinateur d'échelle bivarié relatif à $X^n$ converge en loi vers celui relatif à $X$.

*Démonstration.* L'hypothèse implique la convergence étroite des lois marginales de $X^n$ vers celles de $X$, et puisque $X$ n'est pas un PPC, ces lois marginales ne chargent pas $\{0\}$, donc $\mathbf{P}[X^n_t \in dx]1_{\{x>0\}}$ convergent étroitement vers $\mathbf{P}[X_t \in dx]1_{\{x>0\}}$. De l'expression ⓐ :

$$\forall \alpha, \beta > 0 \qquad \Bbbk^n(\alpha, \beta) = \exp \int_0^\infty \int_{]0,\infty[} \Big(e^{-(1-\psi_o)t} - e^{-\alpha t} e^{-\beta x}\Big) \mathbf{P}[X^n_t \in dx] \frac{dt}{t}$$

nous déduisons assez facilement que $\Bbbk^n$ converge simplement vers $\Bbbk$, ce qui implique la convergence en loi de $(\overline{\neg}^n, H^n)$ vers $(\overline{\neg}, H)$. □

*Démonstration du théorème 3.4.1.* Rappelons la factorisation de Wiener-Hopf en espace-temps :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+\ \forall u \in \mathbb{R} \qquad \phi(iu) + \alpha = \widehat{\kappa}(\alpha, -iu)\kappa(\alpha, iu)$$

Pour $u \in \mathbb{R}$ fixé, les fonctions $\psi(iu) + \alpha$, $\widehat{\kappa}(\alpha, -iu)$ et $\kappa(\alpha, iu)$ se prolongent sur $\alpha \in \mathbb{C}^+$ en des fonctions analytiques sur l'intérieur de $\mathbb{C}^+$ et continues sur $\mathbb{C}^+$. Par prolongement analytique et par un argument de continuité, on étend la factorisation de Wiener-Hopf en espace-temps pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^+$. En particulier, pour $\alpha = \psi(iu)$ cela donne :

$$\psi(iu) + \phi_Y(iu) \quad = \quad \widehat{\Bbbk}(\phi_Y(iu), -iu)\ \Bbbk(\phi_Y(iu), iu)$$

Par ailleurs, $\widehat{\Bbbk}(\phi_Y(iu),-iu)$ est l'exposant de $H-Y_{\neg}$ tandis que $\Bbbk(\phi_Y(iu),iu)$ est l'exposant de $-\widehat{H}+Y_{\widehat{\neg}}$, ainsi :

$$\begin{aligned}\psi(iu)+\phi_Y(iu) &= \widehat{h}(-iu)\widehat{h}(iu)\ \widehat{\rho}(-iu)\rho(iu)\\ &= \widehat{h}(-iu)\widehat{\rho}(-iu)\ h(iu)\rho(iu)\end{aligned}$$

▷ Supposons dans un premier temps que $X$ meure, appliquons la fonction logarithme à l'égalité ci-dessus :

$$\ln\frac{\psi(iu)+\varphi_Y(iu)}{\psi(0)+\varphi_Y(0)} = \Big(\ln\frac{\widehat{h}(-iu)}{\widehat{h}(0)}+\ln\frac{\widehat{\rho}(-iu)}{\widehat{\rho}(0)}\Big)+\Big(\ln\frac{h(iu)}{h(0)}+\ln\frac{\rho(iu)}{\rho(0)}\Big)$$

Notons $\widehat{\kappa}_{X+Y}$ et $\kappa_{X+Y}$ les exposants de la décomposition de Wiener-Hopf relative à $X+Y$, on a :

$$\ln\frac{\widehat{\kappa}_{X+Y}(-iu)}{\widehat{\kappa}_{X+Y}(0)} + \ln\frac{\kappa_{X+Y}(iu)}{\kappa_{X+Y}(0)} = \Big(\ln\frac{\widehat{h}(-iu)}{\widehat{h}(0)}+\ln\frac{\widehat{\rho}(-iu)}{\widehat{\rho}(0)}\Big)+\Big(\ln\frac{h(iu)}{h(0)}+\ln\frac{\rho(iu)}{\rho(0)}\Big)$$

Il suffit alors d'identifier, les exposants de subordinateurs d'un côté, les exposants de co-subordinateurs de l'autre.

▷ Supposons dans un deuxième temps que $X$ ne meure pas. Notons $X^n$ le processus $X$ tué en un temps exponentiel indépendant de paramétre $(1/n)$. Clairement $\Bbbk(\phi_Y(iu)+(1/n),-iu)$ et $\widehat{\Bbbk}(\phi_Y(iu)+(1/n),-iu)$ convergent simplement vers $\Bbbk(\phi_Y(iu),-iu)$ et $\widehat{\Bbbk}(\phi_Y(iu),-iu)$. En utilisant le lemme 3.4.2, on montre que $h^n,\widehat{h}^n,\rho^n$ et $\widehat{\rho}^n$ convergent simplement vers $h,\widehat{h},\rho$ et $\widehat{\rho}$. Par ailleurs, les exposants des subordinateurs d'échelle relatifs à $X^n+Y$ convergent simplement vers ceux relatifs à $X+Y$. Il suffit donc d'identifier les limites. □

**Commentaires.** A première vue, le théorème 3.4.1, qui donne la décomposition de $X+Y$, semble englober le théorème 3.2.1 qui donne seulement le processus d'échelle de $X-R$ quand $R$ est un subordinateur. Mais ce dernier théorème a trois atouts :
- Il s'applique aussi quand $X$ et $R$ ne sont pas indépendants.
- Il donne aussi une expression du processus d'échelle temporel de $X-R$.
- Il donne une construction trajectorielle du processus d'échelle de $X-R$, alors que le théorème 3.4.1 ne donne que des égalités en loi.

Le corollaire suivant sera indispensable pour trouver le critère de reptation (chap. 10).

**Corollaire 3.4.3** Soient $X$ un processus de Lévy à variation infinie et $Y$ un processus de Lévy à variation finie. $X+Y$ rampe vers le haut ssi $X$ rampe vers le haut.

*Démonstration.* Nous reprenons toutes les notations utilisées dans la démonstration du théorème précédent. Nous procédons en trois étapes :
Nous montrons d'abord que si $X$ rampe vers le haut alors $X+Y$ rampe vers le haut (étape 1/). Ensuite nous montrons la réciproque, dans le cas où $Y$ est un co-subordinateur (étape 2/), puis dans le cas où $Y$ est un subordinateur (étape 3/).

1/ Supposons que $X$ rampe vers le haut. Comme il est VI, $\urcorner$ n'a pas de dérive et donc $Y_{\urcorner}$ non plus. Ainsi $H + Y_{\urcorner}$ rampe vers le haut, ce qui est équivalent à $\lim_\infty \frac{h(\lambda)}{\lambda} > 0$, ce qui implique $\lim_\infty \frac{h(\lambda)\rho(\lambda)}{\lambda} > 0$. Donc $X + Y$ rampe vers le haut.

2/ Supposons que $X$ ne rampe pas vers le haut et que $Y$ est un co-subordinateur. Dans ce cas $-\widehat{H} + Y_{\urcorner}$ est aussi un co-subordinateur et donc $\rho(z) = cst$. Comme $X$ ne rampe pas vers le haut, $H + Y_{\urcorner}$ non plus, donc $\lim_\infty \frac{h(\lambda)}{\lambda} = 0$ et donc $\lim_\infty \frac{h(\lambda)\rho(\lambda)}{\lambda} = 0$.

3/ Supposons que $Y$ soit un subordinateur. Utilisons la contraposition, montrons que : "si $X+Y$ rampe vers le haut alors $X$ rampe vers le haut". Le couple $(X+Y, Y)$ est un processus de Lévy bivarié. Nous pouvons lui appliquer le théorème (3.2.1) qui donne l'expression de la factorisation de Wiener-Hopf de $(X + Y) - Y$. Le raisonnement de l'étape 1/ permet alors de conclure. □

C'est ainsi que l'organe érectile vient à symboliser la place de la jouissance, non pas en tant que lui même, mais en tant que partie manquante à l'image désirée : c'est pourquoi il est égalable au $\sqrt{-1}$ de la signification plus haute produite, de la jouissance qu'il restitue par le coefficient de son énoncé à la fonction de manque de signifiant : $(-1)$.

Lacan 1971,
cité dans Imposture intellectuelle
de A. Sokal et J. Brickmont

# Chapitre 4

# Factorisation de Wiener-Hopf sur l'axe réel

## 4.1 Introduction

**N.B.** Dans ce chapitre nous supposons que notre manifique processus de Lévy $X$ n'est ni un subordinateur, ni un co-subordinateur.

Rappelons que la Bande Analytique $BA$ est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathbf{E}|e^{-zX_1}| < \infty$. Aucune supposition n'est faite sur $BA$, mais la plupart des énoncés de ce chapitre sont triviaux lorsque $BA$ est réduite à $i\mathbb{R}$.

Au bout du chemin nous déboucherons sur la propriété suivante : si $BA$ n'est pas réduite à $i\mathbb{R}$ alors l'exposant du subordinateur bivarié d'échelle $\Bbbk$ (ou bien l'exposant $\widehat{\Bbbk}$) caractérise l'exposant $\psi$. Cela équivaut au fait que la loi du processus des suprema $S$ (ou celle de $I$) caractérise la loi de $X$.

Mais auparavant nous devrons affronter 3 épreuves assez élémentaires.

Premièrement nous étendrons la factorisation de Wiener-Hopf en espace temps :

$$\psi(z) + \alpha = \widehat{\Bbbk}(\alpha, -z)\mathbb{I}(\alpha)\Bbbk(\alpha, z)$$

à tout $z \in BA$ et tout $\alpha \in \mathbb{C}^+$.

Deuxièmement nous donnerons une généralisation du théorème qui stipule que, lorsque $X$ est un sans-sauts-négatifs, alors l'exposant du subordinateur d'échelle temporel se déduit de $\psi$ par une inversion de fonction croissante (cf. [1] théorème 1, p.189).

Troisièmement nous regarderons comment se modifie la factorisation de Wiener-Hopf quand on fait subir à $X$ une transformation de Girsanov.

## 4.2 Prolongement de la factorisation de Wiener-Hopf

Puisque les fonctions $\Bbbk(\alpha,\beta)$ et $\widehat{\Bbbk}(\alpha,\beta)$ sont des exposants de subordinateurs bivariés, elles sont naturellement définies pour $\alpha \in \mathbb{C}^+$ et $\beta \in \mathbb{C}^+$, mais elle peuvent être définies sur un domaine plus grand.

**Proposition 4.2.1** Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^+$
• La fonction $z \mapsto \Bbbk(\alpha, z)$ admet un prolongement, analytique à l'intérieur de $BA \cup \mathbb{C}^+$ et continu sur $BA \cup \mathbb{C}^+$.
• La fonction $z \mapsto \widehat{\Bbbk}(\alpha, -z)$ admet un prolongement, analytique à l'intérieur de $BA \cup \mathbb{C}^-$ et continu sur $BA \cup \mathbb{C}^-$.

De tels prolongements sont bien entendus uniques et nous continuons à noter $\Bbbk$ et $\widehat{\Bbbk}$ les fonctions ainsi prolongées.

*Démonstration.* Rappelons que la factorisation de Wiener-Hopf en espace temps s'écrit en toute généralité

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad \forall z \in i\mathbb{R} \qquad \psi(z) + \alpha = \widehat{\Bbbk}(\alpha, -z)\, \mathbb{I}(\alpha)\, \Bbbk(\alpha, z)$$

La fonction $\mathbb{I}$ étant identiquement égale à 1 quand $X$ n'est pas un PPC. Rappelons aussi que, $(\alpha, z) \mapsto \mathbb{I}(\alpha)\kappa(\alpha, z)$ étant l'exposant d'un subordinateur bivarié, elle admet un prolongement naturel pour $(\alpha, z) \in \mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^+$. Fixons donc $\alpha \in \mathbb{C}^+$ et considérons la fonction de la variable complexe $z$ suivante

$$\varphi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\psi(z) + \alpha}{\mathbb{I}(\alpha)\, \Bbbk(\alpha, z)}$$

La fonction $z \mapsto \psi(z) + \alpha$ est continue sur $BA$ et analytique à l'intérieur de $BA$ tandis que $z \mapsto \mathbb{I}(\alpha)\Bbbk(\alpha, z)$ est continu sur $\mathbb{C}^+$ et analytique à l'intérieur de $\mathbb{C}^+$. Par ailleurs il est facile de vérifier que cette dernière fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{C}^+$. Ainsi $\varphi$ est continue sur $BA$ et analytique à l'intérieur de $BA$, et par la factorisation de Wiener-Hopf en espace-temps, $\varphi(z)$ coïncide avec $\widehat{\Bbbk}(\alpha, -z)$ pour $z \in i\mathbb{R}$. $\varphi$ fournit donc le prolongement cherché. □

**Théorème 4.2.2**

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}^+ \quad \forall z \in BA \qquad \psi(z) + \alpha = \widehat{\Bbbk}(\alpha, -z)\, \mathbb{I}(\alpha)\, \Bbbk(\alpha, z)$$

*Démonstration.* L'identité ci-dessus est vraie pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $z \in i\mathbb{R}$ (c'est notre base de départ (cf. p.23)). Dans la proposition précédente nous avons montré que ses différents termes $(\psi(z) + \alpha, \Bbbk(\alpha, z)...)$, se prolongent sur le domaine voulu. Par le théorème de prolongement analytique, puis par prolongement par continuité, la factorisation elle-même se prolonge (il y a une petite difficulté lorsque $i\mathbb{R}$ n'est pas inclus dans l'intérieur de $BA$, mais elle se contourne avec un argument classique). □

**Proposition 4.2.3** La bande analytique de $X$ est exactement égale à l'intersection des bandes analytiques de $H$ et de $-\widehat{H}$.

*Démonstration.* Il est relativement connu que, pour tout processus de Lévy, l'intérieur de la bande analytique est exactement la plus grande bande verticale ouverte sur laquelle l'exposant de Lévy peut être prolongé de manière analytique (cf. par exemple [30] p.161 ). Par ailleurs, on montre facilement que l'exposant se prolonge par continuité sur un bord de la bande analytique, ssi ce bord est inclus dans la bande analytique.

La proposition 4.2.1 nous indique que $\kappa$ se prolongent sur $BA \cup \mathbb{C}^+$ analytiquement et par continuité. Par ailleurs, cette bande est la plus grande bande sur laquelle $\kappa$ puisse être prolongé de la sorte (dans le cas contraitre $\psi$ se prolongerait sur une bande plus large que $BA$, ce qui est impossible). Ainsi la bande analytique de $\kappa$ est exactement $BA \cup \mathbb{C}^+$. De même la bande analytique de $\Bbbk(-z)$ est $BA \cup \mathbb{C}^-$. On en déduit la proposition. □

**Remarque.** Une conséquence immédiate de ce corollaire est que, lorsque l'on tue $X$ en un temps exponentiel indépendant, les bandes analytiques de $H$ et de $-\widehat{H}$ restent inchangées.

## 4.3 Le théorème d'inversion

$BA \cap \mathbb{R}$ est un intervalle contenant $\{0\}$, ses extrémités peuvent être ouvertes ou fermées. Nous notons $\{\psi < 0\}$ l'ensemble des $u \in BA \cap \mathbb{R}$ tel que $\psi(u) < 0$. On montre, grâce à l'inégalité de Hölder, que $\psi(u)$ est concave sur $BA \cap \mathbb{R}$, donc $\{\psi < 0\}$ est de la forme

$$\{\psi < 0\} = \Big(]-\infty, -a[ \cup ]b, +\infty[\Big) \cap BA \qquad \text{avec } a, b \in [0, +\infty].$$

**Théorème d'inversion.** Pour tout $u \in \{\psi < 0\} \cap \mathbb{R}^-$, le réel positif $-\psi(u)$ est l'unique réel où la fonction $x \mapsto \Bbbk(x, u)$ s'annule.

*Démonstration.* Soit $u \in \{\psi < 0\} \cap \mathbb{R}^-$. Appliquons la factorisation de Wiener-Hopf prolongée (4.2.2) avec $\alpha = -\psi(u)$ et $z = u$, cela donne :

$$0 = \psi(u) - \psi(u) = \widehat{\Bbbk}(-\psi(u), -u)\mathbb{I}(-\psi(u))\Bbbk(-\psi(u), u)$$

Seul le troisième terme de la factorisation ci-dessus peut s'annuler car, pour $a$ et $b$ strictement positif, $\mathbb{I}(a)\widehat{\mathbb{k}}(a,b)$ est strictement positif ($\widehat{\mathbb{I}\mathbb{k}}$ est l'exposant d'un subordinateur bivarié). Reste à vérifier que $-\psi(u)$ est l'unique racine, et cela vient du fait que, pour tout $u$, $x \mapsto \mathbb{k}(x,u)$ est strictement croissante. □

Bien malheureusement, l'ensemble $\{\psi < 0\}$ peut être vide même lorsque $BA$ n'est pas réduite à $i\mathbb{R}$. La proposition suivante donne une condition suffisante pour que cet ensemble soit non vide.

**Proposition 4.3.1** Si $BA \cap \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert à gauche alors $\{\psi < 0\} \cap \mathbb{R}^-$ est non vide.

**N.B.** En particulier, lorsque $BA$ contient $\mathbb{R}^-$, $\{\psi < 0\}$ est non vide.

*Démonstration.* Soit $-\mathtt{e} = \inf BA \cap \mathbb{R}$. Si $-\mathtt{e} \notin BA$, alors, par définition de $BA$, $\mathbf{E}|e^{\mathtt{e}X_1}|$ vaut $+\infty$. On vérifie assez facilement que cela implique que $\psi(u)$ tend vers $-\infty$ quand $u$ tend vers $-\mathtt{e}$ par valeur supérieure. Ceci, ajouté au fait que $\psi(u)$ est continu, implique que $\psi(u)$ est négative sur un certain intervalle $]-\mathtt{e}, -a[$. □

**Exemple.** Lorsque $X$ est un sans-sauts-positifs, $\widehat{H}$ est une dérive pure assacinée. L'exposant bivarié d'échelle s'écrit donc $\mathbb{k}(\alpha, z) = \ell(\alpha) + cz$ ($\ell$ étant l'exposant du subordinateur d'échelle temporel $\urcorner$). Notons $-\varkappa$ l'unique racine de $\psi$ sur $\mathbb{R}^-$. En effectuant le changement de variable $u := -u$, le théorème d'inversion donne

$$\forall u \geq \varkappa \qquad \ell(-\psi(-u)) = cu \ .$$

Donc $\frac{1}{c}\ell$ est l'inverse de la fonction strictement croissante $\varkappa \leq u \mapsto -\psi(-u)$. On retrouve ainsi un théorème bien connu (cf. [1] théorème 1, p.189).

Lorsque $\{\psi < 0\} \cap \mathbb{R}^-$ est un intervalle ouvert non vide, le théorème d'inversion précise que la fonction $\mathbb{k}$ permet de calculer $\psi$ sur cet intervalle ; par suite, comme $\psi$ est analytique sur l'intérieur de $BA$, la fonction $\mathbb{k}$ détermine $\psi$ entièrement. Notre objectif est d'alléger la condition "$\{\psi < 0\} \cap \mathbb{R}^-$ est non vide". Pour cela, nous aurons besoin d'un outil classique : La transformation de Girsanov.

## 4.4 Transformation de Girsanov

Soit $\lambda \in BA \cap \mathbb{R}$. On sait que $M_t = \exp\{-\lambda X_t + t\psi(\lambda)\}$ est une martingale (voir [1] p.193). On peut alors définir la probabilité $\mathbf{P}^{\natural\lambda}$ sur $(\Omega, \bigvee_t \mathcal{F}_t)$ par :

$$\forall t \qquad \forall \Lambda \in \mathcal{F}_t \qquad \mathbf{E}^{\natural\lambda}[\Lambda] = \mathbf{E}[\Lambda M_t]$$

On montre que, sous $\mathbf{P}^{\natural\lambda}$, $X$ est un processus de Lévy dont l'exposant est donné par

$$\forall z \in BA - \lambda \qquad \psi^{\natural\lambda}(z) = \psi(z+\lambda) - \psi(\lambda)$$

Greffons à notre espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un processus $X^{\natural\lambda}$ dont la loi est $\mathbf{P}^{\natural\lambda}$. La transformation de $X$ en $X^{\natural\lambda}$ s'appelle : la transformation de Girsanov. Nous allons utiliser une variante de cette transformation.

**Hypothèse H :** Supposons maintenant et jusqu'à la fin de cette section, que $\psi(\lambda)$ est positif.

Notons $X^{\flat\lambda}$ le processus $X^{\natural\lambda}$ tué en un temps exponentiel de paramètre $\psi(\lambda)$. Son exposant est donné par :

$$\forall z \in BA - \lambda \qquad \psi^{\flat\lambda}(z) = \psi(z+\lambda)$$

Appelons transformation de sous-Girsanov le passage de $X$ à $X^{\flat\lambda}$ (le 'sous' rappelle simplement que les lois marginales de $X^{\flat\lambda}$ sont des sous-probabilités sur $\mathbb{R}$).

**Proposition 4.4.1** Les éléments de la factorisation de Wiener-Hopf relative à $X^{\flat\lambda}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \geq 0 \qquad \widehat{\Bbbk}^{\flat\lambda}(\alpha,\beta) &= cst_1\, \widehat{\Bbbk}(\alpha, \beta - \lambda) \\ \forall \alpha, \beta \geq 0 \qquad \Bbbk^{\flat\lambda}(\alpha,\beta) &= cst_2\, \Bbbk(\alpha, \beta + \lambda) \end{aligned}$$

où $cst_1, cst_2 > 0$ sont des constantes de normalisation.

Cette proposition est relativement triviale. Cependant quelques détails sont à vérifier.

**Lemme.** Soit $\phi_Y$ l'exposant d'un subordinateur $Y$ et soit $\lambda \in BA_Y \cap \mathbb{R}$ tel que $\phi_Y(\lambda) \geq 0$. La fonction $z \mapsto \phi_Y(z+\lambda)$ est encore l'exposant d'un subordinateur.

*Démonstration.* La fonction $z \mapsto \phi(z+\lambda)$ est bien l'exposant d'un processus de Lévy (grâce à la transformation de sous-Girsanov). C'est encore l'exposant d'un subordinateur car $u \mapsto \phi(u+\lambda)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. □

*Démonstration de la proposition 4.4.1 :* Par la factorisation de Wiener-Hopf prolongée :

$$\forall z \in BA - \lambda \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \qquad \psi(z+\lambda) + \alpha = \widehat{\Bbbk}(\alpha, -z+\lambda)\mathbb{I}(\alpha)\Bbbk(\alpha, z+\lambda)$$

Fixons $\alpha \geq 0$. Pour montrer la proposition, il suffit donc de vérifier que les fonctions $z \mapsto \widehat{\Bbbk}(\alpha, z-\lambda)$ et $z \mapsto \Bbbk(\alpha, z+\lambda)$ sont bien des exposants de subordinateurs. Grâce au lemme, il nous suffit de vérifier que les réels $\widehat{\Bbbk}(\alpha, -\lambda)$ et $\Bbbk(\alpha, \lambda)$ sont positifs, ce qui découle du fait que $\psi(\lambda)$ soit positif (hypothèse H). □

## 4.5 La loi de $S$ caractérise celle de $X$ ?

Soient $X^1$, $X^2$ deux processus de Lévy d'exposant respectif $\psi^1$ et $\psi^2$ ; soient $\Bbbk^1$, $\Bbbk^2$ leur exposant d'échelle.

**Théorème 4.5.1** Supposons qu'il existe $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $\mathbf{E}|e^{-qX^1_1}| < \infty$. Si $\Bbbk^1 = \Bbbk^2$ alors $\psi^1 = \psi^2$.

*Démonstration.* Notons $\Bbbk = \Bbbk^1 = \Bbbk^2$. D'après la proposition 4.2.3, $BA^1 \cap \mathbb{R}^- = BA^2 \cap \mathbb{R}^-$. Notons $BA \cap \mathbb{R}^-$ cet ensemble et $-\mathsf{e} = \inf BA \cap \mathbb{R}^-$.

Nous procédons maintenant en trois étapes correspondant à trois hypothèses de moins en moins restrictives.

1/ Supposons qu'il existe $q < 0$ tel que $\mathbf{E}|e^{-qX^1_1}| < \infty$, $\psi^1(q) < 0$ et $\psi^2(q) < 0$. Sous ces hypothèses $\{\psi^1 < 0\} \cap \{\psi^2 < 0\} \cap \mathbb{R}^-$ est un intervalle ouvert non vide. Sur cet intervalle, d'après le théorème d'inversion, les fonctions $\psi^1$ et $\psi^2$ sont déterminées par $\Bbbk$. Ainsi, sur cet intervalle $\psi^1 = \psi^2$ ce qui implique, par prolongement analytique, que $\psi^1 = \psi^2$ partout où elles sont définies.

2/ Supposons qu'il existe $q < 0$ tel que $\mathbf{E}|e^{-qX_1}| < \infty$, cela implique que $BA \cap \mathbb{R}^-_*$ est non vide. Lorsque $-\mathsf{e} \notin BA \cap \mathbb{R}^-$, alors nécessairement l'ensemble $\{\psi^1 < 0\} \cap \{\psi^2 < 0\} \cap \mathbb{R}^-$ est non vide (cf. 4.3.1). On se retrouve donc dans la situation de l'étape 1/. Supposons donc que $-\mathsf{e} \in BA \cap \mathbb{R}^-$. Considérons un subordinateur $R$, indépendant de $X^1$ et de $X^2$, sans dérive, immortel et dont la mesure de Lévy est : $e^{-\mathsf{e}t}dt1_{t\geq 0}$. Notons $X^{1,r} = X^1 - R$ et $X^{2,r} = X^2 - R$. Les mesures de Lévy de ces deux processus intègrent $t \mapsto e^{a|t|}1_{t<0}$ pour $a \in [0, \mathsf{e}[$ mais pas pour $a \in [\mathsf{e}, \infty[$.

Notons $(\gamma, \Gamma)$ le subordinateur d'échelle bivarié relatif à $H - R\neg$. Le théorème 3.2.1 nous indique qu'un subordinateur d'échelle bivarié relatif à $X^{1,r}$ et à $X^{2,r}$ est donné par $(\neg_\gamma, \Gamma)$. Ainsi $\Bbbk^{1,r} = cst\, \Bbbk^{2,r}$, puis, la normalisation choisie impose $cst = 1$. D'autre part, grâce à la soustraction de $R$, l'intervalle $BA^{1,r} \cap \mathbb{R}^- = BA^{2,r} \cap \mathbb{R}^-$ est maintenant ouvert en son extrémité gauche. Dans ce cas, la proposition 4.3.1 indique que $\{\psi^{1,r} < 0\} \cap \mathbb{R}^-$ et $\{\psi^{2,r} < 0\} \cap \mathbb{R}^-$ sont des intervalles non vides. Nous pouvons donc appliquer le point 1/ qui nous assure que $X^{1,r} \overset{\text{loi}}{=} X^{2,r}$. Finalement $X^1 \overset{\text{loi}}{=} X^2$.

3/ Supposons qu'il existe $q \in \mathbb{R}_*$ tel que $\mathbf{E}|e^{-qX_1}| < \infty$. Si $q < 0$, on se reporte à l'étape précédente. Supposons $q > 0$. Quitte à tuer suffisamment $X^1$ et $X^2$, nous pouvons supposer

que $\psi^1(q) > 0$ et $\psi^2(q) > 0$, ce qui nous permet d'effectuer une transformation de sous-Girsanov : notons $X^{1,\flat q}$ et $X^{2,\flat q}$ les processus de Lévy dont les exposants sont $\psi^1(z+q)$ et $\psi^2(z+q)$. D'après la proposition 4.4.1, leur processus d'échelle bivarié sont égaux :

$$\Bbbk^{1,\flat q}(\alpha,\beta) = \Bbbk^{2,\flat q}(\alpha,\beta) = cst\, \Bbbk(\alpha,\beta+\lambda)$$

De plus, grâce à la transformation de sous-Girsanov, les bandes analytiques de $X^{1,\flat q}$ et de $X^{2,\flat q}$ rencontrent $\mathbb{C}^- \setminus i\mathbb{R}$ :

$$BA^{1,\flat q} \cap ]-\infty, 0[ \;=\; BA^{2,\flat q} \cap ]-\infty, 0[ \;\neq\; \emptyset$$

Cela nous ramène à l'étape 2/ qui nous donne $\psi^1(z+q) = \psi^2(z+q)$. Par translation $\psi^1(z) = \psi^2(z)$. □

La proposition qui suit permet d'accomoder le théorème précédent à différentes sauces. Si $Z$ est un processus sur $\Omega$, on appelle "lois marginales de $Z$" le noyau $(t, dx) \mapsto \mathbf{P}[Z_t \in dx]$. La donnée des lois marginales de $Z$ est bien moins précise que la donnée de la loi du processus $Z$ qui est une probabilité sur l'espace canonique.

**Proposition.** Soit $X^1$ et $X^2$ deux processus de Lévy. Les points suivants sont équivalents :

$(i)$ Les fonctions $\Bbbk^1$ et $\Bbbk^2$ sont égales.

$(ii)$ La loi du processus $S^1$ est égale à la loi du processus $S^2$.

$(iii)$ Les lois marginales de $S^1$ sont égales aux lois marginales de $S^2$.

$(iv)$ Les lois marginales de $X^1 \vee 0$ sont égales aux lois marginales de $X^2 \vee 0$.

*Démonstration.* Dans toute cette démonstration $X$ désignera $X^1$ ou $X^2$ indifféremment.

▷ Montrons d'abord l'équivalence entre $(i)$ et $(ii)$. Il s'agit de vérifier que la loi de $S$ et la fonction $\Bbbk$ se "déterminent mutuellement". Supposons par exemple que $X$ visite $]0,\infty[$ immédiatement (le cas contraire est encore plus simple à traiter). Pour construire le temps local, nous avons uniquement besoin de l'adhérence de $\{S = X\}$ qui coïncide avec l'adhérence de $\{t : \forall s < t \;\; S_s < S_t\}$. Ainsi l'inverse du temps local $\neg$ peut-être construit avec le processus $S$, et ensuite $H = S\neg$. Réciproquement, nous avons $S^- = H^-_L$, où $L$ est l'inverse de $\neg$. Ainsi le subordinateur bivarié $(\neg, H)$ permet de reconstruire $S$, donc son exposant $\Bbbk$ détermine la loi de $S$.

▷ Montrons maintenant que $(i)$ équivaut à $(iv)$. Notons $Q$ le noyau des lois marginales du processus $X \vee 0$. Pour tout $t$, nous considérons $Q_t(dx) = \mathbf{P}[X_t \vee 0 \in dx]$ comme étant une sous-probabilité sur $\mathbb{R}^+$ ($Q_t[\mathbb{R}^+] = \mathbf{P}[\zeta < t] = e^{-t\psi_o}$).

Grâce à l'expression ⓐ p.25, le noyau $Q$ permet de calculer $\Bbbk$ :

$$\Bbbk(\alpha,\beta) \;=\; \exp\int_0^\infty \frac{dt}{t}\int_{]0,\infty[}\Big(e^{-(1-\psi_o)t}-e^{-\alpha t-\beta x}\Big)Q_t(dx) \qquad \text{Avec } \psi_o=-\ln Q_1[\mathbb{R}^+]$$

Réciproquement, on a les relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Bbbk(\alpha,\beta) \;=\; \int_0^\infty\int_{]0,\infty[} e^{-\alpha t}e^{-\beta x}\,Q_t(dx)dt$$

$$\psi_o \;=\; \inf\{t\;:\;\Bbbk(1-t,0)=1\}$$

Ainsi $\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Bbbk(\alpha,\beta)$ est la transformée de Laplace bivariée de la mesure $Q_t(dx)1_{x>0}dt$. Par ailleurs, comme $X$ ne saute pas au temps constants, la fonction $t\mapsto Q_t(]x,\infty[)$ est continue, donc $\Bbbk$ détermine $Q_t(dx)1_{x>0}$ pour tout $t$. Pour finir, $Q_t\{0\}=e^{-\psi_o t}-Q_t]0,\infty[$.

▷ Montrons que $(i)$ équivaut à $(iii)$. Notons $R_t(dx)=\mathbf{P}[S_t\in dx]$ (sous probabilité sur $\mathbb{R}^+$). Soit $\ddot{\alpha}$ un temps exponentiel indépendant de paramètre $\alpha>0$. Nous avons :

$$\int_0^\infty\int_{]0,\infty[} e^{-\beta x}e^{-\alpha t}\alpha\,R_t(dx)dt=\mathbf{E}[e^{-\beta S_{\ddot{\alpha}}}]=\frac{\Bbbk(\alpha,0)}{\Bbbk(\alpha,\beta)}$$

Et cela implique que la fonction $\Bbbk$ détermine le noyau $R$. Réciproquement, il suffit de montrer que la donnée de la fonction $(\alpha,\beta)\mapsto\frac{\Bbbk(\alpha,\beta)}{\Bbbk(\alpha,0)}$ et de la constante $\psi_o$ permet de calculer $\Bbbk$. Pour cela, dérivons par rapport à $\beta$ :

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\frac{\Bbbk(\alpha,\beta)}{\Bbbk(\alpha,0)}=\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Bbbk(\alpha,\beta)=\int_0^\infty\int_{]0,\infty[} e^{-\alpha t}e^{-\beta x}x\,Q_t(dx)\,\frac{dt}{t}$$

Ainsi $\frac{\Bbbk(\alpha,\beta)}{\Bbbk(\alpha,0)}$ détermine la mesure $\frac{x}{t}\,Q_t(dx)dt$. Cette mesure détermine $Q_t(dx)1_{x>0}$ pour tout $t>0$. Ceci, ajouté à la donnée de $\psi_o$ permet de déterminer le noyau $Q$, qui lui même détermine $\Bbbk$. □

**Remarque.** Oralement, le théorème 4.5.1 peut s'énoncer : "Si $X$ admet un moment exponentiel alors les lois marginales de $X^+$, ou bien celles de $S$, déterminent la loi du processus $X$".

# Partie II

# AUTOUR DES ÉQUATIONS AMICALES

Il y a quelques années (au milieu des années quatre-vingt) nous avions, mon ami Pierre Lusson et moi-même, au département de mathématique de l'université Paris-X (Nanterre), une très jolie jeune collègue, une ATER. [..] Et un lundi matin, comme nous étions ensemble dans le minuscule bureau de notre "département", voyant Sonia bâiller légèrement en sortant la feuille d'exercices de logique de son cartable, [..] Pierre lui dit (en substance) : "On danse le week-end, et le lundi on bâille ! " Elle en convint. On bavarda sur ce thème un moment.

Et Pierre, encouragé par ce premier succès conversationnel, [..] heureux par ailleurs de pouvoir utiliser, grâce aux renseignements fournis par Juliette et Cécile, ses filles, un vocabulaire adéquat à la circonstance, posa à Sonia une autre question : "Et quand vous allez danser en boite est-ce que vous leur dites, à vos danseurs, que vous êtes mathématicienne ?". La réponse de Sonia fut immédiate : "Ah non ! je l'ai fait une fois, mais je n'ai jamais recommencé ! ".

Car, devant la mathématique, incarnée de manière si inattendue, si imprévisible, si brusque, non par le visage traditionnellement peu amène d'un ancien instituteur ou professeur, ou la caricature du savant fou de l'opinion commune, mais par une jeune fille, et qui plus est aussi jolie que Sonia, le réflexe spontané du danseur avait été la fuite.

Jacques Roubaud
Mathématique : (1997)

# Chapitre 5

# Équations amicales

$H$ et $\widehat{H}$ désignent toujours les subordinateurs d'échelle de $X$ et de $\widehat{X} = -X$. Mais dans cette deuxième partie nous travaillerons de préférence avec $H$ et $\check{\widehat{H}} = -\widehat{H}$. Ce dernier est un co-subordinateur, aussi sa mesure de Lévy et sa mesure potentielle sont portées par $\mathbb{R}^-$ (ce qui est vraiment pratique pour la suite). Nous notons $\check{\widehat{\kappa}}(z) = \widehat{\kappa}(-z)$ son exposant. La factorisation de Wiener-Hopf s'exprime alors :

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad \psi(iu) = \check{\widehat{\kappa}}(iu)\kappa(iu) \ .$$

$\hookrightarrow$ En transformant l'équation $\psi = \check{\widehat{\kappa}}\kappa$ par l'inversion de Fourier, nous obtenons l'équation amicale : une égalité de convolution reliant la mesure de Lévy de $X$ à celles de $H$ et $\check{\widehat{H}}$.
$\hookrightarrow$ En transformant l'équation $\kappa = \psi(1/\check{\widehat{\kappa}})$ par l'inversion de Fourier, nous obtenons l'équation amicale inversée : une égalité de convolution reliant la mesure de Lévy de $H$ à la mesure de Lévy de $X$ et à la mesure potentielle de $\check{\widehat{H}}$.
Nous donnons ensuite deux applications immédiates :
$\hookrightarrow$ Avec l'équation amicale nous redémontrons très simplement le théorème de Rogozin (Si $X$ est à variation infinie alors $\overline{\lim}_{t\to 0} \frac{X_t}{t} = +\infty$).
$\hookrightarrow$ Avec l'équation amicale inversée nous déterminons le support de la mesure de Lévy relative à $H$.

**N.B.** Bien que de telles équations semblent naturelles, elles sont peu citées dans la littérature. Dans [28], on peut trouver "l'équation amicale intégrée" ; mais la démonstration qu'en donne L.C.G. Rogers est assez indirecte.

