



**HAL**  
open science

# De la résolution numérique des EDP à l'extraction de caractéristiques linéiques dans les images : application à la détection multi-échelles d'un arbre vasculaire

Benoit Tremblais

## ► To cite this version:

Benoit Tremblais. De la résolution numérique des EDP à l'extraction de caractéristiques linéiques dans les images : application à la détection multi-échelles d'un arbre vasculaire. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Poitiers, 2002. Français. NNT : . tel-00349464

**HAL Id: tel-00349464**

**<https://theses.hal.science/tel-00349464>**

Submitted on 31 Dec 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

pour l'obtention du Grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS  
(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)  
(Diplôme National - Arrêté du 30 Mars 1992)

*École Doctorale* : **Sciences Pour l'Ingénieur**  
*Secteur de Recherche* : **Traitement du signal et des images**

Présentée par :  
Benoit TREMBLAIS

## De la résolution numérique des EDP à l'extraction de caractéristiques linéiques dans les images : application à la détection multi-échelles d'un arbre vasculaire

Directeur de Thèse :  
Michel LÉARD  
Co-encadrement de Thèse :  
Bertrand AUGEREAU

Soutenance prévue le 12 décembre 2002 devant la Commission d'Examen composée de :

M. Philippe Bolon, Professeur, Université de Savoie, LAMII ..... Rapporteur  
Mme Isabelle Bloch, Professeur, ENST Paris, TSI ..... Rapporteur  
M. José Allal, Professeur, Université de Poitiers, praticien hospitalier ..... Examineur  
M. Michel Ménard, Maître de Conférences, HDR, Université de La Rochelle, L3I ..... Examineur  
M. Michel Léard, Professeur, Université de Poitiers, IRCOM-SIC ..... Examineur  
M. Bertrand Augereau, Maître de Conférences, Université de Poitiers, IRCOM-SIC ..... Examineur  
M. Damien Coisne, Médecin des Hôpitaux, CHRU de Poitiers ..... Invité  
M. Maciej Orkisz, Maître de Conférences, CREATIS ..... Invité



# Remerciements

En premier lieu, je suis très reconnaissant à Isabelle BLOCH et Philippe BOLON d'avoir accepté de relire cette thèse et d'en être les rapporteurs. La version finale de ce mémoire a bénéficié de leur lecture très attentive et de leurs remarques précieuses. Je tiens à remercier le Professeur José ALLAL d'avoir accepté d'être président du jury ainsi que Michel MÉNARD, Damien COISNE et Maciej ORKISZ d'être venus assister à la présentation de ce travail.

Je voudrais remercier tout particulièrement Bertrand AUGEREAU qui m'a dirigé tout au long de ces trois années de thèse. Il a toujours été disponible, à l'écoute de mes nombreuses questions, et s'est toujours intéressé à l'avancée de mes travaux. Les nombreuses discussions que nous avons eues ainsi que ses conseils avisés sont pour beaucoup dans le résultat final de ce travail. Enfin, ses nombreuses relectures et corrections stylistiques et scientifiques de cette thèse ont été très appréciables. Cette thèse lui doit beaucoup.

Je remercie Michel LÉARD d'avoir co-encadré ce travail de thèse. Il m'a tout d'abord permis d'intégrer l'équipe SIC du laboratoire IRCOM en me proposant un sujet très intéressant, puis il a sut me faire confiance et me laisser une entière liberté pour orienter mes travaux de recherche.

Je remercie aussi tous les membres du groupement Fluides Imagerie Signal Cardiovasculaire (FISC) avec qui j'ai eu le plaisir de pouvoir travailler, notamment, Michel MÉNARD, Vincent COURBOULAY et Damien COISNE.

Je remercie la région Poitou-Charentes d'avoir accepté de financer ces trois années de travail.

Je tiens à remercier tout particulièrement Julien, Aline, Françoise et Philippe pour leur relectures attentives de parties ou de la totalité ce mémoire. Ils ont participé à la qualité orthographique et rédactionnelle de ce manuscrit.

Je remercie également tous les thésards, stagiaires et permanents du laboratoire pour la bonne ambiance de travail mais également pour les nombreux bons moments passés ensemble. Entre autres Laurent, Guillaume, Julien, Philippe, Chaker, Anne-So, Fred, Benoit, Pierre, Christian, Anne-Marie, Majdi, Jacques, Eric, Xavier... Il ne s'agirait pas d'oublier nos secrétaires préférées Françoise et Sylvie pour leur sympathie et leur disponibilité à régler les petits problèmes administratifs. Sans leur volonté nous n'aurions pas eu autant de croissants et pains aux chocolats à la pause café. Ils vont peut être être surpris (il ont plutôt l'habitude que l'on se plaigne d'eux) mais je tiens aussi à remercier Eric et Manu, les administrateurs réseau du laboratoire car pour ma part, je n'ai rencontré que très peu de problèmes informatiques durant ces trois années de thèse.

Enfin, je ne remercierai jamais assez Aline pour son soutien, sa patience et ses encouragements durant ces trois années et notamment durant les derniers mois de rédaction.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>9</b>
Notations	15
<b>I Résolution numérique des EDP pour le traitement d'images</b>	<b>19</b>
<b>2 Notions sur le traitement multi-échelles</b>	<b>21</b>
2.1 Historique . . . . .	22
2.2 Axiomatisation du traitement des images . . . . .	23
2.2.1 Les axiomes architecturaux . . . . .	23
2.2.2 Les axiomes géométriques et morphologiques . . . . .	24
2.2.3 Théorèmes découlant des axiomes . . . . .	26
<b>3 EDP pour l'amélioration d'images : état de l'art</b>	<b>29</b>
3.1 Lissage par EDP . . . . .	29
3.1.1 Filtrage multi-échelles linéaire . . . . .	29
3.1.2 Filtrage multi-échelles non linéaire . . . . .	30
3.1.3 Filtrage par matrice de diffusion . . . . .	40
3.1.4 Approches par géométrie différentielle . . . . .	43
3.1.5 Diffusion vectorielle . . . . .	46
3.2 Rehaussement et EDP : filtres de choc . . . . .	47
3.3 Combinaison du lissage et du rehaussement . . . . .	47
3.4 Discrétisation des EDP . . . . .	53
3.4.1 Schéma explicite (ou Euler avant) . . . . .	54
3.4.2 Schéma semi-implicite . . . . .	54
3.4.3 Schéma implicite (ou Euler rétrograde) . . . . .	54
3.4.4 Autres méthodes de discrétisation . . . . .	55
3.4.5 Choix d'un schéma numérique . . . . .	55
<b>4 <math>\lambda</math>-résolution des EDP</b>	<b>57</b>
4.1 Conditions de convergence des EDP de diffusion « classiques » . . . . .	57
4.1.1 Mise en place du processus de traitement . . . . .	58
4.1.2 Analyse de la convergence du processus généralisé . . . . .	60
4.1.3 Quelques déclinaisons de la propriété de convergence . . . . .	65

4.1.4	Sur le choix de $\lambda$ . . . . .	66
4.2	Étude dynamique d'un processus de diffusion linéaire . . . . .	67
4.2.1	Application aux images en niveaux de gris . . . . .	67
4.2.2	Application aux images en couleur . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Filtres de choc et morphologie mathématique</b>	<b>87</b>
5.1	Filtre de choc et opérateurs d'ouverture et de fermeture . . . . .	87
5.2	Résultats . . . . .	88
5.2.1	Performances de rehaussement . . . . .	89
5.2.2	Sensibilité au bruit . . . . .	91
5.2.3	Stabilité du processus . . . . .	94
5.3	Combinaison avec un terme de lissage . . . . .	94
5.4	Conclusion . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Lissage par courbure moyenne d'images vectorielles</b>	<b>97</b>
6.1	Définitions de courbures pour des images vectorielles . . . . .	97
6.1.1	Définition de la première forme fondamentale . . . . .	97
6.1.2	Définition de la seconde forme fondamentale et des courbures . . . . .	98
6.1.3	Choix d'un vecteur normal à la surface . . . . .	99
6.2	Lissage d'images vectorielles par une EDP de courbure moyenne . . . . .	101
6.2.1	Principe . . . . .	101
6.2.2	Application au lissage d'images en couleur . . . . .	102
6.3	Détection des lignes centrales dans une image vectorielle . . . . .	102
6.3.1	Application à la détection des lignes centrales dans une image en couleur	105
<b>II Extraction de caractéristiques linéiques dans des angiographies par rayons X 2D</b>		<b>109</b>
<b>7</b>	<b>Coronographie par rayons X 2D</b>	<b>111</b>
7.1	Contexte médical . . . . .	111
7.1.1	Quelques notions d'anatomie . . . . .	111
7.1.2	Pathologie des artères coronaires : l'athérosclérose . . . . .	114
7.1.3	Traitements des pathologies . . . . .	116
7.1.4	Choix de la modalité d'imagerie des vaisseaux . . . . .	116
7.2	Coronographie par rayons X 2D . . . . .	117
7.2.1	Description de l'angiographe 2D utilisé . . . . .	117
7.2.2	Déroulement de l'examen coronographique . . . . .	118
7.2.3	Contraintes et limitations du système d'imagerie . . . . .	119
<b>8</b>	<b>Détection des lignes centrales et des contours des vaisseaux sanguins</b>	<b>123</b>
8.1	Caractérisation des vaisseaux sanguins . . . . .	124
8.1.1	Diverses définitions de crêtes et vallées . . . . .	126
8.2	Approches utilisant la morphologie mathématique . . . . .	128
8.3	Méthodes de suivi . . . . .	128
8.4	Méthodes utilisant les modèles déformables . . . . .	130
8.5	Analyse multi-résolutions . . . . .	131

8.6	Analyse multi-échelles linéaire . . . . .	131
8.6.1	Stabilité du détecteur . . . . .	132
8.6.2	Détermination de l'échelle optimale . . . . .	132
8.6.3	Détermination de l'intervalle d'échelles . . . . .	133
8.6.4	Échantillonnage de l'espace-échelles . . . . .	134
8.6.5	Fusion des informations de l'espace-échelles . . . . .	134
<b>9</b>	<b>Détection multi-échelles des lignes centrales des artères coronaires</b>	<b>141</b>
9.1	Réponse à une vallée/crête . . . . .	141
9.1.1	Définition étendue de vallée et crête . . . . .	142
9.1.2	Détermination d'une réponse aux plis . . . . .	142
9.2	Évaluation de diverses méthodes d'extraction des lignes centrales . . . . .	146
9.3	Un traitement multi-échelles de détection des lignes centrales des vaisseaux sanguins . . . . .	150
9.3.1	Détermination des paramètres de l'espace-échelles . . . . .	154
9.3.2	Échantillonnage du paramètre échelle . . . . .	157
9.3.3	Stabilité du détecteur de ligne de fond . . . . .	157
9.3.4	Normalisation des réponses . . . . .	159
9.3.5	Détection multi-échelles des lignes centrales . . . . .	159
9.4	Résultats . . . . .	162
9.5	Autres applications . . . . .	168
9.5.1	Détection des vaisseaux sanguins de la rétine . . . . .	168
9.5.2	Analyse de gravures sur roche . . . . .	168
<b>10</b>	<b>Modélisation de l'arbre artériel détecté</b>	<b>171</b>
10.1	Proposition d'un modèle . . . . .	172
10.2	Détection automatiques de points particuliers . . . . .	172
10.2.1	Les points extrêmes . . . . .	173
10.2.2	Les points de bifurcation . . . . .	174
10.2.3	Les points d'intersection . . . . .	175
10.3	Estimation du diamètre des artères . . . . .	176
10.3.1	Mise en œuvre . . . . .	176
10.3.2	Résultats . . . . .	176
10.4	Appariement des deux projections . . . . .	179
<b>11</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>183</b>
<b>A</b>	<b>Fonctions de diffusions et fonctions potentielles</b>	<b>187</b>
<b>B</b>	<b>Quelques notions de géométrie différentielle et riemannienne</b>	<b>189</b>
B.1	Notations . . . . .	189
B.2	Modélisation d'une image par un empilement d'ensembles de niveau . . . . .	190
B.2.1	Dérivées premières dans la base $(\eta, \xi)$ . . . . .	191
B.2.2	Dérivées secondes dans la base $(\eta, \xi)$ . . . . .	192
B.3	Modélisation d'une image par une surface . . . . .	193
B.3.1	Première forme fondamentale . . . . .	194
B.3.2	Seconde forme fondamentale . . . . .	197

---

B.4	Relation entre les courbures des isophotes et les courbures 3D . . . . .	199
<b>C</b>	<b>Modèles de profils de ligne</b>	<b>201</b>
C.1	Notation . . . . .	201
C.2	Modèle barre . . . . .	201
C.3	Modèle gaussien . . . . .	202
C.4	Modèle parabolique . . . . .	202
C.5	Modèle triangulaire . . . . .	202
C.6	Modèle issu du modèle du vaisseau . . . . .	203
<b>D</b>	<b>Divers gradients en couleur</b>	<b>205</b>
D.1	Gradient marginal . . . . .	205
D.2	Gradients vectoriels de DI-ZENZO et LEE-COK . . . . .	205
D.3	Gradient de SOCHEN et <i>al.</i> . . . . .	206
<b>E</b>	<b>Chaîne d'acquisition par rayons X</b>	<b>209</b>
E.1	Générateur de rayons X . . . . .	209
E.2	Interaction des rayons X avec la matière . . . . .	209
E.3	Systèmes d'imagerie . . . . .	211

# Chapitre 1

## Introduction

### Contexte

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le contexte du traitement d'images. Ce domaine des sciences appliquées a connu un développement considérable ces dernières années, ce développement étant notamment lié à l'évolution rapide des performances de calcul et de stockage des ordinateurs. Le traitement d'image vise à automatiser des traitements qui se faisaient auparavant visuellement ou manuellement et couvre actuellement un nombre varié et grandissant d'applications telles que l'imagerie satellitaire, l'imagerie médicale, la vidéo surveillance, le cinéma, le contrôle non destructif, l'imagerie ultra-sonore et acoustique... Dans une application d'analyse d'images on distingue couramment deux types de traitements dits traitements de bas niveau et traitements de haut niveau [Mar82]. Les traitements de bas niveau concernent les traitements de nature numérique effectués sans tenir compte du contenu de l'image. Ils consistent généralement en une étape de prétraitement, c'est-à-dire en l'élimination du bruit et du flou, puis en une étape de segmentation, partition de l'image en sous-régions homogènes. Les traitements de haut niveau concernent des traitements visant à interpréter le contenu de l'image. Ici, nous nous intéressons plus particulièrement aux problématiques de prétraitement de bas niveau et d'extraction de caractéristiques dans le cadre d'une application d'imagerie médicale.

### Motivations

Les travaux présentés dans ce document ont été motivés par une application pratique visant à développer un outil informatique d'aide au diagnostic des pathologies cardio-vasculaires. Les maladies cardio-vasculaires restent la seconde cause de mortalité dans le monde, après les maladies infectieuses, et la première cause de mortalité dans les pays industrialisés [Led02] : quinze millions de personnes en meurent chaque année. Par conséquent, de nombreux travaux de recherche ont été entrepris afin de mieux comprendre et appréhender les pathologies cardiaques. La pathologie la plus courante est l'*athérosclérose*, elle atteint la paroi interne des artères irriguant le cœur dites *artères coronaires*. Les lésions affectant ces

artères engendrent le plus souvent une occlusion partielle ou totale du calibre artériel appelée *sténose*. L'écoulement du sang alimentant le cœur en oxygène en est perturbé et peut dans le pire des cas, aboutir à la mort des cellules du cœur, c'est-à-dire à un infarctus du myocarde.

Le travail accompli dans cette thèse s'inscrit dans le cadre d'un projet du groupement scientifique régional Fluide Imagerie Signal Cardio-vasculaire (FISC) qui comprend le Laboratoire Signal Image et Communications (SIC) de l'Université de Poitiers, le Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques (LEA) de Poitiers, le Laboratoire de Recherche Imagerie Cardio-vasculaire et Dynamique Circulatoire du Département Médico-Chirurgical de Cardiologie du CHRU de Poitiers et le Laboratoire d'Informatique et d'Imagerie Industrielle (L3I) de La Rochelle. Ce groupement scientifique a pour objectif le développement, en partenariat avec des industriels, de la recherche en imagerie, signal, et mécanique des fluides appliqués à la pathologie cardio-vasculaire. Le projet nous concernant se place dans le cadre de l'imagerie des vaisseaux, ou *angiographie*. Il s'agit d'étudier et de développer une méthode générale pour détecter, reconstruire, analyser et visualiser les vaisseaux sanguins et plus particulièrement les artères coronaires. L'élaboration d'une image de synthèse tridimensionnelle permettra d'effectuer des simulations d'écoulements sanguins sur des segments artériels pathologiques et ainsi d'apporter une indication symptomatique et une meilleure évaluation du retentissement hémodynamique des sténoses sur la perfusion myocardique. Le médecin pourra alors décider d'un traitement approprié à la pathologie. Actuellement, la modalité d'imagerie des vaisseaux la mieux adaptée à l'étude des artères coronaires et la plus utilisée est l'angiographie par rayons X 2D<sup>1</sup>. Elle permet de faire apparaître sur des images bidimensionnelles, la projection des artères suivant plusieurs incidences. Il s'agit donc, à partir de ces données angiographiques de proposer au médecin une reconstruction 3D des artères coronaires. Lorsque, comme dans le cas présent, le nombre d'incidences est faible, l'utilisation d'un modèle géométrique tridimensionnel des vaisseaux est nécessaire pour pallier le manque d'informations fournies par les images de projection. Dans ce contexte, les vaisseaux sont souvent modélisés par des cylindres généralisés et sont par conséquent caractérisés par un ensemble de coupes centrées sur une trajectoire virtuelle passant par les centres de celle-ci. La démarche générale d'une reconstruction 3D comprend alors les étapes suivantes [CGCR94] (cf. figure 1.1) :

1. prétraitement des images angiographiques : il s'agit de faire ressortir les vaisseaux par rapport au fond de chaque image ;
2. extraction des lignes centrales et contours des vaisseaux : cette étape consiste d'une part à détecter les points appartenant à la ligne virtuelle passant au centre des vaisseaux sanguins et d'autre part à détecter ceux appartenant à la frontière séparant les vaisseaux du fond de l'image ;
3. formation d'entités structurelles : les points détectés dans l'étape précédente sont organisés entre eux de manière à former les deux entités structurelles que sont les lignes centrales et les contours des artères. Cela permet d'obtenir une information sur la localisation et la morphologie des vaisseaux détectés ;
4. appariement des structures 2D détectées : il s'agit de mettre en correspondance les segments artériels détectés correspondant aux mêmes structures anatomiques ;
5. reconstruction 3D : la détection des lignes centrales de chaque incidence permet d'estimer la localisation tridimensionnelle de la ligne centrale tridimensionnelle des vais-

---

<sup>1</sup>Lorsque le moyen d'imagerie des vaisseaux concerne plus particulièrement les artères coronaires on parle aussi de coronographie.

seaux, la détection des contours permettant ensuite d'estimer les paramètres de la coupe du cylindre généralisé, et ainsi d'« habiller » la ligne centrale des vaisseaux.

Ici, nous nous intéressons plus particulièrement aux quatre premières étapes de la démarche. Ces étapes sont d'une importance toute particulière puisqu'elles conditionnent directement la qualité de la reconstruction 3D qui suivra.

Les images coronographiques sont des images particulièrement difficiles à traiter puisqu'elles sont bruitées, floues, présentent de fortes variations de contraste et comportent des structures de différentes tailles, *i.e* les vaisseaux. Nous souhaitons donc obtenir une bonne modélisation des vaisseaux, ce qui passe par une caractérisation de leurs lignes centrales et de leurs diamètres. Il s'agit alors de détecter automatiquement les lignes centrales et les contours de vaisseaux sanguins de différents diamètres à partir d'images bruitées présentant de fortes variations de contraste. La solution classiquement adoptée pour résoudre ce problème consiste en la mise en œuvre d'une fonction de réponse au sein d'un processus d'analyse multi-échelles linéaire où la fonction réponse met en évidence le centre des vaisseaux à une échelle donnée (ou taille donnée), et où l'analyse multi-échelles fournit des images à différents niveaux de détails, permettant ainsi de traiter des vaisseaux de diamètres divers. La réponse et l'analyse multi-échelles sont généralement mises en œuvre en utilisant respectivement les outils mathématiques que sont la géométrie différentielle et les Équations aux Dérivées Partielles (EDP). Ces deux formalismes fournissent la base mathématique aux travaux réalisés dans cette thèse.

## Contributions

Les contributions de cette thèse concernent essentiellement les domaines de l'amélioration d'images par EDP et de l'extraction des lignes centrales.

**Amélioration d'image par EDP** Nous apportons trois contributions principales dans le domaine de l'amélioration d'images par EDP. La première concerne les traitements relatifs à la résolution numérique des EDP « classiques » de lissage. L'originalité de cette approche est de considérer les techniques de résolution des EDP sous l'angle des méthodes itératives dites de recherche de point fixe. Nous obtenons alors une méthode garantissant la convergence du processus de résolution et fournissant ainsi des espaces multi-échelles compacts et fiables. En utilisant ces résultats théoriques, nous présentons une méthode originale de résolution de l'équation de diffusion linéaire qui permet, en contrôlant la vitesse de convergence du processus de diffusion, de proposer une analyse multi-échelles linéaire qui a la particularité de préserver les contours. Nous obtenons ainsi un nouveau filtre de diffusion isotrope présentant de meilleures performances de débruitage qu'un filtre de diffusion anisotrope. Par ailleurs, nous utilisons ce processus dans la phase de prétraitement d'un algorithme de détection des contours. Les contours obtenus sont bien détectés et bien localisés que ce soit sur des images en niveaux de gris ou des images en couleur. La seconde contribution concerne le rehaussement d'image. Nous introduisons une nouvelle EDP de filtre de choc inspirée de la morphologie mathématique qui permet de rehausser les contours de façon stable et non oscillante avec une moindre sensibilité au bruit que le premier filtre de choc proposé

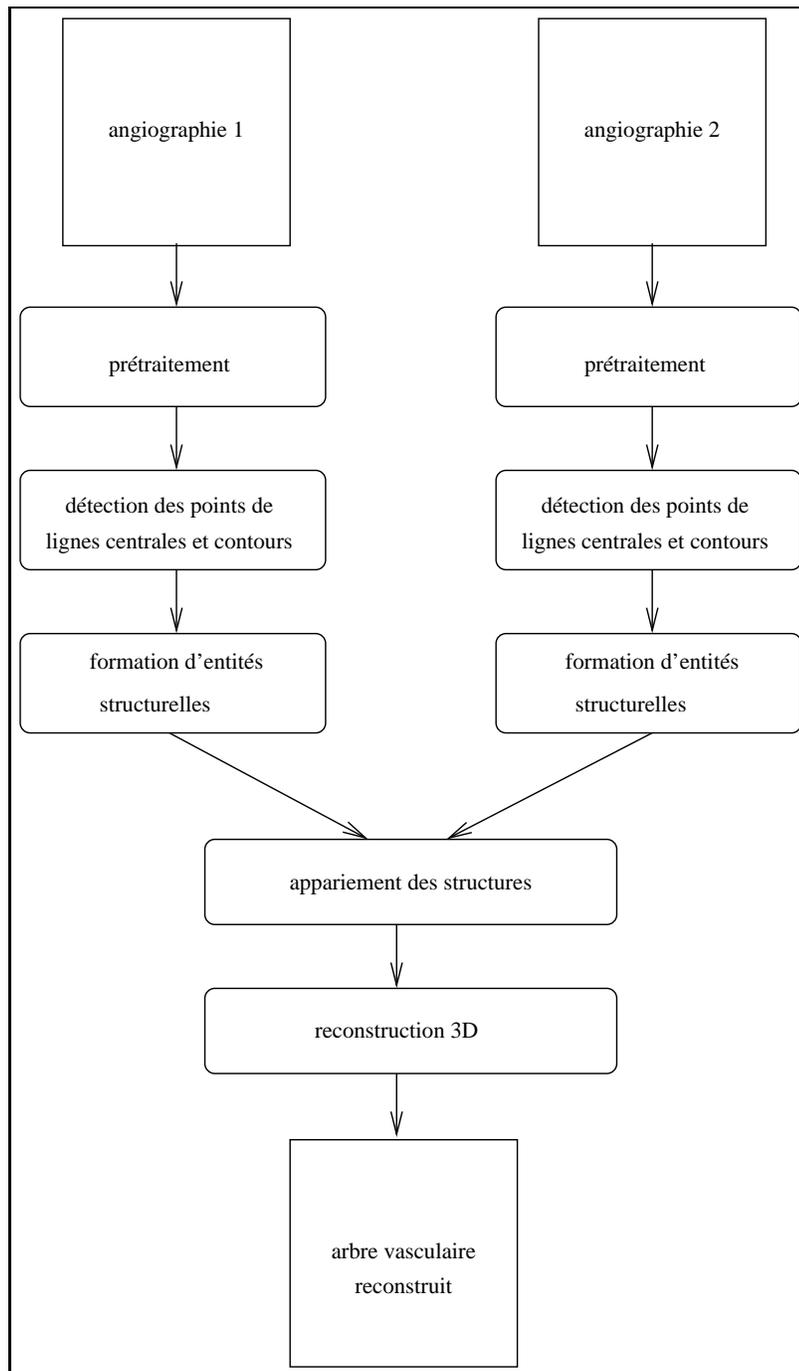


FIG. 1.1 – Schéma général de la démarche de reconstruction 3D.

par RUDIN [Rud84]. Enfin, la troisième et dernière contribution consiste en l'utilisation du formalisme de la géométrie différentielle et riemannienne pour proposer des définitions de courbures adaptées aux images vectorielles. Cela nous permet d'introduire une nouvelle EDP de lissage par courbure moyenne ainsi qu'un moyen de mettre en évidence les vallées et les crêtes dans des images vectorielles. Nous appliquons ce formalisme à l'étude de différentes images en couleur.

**Détection des lignes centrales** Tout d'abord, nous définissons de nouvelles fonctions de réponse aux vallées et aux crêtes. Ces fonctions dépendent des deux courbures principales de la surface image et sont définies de manière à présenter des valeurs élevées sur les points de la surface de type vallée et crête. De plus, nous proposons une nouvelle méthode d'extraction des lignes de fond qui fournit de bons résultats, notamment en termes de continuité de localisation. Puis, nous proposons une stratégie automatique de détection multi-échelles des lignes centrales des vaisseaux sanguins. Cette méthode fournit des résultats de bonne qualité, que ce soit en termes de continuité ou de localisation, malgré la présence de sténoses sévères et le mauvais contraste des angiographies. De surcroît, le temps d'exécution de l'algorithme est tout à fait raisonnable. Par ailleurs, en modifiant quelques paramètres, l'algorithme peut facilement être adapté à l'étude d'autres modalités d'imagerie. Enfin, nous proposons de modéliser l'arbre artériel détecté par une structure de graphe attribué. Nous mettons en œuvre un algorithme permettant de coder cette structure. Cela offre la possibilité au médecin d'interagir sur la détection proposée et d'avoir accès à une estimation en pixels du diamètre des artères.

## Organisation du document

Ce manuscrit est organisé en deux parties.

**Première partie** La première partie traite essentiellement des problèmes d'amélioration d'images par EDP et comporte cinq chapitres. Les deux premiers chapitres présentent le contexte de cette partie, les trois suivants présentent nos contributions sur le sujet.