## 5.1 Énoncé des équations amicales

### ↬ Notations

Voici les représentations de Lévy-Khintchine relatives à $X$, $H$ et $\check{\widehat{H}}$ :

$$\begin{aligned}
\psi(iu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-iux} - iux1_{[-1,1]}) d\pi(x) + iu\mathtt{a} + \mathtt{b}u^2 \\
\kappa(iu) &= \int_0^{\infty} (1 - e^{-iux}) dpo + iuc + \kappa_o \\
\check{\widehat{\kappa}}(iu) &= \int_{-\infty}^{0} (1 - e^{-iux}) dne - iu\hat{c} + \widehat{\kappa}_o \ ,
\end{aligned}$$

où

$\mathtt{a} \in \mathbb{R},\ \mathtt{b} \geq 0$ et $d\pi$ est une mesure intégrant $x^2 1_{[-1,1]}$ et $1_{[-1,1]^c}$
$\kappa_o \geq 0,\ c \geq 0$ et $dpo$ est une mesure portée par $\mathbb{R}^+$ intégrant $x1_{[0,1]}$ et $1_{[1,\infty[}$
$\widehat{\kappa}_o \geq 0,\ \hat{c} \geq 0$ et $dne$ est portée par $\mathbb{R}^-$ et intègre $x1_{[-1,0]}$ et $1_{]-\infty,-1]}$ .

Pour mémoire : "*ne*" vient de négatif tandis que "*po*" vient de positif.

Les queues des mesures sont :

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}(x) &= \int (1_{\{0<x<s\}} + 1_{\{s<x<0\}}) d\pi(s) \\
\overline{po}(x) &= \int 1_{\{0<x<s\}} dpo(s) \\
\overline{ne}(x) &= \int 1_{\{s<x<0\}} dne(s) \ .
\end{aligned}$$

Ces fonctions sont croissantes et càglàd sur $]-\infty, 0[$ ; décroissantes et càdlàg sur $]0, \infty[$. Notons que les limites en $0+$ ou en $0-$ peuvent être infinies.

Les queues intégrées sont :

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\pi}}(x) &= \int (1_{\{0<x<s\}} + 1_{\{s<x<0\}}) \overline{\pi}(s) ds \\
\overline{\overline{po}}(x) &= \int 1_{\{0<x<s\}} \overline{po}(s)\, ds \\
\overline{\overline{ne}}(x) &= \int 1_{\{s<x<0\}} \overline{ne}(s)\, ds \ .
\end{aligned}$$

Nous notons $\overline{po}_o$ pour $\overline{po}(0+)$ et $\overline{ne}_o$ pour $\overline{ne}(0-)$.

Pour finir, nous notons $d\mathcal{V}$ la mesure potentielle de $H$ (aussi appelée mesure de renouvellement de $X$) et $\mathcal{V}(x) = 1_{\{x \geq 0\}} \int 1_{[0,x]}\, d\mathcal{V}$.

Nous notons $d\widehat{\mathcal{V}}$ la mesure potentiel de $\widehat{H}$ et $\widehat{\mathcal{V}}$ sa fonction de répartition.

Et bien-sûr : $d\check{\widehat{\mathcal{V}}}(x) = d\widehat{\mathcal{V}}(-x)$ et $\check{\widehat{\mathcal{V}}}(x) = \widehat{\mathcal{V}}(-x)$.

## ↬ Énoncé

**Proposition 5.1.1**
• Si $\hat{c} > 0$ alors la mesure $dpo$ admet une densité $\overline{p}$ qui peut être choisie càdlàg.
• Si $c > 0$ alors la mesure $dne$ admet une densité $\overline{n}$ qui peut être choisie làdcàg.

**Remarque.** Nous montrerons plus loin (6.4.1) que les fonctions $\overline{p}$ et $\overline{n}$ sont les queues de certaines mesures signées (d'où la notation).

Le symbole $*$ désigne la convolution habituelle.
**Proposition.** L'équation amicale :

$$\begin{aligned} \text{sur } ]-\infty,0[ \qquad \overline{\pi} &= \overline{po} * dne + \kappa_o \overline{ne} + c\,\overline{n} \\ \text{sur } ]0,\infty[ \qquad \overline{\pi} &= \overline{ne} * dpo + \widehat{\kappa}_o \overline{po} + \hat{c}\,\overline{p}\ . \end{aligned}$$

L'équation amicale inversée :

$$\begin{aligned} \text{sur } ]-\infty,0[ \qquad \overline{ne} &= \overline{\pi} * d\mathcal{V} \\ \text{sur } ]0,\infty[ \qquad \overline{po} &= \overline{\pi} * d\check{\widehat{\mathcal{V}}}\ . \end{aligned}$$

et sa version dérivée :

$$\begin{aligned} \text{sur } ]-\infty,0[ \qquad dne &= d\pi * d\mathcal{V} \\ \text{sur } ]0,\infty[ \qquad dpo &= d\pi * d\check{\widehat{\mathcal{V}}}\ . \end{aligned}$$

**Proposition.** Lorsque $\mathbf{E}|X_1| < \infty$, on a :
L'équation amicale intégrée :

$$\begin{aligned} \text{sur } ]-\infty,0[ \qquad \overline{\overline{\pi}} &= \overline{po} * \overline{ne} + \kappa_o \overline{\overline{ne}} + c\,\overline{ne} \\ \text{sur } ]0,\infty[ \qquad \overline{\overline{\pi}} &= \overline{ne} * \overline{po} + \widehat{\kappa}_o \overline{\overline{po}} + \hat{c}\,\overline{po}\ . \end{aligned}$$

L'équation amicale inversée intégrée :

$$\begin{aligned} \text{sur } ]-\infty,0[ \qquad \overline{\overline{ne}} &= \overline{\pi} * \mathcal{V} \\ \text{sur } ]0,\infty[ \qquad \overline{\overline{po}} &= \overline{\pi} * \check{\widehat{\mathcal{V}}}\ . \end{aligned}$$

Par convergence monotone les équations intégrées se prolongent en zéro :

**Corollaire 5.1.2** Lorsque $\mathbf{E}|X_1| < \infty$, on a :

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\pi}}(0-) &= \int_{-\infty}^{0} |u| d\pi(u) &&= \int_{-\infty}^{0} \overline{po}(-u)\overline{ne}(u)du \;+\; \kappa_o \overline{\overline{ne}}(0-) \;+\; c\,\overline{ne}(0-) \\
\overline{\overline{\pi}}(0+) &= \int_{0}^{\infty} u d\pi(u) &&= \int_{0}^{\infty} \overline{ne}(-u)\overline{po}(u)du \;+\; \widehat{\kappa}_o \overline{\overline{po}}(0+) \;+\; \hat{c}\,\overline{po}(0+) \\
\overline{\overline{ne}}(0-) &= \int_{-\infty}^{0} |u|\, dne(u) &&= \int_{-\infty}^{0} \mathcal{V}(-u)\overline{\pi}(u)du \\
\overline{\overline{po}}(0+) &= \int_{0}^{\infty} u\, dpo(u) &&= \int_{0}^{\infty} \check{\mathcal{V}}(-u)\overline{\pi}(u)du \quad .
\end{aligned}$$

Contrairement à l'équation amicale inversée, il n'existe pas toujours une version dérivée de l'équation amicale. Dans la proposition suivante (dont la démonstration est laissée au lecteur), nous donnons deux cas particuliers dans lesquels la mesure $d\pi$ s'exprime explicitement.

**Proposition 5.1.3**
1/ Si $\overline{ne}_o < \infty$ et $\hat{c} = 0$ (i.e. si $X$ ne visite pas $]-\infty, 0[$ immédiatement) alors :

$$\text{sur } ]0, +\infty[ \qquad d\pi = (\overline{ne}_o + \kappa_o) dpo - dpo * dne$$

2/ Si $dpo$ admet une densité qui est la queue d'une mesure signée $dp$ alors :

$$\text{sur } ]0, +\infty[ \qquad d\pi = (\overline{ne} * dp)dx \;+\; \kappa_o\, dpo \;+\; \hat{c}\, dp$$

Nous verrons dans le chapitre suivant que cette deuxième hypothèse est toujours vérifée quand $X$ rampe vers le bas ($\hat{c} > 0$).

## 5.2 Démonstrations

### ↬ Préliminaires sur les distributions

Soit $O$ un ouvert de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{D}_O$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dont le support est un compact inclus dans $O$. On note $\mathcal{D}'_O$ l'ensemble des distributions sur $\mathcal{D}_O$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide. On note $\mathcal{S}'$ l'ensemble des distributions sur $\mathcal{S}$ (appelées distributions tempérées).

Rappelons rapidement les définitions des distributions compensées :
Soit $d\mu$ une mesure signée intégrant $1_{[-1,1]^c}$ et $|x|1_{[-1,1]}$. Nous notons $\complement d\mu$ la distribution définie par :

$$\complement d\mu \;:\; \varphi \mapsto \int \big(\varphi(x) - \varphi(0)\big) d\mu(x) \;.$$

Si $d\mu$ intègre $1_{[-1,1]^c}$ et $x^2 1_{[-1,1]}$, on note :

$$\mathsf{CC}_1 d\mu \ : \ \varphi \mapsto \int \big(\varphi(x) - \varphi(0) - x 1_{[-1,1]^c}\, \varphi'(0)\big) d\mu(x) \ .$$

Si en plus $d\mu$ intègre $x 1_{[-1,1]^c}$ alors on définit :

$$\mathsf{CC} d\mu \ : \ \varphi \mapsto \int \big(\varphi(x) - \varphi(0) - x\, \varphi'(0)\big) d\mu(x) \ .$$

Les distributions du type $\mathsf{CC}$ sont plus faciles à manipuler que celles qui s'écrivent avec $\mathsf{CC}_1$.

Les démonstrations des deux lemmes suivants sont laissées au lecteur.

**Lemme 5.2.1**
• La restriction de $\mathsf{C} d\mu$, $\mathsf{CC} d\mu$ ou de $\mathsf{CC}_1 d\mu$ à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est la distribution $d\mu \in \mathcal{D}'_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$.
• Si $d\mu$ est une mesure finie alors $\mathsf{C} d\mu = d\mu - (\int d\mu)\, \delta$.
• On peut décomposer $\mathsf{C} d\mu$ en la somme d'une distribution à support compact et d'une mesure finie :

$$\mathsf{C} d\mu = \mathsf{C}(d\mu 1_{[-1,1]}) - (\int_{[-1,1]^c} d\mu)\delta + d\mu 1_{[-1,1]^c} \ .$$

Cette dernière propriété atteste que l'on peut convoluer ces distributions entre elles sans problème.

Donnons nous deux distributions tempérées $S$ et $T$ qui toutes deux peuvent se décomposer en la somme d'une distribution à support compat et d'une mesure finie (ainsi $S * T$ est bien définie). La restriction de $S$ à un ouvert $O$ est une distribution de $\mathcal{D}'_O$ que nous notons $S\big|_O$ .

**Lemme 5.2.2** Si $T$ est portée par $\mathbb{R}^-$ alors :

$$\big(T * S\big)\big|_{]0,\infty[} \quad = \quad \big( \ T * S\big|_{]0,\infty[} \ \big)\big|_{]0,\infty[} \ .$$

**N.B :** Par la suite, toutes les dérivées sont à prendre au sens des distributions.

### ↬ Démonstration des équations amicales

**Proposition 5.2.3** On vérifie facilement les identités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\kappa &= -\mathsf{C} dpo \ + \ c\delta' \ + \ \kappa_o \delta \\
\mathcal{F}^{-1}\overset{\sim}{\kappa} &= -\mathsf{C} dne \ - \ \hat{c}\delta' \ + \ \widehat{\kappa}_o \delta \\
\mathcal{F}^{-1}\psi &= -\mathsf{CC}_1 d\pi \ + \ b\delta'' \ + \ a\delta' \ .
\end{aligned}$$

Nous rappelons que $d\pi^\circ = d\pi 1_{[-1,1]}$ et $d\pi^\times 1_{[-1,1]^c}$ et nous notons $\epsilon$ la fonction signe. Dans la proposition 1.2.1 nous avons montré les dérivations suivantes :

**Lemme 5.2.4**

$$\begin{aligned} \overline{po}' &= -\mathsf{C} dpo \\ \overline{ne}' &= +\mathsf{C} dne \\ \left(\mathsf{C}\epsilon\overline{\pi}^\circ + \epsilon\overline{\pi}^\times\right)' &= -\mathsf{C}\mathsf{C}_1 d\pi \end{aligned}$$

*Montrons maintenant l'équation amicale* : La factorisation $\psi = \check{\kappa}\kappa$, transformée par $\mathcal{F}^{-1}$ donne :

$$\left(-\mathsf{C} dne - \hat{c}\delta' + \widehat{\kappa}_o\delta\right) * \left(-\mathsf{C} dpo + c\delta' + \kappa_o\delta\right) = -\mathsf{C}\mathsf{C}_1 d\pi + b\delta'' + a\delta' .$$

Lorsqu'on développe cette expression, toutes les convolutions ont un sens (cf. 5.2.1). À l'aide du lemme 5.2.4, nous extrayons une primitive de cette égalité :

$$\left(-\overline{ne} - \hat{c}\delta - \widehat{\kappa}_o 1_{\mathbb{R}^-}\right) * \left(-\mathsf{C} dpo + c\delta' + \kappa_o\delta\right) = \mathsf{C}\epsilon\overline{\pi}^\circ + \epsilon\overline{\pi}^\times + b\delta' + a\delta + cst .$$

où *cst* est la constante d'intégration. En utilisant les lemmes 5.2.2 et 5.2.1, nous restreignons cette égalité à $]0,\infty[$ :

$$\overline{ne} * dpo + \hat{c}\, dpo + \overline{po} = \overline{\pi} + cst \qquad (\triangle)$$

C'est une égalité entre distributions de $\mathcal{D}'_{]0,\infty[}$.

Il apparait alors que la mesure $\hat{c}\, dpo$ est une fonction. Par conséquent, si $\hat{c} > 0$, alors *dpo* admet une densité que l'on peut choisir càdlàg. La proposition 5.1.1 est ainsi montrée.

L'égalité entre distributions $(\triangle)$ se transpose en une égalité presque-partout sur $]0,\infty[$ entre fonctions. Mais comme tous les termes sont càdlàg, cette égalité est valable partout sur $]0,\infty[$. Pour finir, en regardant en $+\infty$, il s'avère que $cst = 0$. L'équation amicale sur $\mathbb{R}^+$ suit. L'équation amicale sur $\mathbb{R}^-$ s'obtient de façon symétrique.

*Montrons l'équation amicale inverse* : Soit $\lambda > 0$, on a :

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad \kappa(iu) = \left(\psi(iu) + \lambda\kappa(iu)\right) \frac{1}{\check{\kappa}(iu) + \lambda} . \qquad (\heartsuit)$$

Notons $d\check{\mathcal{V}}_\lambda$ la mesure potentielle de $\check{H}$ tué en un temps exponentiel indépendant de paramètre $\lambda$. $d\check{\mathcal{V}}_\lambda$ est une mesure finie ( ce n'est pas forcément le cas pour $d\check{\mathcal{V}}$). Sa transformée de Fourier est la fonction $(1/(\check{\kappa} + \lambda))$. L'équation $(\heartsuit)$ se transforme par $\mathcal{F}^{-1}$ :

$$-\mathsf{C} dpo + c\,\delta' + \kappa_o\,\delta = \left(-\mathsf{C}\mathsf{C} d\pi - \lambda\mathsf{C} dpo + b\delta'' + (a + \lambda c)\delta' + \lambda\kappa_o\delta\right) * d\check{\mathcal{V}}_\lambda .$$

En restreignant cela à $]0,\infty[$ on trouve :

$$dpo = \left[\ (d\pi + \lambda dpo) * d\check{\mathcal{V}}_\lambda\ \right] 1_{]0,\infty[}\ .$$

En faisant tendre $\lambda$ vers zéro, nous obtenons sans problème $dpo = (d\pi * d\check{\mathcal{V}}) 1_{]0,\infty[}$. En intégrant ces mesures de $x > 0$ à $\infty$, nous trouvons l'équation amicale inversée sur $\mathbb{R}^+$. Celle sur $\mathbb{R}^-$ s'obtient de façon symétrique.

*Montrons les équations intégrées* : La finitude de $\mathbf{E}|X_1|$ équivaut à celle de $\int_{[-1,1]^c} \overline{\pi}(x)dx$ (voir [30] p.159). Ainsi, pour $x > 0$ :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\pi}}(x) &= \int_x^\infty \overline{\pi} du = \int_x^\infty (\overline{ne} * dpo + \hat{c}\overline{p} + \widehat{\kappa}_o \overline{po}) du \\ &= \overline{ne} * \overline{po}(x) + \hat{c}\,\overline{po}(x) + \widehat{\kappa}_o \overline{\overline{po}}(x)\ . \end{aligned}$$

Les autres équations intégrées se démontrent de même.

Les deux sections suivantes sont consacrées aux applications directes des équations amicales.

## 5.3 Théorème de Rogozine

**Lemme 5.3.1** Supposons que $d\pi$ soit portée par $[-1,1]$, on a :

$$\int_0^\infty \overline{ne} * dpo(x)\, dx \quad = \quad \int_{-\infty}^0 \overline{po} * dne(x)\, dx \quad = \quad \int_0^\infty \overline{po}(x)\overline{ne}(-x)\, dx$$

*Démonstration.* Par Fubini :

$$\forall z > 0 \quad \int_z^\infty \overline{ne} * dpo(x)\, dx = \overline{ne} * \overline{po}(z)$$

Par limite monotone :

$$\int_0^\infty \overline{ne} * dpo(x)\, dx = \int_0^\infty \overline{po}(x)\overline{ne}(-x)\, dx$$

De même $\int_{-\infty}^0 \overline{po} * dne(x)\, dx = \overline{po} * \overline{ne}(0-) = \int_0^\infty \overline{po}(x)\overline{ne}(-x)\, dx$ □

Le théorème suivant a été montré par Rogozine dans [29] en 1968. Pour ce faire, il approximait $X$ par une suite de PPC. Il existe une démonstration plus récente dans le livre de Sato [30] qui utilise la décomposition de $X$ en une différence de deux sans-sauts-positifs. La démonstration que nous proposons est simple et non-probabiliste.

**Théorème 5.3.2 (Rogozin)** Si $X$ est à variation infinie alors il visite $]0,\infty[$ et $]-\infty,0[$ immédiatement.

*Démonstration.* Nous supposons, sans perdre de généralité que $d\pi$ est portée par $[-1,1]$. Si $X$ ne visite pas $]0,\infty[$ immédiatement, alors $\overline{po}_o < \infty$ et $c = 0$. Le lemme 5.3.1 nous dit ceci :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \overline{ne} * dpo(x)\,dx &= \int_{-\infty}^0 \overline{po} * dne(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty \overline{po}(x)\overline{ne}(-x)\,dx \leq \overline{po}_o \int_0^\infty \overline{ne}(-x)dx < \infty\end{aligned}$$

Et par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \overline{\pi}\,dx &= \int_0^\infty (\overline{ne} * dpo + \widehat{\kappa}_o\overline{po} + \hat{c}\overline{p})dx < \infty \\ \int_{-\infty}^0 \overline{\pi}\,dx &= \int_{-\infty}^0 (\overline{po} * dne + \kappa_o\overline{ne})dx < \infty\end{aligned}$$

Ce qui est absurde car $X$ est à variation infinie.
Par symétrie, $X$ visite aussi $]-\infty,0[$ immédiatement. □

**Corollaire.** Si $X$ est à variation infinie alors

$$\underline{\lim}_{t\to 0}\frac{X_t}{t} = -\infty \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{t\to 0}\frac{X_t}{t} = +\infty$$

*Démonstration.* Pour prouver légalité de gauche, il suffit de vérifier que :

$$\forall a > 0\ \forall \delta > 0 \qquad \inf_{t<\delta}(X_t + at) < 0$$

c.a.d : $X_t + at$ visite $]-\infty,0[$ immédiatement. Or ce dernier est à variation infinie. □

## 5.4 Supports de *dpo* et *dne*

### ↬ Énoncés

Dans cette section, $X$ est un processus de Lévy qui n'est ni un subordinateur, ni un co-subordinateur. Notons $\operatorname{supp} d\pi$ le support de la mesure de Lévy, puis définissons :

$$\begin{aligned}-\hat{B} &= \inf\big(\operatorname{supp} d\pi \cup \{0\}\big) \qquad (-\hat{B} \in [-\infty,0]) \\ B &= \sup\big(\operatorname{supp} d\pi \cup \{0\}\big) \qquad (B \in [0,\infty])\end{aligned}$$

**Théorème 5.4.1** Excluons le cas où $X$ est un processus de Poisson composé. On a :

$$\begin{aligned} \text{supp } dpo &= [0, B] \\ \text{supp } dne &= [-\hat{B}, 0] \end{aligned}$$

Avec la convention exeptionnelle $[0, 0] = \emptyset$.

**Théorème 5.4.2** Si $X$ est un processus de Poisson composé, deux cas sont possibles :

1/ Il existe $k > 0$ tel que $d\pi$ soit portée par $k\mathbb{Z}$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \text{supp } dpo &= \{k, 2k, ..., B\} \\ \text{supp } dne &= \{-\hat{B}, ..., -2k, -k\} \end{aligned}$$

2/ $d\pi$ n'est portée par aucun groupe du type $k\mathbb{Z}$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \text{supp } dpo &= [0, B] \\ \text{supp } dne &= [-\hat{B}, 0] \end{aligned}$$

Avec la convention exeptionnelle $[0, 0] = \emptyset$

### ↬ Rappels

Avant de démontrer ce théorème, observons les différentes formes que revêt le support d'une loi infiniment divisible. La proposition qui suit est tirée du livre de K-I. Sato [30] p.148.

**Proposition 5.4.3** Soit $Y$ un processus de Lévy et soit $\mathbb{S}_t$ le support de la loi de $Y_t$.

• Si $Y$ n'est pas un PPC et si ce n'est ni un subordinateur, ni l'opposé d'un subordinateur, alors :

$$\mathbb{S}_t = \mathbb{R}$$

• Si $Y$ n'est pas un PPC et si c'est un subordinateur de dérive $\mathtt{d} \geq 0$, alors :

$$\mathbb{S}_t = [\mathtt{d}\, t, \infty[$$

• Si $Y$ est un PPC alors $\mathbb{S}_t$ est la fermeture du plus petit semi-groupe contenant le support de $d\pi_Y$.

Du dernier point, nous pouvons extraire des cas particuliers :

**Corollaire 5.4.4** Soit $Y$ un processus de Poisson composé qui n'est ni un subordinateur, ni l'opposé d'un subordinateur. Il n'y a que deux cas possibles :
1/ Il existe $k > 0$ tel que $d\pi$ soit portée par $k\mathbb{Z}$. Dans ce cas :

$$\mathbb{S}_t = k\mathbb{Z}$$

2/ $d\pi$ n'est portée par aucun groupe du type $k\mathbb{Z}$. Dans ce cas :

$$\mathbb{S}_t = \mathbb{R}$$

**Corollaire 5.4.5** Soit $Y$ un processus de Poisson composé qui est aussi un subordinateur. Si 0 appartient au support de la mesure $d\pi$ alors :

$$\mathbb{S}_t = \mathbb{R}^+$$

*Démonstration.* Pour déduire les corollaires de la proposition, il suffit de montrer que tout semi-groupe $M$ vérifie :
• Si $M$ possède au moins un élément positif et un élément négatif alors, soit $M$ est dense dans $\mathbb{R}$, soit $M = k\mathbb{Z}$
• S'il existe une suite positive de $M$ qui converge vers 0 alors $M$ est dense dans $\mathbb{R}^+$.
Ce sont des exercices d'algèbre amusants qui sont consignés en annexe du chapitre.

Notons $\mathbb{S}_{\check{\lambda}}$ le support de la mesure $\lambda$-potentielle de notre Lévy $Y$.
**Proposition.**
↪ Si $Y$ est un subordinateur de dérive $\mathtt{d} > 0$ alors $\mathbb{S}_{\check{\lambda}} = [0, \infty[$.
↪ Si $Y$ est un co-subordinateur avec une dérive $\mathtt{d} < 0$ alors $\mathbb{S}_{\check{\lambda}} = ]-\infty, 0]$
↪ Dans tous les autres cas $\mathbb{S}_{\check{\lambda}} = \mathbb{S}_t$.
*Démonstration.* Il suffit d'utiliser le fait que $\mathbb{S}_{\check{\lambda}}$ est l'adhérence de l'union des $\mathbb{S}_t$ pour $t > 0$.

## ↬ Démonstration des théorèmes 5.4.1 et 5.4.2

*Démontrons le théorème 5.4.1 :* Supposons donc que $X$ n'est pas un PPC.

▷ Supposons que $X$ a des sauts des deux côtés.

Si $X$ visite $]-\infty, 0[$ immédiatement, alors $\overset{\curvearrowleft}{H}$ n'est pas un PPC et $\operatorname{supp} d\overset{\curvearrowleft}{\mathcal{V}} = \mathbb{R}^-$. De l'équation amicale inversée :

$$dpo = \left( d\pi * d\overset{\curvearrowleft}{\mathcal{V}} \right) 1_{\mathbb{R}_+}$$

nous déduisons :

$$\operatorname{supp} dpo = (\operatorname{supp} d\pi + \mathbb{R}^-) \cap \mathbb{R}^+ = [0, B]$$

Comme 0 appartient à $\operatorname{supp} dpo$, d'après 5.4.3, $\operatorname{supp} d\mathcal{V} = \mathbb{R}^+$ et donc :

$$\operatorname{supp} dne = (\operatorname{supp} d\pi + \mathbb{R}^+) \cap \mathbb{R}^- = [-\hat{B}, 0]$$

Si $X$ visite $]0, \infty[$ immédiatement c'est idem.

Si $X$ ne visite ni $]0, \infty[$ ni $]-\infty, 0[$ immédiatement alors $X$ est un PPC ce qui est exclu.

▷ Lorsque $X$ n'a pas de saut positif ($dpo = 0$), il visite $]0, \infty[$ immédiatement (sinon c'est un co-subordinateur), donc $\operatorname{supp} d\mathcal{V} = \mathbb{R}^+$, donc $N = [-\hat{B}, 0]$. □

*Démontrons le théorème 5.4.2 :* Supposons que $X$ est un PPC. La v.a. $S_1 = \sup\{X_t \ : \ t \leq 1\}$ prend toutes les valeurs que prend $X_1^+$. Donc, si $\mathbb{S}_1$ désigne le support de $X_1$, nous avons $\operatorname{supp} d\mathcal{V} = \operatorname{supp} \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{R}^+$. Distinguons deux cas :
Si $d\pi$ est portée par $k\mathbb{Z}$ alors $\operatorname{supp} d\check{\mathcal{V}} = -k\mathbb{N}$, et de l'équation amicale inversée on déduit :

$$\operatorname{supp} dpo = (\operatorname{supp} d\pi - k\mathbb{N}) \cap \mathbb{R}^+ = \{k, 2k, ..., B\}$$

Sinon $\operatorname{supp} d\check{\mathcal{V}} = \mathbb{R}^-$ et par conséquent $\operatorname{supp} dpo = [0, B]$.

## 5.5 Annexe du chapitre

Cette annexe est consacrée à une propriété annoncée p.78. Donnons nous $M$ un semi-groupe.

**Lemme.** S'il existe une sous-suite positive $(x_n)$, d'éléments de $M$, qui converge vers zéro alors $M$ est dense dans $\mathbb{R}^+$.

*Démonstration.* Soit $a \in \mathbb{R}^+$, posons :

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left\lfloor \frac{a}{x_1} \right\rfloor x_1 \\
a_2 &= a_1 + \left\lfloor \frac{a - a_1}{x_2} \right\rfloor x_2 \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + \left\lfloor \frac{a - a_{n-1}}{x_n} \right\rfloor x_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à $x$.

La suite $a_n$ converge vers $a$. Donc $M$ est dense dans $\mathbb{R}^+$. □

**Lemme.** Si $M$ possède au moins un élément positif et un élément négatif alors, soit $M$ est dense dans $\mathbb{R}$, soit $M = k\mathbb{Z}$.

*Démonstration.* Supposons que $M \neq k\mathbb{Z}$. Il suffit de montrer qu'il existe une suite de $M$ qui tende vers 0.

Supposons qu'il n'existe aucune suite de $M$ convergeant vers 0. Soit $a = \inf(M \cap ]0, \infty[)$ et $-b = \sup(M \cap ]-\infty, 0[)$. Nécessairement $a = b$ (sinon $0 < a - b < a$ ou $-b < a - b < 0$).

On a : $2a \in M$. Il n'existe aucun élement $c$ dans $]a, 2a[ \cap M$ (sinon $0 < c - a < a$). De même tous les ensembles $]na, (n+1)a[ \cap M$ et $]-(n+1)a, -na[ \cap M$ sont vides. Mais alors $M = a\mathbb{Z}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. □

Si vous fermez la porte à toutes les erreurs,
la vérité aussi restera à la porte.

Tagore

# Chapitre 6

# Comparaison des mesures de Lévy de $X$ et de $H$

Notons $d\pi$ la mesure de Lévy de $X$ et *dpo* celle de $H$. Nous comparons $d\pi 1_{\mathbb{R}^+}$ et *dpo* en observant leur queue, leur régularité (absolue continuité, atome et partie singulière) et les fonctions qu'elles intègrent. Les trois propriétés suivantes : $X$ rampe vers le bas, $X$ ne visite pas $]-\infty, 0[$ immédiatement, $X$ converge vers $+\infty$, traduisent une certaine domination des sauts positifs de $X$ sur les sauts négatifs. Dans ces trois cas, nous constatons logiquement que les mesures $d\pi 1_{\mathbb{R}^+}$ et *dpo* présentent de fortes similitudes (fonctions de queue équivalentes, même régularité...). Nous en déduisons un critère d'existence des points de croissance, formulé avec la mesure de Lévy, valable lorsque $X$ rampe vers le haut. Par ailleurs, quand $X$ rampe vers le bas, *dpo* admet une densité que nous étudions en détails.

## 6.1 Préliminaire : Le lemme de l'encadreur

Le lemme suivant, extrait du livre de J. Bertoin [1] p.74, nous sera utile à de nombreuses reprises. Pour le plaisir, nous en donnons une nouvelle démonstration qui utilise l'inversion la transformation de Laplace.

**Lemme 6.1.1 (de L'encadreur)** Soit $X$ un subordinateur de mesure de Lévy $d\pi$, de dérive $\mathtt{d}$ et de taux de mortalité $\psi_o$. Soit $\mathcal{U}$ la fontion de répartition de la mesure potentielle de $X$. On a l'encadrement suivant

$$\forall x > 0 \qquad \frac{x}{c + \psi_o x + \int_0^x \overline{\pi}} \quad \leq \quad \mathcal{U}(x) \quad \leq \quad \frac{3\,x}{c + \psi_o x + \int_0^x \overline{\pi}}$$

*Démonstration.* En transformant l'égalité $\psi(z)\frac{1}{\psi(z)}$ par inversion de Laplace nous obtenons :

$$d\mathcal{U} * (-\mathtt{C}d\pi + \psi_o\delta + \mathtt{d}\delta') = \delta$$

Primitivons deux fois cette égalité :

$$\mathcal{U} * (\overline{\pi} + \psi_o\, 1_{\mathbb{R}^+} + \mathtt{d}\delta) \;=\; x1_{\mathbb{R}^+}$$

Pour montrer le lemme, il nous suffit de vérifier l'encadrement suivant :

$$\mathcal{U} * \overline{\pi} \quad \leq \quad \mathcal{U}(x)\int_0^x \overline{\pi} \quad \leq \quad 3\mathcal{U} * \overline{\pi}$$

L'inégalité de gauche vient tout simplement de la croissance de la fonction $\mathcal{U}$. Montrons celle de droite : Par la sous additivité de $\mathcal{U}$, pour tout $x < y$ on a $\mathcal{U}(x-y) \geq \mathcal{U}(x) - \mathcal{U}(y)$. Dès lors :

$$\mathcal{U} * \overline{\pi} \;=\; \int_0^x \mathcal{U}(x-y)\overline{\pi}(y)dy \quad \geq \quad \mathcal{U}(x)\int_0^x \overline{\pi}(y)dy - \int_0^x \mathcal{U}(y)\overline{\pi}(y)dy$$

Une réorganisation peu couteuse des termes ci-dessus nous donne :

$$\mathcal{U}(x)\int_0^x \overline{\pi}(y)dy \quad \leq \quad \mathcal{U} * \overline{\pi} \;+\; \int_0^x \mathcal{U}(y)\overline{\pi}(y)dy$$

Il nous suffit donc de prouver :

$$\int_0^x \mathcal{U}(y)\overline{\pi}(y)dy \;\leq\; 2\mathcal{U} * \overline{\pi}(x) \qquad (\heartsuit)$$

Par la croissance de $\mathcal{U}$ et la décroissance de $\overline{\pi}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{x}{2}} \mathcal{U}(s)\overline{\pi}(s)\,ds \;&\leq\; \int_0^{\frac{x}{2}} \mathcal{U}(x-s)\overline{\pi}(s)\,ds \;=\; \int_{\frac{x}{2}}^x \mathcal{U}(s)\overline{\pi}(x-s)\,ds \\
\int_{\frac{x}{2}}^x \mathcal{U}(s)\overline{\pi}(s)\,ds \;&\leq\; \int_{\frac{x}{2}}^x \mathcal{U}(s)\overline{\pi}(x-s)\,ds
\end{aligned}$$

En sommant ces deux inégalités on trouve ($\heartsuit$). □

## 6.2 Les fonctions intégrables par $d\pi$ et $dpo$

### ↬ Motivation

Les liens entre les moments de $H_1$ et ceux de $X_1 \vee 0$ sont étudiés depuis longtemps. Par exemple Chow et Lai dans [8] ont montré que, pour tout $p > 0$, $\mathbf{E}[(X_1 \vee 0)^{p+1}] < \infty$ implique $\mathbf{E}[H_1^p] < \infty$. Hogan dans [22], sous l'hypothèse $\mathbf{E}|\overset{\curvearrowleft}{H}_1| < \infty$, montre que, pour tout $p > 0$, $\mathbf{E}[(X_1 \vee 0)^{p+1}] < \infty$ ssi $\mathbf{E}[H_1^p] < \infty$. Chow dans [7] montre le théorème suivant :

**Théorème 6.2.1 (Chow)** Pour tout $p$ entier naturel non nul, l'équivalence suivante est vérifée :

$$\mathbf{E}[H_1^p] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^\infty \frac{x^{p+1}}{\int_1^\infty y(y \wedge x)\, d\pi(-x)}\, d\pi(x) < \infty$$

**Définition.** Nous dirons qu'une fonction $f$ est sous-exponentielle si elle est :
- portée par $\mathbb{R}^+$, positive,
- borné sur les compacts,

et s'il existe $A \geq 0$ tel que
- sur $[A, \infty[$, $f$ est croissante,
- il existe $cst > 0$ telle que $\forall x, y \geq A$ $f(x+y) \leq cst\, f(x) f(y)$.

On vérifie facilement que les fonctions $x^\alpha$, $\alpha > 0$, ou bien $x^\alpha e^{qx}$, $q > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ainsi que toutes les fonctions sous-additives, sont sous-exponentielles. Comme le nom l'indique, toute fonction sous-exponentielle est majorée par une fonction du type $be^{qx}$ avec $b, q > 0$. Il est aussi aisé de voir que si $f$ est sous-exponentielle, alors $\int_0^x f$ l'est aussi. Cette dernière propriété est importante pour la suite.

Citons maintenant le théorème des $f$-moments qui montre l'intérêt de telles fonctions. On pourra trouver sa démonstration dans [30] p.159.

**Théorème 6.2.2 (des $f$-moments)** Soit $f$ une fonction sous-exponentielle. Pour tout processus de Lévy $X$ de mesure de Lévy $d\pi$, on a l'équivalence suivante :

$$\mathbf{E}[f(X_1 \vee 0)] < \infty \;\Leftrightarrow\; \int_1^\infty f d\pi < \infty$$

Ainsi, pour une fonction $f$ sous-exponentielle, relier les finitudes de $\int_1^\infty f\, dpo$ et de $\int_1^\infty f\, d\pi$, revient à relier les finitudes de $\mathbf{E}[f(X_1 \vee 0)]$ et de $\mathbf{E}[f(H_1)]$.

↬ Énoncé

**Théorème 6.2.3** Soit $f$ une fonction sous-exponentielle.

1/ L'implication suivante est toujours vraie :

$$\int_1^\infty f\, dpo < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_1^\infty f\, d\pi < \infty$$

2/ Si $X$ tend vers $+\infty$ où s'il meurt alors la réciproque de l'implication précédente est vraie.

3/ L'implication suivante est toujours vraie :

$$\int_1^\infty f\, dpo < \infty \quad \Leftarrow \quad \int_1^\infty \left(\textstyle\int_0^x f\right) d\pi < \infty$$

4/ Si $\overset{\check{}}{H}$ ne meurt pas et si $\mathbf{E}|\overset{\check{}}{H}_1|$ est finie alors la réciproque de l'implication précédente est vraie.

**Remarque.** Les fonctions sous-exponentielles de la forme $f(x) = x^\alpha e^{qx}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $q > 0$, on la particularité suivante : $\exists B, k > 0\ \forall x > B\ \int_0^x f \leq k\, f(x)$. Ainsi en appliquant le point 1 et le point 3 du théorème précédent, nous voyons que pour de telles fonctions, $\int_1^\infty f dpo < \infty$ ssi $\int_1^\infty f d\pi < \infty$. En particulier, avec $f(x) = e^{qx}$ on retrouve la proposition 4.2.3 à savoir :

$$\forall q > 0 \qquad \mathbf{E}[\exp\{qH_1\}] < \infty \ \Leftrightarrow\ \mathbf{E}[\exp\{q\, X_1 \vee 0\}] < \infty$$

### ↬ Démonstration

Dans toute cette sous-section nous nous donnons $f$ une fonction sous-exponentielle, non identiquement nulle. Quite à poser $f := f1_{]A\vee 1,\infty[}$, nous pouvons supposer que $f$ est portée par $]1,\infty[$ et qu'elle est croissante. $f$ vérifie alors l'axiome suivant : Il existe $A > 1$ avec $f(A) > 0$ et $cst > 0$ telle que $\forall x, y \geq\ f(x+y) \leq cst\, f(x+y)$. Dès lors :

$$\forall x \geq A \quad \int_0^x f \quad \geq \quad f(x-A) \quad \geq \quad \frac{f(x)}{cst\, f(A)} \qquad (\Cap)$$

Moralité : il est plus facile d'intégrer $f$ que sa primitive.

Rappelons que $\mathbf{E}|\overset{\check{}}{H}_1| < \infty$ ssi $\overline{ne}$ est intégrable. Rappelons aussi que $\overset{\check{}}{H}$ est un PPC ssi $\overline{ne}$ est borné et $\hat{c} = 0$.

**Lemme A.** Si $\overline{ne}$ est intégrable et $\widehat{\kappa}_o = 0$ alors on a :

$$\int_0^{+\infty} f\, dpo < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x f\right) d\pi < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} f\, d\pi < \infty$$

*Démonstration.* Par le théorème de Fubini, nous avons :

$$\int_0^{\infty} \left(\int_0^x f\right) d\pi = \int_0^{\infty} f\, \overline{\pi}$$

En utilisant l'équation amicale sur $\mathbb{R}^+$ et la croissance de $f$ nous trouvons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} f(x)\overline{\pi}(x)\, dx &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x+y)\overline{ne}(y) dpo(x) dy \;+\; \hat{c} \int_{\mathbb{R}^+} f dpo \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^-} \overline{ne}\right) \int_{\mathbb{R}^+} f\, dpo \;+\; \hat{c} \int_{\mathbb{R}^+} f\, dpo \end{aligned}$$

On obtient ainsi la première implication du lemme.

Pour montrer la deuxième implication, il suffit d'utiliser la propriété (⫛) de la page d'avant. □

**Lemme B.** Si $\overline{ne}$ est bornée et $\hat{c} = 0$ alors on a :

$$\int_0^{\infty} f dpo < \infty \;\Rightarrow\; \int_0^{\infty} f d\pi < \infty$$

*Démonstration.* Sous ces hypothèses l'équation amicale admet une version dérivée (5.1.3) :

$$d\pi = (\overline{ne}_o + \widehat{\kappa}_o) dpo - dpo * dne \leq (\overline{ne}_o + \widehat{\kappa}_o) dpo$$

Ce qui permet de conclure. □

*Démonstration du théorème 6.2.3.*
Montrons 1/ : Supposons que $\int_1^{\infty} f\, dpo < \infty$.

Posons $dne^{\circ} = dne 1_{[-1,0]}$ et $dne^{\times} = dne 1_{]-\infty,-1[}$, notons $\overline{ne}^{\circ}$ et $\overline{ne}^{\times}$ leurs queues respectives.

$$\overline{\pi} = \underbrace{(\overline{ne}^{\circ} + \hat{c}\,\delta) * dpo}_{\overline{\pi}_a} \;+\; \underbrace{(\overline{ne}^{\times} + \widehat{\kappa}_o 1_{\mathbb{R}^-}) * dpo}_{\overline{\pi}_b}$$

$\hookrightarrow$ On a $\overline{\pi}_a = \overline{ne}^{\circ} * dpo + \hat{c}\, dpo$, avec $\overline{ne}^{\circ}$ intégrable. Ainsi, le raisonnement du lemme A nous donne :

$$\int_0^{\infty} f dpo \;\Rightarrow\; \int_0^{\infty} f d\pi_a < \infty$$

$\hookrightarrow$ On a $\overline{\pi}_b = \overline{ne}^{\times} * dpo + \widehat{\kappa}_o \overline{po}$, avec $\overline{ne}^{\times}$ borné. Ainsi, le raisonnement du lemme B nous donne :

$$\int_0^\infty f dpo \;\Rightarrow\; \int_0^\infty f d\pi_b < \infty$$

Par conséquent $\int_0^\infty f d\pi$ est finie.

Montrons 2/ Supposons que $X$ tende vers $+\infty$ ou bien qu'il meure. Cela implique $\widehat{\kappa}_o > 0$. Par l'équation amicale, sur $\mathbb{R}^+$ on a $\overline{\pi} \geq \widehat{\kappa}_o \overline{po}$, ce qui montre que l'implication réciproque de 1/ est vraie.

Montrons 3/ Supposons que $\int_0^\infty f\,\overline{\pi} < \infty$ et montrons que $\int_0^\infty f\, dpo < \infty$. En posant

$$k = \frac{3}{\hat{c} + \widehat{\kappa}_o + \int_{-1}^0 \overline{ne}}$$

Le lemme de l'encadreur, appliqué à $\check{\hat{H}}$ nous donne :

$$\check{\hat{\mathcal{V}}} \leq k|x| 1_{\mathbb{R}^-} + \check{\hat{\mathcal{V}}}(-1) 1_{[-1,0]} \qquad \text{où } |x| \text{ désigne l'application } x \mapsto |x|$$

L'hypothèse implique : $\int_1^\infty \overline{\pi} < \infty$, ainsi $\overline{\overline{\pi}} 1_{\mathbb{R}^+}$ est une fonction finie. En employant l'équation amicale inversée on obtient :

$$\text{sur } \mathbb{R}^+ \qquad \overline{po} \;=\; d\pi * \check{\hat{\mathcal{V}}} \;\leq\; k\, d\pi * |x| 1_{\mathbb{R}^-} \;+\; \check{\hat{\mathcal{V}}}(-1)\, d\pi * 1_{[-1,0]} \;\leq\; k\overline{\overline{\pi}} + \check{\hat{\mathcal{V}}}(-1)\,\overline{\pi}$$

Ainsi

$$\int_0^\infty f dpo \;=\; \int_0^\infty \overline{po}\, df \;\leq\; k \int_0^\infty \overline{\overline{\pi}} df \;+\; \check{\hat{\mathcal{V}}}(-1) \int_0^\infty \overline{\pi}\, df$$

Et l'hypothèse $\int_0^\infty f\,\overline{\pi} < \infty$ implique la finitude des deux intégrales de droite.

Montrons 4/ Supposons que $\check{\hat{H}}_1$ ne meure pas et $\mathbf{E}|\check{\hat{H}}_1| < \infty$ i.e $\widehat{\kappa}_o = 0$ et $\int_{-\infty}^0 \overline{ne} < \infty$. Il suffit alors d'invoquer le lemme A.

## 6.3 Comparaison des queues en $0+$

Nous écrivons :

$$\text{En } 0+ \quad f \sim g \quad \text{ssi} \quad \lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$\text{En } 0+ \quad f \propto g \quad \text{ssi} \quad \overline{\lim_{x \to 0+}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\text{En } 0+ \quad f \preccurlyeq g \quad \text{ssi} \quad \overline{\lim_{x \to 0+}} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

(Les notations habituelles en petit $o$ et grand $O$ ne sont pas pratiques pour nos énoncés).

La queue intégrée $\overline{\overline{\pi}}$ peut-être infinie partout, de la faute aux grands sauts. Nous définissons donc la queue intégrée tronquée par :

$$\overline{\overline{\pi}}_1(x) = 1_{\{-1<x<0\}} \int_{-1}^{x} \overline{\pi} \quad + \quad 1_{\{0<x<1\}} \int_{x}^{1} \overline{\pi}$$

### ↬ Quand $X$ ne rampe pas vers le bas

**Théorème 6.3.1** Supposons que $X$ ne rampe pas vers le bas ($\hat{c} = 0$). Les implications suivantes sont vérifiées :

$$\begin{array}{llll} \text{Si} & \overline{ne}_o = +\infty \text{ et } \overline{po}_o = +\infty & \text{Alors} & \text{en } 0+, \quad \overline{\overline{\pi}}_1 \propto \overline{po} \propto \overline{\pi} \\ \text{Si} & \overline{ne}_o < +\infty \text{ et } \overline{po}_o = +\infty & \text{Alors} & \text{en } 0+, \quad (\overline{ne}_o + \widehat{\kappa}_o)\overline{po} \sim \overline{\pi} \end{array}$$

**Remarque.** Les conditions $\overline{po}_o = +\infty$ et $\overline{ne}_o = +\infty$ peuvent s'exprimer avec la mesure de Lévy $d\pi$ (voir plus loin, le théorème 10.5.1).

*Montrons le premier point.*
▷ Montrons que $\overline{po} \propto \overline{\pi}$ . Pour tout $a < 0$ nous avons,

$$\overset{\curvearrowleft}{\mathcal{V}} \leq \overset{\curvearrowleft}{\mathcal{V}}(a) 1_{\mathbb{R}^-} + \overset{\curvearrowleft}{\mathcal{V}} 1_{]-\infty,a[}$$

Par l'équation amicale inversée :

$$\text{sur } \mathbb{R}^+ \qquad \overline{po} \;=\; d\pi * \overset{\curvearrowleft}{\mathcal{V}} \leq \overset{\curvearrowleft}{\mathcal{V}}(a)\, d\pi * 1_{\mathbb{R}^-} \;+\; d\pi * (\overset{\curvearrowleft}{\mathcal{V}} 1_{]-\infty,a[})$$

La fonction $d\pi * (\overset{\curvearrowleft}{\mathcal{V}} 1_{]a,\infty[})$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ tandis que, par hypothèse, $\overline{po}$ ne l'est pas. Ainsi :

$$\text{en } 0+ \qquad \overline{po} \not\propto \overset{\curvearrowleft}{\mathcal{V}}(a)\overline{\pi}$$

Par hypothèse $\overline{ne}_o = +\infty$, donc $\overset{\curvearrowleft}{H}$ n'est pas un PPC, donc $\overset{\curvearrowleft}{\mathcal{V}}(0-) = 0$. En faisant tendre $a$ vers $0-$ on obtient $\overline{po} \propto \overline{\pi}$.

▷ Montrons que $\overline{\overline{\pi}}_1 \propto \overline{po}$.

$$\forall x \in [0,1] \qquad \overline{\overline{\pi}}_1(x) \quad = \quad \int_x^1 \overline{\pi} \quad \leq \quad \int_x^{x+1} \overline{\pi} \quad = \quad (\overline{\pi} * 1_{[-1,0]})(x)$$

Comme par hypothèse $\hat{c} = 0$, l'équation amicale s'écrit :

$$\text{sur } \mathbb{R}^+ \qquad \overline{\pi} = \overline{me} * dpo \qquad\qquad \text{où } \overline{me} = \overline{ne} + \widehat{\kappa}_o 1_{\mathbb{R}^-}$$

Ainsi :

$$\forall x \in [0,1] \qquad \overline{\overline{\pi}}_1(x) \quad \leq \quad (\overline{me} * dpo * 1_{[-1,0]})(x) \quad = \quad \Big(dpo(u) * \int_{-u}^{0} \overline{me}\Big)(x)$$

Par ailleurs, en $0-$, $\int_u^0 \overline{me} \propto 1_{\mathbb{R}^-}$, donc en $0+$, $\overline{\overline{\pi}}_1 \propto dpo * 1_{\mathbb{R}^-} = \overline{po}$.

*Montrons le deuxième point.* Sous l'hypothèse $\overline{ne}_o < \infty$ et $\hat{c} = 0$, $\overset{\vee}{H}$ est une PPC, donc on a $\overset{\vee}{\mathcal{V}}(0-) = (\overline{ne}_o + \widehat{\kappa}_o)^{-1} > 0$. Notons $\overset{\vee}{\mathcal{V}}_\times = \overset{\vee}{\mathcal{V}} - \overset{\vee}{\mathcal{V}}(0-)1_{\mathbb{R}^-}$. Par l'équation amicale inversée nous avons :

$$\overline{po} = \overset{\vee}{\mathcal{V}} * d\pi = \frac{1}{\overline{ne}_o + \widehat{\kappa}_o} 1_{\mathbb{R}^-} * d\pi \; + \; \overset{\vee}{\mathcal{V}}_\times * d\pi$$

Le même raisonnement que dans le point précédent nous montre que $\overset{\vee}{\mathcal{V}}_\times * d\pi$ est négligeable devant $\overline{\pi}$. On a donc $(\overline{ne}_o + \widehat{\kappa}_o)\overline{po} \sim \overline{\pi}$.

### ↬ Quand $X$ rampe vers le bas

Rappelons que lorsque $X$ rampe vers le bas alors la mesure *dpo* admet une densité càdlàg que l'on note $\overline{p}$ (cf. 5.1.1).

**Théorème 6.3.2** Supposons que $X$ rampe vers le bas ($\hat{c} > 0$). On a :

• $\overline{p}(0+) = +\infty$ ssi $\overline{\pi}(0+) = +\infty$. Dans ce cas en $0+$, $\hat{c}\,\overline{p} \sim \overline{\pi}$.

• $\overline{po}(0+) = +\infty$ ssi $\overline{\overline{\pi}}_1(0+) = +\infty$. Dans ce cas en $0+$, $\hat{c}\,\overline{po} \sim \overline{\overline{\pi}}_1$.

**Corollaire.** Si $X$ rampe vers le bas alors pour toute fonction $f$ positive, on a :

$$\int_0^1 f\, dpo < \infty \;\Leftrightarrow\; \int_0^1 f\,\overline{\pi} < \infty$$

*Nous montrons uniquement le premier point du théorème* (la démonstration du second est similaire).

▷ Supposons que $\overline{\pi}(0+) = +\infty$ et montrons dans ce cas que $\hat{c}\overline{p} \sim \overline{\pi}$. Comme $X$ rampe vers le bas, la mesure $d\overset{\vee}{\mathcal{V}}$ admet alors une densité $\overset{\vee}{v}$ continue sur $]0,\infty[$ et telle que $\overset{\vee}{v}(0-) = (1/\hat{c})$. On peut donc écrire $\overset{\vee}{v}$ sous la forme suivante :

$$\overset{\vee}{v} = \frac{1}{\hat{c}} 1_{\mathbb{R}^-} + (\overset{\vee}{v} - \overset{\vee}{v}(0-)1_{\mathbb{R}^-})$$

Puis l'équation amicale sur $\mathbb{R}^+$ donne :

$$\overline{p} \quad = \quad d\pi * \overset{\vee}{v} \quad = \quad \frac{1}{\hat{c}}\overline{\pi} \; + \; d\pi * (\overset{\vee}{v} - \overset{\vee}{v}(0)1_{\mathbb{R}^-}) \quad \sim \quad \frac{1}{\hat{c}}\overline{\pi}$$

▷ Supposons que $\overline{\pi}(0+) < \infty$, ce qui équivaut à la finitude de $\int_0^\infty d\pi$. Dans ce cas, en appliquant le théorème de convergence dominée sur l'équation amicale inversée on obtient $\overline{p}(0+) = \int_0^\infty \overset{\star}{v}\, d\pi < \infty$. □

Dans la section suivante nous nous intéressons de plus près à la densité $\overline{p}$ de *dpo*.

## 6.4 Densité de *dpo* quand $X$ rampe vers le bas.

**Théorème 6.4.1** Si $X$ rampe vers le bas alors la mesure *dpo* admet une densité $\overline{p}$ qui est la queue d'une mesure signée *dp*. Cette dernière vérifie :

$$\forall f \text{ croissante} \qquad \int_0^1 f\, d\pi < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 f\, |dp| < \infty$$

*Préliminaire à la démonstration :* Nous disons qu'une fonction $f$ est à variation finie sur les queues (VFQ) lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, la variation totale de $f$ sur $[-\varepsilon, \varepsilon]^c$ est finie. Cela implique notamment que $f$ admet des limites à droite et à gauche de tous les points de $[-\infty, 0[ \cup ]0, \infty]$.

Une fonction $f$ est la queue d'une mesure signée ssi $f$ est VFQ, càglàd sur $]-\infty, 0[$, càdlàg sur $]0, \infty[$ et $f(-\infty) = f(+\infty) = 0$.

L'intégrale de Stieltjes est bien adaptée à nos propos : Soit $g$ une fonction portée par $]0, \infty[$ et soit $f$ une fonction croissante, positive, portée par $\mathbb{R}^+$. Nous posons :

$$\oint^n f\ d[g] = \sup_{\sigma \in \Delta_n} \sum_{t_i \in \sigma} f(t_i)\, |g(t_i) - g(t_{i+1})|$$

Où $\Delta_n$ est l'ensemble des subdivisions à $n$ éléments de $]0, \infty[$. Puis notons :

$$\oint f\ d[g] \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \oint^n f\ d[g]$$

Par définition, $g$ est VFQ ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \oint 1_{]\varepsilon, \infty[}\ d[g] < \infty$$

Dans ce cas, il existe une mesure sinée $dg$ vérifiant $dg]x, \infty[ = g(x+) - g(+\infty)$. Notons $|dg|$ la variation totale de $dg$, elle vérifie :

$$\forall f \text{ croissante} \qquad \int_0^\infty f|dg| = \oint f\ d[g]\ .$$

Pour finir, remarquons la propriété suivante : pour n'importe quelles fonctions $g$ et $h$, portées par $]0,\infty[$, l'inégalité triangulaire appliquée à $|g-h|$ donne

$$\not\int^n f\, d[g-h] \quad \geq \quad \Big|\not\int^n f\, d[g] - \not\int^n f\, d[h]\Big|$$

**Lemme 6.4.2** Soient $g$ une fonction portée par $]0,\infty[$ et $f$ une fonction croissante, positive, portée par $]0,\infty[$. Soit $m$ une fonction intégrable portée par $]-\infty,0[$. On a l'inégalité suivante :

$$\not\int^n f\, d[g*m] \quad \leq \quad \big(\textstyle\int_{-\infty}^0 m\big) \;\; \not\int^n f\, d[g]$$

*Démonstration.* Soit $(t_1,...,t_n)$ une subdivision de $]0,\infty[$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n f(t_i)|m*g(t_i) - m*g(t_{i+1})| &= \sum_{i=1}^n f(t_i)\Big|\int_{-\infty}^0 \big(g(t_i-u)-g(t_{i+1}-u)\big)m(u)du\Big| \\
&\leq \int_{-\infty}^0 \sum_{i=1}^n f(t_i)|g(t_i-u)-g(t_{i+1}-u)|m(u)du \\
&\leq \int_{-\infty}^0 \sum_{i=1}^n f(t_i-u)|g(t_i-u)-g(t_{i+1}-u)|m(u)du
\end{aligned}$$

Pour $u<0$, $(t_1-u,...t_n-u)$ est une subdivision de $]0,\infty[$, donc :

$$\sum_{i=1}^n f(t_i)|m*g(t_i) - m*g(t_{i+1})| \quad \leq \quad \not\int^n f\, d[g] \;\; \int_{-\infty}^0 m(u)\, du$$

L'inégalité étant vraie pour toutes les subdivisions à $n$ éléments, le lemme est bon. □

*Démonstration du théorème :* Supposons que $X$ rampe vers le haut. Nous avons montré que *dpo* admet une densité càdlàg que nous notons $\overline{p}$ (bien que la notation surlignée ne soit pas encore justifiée). Pour établir l'existence de la mesure $dp$, il nous faut en premier lieu montrer que $\overline{p}$ est VFQ. L'équation amicale s'écrit :

$$\text{sur } \mathbb{R}^+ \qquad \overline{\pi} = (\overline{ne} + \widehat{\kappa}_o 1_{\mathbb{R}^-}) * \overline{p} + \hat{c}\overline{p}$$

Le terme de gauche est VFQ, pour montrer que $\overline{p}$ est VFQ, nous allons simplement montrer que les fluctuations de $\overline{p}$ et celles de $(\overline{ne} + \widehat{\kappa}_o 1_{\mathbb{R}^-}) * \overline{p}$ ne peuvent pas se compenser (car les fluctuations de la deuxième fonction sont beaucoup plus faibles que celles de la première).

Choisissons $\delta > 0$, suffisamment petit pour que

$$\int_{-\delta}^0 (\overline{ne}(x) + \widehat{\kappa}_o)dx < 0,3\,\hat{c}$$

Puis posons :

$$\begin{aligned}\overline{me}^{\times} &= (\overline{ne} + \widehat{\kappa}_o)1_{]-\infty,-\delta]} \\ \overline{me}^{\circ} &= (\overline{ne} + \widehat{\kappa}_o)1_{]-\delta,0]}\end{aligned}$$

L'équation amicale peut s'écrire :

$$\text{sur } \mathbb{R}^+ \qquad \overline{me}^{\circ} * \overline{p} + \hat{c}\overline{p} = \overline{\pi} - \overline{me}^{\times} * \overline{p}$$

On voit facilement que la fonction $\overline{me}^{\times} * \overline{p}\, 1_{\mathbb{R}^+}$ est la queue d'une mesure finie. Quant à $\overline{\pi} 1_{\mathbb{R}^+}$ c'est la queue d'une mesure $\sigma$-finie. Ainsi le terme de droite dans l'égalité est VFQ.

Étudions le terme de gauche. En appliquant le lemme 6.4.2 avec $f = 1_{]-\varepsilon,+\infty[}$ et $m = \overline{me}^{\circ}$ on obtient :

$$\oint^n 1_{]\varepsilon,\infty[}\, d[\overline{me}^{\circ} * \overline{p}] \quad \leq \quad 0,3\,\hat{c} \oint^n 1_{]\varepsilon,\infty[}\, d[\overline{p}]$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons :

$$\oint^n 1_{]\varepsilon,\infty[}\, d[\overline{me}^{\circ} * \overline{p} + \hat{c}\overline{p}] \geq (1 - 0,3)\hat{c} \oint^n 1_{]\varepsilon,\infty[}\, d[\overline{p}]$$

Poussons $n$ en l'infini :

$$0,7\hat{c} \oint 1_{]\varepsilon,\infty[}\, d[\overline{p}] \quad \leq \quad \oint 1_{]\varepsilon,\infty[}\, d[\overline{me}^{\circ} * \overline{p} + \hat{c}\overline{p}] \quad < \quad \infty$$

Donc $\overline{p}$ est VFQ et comme $\overline{p} 1_{]1,\infty[}$ est intégrable, $\overline{p}(+\infty) = 0$. Ainsi, $\overline{p}$ est la queue d'une mesure que nous notons $dp$.

Par le même raisonnement, on obtient, pour toute $f$ croissante, bornée :

$$0,7\hat{c} \oint f\, d[\overline{p}] \quad \leq \quad \oint f\, d[\overline{me}^{\circ} * \overline{p} + \hat{c}\overline{p}] \quad \leq \quad \oint f\, d[\overline{\pi} + \overline{me}^{\times} * \overline{p}]$$

Puisque $\overline{me}^{\times} * \overline{p}$ est bornée, nous avons :

$$\int_0^\infty f(x) d\pi(x) < \infty \;\Rightarrow\; \int_0^\infty f(x)|dp|(x) < \infty$$

L'implication réciproque s'établit plus simplement : nous pouvons supposer que la fonction $f$ est constante sur $[1, \infty[$. Calculons :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\, d\pi &= \iint_{\{0<x-y<1\}} f(x-y)(\overline{ne} + \widehat{\kappa}_o 1_{\mathbb{R}^-})(-y)\, dy\, dp(x) \;+\; \hat{c}\int_0^1 f\, dp \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \Big( \int_{x-1}^{x} (\overline{ne} + \widehat{\kappa}_o 1_{\mathbb{R}^-})(-y) dy \Big)\, f(x)|dp|(x) \quad + \quad \hat{c}\int_0^1 f\, |dp|\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \int_{x-1}^{x} (\overline{ne} + \widehat{\kappa}_o 1_{\mathbb{R}^-})(-y) dy$ est bornée, donc si $dp$ intègre $f$ alors $d\pi$ aussi. □

## 6.5 Comparaison des régularités

**Proposition.** Si $X$ rampe vers le bas alors les mesures $d\pi$ et $\hat{c}\,dp$ ont même partie singulière. En particulier $\Delta\overline{\pi} = \hat{c}\Delta\overline{p}$.

*Démonstration.* Il suffit d'observer l'équation amicale dérivée :

$$d\pi = (\overline{ne} * dp + \widehat{\kappa}_o\,\overline{p})dx \;+\; \hat{c}\,dp \qquad\qquad \square$$

**Proposition.** Soit $x$ un réel strictement positif. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
• *dpo* a un atome en $x$
• $X$ ne visite pas $]-\infty,0[$ immédiatement et $d\pi$ a un atome en $x$.

*Démonstration.* Supposons que *dpo* ait un atome de poids $m$ en $x$. Elle n'admet pas de densité donc, par 5.1.1, nous avons nécessairement $\hat{c} = 0$. Par ailleurs, de l'équation amicale sur $\mathbb{R}^+$ nous obtenons :

$$\overline{\pi} \geq \overline{ne} * dpo \geq m\,(\overline{ne} * \delta_u)$$

Comme $\overline{\pi}$ est finie en $u$, nécessairement $\overline{ne}_o < \infty$, donc $\overset{\vee}{H}$ est un PPC. De cette même équation amicale on déduit : $\Delta\overline{\pi}(u) = m(\overline{ne}_o + \widehat{\kappa}_o) > 0$. La réciproque est un corollaire immédiat de l'équation amicale inversée. □

**Proposition.** Si $d\pi$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue alors *dpo* l'est aussi. La réciproque est vraie quand $X$ ne visite pas $]-\infty,0[$.

*Démonstration.* La première est immédiate lorsque l'on observe l'équation amicale inversée dérivée : $dpo = (d\pi * d\overset{\vee}{\mathcal{V}})1_{\mathbb{R}^+}$. Réciproquement, si $X$ ne visite pas $]0,\infty[$ alors $d\overset{\vee}{\mathcal{V}}$ possède un atome en zéro, donc

$$\text{sur } \mathbb{R}^+ \qquad d\overset{\vee}{\mathcal{V}}\{0\}d\pi \;=\; dpo - d\pi * (d\widehat{\mathcal{V}}\,1_{]-\infty,0[}) \;\leq\; dpo$$

donc $dpo \ll dx \;\Rightarrow\; d\pi \ll dx$. □

## 6.6 Points de croissance quand $X$ rampe vers le haut

**Proposition.** Si $X$ n'a pas de composante brownienne et s'il rampe vers le haut alors $X$ a des points de croissance ssi :

$$\int_0^1 \overline{\overline{\pi}}_1(-x)|\ln(x)|dx < \infty \qquad\qquad \text{où} \quad \forall y \in [-1,0] \quad \overline{\overline{\pi}}_1(y) = \int_{-1}^{y} \overline{\pi}$$

*Démonstration.* ▷ Si $X$ est VF alors $\overline{\overline{\pi}}_1$ est bornée sur $[-1,0]$, donc l'intégrale ci-dessus converge toujours. Par ailleurs, comme par hypothèse $X$ rampe vers le haut, il possède une dérive strictement positive, et il a donc des points de croissance.

▷ Supposons maintenant que $X$ est VI. Les hypothèses excluent que $X$ rampe vers le bas, donc necessairement $\overline{\overline{\pi}}_1(0-) = +\infty$ (cf. 10.4.1).

Dans [20], S. Fourati a montré que $X$ a des points de croissance ssi

$$\int_0^1 \frac{1}{\widehat{\mathcal{V}}}\, d\mathcal{V} < \infty$$

Nous notons ici $f \asymp g$ s'il existe $cst > 0$ telle que sur $]0,1[ \quad f\frac{1}{cst} \leq g \leq cst\, f$.
Puisque $X$ rampe vers le haut, $H$ a une dérive et donc $\mathcal{V} \asymp x$. Par ailleurs, le lemme de l'encadreur (6.1.1) nous donne :

$$\widehat{\mathcal{V}}(x) \asymp \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{ne}}$$

Puisque $X$ rampe vers le haut, d'après le théorème 6.3.1, en $0-$, $c\,\overline{ne} \sim \overline{\overline{\pi}}_1 1_{\mathbb{R}^-}$. Donc :

$$\widehat{\mathcal{V}}(x) \asymp \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\overline{\pi}}_1}$$

Ainsi $X$ a des points de croissance ssi

$$\int_0^1 \left(\textstyle\int_{-x}^0 \overline{\overline{\pi}}_1\right) \frac{dx}{x} < \infty$$

Une intégration par partie conclut la démonstration. □

Les amis se comptent sur les doigts de la main. La caractéristique principale d'un ami est sa capacité à vous décevoir. Certes, on peut être légèrement déçu par la gauche ou par les performances de l'A.S. Saint-Étienne, mais la déception profonde, la vraie, celle qui peut vous faire oublier le goût des grands Saint-Émilion, ne peut venir que d'un véritable ami.

Pierre Desproges
Chronique de la haine ordinaire

# Chapitre 7

# Le problème des amis

## 7.1 Introduction

Le travail exposé dans ce chapitre est l'ancêtre des autres résultats de cette thèse.

**Définition.** Nous dirons que deux subordinateurs $H$ et $\widehat{H}$ sont amis s'il existe un processus de Lévy $X$ tel que $H$ et $\widehat{H}$ soient égaux en loi aux deux subordinateurs d'échelle de $X$.

Observons le cas stable : Si $H$ et $\widehat{H}$ sont des subordinateurs stables alors ils sont amis. En effet, notons $\delta \in ]0,1]$ et $\gamma \in ]0,1]$ leurs indices respectifs. Le Lévy stable d'indice $\alpha = \delta + \gamma$ et tel que $\mathbf{P}[X_t > 0] = (\delta/\delta + \gamma)$ admet bien $H$ et $\widehat{H}$ comme processus d'échelle (cf. [1] p.218).

Mais alors, deux subordinateurs quelconques sont-ils toujours amis ? Définitivement non ! La proposition 5.4.1 montre par exemple qu'un subordinateur dont le support de la mesure de Lévy n'est pas un intervalle ne peut avoir aucun ami (peuchère !).

Dans ce chapitre nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que deux subordinateurs soient amis. Cette condition porte sur les 3 caractéristiques classiques de ces subordinateurs, à savoir : leur mesure de Lévy, leur dérive et leur taux de mortalité. Ensuite, nous définissons des subordinateurs particuliers : les "philanthropes", qui ont l'amitié facile.

## 7.2 Théorème des amis

Soient $H$ et $\widehat{H}$ deux subordinateurs quelconques. Nous notons $\check{\widehat{H}} = -\widehat{H}$. $\kappa$ et $\check{\widehat{\kappa}}$ sont les exposants respectifs de $H$ et $\check{\widehat{H}}$. Voici leur représentation de Lévy-Khintchine :

$$\begin{aligned} \kappa(iu) &= \int_0^\infty (1-e^{-iux})dpo + iuc + \kappa_o \\ \check{\widehat{\kappa}}(iu) &= \int_{-\infty}^0 (1-e^{-iux})dne - iu\hat{c} + \widehat{\kappa}_o \ , \end{aligned}$$

où

$\kappa_o \geq 0,\ c \geq 0$ et $dpo$ est une mesure portée par $\mathbb{R}^+$ intégrant $x1_{[0,1]}$ et $1_{[1,\infty[}$
$\widehat{\kappa}_o \geq 0,\ \hat{c} \geq 0$ et $dne$ est portée par $\mathbb{R}^-$ et intègre $x1_{[-1,0]}$ et $1_{]-\infty,-1]}$ .

**Définition.** À partir de ces ingrédients, nous définissons la distribution :

$$\overline{\pi}_? \quad = \quad \big(\overline{po} * dne + \kappa_o \overline{ne} + c\, dne\big)1_{\mathbb{R}^-} \ + \ \big(\overline{ne} * dpo + \widehat{\kappa}_o \overline{po} + \hat{c}\, dpo\big)1_{\mathbb{R}^+}$$

Si nous confondons une fonction $f$ avec la mesure $f(x)dx$, la distribution ci-dessus est une mesure. Et dans le cas où $c = \hat{c} = 0$, c'est même une fonction.

**Théorème des amis.** $H$ et $\widehat{H}$ sont amis ssi $\overline{\pi}_?$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

**Commentaires.** La condition sur $\overline{\pi}_?$ implique ceci :

- Puisque $\overline{\pi}_?$ est une fonction, $\hat{c}\, dpo$ et $c\, dne$ sont aussi des fonctions. Donc $\hat{c} > 0$ implique que $dpo$ admet une densité et $c > 0$ implique que $dne$ admet une densité. La proposition 6.4.1, nous indique en plus que ces deux densités sont des queues de mesures signées.
- Puisque $\overline{\pi}_?$ est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, elle est p.p. égale à la queue d'une mesure positive $d\pi_?$. Cette mesure sera bien-entendue la mesure de Lévy liée à l'exposant $\kappa\check{\widehat{\kappa}}$.

*Démonstration du théorème des amis :* Nous montrons ici :
" $\overline{\pi}_?$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$ implique que $H$ et $\widehat{H}$ sont amis "
La réciproque est simplement donnée par l'équation amicale.

*Démonstration courte, dans un cas particulier :* Les personnes pressées trouveront ci-après une démontration simple, valable lorsque $dpo$ et $dne$ sont à support compact et $\kappa_o\widehat{\kappa}_o = 0$. La démonstration générale viendra ensuite.

$\overline{ne}$ et $\overline{po}$ sont donc intégrables et à support compact. Nous pouvons alors définir la queue de $\overline{\pi}_?$ que nous notons $\overline{\overline{\pi}}_?$ :

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\pi}}_?(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty}(1_{\{u<x<0\}}+1_{\{0<x<u\}})\overline{\pi}(u)du \\ &= \overline{ne}*\overline{po} \;+\; \hat{c}\,\overline{po} \;+\; \widehat{\kappa}_o\,\overline{\overline{po}} \;+\; c\,\overline{ne} \;+\; \kappa_o\,\overline{\overline{ne}}\end{aligned}$$

En développant la convolution suivante nous trouvons :

$$\begin{aligned}(\overline{ne}+\hat{c}\delta+\widehat{\kappa}_o 1_{\mathbb{R}^-})*(\overline{po}\;+c\delta+\kappa_o 1_{\mathbb{R}^+}) &= \overline{\overline{\pi}}_? + c\hat{c}\delta \\ &\quad +\widehat{\kappa}_o(\overline{\overline{po}}(0)+c)1_{]-\infty,0[} \;+\; \kappa_o(\overline{\overline{ne}}(0)+\hat{c})1_{]0,\infty[}\end{aligned}$$

En dérivant deux fois :

$$(\mathsf{C}dne+\hat{c}\delta'-\widehat{\kappa}_o\delta)*(-\mathsf{C}dpo+c\delta'+\kappa_o\delta)=\mathsf{CC}d\pi_?+[\kappa_o(\overline{ne}(0)+\hat{c})-\widehat{\kappa}_o(\overline{\overline{po}}(0)+c)]\delta'+c\hat{c}\delta''$$

Le produit $\kappa(-iu)\widehat{\kappa}(iu)$ est donc l'exposant d'un processus de Lévy dont la mesure de Lévy est $d\pi_?$. □

*Démonstration longue, dans tous les cas.* Lorsque les mesures *dpo* et *dne* ne sont pas à support compact, la démonstration est un peu plus technique :

*Première étape :* Commençons par montrer que la distribution

$$\mathsf{C}dpo*\mathsf{C}dne+c(\mathsf{C}dne)'+\hat{c}(\mathsf{C}dpo)'+\kappa_o\mathsf{C}dpo+\widehat{\kappa}_o\mathsf{C}dne$$

est de la forme $-\mathsf{CC}_1 d\mu + cst\,\delta'$ où $d\mu$ est une mesure signée intégrant $x^2 1_{[-1,1]}$ et $1_{[-1,1]^c}$

▷ Commençons par les deux derniers termes :

$$\begin{aligned}\mathsf{C}dne &= \mathsf{CC}_1 dne + \delta'\int_{[-1,0]} x dne \\ \mathsf{C}dpo &= \mathsf{CC}_1 dpo + \delta'\int_{[0,1]} x dpo\end{aligned}$$

▷ Pour les termes dérivés : D'après la proposition 6.4.1, *dpo* et *dne* admettent des densités $\overline{p}$ et $\overline{n}$ qui sont les queues de mesures signées *dp* et *dn* intégrant $x^2 1_{[-1,1]}$. Dès lors :

$$\begin{aligned}(\mathsf{C}dpo)' &= -\mathsf{CC}_1 dp + cst\delta' \\ (\mathsf{C}dne)' &= \mathsf{CC}_1 dn + cst\delta'\end{aligned}$$

En effet, soit $\varphi$ une fonction test de $\mathcal{S}$, telle que $\varphi'(0) = 0$ : :

$$\begin{aligned}\left\langle (\mathsf{C}dpo)' \ , \ \varphi \right\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) dpo(x) \\ &= -\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi'(x) 1_{\{0<x<u\}} dp(u) dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} [\varphi(u) - \varphi(0)] dp(u)\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toutes les fonctions tests dont la dérivée en zéro s'annule, nous avons au final une égalité modulo la dérivée d'une mesure de Dirac.