Le premier chapitre présente l'axiomatique d'ALVAREZ, GUICHARD, LIONS et MOREL [AGLM92]. Celle-ci permet à la fois d'unifier les analyses multi-échelles existantes et de faire le lien entre les traitements multi-échelles et les diverses EDP classiques du traitement d'images qui seront présentées par la suite. Le deuxième chapitre retrace les principales contributions de la littérature concernant l'utilisation des équations aux dérivées partielles pour l'amélioration des images. Les principales EDP de lissage sont en premier lieu présentées. Elles sont déclinées suivant les catégories suivantes : le filtrage multi-échelles linéaire, le filtrage multi-échelles non linéaire, le filtrage par matrice de diffusion, l'approche par géométrie différentielle et le filtrage par diffusion vectorielle. Par la suite, nous présentons quelques EDP de rehaussement, fondées sur le concept des filtres de choc. Pour finir, des EDP combinant lissage et rehaussement sont présentées. Dans la mesure du possible, nous avons essayé d'illustrer par des exemples, l'effet des EDP présentées dans ce chapitre. Le troisième chapitre vise à introduire un point de vue original sur les processus de résolution des EDP du

traitement d'images. Les conditions générales de convergence sur l'EDP de diffusion linéaire et l'EDP de diffusion non linéaire sont tout d'abord données. Puis, un nouveau processus de résolution de l'EDP de diffusion linéaire est proposé. Ses performances de débruitage sont comparées à celle du filtre de PERONA et MALIK [PM90]. Ce processus est finalement utilisé comme prétraitement dans des algorithmes de segmentation d'images en niveaux de gris et d'images couleur. Le quatrième chapitre traite plus particulièrement des problèmes de rehaussement d'images par EDP. Nous y présentons tout d'abord une nouvelle méthode de rehaussement d'images fondée sur les filtres de choc et la morphologie mathématique. Nous effectuons ensuite une comparaison en termes de rehaussement et de sensibilité au bruit entre les performances obtenues avec ce filtre et celles du filtre de choc initialement proposé par RUDIN [Rud84]. Finalement, nous introduisons une nouvelle EDP alliant lissage et rehaussement. Le cinquième et dernier chapitre de cette partie vise dans un premier temps à définir les courbures principales, moyenne et totale d'une image vectorielle. Puis, une nouvelle EDP de lissage fondée sur la courbure moyenne d'une image vectorielle ainsi qu'une méthode de détection des lignes centrales y sont proposées. Ces résultats théoriques sont finalement appliqués au lissage et à l'extraction des lignes centrales dans des images couleur.

**Seconde partie** La seconde partie traite plus particulièrement de l'application médicale envisagée dans cette thèse, et comporte quatre chapitres. Le premier chapitre de cette partie est consacré à la présentation du contexte et des enjeux médicaux liés à cette application. Nous y exposons quelques notions d'anatomie cardiaque puis nous y décrivons le principe de la coronographie par rayons X 2D. Le deuxième chapitre présente un état de l'art des méthodes concernant la détection des lignes centrales et des contours des vaisseaux sanguins. Par la suite, nous comparons et évaluons ces méthodes dans le cadre de notre application. Dans le troisième chapitre, après avoir défini diverses nouvelles fonctions de réponse aux vallées et aux crêtes, nous proposons deux nouvelles méthodes d'extraction des lignes de fond que nous comparons qualitativement à diverses autres méthodes. Puis, nous mettons en œuvre l'une des nouvelles fonctions de réponse et l'une des nouvelles méthodes d'extraction proposées dans un algorithme original de détection multi-échelles linéaire des lignes de fond. Finalement, nous présentons les résultats obtenus sur diverses coronographies, puis sur d'autres types d'images dont une angiographie rétinienne et une image archéologique de roche. Le quatrième et dernier chapitre est consacré à un traitement de haut niveau consistant à organiser les lignes centrales de manière à former l'arbre vasculaire détecté. Nous présentons pour cela une méthode simple et efficace de détection automatique des bifurcations, intersections et des points extrêmes sur des ensembles de droites 8-connexes. Nous estimons par ailleurs le diamètre des segments détectés et proposons finalement une stratégie d'appariement manuel de ces structures selon chacune des incidences.

# Notations

---

## Définition de l'image

---

$n$	dimension de l'image ;
$\mathbb{R}$	ensemble des réels ;
$\mathbb{C}$	ensemble des complexes ;
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	domaine de l'image ;
$\partial\Omega$	frontière de $\Omega$ ;
$\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$	un point de l'image appartenant à $\Omega$ ;
$I(\mathbf{x})$	l'intensité de l'image au point $\mathbf{x} \in \Omega$ ;
$\mathbf{I}(\mathbf{x}) = (I^1(\mathbf{x}), \dots, I^P(\mathbf{x}))$	image vectorielle de dimension $P$ ;
$I$	image ;
$t$	variable réelle, correspondant à l'échelle ;
$I(\mathbf{x}, t)$	fonction intensité de l'image en fonction de l'échelle $t$ ;
$\Delta t$	accroissement selon la variable $t$ ;
$\delta x_i$	accroissement selon la variable spatiale $x^i$ ;
$\mathbf{1}_i$	vecteur canonique de la $i$ -ème composante de $\mathbb{R}^n$ ;
$\Delta \mathbf{x}_i = \delta x_i \mathbf{1}_i$	vecteur d'échantillonnage spatial suivant la $i$ -ème composante de $\mathbf{x}$ ;
$\mathbf{I}^n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{I}(\mathbf{x}, n\Delta t)$	image $\mathbf{I}$ à l'étape $n$ d'un processus itératif ;
$\Sigma$	variété de dimension 2 ;
$M$	variété de dimension $p$ ;
$\mathbf{S} = (\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^2, \dots, \mathcal{S}^p)$	application de $\Sigma$ dans $M$ désignant la surface image.

---

## Espaces vectoriels

---

$\mathcal{E}$	espace vectoriel normé quelconque ;
$\ \mathbf{v}\ _{\mathcal{E}}, \mathbf{v} \in \mathcal{E}$	norme associée à l'espace normé $\mathcal{E}$ ;
$\ \mathbf{v}\ , \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$	norme euclidienne du vecteur $\mathbf{v}$ ;
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{E}}, \mathbf{x} \in \mathcal{E}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$	produit scalaire de deux vecteurs de $\mathcal{E}$ ;
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$	produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ;
$ z , z \in \mathbb{C}$	module de la variable complexe $z$ ;
$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$	matrice de dimension $n$ d'éléments $a_{ij}$ ;
$(\cdot)^T$	opérateur de transposition ;
$\mathcal{H}$	matrice hessienne ;
$\mathcal{W}$	matrice de WEINGARTEN ;

$F_1$	matrice associée à la première forme fondamentale ;
$F_2$	matrice associée à la seconde forme fondamentale ;
$T$	espace tangent à $\mathbf{S}$ ;
$T^\perp$	espace orthogonal à $T$ ;
$\det(A)$	déterminant de la matrice $A$ ;
$\text{trace}(A)$	trace de la matrice $A$ ;
*	produit de convolution .

---

Fonctions

---

$\Phi_i(\mathbf{x}, t)$	fonction de pondération selon la $i$ -ème composante ;
$\Psi_i(\mathbf{x}, t)$	fonction de diffusion selon la $i$ -ème composante ;
$\lambda_i^n(\mathbf{x})$	paramètre de résolution de la $i$ -ème composante à l'étape $n$ d'un processus itératif ;
$G_\sigma(\mathbf{x})$ ou $g(x, \sigma)$	gaussienne centrée de variance $\sigma$ ;
$I_\sigma(\mathbf{x}, t)$	convolution de l'image par la gaussienne $G_\sigma(\mathbf{x})$ ;
$\text{sgn}(x)$	fonction signe ;
$\log_{10}$	fonction logarithme décimal ;
$ x , x \in \mathbb{R}$	valeur absolue de $x$ ;
$\max(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$	maximum des réels $x$ et $y$ ;
$\min(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$	minimum des réels $x$ et $y$ ;
$g_\sigma(x, \sigma) = \frac{\partial g(x, \sigma)}{\partial \sigma}$	dérivée de la gaussienne par rapport à l'écart type $\sigma$ ;
$\log(x)$	logarithme de la variable $x$ ;
$\mathcal{F}[f]$	transformée de FOURIER de la fonction $f$ .

---

Dérivées et opérateurs différentiels de l'image

---

$I_{x^i} = \frac{\partial I}{\partial x^i}$	dérivée partielle de l'image par rapport à la composante $x^i$ ;
$\nabla I$	vecteur gradient de l'image $I$ ;
$\Delta I$	laplacien de l'image $I$ ;
$I_a = \langle \nabla I, a \rangle, a \in \mathbb{R}^2$	dérivée première de $I$ dans la direction $a$ ;
$\text{div}(I)$	divergence de l'image $I$ ;
$I_{x^i x^j} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^i \partial x^j}$	dérivée seconde de l'image par rapport aux composantes $x^i$ et $x^j$ ;
$\Delta I$	laplacien de l'image $I$ ;
$\mathcal{H}I$	hessien de l'image $I$ ;
$I_{ab} = a^t \mathcal{H}I_b, a \text{ et } b \in \mathbb{R}^2$	dérivée première de $I_b$ dans la direction $a$ .

---

Courbures

---

$k_1$	courbure principale maximale d'une surface ;
$k_2$	courbure principale minimale d'une surface ;
$k_n$	courbure normale d'une surface ;

---

$k_{hess1}$	première valeur propre de la matrice hessienne ;
$k_{hess2}$	seconde valeur propre de la matrice hessienne ;
$k_{wein1}$	première valeur propre de la matrice de WEINGARTEN ;
$k_{wein2}$	seconde valeur propre de la matrice de WEINGARTEN ;
$\mathcal{K}$	courbure d'une isophote ;
$\mu$	courbure d'une ligne de courant ;
$K$	courbure gaussienne d'une surface ;
$H$	courbure moyenne d'une surface.

---

#### Directions

---

$\xi = \frac{\nabla I}{\ \nabla I\ }$	vecteur normé dans la direction du gradient ;
$\eta = \frac{\nabla I^\perp}{\ \nabla I\ }$	vecteur normé dans la direction de l'isophote d'une image ;
$v_1$	direction de courbure principale maximale ;
$v_2$	direction de courbure principale minimale ;
$v_{hess1}$	premier vecteur propre de la matrice hessienne ;
$v_{hess2}$	second vecteur propre de la matrice hessienne ;
$v_{wein1}$	premier vecteur propre de la matrice WEINGARTEN ;
$v_{wein2}$	second vecteur propre de la matrice WEINGARTEN.

---

#### Opération de morphologie mathématique

---

$I \ominus S$	érosion de l'image par l'élément structurant S ;
$I \oplus S$	dilatation de l'image par l'élément structurant S ;
$\mathbf{O}_S(I)$	ouverture de l'image par l'élément structurant S ;
$\mathbf{F}_S(I)$	fermeture de l'image par l'élément structurant S.



Première partie

Résolution numérique des EDP pour  
le traitement d'images



## Chapitre 2

# Notions sur le traitement multi-échelles

Les objets physiques ont un intervalle d'échelles sur lequel ils peuvent être observés et ainsi fournir des indications parfois forts différentes. Par ailleurs, l'homme peut observer des objets de tailles diverses allant du grain de sable aux montagnes. Cependant, pour observer au-delà des capacités de l'oeil il faudra utiliser des instruments (microscope, télescope...) qui eux-mêmes auront leurs limites d'observation. L'ouverture de l'instrument utilisé pour observer correspond à une taille physique ou une échelle donnée. L'intervalle de fonctionnement d'un instrument est borné par deux échelles :

- la plus petite échelle à laquelle on peut observer le plus petit détail ;
- l'échelle la plus grande à laquelle on peut observer les plus grands détails, *i.e.* l'image entière.

Ces deux échelles sont appelées respectivement *the inner scale* et *the outer scale* par KOENDERINK [Koe84]. Les observations effectuées à différentes ouvertures entre ces deux échelles extrêmes fournissent une représentation symbolique de la structure hiérarchique d'un objet et permettent ainsi de voir comment les structures fines sont liées aux structures plus grossières de cet objet. On effectue, par exemple, ces observations lorsque l'on étudie une carte routière pour partir en vacances dans un petit village de campagne. On s'intéresse tout d'abord au réseau autoroutier, puis au réseau des routes nationales, puis départementales et finalement aux rues du village. On se rend compte alors que les notions d'échelle et de taille sont très fortement liées. Cet ordonnancement des détails en fonction des échelles induit le concept de hiérarchie. Dans le domaine du traitement d'images, outre la représentation hiérarchique, un autre intérêt des études multi-échelles réside dans le fait de pouvoir représenter l'image de façon à simplifier les traitements effectués en supprimant un certain nombre de détails jugés inintéressants ou gênants. Cela fait une trentaine d'années que le traitement multi-échelles a fait son apparition dans le traitement d'images [Kli71]. Actuellement il est devenu un domaine propre et incontournable de la recherche en traitement d'images.

Les notions d'espace multi-échelles et d'Équations aux Dérivées Partielles (EDP) étant historiquement liées, nous présentons rapidement la théorie des espaces multi-échelles en préambule aux chapitres suivants sur les EDP. Les lecteurs souhaitant approfondir le sujet

pourront se reporter aux ouvrages de référence de Ter Harr ROMENY [Rom94], LINDEBERG [Lin94b], SPORRING et *al.* [SNF97], FLORACK [Flo97] et WEICKERT [Wei98]. Après une présentation chronologique des travaux sur les espaces multi-échelles, nous verrons dans la deuxième section que la formalisation du traitement d'images sous la forme d'axiomes, permet de justifier théoriquement un bon nombre d'EDP proposées par ailleurs dans la littérature.

## 2.1 Historique

Des études neurobiologiques ont mis en évidence l'existence de deux étapes de la vision, la première est appelée vision de bas niveau, où seul les réflexes entrent en jeu, la seconde est appelée vision de haut niveau, qui elle, nécessite une réflexion. MARR [Mar82] suppose l'existence d'un processus primaire (*raw primal sketch* ou pyramide visuelle) qui serait le premier stade de la vision de bas niveau. On comprend donc que la seule réponse possible pour un système de vision indépendant du type d'image est de représenter les données d'entrée à plusieurs échelles [Lin96], l'image se simplifiant quand l'échelle augmente. Ce schéma décompose une image perçue, par l'intermédiaire de filtres dépendant d'un paramètre d'échelle (discret) en une succession d'images de plus en plus globales ou lissées. Cette idée première de décrire une scène à différentes échelles a été ensuite largement utilisée dans la littérature.

Les premières approches multi-échelles représentent l'image sous la forme d'un *quadtree* [Kli71] ou d'une pyramide, sous-échantillonnage et lissage de l'image [Bur81]. Le paramètre échelle est dans ces cas là un paramètre discret. Ces représentations structurales ont l'avantage de diminuer récursivement la taille de l'image et ainsi de réduire notablement les temps de calculs et l'occupation mémoire des algorithmes. Néanmoins, la représentation pyramidale n'est pas invariante aux translations et le sous-échantillonnage rend difficile la correspondance des structures au travers des échelles.

WITKIN [Wit83] utilise lui, un *continuum* d'échelles et introduit le terme de *scale-space filtering* pour désigner cette théorie de pyramide visuelle<sup>1</sup>. Cela revient de fait, à rajouter une dimension (le temps ou échelle) à l'analyse de l'image et ainsi à ne pas privilégier certaines échelles par rapport à d'autres. WITKIN est donc le premier à faire le lien entre l'analyse multi-échelles et les équations aux dérivées partielles. De nombreux travaux ont été menés à partir de cette modélisation afin d'axiomatiser le traitement d'images. Si l'on s'impose des conditions plutôt générales telles que l'invariance aux translations, l'invariance aux rotations, la linéarité..., les auteurs [Koe84], [FtHRKV92], [Flo93], [Lin90] cherchent à formaliser une idée commune, celle qu'aucune nouvelle structure ne doit être créée pendant la transformation des petites aux grandes échelles. Ils aboutissent tous à la même conclusion par des approches différentes : l'unique famille de lissage vérifiant les axiomes de départ est la famille du lissage par la gaussienne et des dérivées de la gaussienne. De plus, les études neurophysiologiques de YOUNG [You87] ont montré que le profil de champ de réception de la rétine

---

<sup>1</sup>Dans la suite du manuscrit, pour ne pas confondre les représentations multi-échelles, nous parlerons de représentation multi-résolutions lorsque l'image change de taille d'une échelle à l'autre ([Kli71], [Bur81]) et de représentation multi-échelles lorsque l'image ne change pas de taille au cours des échelles ([Wit83]).

et du cortex visuel pouvait être modélisé par une superposition de dérivées de la gaussienne. Cela justifie à la fois théoriquement et empiriquement l'utilisation du filtrage multi-échelles gaussien (ou linéaire) dans les premiers pas d'un processus de traitement d'images.

Néanmoins de tels espaces multi-échelles ne préservent ni les discontinuités, ni le contraste, ni la morphologie des images traitées. D'autres espaces multi-échelles non linéaires ont donc été proposés, notamment par PERONA et MALIK [PM90] et ALVAREZ et al. [AM94a]. ALVAREZ, GUICHARD, LIONS et MOREL [AGLM92], [Gui94] ont unifié les analyses multi-échelles existantes en proposant une axiomatisation du traitement d'images. Nous présentons leur approche dans la section suivante.

## 2.2 Axiomatisation du traitement des images

L'axiomatisation consiste à chercher des propriétés de stabilité pour la pyramide visuelle. On doit définir pour cela une classe d'images.

### Définition 1

*Deux images sont de même classe si et seulement si elles ont le même contenu.*

On pourra considérer que deux images ont le même contenu si elle peuvent se déduire l'une de l'autre par une combinaison de transformations du type :

- translation ;
- isométrie dans l'hypothèse euclidienne ;
- affinité inversible dans l'hypothèse affine ;
- homographie inversible dans l'hypothèse projective ;
- changement de contraste inversible dans l'hypothèse morphologique ;
- ...

La structure de la pyramide visuelle devra être compatible avec la définition des classes d'équivalence d'images. Les axiomes proposés sont de deux types : les axiomes architecturaux et les axiomes géométriques et morphologiques. Soit  $\mathcal{F}$ , l'espace des fonctions sur  $\mathbb{R}^n$  telles que :

$$\exists N, \exists C, \left\| \frac{I(\mathbf{x})}{1 + |\mathbf{x}|^{-N}} \right\| \leq C$$

L'analyse multi-échelles est définie par une famille de transformations  $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  qui transforment une image initiale  $I_0$  en une famille d'images  $I(\mathbf{x}, t) = (\mathcal{T}_t)(I_0)(\mathbf{x})$ ,  $t$  étant un paramètre dit *paramètre d'échelle*. Par convention, on pose  $\mathcal{T}_0 = Id$ . On appelle filtre de transition l'opérateur  $\mathcal{T}_{t+\Delta t, t} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ , l'opérateur permettant de passer de l'échelle  $t$  à l'échelle  $t + \Delta t$ . Suivant l'analyse, l'opérateur  $\mathcal{T}_t$  doit vérifier un certain nombre d'axiomes.

### 2.2.1 Les axiomes architecturaux

La pyramide doit fournir de plus en plus d'informations globales. De plus, aucune nouvelle structure ne doit apparaître durant l'analyse.

**Axiome 1 (Architecture pyramidale : Causalité 1)**

$$\mathcal{T}_{t+\Delta t} = \mathcal{T}_{t+\Delta t, t} \circ \mathcal{T}_t \quad (2.1)$$

$\mathcal{T}_{t+\Delta t, t}$  est un opérateur censé agir localement, c'est-à-dire que  $\mathcal{T}_{t+\Delta t, t}(\mathbf{x})$  ne dépend que des valeurs de  $I_0(\mathbf{y})$  où  $\mathbf{y}$  appartient à un voisinage de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ . HUMMEL [Hum86], KOENDERINK [Koe84], YUILLE [Yui88] et WITKIN [Wit83] se sont intéressés au principe de causalité. Il en résulte que celui-ci peut se formaliser comme la résultante de deux principes qui sont la structure pyramidale et la comparaison locale.

**Axiome 2 (Principe de comparaison local : Causalité 2)**

Si  $I(\mathbf{y}) > J(\mathbf{y})$  pour  $\mathbf{y} \in \mathcal{V}(\mathbf{x}) (\mathbf{y} \neq \mathbf{x})$ , alors pour  $\Delta t$  assez petit, on doit avoir :

$$\mathcal{T}_{t+\Delta t, t} I(\mathbf{x}) \geq \mathcal{T}_{t+\Delta t, t} J(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

Si une image  $I$  est plus claire qu'une image  $J$  autour d'un point  $\mathbf{x}$ , alors cette proposition doit rester vraie au moins pour un intervalle infinitésimal d'échelle. L'aspect local est ajouté au principe de comparaison afin de pouvoir aussi traiter des images de contours ou des cartes de profondeur. Le fait que l'opérateur  $\mathcal{T}_t$  préserve l'ordre signifie qu'il n'y a pas de rehaussement de contraste, mais juste un lissage lors de l'analyse multi-échelles. L'hypothèse de régularité est le dernier axiome architectural. L'analyse d'une image régulière (par exemple, une forme quadratique) doit se faire de façon régulière. Soit  $I$  une forme quadratique au voisinage d'un point  $\mathbf{m}_0$  :

$$I(\mathbf{x}) = a + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{m}_0\| < \epsilon \quad (2.3)$$

où  $a$  est une constante réelle,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{A}$  est une matrice  $n \times n$ . Alors quand  $\Delta t$  tend vers zéro, la valeur de  $\mathcal{T}_{t+\Delta t, t}(I)(\mathbf{m}_0)$  ne doit dépendre que des valeurs de  $a$ ,  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{A}$ . Cet axiome peut s'exprimer formellement comme suit :

**Axiome 3 (Régularité)**

Soit  $I(x)$  une forme quadratique de  $\mathbb{R}^n$ , il existe une fonction  $F(\mathbf{A}, \mathbf{p}, a, \mathbf{x}, t)$  continue par rapport à  $A$  et telle que :

$$\frac{(\mathcal{T}_{t+\Delta t, t}(I) - I)(\mathbf{m}_0)}{\Delta t} \rightarrow F(\mathbf{A}, \mathbf{p}, a, \mathbf{m}_0, t), \quad \Delta t \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

**2.2.2 Les axiomes géométriques et morphologiques**

La sortie de l'analyse ne doit pas dépendre de  $I_0$  mais de ses classes d'équivalence. Les axiomes suivants établissent que l'analyse doit être invariante aux fluctuations de lumière, aux changements de position, d'orientation et d'échelle. Donc, l'opérateur de transition  $\mathcal{T}_{t+\Delta t, t}$  doit pouvoir commuter avec le changement de contraste et les transformations géométriques (rotations, changement d'échelle...). L'intensité en chaque pixel  $I_0(x)$  n'est pas une information fiable sur le nombre de photons émis par un point visible vers le capteur optique. La seule information pertinente est que l'ordre des niveaux de gris doit être préservé au cours de l'analyse. L'analyse doit donc commuter avec toute redistribution monotone croissante  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (inconnue et dépendante du capteur) de niveau de gris.

**Axiome 4 (Invariance morphologique)**

$$\forall I, \quad \mathcal{T}_{t+\Delta t,t}(g \circ I) = g \circ \mathcal{T}_{t+\Delta t,t}(I) \quad (2.5)$$

Cette invariance est dite forte si cet axiome est respecté pour toute fonction  $g(\cdot)$ , croissante ou décroissante. La seule information pertinente est l'information relative aux lignes de niveau de l'image d'où la référence à la morphologie mathématique. L'invariance aux translations de niveau de gris est un cas particulier de l'invariance morphologique.

**Axiome 5 (Invariance en translation)**

L'opérateur  $\mathcal{T}_t$  est dit invariant par translation, si pour toute translation  $\tau$ , et toute image  $I$  :

$$\mathcal{T}_t(\tau \circ I) = \tau \circ \mathcal{T}_t(I) \quad (2.6)$$

L'analyse doit être invariante à toute transformation  $F_{\mathbf{A},\mathbf{b}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par  $F_{\mathbf{A},\mathbf{b}}(\mathbf{m}) = \mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{b}$ , où  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{A}$  est une matrice de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  non singulière et  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  :

$$\mathcal{T}_{t+\Delta t,t}(I) \circ F_{\mathbf{A},\mathbf{b}} = \mathcal{T}_{t+\Delta t,t}(I \circ F_{\mathbf{A},\mathbf{b}}) \quad (2.7)$$

Si  $\mathbf{A}$  est la matrice d'une rotation, alors l'opération de commutation devient :

**Axiome 6 (Invariance en rotation)**

$$\mathbf{A}\mathcal{T}_{t,t+\Delta t} = \mathcal{T}_{t,t+\Delta t}\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}I(\mathbf{x}) = I(\mathbf{A}\mathbf{x}) \quad (2.8)$$

Si  $\mathbf{A}$  est une transformation affine, l'opération de commutation ci-dessus n'est plus aussi simple car  $\mathbf{A}$  peut réduire ou agrandir l'image (par exemple, par un zoom :  $\mathbf{A}I(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(k\mathbf{x}), k > 0$ ). On peut alors imposer dans le cas de l'invariance affine une propriété de commutation plus faible :

**Axiome 7 (Invariance affine)**

$$\forall \mathbf{A} \text{ et } t \geq 0, \text{ il existe une fonction } t_1(t, \mathbf{A}) \geq 0, \mathcal{C}^1, \text{ telle que } \mathbf{A}\mathcal{T}_{t_1+\Delta t_1,t_1} = \mathcal{T}_{t+\Delta t,t}\mathbf{A} \quad (2.9)$$

ALVAREZ et al. [AM94a] montrent que  $\Delta t_1 = \Delta t \sqrt{|\det(\mathbf{A})|}$  et  $t_1 = t \sqrt{|\det(\mathbf{A})|}$ . Bien sûr, l'invariance affine implique l'invariance euclidienne. L'invariance projective serait préférable à l'invariance affine mais, malheureusement il n'existe pas de modèle causal la vérifiant. Une hypothèse optionnelle de linéarité peut être faite sur l'opérateur  $\mathcal{T}_t$  comme c'est souvent le cas en traitement d'images.

**Axiome 8 (linéarité)**

L'opérateur est linéaire par rapport à ses arguments :

$$\mathcal{T}_{t+\Delta t,t}(aI + bJ) = a\mathcal{T}_{t+\Delta t,t}(I) + b\mathcal{T}_{t+\Delta t,t}(J) \quad (2.10)$$

### 2.2.3 Théorèmes découlant des axiomes

GUICHARD [Gui94] montre que l'on peut associer à la pyramide visuelle (*c.-à-d.* si l'on suppose les axiomes architecturaux) une fonction  $F$  continue telle que pour toute image donnée  $I$ ,  $I(\mathbf{x}, t)$  est la solution de viscosité<sup>2</sup> de l'EDP parabolique d'ordre 2 suivante :

$$\frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = F(\mathcal{H}I, \nabla I, I, \mathbf{x}, t) \quad (2.11)$$

Une classification des analyses est proposée grâce au concept de solutions de viscosité. Les théorèmes suivants permettent de découvrir des EDP que nous retrouverons dans le chapitre suivant.