▷ Pour finir, regardons $\mathsf{C}dpo * \mathsf{C}dne$. Découpons $dpo$ et $dne$ :

$$\begin{aligned}dpo^{\circ} &= dpo 1_{[0,1]} \\ dpo^{\times} &= dpo 1_{]1,\infty[} \\ dne^{\circ} &= dne 1_{[-1,0]} \\ dne^{\times} &= dne 1_{]-\infty,-1[}\end{aligned}$$

La convolution se sépare en quatre morceaux. Étudions le premier. Posons :

$$d\rho = dpo^{\times} * dne^{\times} - (\int dpo^{\times}) dne^{\times} - (\int dne^{\times}) dpo^{\times}$$

On a :

$$\begin{aligned}\mathsf{C}dpo^{\times} * \mathsf{C}dne^{\times} &= d\rho + (\int dpo^{\times})(\int dne^{\times})\delta \\ &= \mathsf{C}\mathsf{C}_1 d\rho + \delta' \int_{[-1,1]} x d\rho(x)\end{aligned}$$

Quant aux trois autres morceaux : Les fonctions $\overline{ne}^{\times} * \overline{po}^{\circ}$, $\overline{ne}^{\circ} * \overline{po}^{\times}$ et $\overline{ne}^{\circ} * \overline{po}^{\circ}$ sont les queues intégrées de certaines mesures $d\rho_1$, $d\rho_2$ et $d\rho_3$ qui intègrent $x^2 1_{[-1,1]}$ et $1_{[-1,1]^c}$. Dès lors :

$$\begin{aligned}\mathsf{C}dne^{\times} * \mathsf{C}dpo^{\circ} &= \mathsf{C}\mathsf{C}_1 d\rho_1 \ + \ cst\, \delta' \\ \mathsf{C}dne^{\circ} * \mathsf{C}dpo^{\times} &= \mathsf{C}\mathsf{C}_1 d\rho_2 \ + \ cst\, \delta' \\ \mathsf{C}dne^{\circ} * \mathsf{C}dpo^{\circ} &= \mathsf{C}\mathsf{C}_1 d\rho_3 \ + \ cst\, \delta'\end{aligned}$$

*Deuxième étape :* Maintenant nous appliquons un raisonnement similaire à celui de la démonstration des équations amicales. De la première étape nous déduisons :

$$(-\mathsf{C}dne - \hat{c}\delta' + \widehat{\kappa}_o \delta) * (-\mathsf{C}dpo + c\delta' + \kappa_o \delta) = -\mathsf{C}\mathsf{C}_1 d\mu - c\hat{c}\delta'' + \kappa_o \widehat{\kappa}_o \delta + cst\delta'$$

Il nous faut donc montrer que $d\mu$ est une mesure positive. Séparons comme d'habitude $d\mu = d\mu^\circ + d\mu^\times$. Intégrons une fois :

$$(-\overline{ne} - \hat{c}\delta - \widehat{\kappa}_o 1_{\mathbb{R}^-}) * (-\complement dpo + c\delta' + \kappa_o\delta) = -\complement\epsilon\overline{\mu}^\circ + \epsilon\overline{\mu}^\times - c\hat{c}\delta'' + \kappa_o\widehat{\kappa}_o\delta + cst\delta'$$

En restreignant cela à $]0, \infty[$ on trouve :

$$\text{sur } \mathbb{R}^+ \qquad \overline{\pi}_? = \overline{\mu}$$

De même, sur $\mathbb{R}^-$ $\overline{\pi}_? = \overline{\mu}$. Ainsi $d\mu = d\pi_?$ qui est, par hypothèse, une mesure positive. □

## 7.3 Philanthropes

### ↬ Les philanthropes et l'amitié

**Définition.** Un philanthrope est un subordinateur dont la mesure de Lévy admet une densité décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

**Proposition.** Un subordinateur est un philanthrope si et seulement si il est l'ami d'une dérive pure immortelle.

*Démonstration.* Supposons que $H$ soit l'ami de $\widehat{H}_t = \hat{c}t$. Comme $\hat{c} > 0$, $dpo$ admet une densité $\overline{p}$ et l'équation amicale sur $\mathbb{R}^+$ donne $\overline{\pi} = \hat{c}\overline{p}$. La réciproque est une application triviale du théorème des amis. □

**Proposition.** Deux philanthropes sont toujours amis.

*Démonstration.* Si $H$ et $\widehat{H}$ sont des philanthropes, alors les mesures de Lévy de $H$ et $-\widehat{H}$ s'écrivent respectivement : $dpo = \overline{p}\,dx$ et $dne = \overline{n}\,dx$ où $\overline{p}$ et $\overline{n}$ sont les queues de mesures positives $dp$ et $dn$ portées par $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$. Dès lors, nous vérifions facilement que $\overline{\pi}_?$ est la queue de la mesure positive suivante :

$$\begin{cases} d\pi_? = (\overline{ne} * dp + \widehat{\kappa}_o\overline{p})dx + \hat{c}\,dp & \text{sur } \mathbb{R}^+ \\ d\pi_? = (\overline{po} * dn + \widehat{\kappa}_o\overline{n})dx + \hat{c}\,dn & \text{sur } \mathbb{R}^- \end{cases}$$

□

Nous dirons qu'une fonction $f$ est gendarmée par une fonction $g$ s'il existe deux constantes strictement positives $cst_1$ et $cst_2$ telles que

$$cst_1\, g \leq f \leq cst_2\, g$$

**Définition.** Un subordinateur est un presque-philanthrope ssi sa mesure de Lévy admet une densité $\overline{p}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
• $\overline{p}$ est la queue d'une mesure signée $dp$.
• $\overline{p}$ est gendarmée par une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

**Proposition.** Un presque-philanthrope a toujours des amis.

*Démonstration.* Nous supposons que $H$ est une presque-philanthrope. Pour lui trouver un ami nous choisissons $\widehat{H}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :
$\hookrightarrow$ $\widehat{H}$ est un philanthrope.
$\hookrightarrow$ $\widehat{H}$ est un poisson composé ($\overline{ne}(0) < \infty$).
$\hookrightarrow$ $\widehat{H}$ meurt ($\widehat{\kappa}_o > 0$).
Nous pouvons réexprimer $\overline{ne}$ comme ceci :

$$\begin{aligned} \overline{ne} &= (dne * 1_{\mathbb{R}^+})1_{\mathbb{R}^-} \\ &= (dne * (1 - 1_{\mathbb{R}^-}))1_{\mathbb{R}^-} \\ &= \overline{ne}(0)1_{\mathbb{R}^-} - dne * 1_{\mathbb{R}^-} \end{aligned}$$

Calculons $d\pi_?$ :

$$\begin{aligned} \text{sur } \mathbb{R}^+ \qquad d\pi_?\, 1_{\mathbb{R}^+} &= (\overline{ne} * dp)1_{\mathbb{R}^+} \quad + \quad \widehat{\kappa}_o\overline{p} \\ &= (\overline{ne}(0)1_{\mathbb{R}^-} * dp \;-\; dne * 1_{\mathbb{R}^-} * dp)1_{\mathbb{R}^+} \quad + \quad \widehat{\kappa}_o\overline{p} \\ &= (\overline{ne}(0) + \widehat{\kappa}_o)\overline{p} \;-\; (dne * \overline{p})1_{\mathbb{R}^+} \end{aligned}$$

Par hypothèse il existe une fonction $f$ décroissante telle que $f \leq \overline{p} \leq cst f$. Donc :

$$\forall x > 0 \qquad dne * \overline{p}(x) \;\leq\; cst \int_{-\infty}^{0} f(x-u)dne(u) \;\leq\; cst\, f(x)\, \overline{ne}(0)$$

La dernière inégalité vient du fait que $f$ est décroissant. Finalement :

$$\text{sur } \mathbb{R}^+ \qquad d\pi_? \geq [\overline{ne}(0) + \widehat{\kappa}_o - cst\, \overline{ne}(0)]f$$

Par conséquent, si $\widehat{\kappa}_o$ est suffisamment grand, $d\pi_?$ est une mesure positive sur $\mathbb{R}^+$. Sur $\mathbb{R}^-$ elle est aussi positive car $\widehat{H}$ est un philanthrope.□

**Commentaires.** L'ami construit pour notre presque-philanthrope $H$ n'est pas un ami très enrichissant. En effet, le processus $X$ qui en découle ne visite pas $]-\infty, 0[$ et il converge vers $+\infty$. Ainsi $X$ ressemble fortement à $H$.

Contrairement aux philanthropes, les presque-philanthropes n'admettent pas forcément d'ami avec dérive. Par exemple si la partie négative de $dp$ n'est pas absolument continue alors $H$ ne peut avoir aucun ami ayant une dérive. En effet :

$$\text{sur } \mathbb{R}^+ : \qquad d\pi_? = (\overline{ne} * dp + \widehat{\kappa}_o\overline{p})dx + \hat{c}\, dp$$

Dans l'égalité ci-dessus nous observons que les parties singulières de $d\pi$ et $dpo$ sont égales. Donc, si la partie singulière négative de $dp$ n'est pas nulle, $d\pi_?$ ne peut-être positive.

### ↬ Comment repérer un philanthrope ?

Maintenant $H$ et $\widehat{H}$ sont amis. On note $X$ le fruit de cette amitié.

**Proposition 7.3.1** Si $X$ rampe vers le bas et si ses sauts positifs sont bornés alors $H$ est un presque-philanthrope.

*Démonstration.* $X$ rampe vers le bas donc $dpo$ admet une densité $\overline{p}$. La proposition (6.4.1) atteste que $\overline{p}$ est la queue d'une mesure signée. Nous allons montrer que $\overline{p}$ est gendarmée par $\overline{\pi}1_{\mathbb{R}^+}$. Notons $\hat{v}$ la densité de la mesure $d\widehat{\mathcal{V}}$. On a :

$$\text{sur } \mathbb{R}^+ : \qquad \overline{p} = d\pi * \hat{v}$$

$\hat{v}$ est majorée par $\hat{v}(0-) = (1/\hat{c})$. On a donc $\hat{c}\overline{p} \leq \overline{\pi}1_{\mathbb{R}^+}$.

Soit $[0, D]$ le support convexe de $d\pi 1_{\mathbb{R}+}$. Par hypothèse $D < \infty$. $\hat{v}$ est continue et strictement positive, elle est donc minorée sur $[-D, 0]$ par une constante $cst > 0$. Ainsi :

$$\text{sur } \mathbb{R}^- : \qquad \overline{p} = d\pi * (\hat{v}1_{[-D,0]}) \geq cst\,\overline{\pi}$$

□

**Proposition.**

• Si, sur $\mathbb{R}^+$, $d\pi$ admet une densité décroissante alors $H$ est un philanthrope.

• Si, sur $\mathbb{R}^+$, $d\pi$ admet une densité qui est la queue d'une mesure signée et qui est gendarmée par une fonction décroissante alors $H$ est un presque-philanthrope.

*Démonstration.* En utilisant l'équation amicale inverse, c'est immédiat.

### ↬ Philanthrope discret

Attention : un philanthrope discret n'est pas un philanthrope.

**Définition.** On appelle philanthrope discret tout subordinateur dont la mesure de Lévy s'écrit :

$$dpo = \sum_{i\geq 1} a_i\,\delta_i$$

où $a_i$ est une suite décroissante de réel.

Nous appelons Processus de Poisson standard les processus de Lévy dont la mesure de Lévy est proportionnelle à la mesure de Dirac en $+1$ : $d\pi = cst\,\delta_{+1}$.

**Proposition.** Un subordinateur est un philanthrope discret ssi il est ami avec un Processus de Poisson standard.

*Démonstration.* Lorsque $H$ et $\widehat{H}$ sont des PPC, $\overline{\pi}_?$ se dérive facilement (au sens des distributions) et nous avons une expression explicite de $d\pi_?$ :

$$d\pi_? \quad = \quad (\overline{po}(0) + \kappa_o)dne \;+\; (\overline{ne}(0) + \widehat{\kappa}_o)dpo \;-\; dne * dpo \;+\; \overline{ne}(0)\overline{po}(0)\delta$$

Supposons que $H$ soit l'ami d'un processus de Poisson standard. D'après 5.4.1, il faut nécessairement que $dpo$ soit portée par $\mathbb{N}$ :

$$dpo = \sum_{i\geq 1} a_i \delta_i$$

De plus, puisque $dne = \delta_{-1}$, on a :

$$d\pi_? = (\kappa_o + \sum_{i\geq 1} a_i)\delta_{-1} \quad + \quad \sum_{i\geq 1}(a_i - a_{i+1})\delta_i$$

Ainsi, pour que $d\pi_?$ soit positive, il faut que $(a_i)$ soit une suite décroissante. La réciproque est évidente. □

**Proposition.** Deux philanthropes discrets sont toujours amis.

Nous laissons la démonstration au lecteur.

**Remarque.** Les philanthropes sont les amis des dérives pures. Les philanthropes discrets sont les amis des processus de Poisson standards. Cette analogie est tout à fait naturelle puisque dans la théorie des marches aléatoires, le processus en escalier qui monte de 1 à chaque étape est l'homologue de la dérive pure.

A science is said to be useful if its development tends to accentuate the existing inequalities in the distribution of wealth, or more directly promotes the destruction of human life.

Godfrey H. Hardy.
A mathematician's Apology (1941).

# Chapitre 8

# Lévy à variation finie

Dans ce chapitre nous allons redémontrer le théorème de Bertoin qui détermine si un processus de Lévy à variation finie, sans dérive, visite $]0,\infty[$ immédiatement. Ce théorème est le premier d'une famille rassemblant :
• Le théorème de Bertoin (8.2.1)
• Le théorème d'Erickson sur la convergence de $X_t$ en l'infini ( 9.4.1) .
• Le théorème Kaa sur la reptation (10.1.1) .
Grâce aux équations amicales et au théorème 3.4.1 (donnant une expression de la factorisation de Wiener-Hopf de la somme de deux processus de Lévy indépendants), les trois démonstrations sont assez courtes et parallèles.

Dans ce chapitre $X$ est à variation finie. Ainsi son exposant s'écrit :

$$\psi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-zx}) d\pi(x) + \mathtt{d}z + \psi_o$$

## 8.1 Prédominance de la dérive

La proposition suivante est très connue. Nous nous sommes amusés à la montrer avec l'équation amicale intégrée.

**Proposition 8.1.1**
• $\mathtt{d} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad X$ rampe vers le haut $\quad \Rightarrow \quad X$ ne visite pas $]-\infty, 0[$

• $\mathtt{d} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X$ ne rampe pas.

• $\mathtt{d} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad X$ rampe vers le bas $\quad \Rightarrow \quad X$ ne visite pas $]0,\infty[$

**Corollaire 8.1.2** $\lim_{t\to 0} \frac{X_t}{t} = \mathtt{d}$

*Démonstration de la proposition.* On peut supposer sans perdre de généralité que $d\pi$ est à support compact et que $X$ oscille, donc $\mathbf{E}[X_1] = \mathtt{d} + \int x d\pi = 0$. Dans ce cas l'équation amicale intégrée s'écrit :

$$\overline{\overline{\pi}} = \overline{ne} * \overline{po} + c\overline{ne} + \hat{c}\overline{po}$$

Puisque $X$ est VF, $\overline{\overline{\pi}}$ est bornée. Par suite, $\overline{po} * \overline{ne}$ est bornée et continue en zéro. Ainsi :

$$\Delta\overline{\overline{\pi}}(0) = \hat{c}\overline{po}(0) - c\overline{ne}(0)$$

Par ailleurs $\Delta\overline{\overline{\pi}} = \overline{\overline{\pi}}(0+) - \overline{\overline{\pi}}(0-) = \int x d\pi = -\mathtt{d}$, donc :

$$\hat{c}\,\overline{po}(0) - c\,\overline{ne}(0) = -\mathtt{d}$$

Ceci, ajouté au fait que $\hat{c}c = 0$, permet de déduire les trois points de la proposition. □

## 8.2 Visite immédiate

Au vu de cette proposition 8.1.1 une question se pose : lorsque $\mathtt{d} = 0$, que visite $X$ ? J. Bertoin dans [3] a répondu à cette question.

**Théorème 8.2.1 (J.Bertoin, 1997)** Soit $X$ un processus de Lévy à variation finie, sans dérive, qui n'est pas un processus de Poisson composé.

$$X \text{ visite } ]0,\infty[ \text{ immédiatement} \qquad \text{ssi} \qquad \int_0^1 \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\pi}} d\pi(x) = \infty$$

*Démonstration du théorème de Bertoin 8.2.1.* Supposons que $\overline{po}(0) < \infty$ . Dans ce cas $\overline{ne}(0) = \infty$ sinon nous tombons dans le cas du PPC. En 6.3.1, nous avons vu qu'en $0-$, $\overline{\pi} \sim (\overline{po}(0) + \kappa_o)\overline{ne}$. Ainsi, pour $\gamma > 0$ assez petit :

$$\forall x < \gamma \qquad \int_{-x}^0 \overline{ne} \;\leq\; 2\,(\overline{po}(0) + \kappa_o) \int_{-x}^0 \overline{\pi}$$

En utilisant ceci et le lemme de l'encadreur (p.83), on obtient :

$$\int_0^\gamma \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\pi}} d\pi(x) \;\leq\; 2\,(\overline{po}(0) + \kappa_o) \int_0^\gamma \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{ne}} d\pi(x) \;\leq\; 2\,(\overline{po}(0) + \kappa_o) \int_0^\infty \widehat{\mathcal{V}}\, d\pi$$

Or, d'après l'équation amicale inversée : $\int_0^\infty \widehat{\mathcal{V}} d\pi = \overline{po}(0)$ qui est finie.

*Réciproquement.* Supposons que $X$ visite $]0,\infty[$. Nous supposons que $X$ meurt i.e. $\kappa_o\widehat{\kappa}_o > 0$. Soit $\varepsilon > 0$, nous définissons : $X^\varepsilon = X - \varepsilon t$. Tous les objets indicés d'un $\varepsilon$ sont relatifs à $X^\varepsilon$. Quand $\varepsilon$ tend vers zéro, $X^\varepsilon$ converge en loi vers $X$. En vertu de la proposition 3.4.2, on a :

$$\begin{aligned} \overline{po}^\varepsilon(0) &\to \overline{po}(0) = \infty \\ \widehat{\kappa}_o^\varepsilon &\to \widehat{\kappa}_o > 0 \end{aligned}$$

L'équation amicale, appliquée à $X^\varepsilon$, donne :

$$\text{sur } \mathbb{R}^- \quad \overline{\pi}^\varepsilon = \overline{\pi} \leq (\overline{po}^\varepsilon(0) + \kappa_o^\varepsilon)\overline{ne}$$

Ainsi, en utilisant le lemme de l'encadreur :

$$\frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\pi}} \geq \frac{1}{(\overline{po}^\varepsilon(0) + \kappa_o)} \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{ne} + \widehat{\kappa}_o^\varepsilon u} \geq \frac{1}{3\,(\overline{po}^\varepsilon(0) + \widehat{\kappa}_o^\varepsilon)} \widehat{\mathcal{V}}(x)$$

En intégrant par $d\pi$ :

$$\int_0^\infty \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\pi}} d\pi \geq \frac{1}{3\,(\overline{po}^\varepsilon(0) + \widehat{\kappa}_o^\varepsilon)} \int_0^\infty \widehat{\mathcal{V}}\, d\pi = \frac{1}{3}\, \frac{\overline{po}^\varepsilon(0)}{(\overline{po}^\varepsilon(0) + \widehat{\kappa}_o^\varepsilon)}$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$ :

$$\int_0^\infty \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\pi}} d\pi(x) \geq \frac{1}{3}$$

Ceci est vrai pour n'importe quel Lévy tué visitant $]0,\infty[$.

Soit $X^\delta$ le processus de Lévy tué la première fois qu'il fait un saut positif plus grand que $\delta > 0$. Appliquons à $X^\delta$ l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\int_0^\delta \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\pi}} d\pi(x) \geq \frac{1}{3}$$

Ceci étant vrai pour tout $\delta$, l'intégrale diverge. □

Du théorème 8.2.1, le lecteur déduira facilement le corollaire suivant.

**Corollaire.** Soit $Y$ et $Z$ deux subordinateurs indépendants sans dérive. Les trois points suivants sont équivalents :

- $Y - Z$ ne visite pas $]-\infty, 0[$.
- En $0+$, $Z$ est p.s négligeable devant $Y$.
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \overline{\pi}_Y} d\pi_Z(x) < \infty$

Au chapitre 11, nous étendrons une partie de ce théorème au cas où $(Y, Z)$ est un subordinateur bivarié.

Celui qui vous connaît et vous apprécie ne veut plus rien des biens de la terre ; se contente de vos jouissances magiques ; et, porté sur vos ailes sombres, ne désire plus que de s'élever, d'un vol léger, en construisant une hélice ascendante, vers la voûte sphérique des cieux.

Le comte de Lautréamont
Les chants de Maldoror (1869)

# Chapitre 9

# Les vieux jours du processus de Lévy

## 9.1 Introduction

Dans ce chapitre notre bon vieux processus de Lévy $X$ ne meurt pas (i.e. $\psi_o = \widehat{\kappa}_o \kappa_o = 0$). Nous allons nous intéresser au comportement de $X_t$ et de $\frac{X_t}{t}$ quand $t$ tend vers $+\infty$.

Nous devrons traiter différement le cas où l'espérence de $X_1$ est bien définie et le cas ou elle ne l'est pas.

Rappelons enfin que seul l'un des trois comportements suivants est possible :
- $\lim_\infty X_t = +\infty$, ce qui équivaut à $\widehat{\kappa}_o > 0$ et $\kappa_o = 0$.
- $\lim_\infty X_t = -\infty$, ce qui équivaut à $\widehat{\kappa}_o = 0$ et $\kappa_o > 0$.
- $\underline{\lim}_\infty X_t = -\infty$ et $\overline{\lim}_\infty X_t = +\infty$ ce qui équivaut à $\widehat{\kappa}_o = 0$ et $\kappa_o = 0$. Dans ce dernier cas, l'on dit que $X$ oscille.

## 9.2 Quand l'espérance est bien définie

Le but de cette section est de redémontrer la loi forte des grands nombres en utilisant uniquement la factorisation de Wiener-Hopf.

**Proposition 9.2.1** Quand $\mathbf{E}|X_1| < \infty$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_1] = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad X \text{ oscille} \\
\mathbf{E}[X_1] > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad X \text{ tend vers } +\infty \\
\mathbf{E}[X_1] < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad X \text{tend vers } -\infty
\end{aligned}$$

*Démonstration.* L'équation amicale permet de déduire :

$$\text{sur } \mathbb{R} \qquad \overline{\pi} \geq \kappa_o \overline{ne} + \widehat{\kappa}_o \overline{po}$$

Ainsi $\int_{[-1,1]^c}^{\infty} \overline{\pi} < \infty \;\; \Rightarrow \;\; \left[ \; \kappa_o \int_{-\infty}^{0} \overline{ne} < \infty \text{ et } \widehat{\kappa}_o \int_0^{\infty} \overline{po} < \infty \; \right]$, en convenant $0\infty = 0$. Donc :

$$\frac{(\widehat{\kappa}(-iu) - \widehat{\kappa}_o)(\kappa(iu) - \kappa_o)}{iu} \quad \underset{u \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Comme $\psi(iu) = [\widehat{\kappa}(-iu) - \widehat{\kappa}_o]\,[\kappa(iu) - \kappa_o] \; + \; \kappa_o \widehat{\kappa}(-iu) + \widehat{\kappa}_o \kappa(iu)$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_1] &= \lim_{u \to 0} \frac{\psi(iu)}{iu} \\
&= \kappa_o \lim_{u \to 0} \frac{\widehat{\kappa}(-iu)}{iu} \quad + \quad \widehat{\kappa}_o \lim_{u \to 0} \frac{\kappa(iu)}{iu} \\
&= -\kappa_o \mathbf{E}[\widehat{H}_1] \quad + \quad \widehat{\kappa}_o \mathbf{E}[H_1]
\end{aligned}$$

Les expressions ci-dessus ont toujours un sens. Par exemple, si $\kappa_o > 0$ alors $\widehat{H}$ ne meurt pas et $\mathbf{E}[\widehat{H}_1] < \infty$.

En observant l'égalité : $\mathbf{E}[X_1] = -\kappa_o \mathbf{E}[\widehat{H}_1] + \widehat{\kappa}_o \mathbf{E}[H_1]$ et en tenant compte du fait que $\kappa_o \widehat{\kappa}_o = 0$, on déduit la proposition. □

**Définition.** On dit que $\mathbf{E}[X_1]$ est bien définie dans l'un des trois cas suivants :
- $\mathbf{E}|X_1| < \infty$.
- $\mathbf{E}|X_1 \vee 0| = \infty$ et $\mathbf{E}|X_1 \wedge 0| < \infty$ ; dans ce cas on note $\mathbf{E}[X_1] = +\infty$.
- $\mathbf{E}|X_1 \vee 0| < \infty$ et $\mathbf{E}|X_1 \wedge 0| = \infty$ ; dans ce cas on note $\mathbf{E}[X_1] = -\infty$.

**La loi forte des grands nombres :** Quand $\mathbf{E}[X_1]$ est bien définie on a :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{X_t}{t} = \mathbf{E}[X_1] \quad \text{p.s}$$

*Démonstration.* Supposons d'abord que $\mathbf{E}|X_1| < \infty$. En considérant le processus centré : $(X_t - \mathbf{E}[X_1]t)$, on peut se ramener au cas $\mathbf{E}[X_1] = 0$. Soit $r > 0$. Soit $X_t^r = X_t + rt$. Le théorème 3.4.1 spécifie que la décomposition de Wiener-Hopf de $X^r$ est donnée par $(\widehat{h}, h\rho)$ où $\rho$ est l'exposant du subordinateur $H + r\neg$ et $(\widehat{h}, h)$ est la décomposition de Wiener-Hopf

de $-\widehat{H}+r\widehat{\neg}$. D'après la proposition 9.2.1, $X^r$ tend vers $+\infty$ donc $\widehat{h}(0)>0$, donc $-\widehat{H}+r\widehat{\neg}$ tend vers $+\infty$. Ceci étant vrai même pour $r$ très petit on a :

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\widehat{H}_t}{\widehat{\neg}_t}=0$$

Ce qui revient à dire :

$$\lim_{t\to\infty}\ \lim_{t\in\{I=X\}}\ \frac{|I_t|}{t}=0$$

Nous en déduisons $\lim_\infty(|I_t|/t)=0$. Par symétrie, nous avons $\lim_\infty(S_t/t)=0$. La loi forte des grands nombres s'en suit.

Supposons maintenant que $\mathbf{E}[X_1]=\infty$. Dans ce cas, pour tout $A>0$, $X$ peut se décomposer en la somme indépendante d'un subordinateur et d'un processus de Lévy $Y$ tel que $\mathbf{E}[Y_1]=A$. Ainsi $\underline{\lim}_\infty(X_t/t)\geq A$. Ceci étant vrai pour tout $A$, $\lim_\infty(X_t/t)=\infty=\mathbf{E}[X_1]$. □

## 9.3 Théorème de Kesten

Nous allons regarder le comportement asymptotique $X_t$ et $(X_t/t)$ quand l'espérance n'est pas bien définie. Commençons par redémontrer un théorème de Kesten [24] :

**Théorème 9.3.1 (H.Kesten, 1970)** Si $\mathbf{E}|X_1\vee 0|=\mathbf{E}|X_1\wedge 0|=\infty$ alors :

$$\begin{aligned}
X \text{ tend vers } -\infty \quad &\Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{t}=-\infty\\
X \text{ tend vers } +\infty \quad &\Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{t}=+\infty\\
X \text{ oscille} \quad &\Rightarrow \quad \underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{X_t}{t}=-\infty \text{ et } \overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{X_t}{t}=+\infty
\end{aligned}$$

En couplant le théorème de Kesten et la loi forte des grands nombres on trouve :

**Corollaire 9.3.2** Soient $X$ et $Y$ deux processus de Lévy indépendants tels que $\mathbf{E}|X_1|=\infty$ et $\mathbf{E}|Y_2|<\infty$. Dans cette configuration, $X+Y$ tend vers $+\infty$ ssi $X$ tend vers $+\infty$.

Pour démontrer le théorème de Kesten, semons 3 petits lemmes !

**Lemme 9.3.3** $\mathbf{E}|X_1 \wedge 0| = \infty \ \Rightarrow \ \mathbf{E}[\widehat{H}_1] = \infty$.

*Démonstration.* Ce lemme est la contraposée de la proposition ( 6.2.3).

**Lemme 9.3.4** Si $X$ tend vers $-\infty$ alors $\mathbf{E}[\widehat{\neg}_1] < \infty$.

*Démonstration.* Nous avons $\mathbf{E}[\widehat{\neg}_1] = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\hat{\ell}(\alpha)}{\alpha}$. Par ailleurs :

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\widehat{\ell}(\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\ell(\alpha)} = \frac{1}{\ell(0)} < \infty$$

□

**Lemme 9.3.5** Si $\mathbf{E}|X_1 \wedge 0| = \infty$ et si $X$ tend vers $-\infty$ alors, pour tout réel $r > 0$, $X_t + rt$ tend encore vers $-\infty$.

*Démonstration.* Soit $r > 0$. D'après le théorème 3.4.1, la décomposition de Wiener-Hopf de $X_t^r = X_t + rt$ est donnée par $(\widehat{h}, h\rho)$ où $\rho$ est l'exposant du subordinateur $H + r\neg$ et $(\widehat{h}, h)$ est la décomposition de Wiener-Hopf de $-\widehat{H} + r\widehat{\neg}$. Nous devons donc montrer que $h(0)\rho(0) > 0$. Comme $X$ tend vers $-\infty$, $H + r\neg$ meurt, donc $\rho(0) > 0$. Étudions $h(0)$. Les lemmes 9.3.3 et 9.3.4 donnent $\mathbf{E}[-\widehat{H}_1 + r\widehat{\neg}_1] = -\infty$, donc $-\widehat{H} + r\widehat{\neg}$ tend vers $-\infty$, ainsi $h(0) > 0$. □

*Démonstration du théorème de Kesten (9.3.1) :* Soit $X$ tel que $\mathbf{E}|X_1 \vee 0| = \mathbf{E}|X_1 \wedge 0| = \infty$. On suppose en plus que $X$ tend vers $-\infty$. Le lemme 9.3.5 dit que $X^r$ tend aussi vers $-\infty$. Ainsi :

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{X_t}{t} = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{X_t + rt}{t} \ - \ r \leq -r$$

Ceci étant vrai pour tout $r > 0$, le premier point du théorème est démontré.

Le deuxième point est le symétrique du premier. Montrons le troisième point : supposons que $X$ oscille. Du lemme 9.3.5, nous déduisons que pour tout $r > 0$, $X_t + rt$ et $X_t - rt$ oscillent encore. Alors :

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{X_t}{t} = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{X_t - rt}{t} \ + \ r \geq r$$

$$\underline{\lim_{t \to \infty}} \frac{X_t}{t} = \underline{\lim_{t \to \infty}} \frac{X_t + rt}{t} \ - \ r \leq -r$$

□

## 9.4 Théorème d'Erickson

Le théorème de Kesten dit ceci : si l'espérance n'est pas bien définie, alors $(X_t/t)$ a le même comportement que $(X_t)$ en quand $t$ tend vers $+\infty$. Le théorème d'Erickson [17] donne un critère sur $d\pi$ qui détermine le comportement de $(X_t)$ en $+\infty$ (toujours dans le cas $\mathbf{E}|X_1| = \infty$). Notez bien que le théorème de Kesten est indispensable pour démontrer le théorème d'Erickson, dans la démonstration initiale et dans celle qui suit.

**Notations.**

$$E_1^+ = \int_1^\infty \frac{x}{\int_{-x}^1 \overline{\pi}} d\pi(x) \qquad E_1^- = \int_{-\infty}^{-1} \frac{|x|}{\int_1^{|x|} \overline{\pi}} d\pi(x)$$

**Théorème 9.4.1 (K.B Erickson, 1973)** Si $\mathbf{E}|X_1 \vee 0| = \mathbf{E}|X_1 \wedge 0| = \infty$ alors :

$$\begin{array}{lll} X_t \text{ tend vers } -\infty & \text{ssi} & E_1^+ < \infty \\ X_t \text{ tend vers } +\infty & \text{ssi} & E_1^- < \infty \\ X_t \text{ oscille} & \text{ssi} & E_1^+ = E_1^- = \infty \end{array}$$

*Démonstration du théorème.* Nous allons commencer par montrer le théorème dans le cas où $X$ est un PPC ne mourant pas. Sous cette hypothèse, nous avons $\overline{po}(0) < \infty$, $\overline{ne}(0) < \infty$, $\hat{c} = c = 0$, $\kappa_o \widehat{\kappa}_o = 0$. De plus, si nous notons :

$$\begin{aligned} E^+ &= \int_0^\infty \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\pi}} d\pi(x) \\ E^- &= \int_{-\infty}^0 \frac{|x|}{\int_0^{|x|} \overline{\pi}} d\pi(x) \end{aligned}$$

nous avons $E_1^+ < \infty \Leftrightarrow E^+ < \infty$ et $E_1^- < \infty \Leftrightarrow E^- < \infty$, nous pouvons donc travailler avec $E^-$ et $E^+$.

Si $X$ tend vers $-\infty$. Alors $\kappa_o > 0$ et $\widehat{\kappa}_o = 0$. L'équation amicale donne alors :

$$\text{sur } \mathbb{R}^- \qquad \overline{\pi} = \overline{po} * dne + \kappa_o \overline{ne} \geq \kappa_o \overline{ne}$$

Ainsi

$$\forall x > 0 \qquad \frac{x}{\int_{-x}^\infty \overline{\pi}} \leq \frac{1}{\kappa_o} \widehat{\mathcal{V}}(x)$$

L'équation amicale inversée dit que $\int_0^\infty \widehat{\mathcal{V}} d\pi = \overline{po}(0) < \infty$, ainsi :

$$E^+ = \int_0^\infty \frac{x}{\int_{-x}^\infty \overline{\pi}} d\pi(x) \leq \frac{1}{\kappa_o} \overline{po}(0) < \infty$$

*Réciproquement.* Si $X$ oscille. Alors $\kappa_o = 0$ et $\widehat{\kappa}_o = 0$. Donc :

$$\text{sur } \mathbb{R}^- \qquad \overline{\pi} = \overline{po} * dne \leq \overline{po}(0)\overline{ne}$$

Ainsi

$$\forall x > 0 \qquad \frac{x}{\int_x^\infty \overline{\pi}} \;\geq\; \frac{1}{3\,\overline{po}(0)}\widehat{\mathcal{V}}(x)$$

Donc :

$$\int_0^\infty \frac{x}{\int_x^\infty \overline{\pi}} d\pi \geq \frac{1}{3}$$

Ceci est vrai dès que $X$ oscille. Soit $\delta > 0$ et soit $X^\delta$ le PPC dont la mesure de Lévy est $d\pi - d\pi 1_{]0,\delta]}$. En vertu du corollaire 9.3.2, $X^\delta$ oscille. Nous pouvons donc lui appliquer l'inégalité ci-dessus ; cela donne :

$$\int_\delta^\infty \frac{x}{\int_{-x}^\infty \overline{\pi}} d\pi(x) \geq \frac{1}{3}$$

Ceci étant vrai pour tous les $\delta > 0$, on a $E^+ = \infty$. De même $E^- = \infty$.

Le théorème d'Erickson est donc prouvé quand $X$ est un PPC. Cependant, avec (9.3.2), il se généralise facilement à tous les processus de Lévy. □

Aie confiance, crois en moi, que je puisse veiller sur toi. Fais un somme, sans méfiance, je suis là, aie confiance. Le silence propice te berce, souris et sois complice. Laisse tes sens glisser vers ces délices tentatrices.

Kaa.

# Chapitre 10

# Reptation

## 10.1 Théorème Kaa

Dans certains cas particuliers, la reptation coule de source : quand il est à variation finie, $X$ rampe vers le haut ssi sa dérive est strictement positive. Lorsque $X$ possède une composante gaussienne, il rampe vers le bas et vers le haut. Le théorème suivant traite des autres cas.

**Théorème 10.1.1 (Kaa)** Soit $X$ un processus de Lévy à variation infinie sans composante gaussienne.

$$X \text{ rampe vers le haut} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\overline{\pi}}_1} \, \overline{\pi}(x)dx \;<\; \infty \;,$$

où

$$\begin{aligned} \forall x \quad \overline{\pi}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1_{\{0<x\leq s\}} + 1_{\{s\leq x<0\}}) d\pi(s) \\ \forall x \in [-1,0[ \quad \overline{\overline{\pi}}_1(x) &= \int_{-1}^{x} \overline{\pi} \;. \end{aligned}$$

Récemment, dans [15], R.A. Doney et R.A. Maller ont conjecturé : Sous les mêmes hypothèses

$$X \text{ rampe vers le haut} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{\overline{\overline{\pi}}_1(-x)} \, \overline{\pi}(x)dx \;<\; \infty \;.$$

Notons $D_1^+(d\pi)$ l'intégrale apparaissant dans la conjecture de Doney-Maller et $K_1^+(d\pi)$ l'intégrale du théorème Kaa, nous vérifions sans peine que $K_1^+(d\pi) \leq D_1^+(d\pi)$. Donc, si

$D_1^+(d\pi)$ est finie alors $X$ rampe vers le haut. La réciproque est fausse en général. Voici un contre-exemple : Soit $d\pi$ telle que

$$\begin{cases} \text{En } 0+ & \overline{\pi}(x) \sim x^{-2} |\ln x|^{-(5/2)} \\ \text{En } 0+ & \overline{\overline{\pi}}(-x) \sim x^{-1} |\ln x|^{-2} \ , \end{cases}$$

avec une telle mesure, on a : $D_1^+(d\pi) = \infty$ et $K_1^+(d\pi) < \infty$.