#### Équation de la chaleur

##### Théorème 1

Si l'analyse multi-échelles satisfait les axiomes de structure pyramidale, de comparaison locale, d'invariance euclidienne, et de linéarité, alors, la solution  $I(\mathbf{x}, t)$  est solution de l'EDP :

$$\frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \Delta I(\mathbf{x}, t) = \text{div}(\nabla I(\mathbf{x}, t)) \quad (2.12)$$

Ceci correspond au modèle étudié par MARR [Mar82], WITKIN [Wit83], KOENDERINK [Koe84], LINDBERG [Lin94b], FLORACK [Flo97]. Ici, on peut noter que l'invariance morphologique et la linéarité sont incompatibles dans le cadre de l'analyse d'images.

##### Théorème 2

Si une analyse multi-échelles satisfait aux axiomes de structure pyramidale, de comparaison locale, de régularité, d'invariance morphologique et d'invariance euclidienne, elle peut être définie par l'EDP suivante :

$$\frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \|\nabla I\| G\left(\text{div}\left(\frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}\right), t\right) \quad (2.13)$$

où  $G(s, t)$  est une fonction non décroissante par rapport à la variable réelle  $s$ .

#### Euclidean Morphological Scale-Space (EMSS)

Si on choisit  $G(s, t) = s \cdot t$ , on obtient l'analyse multi-échelles appelée Euclidean Morphological Scale-Space et définie par l'équation :

$$\frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = t \|\nabla I\| \text{div}\left(\frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}\right) \quad (2.14)$$

Le terme  $\text{div}\left(\frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}\right)$  représentant la courbure en chaque point de l'isosurface  $I(\mathbf{x}, t) = C$ , en dimension deux, on a alors  $t \|\nabla I\| \text{div}\left(\frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}\right) = t I_{\eta\eta}$ . Cela correspond donc à une diffusion anisotrope dans la direction des lignes de niveau de l'image. Elle est très proche de l'EDP de restauration où  $G(s, t) = s$  appelée Mean Curvature Motion (MCM) :

<sup>2</sup>La théorie des solutions de viscosité vise à définir une solution généralisée aux équations de la forme 2.11

### Mean Curvature Motion (MCM)

$$\frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t} = \|\nabla I\| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \right) = I_{\eta\eta} \quad (2.15)$$

### Dilatation et Érosion

Soit  $B \subset \mathbb{R}^n$  un *élément structurant*. Soient  $D_t f(\mathbf{x}) = \sup\{f(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \in tB\}$  et  $E_t f(\mathbf{x}) = \inf\{f(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \in tB\}$  respectivement la dilatation et l'érosion à l'échelle  $t$  d'une fonction  $f$  avec l'élément structurant  $B$ . Si  $B$  est une boule,  $I(\mathbf{x}, t) = D_t f(\mathbf{x})$  est solution de l'EDP :

$$\frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \|\nabla I\|_B \quad (2.16)$$

avec  $\forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\|_B = \sup_{t \in B} \langle v, t \rangle$ . Ce qui correspond au cas particulier où  $G = 1$ . Si  $B$  est une boule,  $I(\mathbf{x}, t) = E_t f(\mathbf{x})$  est solution de l'EDP :

$$\frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\|\nabla I\|_B \quad (2.17)$$

Ce qui correspond au cas particulier où  $G = -1$ .

La description d'une partie de la morphologie mathématique dans le cadre de l'analyse multi-échelles a été plus particulièrement étudiée par BROCKETT et *al.* [BM94], van den BOOMGAARD [vdB92], JACKWAY et *al.* [Jac92], [Jac96].

### Affine Morphological Scale-Space (AMSS)

Si l'on remplace l'hypothèse euclidienne par l'hypothèse affine, ALVAREZ et *al.* [AGLM92] et SAPIRO [GA93] et *al.* démontrent le théorème suivant :

#### Théorème 3

*En dimension deux, il existe une unique analyse multi-échelles qui satisfait aux axiomes de structure pyramidale, de comparaison locale, de régularité, d'invariance morphologique, et d'invariance affine. L'analyse multi-échelles est définie par l'EDP :*

$$\frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t} = t^{\frac{1}{3}} \|\nabla I\|^{\frac{2}{3}} (I_{\eta\eta})^{\frac{1}{3}} \quad (2.18)$$

Cette analyse multi-échelles est appelée Affine Morphological Scale-Space. Elle préserve la courbure affine.

**Espace-échelles de PERONA et MALIK**

L'équation de PERONA et MALIK [PM90] :

$$\frac{\partial I(\mathbf{x})}{\partial t} = \operatorname{div}(D(\|\nabla I\|)\nabla I) \quad (2.19)$$

vérifie les axiomes hiérarchiques, les invariances par translation, par décalage de niveaux de gris, par isométrie. L'invariance morphologique n'est pas vérifiée. L'invariance par changement d'échelle n'est vraie que si  $D$  est une fonction puissance.

**Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté la théorie des espaces multi-échelles au travers de l'axiomatique d'ALVAREZ, GUICHARD, MOREL et LIONS. Cette axiomatique permet de faire le lien entre les principales EDP utilisées en traitement d'images, la théorie des espaces multi-échelles et la morphologie mathématique. Dans le chapitre suivant, nous présentons un état de l'art des principales EDP utilisées pour le lissage et le rehaussement d'images.

## Chapitre 3

# EDP pour l'amélioration d'images : état de l'art

Dans ce chapitre, nous présentons les principales Équations aux Dérivées Partielles (EDP) proposées dans la littérature pour améliorer les images, c'est-à-dire les EDP permettant de réduire le bruit et/ou le flou dans les images. Lorsque l'EDP a pour objectif la réduction du bruit on parle d'EDP de lissage et lorsque celle-ci a pour objectif la réduction du flou on parle d'EDP de rehaussement. L'organisation de ce chapitre est la suivante. Dans la première section nous faisons l'état de l'art des méthodes de lissage par EDP. Nous avons classé ces méthodes en cinq catégories que sont le filtrage multi-échelles linéaire, le filtrage multi-échelles non linéaire, le filtrage par matrice de diffusion, l'approche par géométrie différentielle et le filtrage par diffusion vectorielle. La seconde section présente avec le concept de filtres de choc, une manière de rehausser les images par EDP. La troisième section montre comment certains auteurs améliorent les images en combinant à la fois des EDP de lissage et des EDP de rehaussement. Finalement, nous discutons de la mise en œuvre de telles équations sur des systèmes informatiques en présentant différentes méthodes de discrétisation des EDP.

### 3.1 Lissage par EDP

#### 3.1.1 Filtrage multi-échelles linéaire

KOENDERINK [Koe84] est le premier à introduire les EDP pour la restauration d'images bruitées. Il propose d'appliquer à l'image l'EDP parabolique linéaire, communément appelée *équation de la chaleur* (ou bien encore *équation de diffusion isotrope* ou *EDP linéaire*) :

$$\begin{cases} \frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \Delta I(\mathbf{x}, t) \\ I(\mathbf{x}, 0) &= I_0(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$\partial\Omega$  représente le bord de  $\Omega$ ,  $n$  est un vecteur normal extérieur à  $\partial\Omega$  et  $I_0(\mathbf{x})$  l'image initiale à restaurer. Comme l'opérateur laplacien est invariant en rotation, l'équation de la chaleur effectue une diffusion isotrope de l'intensité de l'image. KOENDERINK [Koe84] montre aussi que convoluer l'image initiale par le noyau gaussien :

$$G_\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp\left(-\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{2\sigma^2}\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.2)$$

est équivalent à faire évoluer l'EDP (3.1) jusqu'à  $t = \frac{\sigma^2}{2} > 0$ . Cela permet d'interpréter le filtrage d'une image par une gaussienne en terme d'espace-échelles, le paramètre  $\sigma$  (ou  $t$ ) jouant ici le rôle d'échelle. C'est pourquoi, on parle aussi *d'espace multi-échelles linéaire* pour désigner l'ensemble des images générées par les équations (3.1) ou (3.2). Lorsque  $t$  augmente, l'image  $I(\mathbf{x}, t)$  représente une version de plus en plus grossière de l'image initiale. Ainsi, de nombreuses structures disparaissent quand l'échelle augmente. Si  $t$  tend vers l'infini, l'équation (3.1) fait tendre  $I(\mathbf{x}, t)$  vers une constante qui est la moyenne de l'image initiale  $I_0$ . Donc, pour conserver de l'information dans l'image, il faut stopper le processus de diffusion à une échelle  $t_{fin}$  à déterminer.

Cette EDP linéaire a été largement utilisée ces dernières années pour ses propriétés d'invariance aux translations, aux rotations et aux changements d'échelle et pour ses bonnes performances en termes de réduction du bruit dans les images. Elle a aussi montré son utilité pour l'extraction de caractéristiques, telles que les contours, les vallées, les crêtes et les coins [Lin96], ou l'étude structurelle de l'image [Lin93]. Néanmoins, le caractère isotrope de l'équation de la chaleur engendre un lissage identique dans toutes les directions. Ainsi, les contours sont lissés au même titre que le bruit. De plus, si l'on s'intéresse à l'extraction des contours de l'image on constate une délocalisation de ceux-ci au fil des échelles, d'où l'éventuelle utilisation d'algorithmes de chaînage des contours au travers des échelles. A titre d'exemple, sur la figure 3.1, on peut voir l'évolution de l'image « cameraman » au fil des échelles. On observe bien ici une simplification de l'image et la perte des contrastes de l'image quand l'échelle augmente.

Dans les sections suivantes, nous présentons divers filtres de diffusion non linéaire permettant de pallier les problèmes inhérents à l'analyse multi-échelles linéaire.

### 3.1.2 Filtrage multi-échelles non linéaire

#### EDP de PERONA et MALIK

PERONA et MALIK [PM90] sont les premiers à introduire la non linéarité dans le filtrage par EDP. L'idée est de trouver un espace multi-échelles vérifiant les trois critères suivants :

1. *causalité* ;
2. *localisation immédiate* : à toute résolution les contours devraient être marqués (« tranchants ») et coïncider avec la signification sémantique des contours à cette résolution ;
3. *Lissage par morceaux* : à toute échelle le lissage intra-région doit être préféré à un lissage inter-régions.



FIG. 3.1 – De haut en bas et de gauche à droite : filtrage par diffusion isotrope de l'image cameraman pour  $t = 0, 2, 4$  et  $8$ .

Cela revient, en fait, à effectuer une diffusion intra-région forte et une diffusion inter-régions faible. Pour détecter les zones inter-régions (*i.e.* les contours), PERONA et MALIK choisissent la norme du gradient de l'image  $\|\nabla I\|$  (mais on pourrait envisager d'utiliser d'autres types d'indicateur de contours). Ils introduisent alors une *fonction de diffusion* (ou *coefficient de conduction*) réelle  $D$  dans l'équation (3.1) :

$$\begin{cases} \frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \operatorname{div} (D (\|\nabla I(\mathbf{x}, t)\|) \nabla I(\mathbf{x}, t)) \\ I(\mathbf{x}, 0) &= I_0(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Notons que si  $D(\mathbf{x}, t) = 1$  on retrouve l'équation de la chaleur (3.1).  $D$  doit être choisie de façon à réaliser les critères fixés au départ. PERONA et MALIK étudient un contour monodimensionnel, de type marche, localisé sur un point d'inflexion afin de trouver des conditions sur  $D$  pour rehausser les contours et lisser les petites discontinuités. Ils trouvent que  $D$  doit être non négative, monotone décroissante avec  $D(0) = 1$  (diffusion isotrope s'il n'y a pas de contour) et proposent d'utiliser les fonctions de diffusion suivantes :

$$D(\|\nabla I\|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\|\nabla I\|}{k}\right)^{1+\alpha}}, \quad \alpha > 0 \quad (3.4)$$

et

$$D(\|\nabla I\|) = e^{-\left(\frac{\|\nabla I\|}{k}\right)^2} \quad (3.5)$$

$k$  étant fixé arbitrairement ou en estimant le bruit. Si  $\|\nabla I\| < k$  alors, l'EDP lisse, sinon l'EDP rehausse les contours. Autrement dit, les points dont la norme du gradient est inférieure à  $k$  sont assimilés à du bruit alors que les autres sont considérés comme étant des contours. Ce qui est bien le résultat escompté.

Pour bien comprendre le comportement du filtrage par diffusion anisotrope, on étudie l'évolution d'un contour monodimensionnel de type marche au cours du processus (cf. figure 3.2) [PM90]. On suppose  $I_x > 0$ . Au point d'inflexion on a  $I_{xx} = 0$  et  $I_{xxx}$  de signe opposé à la pente. Soit la fonction flux  $\varphi(I_x) = D(I_x) \cdot I_x$ . On calcule ainsi, l'évolution au cours du temps de la pente au point de contour :

$$\frac{\partial I_x}{\partial t} = \frac{\partial I_t}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \varphi(I_x) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (I_{xx} \varphi'(I_x)) = \varphi''(I_x) I_{xx}^2 + \varphi'(I_x) I_{xxx} \quad (3.6)$$

Donc, si  $\varphi'$  est négative, alors la pente est localement renforcée quand  $t$  croît. A l'inverse, si  $\varphi'$  est positive, alors la pente est localement lissée quand  $t$  croît. Néanmoins, si  $\varphi' < 0$  au voisinage des régions de gradient élevé, le filtre continu se comporte comme une équation de la chaleur inverse. Or, cette équation est théoriquement connue pour être un problème inverse mal posé et devrait donc engendrer des instabilités (*i.e.* la solution est très sensible aux conditions initiales). Il s'avère cependant, qu'expérimentalement, les instabilités du processus sont très rares car la discrétisation de l'EDP a un effet régularisateur [WB97]. De nombreux autres choix de fonction de diffusion ont été proposés dans la littérature. Nous présentons quelques unes de ces fonctions dans le tableau 3.1.

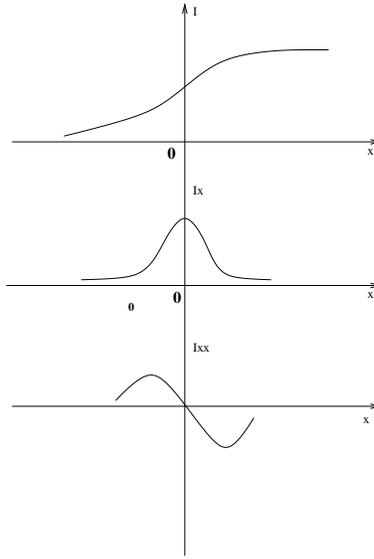


FIG. 3.2 – Profil d'un contour de type marche sur un point d'inflexion et ses dérivées.

Auteur(s)	Fonction $D(u)$	$\varphi'(u) = D(u) + uD'(u)$
PERONA-MALIK [PM90]	$\exp\left(-\left(\frac{u}{s}\right)^2\right)$	$\left(1 - \frac{2u^2}{k^2}\right) \exp\left(-\left(\frac{u}{k}\right)^2\right)$
PERONA-MALIK 2 [PSJ94]	$\frac{1}{1 + \left(\frac{u}{k}\right)^2}$	$\frac{1 - \left(\frac{u}{k}\right)^2}{1 + \left(\frac{u}{k}\right)^2}$
GEMAN-McLURE [GR92]	$\frac{2}{k^2\left(1 + \left(\frac{u}{k}\right)^2\right)^2}$	$\frac{2}{k^4} \frac{k^2 - 3u^2}{\left(1 + \left(\frac{u}{k}\right)^2\right)^3}$
GREEN [Gre90]	$\frac{\tanh\left(\frac{u}{k}\right)}{ku}$	$\frac{1}{k^2 \cosh^2\left(\frac{u}{k}\right)}$
AUBERT et al. [AV97]	$\frac{1}{k^2 \sqrt{1 + \left(\frac{u}{k}\right)^2}}$	$\frac{1}{k^2 \left(1 + \left(\frac{u}{k}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$
TIKHONOV [TA77]	1	1
SAINT-MARC et al. [SMCM91]	$\frac{1}{1 + u}$	$\frac{1}{1 + u^2}$

TAB. 3.1 – Quelques fonctions de diffusion de la littérature [DF95].

Une approche variationnelle du problème de restauration permet d'unifier sous un même formalisme les différentes approches dérivées de celle de PERONA et MALIK et de rendre plus évident le choix des fonctions de diffusion tout en tenant compte des préoccupations de stabilité et de convergence du processus. Nous présentons maintenant, cette approche.

### Approche variationnelle

Dans un problème de restauration on suppose généralement que l'image observée  $I_o$  peut s'exprimer selon  $I_o = \mathcal{P}I + b$ , où  $b$  est un bruit additif et  $\mathcal{P}$  un opérateur de convolution. Pour reconstruire l'image  $I$  à partir de  $I_o$  il faut trouver  $I$  qui minimise le bruit  $b = I_o - \mathcal{P}I$ . Cela revient à minimiser une énergie du type :

$$E(I) = \int_{\Omega} f(I, I_o) d\Omega \quad (3.7)$$

Généralement, on considère  $f(I, I_o) = \|I_o - \mathcal{P}I\|^2$  et on minimise alors  $E(I)$  par une méthode des moindres carrés  $\mathcal{P}^*I_o = \mathcal{P}^*\mathcal{P}I$ . Or, ce problème est un problème inverse mal posé au sens de HADAMARD [Had23]. En effet,  $\mathcal{P}^*\mathcal{P}$  n'est pas toujours inversible et le problème inverse est instable ce qui est généralement le cas en traitement d'images. Donc résoudre un problème de restauration d'images revient en fait à résoudre un problème inverse mal posé au sens de HADAMARD. Dans ce cas là, il faut généralement faire des hypothèses de régularité sur l'image à reconstruire ; on parle ainsi d'information *a priori* pour restreindre la taille de l'espace des solutions. La solution est alors choisie suivant différents critères selon la méthode de régularisation. TIKHONOV [Tik63], [TA77] propose le premier d'ajouter le terme de régularisation linéaire  $\int_{\Omega} \|\nabla I\|^2 d\Omega$  à l'énergie (3.7). Malheureusement, le terme de régularisation quadratique proposé par TIKHONOV ne permet pas de préserver les contours de l'image alors qu'il élimine le bruit. Pour remédier à ce problème, GEMAN et GEMAN [GG84] ont introduit les processus de lignes. Ces deux approches sont à l'origine des deux grandes familles de régularisation du traitement d'images que sont l'approche déterministe et l'approche stochastique. Nous présentons ici l'approche variationnelle qui fait partie des méthodes déterministes.

Ces dernières années, de nombreux auteurs ont proposé des termes de régularisation non quadratiques permettant d'éviter le lissage des contours. D'une façon générale, ce terme de régularisation peut s'écrire sous la forme  $\int_{\Omega} \Phi(\|\mathcal{D}I\|) d\Omega$  où  $\Phi$  est une fonction paire définie sur  $\mathbb{R}$  et croissante sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\mathcal{D}$  est l'opérateur dérivée au sens des distributions [CAB97]. Si  $I$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ , alors  $\int_{\Omega} \Phi(\|\mathcal{D}I\|) d\Omega = \int_{\Omega} \Phi(\|\nabla I\|) d\Omega$ . Donc, trouver  $I$  à partir de  $I_o$  revient à trouver  $I$  qui minimise l'énergie :

$$E(I) = \underbrace{\int_{\Omega} f(I, I_o) d\Omega}_{E_1(I)} + \lambda \underbrace{\int_{\Omega} \Phi(\|\mathcal{D}I\|) d\Omega}_{E_2(I)} \quad (3.8)$$

où  $E_1(I)$  est un terme d'attache aux données et  $E_2(I)$  est le terme de régularisation. Le paramètre  $\lambda$  permet de pondérer le terme d'attache aux données par rapport au terme de diffusion. Toutefois, toutes les fonctions  $\Phi$  ne permettent pas de préserver les discontinuités. Par exemple, si on choisit  $\Phi(u) = u^2$ ,  $\Phi$  est quadratique et l'on retrouve le terme de régularisation linéaire de TIKHONOV. On notera que cela revient à utiliser la norme  $L^2$  comme

mesure. De même, si l'on choisit  $\Phi(u) = u$  on retrouve l'énergie initialement proposée par RUDIN, OSHER et FATEMI [ROF92]. Notons aussi que  $\Phi(u)$  peut être définie en utilisant la famille des M-estimateurs robustes [Ste97], [MMRK90], [BR96].

Pour simplifier, supposons maintenant que  $f(I, I_o) = \|I - I_o\|^2$ . Si l'on applique le théorème d'EULER-LAGRANGE à  $E(I)$  on obtient alors :

$$(I - I_o) - \lambda \operatorname{div} \left( \frac{\Phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|} \nabla I \right) = 0 \quad (3.9)$$

Cette équation correspond à l'état stationnaire de l'EDP [Nor90] :

$$\begin{cases} \frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -(I - I_o) + \lambda \operatorname{div} (D(\|\nabla I\|) \nabla I) \\ I(\mathbf{x}, 0) &= I_0(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

avec  $D(\|\nabla I\|) = \frac{\Phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|}$ . L'équation (3.10) correspond en fait à une descente de gradient à pas constant sur l'énergie  $\|I - I_o\|^2 + \lambda \Phi(\|\nabla I\|)$ . Ici encore, le terme d'attache aux données permet au processus de lisser tout en restant proche de l'image initiale. Cela permet ainsi de stabiliser le processus et de s'affranchir du choix d'un temps d'arrêt.

Maintenant, on essaie d'interpréter géométriquement l'EDP non linéaire (3.10). Pour cela, on pose  $\xi = \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}$  un vecteur normal à l'isophote (ou contour) et  $\eta = \xi^\perp$  un vecteur tangent à l'isophote (cf. chapitre B), l'équation (3.9) peut se réécrire comme suit [DF95], [Kor98], [Kri00] :

$$(I - I_o) - \lambda \left( \underbrace{\Phi''(\|\nabla I\|)}_{c_\xi} I_{\xi\xi} + \underbrace{\frac{\Phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|}}_{c_\eta} I_{\eta\eta} \right) = 0 \quad (3.11)$$

où  $I_{\xi\xi}$  et  $I_{\eta\eta}$  sont respectivement la dérivée seconde de  $I$  dans la direction  $\xi$  et la dérivée seconde de  $I$  dans la direction  $\eta$ . Cette équation correspond donc à un lissage suivant une direction perpendiculaire au contour pondéré par le terme  $c_\xi$  et à un lissage suivant la direction du contour pondéré par  $c_\eta$ . Dorénavant, de même que KORNPROBST [Kor98], nous essaierons de présenter les EDP non linéaires sous cette forme pour comprendre l'action géométrique de ces équations.

Notons que KRISSIAN [Kri00], propose une généralisation de l'équation (3.3) aux dimensions supérieures. Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, \xi = \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|})$  une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} &= \Phi''(\|\nabla I\|) I_{\xi\xi} + \frac{\Phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|} \sum_i^{n-1} I_{e_i e_i} \\ I(\mathbf{x}, 0) &= I_0(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Le processus peut alors être interprété géométriquement comme une diffusion toujours isotrope dans l'hyperplan orthogonal au gradient.

Ces formulations permettent d'étudier les conditions de convergence et de stabilité de l'EDP parabolique en fonction de la forme de  $E_2(I)$  et des conditions initiales et donc finalement de choisir la fonction  $\Phi$  correspondant au lissage voulu. Si l'on veut que la surface ne comporte pas plusieurs minima locaux et ainsi avoir une solution unique quelles que soient les conditions initiales il faut choisir  $\Phi$  de manière à avoir une surface  $E_2(I)$  convexe. Pour cela, il suffit d'avoir les deux coefficients de diffusion positifs [DF95] :

$$\Phi''(\|\nabla I\|) \geq 0 \quad (3.13)$$

$$\Phi'(\|\nabla I\|) \geq 0 \quad (3.14)$$

Or, on veut :

1. un lissage isotrope dans les zones homogènes c'est-à-dire lorsque  $\|\nabla I\|$  est proche de 0 ;
2. un lissage uniquement dans la direction parallèle au contour de manière à conserver le contraste et les contours.

Ces deux conditions se traduisent par :

$$\lim_{\|\nabla I\| \rightarrow 0} \Phi''(\|\nabla I\|) = \lim_{\|\nabla I\| \rightarrow 0} \frac{\Phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|} = \Phi''(0) > 0 \quad (3.15)$$

et

$$\lim_{\|\nabla I\| \rightarrow \infty} \Phi''(\|\nabla I\|) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\|\nabla I\| \rightarrow \infty} \frac{\Phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|} = C > 0 \quad (3.16)$$

Malheureusement, ces deux conditions ne peuvent être respectées simultanément. En effet, si

$$\lim_{\|\nabla I\| \rightarrow \infty} \Phi''(\|\nabla I\|) = 0 \quad \text{alors,} \quad \lim_{\|\nabla I\| \rightarrow \infty} \frac{\Phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|} = 0 \quad (3.17)$$

On propose alors des conditions plus faibles qui consistent à imposer à  $\Phi''(\|\nabla I\|)$  de décroître plus rapidement que  $\frac{\Phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|}$  quand  $\|\nabla I\| \rightarrow \infty$  :

$$\lim_{\|\nabla I\| \rightarrow 0} \Phi''(\|\nabla I\|) = \lim_{\|\nabla I\| \rightarrow 0} \frac{\Phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|} = \Phi''(0) > 0 \quad (3.18)$$

$$\lim_{\|\nabla I\| \rightarrow \infty} \Phi''(\|\nabla I\|) = \lim_{\|\nabla I\| \rightarrow \infty} \frac{\Phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|} = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{\|\nabla I\| \rightarrow \infty} \frac{\|\nabla I\| \Phi''(\|\nabla I\|)}{\Phi'(\|\nabla I\|)} = 0 \quad (3.19)$$

En général, la fonction  $\Phi$  est choisie de manière à être quadratique au voisinage de 0 et linéaire ou sous-linéaire en l'infini [CAB97]. En annexe A, nous classons différentes fonctions suivant leur comportement ou propriétés. On s'aperçoit que les seules fonctions pouvant rehausser les contours sont les fonctions de PERONA et *al.* et celle de GEMAN et *al.*. Toutes les fonctions vérifient la condition (3.18). Seules les fonctions de GREEN et *al.*, de AUBERT et *al.*, et de SAINT-MARC et *al.* vérifient la condition (3.19).

Voyons à titre d'exemple comment s'exprime le processus de PERONA et MALIK (avec la fonction  $D(s) = \exp(-\frac{s^2}{k^2})$ ) sous le formalisme de l'équation (3.11) :

$$\begin{cases} \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t} &= \underbrace{\exp\left(\frac{-\|\nabla I\|^2}{k^2}\right)}_{\frac{\Phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|}} I_{\eta\eta} + \underbrace{\exp\left(\frac{-\|\nabla I\|^2}{k^2}\right) \left(1 - 2\frac{\|\nabla I\|^2}{k^2}\right)}_{\Phi''(\|\nabla I\|)} I_{\xi\xi} \\ I(x, y, 0) &= I_0(x, y) \\ \frac{\partial I}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases}$$

On voit bien apparaître ici, que lorsque  $\|\nabla I\| \geq \frac{k}{\sqrt{2}}$ ,  $\Phi''(\|\nabla I\|)$  est négative et transforme ainsi l'EDP en une équation de la chaleur inverse.

Sur la figure 3.3 nous comparons dans les mêmes conditions (c'est-à-dire, en itérant les équations jusqu'à la même échelle) les restaurations des images « cameraman » et « fiat » par diffusion linéaire et par diffusion non linéaire avec la fonction Perona 2 (cf. équation (3.5)). On constate bien qu'à échelle similaire, les contours sont mieux préservés par la diffusion non linéaire, l'image étant non seulement lissée mais aussi rehaussée. On observe notamment l'effet « marches d'escalier » sur les contours de pied de l'appareil photo.

En résumé, un filtrage de type PERONA et MALIK respecte mieux les contours et les jonctions que le filtrage par diffusion isotrope. Cela permet généralement, d'éviter l'utilisation d'algorithmes de fermeture de contours. Par contre, lorsque  $\Phi'' < 0$ , le processus de diffusion est instable et peut engendrer un effet de type « marches en escalier » sur les contours.

### Filtrage par diffusion non linéaire régularisé

Comme on l'a noté précédemment, lorsque  $\Phi''$  est négative cela introduit une instabilité dans le processus et l'effet « marches en escalier ». Certains auteurs [CLMT92], [ALM92], [SA97] se sont donc intéressés à la régularisation de l'équation de PERONA et MALIK. Nous présentons ici quelques approches de régularisation.

**Régularisation par un filtre gaussien** Notons  $I_\sigma(\mathbf{x}, t) = (G_\sigma * I)(\mathbf{x}, t)$ . Dans CATTÉ et al. [CLMT92], la fonction de diffusion est calculée non plus sur la norme du gradient mais sur la norme du gradient lissée par une gaussienne :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} &= \operatorname{div}(D(\|\nabla(I_\sigma)\|) \nabla I) \\ I(\mathbf{x}, 0) &= I_0(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial I}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

De plus, les auteurs montrent l'existence, l'unicité et la régularité de la solution de l'EDP ainsi transformée. Cette EDP permet donc de rehausser les contours tout en gardant le processus stable. L'effet « marches en escalier » disparaît et l'EDP (3.20) est moins sensible à la discrétisation. Néanmoins, son interprétation géométrique reste difficile.



FIG. 3.3 – En haut : images originales, au milieu : filtrage par diffusion isotrope pour  $t = 8$ , en bas : filtrage par diffusion anisotrope pour la fonction de PERONA (eq. (3.5) pour  $t = 8$  avec  $k = 7$  pour le cameraman et  $k = 10$  pour la fiat).

**Régularisation par morphologie mathématique** L'introduction du lissage gaussien dans l'estimation de la norme du gradient peut engendrer un décalage des contours. C'est pourquoi, SEGAL et al. [SA97] préfèrent utiliser un filtre non linéaire pour régulariser l'EDP (3.3). Ils choisissent l'opérateur de filtrage ouverture-fermeture car il est non linéaire et ne décale pas les contours. Soit  $\mathbf{O}_S(I)$  et  $\mathbf{F}_S(I)$  respectivement l'ouverture et la fermeture morphologique de l'image  $I$  par un élément structurant  $S$ . La fonction de diffusion proposée est alors la suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} &= \operatorname{div} (D (\|\nabla(\mathbf{F}_S(\mathbf{O}_S(I)))\|) \nabla I) \\ I(x, y, 0) &= I_0(x, y) \\ \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

L'opérateur ouverture-fermeture identifie efficacement les régions sans enlever les hautes fréquences et sans introduire de déplacement de contours ni de biais dans les niveaux de gris. Cela autorise l'EDP à lisser les objets plus petits que l'élément structurant  $S$  tout en maintenant la structure des contours et leur localisation. Ce processus peut être intéressant particulièrement pour les images entachées d'un bruit de type « poivre et sel ».

### Remarque 1

*Le fait de moyenner la norme du gradient, que ce soit par un filtrage gaussien ou par un filtrage morphologique ralentit très fortement les calculs. Il faut en effet à chaque itération effectuer ce lissage avant de l'introduire dans l'EDP. De plus, pour le lissage gaussien un nouveau paramètre ( $\sigma$ ) doit être choisi et/ou calculé. Le choix de sigma définit la taille du voisinage dans lequel sera moyenné le gradient de l'image. Par exemple, pour  $\sigma = 1$  le nombre de pixels voisins sera de 9.*

**Lissage sélectif par diffusion non linéaire** ALVAREZ et al. [ALM92] proposent l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} &= D (\|\nabla I_\sigma\|) \underbrace{\|\nabla I\| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \right)}_{I_{\eta\eta}} \\ I(x, y, 0) &= I_0(x, y) \\ \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

L'EDP va donc sélectivement lisser de manière anisotrope suivant la direction  $\eta$ . Ainsi, quand le gradient est élevé, le coefficient de diffusion est élevé et par conséquent on a une forte diffusion dans la direction de  $\eta$ . Lorsque le gradient est faible le coefficient de diffusion est très faible et il n'y a quasiment pas de diffusion. Cette EDP n'est ni plus ni moins l'EDP MCM (2.15) pondérée par une fonction de diffusion. Néanmoins, la diffusion est toujours anisotrope, et cela même dans les régions où il y a du bruit. Les mêmes auteurs proposent

alors, une nouvelle EDP de lissage sélectif :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I}{\partial t} = D(\|\nabla I_\sigma\|) \left[ (1 - h(\|\nabla I\|)) \Delta I + h(\|\nabla I\|) \underbrace{\|\nabla I\| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \right)}_{I_{\eta\eta}} \right] \\ I(x, y, 0) = I_0(x, y) \\ \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right. \quad (3.23)$$

avec

$$h(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \geq 2\delta \\ 1 & \text{si } u \leq \delta \end{cases}$$

et  $\delta$  un seuil à déterminer. En prenant  $D(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{k^2}\right)$  et utilisant la relation

$$\Delta I = I_{\eta\eta} + I_{\xi\xi},$$

l'équation (3.23) se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I}{\partial t} = \exp\left(-\frac{\|\nabla I_\sigma\|^2}{k^2}\right) \left[ I_{\eta\eta} + \underbrace{(1 - h(\|\nabla I\|))}_{\geq 0} I_{\xi\xi} \right] \\ I(x, y, 0) = I_0(x, y) \\ \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right. \quad (3.24)$$

C'est donc une version stable de l'EDP de PERONA et MALIK. Les auteurs montrent l'existence et l'unicité de la solution de (3.23). Quand  $\|\nabla I\| > \delta$ , l'EDP diffuse dans la direction  $\eta$ , sinon elle diffuse de façon isotrope.

La figure 3.4 permet de comparer qualitativement ces processus de diffusion. Tant que possible, les mêmes paramètres sont utilisés pour tous les processus. Ainsi, nous utilisons la fonction de diffusion (3.5) avec  $k = 10$ , nous stoppons tous les processus pour  $t = 8$ . Lorsque nous avons à lisser le gradient de l'image pour estimer sa norme, nous prenons  $\sigma = 1$ . Pour le filtre de SEGAL et ACTON (3.21) nous avons choisi comme élément structurant un disque de taille un.

### 3.1.3 Filtrage par matrice de diffusion

Ici, l'idée de base provient de la physique, où un vecteur flux de diffusion a l'expression suivante :

$$\vec{j} = -D \cdot \nabla T \quad (3.25)$$

où  $D$  est une matrice de diffusion, matrice définie positive et symétrique dépendant des substances diffusantes et de la température, dont  $T$  est la distribution. Si  $\vec{j}$  est parallèle à  $\nabla T$ , alors la matrice de diffusion  $D$  est dégénérée en un scalaire de diffusion. La diffusion

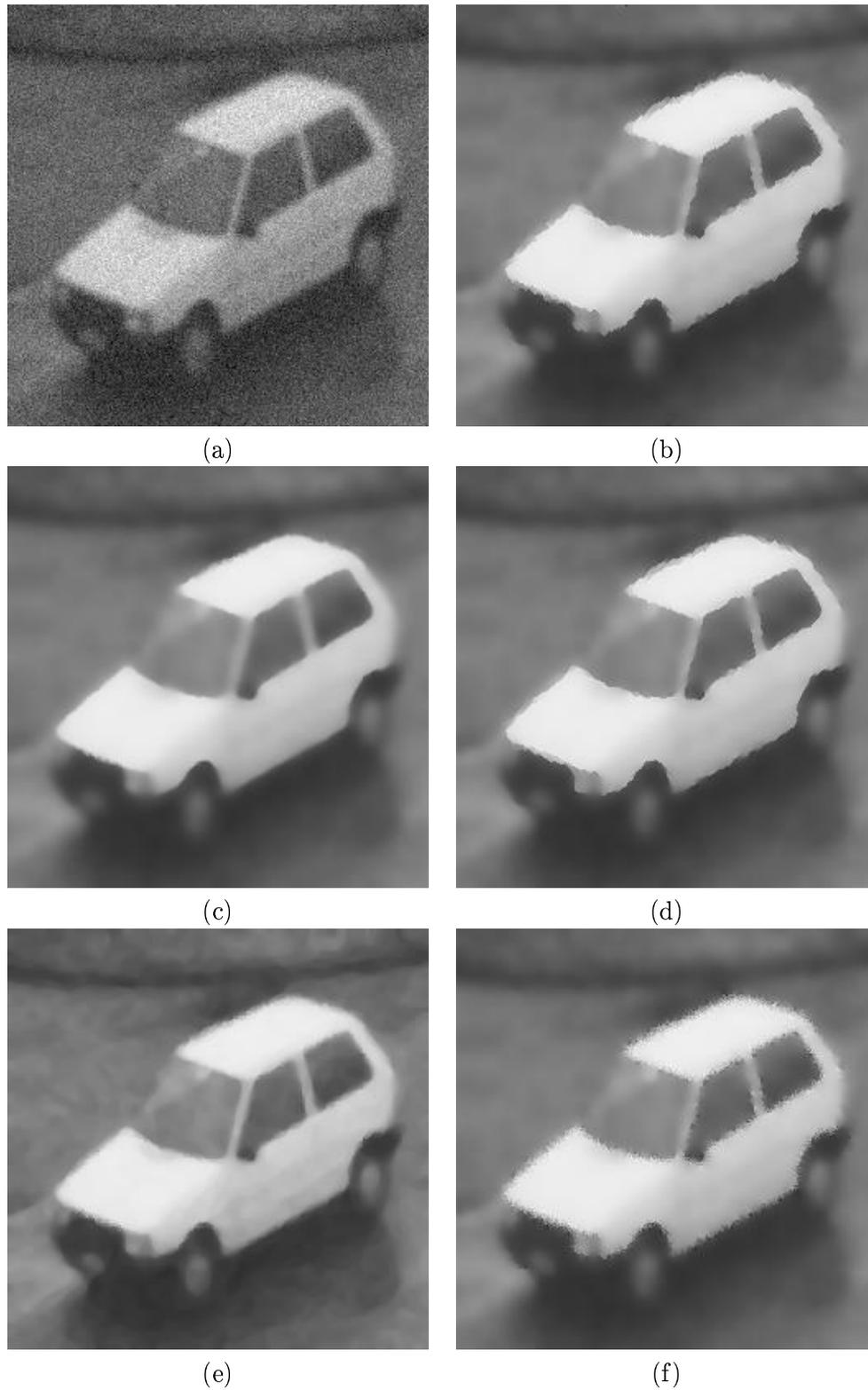


FIG. 3.4 – (a) : image « fiat », (b) : filtrage par diffusion anisotrope de PERONA (3.5), (c) : méthode de CATTÉ et *al.* pour  $\sigma = 1$ , (d) : méthode de SEGAL et ACTON (3.21) avec un élément structurant disque de taille 1, (e) : méthode d'ALVAREZ et *al.* (3.22), (f) : lissage sélectif (3.23).

est alors isotropique. A l'opposé, si  $\vec{j}$  est non parallèle à  $\nabla T$ , la diffusion est anisotropique. En utilisant l'équation de conservation de masse :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j} \quad (3.26)$$

et l'équation (3.25) on trouve alors l'EDP suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(D\nabla T) \quad (3.27)$$

WEICKERT [Wei94],[Wei97b] est le premier à proposer d'adapter ces équations au traitement d'images. Il remplace la température par l'intensité de l'image  $I$ . La matrice de diffusion est ensuite choisie de manière à caractériser la structure locale de l'image. WEICKERT propose deux matrices pour décrire l'orientation moyenne du gradient. En modifiant les valeurs propres de ces matrices il peut ainsi contrôler la diffusion de façon directionnelle.

### Edge Enhancing Diffusion

Dans [Wei94], WEICKERT utilise la matrice  $D = \nabla I_\sigma \nabla I_\sigma^t$  pour étudier la structure locale de l'image. Comme  $D$  est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée  $(v_1, v_2)$  :

$$v_1 // \nabla I_\sigma \quad \text{et} \quad v_2 \perp \nabla I_\sigma \quad (3.28)$$

Les deux valeurs propres associées sont choisies de la façon suivante :

$$\mu_1(\nabla I_\sigma) = 1 - \exp\left(\frac{-C}{\|\nabla I_\sigma\|^{2m}}\right) \quad (3.29)$$

$$\mu_2(\nabla I_\sigma) = 1 \quad (3.30)$$

où  $m \in \mathbb{N}$  et  $C$  est une constante strictement positive. L'existence, l'unicité et la régularité de la solution de ce modèle ont été démontrées dans [Wei94]. Lorsque la norme du gradient est élevée,  $\lambda_1$  décroît rapidement et le lissage perpendiculairement aux contours est inhibé. Sinon, le filtre se comporte de manière isotrope. Quand  $\sigma$  tend vers zéro, ce processus est équivalent au processus de PERONA et MALIK régularisé.

### Coherence Enhancing Diffusion

Dans [WtHRLvE97] WEICKERT propose d'utiliser le tenseur de structure :

$$J_\rho = G_\rho * (\nabla I_\sigma \nabla I_\sigma^t) \quad (3.31)$$

pour analyser la structure locale de l'image. Le tenseur de structure moyenne les orientations locales du gradient et non les directions du gradient. Cette matrice permet d'extraire l'orientation locale de la surface image.

région plate	$\mu_1 = \mu_2 = 0$
contour abrupt	$\mu_1 \gg \mu_2 = 0$
coin	$\mu_1 \geq \mu_2 \gg 0$

TAB. 3.2 – Interprétation de la mesure de cohérence.

Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  les valeurs propres de  $J_\rho$ , les valeurs propres de  $D = g(J_\rho)$  sont choisies de la façon suivante :

$$\lambda_1(\nabla I_\sigma) = \alpha \quad (3.32)$$

$$\lambda_2(\nabla I_\sigma) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \mu_1 = \mu_2 \\ \alpha + (1 - \alpha) \exp\left(\frac{-C}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.33)$$

où  $C$  est une constante positive et  $(\mu_1 - \mu_2)^2$  est une mesure de cohérence qui donne la variation de niveau de gris dans la direction des vecteurs propres à une échelle  $\rho$  et  $\alpha \in [0, 1]$ . Le tableau 3.2 permet d'interpréter cette mesure de cohérence. Ce processus lisse donc principalement le long des structures cohérentes et non perpendiculairement à celles-ci. Cette EDP est donc très intéressante pour l'extraction de structures allongées. WEICKERT l'applique à des images d'empreintes digitales [Wei97c]. Néanmoins, le lissage supplémentaire introduit un nouveau paramètre  $\rho$  et augmente considérablement les temps de calcul.

### 3.1.4 Approches par géométrie différentielle

De même que ALVAREZ et *al.* [AM94b], SOCHEN et *al.* [SKM98] supposent que la vision bas-niveau est un processus à entrée/sortie. Les hypothèses des auteurs sont les suivantes :

- les frontières entre les objets doivent survivre aussi longtemps que possible dans l'espace-échelles ;
- les régions homogènes doivent être simplifiées et aplaties le plus rapidement possible ;
- la géométrie et l'intégrité mathématique des objets doivent être préservées.

À la différence d'ALVAREZ et *al.* [AM94b], les auteurs ne considèrent pas l'image comme un empilement d'isophotes, mais comme une surface. Soient  $g_\Sigma$  et  $g_M$  respectivement les métriques associées aux espaces  $\Sigma$  et  $M$ . Ainsi, l'image est définie comme une surface  $(\Sigma, g_\Sigma)$  localement immergée dans un espace hybride de coordonnées spatiales et de coordonnées caractéristiques  $(M, g_M)$  appelé *espace caractéristique*. Les auteurs proposent ainsi un formalisme à base de géométrie différentielle permettant de générer des espaces multi-échelles à partir d'images 2D en niveaux de gris et couleurs et d'images 3D. À des fins de comparaisons avec les méthodes de restauration précédentes nous ne présentons ici que l'application de leur formalisme à des images en niveaux de gris. Soit  $\mathcal{S}$  une application de  $\Sigma$  dans  $M$  et  $(u^1, u^2)$  les coordonnées locales de  $\Sigma$ . Alors  $\mathcal{S}$  est donnée explicitement par une fonction de deux variables  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}^1(u^1, u^2), \mathcal{S}^2(u^1, u^2), \mathcal{S}^3(u^1, u^2))$ . En chaque point de  $\mathcal{S}$ , l'espace tangent  $T$  est défini par  $(\mathcal{S}_{u^1}, \mathcal{S}_{u^2}) = \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial u^2}\right)$ . Pour une image en niveaux de gris définie comme une surface de  $\mathbb{R}^3 = M$  :

$$\mathcal{S} : (u^1, u^2) \rightarrow (x = u^1, y = u^2, z = I(u^1, u^2)) \quad (3.34)$$

avec  $x$ ,  $y$  et  $z$  les coordonnées cartésiennes traditionnelles. Si l'on choisit la métrique euclidienne pour  $\mathbb{R}^3$  on peut déduire une métrique induite sur  $\Sigma$ . Ainsi, la distance au carré entre deux points de  $\Sigma$  est donnée par la *première forme fondamentale* :

$$ds^2 = (1 + I_x^2)dx^2 + 2I_xI_ydxdy + (1 + I_y^2)dy^2 \quad (3.35)$$

La matrice associée à cette métrique s'écrit :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + I_x^2 & I_xI_y \\ I_xI_y & 1 + I_y^2 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Les auteurs proposent ensuite de minimiser une énergie dépendant des deux métriques  $g_\Sigma$  et  $g_M$  qu'ils nomment *action de Nambu* :

$$E[I, g_\Sigma, g_{\mathbb{R}^3}] = \int_\Omega \sqrt{1 + I_x^2 + I_y^2} dxdy \quad (3.37)$$

Pour une image en niveaux de gris, cette énergie a une interprétation géométrique puisqu'elle correspond en fait à l'aire de la surface image. Minimiser cette énergie revient donc à faire converger la surface image vers une surface minimale. Cette énergie peut aussi être vue comme une généralisation de la norme euclidienne  $L^2$  dans un espace non euclidien. Si on minimise cette énergie par rapport à  $I$  en appliquant le théorème d'Euler-Lagrange on obtient l'EDP :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} &= \frac{(1 + I_y^2)I_{xx} - 2I_xI_yI_{xy} + (1 + I_x^2)I_{yy}}{(1 + I_x^2 + I_y^2)^{\frac{3}{2}}} = 2H \\ I(x, y, 0) &= I_0(x, y) \\ \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

où  $H$  est la courbure moyenne de la surface image. On peut montrer que le terme  $2H$  est aussi appelé courbure moyenne par certains auteurs. EL-FALLAH et *al.* [EFFAE94] remarquent que cette diffusion correspond à une diffusion de type PERONA et MALIK (3.3) avec la fonction de diffusion  $D(u) = (1 + u^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Chaque point de la surface évolue à une vitesse dépendant de la courbure moyenne selon le vecteur normal à la surface. Ce processus de diffusion préserve les contours car au long de ceux-ci, la normale à la surface est dans le plan  $x$ - $y$ , alors que les autres régions évoluent vers une surface minimale plus rapidement. On voit donc que l'on effectue en fait un lissage surfacique. Dans ce même registre, EL-FALLAH et *al.* [EFFAE94], SOCHEN et *al.* [SKM98] et MALLADI et *al.* [MS96] proposent de faire évoluer la surface image vers une surface minimale. Les processus de diffusion qu'ils présentent sont appelés respectivement diffusion par flot de courbure moyenne, diffusion par courbure moyenne et diffusion par flot BELTRAMI. Nous exprimons ces processus sous deux formes différentes dans la table 3.3. La première donne l'EDP associée au processus de diffusion, la seconde présente cette EDP sous la forme  $c_\xi I_{\xi\xi} + c_\eta I_{\eta\eta}$ . On constate que les termes  $c_\xi$  et  $c_\eta$  dépendent du terme  $g = 1 + I_x^2 + I_y^2$ . De plus, pour toutes ces équations  $\frac{c_\xi}{c_\eta} = (1 + I_x^2 + I_y^2)^{-1}$ . La proportion des lissages suivant les contours et perpendiculairement à ceux-ci est par conséquent la même pour tous ces processus de diffusion. On observe sur la figure 3.5 la diffusion de l'image « la cornouaille » à la même échelle. Il est à noter que le processus de SOCHEN et *al.* semble mieux préserver les contours.

Auteur	EDP	$c_\xi I_{\xi\xi} + c_\eta I_{\eta\eta}$
EL-FALLAH et <i>al.</i> [EFFAE94]	$\frac{\partial I}{\partial t} = 2H$	$g^{-\frac{3}{2}} I_{\xi\xi} + g^{-\frac{1}{2}} I_{\eta\eta}$
SOCHEN et <i>al.</i> [SKM98]	$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{2H}{\sqrt{g}}$	$g^{-2} I_{\xi\xi} + g^{-1} I_{\eta\eta}$
MALLADI et <i>al.</i> [MS96]	$\frac{\partial I}{\partial t} = 2H\sqrt{g}$	$g^{-1} I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta}$

TAB. 3.3 – Flots géométriques vers une surface minimale avec  $g = 1 + I_x^2 + I_y^2$ .



FIG. 3.5 – De haut en bas et de droite à gauche : image « cornouaille », diffusion par flot de courbure moyenne, diffusion par courbure moyenne, et diffusion par flot BELTRAMI pour  $t = 40$ .

### 3.1.5 Diffusion vectorielle

On se place ici dans le cadre des modèles d'images vectorielles, *i.e.* d'images en couleurs, d'images multispectrales... Deux approches principales sont abordées dans la littérature pour appliquer un traitement par EDP sur de telles images. La première idée est d'effectuer un filtrage par diffusion non linéaire sur chacune des sources séparément. Cette approche a l'inconvénient d'utiliser des indicateurs de contours indépendants et ainsi de pouvoir localiser les contours d'un même objet à différents endroits sur chacune des sources. Une deuxième approche qui semble plus robuste est d'effectuer un filtrage par une diffusion en utilisant un indicateur de contours commun à toutes les composantes de l'image [GORF92], [WG94], [Wei94], [Wei97b]. Soit  $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  un point dans le domaine image et soit  $\vec{X} : \Omega \rightarrow \Omega_c \subset \mathbb{R}^m$  une image vectorielle.  $\Omega_c$  étant appelé l'ensemble des caractéristiques, une image vectorielle est donc un ensemble d'images scalaires  $\{X^i(\mathbf{x})\}_{i=1, \dots, m}$  définies sur le même espace image. La diffusion introduit le paramètre temporel  $t \in \mathbb{R}^+$  dans la fonction  $\vec{X}$ . L'équation de diffusion vectorielle non linéaire s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{X}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \operatorname{div} \left( D(\mathcal{D}_\sigma \vec{X}) \nabla \vec{X} \right) \\ \vec{X}(\mathbf{x}, 0) &= \vec{X}_0(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} &= 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

où

$$\mathcal{D}_\sigma \vec{X} = \mathcal{D} \left( (G_\sigma * \vec{X})(\mathbf{x}, t) \right) \quad (3.40)$$

$\mathcal{D}$  est un opérateur de dissimilarité, une généralisation de la norme du gradient généralisée et

$$\nabla \vec{X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X^m}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial X^1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial X^m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

correspond au jacobien  $\mathbf{J}$  de l'image vectorielle. On constate que l'équation (3.39) est en fait un système d'EDP de diffusion sur chacun des plans images :

$$\begin{cases} \frac{\partial X^1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \operatorname{div} \left( D(\mathcal{D}_\sigma \vec{X}) \nabla X^1 \right) \\ \vdots & \\ \frac{\partial X^m(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \operatorname{div} \left( D(\mathcal{D}_\sigma \vec{X}) \nabla X^m \right) \end{cases} \quad (3.42)$$

Par ailleurs, il faut alors trouver une mesure de dissimilarité  $\mathcal{D}$  dans l'espace des paramètres  $\Omega_c$ . WITHAKER et GERIG [WG94] proposent de prendre  $\mathcal{D} = \|\mathbf{J}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m J_{ij}^2}$ .

#### Application à la restauration d'images couleur

Plusieurs auteurs [Zen86], [LC91], [SKM98], [SR96], [Sha96] ont proposé des mesures de dissimilarité, ou gradients couleurs, adaptées au traitement d'images en couleur. Nous en

présentons quelques unes en annexe D. A titre d'exemple, nous appliquons le processus de diffusion de PERONA et MALIK (cf. équation (3.3)) sur deux images en couleur. Nous nous plaçons dans l'espace couleur RGB. Nous utilisons le gradient de DI-ZENZO [Zen86] et la fonction de diffusion (3.5) avec  $k = 100$ . Sur les figures 3.6 et 3.7, on observe à la fois un débruitage et un rehaussement des images. Il est à noter que WEICKERT [Wei97a], SOCHEN et *al.* [KS99] et TSCHUMPERLÉ et *al.* [TD01] utilisent aussi les EDP pour la restauration d'images en couleur.

## 3.2 Rehaussement et EDP : filtres de choc

Pour éliminer le flou dans les images, l'idée générale est d'accentuer les transitions en augmentant localement leur amplitude. Parmi les diverses approches existantes dans la littérature, on peut citer : les filtres linéaires [SC85], [Gab65], les filtres homomorphiques [Jai89], les filtres d'ordre adaptatifs [LF87], les filtres morphologiques [Prê87]... Ici, nous ne nous intéressons qu'aux méthodes de rehaussement d'images par EDP. PERONA et MALIK [PM90] sont les premiers à proposer une EDP qui en combinant des processus de diffusion directe et inverse permet de rehausser les images. Néanmoins, comme on l'a vu précédemment, le processus itératif de diffusion inverse est instable. RUDIN [Rud84] est le premier à proposer une EDP de filtre de choc utilisée classiquement en mécanique des fluides pour rehausser les images de façon stable. L'idée est d'inverser le sens du flux au niveau des structures à rehausser afin d'améliorer le contraste. Un moyen de faire cela est d'imposer des niveaux de gris contrastés de part et d'autre du contour. Voici l'équation proposée par RUDIN :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} & = -sgn(I_{\xi\xi}^0) \|\nabla I\| \\ I(x, y, t = 0) & = I^0(x, y) \\ \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} & = 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

où  $I_{\xi\xi}^0$  représente la dérivée seconde locale dans la direction du gradient pour l'image initiale. Le terme  $I_{\xi\xi}$  étant un opérateur linéaire permettant de localiser les contours de l'image, RUDIN fait l'hypothèse que le signe de  $I_{\xi\xi}$  évolue peu au cours des itérations. C'est pour cela qu'il l'estime dès la première étape du processus. Ce filtre permet, en théorie, de rehausser les contours des images de façon stable et non oscillante ainsi que de reconstruire une image constante par morceaux. Néanmoins, il reste très sensible au bruit. De même que pour l'équation de PERONA et MALIK, ALVAREZ et MAZORRA [AM94a] proposent de régulariser l'équation (3.43) en substituant  $I_{\xi\xi}^0$  par  $G_\sigma * I_{\xi\xi}^0$ . La figure 3.8 illustre le comportement du filtre de choc monodimensionnel. Nous présentons sur la figure 3.9 l'application de l'équation (3.43) sur l'image cameraman et sur une image de synthèse pour  $t = 4$ . La méthode numérique utilisée pour approximer le terme  $\|\nabla I\|$  est celle de BROCKETT et MARAGOS [BM94].