Signalons enfin qu'il existe déjà un critère de reptation introduit par P.W. Millar en 1973 (voir [26]) :

$$X \text{ rampe vers le haut } \Leftrightarrow \int_0^1 M(y)\overline{\pi}(y)dy < \infty \ ,$$

où

$$M(y) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos\ uy] \Re \left[ \frac{1}{\lambda + \psi(u)} \right] \ du \ .$$

Mais ce critère a l'inconvénient de faire intervenir à la fois $\psi$ (l'exposant de Fourier) et $d\pi$. Il est fréquent de connaitre explicitement l'un ou l'autre, mais rarement les deux.

## 10.2 Renforcement des hypothèses

**Définition.** Quand $d\pi$ est à support compact, nous pouvons définir :

$$K^+(d\pi) = \int_0^{\infty} \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\overline{\pi}}} \overline{\pi}(x)dx \ .$$

Ce critère analytique est plus maniable que $K_1^+$. Nous allons voir que l'on peut toujours se ramener au cas où $d\pi$ est à support compact, et ainsi travailler avec $K^+$ plutôt que $K_1^+$.

Soit $Y$ le Lévy caractérisé par l'exposant $\psi^Y(u) = \int_{[-1,1]}(1 - e^{iux} + iux)d\pi^Y$ avec :

$$d\pi^Y = d\pi 1_{[-1,1]} + |\mathtt{a}|\delta_1 1_{\{\mathtt{a}<0\}} + \mathtt{a}\delta_{-1} 1_{\{\mathtt{a}>0\}} \ .$$

Par construction $\mathbf{E}[Y_1] = 0$.

**Lemme 10.2.1** *$X$ rampe vers le haut ssi $Y$ rampe vers le haut.*

*Démonstration.* Par construction, $\psi - \psi^Y$ est l'exposant d'un processus de Poisson composé. Il n'est pas difficile de construire une paire de processus $(X', Y')$ telle que $X' \overset{\text{loi}}{=} X$ et $Y' \overset{\text{loi}}{=} Y$ et telle que $X'$ et $Y'$ coïncident sur un intervalle aléaloire $[\![0, T]\!]$ (avec $T > 0$ p.s). Dès lors, la reptation étant une propriété locale, $X$ rampe vers le haut ssi $Y$ rampe vers le haut. □

Par ailleurs un calcul direct donne :

**Lemme 10.2.2**

$$K^+(d\pi^Y) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad K_1^+(d\pi) < \infty$$

Les lemmes 10.2.2 et 10.2.1, montrent que l'on ne perd pas en généralité en travaillant avec la paire $\big(Y, K^+(d\pi)\big)$ plutôt qu'avec $\big(X, K_1^+(d\pi)\big)$. Nous faisons donc l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 10.2.3** A partir de maintenant :
• $X$ est à variation infinie
• $X$ n'a pas de composante brownienne
• $d\pi$ est portée par $[-1, 1]$
• $X$ ne meurt pas et $\mathbf{E}[X_1] = 0$ ( donc $X$ oscille).

Et nous nous contentons de démontrer :

$$c > 0 \quad \Leftrightarrow \quad K^+(d\pi) < \infty$$

## 10.3 Démonstration du théorème Kaa

### ↬ Sens direct

Supposons $c > 0$ et montrons $K^+(d\pi) < \infty$. Comme $X$ n'a pas de composante gaussienne on a $\hat{c} = 0$.

L'équation amicale intégrée donne sur $\mathbb{R}^-$ : $\overline{\overline{\pi}} = \overline{po} * \overline{ne} + c\overline{ne}$. Donc $\overline{\overline{\pi}}\, 1_{\mathbb{R}^-} \geq c\,\overline{ne}$. En utilisant cette inégalité et celle donnée par le lemme de l'encadreur (cf. p.83) nous obtenons :

$$\forall x > 0 \qquad \frac{x}{\int_x^0 \overline{\overline{\pi}}} \quad \leq \quad \frac{x}{c\int_{-x}^0 \overline{ne}} \quad \leq \quad \frac{1}{c}\,\widehat{\mathcal{V}}(x)\ .$$

Par ailleurs, le corollaire 5.1.2 implique : $\overline{\overline{po}}(0) = \int_0^\infty \widehat{\mathcal{V}}(x)\overline{\pi}(x)dx$. Cette quantité est finie car $dpo$ est portée par $]0, 1]$. Ainsi :

$$\int_0^\infty \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\overline{\pi}}}\,\overline{\pi}(x)dx \quad \leq \quad \frac{1}{c}\int_0^\infty \widehat{\mathcal{V}}\,\overline{\pi} \quad = \quad \frac{1}{c}\,\overline{\overline{po}}(0) < \infty\ .$$

□

### ↬ Réciproque

**Lemme 10.3.1**

$$\text{sur } \mathbb{R}^- \ : \qquad \overline{po} * \overline{ne} \ \leq \ \overline{\overline{po}}(0)\,\overline{ne}$$

*Démonstration.* Notons $F(x) = 1_{\{x>0\}} \int_0^x \overline{po}$ . Par Fubini, sur $\mathbb{R}^-$ : $\overline{po} * \overline{ne} = F * dne$. L'inégalité $F \leq \overline{\overline{po}}(0) 1_{\mathbb{R}+}$, implique celle du lemme. □

Pour montrer que $K^+$ est infini, commençons par montrer que $K^+$ est plus grand qu'une constante donnée.

**Lemme 10.3.2** Si $X$ ne rampe pas vers le haut alors $K^+(d\pi) \geq \frac{1}{3}$.

*Démonstration.* L'équation amicale intégrée (avec $c = \kappa_o = 0$) et le lemme 10.3.1 donnent :

$$\text{sur } \mathbb{R}^- \ : \qquad \overline{\overline{\pi}} = \overline{po} * \overline{ne} \leq \overline{\overline{po}}(0)\overline{ne} \ .$$

Remarquons que le fait que $X$ oscille est essentiel (car nous utilisons $\kappa_o = \widehat{\kappa}_o = 0$). Calculons ! ...

$$\forall x > 0 \qquad \frac{x}{\int_x^0 \overline{\overline{\pi}}} \quad \geq \quad \frac{1}{\overline{\overline{po}}(0)} \ \frac{-x}{\hat{c} + \int_{-x}^0 \overline{ne}} \quad \geq \quad \frac{1}{3\,\overline{\overline{po}}(0)} \ \widehat{\mathcal{V}}(x) \ .$$

Donc :

$$\int_0^\infty \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\overline{\pi}}} \, \overline{\pi}(x)\, dx \quad \geq \quad \frac{1}{3\,\overline{\overline{po}}(0)} \int_0^\infty \widehat{\mathcal{V}}(-x)\overline{\pi}(x) dx \quad = \quad \frac{1}{3} \ .$$

□

**Réciproque du théorème Kaa :** Si $X$ ne rampe pas vers le haut alors $K^+(d\pi) = \infty$.

*Démonstration.* Soit $\delta \in ]0,1[$. Soit $X^\delta$ le Lévy caractérisé par :

$$\psi^\delta = \int_{[-1,\delta]} (1 - e^{iux} + iux) d\pi + iu \int_{]\delta,1]} x d\pi \ .$$

$\psi - \psi^\delta$ est l'exposant d'un Poisson composé. Donc $X^\delta$ ne rampe pas vers le haut. Malheureusement $\mathbf{E}[X_1^\delta] = -\int_{]\delta,1]} x d\pi < 0$. Donc $X^\delta$ n'oscille pas. Pour le faire osciller, rajoutons lui une dérive : Soit $X_t^{\delta,\,r} = X_t^\delta + rt$ où $r = \int_{]\delta,1]} x d\pi$ . D'après 3.4.3, $X^{\delta,\,r}$ ne rampe pas vers le haut. De plus, par construction, $\mathbf{E}[X_1^{\delta,\,r}] = 0$. Le lemme 10.3.2 peut s'appliquer à ce processus. Pour $x > 0$ nous notons $\overline{\pi}^\delta(x) = \int 1_{]x,\delta]} d\pi$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \ \leq \ K^+(d\pi 1_{[-1,\delta]}) \ &= \ \int_0^\infty \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\overline{\pi}}(t)\, dt} \overline{\pi}^\delta(x) dx \\ &\leq \ \int_0^\delta \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\overline{\pi}}(t)\, dt} \overline{\pi}(x) dx \ . \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$, $K^+(d\pi)$ est infini.

## 10.4 Corollaires du théorème Kaa

Dans cette section nous travaillons encore (sans perdre en généralité) sous l'hypothèse 10.2.3.

**Remarque.** La fonction $0 < x \mapsto (x/\int_{-x}^{0} \overline{\overline{\pi}})$ est croissante. La formule d'intégration par partie donne :

$$K^+(d\pi) = \int_0^\infty \frac{x}{\int_{-x}^{0} \overline{\overline{\pi}}}\, \overline{\pi}(x)dx = \int_0^\infty \overline{\overline{\pi}}(x) d\left[\frac{x}{\int_{-x}^{0} \overline{\overline{\pi}}}\right] .$$

Cette forme du critère intégral est parfois plus pratique.

On définit $\overline{\overline{\pi}}_+(x) = \overline{\overline{\pi}}(x)1_{\{x>0\}}$ et $\overline{\overline{\pi}}_-(x) = \overline{\overline{\pi}}(-x)1_{\{x>0\}}$ . Le théorème Kaa dit grosso modo que $X$ rampe vers le bas lorsque $\overline{\overline{\pi}}_+$ est "minuscule" devant $\overline{\overline{\pi}}_-$. Remarquons cependant que le fait que $\overline{\overline{\pi}}_+$ soit négligeable devant $\overline{\overline{\pi}}_-$ (au sens usuel) n'implique pas que $X$ rampe vers le haut. Voici un contre-exemple :

$$\begin{cases} \text{En } 0+ & \overline{\overline{\pi}}_+(x) \sim x^{-1} |\ln x|^{-2} \\ \text{En } 0+ & \overline{\overline{\pi}}_-(x) \sim x^{-1} |\ln x|^{-(3/2)} \end{cases} .$$

Du théorème Kaa on déduit facilement le théorème suivant de P.W. Millar [26] :

**Théorème 10.4.1 (P.W. Millar, 1973)** Si $\int_0^1 x d\pi < \infty$ et $\int_{-1}^{0} |x| d\pi = \infty$ alors $X$ rampe vers le haut.

Ou encore celui-ci de P.C.G. Rogers [28] :

**Théorème 10.4.2 (P.C.G. Rogers, 1984)** Si $\underline{\lim}_0(\overline{\overline{\pi}}_+/\overline{\overline{\pi}}_-) > 0$ alors $X$ ne rampe pas vers le haut.

Soit $Y$ un autre processus de Lévy VI, sans composante brownienne, indépendant de $X$. Notons $d\mu$ sa mesure de Lévy. On note $Y = Y^+ - Y^-$ la décomposition classique de $Y$ en la différence de deux sans-sauts-négatifs indépendants.

**Proposition.**

(*i*) Si dans un voisinage de zéro, $\overline{\overline{\mu}}_+ < cst\, \overline{\overline{\pi}}_+$ et $\overline{\overline{\mu}}_- < cst\, \overline{\overline{\pi}}_-$ alors $X + Y$ rampe vers le haut ssi $X$ rampe vers le haut.

(*ii*) Si $X$ et $Y$ rampent vers le haut alors $X + Y$ rampe vers le haut.

(*iii*) Si $X$ ne rampe pas vers le haut et si $Y$ rampe vers le bas alors $X + Y$ ne rampe pas vers le haut.

(*iv*) Si $X$ ne rampe pas vers le haut et si $Y$ est symétrique alors $X + Y$ ne rampe pas vers

le haut.
($v$) Si $X$ rampe vers le haut alors $X+Y$ a le même comportement rampaire que $Y-X^-$.

*Démonstration.* Les deux premiers points découlent directement du théorème Kaa. Les trois derniers points s'appuient sur la similitude entre le théorème Kaa et le théorème de Bertoin (8.2.1) : Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ les Lévy à variation finie, sans dérive, dont les mesures de Lévy sont respectivement $\overline{\pi}(x)dx$ et $\overline{\mu}(x)dx$. Si nous notons $B^+(d\pi)$ le critère apparaissant dans le théorème de Bertoin (8.2.1), nous avons :

$$B^+(\overline{\pi}(x)dx) = K^+(d\pi)$$

Ainsi, $X$ ne rampe pas vers le haut ssi $\mathbb{X}$ visite $]0,\infty[$ immédiatement. Idem pour $Y$ et $X+Y$.

Montrons ($iii$) : Sous les hypothèses, $\mathbb{X}$ visite $]0,\infty[$ immédiatement tandis que $\mathbb{Y}$ est positif dans un voisinage de zéro. Donc $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ visite $]0,\infty[$ immédiatement, et par conséquent $X+Y$ ne rampe pas vers le haut.

Montrons ($iv$) : par hypothèse $\mathbb{X}$ visite $]0,\infty[$ immédiatement et $\mathbb{Y}$ est symétrique. On a :

$$\int_0^1 \mathbf{P}[\mathbb{X}_t+\mathbb{Y}_t>0]\frac{dt}{t} \geq \int_0^1 \mathbf{P}[\mathbb{X}_t>0]\mathbf{P}[\mathbb{Y}_t>0]\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathbf{P}[\mathbb{X}_t>0]\frac{dt}{t} = \infty$$

Le critère de Rogozin implique que $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ visite $]0,\infty[$ immédiatement...

Pour montrer ($v$) décomposons $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ en différence de deux subordinateurs : $\mathbb{X}=\mathbb{X}^+-\mathbb{X}^-$ et $\mathbb{Y}=\mathbb{Y}^+-\mathbb{Y}^-$. Par hypothèse $X$ rampe vers le haut ainsi, en zéro, $\mathbb{X}^+$ est négligeable devant $\mathbb{X}^-$ :

$$\underline{\lim}_{0+}\frac{\mathbb{X}^+ + \mathbb{Y}^+}{\mathbb{X}^- + \mathbb{Y}^-} = \underline{\lim}_{0+}\frac{\mathbb{Y}^+}{\mathbb{X}^- + \mathbb{Y}^-} \qquad \overline{\lim}_{0+}\frac{\mathbb{X}^+ + \mathbb{Y}^+}{\mathbb{X}^- + \mathbb{Y}^-} = \overline{\lim}_{0+}\frac{\mathbb{Y}^+}{\mathbb{X}^- + \mathbb{Y}^-}\ .$$

Ainsi $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ a le même comportement en zéro que $\mathbb{Y}-\mathbb{X}^-$. □

## 10.5 Les sauts de $S$ s'accumulent-ils ?

Dans cette section, $X$ est un processus de Lévy quelconque (il peut être à variation finie).

On vérifie facilement que $S$ est continu par morceaux ssi $\inf\{t\ :\ \Delta S_t>0\}>0$ p.s. Puisque $H=S\neg$ et $S^-=H_L^-$, $S$ est continu par morceaux ssi la mesure de Lévy de $H$ est de masse finie ($\overline{po}(0)<\infty$). De plus, si $X$ visite $]0,\infty[$ immédiatement et si $S$ est continu par morceaux alors trivialement $X$ rampe vers le haut.

**Théorème 10.5.1** • Si $X$ est à variation infinie sans composante brownienne alors :

$$S \text{ est continu par morceaux} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\overline{\pi}}_1}\, d\pi(x) < \infty$$

• Si $X$ a une composante brownienne alors :

$$S \text{ est continu par morceaux} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 x\, d\pi(x) < \infty$$

• Si $X$ est à variation finie et s'il a une dérive $\mathtt{d} > 0$ alors :

$$S \text{ est continu par morceaux} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 d\pi(x) < \infty$$

• Si $X$ est à variation finie et s'il a une dérive $\mathtt{d} \leq 0$ alors :

$$S \text{ est continu par morceaux} \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ ne visite pas } ]0,\infty[ \text{ immédiatement}$$

**Lemme.** Pour tout processus de Lévy :

$$\overline{po}(0) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \frac{x}{\hat{c} + \int_{-x}^0 \overline{ne}}\, d\pi(x) < \infty$$

*Démonstration.* Elle découle de l'équation amicale inverse : $\overline{po} = \overline{\pi} * d\overset{\curvearrowleft}{\mathcal{V}} = d\pi * \overset{\curvearrowleft}{\mathcal{V}}$ et du lemme de l'encadreur appliqué à $\overset{\curvearrowleft}{\mathcal{V}}$. □

*Démonstration du théorème* Nous pouvons clairement supposer dans toute cette démonstration que $d\pi$ est à support compact. Ainsi nous pouvons travailler avec $\overline{\overline{\pi}}$ plutôt qu'avec $\overline{\overline{\pi}}_1$.

*Montrons le premier point.* Supposons que $X$ est VI sans composante brownienne. Si $S$ est continu par morceaux alors $\overline{po}(0) < \infty$, $c > 0$ et $\hat{c} = 0$. Le théorème de comparaison 6.3.1 nous donne : en $0-$, $c\,\overline{ne} \sim \overline{\overline{\pi}}$. Ainsi, dans le lemme, nous pouvons remplacer $\overline{ne}$ par $\overline{\overline{\pi}}$ et donc :

$$\int_0^1 \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\overline{\pi}}}\, d\pi(x) < \infty$$

*Réciproquement.* Supposons que l'intégrale ci-dessus soit finie. On vérifie facilement qu'en $0+$, $\overline{\pi}$ est négligeable devant $\overline{\overline{\pi}}$ (cf. par exemple 6.3.1). Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\overline{\pi}}}\, \overline{\pi}(x)\, dx < \infty$$

Par le théorème Kaa, cela implique que $X$ rampe vers le haut. Ainsi $c\overline{ne} \sim \overline{\overline{\pi}}$ et donc, d'après le lemme $\overline{po}(0)$ est finie.

*Montrons le deuxième point.* Supposons que $X$ a une composante brownienne, donc $\hat{c} > 0$. Dans ce cas, le lemme se traduit par :

$$\overline{po}(0) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 x d\pi < \infty$$

*Montrons le troisième point.* Supposons que $X$ est VF et que $\mathtt{d} > 0$. Cela implique $c > 0$ donc $c\,\overline{ne} \sim \overline{\overline{\pi}}$ et donc d'après le lemme :

$$\overline{po}(0) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \frac{x}{\int_{-x}^0 \overline{\overline{\pi}}}\, d\pi(x) < \infty$$

Comme $X$ est VF, $\overline{\overline{\pi}}$ est bornée et donc $\int_{-x}^0 \overline{\overline{\pi}}$ peut être remplacée par $x$ dans l'intégrale ci-dessus.

*Montrons le quatrième point.* Supposons que $\mathtt{d} \leq 0$.
$\hookrightarrow$ Si $X$ ne visite pas $]0, \infty[$ immédiatemment alors $H$ est un PPC et $S$ est continu par morceaux.
$\hookrightarrow$ Si $X$ visite $]0, \infty[$ immédiatement. Cela nécessite $\mathtt{d} = 0$, donc $c = 0$. Et comme $H$ n'est pas un PPC nous avons $\overline{po}(0) = \infty$. □

**Corollaire 10.5.2** Si $\int_0^1 x d\pi = \infty$ alors $S$ n'est pas continu par morceaux.

### ↬ Applications

**Exemple 1 : Différence de deux processus stables.** Soient $X^+$ et $X^-$ des processus de Lévy stables indépendants, sans sauts négatifs, de paramètre respectif $\alpha^+$ et $\alpha^-$. Soient $X = X^+ - X^-$ et $S$ le processus des maxima relatif à $X$.

▷ $X$ rampe vers le haut si et seulement si $\alpha^+ < \alpha^-$.

▷ $S$ est continu par morceaux si et seulement si $\alpha^+ < \alpha^- - 1$.

$\hookrightarrow$ avec $\alpha^+ = 0,9$ et $\alpha^- = 1,1$, le processus $S$ n'est pas continu par morceaux, ce qui montre que la réciproque du corollaire 10.5.2 est fausse.
$\hookrightarrow$ avec $\alpha^+ = 0,1$ et $\alpha^- = 1,9$, le processus $S$ est continu par morceaux.

**Exemple 2 : Variation finie + Brownien.** Soient $Y$ un processus de Lévy à variation finie et $W$ un mouvement brownien indépendant. Soient $S$ et $I$ les processus des maxima et des minima relatifs à $X = Y + W$. $S$ et $I$ sont continus par morceaux.

En termes intuitifs : Seuls quelques sauts exeptionnels de $Y$ réussissent à "émerger" de la trajectoire de $X = Y + W$. Moralité : Le Brownien écrase le Lévy à variation finie.

**Proposition.** Si $X$ rampe vers le bas et si $S$ n'est pas continu par morceaux alors, pour tout $t$, la loi de $H_t$ est absolument continue.

*Démonstration.* Par hypothèse *dpo* est de masse infinie. Par ailleurs, la proposition 5.1.1 implique que *dpo* est absolument continue. Ces deux propriétés impliquent l'absolue continuité des lois de $H_t$ (voir le livre de K-I. Sato [30] p.177). □

# Partie III

# RELIEF DES TRAJECTOIRES

La plupart des hommes qui se trouvaient là, devant les tables à tapis vert, avaient longtemps travaillé dans la retraite, observé les phénomènes, édifié et vérifié des hypothèses audacieuses. [..] S'ils se comportaient comme des écoliers indociles, c'est parfois qu'ils étaient assurés de retrouver ce qui pouvait les intéresser dans les pages imprimées des bulletins et des livres, c'est aussi parce qu'ils réservaient leur attention et leurs soins pour les choses de leur domaine élu. La science du XX$^{e}$ siècle est trop grande et trop riche et chacun choisit sourcilleusement sa nourriture sur les pentes de cette montagne chaotique.

Georges Duhamel
Le voyage de Patrice Périot.

# Chapitre 11

# Étude d'un subordinateur bivarié et comportement de $\frac{S_t}{t}$

## 11.1 Introduction

Si $Y$ est un subordinateur, nous notons $d\mathcal{V}_Y$ sa mesure potentielle et $\mathcal{V}_Y(x)$ la fonction de répartion de cette mesure. Nous notons $d\pi_Y$ la mesure de Lévy de $Y$ et $\overline{\pi}_Y$ la queue de cette mesure.

J. Bertoin a montré dans [3] que si $Y$ et $Z$ sont deux subordinateurs indépendants et sans dérive, alors $\overline{\lim}_0 \frac{Y_t}{Z_t} = 0$ ssi $\int_0^1 \mathcal{V}_Z \, d\pi_Y < \infty$.

Nous voulons généraliser ce résultat au cas bivarié. Donnons nous $(Y, Z)$ un subordinateur bivarié sans dérive aucune. Nous montrons que si $\int_0^1 \mathcal{V}_Z \, d\pi_Y < \infty$ alors $\overline{\lim}_0 \frac{Y_t}{Z_t} = 0$ (nous avons perdu le caractère nécessaire du critère de J. Bertoin). Ce critère est tout de même pratique car, formulé avec les lois marginales de $(Y, Z)$, il impose un comportement au couple $(Y, Z)$.

Par ailleurs, grâce à la formule de compensation, nous allons vérifier que $\int_0^1 \mathcal{V}_Z \, d\pi_Y < \infty$ ssi $\overline{\lim}_0 \frac{\Delta Y_t}{Z_t^-} = 0$.

Le critère intégrale que nous utilisons peut s'exprimer de différente manière. Par le théorème de Fubini, nous avons : $\int_0^1 \mathcal{V}_Z d\pi_Y < \infty \;\Leftrightarrow\; \int_0^1 \overline{\pi}_Y d\mathcal{V}_Z < \infty$. Et le lemme de l'encadreur (6.1.1) nous donne : $\int_0^1 \mathcal{V}_Z d\pi_Y < \infty \;\Leftrightarrow\; \int_0^1 (x/\int_0^x \overline{\pi}_Z) d\pi_Y < \infty$.

À la fin du chapitre nous appliquons ces résultats avec $(Y, Z) = (\gamma, H)$ ce qui nous permet de montrer que, lorsque $X$ est à variation infinie, la limite inférieure de $S_t t$ quand $t$ tend vers $0+$, ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou $+\infty$.

De la même manière, nous généralisons le théorème de Kesten-Erickson ce qui nous permet de montrer que, lorsque $X$ est d'espérence infinie, et lorsqu'il oscille, la limite inférieure de $S_t t$ quand $t$ tend vers $+\infty$, ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou $+\infty$.

## 11.2 Étude de $\frac{\Delta Y_t}{Z_t^-}$ en $0+$

Le lemme suivant est relativement connu (cf. [3] ).

**Lemme 11.2.1** Soit $f$ une fonction décroissante positive et $Z$ un subordinateur.

$$\mathbf{E}\int_0^1 f(Z_t)dt = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 f(Z_t)dt = \infty \text{ p.s.}$$

**Théorème 11.2.2** Soit $(Y, Z)$ un subordinateur bivarié dont aucune des deux composantes n'est un processus de Poisson composé, nous avons :

$$\int_0^1 \mathcal{V}_Z d\pi_Y < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to 0+} \frac{\Delta Y_t}{Z_t^-} = 0$$
$$\int_0^1 \mathcal{V}_Z d\pi_Y = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\Delta Y_t}{Z_t^-} = +\infty$$

*Démonstration.* Nous pouvons considérer, sans perdre de généralité, que $(Y, Z)$ meurt. Ainsi $\mathcal{V}_Z$ est bornée et :

$$\int_0^1 \mathcal{V}_Z \, d\pi_Y < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^\infty \mathcal{V}_Z \, d\pi_Y < \infty$$

Supposons cette finitude. Soit $k < 1$. Par la formule de compensation, on a :

$$\mathbf{E}\sum_t 1_{\{\Delta Y_t \geq k Z_t^-\}} = \int_0^\infty \mathcal{V}_Z(y/k)d\pi_Y(y) \leq \frac{1}{k}\int_0^\infty \mathcal{V}_Z(y)d\pi_Y(y) < \infty$$

La dernière inégalité vient de la sous-aditivité de $\mathcal{V}_Z$. Ainsi les sauts $\Delta Y_t$ plus grands que $k\, Z_t^-$ ne s'accumulent pas en zéro. Comme ceci est vrai pour tout $k$ petit, on a bien :

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\Delta Y_t}{Z_t^-} = 0$$

*Réciproquement.* Supposons que $\int_0^1 \mathcal{V}_Z d\pi_Y = \infty$. Soit $k > 1$. La sous-additivité de $\mathcal{V}_Z$ implique que $\int_0^1 \overline{\pi}_Y(kx)d\mathcal{V}_Z(x) = \infty$. Le lemme 11.2.1 appliqué à $f(x) = \overline{\pi}(kx)$ donne :

$$\int_{0+} \overline{\pi}_Y(kZ_t)dt = \infty \text{ p.s}$$

Définissons le temps d'arrêt $T^k = \inf\{t \ : \ \Delta Y_t \geq kZ_t^-\}$. Nous convenons que $\Delta Y_\xi = \infty$ ; ainsi $T^k \leq \xi$. Nous allons montrer que $T^k = 0$ p.s. Par la formule de compensation on a :

$$1 \geq \mathbf{P}[T^k > 0] = \mathbf{E}\sum_t 1_{\{\Delta Y_t \geq kZ_t^-\}} 1_{]0,T^k]} = \mathbf{E}\int_0^{T^k} \overline{\pi}_Y(kZ_t)dt$$

Si $\mathbf{P}[T^k > 0]$ était strictement positive, alors la dernière intégrale serait infinie ce qui est contradictoire. Donc $T^k = 0$ p.s et, par définition de $T^k$, cela équivaut à $\overline{\lim}_0 \frac{\Delta Y_t}{Z_t^-} \geq k$. Ceci est vrai pour tout $k > 1$. □

## 11.3 Étude de $\frac{Y_t}{Z_t}$ en $0+$

Rappelons maintenant un théorème de J. Bertoin [3].

**Théorème 11.3.1 (J. Bertoin)** Soient $Y$ et $Z$ deux subordinateurs indépendants et sans dérive. Les trois points suivants sont équivalents :

$$* \quad \int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \overline{\pi}_Z} d\pi_Y(x) < \infty$$

$$* \quad \lim_{t\to 0+} \frac{Y_t}{Z_t} = 0$$

$$* \quad Y - Z \text{ ne visite pas } ]0,\infty[ \text{ immédiatement}$$

Nous allons généraliser une partie de ce théorème :

**Théorème 11.3.2** Soit $(Y, Z)$ un subordinateur bivarié sans dérive, nous avons :

$$\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \overline{\pi}_Z} d\pi_Y < \infty \ \Rightarrow \ \lim_{t\to 0+} \frac{Y_t}{Z_t} = 0$$

*Démonstration.* Notons $U = Y - Z$. Définissons les subordinateurs sans dérive $P, N, \widetilde{Y}$ et $\widetilde{Z}$ par :

$$\Delta P = (\Delta Y - \Delta Z) \vee 0 \qquad , \qquad P_t = \sum_{s\leq t} \Delta P_s$$

$$\Delta N = (\Delta Z - \Delta Y) \vee 0 \qquad , \qquad N_t = \sum_{s\leq t} \Delta N_s$$

$$\Delta\widetilde{Y} = \ \Delta Y \ 1_{\{\Delta Y < \Delta Z\}} \qquad , \qquad \widetilde{Y}_t = \sum_{s\leq t} \Delta\widetilde{Y}_s$$

$$\Delta\widetilde{Z} = \ \Delta Z \ 1_{\{\Delta Z < \Delta Y\}} \qquad , \qquad \widetilde{Z}_t = \sum_{s\leq t} \Delta\widetilde{Z}_s$$

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} U &= P - N \\ Y &= P + \widetilde{Y} + \widetilde{Z} \\ Z &= N + \widetilde{Y} + \widetilde{Z} \end{aligned}$$

La décomposition $U = P - N$ est la décomposition classique de $U$ en différence de deux subordinateurs indépendants. Nous allons montrer l'implication suivante :

$$\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \overline{\pi}_Z}\, d\pi_Y < \infty \;\Rightarrow\; \int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \overline{\pi}_N}\, d\pi_P < \infty \qquad (\triangle)$$

et dès lors la victoire sera acquise. En effet, le théorème 11.3.1 appliqué à $(P, N)$ attestera que $U = P - N = Y - Z$ ne visite pas $]0, \infty[$ immédiatement. Ceci sera encore vrai pour $U^k = kY - Z$, pour tout $k$. Et donc $Y$ sera négligeable devant $Z$ au voisinage de zéro.

Montrons la contraposée de $(\triangle)$ : Supposons que

$$\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \overline{\pi}_N} d\pi_P = \infty$$

Par (11.3.1) cela implique que $P - N$ visite $]0, \infty[$ immédiatement.

Par définition de $\Delta\widetilde{Y}$ et $\Delta\widetilde{Z}$, on a : $\Delta\widetilde{Y} + \Delta\widetilde{Z} \leq \Delta Y$, donc $\Delta Z \leq \Delta N + \Delta Y$ et donc $\overline{\pi}_Z(z) \leq \overline{\pi}_{N+Y}(z)$. Par ailleurs, $(N, Y)$ est un subordinateur bivarié ; avec des notations évidentes, on a :

$$\begin{aligned} \overline{\pi}_Z(z) \leq \overline{\pi}_{N+Y}(z) &= \iint_{\{x+y>z\}} d\pi_{(N,Y)}(x, y) \\ &\leq \iint_{\{x>\frac{z}{2}\}\cup\{y>\frac{z}{2}\}} d\pi_{(N,Y)}(x, y) \\ &\leq \overline{\pi}_N(\frac{z}{2}) + \overline{\pi}_Y(\frac{z}{2}) \end{aligned}$$

Ainsi $\int_0^x \overline{\pi}_Z \leq 2\int_0^{(x/2)} (\overline{\pi}_N + \overline{\pi}_Y) \leq 2\int_0^x (\overline{\pi}_N + \overline{\pi}_Y)$, puis :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \overline{\pi}_Z} d\pi_Y(x) &\geq \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \overline{\pi}_N + \int_0^x \overline{\pi}_Y} d\pi_Y(x) \\ &\geq \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \overline{\pi}_N + \int_0^x \overline{\pi}_Y} \big(d\pi_Y(x) + d\pi_Y(x)\big) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \mathbb{I} \end{aligned}$$

Soient $Y'$ , $Y''$ et $Y'''$ trois copies de $Y$ telles que les quatre processus $N$, $Y'$, $Y''$ et $Y'''$ soient indépendants. D'après le théorème de Bertoin, montrer que $\mathbb{I}$ est infinie revient à

montrer que le Lévy $Y' + Y'' - Y''' - N$ visite $]0, \infty[$ immédiatement. Pour se faire, utilisons le critère de Rogozin (2.1) :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathbf{P}[Y'_t + Y''_t - Y'''_t - N_t > 0]\frac{dt}{t} &\geq \int_0^1 \mathbf{P}[Y'_t - Y'''_t > 0]\mathbf{P}[Y''_t - N_t > 0]\frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathbf{P}[Y''_t - N_t > 0]\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

Par l'hypothèse de la contraposition, le Lévy $P - N$ visite $]0, \infty[$ immédiatement. Comme $P \leq Y$, a fortiori, $Y'' - N$ visite $]0, \infty[$ immédiatement. Donc la dernière intégrale est infinie. □

## 11.4 Comportement de $\frac{\Delta Y_t}{Z_t^-}$ en $+\infty$

$(Y, Z)$ désigne toujours un subordinateur bivarié. Nous nous intéressons aux comportements de $\frac{\Delta Y_t}{Z_t^-}$ et de $\frac{Y_t}{Z_t}$ quand $t$ tend vers l'infini. Les limites de ces rapports sont liées à la finitude de l'intégrale : $\int_1^\infty \mathcal{V}_Z d\pi_Y$.

Le théorème suivant est le pendant du théorème 11.2.2

**Théorème 11.4.1** Soit $(Y, Z)$ un subordinateur bivarié ne mourant pas, on a :

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \mathcal{V}_Z d\pi_Y < \infty \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\Delta Y_t}{Z_t^-} = 0 \\ \int_1^\infty \mathcal{V}_Z d\pi_Y = \infty \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\Delta Y_t}{Z_t^-} = \infty\end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous pouvons condidérer, sans perdre de généralité, que la mesure de Lévy de $(Y, Z)$ est finie. Ainsi :

$$\int_1^\infty \mathcal{V}_Z d\pi_Y < \infty \;\Leftrightarrow\; \int_0^\infty \mathcal{V}_Z d\pi_Y < \infty$$

Supposons cette finitude. De la formule de compensation on déduit :

$$\mathbf{E}\sum_t 1_{\{\Delta Y_t \geq Z_t^-\}} = \int_0^\infty \mathcal{V}_Z d\pi_Y < \infty$$

La sous-additivité de $\mathcal{V}$ implique que ceci est encore vrai si l'on remplace $\Delta Y$ par $k\Delta Y$ avec $k > 1$. On en déduit facilement que $\lim_{t\to\infty} \frac{\Delta Y_t}{Z_t^-} = 0$

*Réciproquement.* Nous montrons la réciproque en utilisant une technique très classique : Soit $\#$ le cardinal de l'ensemble des $t$ tels que $\Delta Y_t > kZ_t^-$. Nous devons montrer que si $\#$ est

fini p.s alors son espérance l'est aussi. Pour cela, nous montrons que # est stochastiquement plus petit qu'une loi géométrique.

Supposons que # soit fini p.s. La propriété de Lévy implique alors que $\mathbf{P}[\# = 0] > 0$. Définissons les temps d'arrêt :

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_n &= \inf\{t > T_{n-1} \quad \Delta Y_t > Z_t^-\} \end{aligned}$$

On a $\{T_n < \infty\} = \{\# \geq n\}$. Calculons :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[\# \geq n+1 \ / \ \mathcal{F}_{T_n}] &= \mathbf{P}[\exists t \ \ \Delta Y_t \circ \tilde{\theta}_{T_n} \geq (Z_t^- \circ \tilde{\theta}_{T_n} + Z_{T_n}) \ , \ T_n < \infty \ / \ \mathcal{F}_{T_n}] \\ &= \mathbf{P}[\exists t \ \ \Delta Y_t \circ \tilde{\theta}_{T_n} \geq (Z_t^- \circ \tilde{\theta}_{T_n} + z) \ , \ T_n < \infty \ / \ \mathcal{F}_{T_n}]_{z=Z_{T_n}} \\ &= 1_{\{T_n<\infty\}} \ \mathbf{P}[\exists t \ \ \Delta Y_t \geq (Z_t^- + z)]_{z=Z_{T_n}} \\ &\leq 1_{\{T_n<\infty\}} \ \mathbf{P}[\exists t \ \ \Delta Y_t \geq (Z_t^-)] \\ &= 1_{\{T_n<\infty\}} \ \mathbf{P}[\# \geq 1] \end{aligned}$$

En passant à l'espérance on obtient :

$$\mathbf{P}[\# \geq n+1 \ / \ T_n < \infty] = \mathbf{P}[\# \geq n+1 \ / \ \# \geq n] \leq \mathbf{P}[\# \geq 1] < 1$$

Et l'on déduit :

$$\forall k \qquad \mathbf{P}[\# \geq 1+k] \leq \mathbf{P}[\# \geq 1]^k$$

Ce qui montre que l'espérance de # est finie □

## 11.5 Comportement de $\frac{Y_t}{Z_t}$ en $+\infty$

Citons maintenant le théorème de Kesten-Erickson appliqué aux subordinateurs :

**Théorème 11.5.1 (Kesten-Erickson)** Soient $Y$ et $Z$ deux subordinateurs indépendants tels que $\mathbf{E}[Y_1]\mathbf{E}[Z_1] = \infty$. Les trois points suivants sont équivalents :

* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\int_0^x \overline{\pi}_Z} d\pi_Y(x) < \infty$

* $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{Y_t}{Z_t} = 0$

* $\displaystyle\lim_{t\to\infty} Z_t - Y_t = +\infty$

Nous étendons une partie de ce théorème au cas bivarié :

**Théorème 11.5.2** Si $(Y, Z)$ est un subordinateur bivarié et si $\mathbf{E}[Y_1]\mathbf{E}[Z_1] = \infty$, alors on a :

$$\int_0^\infty \frac{x}{\int_0^x \overline{\pi}_Z} d\pi_Y(x) < \infty \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty} \frac{Y_t}{Z_t} = 0$$

*Démonstration.* Elle est strictement parallèle à la démonstration de 11.3.2, aussi nous n'en donnons que les grandes lignes.

Pour commencer, nous définissons $(P, N, \widetilde{Y}, \widetilde{Z})$ qui vérifient :

$$\begin{array}{rcl} Y - Z & = & P - N \\ P & \_|| & N \\ Y & = & P + \widetilde{Y} + \widetilde{Z} \\ Z & = & N + \widetilde{Y} + \widetilde{Z} \end{array}$$

Grâce au théorème de Kesten-Ercikson (11.5.1), on se ramène à montrer l'implication suivante :

$$\int_1^\infty \frac{x}{\int_0^x \overline{\pi}_Z}\, d\pi_Y < \infty \;\Rightarrow\; \int_1^\infty \frac{x}{\int_0^x \overline{\pi}_N}\, d\pi_P < \infty$$

Montrons la contraposée : Supposons que

$$\int_1^\infty \frac{x}{\int_0^x \overline{\pi}_N}\, d\pi_P < \infty$$

Ce qui est équivalent au fait que $P - N$ ne converge pas vers $-\infty$.

On vérifie sans mal l'inégalité suivante :

$$\overline{\pi}_Z(z) \le \overline{\pi}_{N+Y}(z) \;\le\; \overline{\pi}_N(\frac{z}{2}) + \overline{\pi}_Y(\frac{z}{2})$$

Avec un changement de variable, on déduit :

$$\int_1^\infty \frac{x}{\int_0^x \overline{\pi}_Z} d\pi_Y(x) \;\ge\; \frac{1}{4}\int_1^\infty \frac{x}{\int_0^x \overline{\pi}_N + \int_0^x \overline{\pi}_Y}\big(d\pi_Y(x) + d\pi_Y(x)\big) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \mathbb{I}$$

pour montrer que $\mathbb{I}$ est infinie, nous utilisons le critère de Rogozin sur la convergence (2.1). □

## 11.6 Comportement de $\frac{S_t}{t}$ en $0+$

Citons un grand classique :

**Théorème 11.6.1 (B.A. Rogozin)** Si $X$ est à variation infinie alors :

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{X_t}{t} = +\infty$$

Ceci implique que $\overline{\lim}_{0+} \frac{S_t}{t} = +\infty$. Mais la limite inférieure n'est pas déterminée. Rappelons que $\mathcal{V}$ désigne la fonction de répartition de $H$ et $d\tau$ la mesure de Lévy de $\urcorner$.

**Théorème 11.6.2** Si $X$ est à variation infinie alors :

$$\int_0^1 \mathcal{V}\, d\tau < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to 0} \frac{S_t}{t} = +\infty$$
$$\int_0^1 \mathcal{V}\, d\tau = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to 0} \frac{S_t}{t} = 0$$

Pour toute fonction $F$, càdlàg sur $]0,\infty[$, on a $\underline{\lim}_{t\to 0+} F_t = \underline{\lim}_{t\to 0+} F_t^-$. On peut donc travailler avec $(S_t^-/t)$ au lieu de $(S_t/t)$.

**Lemme 11.6.3**

$$\underline{\lim_{t\to 0}} \frac{S_t^-}{t} = \underline{\lim_{t\to 0}} \frac{H_t^-}{\urcorner_t}$$

*Démonstration.* Soit $D_t = \inf\{s > t \ : \ S_s = X_s\}$. On a : $D_t = \urcorner_{L_t}$. Les plus petites valeurs du rapport $(S_t^-/t)$ sont nécessairement prises dans l'ensemble $\{D_u \ : \ u \geq 0\}$ car, si $t$ n'est pas dans cet ensemble, alors $S_t^- = S_{D_t}^-$ et donc $(S_t^-/t) > (S_{D_t}^-/D_t)$. Ainsi :

$$\underline{\lim_{t\to 0}} \frac{S_t^-}{t} = \underline{\lim_{u\to 0}} \frac{S_{D_u}^-}{D_u}$$

Par ailleurs

$$\underline{\lim_{u\to 0}} \frac{S_{D_u}^-}{D_u} = \underline{\lim_{u\to 0}} \frac{H_{L_u}^-}{\urcorner_{L_u}} = \underline{\lim_{t\to 0}} \frac{H_t^-}{\urcorner_t}$$

la dernière égalité vient du fait que $L$ est continu. □

*Démonstration du théorème 11.6.2* Puisque $X$ est VI, le subordinateur $\urcorner$ n'a pas de dérive. D'après 11.6.3 nous devons étudier la limite inférieure de $\frac{H_t^-}{\urcorner_t}$. Supposons que $\int_0^1 \mathcal{V} d\tau < \infty$.

$\rightarrow$ Si $X$ rampe vers le haut alors $H$ a une dérive $c > 0$ (tandis que $\urcorner$ n'en a pas), donc :

$$\underline{\lim}_{t\to 0} \frac{H_t^-}{\urcorner_t} = \underline{\lim}_{t\to 0} \frac{H_t^-}{t}\ \frac{t}{\urcorner_t} = \frac{c}{0} = \infty$$

$\rightarrow$ Si $X$ ne rampe pas vers le haut, alors, en appliquant les théorèmes 11.3.2 et 11.2.2, au couple $(Y, Z) = (\urcorner, H)$ on a :

$$\overline{\lim}_{t\to 0} \frac{\urcorner_t}{H_t^-} = \overline{\lim}_{t\to 0} \left( \frac{\urcorner_t^-}{H_t^-} + \frac{\Delta\urcorner_t}{H_t^-} \right) = 0$$

*Réciproquement.* Supposons que $\int_0^1 \mathcal{V}(x) d\tau(x) = \infty$. $X$ ne peut pas ramper vers le haut (sinon $\mathcal{V} \sim cst\, x$ et l'intégrale convergerait). On a :

$$\overline{\lim}_{t\to 0} \frac{\urcorner_t}{H_t^-} \geq \overline{\lim}_{t\to 0} \frac{\Delta\urcorner_t}{H_t^-}$$

et le théorème 11.2.2 montre que le terme de droite est infini.

**Corollaire 11.6.4** Si $X$ et à variation infinie et s'il rampe vers le haut alors $\lim_{t\to 0} \frac{S_t}{t} = +\infty$.

*Démonstration.* Si $X$ rampe vers le haut alors $\mathcal{V} \sim cst\, x$ et donc forcément $\int_0^1 \mathcal{V}\, d\tau < \infty$. □

## 11.7 Comportement de $\frac{S_t}{t}$ en $+\infty$

**Théorème 11.7.1** Si $X$ oscille et si $\mathbf{E}[|X_1|] = \infty$ alors :

$$\int_1^\infty \mathcal{V} d\tau < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to 0} \frac{S_t}{t} = +\infty$$
$$\int_1^\infty \mathcal{V} d\tau = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\lim}_{t\to 0} \frac{S_t}{t} = 0$$

*Démonstration.* Nous devons étudier la limite inférieure de $(S_t/t)$ qui est aussi celle de $(S_t^-/t)$, et tout comme dans (11.6.3), nous établissons sans mal que :

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{S_t^-}{t} = \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{H_t^-}{\urcorner_t}$$

puisque $X$ oscille, $\mathbf{E}[\urcorner_1] = \infty$, ce qui permet d'appliquer le théorème (11.5.2).
Supposons que $\int_1^\infty \mathcal{V} d\tau < \infty$. En appliquant les théorèmes (11.5.2) et (11.4.1), au couple $(Y, Z) = (\urcorner, H)$ on a :

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\urcorner_t}{H_t^-} = \overline{\lim}_{t\to\infty} \left( \frac{\urcorner_t^-}{H_t^-} + \frac{\Delta\urcorner_t}{H_t^-} \right) = 0$$

*Réciproquement.* Supposons que $\int_1^\infty \mathcal{V}(x)d\tau(x) = \infty$. D'après le théorème 11.4.1 on a :

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\urcorner_t}{H_t^-} \geq \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\Delta\urcorner_t}{H_t^-} = +\infty$$

□

La surface du pain est merveilleuse d'abord à cause de cette impression quasi panoramique qu'elle donne : comme si l'on avait à sa disposition sous la main les Alpes, le Taurus ou la Cordillère des Andes. Ainsi donc une masse amorphe en train d'éructer fut glissée pour nous dans le four stellaire, où durcissant elle s'est façonnée en vallées, crêtes, ondulations, crevasses...

Francis Ponge
Le parti pris des choses, 1942

# Chapitre 12

# Processus Abrupts, exemples et caractérisation

Nous étudions une classe particulière de processus de Lévy à variation infinie : Les processus abrupts, caractérisés par des sommets infiniment pointus. Tous les processus rampants sont abrupts ainsi que les processus stables d'indice $\alpha > 1$.

Dans tout ce chapitre, $X$ est à variation infinie. Toutes les propriétés que nous allons énoncer sont valables presque-sûrement. Cela sera sous-entendu presque-toujours.

## 12.1 Definition, caractérisation et exemples

Les propriétés énoncés dans cette section seront démontrées dans la suivante.

Soit $Max$ l'ensemble des maxima locaux de $X$ :

$$Max = \{t \ : \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall s \in ]t-\varepsilon, t+\varepsilon[ \quad X_s \leq X_t \ \text{ ou } \ X_s \leq X_{t-}\}$$

Comme $X$ est à variation infinie, il visite $]0, \infty[$ et $]-\infty, 0[$ immédiatemment et par conséquent les trajectoires sont continues en tout point de $Max$.

Soient $\overline{G}, \underline{G}, \overline{D}, \underline{D}$ les quatre dérivées de Dini :

$$\underline{G}X_t = \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0-} \frac{X_{t+\varepsilon} - X_t^-}{\varepsilon} \qquad \underline{D}X_t = \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0+} \frac{X_{t+\varepsilon} - X_t}{\varepsilon}$$

$$\overline{G}X_t = \overline{\lim}_{\varepsilon \to 0-} \frac{X_{t+\varepsilon} - X_t^-}{\varepsilon} \qquad \overline{D}X_t = \overline{\lim}_{\varepsilon \to 0+} \frac{X_{t+\varepsilon} - X_t}{\varepsilon}$$

Lorsque $\underline{G}X_t = \overline{G}X_t$, nous notons simplement $GX_t$ (idem pour $DX_t$).

**Définition 12.1.1** Un processus de Lévy $X$ à variation infinie est dit abrupt si :

$$\forall t \in Max \qquad GX_t = +\infty \quad \text{et} \quad DX_t = -\infty$$

**Exemple.** On sait depuis longtemps que le mouvement brownien vérifie la propriété ci-dessus, voir par exemple [16].

**Remarque 12.1.2** Par un argument de retournement classique, nous voyons que $X$ est abrupt ssi $-X$ l'est. Ainsi le caractère abrupt se lit sur les maxima mais aussi sur les minima.

**Théorème 12.1.3 (alpin)** $X$ est abrupt si et seulement si

$$\forall a < b \qquad \int_0^1 \mathbf{P}\Big[\frac{X_t}{t} \in [a,b]\Big]\frac{dt}{t} < \infty$$

Rappelons que $S_t = \sup\{X_s : s \leq t\}$ et $I_t = \inf\{X_s : s \leq t\}$. Dans le chapitre précédent, nous avons montré que $\lim_{t\to 0+} \frac{S_t}{t} = +\infty$ ssi $\int_0^1 \mathcal{V} d\tau < \infty$ où $\mathcal{V}$ est le potentiel de $H$ et $d\tau$ la mesure de Lévy de $\urcorner$. Le théorème qui suit nous permet donc d'obtenir des exemples de processus abrupts.

**Théorème 12.1.4** Si $\lim_{0+} \frac{S_t}{t} = +\infty$ ou si $\lim_{0+} \frac{I_t}{t} = -\infty$ alors $X$ est abrupt.

**Exemple 12.1.5** Si $X$ rampe vers le haut ou vers le bas, alors il est abrupt.

Mais tous les processus abrupts ne rampent pas, comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 12.1.6** Soit $X$ un processus stable d'indice $\alpha \in [1,2]$. $X$ est abrupt pour $\alpha \in ]1,2]$ mais ne l'est pas pour $\alpha = 1$.

Voici les simulations de deux processus stables symétriques d'indice $\alpha = 1$ et $\alpha = 1,1$ (simulations effectuées en collaboration avec Magali Kelle ; en annexe, vous pouvez voir d'autres simulations de processus stables). La différence entre les deux types de relief est assez visible.

$\alpha = 1$ $\alpha = 1,1$

## 12.2 Démonstrations

Nous supposons pour simplifier que $X$ meurt. Par convention, le point cimetière n'est dans aucun borélien, aussi on a :

$$\mathbf{P}\big[X_t \in [a,b]\big] = \mathbf{P}\big[X_t \in [a,b]\ ,\ t < \zeta\big] \leq \mathbf{P}[t < \zeta] = \exp(-\psi_o\, t)$$

Ainsi le théorème alpin peut s'énocer : $X$ est abrupt ssi

$$\forall a < b \qquad \int_0^\infty \mathbf{P}\Big[\frac{X_t}{t} \in [a,b]\Big]\frac{dt}{t} < \infty$$

Car l'intégrale ci-dessus ne peut divergre qu'en zéro.

### ↬ Casting

Les instants du maximum global et du minimum global sont joués par :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sup\{t\ :\ \forall s < \zeta \quad X_s \leq X_t\} \\ \rho &= \sup\{t\ :\ \forall s < \zeta \quad X_s \geq X_t\} \end{aligned}$$

Nous nommons $X^\uparrow = (X_{\rho+t} - X_\rho\ ,\ t \geq 0)$ et $X^\downarrow = (X_{\sigma+t} - X_\sigma\ ,\ t \geq 0)$.

$L$ est le temps local de l'ensemble des records $M$, que l'on peut aussi noté $\{S = X\}$. Nous normalisons ce temps local par $\mathbf{E}L_\zeta = 1$.

Dans le rôle du subordinateur d'échelle bivarié, l'indétronable $(\daleth, H)$. Rappelons que $\ell$ est l'exposant de $\daleth$.

La vedette de cette d'emonstration est un réel positif $r$, qui jouera le rôle d'une dérive. En effet, nous posons $X^r_t = X_t + rt$. Tous les objets indicés d'un $r$ seront relatifs á $X^r$. Par exemple $S^r_t = \sup\{X^r_s \ : \ s \leq t\}$. (Flash back :) Nous avons déjà rencontré (lemme 3.2.3) l'inclusion suivante :

$$\{S = X\} \subset \{S^r = X^r\} \ ,$$

qui implique : $\sigma \leq \sigma^r$.

### ↬ Généralités sur les ensembles régénératifs imbriqués

Nous allons exploiter un résultat de J.Bertoin [4]. Commençons par un très bref rappel.

**Notation.** Si $A$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$ et $T$ un temps positif, on note

$$\theta_T A = \{(s - T)\vee 0 \ : \ s \in A\}$$

**Définition.** Soit $A$ un ensemble aléatoire et $(\mathcal{F}_t)$ une filtration telle que $1_A$ lui soit adapté. On dit que $A$ est régénératif dans $(\mathcal{F}_t)$ si pour tout temps d'arrêt $T$ isolé à gauche dans $A$, $\theta_T A$ est indépendant de $\mathcal{F}_T$ et a même loi que $A$.

**Définition.** Deux ensembles régénératifs $A$ et $B$ dans une même filtration $(\mathcal{F}_t)$ sont dits "imbriqués" si $A \subset B$ et si pour tout temps d'arrêt $T$ isolé à gauche dans $A$, la loi du couple $(\theta_T A, \theta_T B)$, est indépendante du passé avant $T$ et a même loi que $(A, B)$.

Les ensembles régénératifs $A$ et $B$ peuvent être caractérisés par leur exposant de Laplace $\psi_A$ et $\psi_B$.

**Théorème 12.2.1 (J. Bertoin)** Si $A$ est imbriqué dans $B$ alors le rapport $(\psi_A/\psi_B)$ est la transformée de Laplace d'une mesure portée $\mu$ par $\mathbb{R}^+$

On peut montrer sans trop de mal que $\{S = X\}$ est imbriqué dans $\{S^r = X^r\}$ (mais nous n'aurons pas besoin de le vérifier explicitement). Les exposants de Laplace $\ell$ et $\ell^r$ caractérisent $\daleth$ et $\daleth^r$ mais ils caractérisent aussi $\{S = X\}$ et $\{S^r = X^r\}$. Ainsi :

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\ell(\lambda)}{\ell^r(\lambda)} = \mu\{0\} \geq 0$$

Nous verrons que la présence de cet atome est liée au caractère abrupt.

### ↬ Notre cas particulier

Dans cette sous-section nous travaillons sur l'espace canonique. $\Omega$ désigne l'ensemble des trajectoires càdlàg à durée de vie, $X$ est le processus des projections canoniques et $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par $X$. On se donne une probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui fait de $X$ un processus de Lévy tué à variation infinie. On définit $\theta_t$ l'opérateur de translation par $\theta_t\omega_s = \omega_{t+s}$.

On note $(\mathcal{F}_t)$ la filtration canonique rendue continue à droite et complète, et $\mathcal{O}$ la tribu optionnelle associée à cette filtration.
Si $T < \zeta$ est un temps aléatoire, nous notons $\mathcal{F}_T = \{Z_T : Z \in \mathcal{O}\}$ la tribu des évènements antérieurs à $T$.
Si $Y$ est un processus nous notons $\Pi^{\mathcal{O}}[Y]$ la projection optionnelle de $Y$.
Si $dm$ est une mesure aléatoire nous notons $dm^{\mathcal{O}}$ la projection duale optionnelle de $dm$.

**Lemme 12.2.2** Soit $T < \zeta$ un temps aléatoire, $\delta_T$ la mesure de Dirac en $T$ et $z$ une variable aléatoire. On a :

$$\big(z\delta_T\big)^{\mathcal{O}} = \big(\mathbf{E}[z \ / \ \mathcal{F}_T]\delta_T\big)^{\mathcal{O}}$$

*Démonstration.* Soit $Z$ un processus quelconque, calculons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\int_0^\zeta Z\,(z\delta_T)^{\mathcal{O}} &= \mathbf{E}\int_0^\zeta \Pi^{\mathcal{O}}[Z]\ z\delta_T \\
&= \mathbf{E}\Big[\Pi^{\mathcal{O}}[Z]_T\ z\Big] = \mathbf{E}\Big[\Pi^{\mathcal{O}}[Z]_T\ \mathbf{E}[z \ / \ \mathcal{F}_T]\Big] \\
&= \mathbf{E}\int_0^\zeta Z\ \big(\mathbf{E}[z \ / \ \mathcal{F}_T]\delta_T\big)^{\mathcal{O}} \qquad \square
\end{aligned}$$

Une manière simple et efficace pour définir le temps local est :

$$\begin{aligned}
dL &= (\delta_\sigma)^{\mathcal{O}} \\
dL^r &= (\delta_{\sigma^r})^{\mathcal{O}}
\end{aligned}$$

$dL$ et $dL^r$ vérifient la normalisation $\mathbf{E}L_\zeta = 1$ car :

$$\mathbf{E}[L_\zeta] = \mathbf{P}[\sigma < \zeta] = 1 = \mathbf{P}[\sigma^r < \zeta] = \mathbf{E}[L^r_\zeta]$$

**Lemme 12.2.3** l'évènement $\{\sigma = \sigma^r\}$ est indépendant de $\mathcal{F}_\sigma$.

*Démonstration.* Nous savons que $X^\downarrow$ est indépendant de $\mathcal{F}_\sigma$. Par ailleurs :

$$\{\sigma = \sigma^r\} = \{\forall t \ \in ]0, \zeta - \sigma[ \cap \mathbb{Q} \quad X^\downarrow_t \leq -rt\} \qquad \square$$

**Proposition 12.2.4**

$$\mathbb{1}_{\{S=X\}}\, dL^r = \mathbf{P}[\sigma = \sigma^r] dL$$

*Démonstration.* Calculons :

$$\begin{aligned}
dL^r \mathbb{1}_{\{S=X\}} &= (\delta_{\sigma^r})^{\mathcal{O}}\ \mathbb{1}_{\{S=X\}} \\
&= (\delta_{\sigma^r}\ \mathbb{1}_{\{S=X\}})^{\mathcal{O}} && \text{car } \{S=X\} \in \mathcal{O} \\
&= (1_{\{\sigma=\sigma^r\}}\ \delta_{\sigma^r})^{\mathcal{O}} && \text{car } \{S=X\} \subset \{S^r = X^r\} \\
&= (\mathbf{P}[\sigma = \sigma^r \ / \ \mathcal{F}_\sigma]\ \delta_\sigma)^{\mathcal{O}} && \text{d'après 12.2.2} \\
&= \mathbf{P}[\sigma = \sigma^r]\ (\delta_\sigma)^{\mathcal{O}} && \text{d'après 12.2.3} \quad \square
\end{aligned}$$

**Proposition 12.2.5** Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathbf{P}[\sigma = \sigma^r] > 0$
- $dL \ll dL^r$
- $\lim_{\lambda\to\infty} \dfrac{\ell(\lambda)}{\ell^r(\lambda)} > 0$
- $\displaystyle\int_0^\infty \mathbf{P}\big[X_t \in [-rt, 0]\big] \frac{dt}{t} < \infty$

*Démonstration.* L'équivalence entre les deux premiers points est une conséquence de 12.2.4. Le reste est une conséquence du résultat de J.Bertoin sur les ensembles génératifs imbriqués. Nous recopions sa démonstration avec les notations de notre cas particulier :
On note $g_t = \sup\{s < t \ : \ s \in \{S = X\}\ \}$, $D_t = \inf\{s \geq t \ : \ s \in \{S = X\}\ \}$ et $\eta$ la mesure d'excursion de $S - X$ hors de zéro. Calculons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell^r(\lambda)} &= \mathbf{E}\int_0^\zeta e^{-\lambda t} dL_t^r \\
&= \mathbf{E}\int_{\{S=X\}} e^{-\lambda t} dL_t^r + \mathbf{E}\Big[\sum_s \int_{g_s}^{D_s} e^{-\lambda t} dL_t^r\Big] \\
&= \mathbf{P}[\sigma = \sigma^r]\mathbf{E}\int_0^\zeta e^{-\lambda t} dL_t \ + \ \mathbf{E}\Big[\sum_s e^{-\lambda g_t}\Big(\int_0^{D_0} e^{-\lambda t} dL_t^r\Big) \circ \theta_{g_t}\Big] \qquad \text{(prop. 12.2.4)} \\
&= \Big(\mathbf{E}\int_0^\zeta e^{-\lambda t} dL_t\Big)\Big(\mathbf{P}[\sigma = \sigma^r] + \eta\Big[\int_0^{D_0} e^{-\lambda t} dL_t^r\Big]\Big) \\
&= \frac{1}{\ell(\lambda)}\Big(\mathbf{P}[\sigma = \sigma^r] + \eta\Big[\int_0^{D_0} e^{-\lambda t} dL_t^r\Big]\Big)
\end{aligned}$$

Ce calcul montre que le rapport $(\ell/\ell^r)$ est la transformée de Laplace de la mesure $\mu$ définie par :

$$\int_0^\infty f(t)d\mu(t) = \mathbf{P}[\sigma = \sigma^r]f(0) + \eta\Big[\int_0^{D_0} f(t)dL_t^r\Big]$$

On en déduit que $\mu$ a un atome en zéro ssi $\mathbf{P}[\sigma = \sigma^r] > 0$. Il y a donc équivalence entre les trois premiers points de la proposition. Pour inclure le quatrième dans cette équivalence, il suffit de calculer explicitement le rapport $(\ell/\ell^r)$ à l'aide de la formule 0.5 :

$$\ell(\lambda) = cst\ \exp\int_0^\infty (1-e^{-\lambda t})\mathbf{P}[X_t \geq 0]\frac{dt}{t}$$

On obtient :

$$\frac{\ell(\lambda)}{\ell^r(\lambda)} = \exp -\int_0^\infty (1-e^{-\lambda t})\mathbf{P}\big[X_t \in [-rt, 0]\ \big]\frac{dt}{t}$$

Par convergence monotone on voit que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\ell(\lambda)}{\ell^r(\lambda)} > 0 \ \Leftrightarrow\ \int_0^\infty \mathbf{P}\big[X_t \in [-rt, 0]\ \big]\frac{dt}{t} < \infty$$

□

### ↬ Assemblage

**Lemme 12.2.6** Soit $r > 0$, on a :

$$\mathbf{P}[\sigma = \sigma^r] > 0 \ \Leftrightarrow\ \overline{\lim_{t\to 0}}\frac{X_t^\downarrow}{t} \leq -r \text{ p.s}$$

*Démonstration.* Nous avons l'égalité d'ensemble suivante :

$$\{\sigma = \sigma^r\} = \{\forall t \in\ ]0, \zeta - \sigma[\ \cap\ \mathbb{Q} \quad X_t^\downarrow \leq -rt\}$$

Si $\mathbf{P}[\sigma = \sigma^r] > 0$ alors $\mathbf{P}[\overline{\lim}_0(X_t^\downarrow/t) \leq -r] > 0$. Mais la loi du $0-1$ de Kolmogorov, valable pour $X^\downarrow$ (cf. [20], coro 1.2.3), indique que cette dernière probabilité est égale à 1.

*Réciproquement.* Supposons que $\overline{\lim}\frac{X_t^\downarrow}{t} \leq -r$ p.s. Notons ${}^\circ X$ le processus $X$ réssuscité. Par un argument de localisation, en tout maximum local $t$ de ${}^\circ X$, nous avons $D\,{}^\circ X_t \leq -r$. Par commodité nous notons $q = (\psi_o/2)$. Soit ${}^qX$ le processus de Lévy ${}^\circ X$ tué en un temps exponentiel indépendant de paramètre $q$. Notons $\sigma_q$ son maximum global, définissons :

$$N = \inf\{t\ :\ {}^qX_{\sigma_q+t} - {}^qX_{\sigma_q} \geq -rt\}$$

On a $D({}^qX_{\sigma_q}) \leq -r$ donc $N$ est p.s. non nul. Prenons $\ddot{q}$ un temps exponentiel indépendant de paramètre $q$. Si nous tuons ${}^qX$ en $\ddot{q}$, nous obtenons un processus de Lévy ${}^{2q}X$ de même

loi que $X$. Par ailleurs : $\mathbf{P}\big[\lambda \in ]\sigma_q, \sigma_q + N[\big] > 0$.
Si $\lambda$ appartient à $]\sigma_q, \sigma_q + N[$ alors le maximum de ${}^{2q}X_t$ coïncide avec celui de ${}^{2q}X_t + rt$. Ainsi $\mathbf{P}[\sigma = \sigma^r] \geq \mathbf{P}\big[\lambda \in ]\sigma_q, \sigma_q + N[\big] > 0$. □

En groupant le lemme précédent et la proposition 12.2.5, nous obtenons :

**Proposition 12.2.7** Les deux points suivants sont équivalents :

$$\begin{aligned} &* \quad \overline{\lim_{t\to 0}} \frac{X_t^{\downarrow}}{t} \leq -r \\ &* \quad \int_0^{\infty} \mathbf{P}\Big[\frac{X_t}{t} \in [-r, 0]\Big] \frac{dt}{t} < \infty \end{aligned}$$

Donnons la proposition symétrique :

**Proposition 12.2.8** Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} &* \quad \underline{\lim_{t\to 0}} \frac{X_t^{\uparrow}}{t} \geq r \\ &* \quad \int_0^{\infty} \mathbf{P}\big[\frac{X_t}{t} \in [0, r]\big] \frac{dt}{t} < \infty \end{aligned}$$

*Démonstration du théorème alpin (12.1.3) :* Par un argument de localisation, $X$ est abrupt ssi pour tout $r > 0$, $\overline{\lim}_{t\to 0} \frac{X_t^{\downarrow}}{t} \leq -r$ et $\underline{\lim}_{t\to 0} \frac{X_t^{\uparrow}}{t} \geq r$, ce qui, selon les deux dernières propositions est équivalent à :

$$\forall r > 0 \qquad \int_0^{\infty} \mathbf{P}[\frac{X_t}{t} \in [-r, r]] \frac{dt}{t} < \infty \qquad \square$$

### ↬ Lien entre le caractère abrupt et la limite de $\frac{S_t}{t}$ en $0+$

Notons

$$d\mathcal{S}(x) = \int_0^1 \mathbf{P}[\frac{X_t}{t} \in dx] \frac{dt}{t}$$

Par le théorème alpin, $X$ est abrupt ssi $d\mathcal{S}$ est $\sigma$-finie.

**Lemme 12.2.9** $d\mathcal{S}1_{\mathbb{R}^+}$ est $\sigma$-finie ssi $\lim_{0+} \frac{H_t}{\mathfrak{q}_t} = +\infty$.

*Démonstration.* J. Bertoin et R.A. Doney on mopntré dans [6] l'égalité suivante entre mesures portée par $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ :

$$\int_0^\infty \mathbf{P}[\urcorner_u \in dt \ , \ H_u \in dx] \frac{du}{u} \quad = \quad \mathbf{P}[X_t^+ \in dx] \ \frac{dt}{t}$$

En intégrant sur l'ensemble : $\{(t,x) \ : \ t - rx \leq 0\}$, nous obtenons :

$$\int_0^\infty \mathbf{P}[H_u - r\urcorner_u \leq 0] \frac{du}{u} \quad = \quad \int_0^\infty \mathbf{P}\big[X_t \in [0, rt]\big] \frac{dt}{t}$$

Par le critère de Rogozin (2.1), l'intégrale de gauche est finie ssi $H - r\urcorner$ ne visite pas $]-\infty, 0[$ immédiatemment. Par ailleurs, $H - r\urcorner$ ne visite pas $]-\infty, 0[$ immédiatemment pour tout $r > 0$, équivaut à $\lim_{0+} \frac{H_t}{\urcorner_t} = +\infty$. □

*Démonstration du théorème 12.1.4 :* Supposons que $\lim_{0+} \frac{S_t}{t} = +\infty$ et montrons que $X$ est abrupt. Par le lemme 11.6.3, l'hypothèse est équivalente à $\lim_{0+} \frac{H_t^-}{\urcorner_t} = +\infty$, ce qui implique $\lim_{0+} \frac{H_t}{\urcorner_t} = +\infty$, donc par le lemme précédent $d\mathcal{S}1_{\mathbb{R}^+}$ est $\sigma$-finie.

Soit $r > 0$. Puisque $S^r \geq S$, nous avons $\lim_{0+} \frac{S_t^r}{t} = +\infty$, donc $d\mathcal{S}^r 1_{\mathbb{R}^+}$ est $\sigma$-finie. Par la définition même de $d\mathcal{S}$ on a $d\mathcal{S}^r[a,b] = d\mathcal{S}[a-r, b-r]$, donc $d\mathcal{S}1_{[-r,+\infty[}$ est $\sigma$-finie. Ceci étant vrai pour tout $r$, $d\mathcal{S}$ est $\sigma$-finie, donc $X$ est abrupt. □

## ↬ Exemples

*Démonstration de 12.1.6 :* Supposons que $X$ soit un processus stable d'incidice $\alpha \in [1,2]$. Notons $p = \mathbf{P}[X_t > 0]$. Les subordinateurs d'échelle $\urcorner$ et $H$ sont stables d'indice respectif $p$ et $\alpha p$ (cf. [1] p.218). Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x) &= cst_1 \ x^{\alpha p} \\ d\tau(x) &= cst_2 \ x^{p-1} dx \end{aligned}$$

Et donc $\int_0^1 \mathcal{V} d\tau = \infty \ \Leftrightarrow \ \alpha p - p - 1 \leq -1 \ \Leftrightarrow \ \alpha \leq 1$. Ainsi, par le théorème 12.1.4, lorsque $\alpha > 1$, $\lim_{0+} \frac{S_t}{t} = +\infty$ et donc $X$ est abrupt.

Inversement, si $X$ est stable d'indice 1, la stabilité implique que pour tout $a < b$, la quantité $\mathbf{P}[\frac{X_t}{t} \in [a,b]]$ est constante en la variable $t$. Donc d'après le théorème alpin, $X$ n'est pas abrupt.

Sa notoriété datait de vingt ans déjà, de l'époque où certains auteurs allemands prétendirent un beau jour avoir isolé des vibrions Eberthiens vivants dans l'excrétat vaginal d'une petite fille de dix-huit mois. Ce fut un beau tapage dans le domaine de la vérité. Heureux, Parapine riposta dans le moindre délai au nom de l'Institut National et surpassa d'emblée ce fanfaron teuton en cultivant lui, Parapine, le même germe mais à l'état pur et dans le sperme d'un invalide de soixante et douze ans. Célèbre d'emblée, il ne lui restait plus, jusqu'à sa mort, qu'à noircir régulièrement quelques colonnes illisibles dans divers périodiques spécialisés pour se maintenir en vedette.

Céline
Voyage au bout de la nuit

# Chapitre 13

# Les dérivées de Dini le long des trajectoires Abrupts

Pour un processus de Lévy abrupt, la dérivée à gauche en presque tout temps de record (au sens du temps local) vaut $+\infty$. La dérivée en presque-tout point de croissance vaut $+\infty$. Mais le plus étonnant est le résultat suivant : pour toutes les trajectoires p.s., nous pouvons séparer l'espace des temps en quatre ensembles disjoints en fonction de la finitude des dérivées de Dini. Nous en déduisons que les processus abrupts n'admettent en aucun point des dérivées finies.

Dans ce chapitre $X$ est encore à variation infinie et nous supposons pour simplifier qu'il meure. Rappelons que $M$ désigne l'ensemble des temps records, qui est aussi égal à $\{S = X\}$ ; nous notons :
$M\breve{}$ l'ensemble $M$ privé de ses points isolés à droite
$\breve{M}\breve{}$ l'ensemble $M$ privé de ses points isolés à droite ou à gauche
$\overset{\bullet}{M}$ l'ensemble des points isolés à gauche dans $M$.

## 13.1 Comportement $dL$-presque-partout

### ↬ Énoncé

Rappelons que $dL$ désigne le temps local de $\{S = X\}$, et qu'à ce titre, il ne charge que cet ensemble.

**Théorème 13.1.1** Si $X$ est abrupt alors :

$$\forall t \quad dL\text{-p.p} \qquad GX_t = +\infty \qquad \overline{D}X_t = +\infty \qquad \underline{D}X_t = -\infty$$

Notons $J_t = \inf\{X_s : s \in [t, \zeta[\}$. Nous savons grâce à [20], que l'ensemble des points de croissance globaux :

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{S = X\} \cap \{X = J\} \ ,$$

lorsqu'il n'est pas vide, est un ensemble régénératif sans point isolé. On peut y définir un temps local que nous notons $dL^c$.

**Théorème 13.1.2** Si $X$ est abrupt et s'il possède des points de croissance alors on a :

$$\forall t \quad dL^c - \text{p.p} \qquad GX_t = DX_t = +\infty$$

On déduit directement de ce théorème :

**Corollaire 13.1.3** Si $X$ est abrupt et s'il a des points de croissance alors pour tout $r \in \mathbb{R}$, $(X_t + rt)_{t \geq 0}$ a aussi des points de croissance.

**Remarque.** Le processus de Cauchy symétrique n'a pas de point de croissance, mais si on lui rajoute une dérive positive, il en attrape (pour voir cela il suffit de calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\hat{\mathcal{V}}}\, d\mathcal{V}$ et d'invoquer ensuite le critére d'existance des points de croissances ([20]).

## ↬ Démonstrations

Commençons par quelques rappels de théorie générale empruntés à l'article de S. Fourati [20]. Soit $\mathcal{O}$ la tribu optionnelle et $\widehat{\mathcal{H}}ac$ la tribu des accroissements futurs :

$$\widehat{\mathcal{H}}ac = \sigma(t \mapsto X_{k+t} - X_t \ : \ k \geq 0)$$

On note $\mathcal{K} = \widehat{\mathcal{H}}ac \vee \sigma(S - X)$. La tribu $\mathcal{K}$ est une "tribu du futur" ce qui permet de définir une projection et une projection duale sur cette tribu.

Le temps local, normalisé par $\mathbf{E}L_\zeta = 1$ peut être construit des deux manières suivantes :

$$\begin{aligned} dL &= (\delta_\rho)^{\mathcal{O}} \\ dL &= (\delta_0)^{\mathcal{K}} \end{aligned}$$

*Démonstration de 13.1.1 :* Soit $\mathbb{A} = \{t \ : \ GX_t \neq +\infty\}$. C'est un ensemble optionnel (et même prévisible). On a donc :

$$\mathbf{E}\int_0^\zeta 1_{\mathbb{A}}\,\delta_\rho = \mathbf{E}\int_0^\zeta 1_{\mathbb{A}}\,(\delta_\rho)^{\mathcal{O}} = \mathbf{E}\int_0^\zeta 1_{\mathbb{A}} dL$$

Par hypothèse, $X$ est abrupt, donc $\rho$ n'appartient pas à $\mathbb{A}$ et les quantités ci-dessus sont nulles.