## 3.3 Combinaison du lissage et du rehaussement

Comme on l'a vu précédemment, le fait de rehausser est souvent préjudiciable à la stabilité d'un processus. Il est cependant possible de stabiliser et améliorer les performances des EDP



FIG. 3.6 – En haut : image originale, en bas : image rehaussée avec la fonction PERONA, pour  $k = 100$ ,  $t = 10$  et le gradient de DI-ZENZO.



FIG. 3.7 – En haut : image originale, en bas : image rehaussée avec fonction PERONA pour  $k = 100$ ,  $t = 10$  et le gradient de DI-ZENZO.

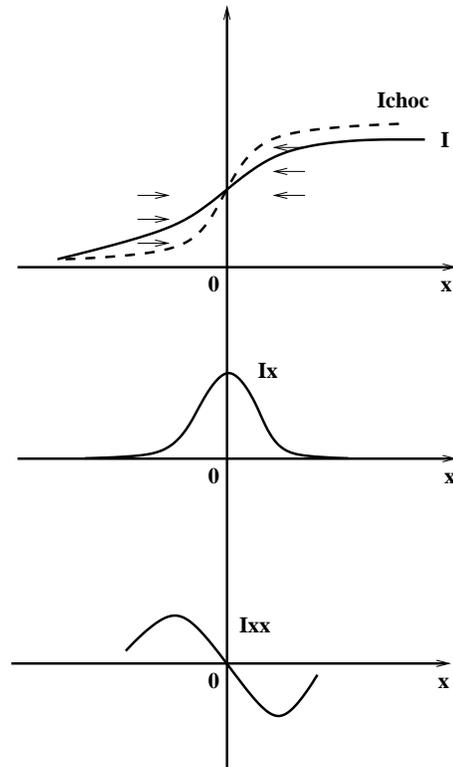


FIG. 3.8 –  $I$  est une fonction représentant un contour de type marche,  $I_x$  et  $I_{xx}$  sont respectivement ses dérivées première et seconde,  $I_{choc}$  est la fonction contour rehaussée (les flèches indiquent le sens du flux de diffusion).

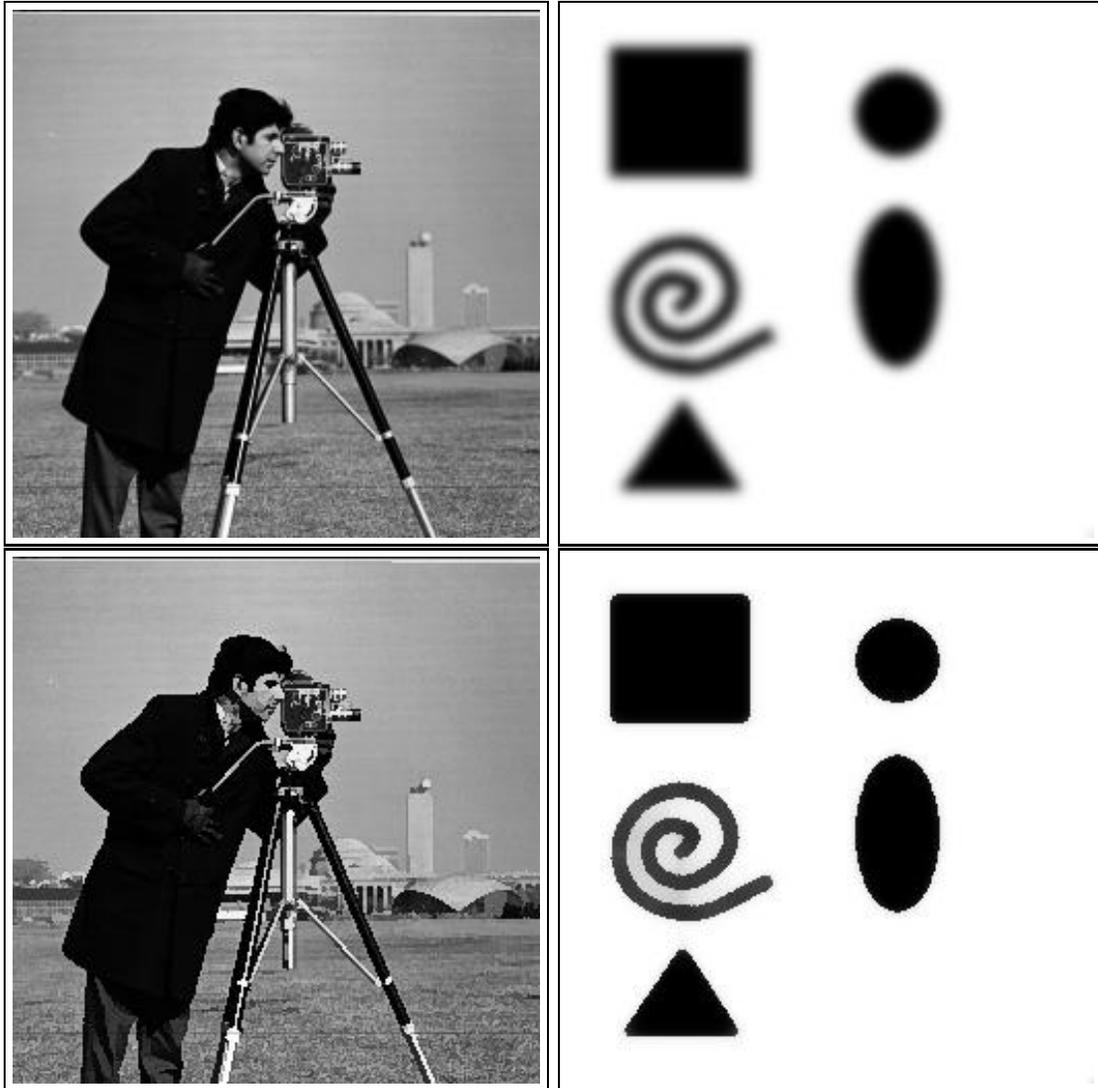


FIG. 3.9 – En haut : images originales, en bas : images rehaussées par le filtre de choc pour  $t = 4$ .

en faisant interagir le terme de rehaussement avec un terme de diffusion, laplacien ou autre, ou un terme d'attache aux données. L'EDP aura alors la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} & = \alpha_d L(I) - \alpha_r R(I) - \alpha_a A(I) \\ I(x, y, 0) & = I_0(x, y) \\ \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} & = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

où  $L(I)$ ,  $R(I)$  et  $A(I)$  sont respectivement les termes de lissage, de rehaussement et d'attache aux données. Les coefficients  $\alpha_d$ ,  $\alpha_r$  et  $\alpha_a$  sont des constantes réelles positives permettant de pondérer l'action de chacun des termes. Cela permet alors de gérer en même temps les deux problèmes que sont le flou et le bruit. Les premiers à avoir proposé une EDP de ce type sont ALVAREZ et MAZORA [AM94a] :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} & = \lambda L(I) - \|\nabla I\| \operatorname{sgn}(G_\sigma * I_{\xi\xi}) \\ I(x, y, 0) & = I_0(x, y) \\ \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} & = 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

Le premier terme est un terme de lissage directionnel anisotrope, le second est un filtre de choc. ALVAREZ et MAZORRA proposent de prendre  $L(I) = I_{\eta\eta}$ , le filtre élimine donc le bruit dans les directions parallèles aux contours et développe des chocs dans la direction orthogonale aux contours.

KORNPROBST [Kor98] propose un formalisme plus général s'inspirant des avantages des différentes méthodes de lissage (cf. équations (3.20), (3.22) et (3.23)) et de rehaussement par filtres de choc (cf. équation (3.43)). Ce formalisme permet d'éliminer le bruit et le flou tout en restant proche de l'image de départ. Le modèle proposé est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} & = -\alpha_a \underbrace{(I - I_N)}_{A(I)} \\ & + \alpha_d \underbrace{(h_{\tau_1}(\|\nabla I_\sigma\|) I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta})}_{L(I)} \\ & - \alpha_r \underbrace{(1 - h_{\tau_2}(\|\nabla I_\sigma\|)) \operatorname{sgn}((\nabla I_\sigma)_{\xi\xi}) \|\nabla I\|}_{R(I)} \\ I(x, y, 0) & = I_0(x, y) \\ \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} & = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

où  $h_\tau$  vérifie :

$$\begin{cases} h_\tau(x) & = 1, x < \tau \\ h_\tau(x) & = 0, x \geq \tau \end{cases}$$

Les coefficients  $\alpha_a$ ,  $\alpha_d$  et  $\alpha_r$  sont des constantes réelles positives et les paramètres  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont des seuils. Son comportement est le suivant :

- si  $\|\nabla I_\sigma\| < \tau_1$ , on a un opérateur de diffusion de type laplacien ;



FIG. 3.10 – À gauche : image « fiat », à droite : filtrage par la méthode de KORNPORBST (3.46) avec  $t = 8$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\tilde{\sigma} = 1$ ,  $\tau_1 = 10.0$ ,  $\tau_2 = 20.0$ ,  $\alpha_a = 0.5$ ,  $\alpha_d = 2.0$ ,  $\alpha_r = 1.0$ .

- si  $\tau_1 < \|\nabla I_\sigma\| < \tau_2$ , on ne lisse que suivant  $\eta$  ;
- si  $\tau_2 < \|\nabla I_\sigma\|$ , on lisse toujours suivant  $\eta$  mais avec le filtre de choc en plus.

L'auteur montre l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la convergence du processus. Selon lui, le choix des coefficients de pondération  $\alpha_a$ ,  $\alpha_d$  et  $\alpha_r$  semble ne pas trop dépendre du type d'image à traiter et il suggère de choisir  $\alpha_a = 0.5$ ,  $\alpha_d = 2$  et  $\alpha_r = 1$ . Par contre, les seuils  $\tau_1$  et  $\tau_2$  et le paramètre régularisation  $\sigma$  sont à régler de manière précise.

A titre d'illustration, nous présentons sur la figure 3.10 l'application de ce processus de diffusion à l'image « fiat » avec les paramètres suivants :  $t = 8$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\tilde{\sigma} = 1$ ,  $\tau_1 = 10.0$ ,  $\tau_2 = 20.0$ ,  $\alpha_a = 0.5$ ,  $\alpha_d = 2.0$ ,  $\alpha_r = 1.0$ .

### 3.4 Discrétisation des EDP

Malheureusement, la plupart des EDP non linéaires continues ne sont pas résolubles et on doit alors approcher les EDP continues. Les EDP du traitement d'images peuvent se mettre sous la forme  $\frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = F(I(\mathbf{x}, t))$ , où  $F(I(\mathbf{x}, t))$  est généralement une combinaison d'opérateurs différentiels sur les variables spatiales de l'image. Les méthodes de résolution se classent en deux catégories principales, les méthodes de semi-discrétisation, ou schémas numériques semi-discrets, et les méthodes de discrétisation totale, ou schémas numériques discrets. Nous ne traitons dans cette section que des schémas totalement discrets, en temps et en espace. La discrétisation de la variable temporelle donne lieu à de nombreuses méthodes que nous présentons brièvement ici. Pour toutes ces méthodes, nous ne traitons pas ici du problème de discrétisation spatiale, excepté pour les EDP de type filtre de choc, celui-ci est généralement résolu par de simple approximations par différences finies.

### 3.4.1 Schéma explicite (ou Euler avant)

Soit  $\Delta t$  le pas temporel de discrétisation, notons alors  $I^n = I(\mathbf{x}, t)$ ,  $I^{n+1} = I(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ . Lorsque l'on utilise un schéma explicite, la discrétisation temporelle de  $\frac{\partial I}{\partial t}$  est :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{I^{n+1} - I^n}{\Delta t} \quad (3.47)$$

L'équation (3.47) peut être mise sous forme matricielle :

$$\frac{I^{n+1} - I^n}{\Delta t} = \mathbf{A}(I^n)I^n \quad (3.48)$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice. Ce qui donne le schéma itératif suivant :

$$I^{n+1} = (\mathcal{I} + \Delta t \mathbf{A}(I^n))I^n \quad (3.49)$$

$\mathcal{I}$  étant la matrice identité. La stabilité du schéma numérique sera assurée si  $\Delta t$  est inférieur à une certaine valeur (généralement assez faible) dépendant des équations.

### 3.4.2 Schéma semi-implicite

Le terme semi-implicite signifie plus précisément ici, explicite en espace et implicite en temps.

$$\frac{I^n - I^{n+1}}{\Delta t} = \mathbf{A}(I^n)I^n \quad (3.50)$$

Ce qui donne le schéma itératif suivant :

$$I^n = (\mathcal{I} + \Delta t \mathbf{A}(I^n))I^{n+1} \quad (3.51)$$

Ce schéma est stable quelque soit  $\Delta t$ . Ce schéma nécessite néanmoins l'inversion de la matrice  $\mathcal{I} + \Delta t \mathbf{A}(I^n)$ .

### 3.4.3 Schéma implicite (ou Euler rétrograde)

On peut aussi envisager le cas complètement implicite :

$$\frac{I^{n+1} - I^n}{\Delta t} = \mathbf{A}(I^{n+1})I^{n+1} \quad (3.52)$$

Cependant ce schéma nécessite la résolution d'un système d'équations non linéaires qui est bien entendu plus compliqué à résoudre.

### 3.4.4 Autres méthodes de discrétisation

Voici une liste non exhaustive d'autres schémas de résolution rencontrés dans la littérature :

- les schémas de division par opérateur multiplicatif [WtHRV98];
- les schémas de division par opérateur additif (AOS) [WtHRV98];
- les méthodes multi-grilles [ABC94];
- les méthodes par éléments finis [BM96];
- les méthodes utilisant des algorithmes d'ondelettes [FW94].

Néanmoins, ces schémas sont dans l'ensemble assez peu présents dans le domaine du traitement d'images. Notons tout de même que le schéma semi-implicite AOS de WEICKERT [WtHRV98] semble intéressant pour le lissage d'images de dimension élevée. Les méthodes à base d'éléments finis pourraient être un bon moyen de coupler la multi-résolution au multi-échelles. Cependant, de telles méthodes sont plus difficiles à mettre en œuvre que celles que nous avons présentées précédemment.

### 3.4.5 Choix d'un schéma numérique

Les schémas semi-implicites ou implicites permettent d'utiliser des pas temporels bien plus élevés que les schémas explicites. Ils permettent donc des calculs plus rapides. Néanmoins, ils nécessitent l'inversion de la matrice  $\mathcal{I} + k\mathbf{A}(I^n)$ , avec tous les problèmes numériques sous-jacents. Les schémas explicites sont faciles à implémenter et à paralléliser, mais sont limités par un pas temporel faible. Le schéma explicite est, pour sa simplicité d'utilisation abondamment présent dans la littérature.

## Conclusion

Dans l'approche par EDP les images sont considérées à support continu en temps et en espace. Bien que cette formalisation offre un cadre théorique solide, elle est confrontée aux problèmes numériques inhérents à la résolution des EDP. Dans le chapitre suivant, nous présentons une nouvelle méthode de résolution des EDP « classiques » utilisées en traitement d'images. Pour cela, nous considérons les EDP comme des systèmes dynamiques.



# Chapitre 4

## $\lambda$ -résolution des EDP

Ce chapitre vise à présenter les EDP « classiques » du traitement d'images sous l'angle des processus des méthodes itératives dites de recherche de points fixes. Dans la première section, nous établissons des résultats théoriques sur les conditions de convergence des processus itératifs associés aux équations de diffusion linéaire, pondérée et anisotrope. La seconde section est consacrée plus particulièrement à l'étude dynamique de l'EDP de diffusion linéaire. Nous y exposons une nouvelle méthode de résolution numérique que nous dénommons  *$\lambda$ -résolution*, assurant la convergence d'un processus de diffusion linéaire, une bonne localisation et une bonne détection des contours présents dans les images. Cela nous fournit alors, un espace multi-échelles linéaire préservant les discontinuités que nous mettons en œuvre pour la segmentation d'images en niveaux de gris et d'images en couleur.

### 4.1 Conditions de convergence des EDP de diffusion « classiques »

Nous considérons le processus de la diffusion comme un mécanisme de traitement applicable à des objets. L'objet ainsi traité est une carte de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^P$ , c'est-à-dire une réalisation d'une variété différentielle de dimension  $N$  immergée dans un espace euclidien isomorphe à  $\mathbb{R}^{N+P}$ . On désigne de tels objets par  $\mathbf{I}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{I} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^P$  où l'image de  $\mathbf{x} = (x^i)_{i=1\dots N}$  est notée  $\mathbf{I}(\mathbf{x}) = (I^j(\mathbf{x}))_{j=1\dots P}$ . Pour formaliser le traitement, on considère qu'il s'agit de l'évolution contrôlée d'un objet initial dont la dimension totale est  $N + P$ . La concaténation des divers avatars de cet objet initial va alors produire un nouvel objet de dimension totale  $N + P + 1$ . Par convention, on dira que le traitement génère un objet  $\mathbf{I}(\mathbf{x}, t)$  dit espace multi-échelles, avec  $\mathbf{I} : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^P$  qui à  $(\mathbf{x}, t) = ((x^i)_{i=1\dots N}, t)$  associe  $\mathbf{I}(\mathbf{x}, t) = (I^j(\mathbf{x}, t))_{j=1\dots P}$ . Dans ces conditions, un traitement se décrit comme la donnée d'un problème aux limites :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{I}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= G(\mathbf{I}, \mathbf{x}, t), & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{I}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{I}(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{I}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

avec  $\Omega$ , le domaine de variation de  $\mathbf{x}$  et  $\partial\Omega$  la frontière où l'on considère systématiquement des conditions de Neumann.

Ici, nous nous intéressons aux trois processus de diffusion :

$$\frac{\partial \mathbf{I}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \mathbf{I}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i^2} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{I}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 \mathbf{I}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i^2} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{I}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Psi_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{I}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right) \quad (4.4)$$

avec  $\Phi$  et  $\Psi$  des fonctions de régulation. Dans la suite, nous nommerons respectivement ces trois équations : équation de diffusion linéaire ou isotrope, équation de diffusion linéaire pondérée et équation de diffusion anisotrope. On peut remarquer que le rôle de la dimension de l'espace d'arrivée  $P$  se limite ici à l'existence d'un ensemble de répliques de la forme

$$\forall j \in \{1 \dots P\}, \begin{cases} \frac{\partial I^j(\mathbf{x}, t)}{\partial t} & = G(I^j, \mathbf{x}, t) \\ I^j(\mathbf{x}, 0) & = I^j(\mathbf{x}) \\ I^j(\mathbf{x}, t) & = f^j(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (4.5)$$

ce qui permet de restreindre l'étude au cas  $P = 1$  sans compromettre la généralisation éventuelle.

#### 4.1.1 Mise en place du processus de traitement

La réalisation du traitement correspond à la résolution des problèmes (4.2), (4.3) et (4.4). Or, dans la pratique, on ne dispose généralement que de la donnée échantillonnée de  $I$  sur une grille discrète en  $\mathbf{x}$ . La résolution du problème passe donc obligatoirement par une méthode numérique impliquant la discrétisation de ce problème et principalement l'utilisation d'approximations des dérivées partielles. L'utilisation du théorème des accroissements finis donne les approximations des dérivées spatiales première et seconde suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} &= \frac{1}{\delta x_i} \left[ I \left( \mathbf{x} + \frac{\Delta \mathbf{x}_i}{2}, t \right) - I \left( \mathbf{x} - \frac{\Delta \mathbf{x}_i}{2}, t \right) \right] \\ \frac{\partial^2 I(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i^2} &= \frac{1}{\delta x_i^2} [I(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}_i, t) + I(\mathbf{x} - \Delta \mathbf{x}_i, t) - 2I(\mathbf{x}, t)] \end{aligned} \quad (4.6)$$

où  $\delta x_i$  et  $\Delta \mathbf{x}_i = \delta x_i \mathbf{1}_i$  désignent respectivement le pas d'échantillonnage spatial et le vecteur d'échantillonnage spatial suivant la  $i$ -ème composante de  $\mathbf{x}$ . Avec  $\mathbf{1}_i$  le vecteur canonique de la  $i$ -ème composante de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^N$ . De façon similaire, on utilise pour le membre gauche une approximation qui est

$$\frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} [I(\mathbf{x}, t + \Delta t) - I(\mathbf{x}, t)] \quad (4.7)$$

où  $\Delta t$  désigne l'accroissement selon  $t$ . Du choix de ces approximations découle des méthodes de résolution numérique, dites méthodes eulériennes explicites. Les EDP (4.2), (4.3) et (4.4) sont approchées respectivement comme suit [Wei98] :

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{x}, t + \Delta t) &= I(\mathbf{x}, t) + \Delta t \sum_{i=1}^N \frac{I(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}_i, t) + I(\mathbf{x} - \Delta \mathbf{x}_i, t) - 2I(\mathbf{x}, t)}{\delta x_i^2} \\
I(\mathbf{x}, t + \Delta t) &= I(\mathbf{x}, t) + \Delta t \sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{x}, t) \frac{I(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}_i, t) + I(\mathbf{x} - \Delta \mathbf{x}_i, t) - 2I(\mathbf{x}, t)}{\delta x_i^2} \\
I(\mathbf{x}, t + \Delta t) &= I(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{\delta x_i} \sum_{i=1}^N \Psi_i \left( \mathbf{x} + \frac{\Delta \mathbf{x}_i}{2}, t \right) \frac{I(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}_i, t) - I(\mathbf{x}, t)}{\delta x_i} \\
&\quad - \frac{\Delta t}{\delta x_i} \sum_{i=1}^N \Psi_i \left( \mathbf{x} - \frac{\Delta \mathbf{x}_i}{2}, t \right) \frac{I(\mathbf{x}, t) - I(\mathbf{x} - \Delta \mathbf{x}_i, t)}{\delta x_i}
\end{aligned}$$

Dans ces expressions, la présence des accroissements  $\Delta t$  et  $\delta x_i$  impose un choix de stratégie. En premier lieu, nous allons assimiler l'accroissement selon  $t$  au passage d'une étape  $n$  à l'étape  $n+1$  dans le processus, cela sans spécification particulière quant à la valeur de ce  $\Delta t$ . En second lieu, nous allons confronter l'existence d'accroissements  $\delta x_i$  avec la réalité de données provenant d'une grille discrète. Cette juxtaposition débouche sur une disjonction : soit l'on s'autorise la génération par interpolation de  $I(\mathbf{x} \pm \Delta \mathbf{x}_i, t)$ , respectivement  $\Psi_i(\mathbf{x} \pm \Delta \mathbf{x}_i, t)$ , pour un  $\Delta \mathbf{x}_i$  quelconque ; soit l'on considère que  $\delta x_i$  est inconnu mais qu'il correspond de fait au passage de  $I(\mathbf{x}, t)$ , respectivement  $\Psi_i(\mathbf{x}, t)$ , à l'un des voisins  $I(\mathbf{x} \pm \mathbf{1}_i, t)$ , respectivement  $\Psi_i(\mathbf{x} \pm \mathbf{1}_i, t)$ .

En choisissant cette dernière option et en regroupant les accroissements inconnus  $\Delta t$  et  $\delta x_i$  sous un même paramètre  $\lambda_i$  que l'on peut supposer dépendre tant de  $\mathbf{x}$  que de  $n$ , il vient alors les expressions itératives des processus de traitement :

$$I^{n+1}(\mathbf{x}) = I^n(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \lambda_i^n(\mathbf{x}) [I^n(\mathbf{x} + \mathbf{1}_i) + I^n(\mathbf{x} - \mathbf{1}_i) - 2I^n(\mathbf{x})] \quad (4.8)$$

$$I^{n+1}(\mathbf{x}) = I^n(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \lambda_i^n(\mathbf{x}) \Phi_i^n(\mathbf{x}) [I^n(\mathbf{x} + \mathbf{1}_i) + I^n(\mathbf{x} - \mathbf{1}_i) - 2I^n(\mathbf{x})] \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
I^{n+1}(\mathbf{x}) &= I^n(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^n(\mathbf{x})}{2} [\Psi_i^n(\mathbf{x}) + \Psi_i^n(\mathbf{x} + \mathbf{1}_i)] [I_i^n(\mathbf{x} + \mathbf{1}_i) - I_i^n(\mathbf{x})] \\
&\quad - \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^n(\mathbf{x})}{2} [\Psi_i^n(\mathbf{x}) + \Psi_i^n(\mathbf{x} - \mathbf{1}_i)] [I_i^n(\mathbf{x}) - I_i^n(\mathbf{x} - \mathbf{1}_i)]
\end{aligned} \quad (4.10)$$

en utilisant les interpolations :

$$\begin{aligned}
\Psi_i^n \left( \mathbf{x} + \frac{\Delta \mathbf{x}_i}{2} \right) &= \frac{\Psi_i^n(\mathbf{x}) + \Psi_i^n(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}_i)}{2} \\
\Psi_i^n \left( \mathbf{x} - \frac{\Delta \mathbf{x}_i}{2} \right) &= \frac{\Psi_i^n(\mathbf{x}) + \Psi_i^n(\mathbf{x} - \Delta \mathbf{x}_i)}{2}.
\end{aligned}$$

En ordonnant l'équation (4.10), on obtient

$$\begin{aligned}
I^{n+1}(\mathbf{x}) &= I^n(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^n(\mathbf{x})}{2} \left[ 2\Psi_i^n(\mathbf{x}) + \Psi_i^n(\mathbf{x} + \mathbf{1}_i) + \Psi_i^n(\mathbf{x} - \mathbf{1}_i) \right] I^n(\mathbf{x}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^n(\mathbf{x})}{2} \left[ \Psi_i^n(\mathbf{x}) + \Psi_i^n(\mathbf{x} + \mathbf{1}_i) \right] I^n(\mathbf{x} + \mathbf{1}_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^n(\mathbf{x})}{2} \left[ \Psi_i^n(\mathbf{x}) + \Psi_i^n(\mathbf{x} - \mathbf{1}_i) \right] I^n(\mathbf{x} - \mathbf{1}_i)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Les équations (4.2), (4.3) et (4.4) peuvent alors être considérées comme des cas particuliers du processus de diffusion généralisé :

$$\begin{cases} I^{n+1}(\mathbf{x}) &= I^n(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \lambda_i^n(\mathbf{x}) [a_i^n(\mathbf{x}) I^n(\mathbf{x} + \mathbf{1}_i) + b_i^n(\mathbf{x}) I^n(\mathbf{x} - \mathbf{1}_i) \\ &\quad - (a_i^n(\mathbf{x}) + b_i^n(\mathbf{x})) I^n(\mathbf{x})] \\ I^0(\mathbf{x}) &= I(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{4.12}$$

avec, pour l'équation (4.2) :

$$a_i^n(\mathbf{x}) = b_i^n(\mathbf{x}) = 1$$

pour l'équation (4.3) :

$$a_i^n(\mathbf{x}) = b_i^n(\mathbf{x}) = \Phi_i^n(\mathbf{x})$$

et pour l'équation (4.4) :

$$a_i^n(\mathbf{x}) = \frac{\Psi_i^n(\mathbf{x}) + \Psi_i^n(\mathbf{x} + \mathbf{1}_i)}{2} \quad \text{et} \quad b_i^n(\mathbf{x}) = \frac{\Psi_i^n(\mathbf{x}) + \Psi_i^n(\mathbf{x} - \mathbf{1}_i)}{2}$$

### 4.1.2 Analyse de la convergence du processus généralisé

Lors de l'application d'un processus itératif de diffusion, le paramètre  $\lambda$  va prendre une importance toute particulière [Aug96]. En effet, de la valeur de  $\lambda$  va dépendre le comportement du processus et donc certains des attributs de l'espace multi-échelles généré. La forme récurrente de l'expression (4.12) s'exprime globalement comme  $I^{n+1} = F(I^n)$  avec une fonction vectorielle  $F$  composée des fonctions  $f_{\mathbf{x}}(I^n)$  telles que

$$f_{\mathbf{x}}(I^n) = I^n(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \lambda_i^n(\mathbf{x}) [a_i^n(\mathbf{x}) I^n(\mathbf{x} + \mathbf{1}_i) + b_i^n(\mathbf{x}) I^n(\mathbf{x} - \mathbf{1}_i) - (a_i^n(\mathbf{x}) + b_i^n(\mathbf{x})) I^n(\mathbf{x})] \tag{4.13}$$

et donc telles que  $I^{n+1}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{x}}(I^n)$ . Cette forme d'écriture indique que l'on est face à une méthode de recherche de point fixe puisque, si le processus converge, il converge vers un  $I^\infty$  tel que  $I^\infty = F(I^\infty)$ , c'est-à-dire tel qu'en tout  $\mathbf{x}$  on ait  $I^\infty(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{x}}(I^\infty)$ . Le processus de résolution tend donc à produire  $I$  tel que  $F(I) = I$ . Ces méthodes de recherche de points fixes, également appelées méthodes de NEWTON, ont été largement étudiées et l'on sait qu'elles convergent si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne de  $F$  sont en valeur absolue inférieures à 1 [Cia98].