Soit $\mathbb{B} = \{t \ : \ \underline{D}X_t \neq -\infty \ \text{ ou } \ \overline{D}X_t \neq +\infty\}$. On voit sans peine que cet ensemble est dans $\widehat{\mathcal{H}}ac$. On a donc :

$$0 = \mathbf{E}\int_0^\zeta 1_{\mathbb{B}}\,\delta_0 = \mathbf{E}\int_0^\zeta 1_{\mathbb{B}}\,(\delta_0)^{\mathcal{K}} = \mathbf{E}\int_0^\zeta 1_{\mathbb{B}}\, dL$$

*Démonstration du théorème 13.1.2 :* Supposons que $X$ ait des points de croissance et qu'il soit abrupt. Soit $T_c$ le premier point de croissance global. S. Fourati ([20], corollaire 1.2.4) montre que, conditionnellement à $T_c < \infty$, le processus $(X_{T_c+t} - X_{T_c})$ a même loi que $(X_{\rho+t} - X_\rho)$. Ainsi, puisque $X$ est abrupt on a : $DX_{T_c} = +\infty$. Par ailleurs le temps local des points de croissance peut être construit par la projection duale de $\delta_{T_c}$ sur la tribu $\mathcal{K}$. Le même raisonnement qu'au dessus permet alors de dire que $\forall t$ $dL^c$-p.p on a $DX_t = +\infty$. Par un arguement de retournement, on a aussi $\forall t$ $dL^c$-p.p $\ GX_t = +\infty$.

## 13.2 Comportement partout

**Théorème 13.2.1** Soit $X$ un processus de Lévy abrupt. On a :

$$\forall t \in \breve{M} \qquad \overline{G}X_t = +\infty \quad \overline{D}X_t = +\infty$$

Nous préparons la démonstration avec deux lemmes : Nous montrons que les temps où les dérivées de Dini de $X$ sont supérieures à $r$ sont en bijection avec les temps où $H - r\urcorner$ atteint des records. Puis nous utilisons le fait que $H - r\urcorner$ ne visite pas $]-\infty, 0[$ immédiatement.

On rappelle que $\Upsilon = L_\zeta$ est le temps de mort de $(\urcorner, H)$. Définissons la bijection $\rightleftharpoons$ reliant $\breve{M}$ et $[0, \Upsilon[$ par :

$$\forall t \in \ \breve{M} \text{ et } u \in [0, \Upsilon[ \qquad t \rightleftharpoons u \ \Leftrightarrow \ \urcorner_t = u$$

Puis nous notons $A \rightleftharpoons B$ si l'image de $A$ par cette bijection est $B$. Nous écrivons $A \underset{\rightharpoonup}{\subseteq} B$ si l'image de $A$ est incluse dans $B$ et $A \underset{\leftharpoondown}{\supseteq} B$ si l'image de $A$ contient $B$.

On vérifie facilement que :

$$\overset{\bullet}{M} \ \rightleftharpoons \ \{u \ : \ \Delta\urcorner_u > 0\}$$

**Lemme 13.2.2** Soit $r > 0$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \{t \in \breve{M} \ : \ \overline{D}X_t > r\} & \rightleftharpoons & \{u \ : \ \forall \delta > 0 \ \exists v \in ]u, u+\delta[ \quad H_v - r\urcorner_v > H_u - r\urcorner_u\} \\ \{t \in \breve{M} \ : \ \overline{G}X_t > r\} & \underset{\leftharpoondown}{\supseteq} & \{u \ : \ \forall \delta > 0 \ \exists v \in ]u-\delta, u[ \quad H_v - r\urcorner_v < H_u - r\urcorner_u\} \end{array}$$

*Démonstration de la première ligne :*

$$\begin{array}{rcl} \{t \in \breve{M} : \overline{D}X_t > r\} & = & \{t \in \breve{M} \ : \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists s \in ]t, t+\varepsilon[ \quad \dfrac{X_s - X_t}{s-t} > r\} \\ & = & \{t \in \breve{M} \ : \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists s \in ]t, t+\varepsilon[ \quad X_s - rs > X_t - rt\} \end{array}$$

Soit $t$ dans cet ensemble. Comme $t \in \breve{M}$ , il existe $u$ tel que $t = \urcorner_u$. Il existe aussi $s > t$ arbitrairement proche de $t$, tel que $X_s - rs > X_t - rt$, mais $s$ n'est pas forcément dans $\breve{M}$ ce qui pose problème. Si on pose $s' = g_s$, on a encore $X_{s'} - rs' > X_t - rt$ (car $X_{g_s} \geq X_s$ et $g_s \leq s$). Mais il y a de fortes chances pour que $s'$ soit isolé à droite dans $M$. Comme $X$ est continu en $s'$ et comme $s'$ n'est pas isolé à gauche dans $M$, on peut choisir $s''$ dans $\breve{M}$, suffisamment proche de $s'$ pour que $X_{s''} - rs'' > X_t - rt$. Ainsi $s'' = \urcorner_v$. Le temps $v$ est arbitrairement proche de $u$ et vérifie :

$$X_{\urcorner_v} - r\urcorner_v > X_{\urcorner_u} - r\urcorner_u$$

Par conséquent : $u = L_t \in \{u : \ \forall \delta > 0 \ \exists v \in ]u, u+\delta[ \ H_v - r\urcorner_v > H_u - r\urcorner_u\}$. L'inclusion dans l'autre sens se montre de même.

*Démonstration de la deuxième ligne :*

$$\begin{array}{rcl} \{t \in \breve{M} \ : \ \overline{G}X_t > r\} & = & \{t \in \breve{M} \ : \forall \varepsilon > 0 \ \exists s \in ]t-\varepsilon, t[ \quad X_s - rs < X_t - rt\} \\ & \supset & \{t \in \breve{M} \ : \forall \varepsilon > 0 \ \exists s \in ]t-\varepsilon, t[ \cap \breve{M} \quad X_s - rs < X_t - rt\} \end{array}$$

Or ce dernier ensemble est en bijection ($\rightleftharpoons$) avec :

$$\{u \ : \ \forall \delta > 0 \ \exists v \in ]u-\delta, u[ \quad H_v - r\urcorner_v < H_u - r\urcorner_u\} \qquad \square$$

Lorsque $X$ est abrupt, $H - r\urcorner$ ne visite pas $]-\infty, 0[$ immédiatement. Ces processus de Lévy ont des extrema bien particuliers :

**Lemme 13.2.3** Soit $Y$ un processus de Lévy qui n'est pas un PPC et qui ne visite pas $]-\infty, 0[$ immédiatement. On a :

$$\begin{array}{rcl} \{t \ : \ \Delta Y_t < 0\} & = & \{t \ : \ \exists \varepsilon > 0 \ \ \forall s \in ]t, t+\varepsilon[ \quad Y_s > Y_t\} \\ & = & \{t \ : \ \exists \varepsilon > 0 \ \ \forall s \in ]t-\varepsilon, t[ \quad Y_s < Y_t^-\} \end{array}$$

Autrement dit, l'ensemble des sauts négatifs est exactement l'ensemble des minima locaux à droite et des maxima locaux à gauche. Cette propriété est bien connu (elle vient du fait que l'image du processus $t \mapsto \inf\{Y_s : s \leq t\}$ est discrète).

*Démonstration de 13.2.1 :* Montrons d'abord que $\forall t \in \breve{M} \quad \overline{G}X_t = +\infty$.

De la deuxième ligne de 13.2.2, on déduit :

$$\{t \in \ \breve{M} \ : \ \overline{G}X_t \leq r\} \ \underset{\neq}{\subseteq} \ \{u : \ \exists \delta > 0 \ \forall v \in ]u-\delta, u[ \quad H_v - r\urcorner_v \geq H_u - r\urcorner_u\}$$

L'ensemble de droite n'est autre que l'ensemble des minima à gauche de $H - r\urcorner$. Or d'après 13.2.3, cet ensemble est exactement l'ensemble des sauts négatifs de $H - r\urcorner$. Ce dernier est inclus dans $\{\Delta\urcorner > 0\}$ qui est en bijection ($\rightleftharpoons$) avec $\overset{\bullet}{M}$. Ainsi :

$$\forall t \in \ \breve{M} \setminus \overset{\bullet}{M} \qquad \overline{G}X_t > r$$

Ceci étant vrai pour tout $r$ on a le résultat. De la même manière, en utilisant la première ligne de 13.2.2 on montre que pour tout $t$ dans $\breve{M}$ on a $\overline{D}X_t = +\infty$. □

## 13.3 Classification des points

À chaque point d'une trajectoire est associé quatre dérivées de Dini. Si chacune d'elles prenait ses valeurs indépendamment des trois autres, cela donnerait un grand nombre de combinaisons. En réalité, dans le cas abrupt, seules quelques configurations sont autorisées.

**Définitions.** Les valeurs "génériques" des dérivées de Dini sont :
$+\infty$ pour $\overline{G}$ et $\overline{D}$
$-\infty$ pour $\underline{G}$ et $\underline{D}$
Un temps $t$ associé à une trajectoire est dit générique si les 4 dérivées de Dini en $t$ prennent leur valeur générique.

On peut facilement prouver que pour presque-toutes les trajectoires d'un processus de Lévy à variation infinie, l'ensemble des temps non-génériques est de mesure de Lebesgue nulle. De plus, tout instant de saut est p.s un temps générique.

**Théorème 13.3.1 (Catalogue)** Soit $X$ un processus de Lévy abrupt sans point de croissance ni point de décroissance. Pour presque toutes les trajectoires, pour tout temps $t$, seule l'une des trois configurations suivantes est possible :

**a/** $t$ est un point générique.

**b/** $t$ est un maximum local ou un minimum local.

**c/** Une et une seule des 4 dérivées de Dini en $t$ n'est pas égale à sa valeur générique.

On rappelle qu'un processus de Lévy ne peut pas avoir à la fois des points de croissance et des points de décroissance.

**Théorème 13.3.2** Soit $X$ un processus de Lévy abrupt ayant des points de croissance, pour toute trajectoire p.s, pour tout temps $t$, on peut avoir soit **a/**, soit **b/**, soit **c/**, soit la configuration suivante :

**d/** $\quad \overline{G}X_t = +\infty \qquad \overline{D}X_t = +\infty$
$\quad \underline{G}X_t > -\infty \qquad \underline{D}X_t > -\infty$

**Remarque.** La configuration **c** peut-être séparer en deux sous cas :
**c1/** La Dérivée de Dini qui n'est pas égale à sa valeur générique est infinie.
**c2/** La Dérivée de Dini qui n'est pas égale à sa valeur générique est finie.
La proposition 13.1.1 montre que l'ensemble des points qui vérifie **c1** est loin d'être vide. Par contre, à priori, il n'est pas exclu que, pour certains processus de Lévy, aucun points ne vérifient **c2**.

De même la configuration **d** peut être séparée plusieurs sous-cas, selon les finitudes de $\underline{G}X_t$ et $\underline{D}X_t$.

**Corollaire.** Un processus de Lévy abrupt ne peut avoir de dérivée finie, ni à droite, ni à gauche.

Rappelons que J. Bertoin dans [5] a montré qu'il existe des processus de Lévy ayant des points de dérivabilités, ce ne sont donc pas des processus abrupts.

*Démonstration des théorèmes 13.3.1 et 13.3.2 :* Rappelons que pour $r \in \mathbb{R}$, $X^r$ désigne le processus de Lévy $X_t + rt$. On a donc $\underline{G}X^r_t = (\underline{G}X_t) + r$. Donc $\underline{G}X^r_t = +\infty$ ssi $\underline{G}X_t = +\infty$. Notons aussi que si $\underline{G}X_t > 0$ alors $t$ est un maximum à gauche local de $X$. Si $\underline{G}X_t > 0$ et $\underline{D}X_t > 0$ alors $t$ est un point de croissance local de $X$.

Supposons que $X$ soit abrupt, sans point de croissance, ni point de décroissance. Nous devons montrer que : si l'une des quatre dérivées de Dini en $t$ n'est pas égale à sa valeur générique, et si $t$ n'est pas un extrémum, alors les trois autres dérivées de Dini prennent leur valeur générique.

Supposons par exemple que $\underline{G}X_t > -r > -\infty$ et que $t$ n'est pas un extrémum. $t$ est donc un maximum à gauche local de $X^r$ (mais pas un maximum à droite local de $X^r$). Dès lors le théorème 13.2.1 (et un argument de localisation) implique $\overline{G}X^r_t = \overline{G}X_t = +\infty$ et $\overline{D}X^r_t = \overline{D}X_t = +\infty$. Quant à $\underline{D}X_t$, s'il était différent de $-\infty$, alors, pour un $r$ suffisamment grand, $t$ serait un point de croissance de $X^r$. Or le corollaire 13.1.3 nous indique que $X^r$, tout comme $X$, n'a pas de point de croissance.

Par contre, si $X$ a des points de croissance, le dernier cas décrit est possible, ce qui donne le théorème 13.3.2. □

- Allo ?
- Allo, mon père, j'ai un grave problème.
- Lisez donc la Bible.
- Quel passage en particulier ?
- Lisez tout, tout est bon.

Les Simpsons

# Bibliographie


[1] J. Bertoin. *Lévy processes.* Cambridge university press, 1996.

[2] J. Bertoin. The convex minorant of the Cauchy process. *Electronic communication in probability 5,* pp. 51-55, 2000.

[3] J. Bertoin. Regularity of the half-line for Lévy processes. *Bull. Sci. math.,* vol 121, pp. 345-354, 1997.

[4] J. Bertoin. Regenerative embedding of Markov sets. *Prob. Theory Related Fields,* vol. 108, pp. 559-571, 1997.

[5] J. Bertoin. On nowhere differentiability for Lévy processes. *Stochastics an Stochastic Reports,* vol. 50, pp. 205-210, 1994.

[6] J. Bertoin et R.A Doney. Spitzer's condition for random walk and Lévy processes. *Ann. Inst. Henri Poincare, Prob. Stat.,* 33, pp 167-178, 1997.

[7] Y.S. Chow. On moments of ladder height variables. *Advances in applied mathematics,* vol. 7, pp. 46-54, 1986.

[8] Y.S. Chow. et T.L. Lai Moments of ladder height variables for drifted random walks. *Z. Wahrsch. Verw. Gebeite,* vol. 48, pp. 253-257-54, 1978.

[9] R. Cuppens. *Decomposition of multivariate probability.* Academic Press, 1975.

[10] C. Dellacherie et P.A. Meyer. *Probabilités et potentiel, chap I à IV.* Hermann, 1975.

[11] C. Dellacherie et P.A. Meyer. *Probabilités et potentiel, chap V à VIII : Théorie des martingales.* Hermann, 1980.

[12] C. Dellacherie et P.A. Meyer. *Probabilités et potentiel, chap IX à XI : théorie discrète du potentiel.* Hermann, 1983.

[13] C. Dellacherie et P.A. Meyer. *Probabilités et potentiel, chap XII à XVI : théorie du potentiel associée à une résolvante ; théorie des processus de Markov.* Hermann, 1987.

[14] C. Dellacherie P.A. Meyer et B. Maisonneuve. *Probabilités et potentiel, chap XVII à XXIV : Processus de Markov (fin) ; complément de calcul stochastique.* Hermann, 1992.

[15] R.A. Doney et R.A. Maller. Stability of the overshoot for Lévy processes. *Preprint, Department of Mathematics, University of Manchester,* 2000.

[16] A. Dvoretzky, P. Erdös et S. Kakutani. Non increase everywhere of the Brownian motion. *Proc. 4th Berkeley symp. on Math. Stat. and Prob.,* edit 1961, vol II, pp. 105-106, 1960.

[17] K.B. Erickson. The strong law of large number when the mean is undefined. *Trans. of the amer. math. soc.,* vol 185, pp. 371-381, 1973.

[18] S. Fourati. Une propriété de Markov pour les processus indexés par $\mathbb{R}$. *Sém. Prob. XXIX,* 1995.

[19] S. Fourati et E.Lenglart. Tribus homogènes et commutation de projections. *Sem. Prob. XXI,* 1987.

[20] S. Fourati. Point de croissance des processus de Lévy et théorie générale des processus. *Probability theory et related fields,* 110, pp. 13-49, 1998.

[21] B. Fristedt. Sample fonctions of stochastic processes. *Advances in probabilities 3, pp.241-396* Dekker, New York, 1974.

[22] M. Hogan. Moments of the minimum of a random walk and complete convergence. *Standford Univ., Dept. of statistics, tech. report,* 1984.

[23] H. Kesten. Hitting probabilities of single points for processes with stationary independant increments. *Memoirs Amer. Math. Soc. 93,* 1969.

[24] H. Kesten. The limite points of a normalised random walk. *Ann. Math. Stat.,* 41 p.1173-1205, 1970.

[25] E.Lenglart. Tribu de Meyer et théorie des processus. *Sém. prob.,* p.500-546, 1978.

[26] P.W. Millar. Exit properties of stochastic processes with stationary independent increments. *Transaction of the american mathematical society,* vol 178, pp. 459-479, 1973.

[27] J.W. Pitman. Remarks on the convex minorant of Brownian motion. *Seminar of stochastic process pp. 219-227,* 1983.

[28] L.C.G. Rogers. A new identity for real Lévy processes. *Ann. Inst. Henri Poincaré,* vol 20, pp. 21-34, 1984.

[29] B.A. Rogozin. Local behaviour of processes with independent increments. *Theory probab. appl.,* vol 13, pp. 482-486, 1968.

[30] K-I. Sato. *Lévy processes et infinitely divisible Distributions.* Cambridge studies in advanced mathematics, 1999.

[31] L. Schwartz. *Méthode mathématiques pour les sciences physiques.* Hermann, 1961.

[32] E.C. Titchmarsh. *Introduction to the theory of Fourier integrals.* Oxford University Press, 1948.

[33] V. Vigon. Votre Lévy rampe-t-il ? *Journal of London Mathematical Society*, vol. 65, pp. 243-256, 2002.

[34] V. Vigon. Abrupt Lévy processes. Accepté pour publication dans : *Stochastics processes and their applications.*

[35] M. Winkel. Right inverses of non-symmetric Lévy processes. *Prépublication 618,* Paris 6 & 7, 2000.

[36] V.M. Zolotarev *One-dimentional stable distributions* Amer. Math. Soc, Providence, R.I.

# ANNEXES

# Annexe A : Simulations de processus de Lévy stables

Cette annexe est tirée de mon mémoire de DEA, éffectué en collaboration avec Magali Kelle.

Nous rappelons que les processus stables sont paramétrés par l'indice de stabilité $\alpha \in ]0,2]$ et l'indice d'assymétrie $\beta \in [-1,1]$ ($\beta = 1$ correspond au sans-sauts-négatif). À titre d'information nous donnons la formule de simulation pour $\alpha \in ]0,1[\cup]1,2[$ (les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ sont très connus). Nous renvoyons au livre de Zolotarev [36] pour tout renseignement complémentaire.

**Définition.**

$$U_\alpha(t,\theta) = \left[\frac{\sin(\frac{\pi}{2}\alpha(t+\theta))}{\cos(\frac{\pi}{2}t)}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \quad \frac{\cos\frac{\pi}{2}((\alpha-1)t+\alpha\theta)}{\cos\frac{\pi}{2}t}$$

où

$$\begin{cases} \text{pour } \alpha < 1 \quad \theta = \beta \\ \text{pour } \alpha > 1 \quad \theta = \frac{\beta}{\alpha}(\alpha-2) \end{cases}$$

**Théorème 13.3.3 (Zolotarev)** La fonction de répartition d'une loi stable pour $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 2$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{pour } \alpha < 1 \qquad \forall x > 0 \quad F(x,\alpha,\beta) &= \frac{1}{2}\left[(1-\beta) + \int_{-\beta}^{1} \exp\Big\{ - x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\, U_\alpha(t,\beta)\Big\} dt\right] \\ \text{pour } \alpha > 1 \qquad \forall x > 0 \quad F(x,\alpha,\beta) &= 1 - \frac{1}{2}\int_{-\theta}^{1} \exp\Big\{ - x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\, U_\alpha(t,\theta)\Big\} dt \end{aligned}$$

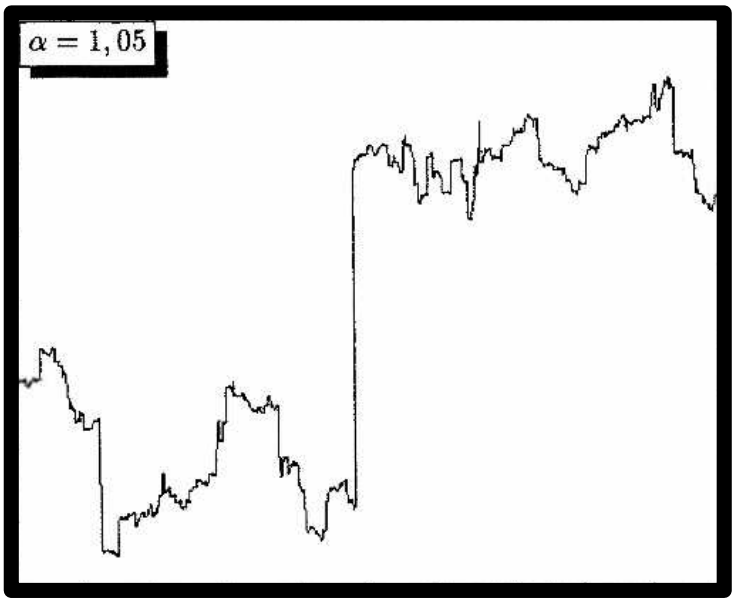
Pour $x < 0$, on a $F(-x,\alpha,\beta) = 1 - F(x,\alpha,-\beta)$.

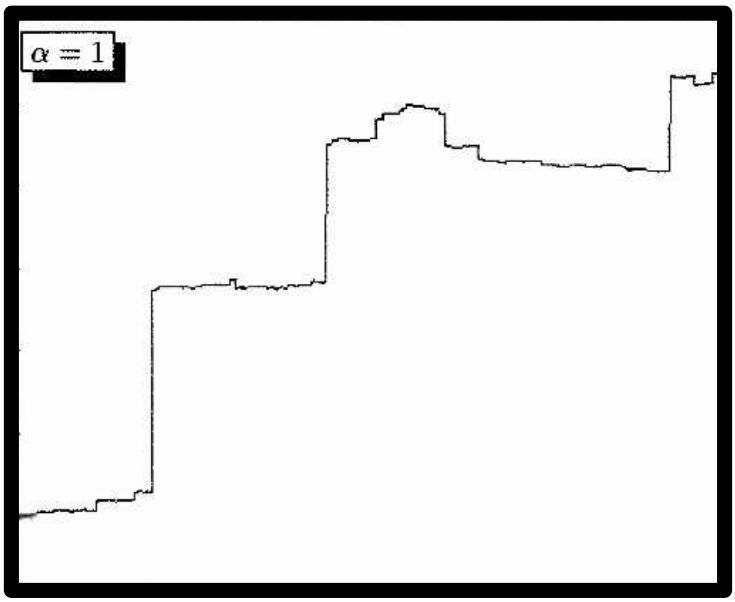
Avec ces formules, on tire facilement des méthodes de simulation. Par exemple, une façon de simuler une loi stable de paramètre $\alpha \in ]0,1[$, $\beta = 1$ est de considérer la variable :

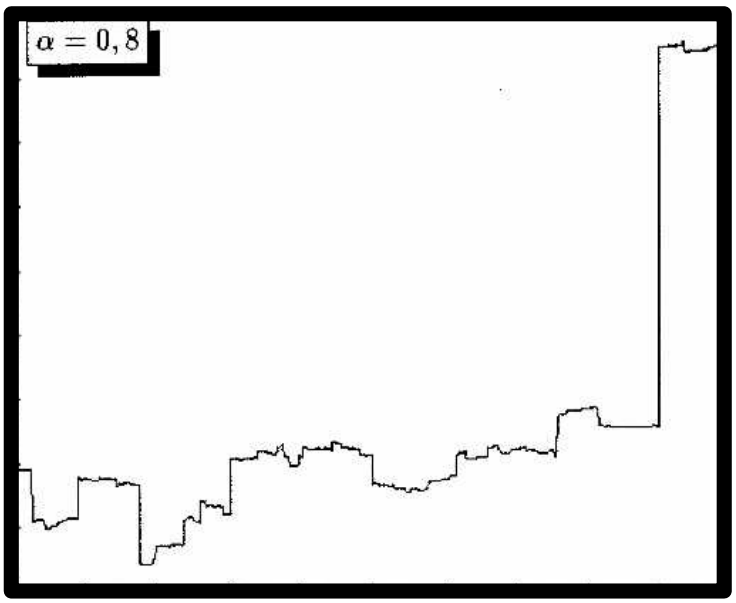
$$Y = \left[\frac{U_\alpha(T,1)}{W}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

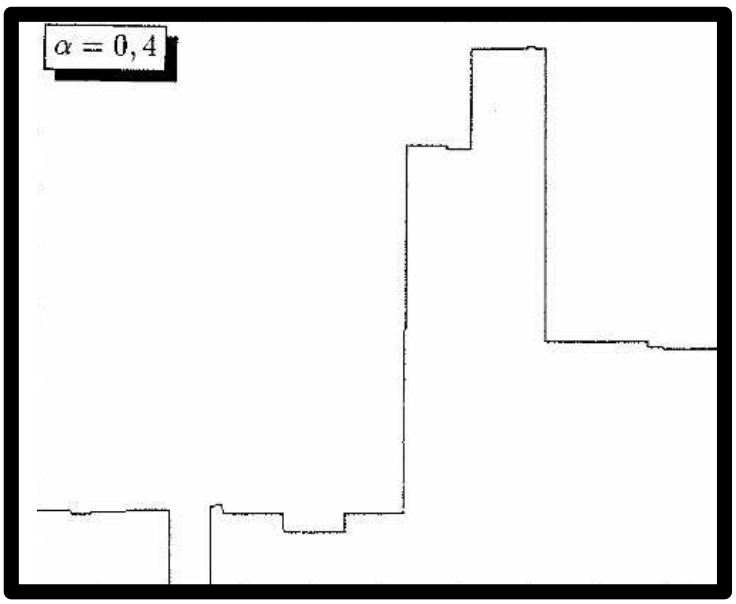
où $W$ suit une loi exponentielle de paramètre 1 et où $T$ suit une loi uniforme sur $[-1;1]$.

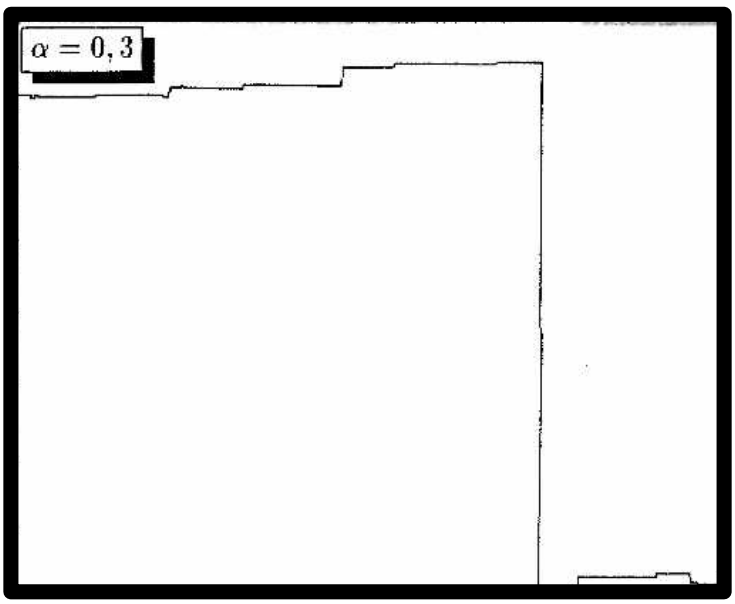
Processus symétriques stables :



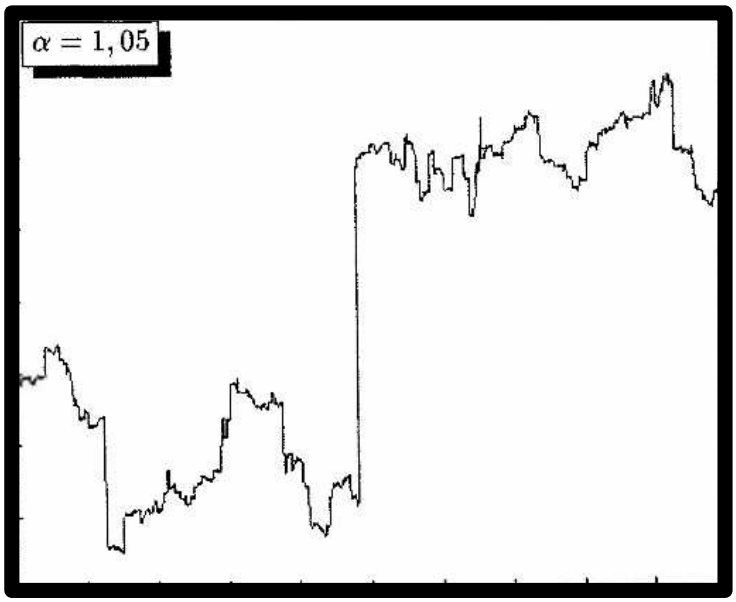



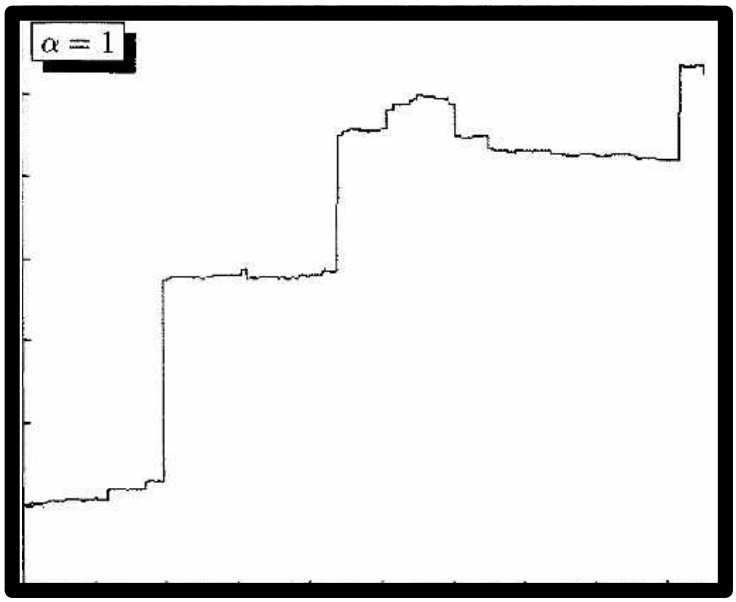



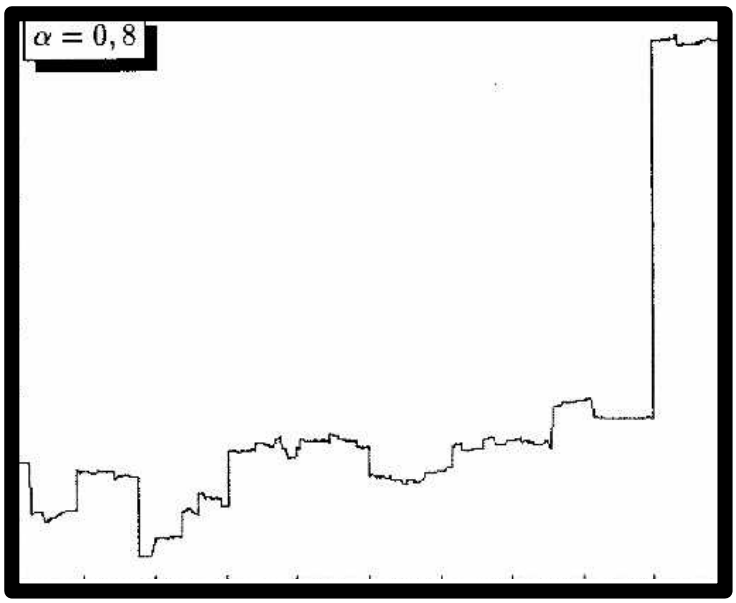


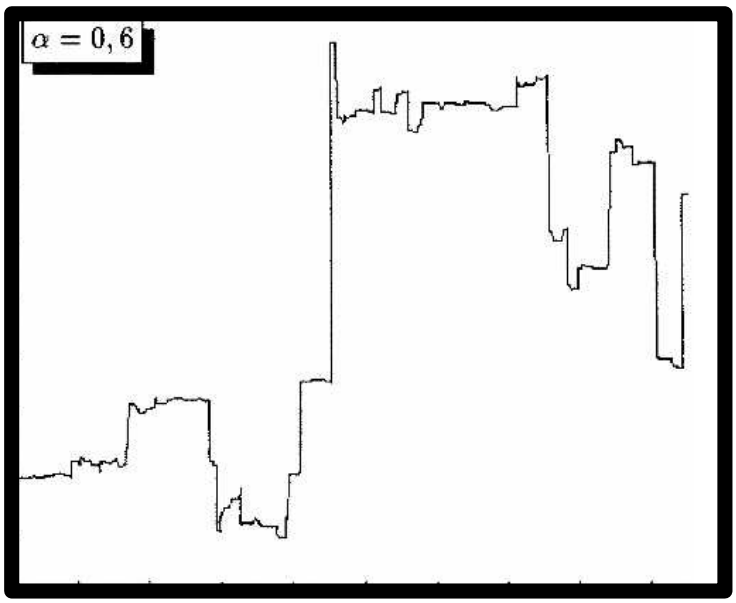



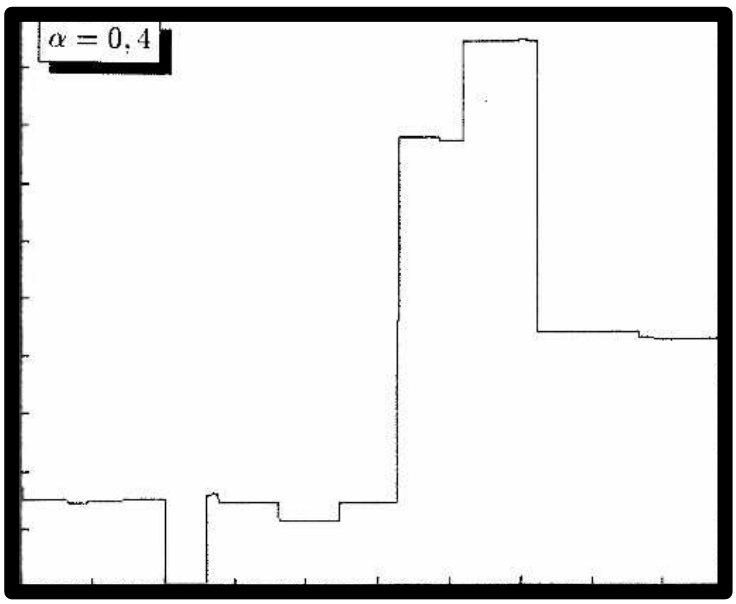
Processus symétriques stables :