Pour étudier l'influence du paramètre  $\lambda$  sur la convergence du processus itératif de diffusion, nous allons donc nous attacher maintenant à une majoration du rayon spectral des matrices jacobienues.

### Matrices jacobienues

Le domaine de variation de  $\mathbf{x} = (x^i)_{i=1\dots N}$  étant une grille discrète de  $\mathbb{R}^N$ , on désigne par  $n_i$  le nombre d'éléments présents dans la discrétisation de la  $i$ -ème dimension. Le nombre total de points d'une grille est alors  $\Pi_N = \prod_{i=1}^N n_i$ , soit sous forme récurrente  $\Pi_N = n_N \Pi_{N-1}$  avec par convention  $\Pi_0 = 1$ . Pour identifier les différents points, nous adoptons un système de numérotation linéaire. Chaque point  $x^p$  de la grille,  $p \in \{1 \dots \Pi_N\}$ , se voit ainsi attribuer le numéro  $p = p_1 + \sum_{i=2}^N [(p_i - 1) \prod_{j=1}^{i-1} n_j]$  avec  $\forall i, p_i \in \{1 \dots n_i\}$ . La fonction vectorielle est formée de  $\Pi_N$  composantes  $f_{x^p}$  également notées  $f^p$ . Dans ces conditions, la matrice jacobienne de  $F$  est la matrice carrée  $\Pi_N \times \Pi_N$  dont la  $p$ -ème ligne est composée de l'ensemble des dérivées partielles de  $f^p(I^n)$  par rapport aux  $I^n(x^q)$ ,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(I^n)}{\partial I^n(x^1)} & \cdots & \frac{\partial f^1(I^n)}{\partial I^n(x^{\Pi_N})} \\ \vdots & \frac{\partial f^p(I^n)}{\partial I^n(x^q)} & \vdots \\ \frac{\partial f^{\Pi_N}(I^n)}{\partial I^n(x^1)} & \cdots & \frac{\partial f^{\Pi_N}(I^n)}{\partial I^n(x^{\Pi_N})} \end{pmatrix}$$

### Majoration du rayon spectral

Le premier théorème de HADAMARD-GERSCHGORIN nous indique que le spectre d'une matrice carrée  $A = (a_{pq})$  est contenu dans l'union des disques du plan complexe

$$D_p \equiv \{z, |z - a_{pp}| \leq \Lambda_p\} \quad \text{où} \quad \Lambda_p = \sum_{q \neq p} |a_{pq}|$$

Avec les matrices jacobienues, les éléments diagonaux sont les dérivations  $\frac{\partial f^p(I^n)}{\partial I^n(x^p)}$  soit

$$a_{pp} = 1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i^n(x^p) [a_i^n(x^p) + b_i^n(x^p)]$$

Parmi les éléments non diagonaux, les seuls éventuellement non nuls sont les dérivations  $\frac{\partial f^p(I^n)}{\partial I^n(x^{p+1_i})}$  ou  $\frac{\partial f^p(I^n)}{\partial I^n(x^{p-1_i})}$ . Précisons le sens des notations de voisinage : dans les cas non limites, ceux où  $p_i \in ]1; n_i[$ ,  $x^p \pm 1_i$  correspond alors au point de numéro  $p \pm \Pi_{i-1}$ ; par contre, lorsque le point est un point frontière,  $p_i = 1$  ou  $p_i = n_i$ , l'un des voisins n'existe pas. On obtient donc

$$a_{p, p+\Pi_{i-1}} = \lambda_i^n(x^p) a_i^n(x^p) \delta_i^+(p) \quad \text{avec} \quad \delta_i^+(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_i \in ]1; n_i[ \\ 0 & \text{si } p_i = n_i. \end{cases}$$

$$a_{p, p-\Pi_{i-1}} = \lambda_i^n(x^p) a_i^n(x^p) \delta_i^-(p) \quad \text{avec} \quad \delta_i^-(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_i \in ]1; n_i[ \\ 0 & \text{si } p_i = 1. \end{cases}$$

Ainsi on en arrive à

$$\Lambda_p = \sum_{i=1}^N [|\lambda_i^n(x^p) a_i^n(x^p) \delta_i^+(p)| + |\lambda_i^n(x^p) b_i^n(x^p) \delta_i^-(p)|]$$

soit, puisque  $\lambda_i^n(x^p) \geq 0$  et  $\delta_i^n(p) \geq 0$

$$\Lambda_p = \sum_{i=1}^N \lambda_i^n(x^p) [ |a_i^n(x^p)| \delta_i^+(p) + |b_i^n(x^p)| \delta_i^-(p) ]$$

En prenant l'hypothèse  $H_0 = \{a_i \geq 0 \text{ et } b_i \geq 0\}$ , nous avons finalement

$$\Lambda_p = \sum_{i=1}^N \lambda_i^n(x^p) [a_i^n(x^p) \delta_i^+(p) + b_i^n(x^p) \delta_i^-(p)]$$

et des disques de GERSCHGORIN qui sont

$$D_p \equiv \left\{ z, \left| z - 1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i^n(x^p) [a_i^n(x^p) + b_i^n(x^p)] \right| \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i^n(x^p) [a_i^n(x^p) \delta_i^+(p) + b_i^n(x^p) \delta_i^-(p)] \right\}$$

ou

$$D_p \equiv \left\{ z, \left| z - 1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \right| \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i \delta_i^+ + b_i \delta_i^-] \right\}$$

**Une condition nécessaire** On considère une valeur propre de la matrice jacobienne,  $\beta = x + i y$ , et l'on souhaite avoir  $|\beta| < 1$ , soit  $x^2 + y^2 < 1$  et donc nécessairement  $|x| < 1$  et  $|y| < 1$ . Or la valeur propre est incluse dans l'union des disques qui sont tous centrés sur l'axe réel. Les ordonnées des points des disques vérifient donc  $|y| \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i \delta_i^+ + b_i \delta_i^-]$ . Cette inégalité devant être réalisée pour toute valeur de  $\delta_i$ , on obtient une condition nécessaire pour que  $|\beta| < 1$ ,

$$0 \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i^n(x^p) [a_i^n(x^p) + b_i^n(x^p)] < 1 \quad (4.14)$$

**Une condition nécessaire et suffisante** Nous allons montrer que la condition nécessaire (4.14) se trouve être également suffisante.

**Majoration des abscisses des points des disques** Ces abscisses vérifient :

$$\left| x - 1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \right| \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i \delta_i^+ + b_i \delta_i^-]$$

avec la condition (4.14). D'où deux cas à considérer :

soit

$$x - 1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] < 0 \quad \text{i.e.} \quad x < 1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i \delta_i^+ + b_i \delta_i^-] \quad \text{et donc} \quad x \leq 1$$

soit

$$x - 1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \geq 0 \quad \text{i.e.} \quad x \leq 1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i (1 - \delta_i^+) + b_i (1 - \delta_i^-)] \quad \text{et donc} \quad x \leq 1.$$

Ainsi, la condition (4.14) implique que les abscisses des points des disques vérifient  $x \leq 1$ .

**Majoration de la norme des points des disques** Les points des disques sont tels que

$$\left( x - 1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \right)^2 + y^2 \leq \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i \delta_i^+ + b_i \delta_i^-] \right)^2$$

et donc tels que

$$x^2 + y^2 \leq 2x \left( 1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \right) + \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i \delta_i^+ + b_i \delta_i^-] \right)^2 - \left( 1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \right)^2$$

Un majorant du carré de la norme des points d'un disque est donc

$$B(x) = 2x \left( 1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \right) + \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i \delta_i^+ + b_i \delta_i^-] \right)^2 - \left( 1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \right)^2$$

On constate que  $B(x)$  est linéaire en  $x$  et, la condition (4.14) associée à la majoration des abscisses, permet d'affirmer que

$$\sup_x (B(x)) = B(1) = 1 + \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i \delta_i^+ + b_i \delta_i^-] \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \right)^2$$

avec par définition

$$0 \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i \delta_i^+ + b_i \delta_i^-] \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i]$$

Ainsi, la condition (4.14) implique que les normes des points des disques vérifient  $x^2 + y^2 \leq 1$ , avec une inégalité stricte lorsque  $\forall i, \delta_i = 1$ .

**Points des disques de norme unitaire** Nous envisageons maintenant les cas limites, c'est-à-dire les points de norme unitaire,  $x^2 + y^2 = 1$ , appartenant à des disques  $\left| z - 1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \right| \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i]$ . On a donc

$$x^2 + y^2 \leq 2x \left( 1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \right) + \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i \delta_i^+ + b_i \delta_i^-] \right)^2 - \left( 1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \right)^2$$

$$x^2 + y^2 \leq 2x \left( 1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \right) - \left( 1 - 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \right)$$

d'où,

$$1 \leq 2x \left( 1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \right) - \left( 1 - 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \right)$$

et  $1 \leq x$ . La majoration des abscisses des points des disques donne alors  $1 \leq x \leq 1$  soit  $x = 1$  et en conséquence  $y = 0$ . Ainsi, la condition (4.14) implique que pour toute valeur propre  $\beta$  de la matrice jacobienne, si  $\beta \neq 1$  alors  $|\beta| < 1$ .

**Possibilité d'une valeur propre égale à un** Le deuxième théorème de HADAMARD-GERSCHGORIN dit que si une valeur propre appartient à la frontière de l'union des disques, alors toutes les frontières des disques passent par cette valeur propre. Dans notre cas, il n'existe aucun disque tel que le point  $(1, 0)$  soit intérieur. En effet si l'on suppose qu'il existe un tel point, on aurait  $\left| 1 - 1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \right| < \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i \delta_i^+ + b_i \delta_i^-]$ , soit avec l'hypothèse  $H_0$ ,  $\sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] < \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i \delta_i^+ + b_i \delta_i^-]$  ce qui est impossible. Par contre, le point  $(1, 0)$  appartient bien à la frontière de l'union des disques. En effet, d'une part ce point est sur la frontière des disques vérifiant  $\forall i \delta_i = 1$ , puisque l'on a  $\sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] = \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i]$ , et d'autre part, on vient de voir que ce point n'était intérieur à aucun disque. Cependant, il existe des disques dont la frontière ne passe pas par le point  $(1, 0)$ . En effet, il suffit de considérer un disque où  $\exists i \delta_i = 0$ , ce qui signifie avec l'hypothèse  $H_0$  que l'on a  $\sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i \delta_i^+ + b_i \delta_i^-] < \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i]$ , et donc l'impossibilité de satisfaire la relation  $\left| 1 - 1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i + b_i] \right| = \sum_{i=1}^N \lambda_i [a_i \delta_i^+ + b_i \delta_i^-]$ . Ainsi, la condition (4.14) implique que la matrice jacobienne ne peut avoir pour valeur propre  $\beta = 1$ .

**Conclusion** Nous venons de montrer que la condition nécessaire (4.14) était également une condition suffisante pour que toute valeur propre de la matrice jacobienne vérifie  $|\beta| < 1$ .

### Convergence du processus de diffusion généralisé

Si l'on considère le processus de diffusion généralisé

$$\begin{cases} \mathbf{I}^{n+1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{I}^n(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \lambda_i^n(\mathbf{x}) [a_i^n(\mathbf{x}) \mathbf{I}^n(\mathbf{x} + \mathbf{1}_i) + b_i^n(\mathbf{x}) \mathbf{I}^n(\mathbf{x} - \mathbf{1}_i) \\ &\quad - (a_i^n(\mathbf{x}) + b_i^n(\mathbf{x})) \mathbf{I}^n(\mathbf{x})] \\ \mathbf{I}^0(\mathbf{x}) &= \mathbf{I}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

et si  $\forall n, \forall i, \forall \mathbf{x}$  on a  $a_i^n(\mathbf{x}) \geq 0$  et  $b_i^n(\mathbf{x}) \geq 0$ , alors ce processus numérique sera stable si  $\forall n, \forall \mathbf{x}$  le paramètre  $\lambda$  est tel que

$$0 \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i^n(\mathbf{x}) [a_i^n(\mathbf{x}) + b_i^n(\mathbf{x})] < 1 \quad (4.15)$$

### 4.1.3 Quelques déclinaisons de la propriété de convergence

Nous allons revenir sur les diffusions particulières envisagées dès l'introduction.

#### Diffusion du laplacien

La diffusion (4.2) donne le processus (4.8), soit le processus généralisé avec  $a_i^n(\mathbf{x}) = 1$  et  $b_i^n(\mathbf{x}) = 1$ . On satisfait bien évidemment aux conditions  $a_i^n(\mathbf{x}) \geq 0$  et  $b_i^n(\mathbf{x}) \geq 0$ , et la convergence est assurée si

$$\forall n, \forall \mathbf{x}, \quad 0 \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i^n(\mathbf{x}) < \frac{1}{2}$$

On peut relever le cas particulier où  $\forall i, \lambda_i^n(\mathbf{x}) = \lambda^n(\mathbf{x})$ , ce qui donne pour la convergence

$$\forall n, \forall \mathbf{x}, \quad 0 \leq \lambda^n(\mathbf{x}) < \frac{1}{2N}$$

#### Diffusion du laplacien pondéré

La diffusion (4.3) donne le processus (4.9), soit le processus généralisé avec  $a_i^n(\mathbf{x}) = \Phi_i^n(\mathbf{x})$  et  $b_i^n(\mathbf{x}) = \Phi_i^n(\mathbf{x})$ . Pour satisfaire aux conditions  $a_i^n(\mathbf{x}) \geq 0$  et  $b_i^n(\mathbf{x}) \geq 0$ , on doit donc avoir  $\Phi_i^n(\mathbf{x}) \geq 0$ , et la convergence est assurée si

$$\forall n, \forall \mathbf{x}, \quad 0 \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i^n(\mathbf{x}) \Phi_i^n(\mathbf{x}) < \frac{1}{2}$$

On peut relever un premier cas particulier où  $\forall i, \lambda_i^n(\mathbf{x}) = \lambda^n(\mathbf{x})$ , ce qui donne pour la convergence

$$\forall n, \forall \mathbf{x}, \quad 0 \leq \lambda^n(\mathbf{x}) < \left[ 2 \sum_{i=1}^N \Phi_i^n(\mathbf{x}) \right]^{-1}$$

Un second cas particulier est celui où l'on a de plus  $\forall i, \Phi_i^n(\mathbf{x}) = \Phi^n(\mathbf{x})$ , d'où pour la convergence

$$\forall n, \forall \mathbf{x}, \quad 0 \leq \lambda^n(\mathbf{x}) < [2N\Phi^n(\mathbf{x})]^{-1}$$

#### Diffusion de la divergence du gradient pondéré

La diffusion (4.4) donne le processus (4.10), soit le processus généralisé avec

$$a_i^n(\mathbf{x}) = \frac{\Psi_i^n(\mathbf{x}) + \Psi_i^n(\mathbf{x} + \mathbf{1}_i)}{2} \quad \text{et} \quad b_i^n(\mathbf{x}) = \frac{\Psi_i^n(\mathbf{x}) + \Psi_i^n(\mathbf{x} - \mathbf{1}_i)}{2}$$

Pour satisfaire aux conditions  $a_i^n(\mathbf{x}) \geq 0$  et  $b_i^n(\mathbf{x}) \geq 0$ , on doit donc avoir

$$\Psi_i^n(\mathbf{x}) + \Psi_i^n(\mathbf{x} + \mathbf{1}_i) \geq 0 \quad \text{et} \quad \Psi_i^n(\mathbf{x}) + \Psi_i^n(\mathbf{x} - \mathbf{1}_i) \geq 0.$$

Ceci est vérifié pour les diverses fonctions de diffusion de la littérature puisque celles-ci sont choisies positives. Ainsi, la convergence est assurée si :

$$\forall n, \forall \mathbf{x}, \quad 0 \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i^n(\mathbf{x}) [2\Psi_i^n(\mathbf{x}) + \Psi_i^n(\mathbf{x} + \mathbf{1}_i) + \Psi_i^n(\mathbf{x} - \mathbf{1}_i)] < 2$$

On peut relever un premier cas particulier où  $\forall i, \lambda_i^n(\mathbf{x}) = \lambda^n(\mathbf{x})$ , ce qui donne pour la convergence

$$\forall n, \forall \mathbf{x}, \quad 0 \leq \lambda^n(\mathbf{x}) < \frac{2}{\sum_{i=1}^N [2\Psi_i^n(\mathbf{x}) + \Psi_i^n(\mathbf{x} + \mathbf{1}_i) + \Psi_i^n(\mathbf{x} - \mathbf{1}_i)]}$$

Un second cas particulier est celui où l'on a de plus,  $\forall i, \Psi_i^n(\mathbf{x}) = \Psi^n(\mathbf{x})$ , d'où pour la convergence

$$\forall n, \forall \mathbf{x}, \quad 0 \leq \lambda^n(\mathbf{x}) < \frac{2}{\sum_{i=1}^N [2\Psi^n(\mathbf{x}) + \Psi^n(\mathbf{x} + \mathbf{1}_i) + \Psi^n(\mathbf{x} - \mathbf{1}_i)]}$$

#### 4.1.4 Sur le choix de $\lambda$

Comme nous l'avons vu précédemment, l'utilisation des méthodes de résolution numériques eulériennes explicites n'assure pas la convergence inconditionnelle des processus de diffusion. Ainsi, le choix du paramètre d'évolution doit se faire à l'intérieur d'un intervalle de convergence  $[0, \lambda_{max}[$ , dépendant du processus de diffusion utilisé. Par conséquent, il s'agit ici de choisir au mieux  $\lambda_i^n(\mathbf{x})$  dans l'intervalle  $[0, \lambda_{max}[$ , sachant d'une part, que plus sa valeur sera proche de  $\lambda_{max}$ , plus le processus convergera rapidement, et d'autre part, que plus sa valeur sera proche de 0, plus l'évolution du processus sera lente, voire stoppée. La solution généralement adoptée est de choisir le même paramètre d'évolution pour tous les processus d'évolution locaux, soit  $\forall \mathbf{x}, \forall n, \lambda_i^n(\mathbf{x}) = \lambda$ .

Pour notre part, nous optons pour une approche différente, consistant à utiliser la condition de convergence générale (4.15) de manière à proposer un choix localisé, en espace et en temps, du paramètre  $\lambda$  assurant dans le même temps la convergence de chaque processus local. Dans cette optique, la convergence du processus sera, par conséquent, d'autant plus rapide que le terme  $\sum_{i=1}^N \lambda_i^n(\mathbf{x}) [a_i^n(\mathbf{x}) + b_i^n(\mathbf{x})]$  sera proche de la valeur 1 et, d'autant plus lente que ce même terme sera proche de la valeur 0. Ainsi, nous avons la possibilité d'adapter la vitesse d'évolution du processus de diffusion en fonction des caractéristiques locales de l'image. Pour cela, on pourra utiliser des informations de nature statistique, telles que la moyenne et la variance des niveaux de gris, ou encore, des informations de nature géométrique, telles que la norme du gradient, les courbures locales de la surface image... Par conséquent, si l'on souhaite lisser l'image tout en préservant certaines structures d'intérêt, il suffira alors, d'exprimer le paramètre  $\lambda^n(\mathbf{x})$  en fonction d'un indicateur de structure pertinent, ce paramètre étant défini de manière à être très faible, voire nul lorsque l'on souhaite préserver la structure et le plus élevé possible, sinon.

Dans la section suivante, nous nous intéressons plus particulièrement à l'étude dynamique du processus de diffusion linéaire.

## 4.2 Étude dynamique d'un processus de diffusion linéaire

Ici, nous nous proposons d'étudier le comportement du processus de diffusion linéaire (4.2), suivant différents choix du paramètre d'évolution  $\lambda$ . Pour cela, nous appliquons ces processus à diverses images en niveaux de gris et en couleur. Sous notre formalisme ces images sont des objets correspondant respectivement à une carte de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et à une carte de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ . En conséquence, si l'on n'envisage que le cas où  $\forall i, \lambda_i^n(\mathbf{x}) = \lambda^n(\mathbf{x})$ , la condition de convergence du processus de diffusion linéaire est alors la même pour ces deux modalités d'imagerie et s'écrit (cf. paragraphe 4.1.3) :

$$\forall n, \forall \mathbf{x}, 0 \leq \lambda^n(\mathbf{x}) < \frac{1}{4}$$

### 4.2.1 Application aux images en niveaux de gris

Le processus de diffusion linéaire d'une image en niveaux de gris se présente sous la forme du processus itératif suivant :

$$\begin{cases} I^{n+1}(x^1, x^2) &= I^n(x^1, x^2) + \lambda^n(x^1, x^2)[I^n(x^1 + 1, x^2) + I^n(x^1 - 1, x^2) \\ &\quad + I^n(x^1, x^2 + 1) + I^n(x^1, x^2 - 1) - 4I^n(x^1, x^2)] \\ I(x^1, x^2, 0) &= I(x^1, x^2) \end{cases} \quad (4.16)$$

Nous traitons dans un premier temps, le cas de l'évolution du processus itératif à pas constant, puis nous proposons dans un second temps, différents choix de paramètre d'évolution adaptatif  $\lambda(\mathbf{x})$  permettant la préservation des contours.

#### Évolution à pas constant

Afin de mettre en évidence l'influence du choix du paramètre  $\lambda$  sur le comportement du processus de diffusion, nous présentons sur la figure 4.1 quelques étapes de l'évolution de l'image « fibre » pour les paramètres d'évolution constants  $\lambda = 0, 1$ ,  $\lambda = 0, 2$  et  $\lambda = 0, 3$ . On peut constater d'une part, que plus  $\lambda$  est grand, plus le processus évolue rapidement, autrement dit plus l'image est lissée, et d'autre part, que si  $\lambda$  n'appartient plus à l'intervalle de convergence, alors le processus diverge entraînant alors une détérioration irrémédiable de l'image.

#### Évolution à pas adaptatif

Ici, l'idée est de proposer des paramètres d'évolution localisés de manière à contrôler la vitesse d'évolution du processus de diffusion en fonction de la géométrie ou des statistiques

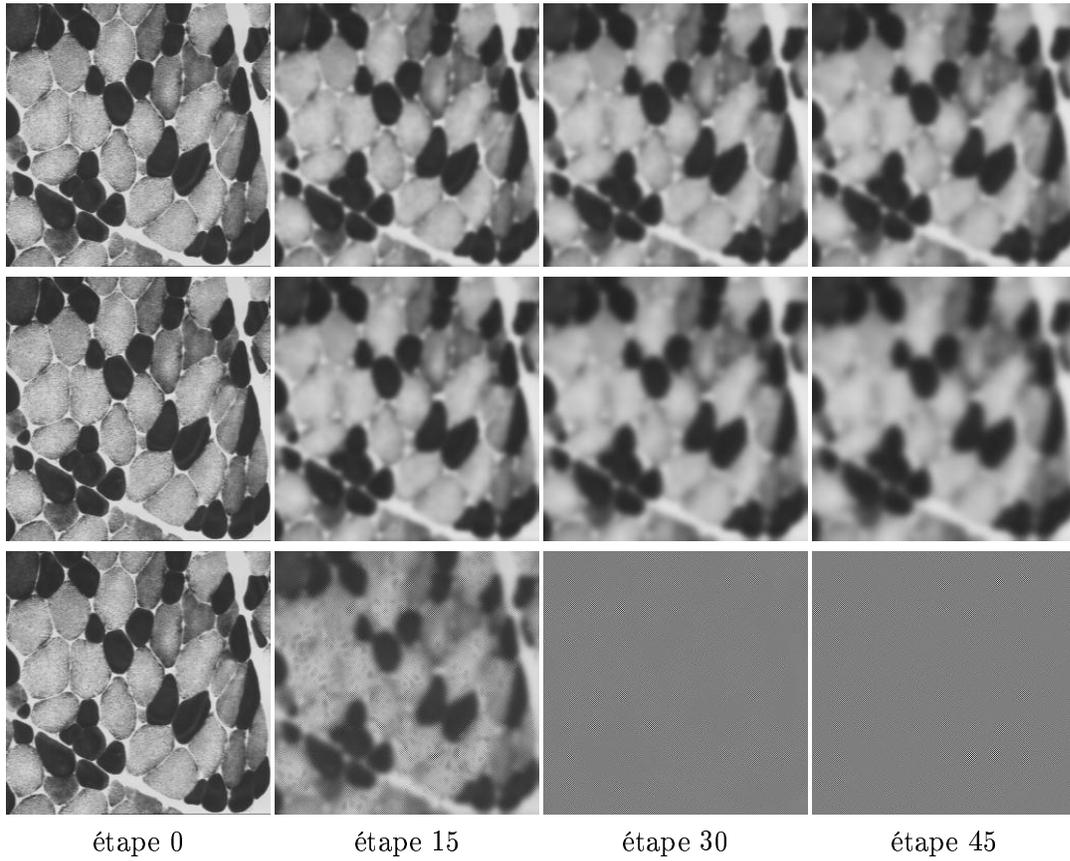


FIG. 4.1 – Évolution de l'image « fibre » suivant différents pas d'évolution constants, chaque ligne correspondant respectivement à  $\lambda = 0,1$ ,  $\lambda = 0,2$  et  $\lambda = 0,3$  et chaque colonne correspondant respectivement aux étapes 0, 15, 30 et 45 du processus itératif.

de l'image et ainsi effectuer un lissage adapté aux caractéristiques locales de l'image. Un tel comportement nous permet alors de préserver les structures d'intérêt de l'image.

La limite de convergence du processus de diffusion linéaire étant  $\frac{1}{4}$ , nous proposons de définir les pas d'évolution de la forme :

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{4 + f(\mathbf{x}, I)} \quad (4.17)$$

où  $f(\mathbf{x}, I)$  est une fonction réelle, positive, dépendant des caractéristiques locales de l'image, et assurant par ailleurs, l'appartenance de  $\lambda(\mathbf{x})$  à l'intervalle de convergence. Il conviendra donc de choisir la fonction  $f$  de manière à ce qu'elle présente des valeurs élevées sur les structures à préserver et faibles sur les structures à lisser.

Un processus de diffusion linéaire, résolu de manière classique, c'est-à-dire avec un paramètre  $\lambda$  constant, peut être considéré comme un processus linéaire en espace et en temps. Dans cette optique, on peut dire que la méthode de résolution à pas adaptatif, présentée ci-dessus, introduit une non linéarité temporelle dans un processus purement linéaire.

Si l'on souhaite préserver les contours de l'image, on pourra par exemple, choisir  $f$  comme étant une fonction croissante de la norme du gradient de l'image. Voici deux choix possibles du paramètre d'évolution satisfaisant ces objectifs :

$$\lambda_1(\|\nabla I\|) = \frac{1}{4 + \|\nabla I\|^2} \quad (4.18)$$

$$\lambda_2(\|\nabla I\|, k) = \frac{1}{4 + \left(\exp\left(\frac{\|\nabla I\|^2}{k^2}\right) - 1\right)} \quad (4.19)$$

où le paramètre  $k$  est un seuil qui permet, au même titre que celui utilisé pour les EDP de diffusion non linéaire, cf. équation (3.3), de différencier les points de fort gradient dus au bruit de ceux dus aux contours.

À titre d'illustration, nous présentons sur les figures 4.2 et 4.3 l'allure respective des fonctions  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  en fonction de la norme du gradient.

La différence essentielle entre le processus proposé ici et les divers processus de diffusion non linéaires proposés dans la littérature [PM90], [CLMT92], [AGLM92], [SA97], [EFFAE94] se situe dans un traitement différent des contours. En effet, en présence de contours, un processus de diffusion non linéaire privilégie un lissage dans une direction parallèle à ceux-ci, alors que notre processus n'effectue lui, aucun lissage sur les contours puisque celui-ci est stoppé sur ceux-ci. Cette différence de comportement permet, d'une part, de préserver la localisation des contours au cours des itérations, et d'autre part, d'éviter que l'image ne converge à terme vers une image de laplacien nul en tout point. Ainsi, pour obtenir le résultat, c'est-à-dire l'image lissée, il suffit tout simplement d'arrêter l'évolution du processus lorsque la différence entre deux images successives est suffisamment faible.

Des exemples de résultats, obtenus en utilisant les paramètres d'évolution  $\lambda_1$  et le paramètre d'évolution  $\lambda_2$  pour les valeurs  $k = 4$  et  $k = 6$ , sont présentés respectivement sur les figures 4.4, 4.5 et 4.6. Il est particulièrement intéressant de constater, que pour les

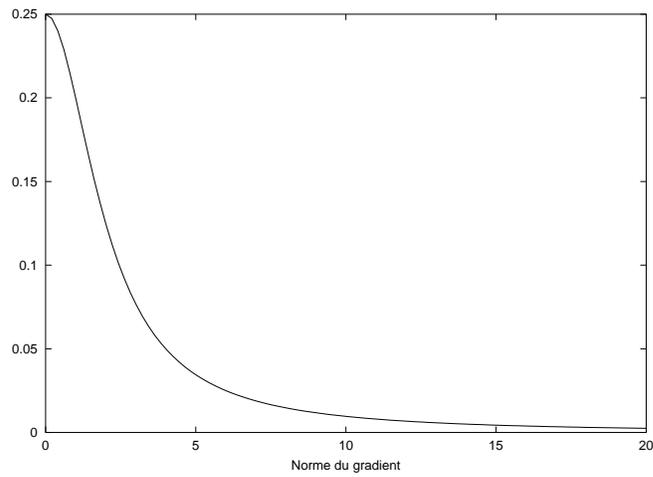


FIG. 4.2 – Allure de la fonction  $\lambda_1$  en fonction de la norme du gradient.

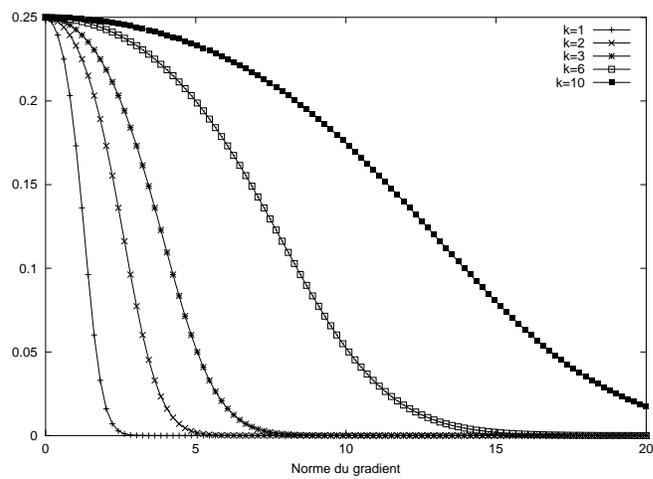


FIG. 4.3 – Allure de la fonction  $\lambda_2$  en fonction de la norme du gradient et pour différentes valeurs de  $k$ .

exemples donnés, le processus de diffusion isotrope semble se comporter, au moins visuellement, comme un processus de diffusion non linéaire. Autrement dit, les régions présentant de faibles gradients de niveaux de gris sont lissées, les régions présentant des gradients élevés sont préservées. Cela est tout à fait remarquable, puisque l'équation de la chaleur est réputée pour ne pas préserver les contours.

Il est à noter que des résultats similaires peuvent être obtenus en utilisant d'autres indicateurs de contours que la norme du gradient de l'image. On peut par exemple, utiliser une information de nature statistique comme la variance locale de l'image qui est caractérisée par une valeur élevée lorsque le pixel local présente un niveau de gris éloigné de la moyenne locale des niveaux de gris. De même, on peut utiliser une information de nature géométrique comme l'indicateur  $\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  qui présente des valeurs élevées lorsque les courbures principales de la surface image,  $k_1$  et  $k_2$ , sont élevées, c'est-à-dire lorsque la surface n'est pas localement plane (cf. annexe B). Ainsi, on peut définir les paramètres de résolution adaptatifs suivants :

$$\lambda_3(\sigma(I)) = \frac{1}{4 + \sigma^2(I)} \quad (4.20)$$

où  $\sigma^2(I)$  est la variance locale de l'image estimée sur un voisinage de taille  $3 \times 3$ .

$$\lambda_4(k_1, k_2) = \frac{1}{4 + \sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \quad (4.21)$$

Nous présentons sur les figures 4.7 et 4.8 quelques étapes de l'évolution de l'image « fibre » en utilisant les paramètres de résolution respectifs,  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$ . Là encore, on constate le « comportement anisotrope » de ces processus.

### Comparaison numérique de la méthode de $\lambda$ -résolution et de la diffusion anisotrope

L'objectif de ce paragraphe est de comparer les possibilités, en termes de débruitage, du filtre de diffusion isotrope résolu par  $\lambda$ -résolution et du filtre de diffusion anisotrope résolu par une méthode classique, cf. équation (4.4). Pour cela, appliquons ces deux processus à une image de synthèse « savoise », cf. figure 4.10 (a), entachée par un bruit gaussien indépendant de moyenne nulle et d'écart type 0,1, cf. image 4.10 (b). Pour quantifier la présence du bruit au cours du traitement itératif, nous calculons le rapport signal sur bruit (RSB) entre l'image courante et l'image de synthèse originale :

$$RSB(I^n, I_{synth}) = 20 \log_{10} \left( \frac{\sum_{i,j} (I_{i,j}^n)^2}{\sum_{i,j} (I_{i,j}^n - I_{synth_{i,j}})^2} \right)$$

où  $\log_{10}$ ,  $I^n$  et  $I_{synth}$  désignent respectivement, le logarithme décimal, l'image courante du processus et l'image de synthèse. Rappelons que plus le RSB est élevé, meilleur est le débruitage.

Précisons maintenant les paramètres des deux processus étudiés. Tout d'abord, le filtre de diffusion isotrope est résolu en utilisant le paramètre adaptatif  $\lambda_2(\|\nabla I\|, k = 8)$ . Quant

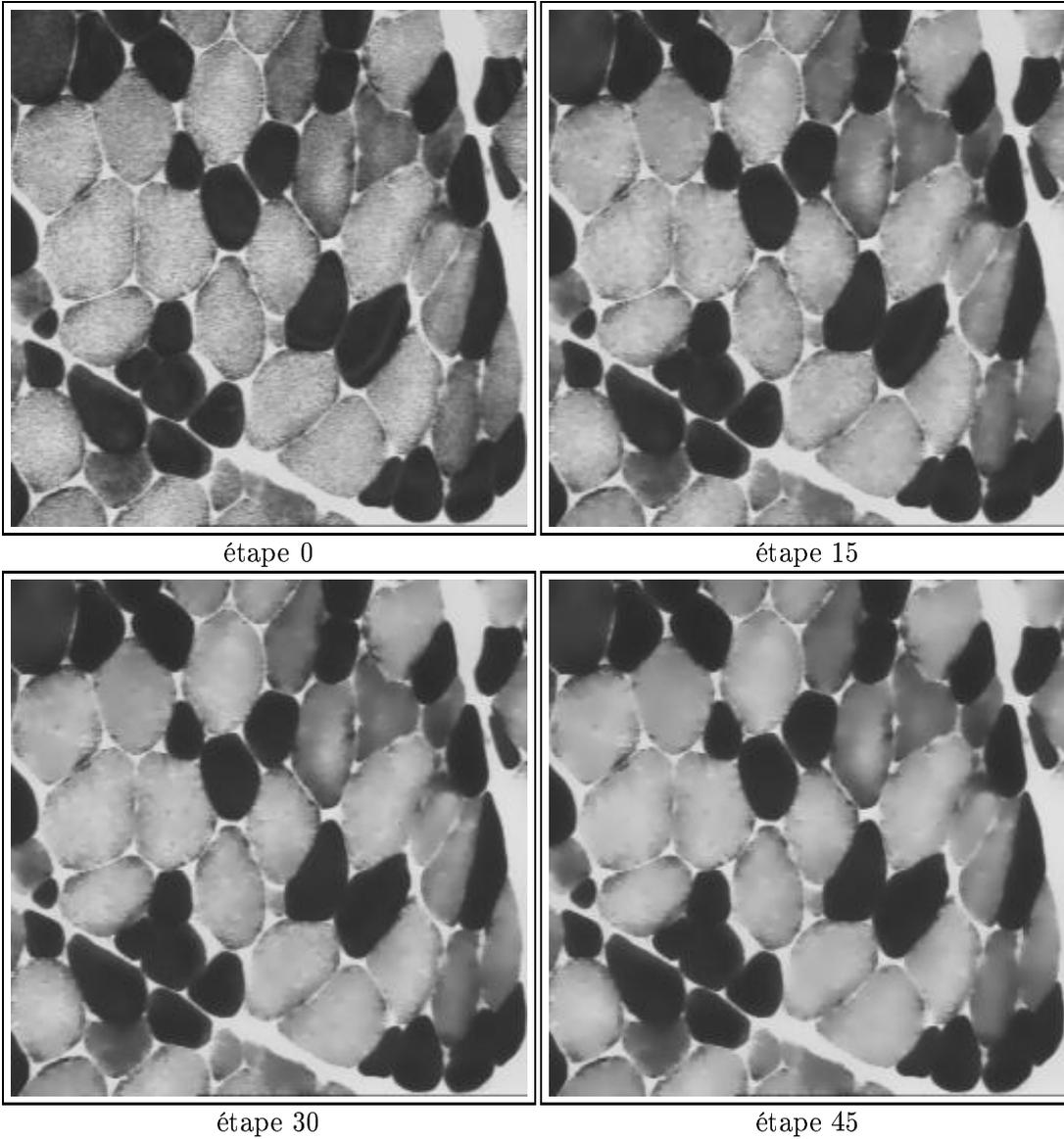


FIG. 4.4 – Quelques étapes de l'évolution de l'image « fibre » suivant le processus de diffusion isotrope (4.16) résolu en utilisant la fonction  $\lambda_1$ .

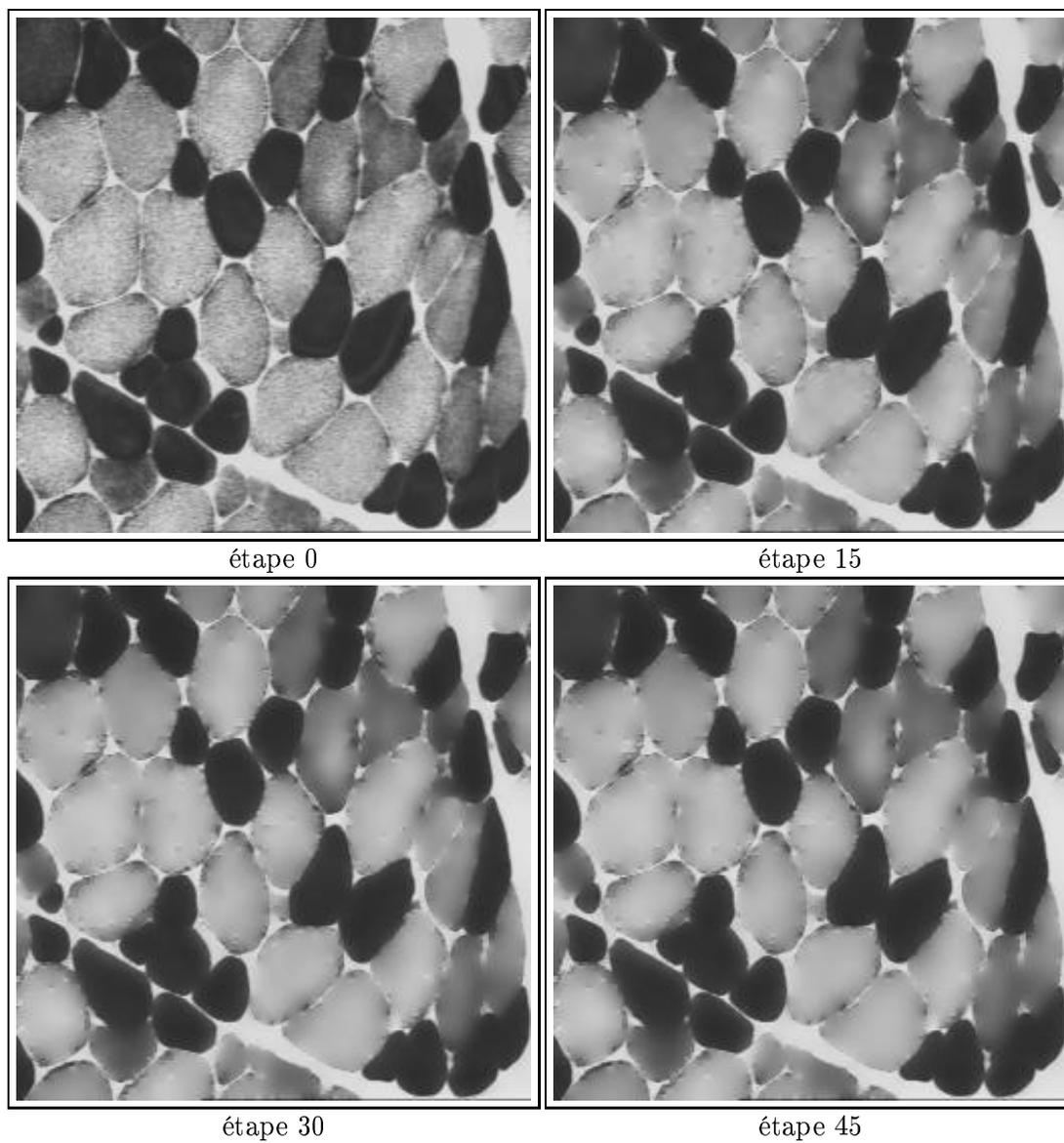


FIG. 4.5 – Quelques étapes de l'évolution de l'image « fibre » suivant le processus de diffusion isotrope (4.16) résolu en utilisant la fonction  $\lambda_2$  pour la valeur  $k = 4$ .

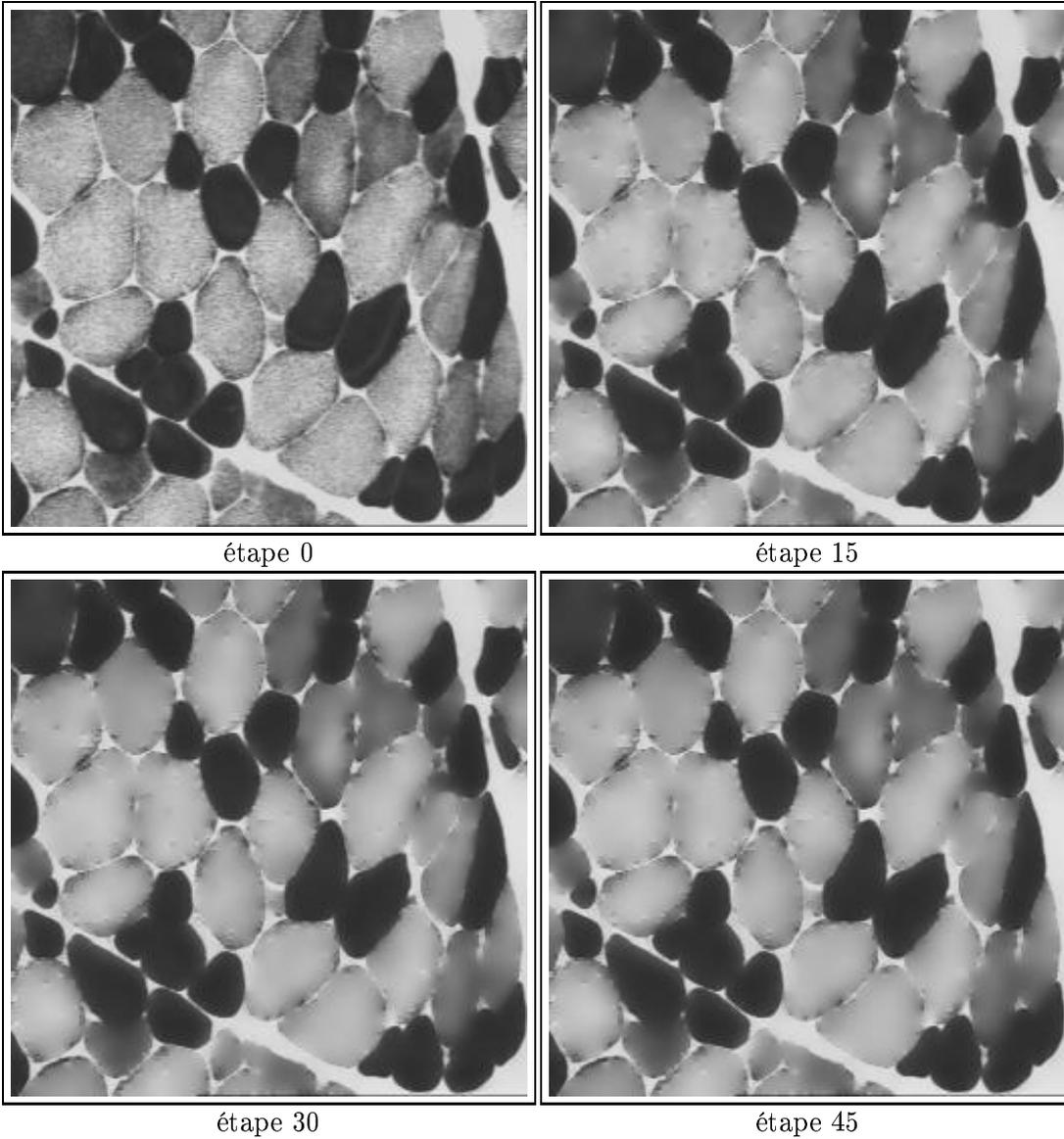


FIG. 4.6 – Quelques étapes de l'évolution de l'image « fibre » suivant le processus de diffusion isotrope (4.16) résolu en utilisant la fonction  $\lambda_2$  pour  $k = 6$ .

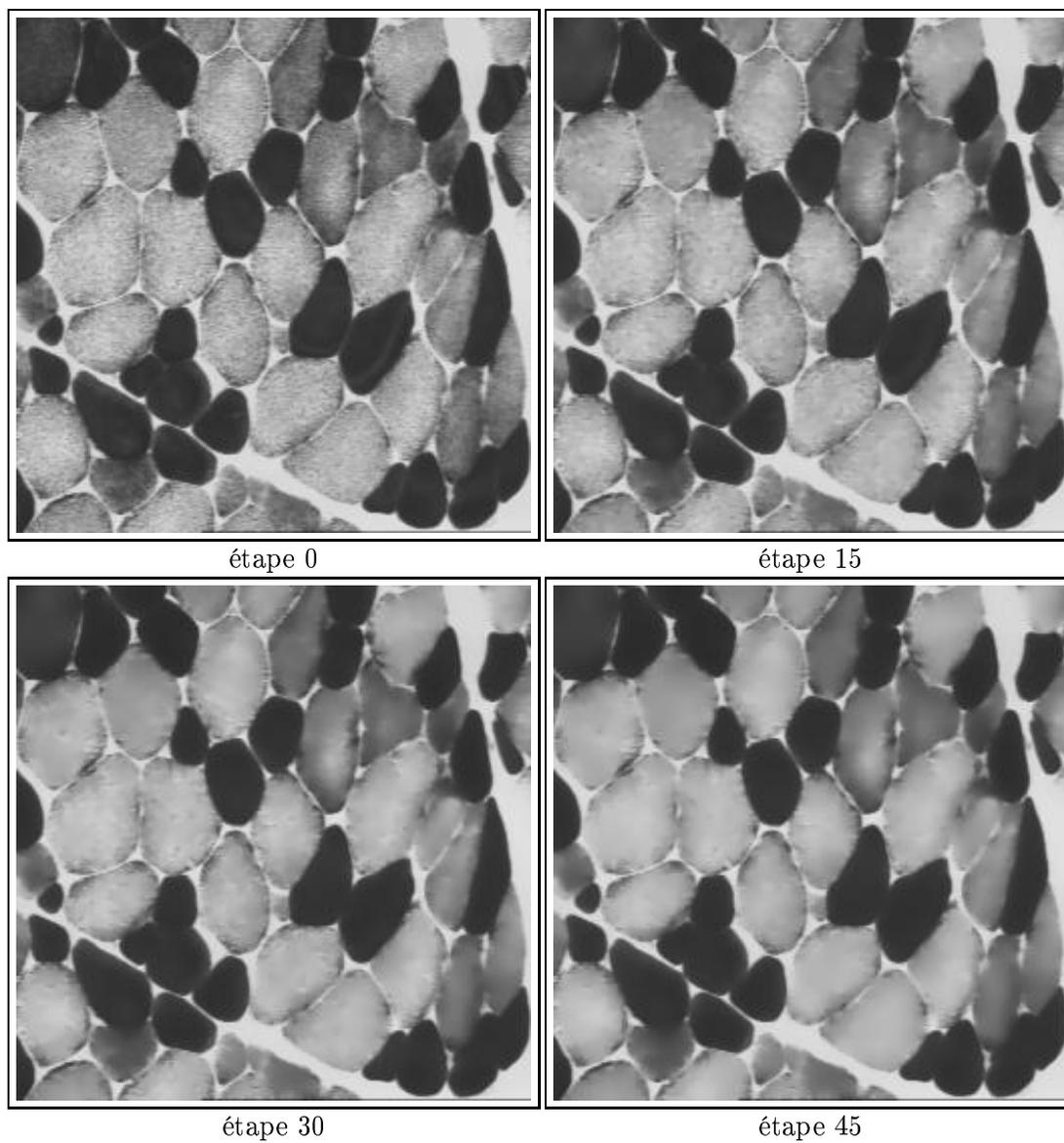


FIG. 4.7 – Quelques étapes de l'évolution de l'image « fibre » suivant le processus de diffusion isotrope (4.16) résolu en utilisant la fonction  $\lambda_3$ .

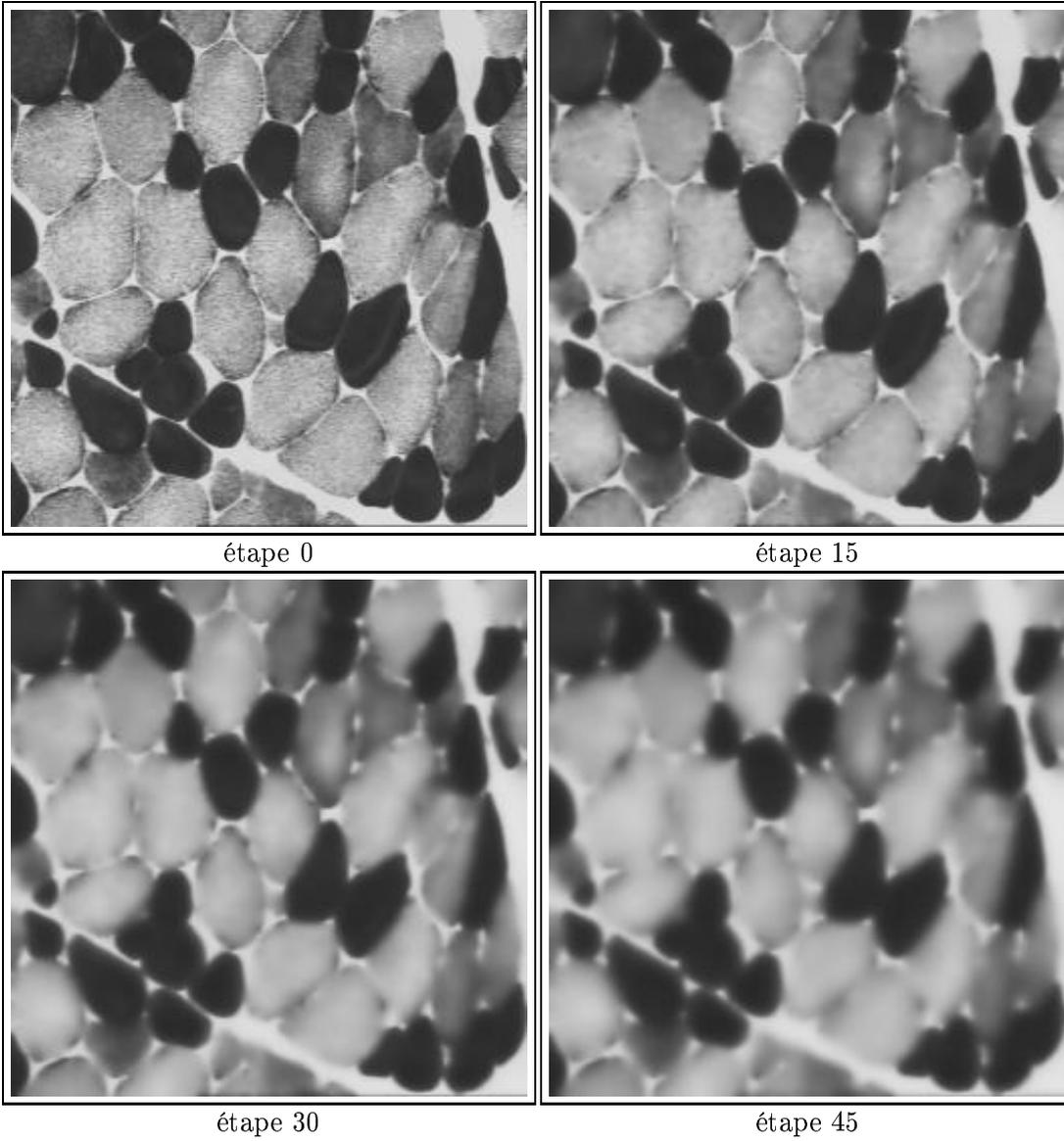


FIG. 4.8 – Quelques étapes de l'évolution de l'image « fibre » suivant le processus de diffusion isotrope (4.16) résolu en utilisant la fonction  $\lambda_4$ .