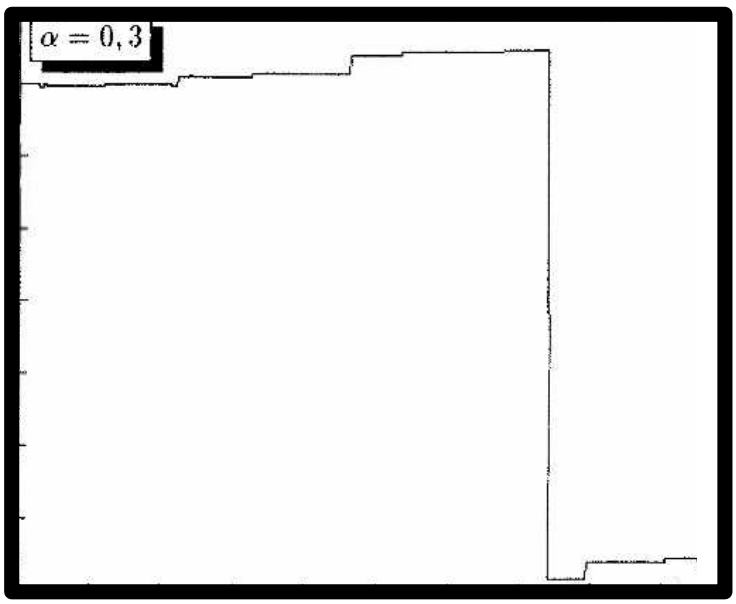


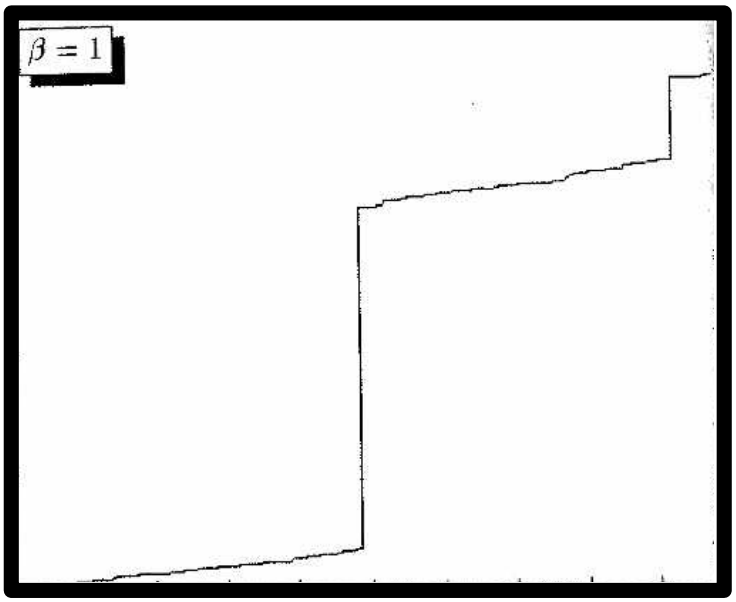



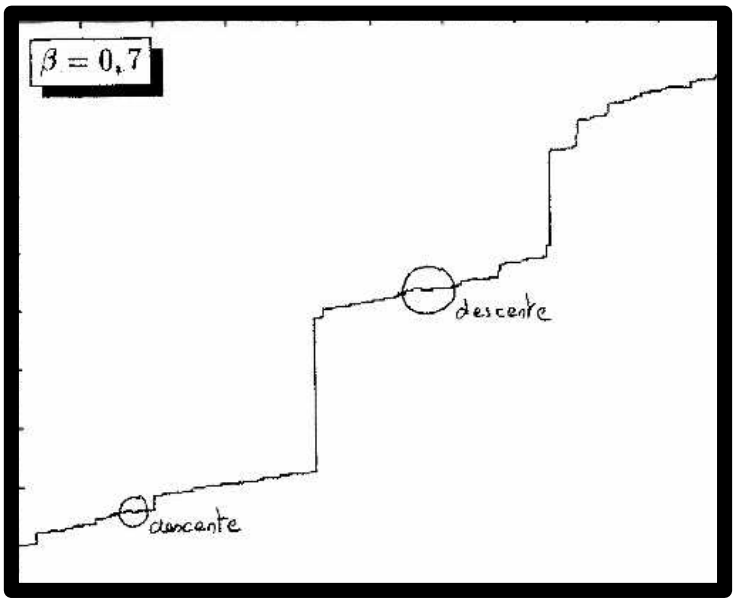



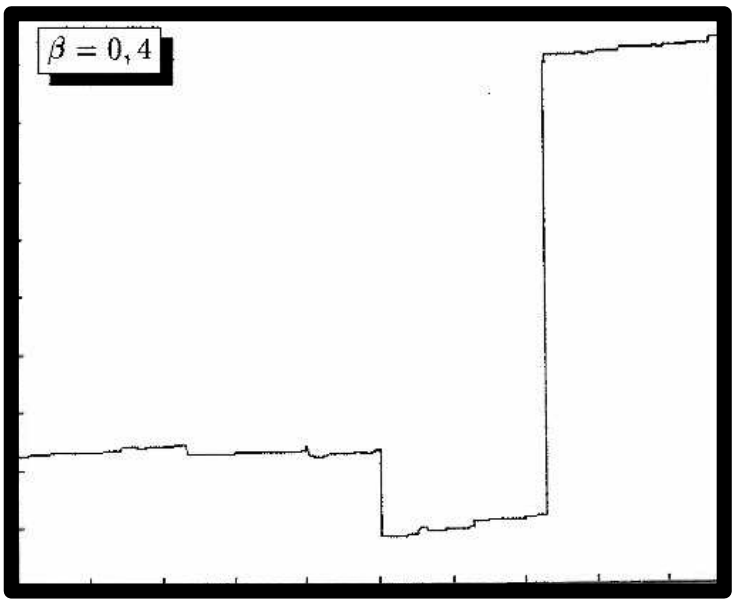



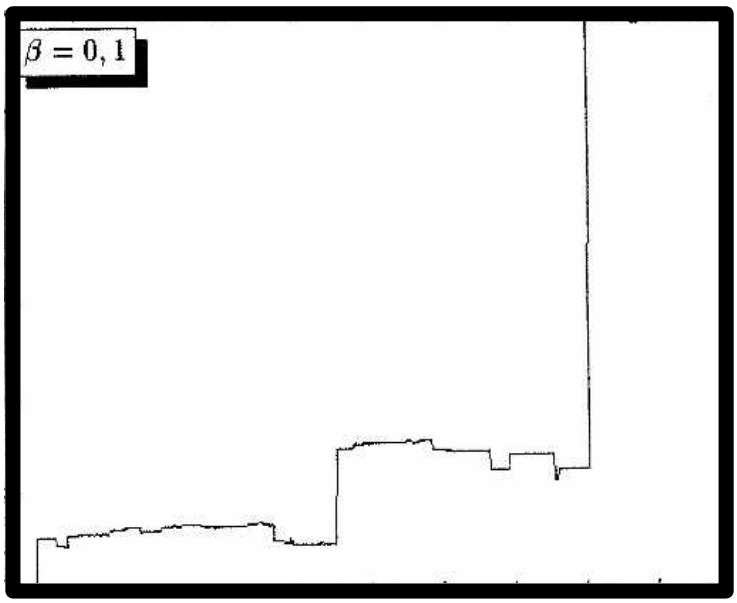



Processus dysymétriques stables d'indice $\alpha = 0{,}8$

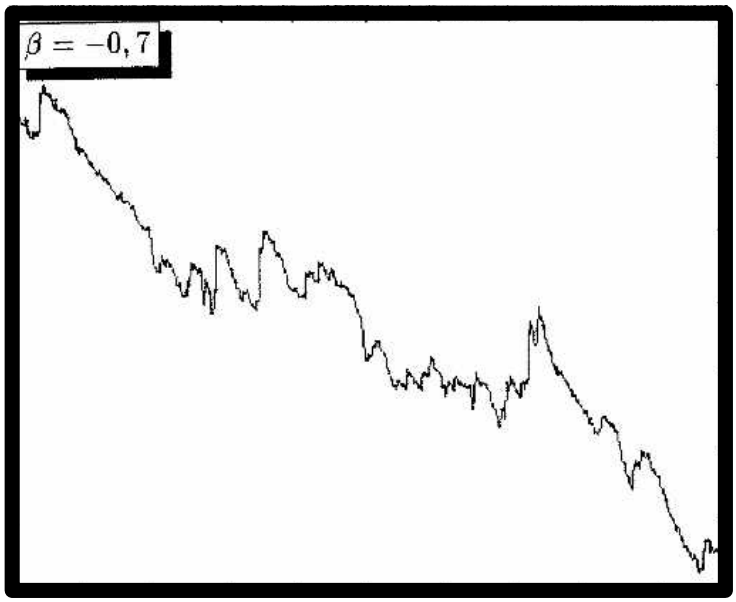


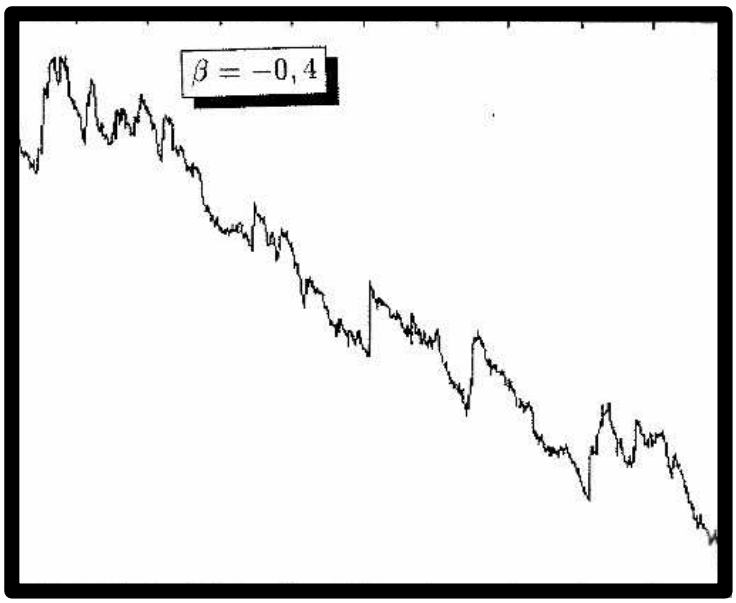



Processus dysymétriques stables d'indice $\alpha = 1{,}5$



## ANNEXE D :

# Maman les p’tits Lévy ont-ils des jambes ?

**Les probabilités**

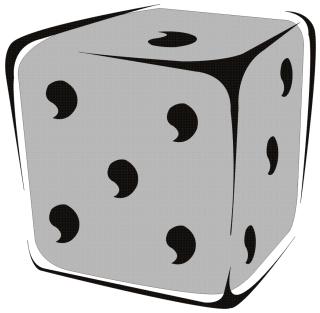
Messieurs Un, Deux et Trois recherchent en toute hâte un prénom pour leur fils nouveau-né. Manquant d’inspiration, ils décident de choisir un prénom au hasard. Mais chacun d'eux à une notion toute personnelle du hasard :

- Monsieur Un, facteur de son état, joue aux fléchettes sur le calendrier des postes (on est en Juillet).
- Monsieur Deux, grand gourmand, croque une pomme et choisit le premier prénom qui lui passe par la tête.
- Monsieur Trois, amateur d'exotisme, décide de choisir le prénom du premier scandinave qu'il verra à la télé.

Plus tard, sur les bancs de l’école, seront assis trois marmots dénommés :
- Fêtenat Un
- Adam Deux
- Larsvon Trois.

Cet exemple montre que le choix du mode de tirage est plus déterminant que le tirage lui même. Ainsi le hasard n'est pas qu'une question de hasard. Les "probabilistes" sont des mathématiciens spécialisés dans l’étude des différents modes de tirages aléatoires. Une partie d’entre eux, s’occupent des "processus de Lévy" : ce sont des Lotos gigantesque, où les numéros sont remplacés par des "trajectoires". Mais commençons par le début.

LES PROBABILITES DISCRETES …



C’est l’étude des propriétés du dé à 6 faces et de ses variantes : le pile ou face, la distribution des cartes à jouer, les tirages dans une urne etc... Restons-en aux dés, ils vont permettre d'expliquer simplement trois notions fondamentales.

**La loi :** lorsque l'on joue aux dés, certains évènements sont plus probable que d’autres. Par exemple, il est plus facile d'obtenir un chiffre entre 1 et 4, qu'un chiffre entre 5 et 6 :
- On a quatre chances sur six d’obtenir un chiffre entre 1 et 4. La probabilité de cette évènement est donc de "quatre-sixièmes" (4/6) ou bien de "deux-tiers" (2/3).
- On a deux chances sur six d’obtenir 5 ou 6. La probabilité de cette évènement est donc de "deux-sixième" (2/6) ou "un-tiers " (1/3).

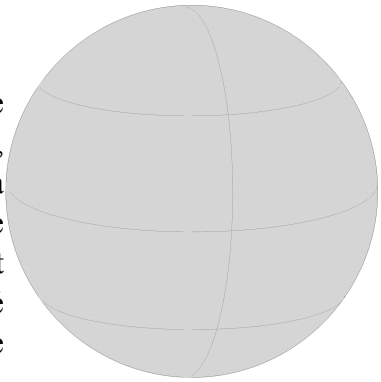
Etudier la loi d'un phénomène aléatoire, c'est simplement calculer des probabilités.
Voici quelques exercices classiques :
- Quelle est la probabilité de faire 7 en tirant deux dés ? Réponse : (1/6)
- Quelle est la probabilité de faire deux fois le même chiffre en tirant trois dés? Réponse (4 /9)

**Un événement "presque-sûre" :** Lors d’un phénomène aléatoire, certains événements se produisent à coup sûr. Voici un exemple idiot : « en lançant un dés, je suis sûr de tomber sur un chiffre entre 1 et 6 ». Mais les mathématiciens sont prudents, ils diront plutôt : « en lançant un dé, je suis presque-sûr de tomber sur un chiffre entre 1 et 6 » (le presque c'est pour le cas où le dé resterais sur la tranche). En lançant un seul dé, nous avons vite fait le tour de tous les événements presque-sûrs. En lançant plusieurs dés, cela devient intéressant. Voici un exemple pas trop idiot : Choisissons une séquence de chiffres : « 2,6,4,3,3,5,6,2,3 ». Puis lançons un dé, une fois, deux fois, trois fois… , en relevant au fur et à mesure les numéros qui apparaissent. Figurez-vous qu'au bout d'un certain temps, la suite de chiffre choisie initialement : « 2,6,4,3,3,5,6,2,3 » va apparaître dans l’ordre, sur notre feuiller de papier. Et pour cela, point besoin d'être un magicien, car c'est un événement presque-sûr (tentez l’expérience si vous êtes patient !).

**L'indépendance :** Lorsque l'on jette deux dés, simultanément ou l'un après l'autre, les deux lancés sont toujours indépendants. Cela signifie que le résultat du premier lancé n'influence pas le résultat du second lancé. Pour lancer des dés de manière non indépendante, il faut être un fieffé tricheur. Par exemple, pour sauver la planète, James Bond doit absolument faire 7 en lançant deux dés. Il lance le premier, nonchalamment… le dé roule, suspense… Gros plan : il s’arrête sur le 5. Dans ses manches, au début du film, Q a glisser tout un attirail de dés pipés. 007 choisit discrètement le dé étudier pour faire des 2, il le lance et gagne. Le premier lancé à clairement influencé le deuxième, nous sommes dans une configuration flagrante de non-indépendance.

Maintenant laissons les probabilités discrètes aux élèves des terminales, et consacrons-nous aux probabilités continues, strictement réservées aux adultes…

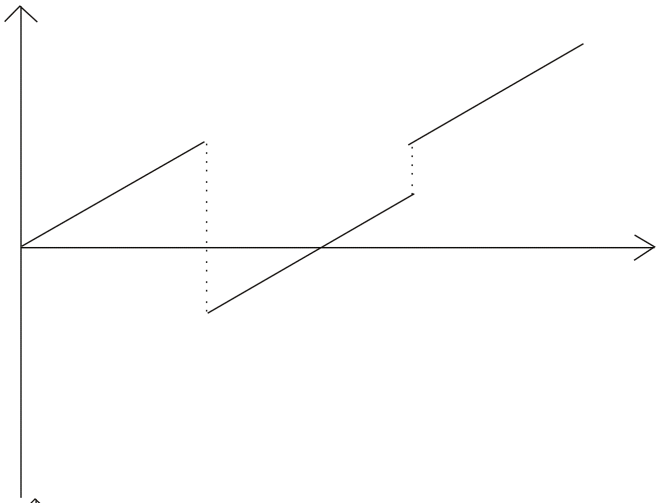
**LES PROBABILITES CONTINUES …**



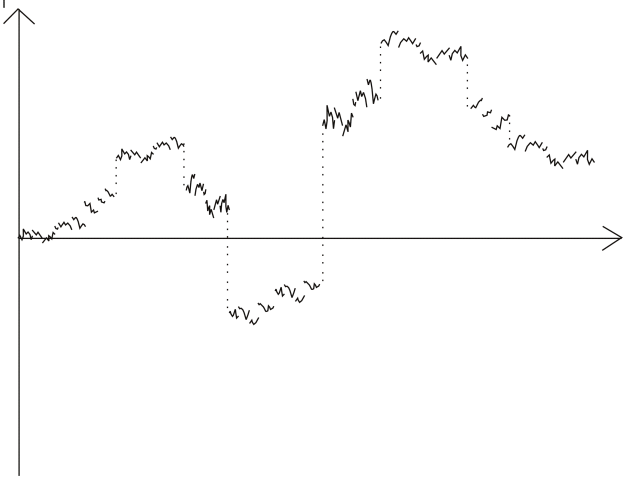
C'est l'étude de dés qui ont un nombre infini de faces. Ne criez pas à l'imposture, cela existe ; une boule de pétanque, c'en est un : il suffit de considérer que chaque point à la surface de la boule est une face. Pour faire un tirage, il me suffit de pointer ; le point de contact entre le cochonnet et ma boule sera la face sélectionnée (si vous êtes moins doué que moi, vous pouvez aussi choisir le point de contact entre la boule et le sol).

**Une trajectoire :** est une fonction (une courbe). On la représente dans un système de deux axes. L'axe horizontal représente le temps, l'axe vertical représente une quantité quelconque variant en fonction du temps, par exemple : Le prix de l'action Moulinex, la température à Rouen, le volume de $SNO_2$ dégagée par une voiture sportive, etc. Les trajectoires peuvent effectuer des sauts (représentés par des pointillés verticaux).

Il existe des trajectoires simples .....

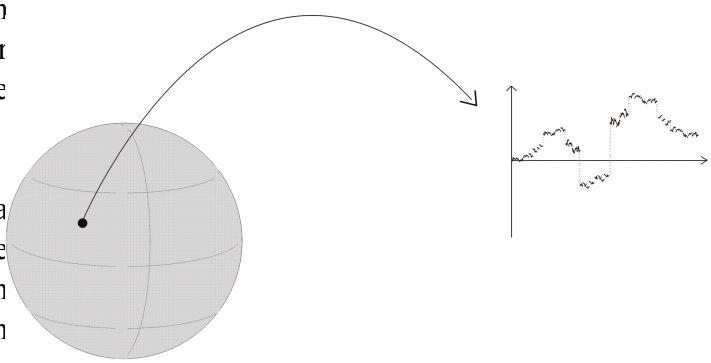


Et des trajectoires compliquées....



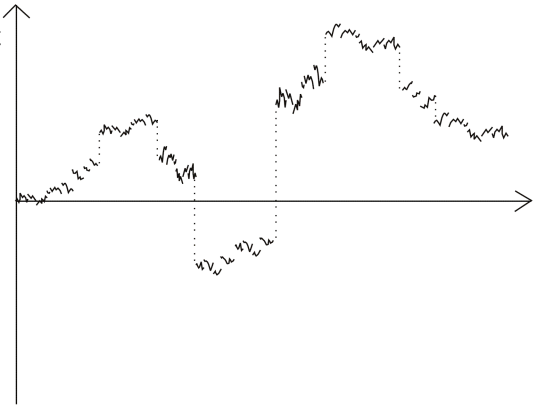
Les trajectoires les plus intéressantes sautent incessamment : chaque bout de trajectoire, aussi petit soit-il, comporte une infinité de sauts ; mais bien entendu, la grande majorité des sauts sont très très petits (sinon la trajectoire exploserait).

**Un processus :** est un dé ayant un nombre infini de faces, et sur chacune d'elle est dessinée une trajectoire.....



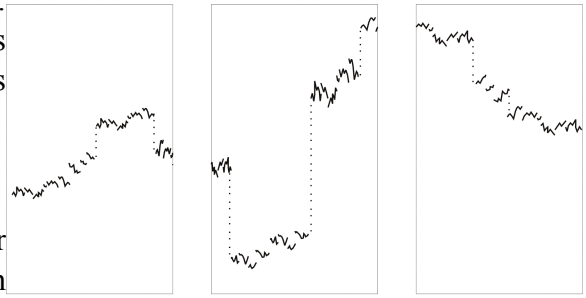
**NB :** Faites attention en lisant la suite de ne pas confondre « une trajectoire » avec un « processus » : le processus est un dé qui englobe une infinité de trajectoire.

**Un processus de Lévy** (« Lévy » tout-court pour les intimes).

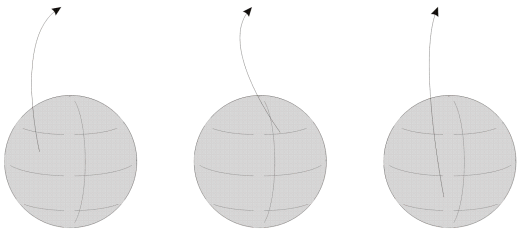


C'est un processus qui possède une propriété bien particulière : chacune de ses trajectoires peut être découpée en *n* morceaux, et chaque morceau est lui même un processus de Lévy.

Détaillons cela avec *n*=3 :
Appelons X notre processus de Lévy initial. Il existe un autre processus de Lévy Y (que l'on se représente par un dé-boule) tel que : Si nous lançons trois fois Y et si nous recollons les trois trajectoires obtenus, nous retombons sur une trajectoire de X.



Si vous avez bien suivit, on peut compliquer un peu : puisque Y est lui même un processus de Lévy, je peux trouver Z, tel qu'en lançant trois fois Z, je retombe sur Y. Du coup, en lançant 9 fois Z, je retombe sur X. Et cela peut continuer ainsi jusqu'à ce que mort s'en suive (Les Lévy sont "infiniment divisibles").

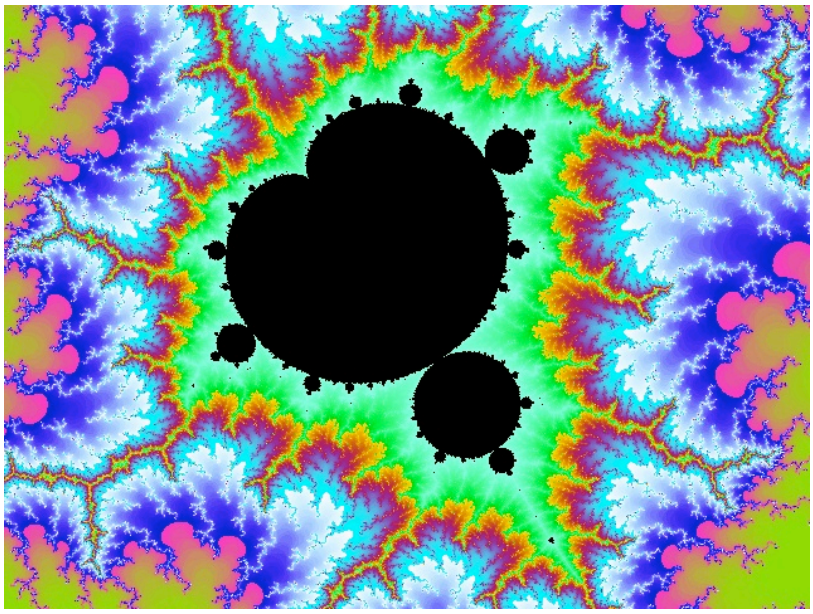


Y Y Y

Ainsi chaque trajectoire d'un processus de Lévy est le résultat d'un très grand nombre de tirages aléatoires. Ceci explique pourquoi ces trajectoires sont souvent chaotiques. Mais attention, il existes des tas de processus de Lévy différents. Rien qu'en regardant l'aspect général de leur trajectoires, on peut déjà distinguer 2 sortes de processus de Lévy :

- Les Lévy à variation finie. Ils sont simples car chacune de leurs trajectoires est la somme d'une trajectoire croissante, et d'une trajectoire décroissante.

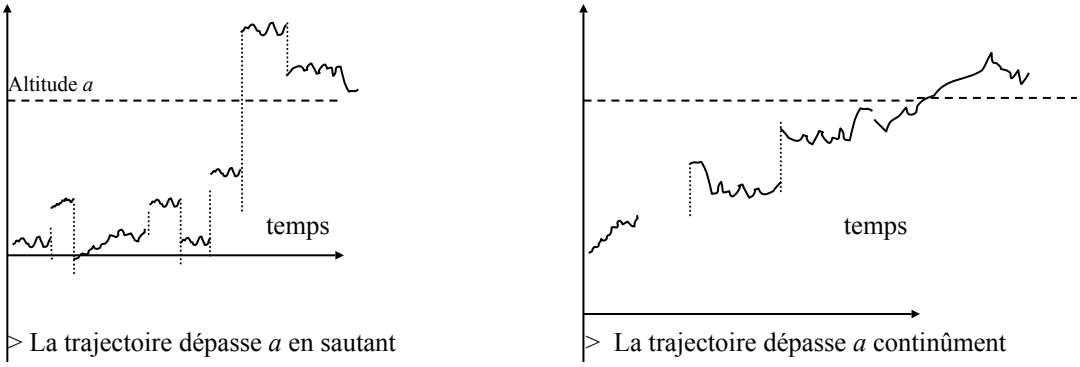
- Les Lévy à variation infinie : Par définitions, ce sont ceux qui ne sont pas à variation finie ! Ils sont très compliqués et très intéressants : leurs trajectoires sont horriblement fluctuantes.



**Une fractale déterministe.**
**Cette image n'a a priori rien à voir avec notre sujet.**

Les processus de Lévy possèdent bien d'autres particularités qui permettent de les distinguer. Dans cette thèses, nous avons étudié spécifiquement : La *reptation* et le *relief*. Ce sont des propriétés presque-sûres : elles sont visibles sur toutes les trajectoires à l'exception d'un très petit nombre que l'on qualifie de négligeable (tout comme est négligeable la probabilité qu'un dé reste sur la tranche).

**LA REPTATION :** Fixons nous une altitude $a$. Au bout d'un certain temps, les trajectoire d'un Lévy vont dépasse cette altitude. Il existe deux manières de franchir $a$ :




> La trajectoire dépasse $a$ en sautant

> La trajectoire dépasse $a$ continûment

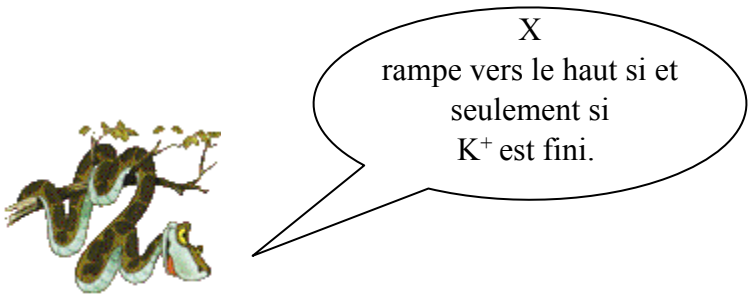
on distingue ainsi deux sortes de Processus de Lévy :

- Les Lévy qui ne rampent pas vers le haut : (presque)-toutes leurs trajectoires vont dépasser $a$ en sautant.

- Les Lévy qui rampent vers le haut : certaines de leurs trajectoires vont dépasser $a$ en sautant et d'autres continûment.

**Remarque :** Il est assez difficile d'imaginer un Lévy qui ne rampe pas vers le haut car, non seulement ses trajectoires vont dépasser l'altitude $a$ en sautant, mais elles vont aussi dépasser <u>toutes</u> les altitudes en sautant. Pour imaginez un tel phénomène, il faut penser à une trajectoire qui fait une infinité de petits sauts positifs. Mais on peut aussi se résigner au fait que la réalité mathématique est rarement représentable graphiquement.

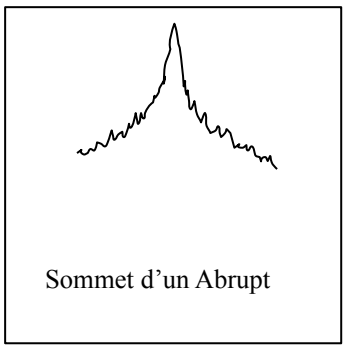
Dans cette thèse nous avons trouvé un critère déterminant si un processus de Lévy rampe ou pas (cf. Théorème Kaa, chapitre 12).



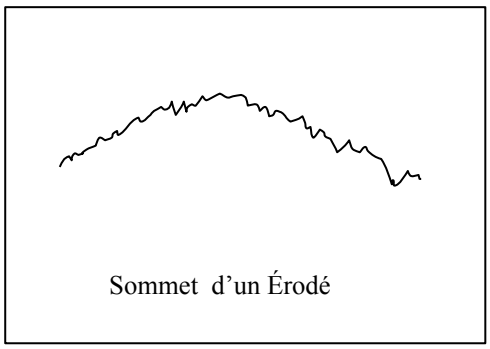
**LE RELIEF :** c'est la forme des maximums (ou sommets) des trajectoires. Dans la famille des processus de Lévy à variation infini (les plus compliqué), nous avons distingué deux sous-classes de processus de Lévy :

- Les Abrupts : Leurs trajectoires ont des sommets extrêmement pointu.

- Les Erodés : Leurs trajectoires ont des sommets relativement plat.

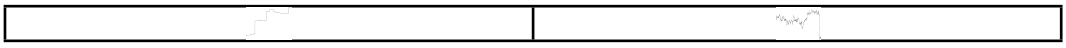


Sommet d'un Abrupt

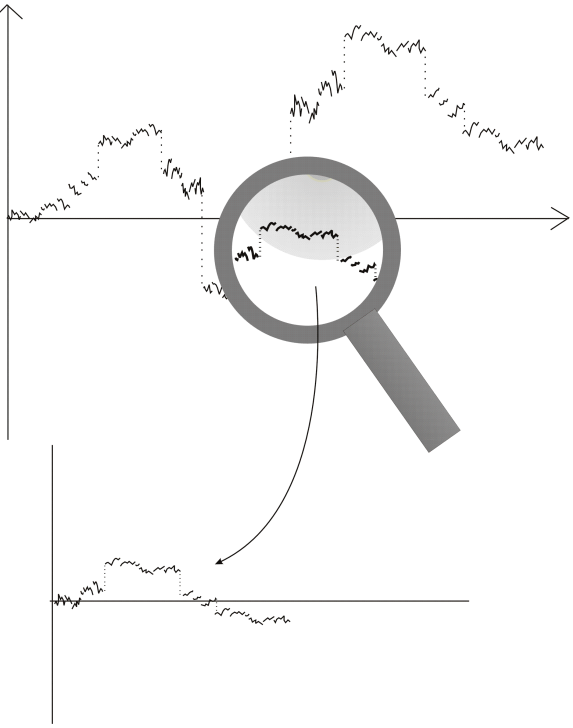


Sommet d'un Érodé

Jeu ! Parmi les deux trajectoires suivantes, laquelle appartient à un Lévy abrupt ?

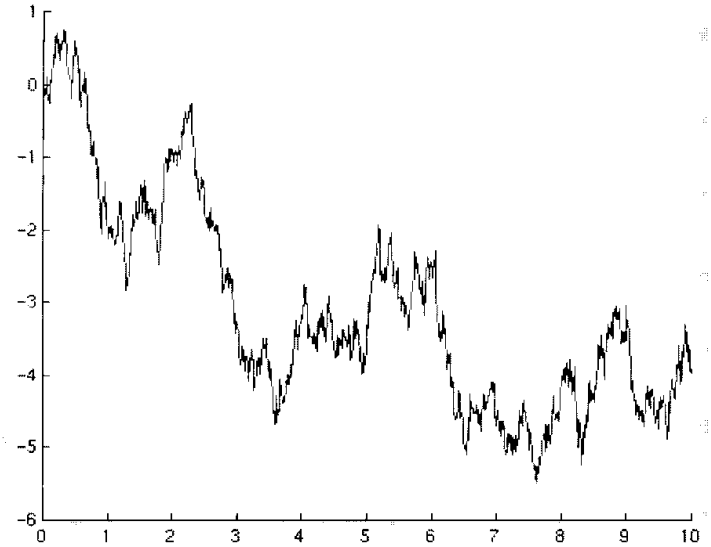


**Les processus stables :**



Ce sont des processus de Lévy particuliers. Ils possèdent la propriété suivante : si je zoome sur une partir de leur trajectoire, cette partie aura la même allure que la trajectoire entière. Ces objets sont des "fractales statistiques". Mais attention, contrairement aux "fractales déterministes", en zoomant on ne retombe pas exactement sur le même dessin. On obtient seulement un dessin ayant vaguement la même "allure". Mathématiquement cela signifie que toutes les propriétés en loi sont les mêmes c.à.d que les probabilités calculées avec le processus initial sont identiques que les probabilités calculées après avoir zoomé. Les processus stables sont relativement bien connus, on peut les simuler facilement (voir l'annexe B).

**Le mouvement brownien :** est le plus célèbre des processus de Lévy. Non seulement c'est un processus stable, mais en plus il est continu (il ne fait aucun saut), ce qui ne l'empêche pas d'être complexe (il est à variation infinie).

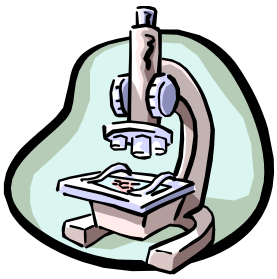



Simulation d'un mouvement brownien

Y’en a marre des maths ! Maintenant nous allons parler physique. L’étude des processus de Lévy a débutée par l’étude du mouvement brownien, qui elle même a été motivée par la découverte d’un Physicien…

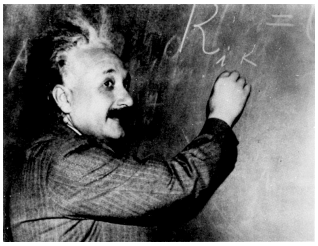
## M. Brown fait une bien étrange découverte.

Au début du XIX$^{e}$ siècle, dans un sombre laboratoire de physique, le chercheur Brown découvrit un phénomène bizarre. Observant un verre d'eau avec un bon microscope, il y vit des petits zigouigouis qui s'agitaient dans tous les sens ; difficiles à décrire : c'était des sortes de lignes tarabiscotées, des serpentins frénétiques qui avançaient en s'emmêlant sans aucune logique ; il cru tout naturellement avoir détecter la trace de bestiole vivant dans l'eau. Il zooma pour essayer de voir leur tête, mais dans sa lentille apparaissait toujours le même schéma. Notre infortuné chercheur eut beau pousser son microscope au maximum de sa résolution, rien à faire, toujours les mêmes zigouigouis. Il fit alors bouillir sont eau pour tuer ce qu'il pensait être des bactéries, mais cela ne changea rien. Ne se démontant pas, il congela son eau, y injecta du cyanure, du bleu de méthylène, de la mort au rat et de la vodka, mais rien y fit, les bestioles subsistaient toujours. Il s'aperçut tout de même que plus l'eau était froide et moins vite les zigouigouis s'agitaient.



**L'explication :** un siècle plus tard, Einstein en personne ! élucida ce mystère : Loin d'être la trace d'une vie quelconque, le mouvement brownien est simplement la trace de poussières microscopiques qui sont en permanence heurtées par des molécules d'eau. Ces poussières sont vraiment très petites, ce qui explique que Brown n'ai pu les observer (avec les moyens de son époque) mais, comparées à la taille des molécules, elles sont suffisamment grosses pour être sans arrêt choquées, ce qui provoque un mouvement complètement désordonné, sans aucune ligne droite. Quelque soit la résolution employé, Brown n'a observé que des mouvements moyens et quelque soit l'échelle ces mouvements moyens ont globalement le même aspect de lignes tarabiscotées. Quand l'eau refroidie, les molécules $H_2O$ se calment et par conséquent les poussières son moins secouées.

Par l'un de ses raccourcis étonnant dont est capable le cerveau d'un géni, Einstein réussit à estimer précisément la concentration des molécules d'eau, en simplement observant le désormais célèbre mouvement brownien.



**La modélisation :** A tout phénomène physique, on peut associer un modèle : c.à.d. un objet mathématique abstrait qui ressemble au phénomène. Ainsi, au mouvement brownien observé, Einstein associa le Mouvement brownien théorique : un processus qui répond aux trois axiomes suivants :

Axiome 1. *Accroissement indépendant* : (un accroissement est un bout de trajectoire). Cet axiome signifie que les bouts de trajectoires sont indépendants les uns des autres. Ceci correspond bien à la réalité physique : La masse de la poussière étant très faible, elle a très peu d'inertie, de plus elle reçoit des chocs incessants, nous pouvons donc considérer qu'à chaque instant, la poussière se meut sans être influencée par son mouvement antérieur.

Axiome 2. *Accroissement stationnaire* : le mouvement de la poussière a le même aspect au court du temps. Ceci est logique puisque les conditions de l'expérience ne varient pas. Cet axiome serait mis en défaut si, par exemple, on s'amusait à chauffer l'eau au fur et à mesure de l'expérience.

Axiome 3. *Continuité* : La continuité est l'absence de saut. Sauter, c'est disparaître à un endroit et réapparaître instantanément à un autre endroit. Une poussière étant un corps solide ordinaire, elle ne saute pas. En fait, dans la nature, seules quelques particules élémentaires peuvent réellement sauter. A l'inverse, les objets mathématiques abstraits peuvent sauter sans restrictions aucunes. Cet axiome est donc indispensable si l'on veut bien modéliser la poussière.

**Le Brownien est un Lévy :** Un processus de Lévy est simplement un processus qui vérifie les axiomes 1 et 2 mais pas forcément l'axiome 3.
- Quel est donc le lien entre les dés-boules du début et les axiomes 1 et 2 ?
Rappelez-vous que chaque trajectoire d'un processus de Lévy peut-être fabriquée en lançant plusieurs fois le même dé-boule. On ne triche pas : le premier lancé n'influe pas sur le deuxième, ni sur les suivants ; les accroissements sont donc bien "indépendants". De plus, puisqu'on lance plusieurs fois le même dé-boule, les accroissements sont bien "stationnaires".

**La recherche avance !** (donnez vos sous !) Le mouvement brownien est devenu l'objet fétiche de nombreux probabilistes, physiciens et analystes : il est présent dans les modélisations physiques mettant en jeu des particules, il sert aussi à calculer des équations différentielles complexes. Ses propriétés sont si nombreuses qu'il ne se passe pas un jour sans qu'un article à son sujet ne soit publié. Les processus de Lévy, qui en sont la généralisation, sont eux aussi très à la mode ; mais ils sont plus complexe, et nous les connaissons moins bien.

**Conclusion :** La famille des processus de Lévy est si riche et ses propriétés si variées que son étude peut s'avérer aussi fascinante que celle des objets célestes. Malheureusement cette fascination est réservée à un public plus restreint. Il manque à cette discipline quelques belles photos, un Hubert Rive et peut-être aussi un brin de Métaphysique. Mais qui sait ? peut-être un jour nous découvrirons que le cour de la vie est une trajectoire de Lévy.

Somme, que je voye un abysme de science. Car doresenavant que tu devienes homme et te fais grand, il te fauldra sortir de ceste tranquilité et repos d'estude : et apprendre la chevalerie et les armes, pour defendre ma maison, et noz amys secourir en tous leurs affaires, contre les assaulx des malfaisans. Et veulx que, de brief, tu essayes combien tu as proffité : ce que tu ne pourras mieulx faire que soutenant theses en tout sçavoir, publicquement, envers tous et contre tous, et hantant les gens lettrez, qui sont tant à Paris (VI) comme ailleurs.

François Rabelais
Pantagruel (1532)