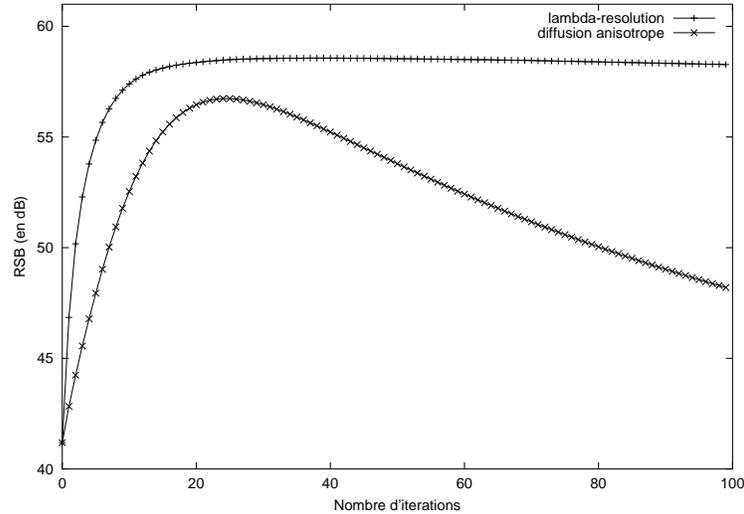


FIG. 4.9 – Évolution des rapports signal sur bruit, exprimés en décibels (dB), en fonction du nombre d'itérations des processus de diffusion isotrope résolu par  $\lambda$ -résolution et de diffusion anisotrope.

à lui, le processus de diffusion anisotropique est résolu en utilisant un paramètre d'évolution constant  $\lambda = 0,2$ , la fonction de diffusion de AUBERT [AV97] :

$$\Psi(\|\nabla I\|, k = 1) = (1 + \|\nabla I\|^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Bien évidemment, nous avons attaché une attention toute particulière à choisir les paramètres de manière à obtenir les meilleurs résultats avec chacune des méthodes.

Nous donnons sur la figure 4.9, l'évolution du rapport signal sur bruit en fonction du nombre d'itérations des processus, que l'on obtient par ces deux méthodes. En observant l'allure de ces courbes, on constate que celle correspondant au processus de diffusion isotrope présente des valeurs toujours supérieures à celle correspondant au processus de diffusion anisotrope. Par ailleurs, elle croît plus rapidement vers des RSB élevés, et contrairement à la courbe du processus de diffusion anisotrope, elle ne décroît pas rapidement après un certain nombre d'itérations.

Les résultats de débruitage obtenus par ces deux méthodes sont présentés sur la figure 4.10. Pour chacune des méthodes, nous présentons les images correspondant à l'étape donnant le meilleur rapport signal sur bruit pour la diffusion anisotrope.

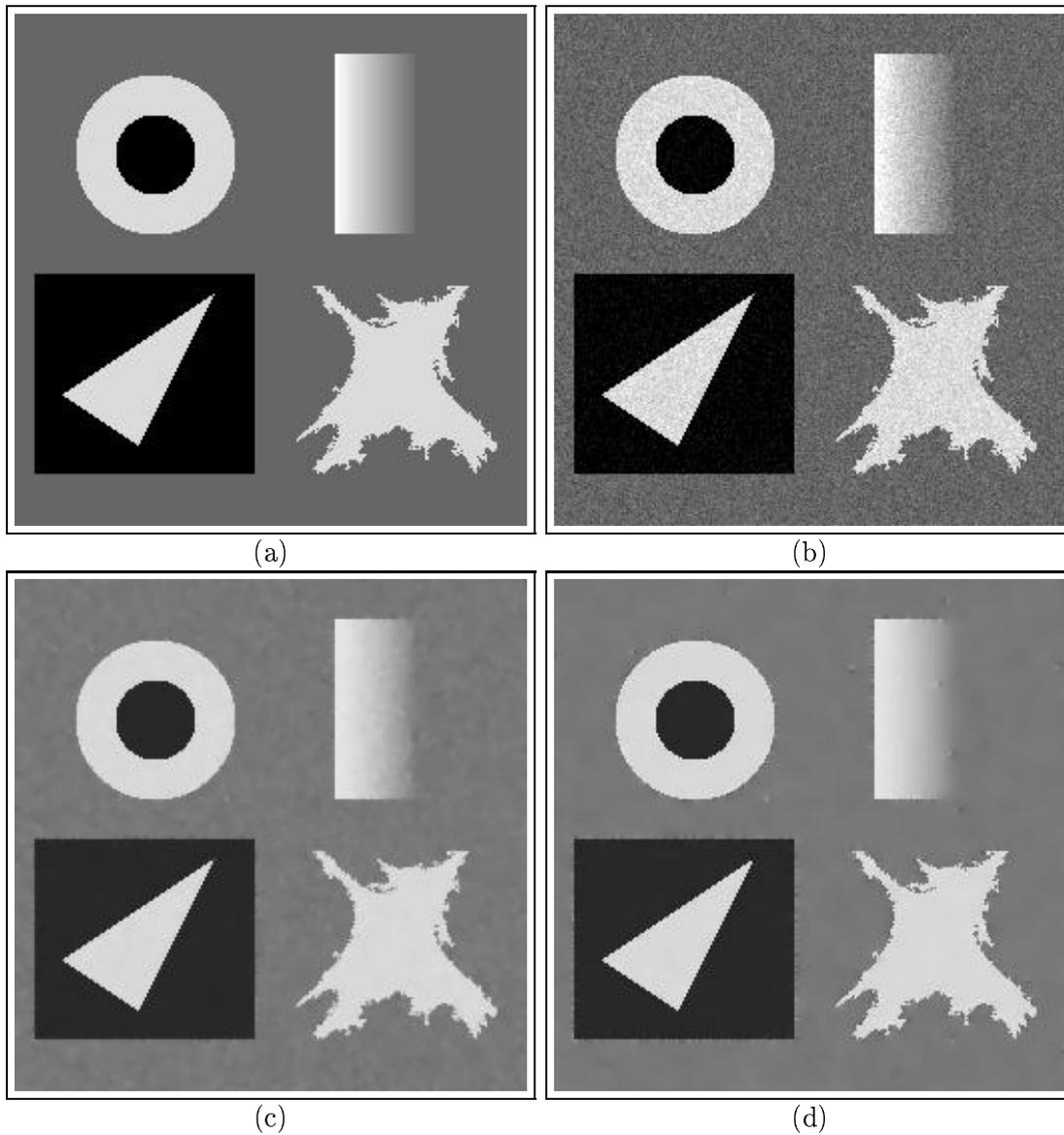


FIG. 4.10 – (a) : image « savoise », (b) : image « savoise » entachée d'un bruit gaussien centré, d'écart type 0,1, (c) : résultat du filtrage par diffusion anisotrope correspondant à la 25<sup>e</sup> itération et à un RSB de 56,73 dB, (d) : résultat du filtrage par diffusion isotrope correspondant à la 25<sup>e</sup> itération et à un RSB de 58,36 dB.

### Segmentation d'images en niveaux de gris par $\lambda$ -résolution

Maintenant, nous voulons montrer l'utilité du processus de lissage précédent comme prétraitement dans un processus de segmentation d'images. La démarche adoptée est la suivante :

1. lissage de l'image initiale par le processus de diffusion isotrope (4.16) résolu à l'aide du paramètre de résolution  $\lambda(\|\nabla I\|)$  jusqu'à ce que la différence de deux images successives soit suffisamment faible ;
2. calcul du laplacien de l'image lissée ;
3. recherche des passages par zéro du laplacien ;
4. création de l'image des passages par zéro du laplacien affectés de la norme du gradient ;
5. seuillage par hystérésis (élimination des passages par zéro non significatifs).

Nous appliquons l'algorithme précédent à l'image « lab » en utilisant le paramètre de résolution  $\lambda_2(\|\nabla I\|, k = 2)$ . L'image « lab », ainsi que les résultats du lissage et de la segmentation de celle-ci sont présentés sur la figure 4.11. On peut remarquer que malgré l'utilisation d'un processus de diffusion isotrope, les contours sont préservés et conservent leur localisation initiale. Il est alors tout à fait envisageable d'utiliser le schéma de résolution proposé ici dans le cadre d'une segmentation multi-échelles.

#### 4.2.2 Application aux images en couleur

Avec le formalisme précédemment adopté, une image en couleur est un objet correspondant à une carte de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ , ainsi l'EDP isotrope peut s'écrire sous la forme du processus itératif suivant :

$$\forall j \in \{1 \dots 3\} \left\{ \begin{array}{l} I^{j,n+1}(x^1, x^2) = I^{j,n}(x^1, x^2) + \lambda_i^{j,n}(x^1, x^2)[I^{j,n}(x^1 + 1, x^2) + \dots \\ \dots + I^{j,n}(x^1 - 1, x^2) + I^{j,n}(x^1, x^2 + 1) + \dots \\ \dots + I^{j,n}(x^1 + 1, x^2 - 1) - 4I^{j,n}(x^1, x^2)] \\ I^j(x^1, x^2, 0) = I^j(x^1, x^2) \end{array} \right. \quad (4.22)$$

La démarche présentée ici, est la même que celle proposée précédemment pour des images en niveaux de gris, sauf que nous allons utiliser la norme d'un gradient de couleur comme indicateur de contours. Nous suggérons, par exemple, de substituer la norme de gradient couleur, initialement proposé par DIZENZO [Zen86], à la norme du gradient d'une image en niveaux de gris dans l'expression du paramètre d'évolution  $\lambda_2(\|\nabla \mathbf{I}\|, k)$ , cf. équation (4.19). Il vient donc :

$$\lambda_2(\|\nabla \mathbf{I}\|, k) = \frac{1}{4 + \left( \exp\left(\frac{\|\nabla \mathbf{I}\|^2}{k^2}\right) - 1 \right)} \quad (4.23)$$

avec

$$\|\nabla \mathbf{I}\|^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \|\nabla I^i\|^2 + \sqrt{\left( \sum_{i=1}^3 (I_{x^1}^i)^2 - (I_{x^2}^i)^2 \right)^2 + 4 \sum_{i=1}^3 I_{x^1}^i I_{x^2}^i} \right).$$

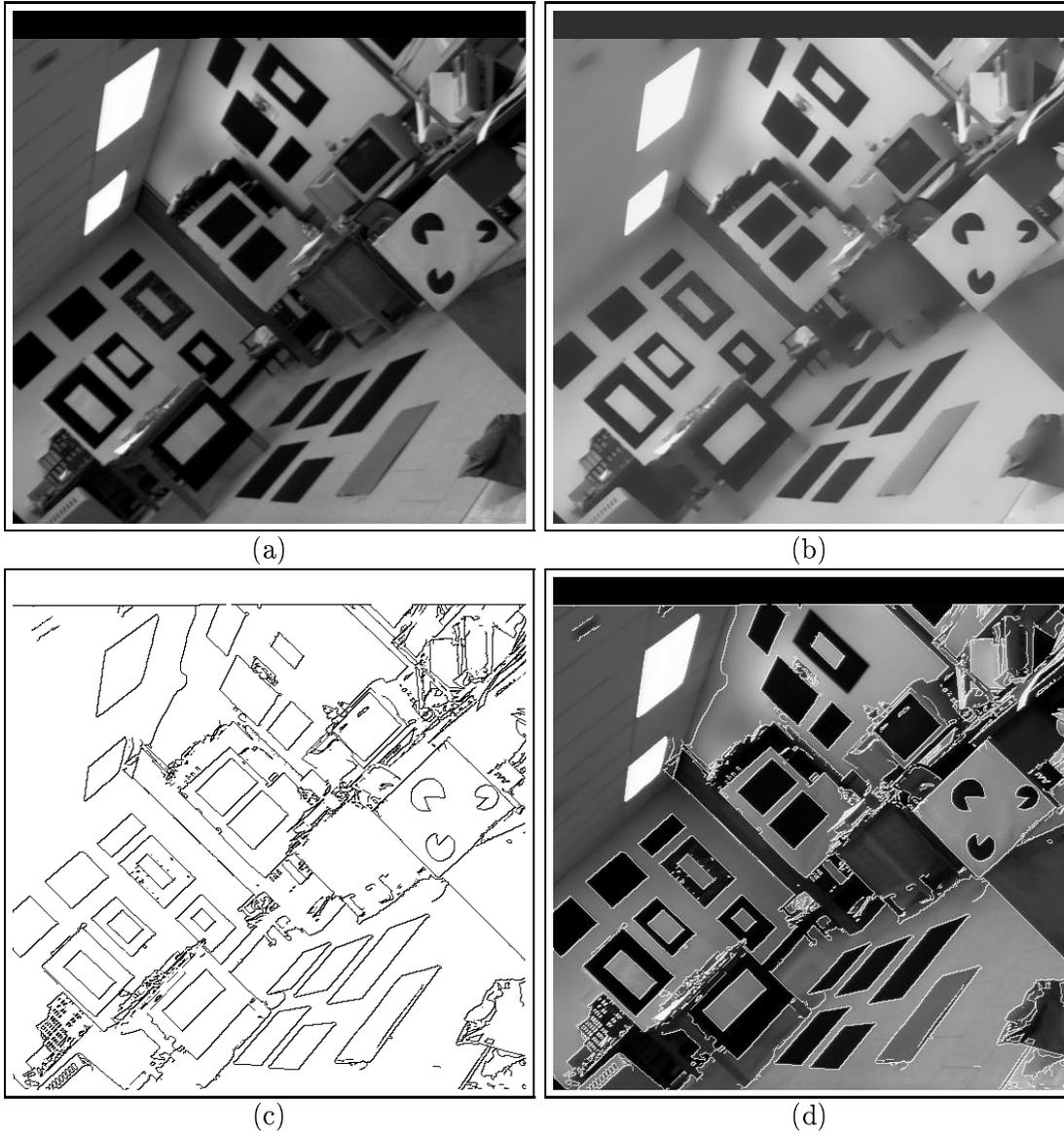


FIG. 4.11 – (a) : image « lab », (b) : image « lab » lissée par un processus de diffusion isotrope résolu en utilisant le paramètre  $\lambda 2(\|\nabla I\|, k = 2)$ , (c) : segmentation de l'image « lab », (d) : superposition de la segmentation obtenue et de l'image « lab ».

Nous pouvons alors appliquer le processus de diffusion linéaire (4.22) aux images couleur de la même manière que nous l'avions fait dans le paragraphe précédent pour les images en niveaux de gris.

Afin de mettre en évidence la différence de comportement d'un processus isotrope, résolu à pas constant et d'un processus isotrope résolu à pas adaptatif, nous présentons sur les figures 4.12 et 4.13, quelques étapes de l'évolution de l'image couleur « lena » au cours d'un processus de diffusion isotrope résolu d'une part, en utilisant un paramètre de résolution constant  $\lambda = 0,2$  et, résolu d'autre part, en utilisant le paramètre de résolution adaptatif  $\lambda_2(\|\nabla \mathbf{I}\|, k = 6)$ . On peut observer qu'à nombre d'itérations égal, les contours de l'image sont mieux préservés avec un pas adaptatif qu'avec un pas constant.

### Segmentation d'images en couleur par $\lambda$ -résolution

De la même façon que nous l'avions fait pour les images en niveaux de gris, nous proposons une méthode de segmentation des images en couleur fondée sur un prétraitement La démarche proposée est la suivante :

1. lissage de l'image en couleur par le processus de diffusion isotrope (4.22) résolu à l'aide d'un paramètre de résolution adaptatif  $\lambda(\|\nabla \mathbf{I}\|, k)$  ;
2. calcul de la norme du gradient de couleur en chaque point de l'image lissée ;
3. extraction des maxima locaux de la norme du gradient dans la direction du gradient de couleur, cf. annexe D ;
4. seuillage par hystérésis de l'image des maxima locaux du gradient.

Nous appliquons l'algorithme précédent à l'image « house » en utilisant le paramètre de résolution  $\lambda_2(\|\nabla \mathbf{I}\|, k = 4)$ . L'image « house », ainsi que les résultats du lissage et de la segmentation de celle-ci sont présentés sur la figure 4.11. On peut constater, comme pour la segmentation des images en niveaux de gris que les contours sont tout à fait bien localisés et détectés.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié, dans un premier temps, les conditions de convergence des méthodes de résolution eulériennes associées aux EDP de lissage « classiques » du traitement d'images. Puis, nous avons proposé de résoudre l'équation de diffusion isotrope par une méthode de résolution à pas adaptatif, dite  $\lambda$ -résolution. Cette méthode nous a permis, en contrôlant la vitesse de convergence du processus de diffusion isotrope, de proposer une nouvelle analyse multi-échelles qui a la particularité de préserver les contours. Finalement, nous avons mis en œuvre la  $\lambda$ -résolution à des fins de débruitage et de segmentation d'images en niveaux de gris et en couleur.

La méthode de résolution présentée dans ce chapitre ouvre de nombreuses perspectives. Il serait intéressant de savoir si les propriétés remarquables du processus de lissage isotrope

telles que l'invariance aux translations, l'invariance aux rotations et aux zooms sont toujours vérifiées lorsque celui-ci est résolu par  $\lambda$ -résolution. Par ailleurs, l'extension de cette méthode à des EDP non linéaires pourrait se révéler payante. En outre, la localisation des contours étant préservée au cours du processus de diffusion, nous pouvons envisager l'élaboration d'un algorithme simple de segmentation multi-échelles fondé sur un tel processus. Finalement, l'utilisation de paramètres de résolution différents suivant les coordonnées de l'image pourrait apporter un intérêt, notamment dans le cadre d'un traitement sur une séquence d'images où l'on peut envisager d'avoir un paramètre de résolution temporel différent des paramètres spatiaux des images.



FIG. 4.12 – Quelques étapes de l'évolution de l'image « lena » par diffusion isotrope résolue en utilisant le pas constant  $\lambda = 0.2$ .



FIG. 4.13 – Quelques étapes de l'évolution de l'image « lena » correspondant à une résolution à pas adaptatif  $\lambda_2(\|\nabla \mathbf{I}\|, k = 6)$ , espace couleur RGB.

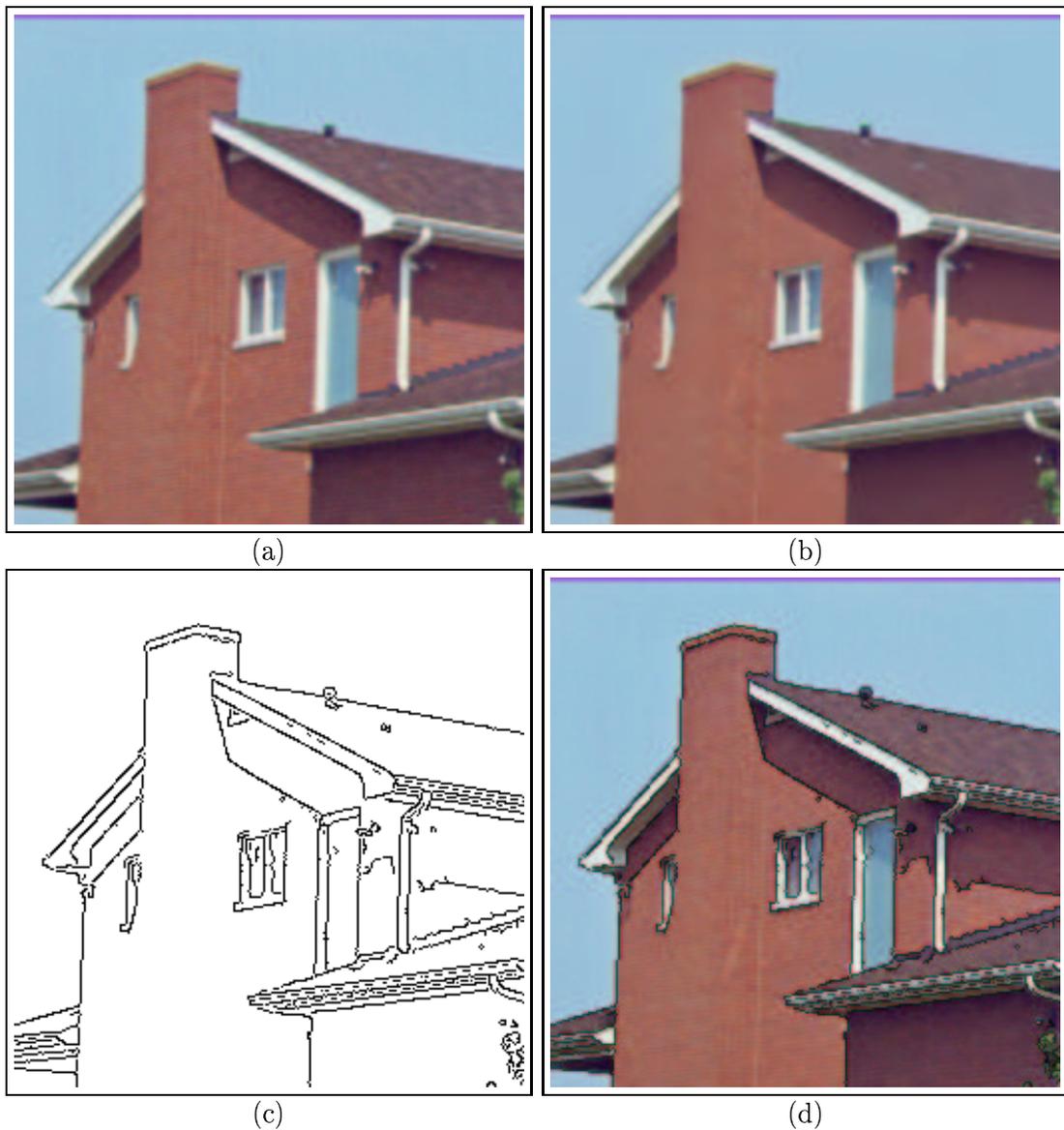


FIG. 4.14 – (a) image « house », (b) image « house » lissée par un processus de diffusion isotrope résolu en utilisant le paramètre  $\lambda 2(\|\nabla \mathbf{I}\|, k = 4)$  (espace couleur RGB), (c) segmentation de l'image « house », (d) superposition de la segmentation obtenue et de l'image « house ».



## Chapitre 5

# Filtres de choc et morphologie mathématique

Dans ce chapitre, après avoir établi le lien entre filtre de choc et morphologie mathématique, nous présentons une nouvelle EDP de filtre de choc inspirée des méthodes de la morphologie mathématique en niveaux de gris. Ensuite, nous comparons les performances de ce nouveau filtre de choc avec celui de RUDIN en terme de rehaussement, de sensibilité au bruit et de stabilité. Finalement, nous proposons une nouvelle méthode de restauration d'images combinant une EDP de lissage linéaire et notre nouvelle EDP de filtre choc.

### 5.1 Filtre de choc et opérateurs d'ouverture et de fermeture

Considérons tout d'abord, l'EDP de filtre de choc de RUDIN :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} & = -sgn(I_{\xi\xi}^0) \|\nabla I\| \\ I(x, y, t = 0) & = I^0(x, y) \\ \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} & = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

qui peut, suivant le signe de  $I_{\xi\xi}^0$ , se décomposer comme suit :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\|\nabla I\| \quad si \quad I_{\xi\xi}^0 > 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = 0 \quad si \quad I_{\xi\xi}^0 = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = +\|\nabla I\| \quad si \quad I_{\xi\xi}^0 < 0 \quad (5.4)$$

On peut alors remarquer que les EDP (5.2) et (5.4) correspondent respectivement à l'EDP d'érosion (2.17) et à l'EDP de dilatation (2.16) par un élément structurant de type boule [Mar94] (cf. paragraphe 2.2.3). Cela permet donc d'interpréter l'EDP de filtre de choc en

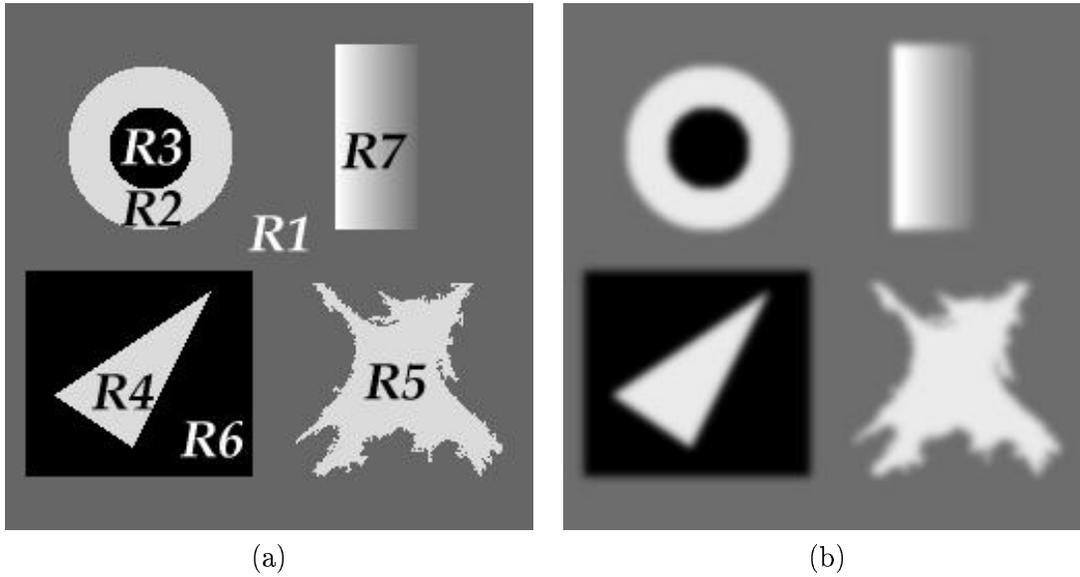


FIG. 5.1 – (a) : image savoise  $I$ , (b) : image savoise lissée  $I_L$ .

termes de morphologie mathématique en niveaux de gris. Les opérateurs d'érosion et de dilatation étant connus pour être plus sensibles au bruit que les opérateurs d'ouverture et de fermeture, nous proposons d'augmenter la robustesse au bruit du filtre de choc de RUDIN en substituant les opérateurs d'ouverture et de fermeture aux opérateurs d'érosion et de dilatation. Nous obtenons ainsi, une nouvelle EDP de filtre de rehaussement d'images. Elle se présente sous la forme discrétisée :

$$\begin{cases} I^{k+\frac{1}{2}} = I^k & - \lambda \operatorname{sgn} \left( I_{\xi\xi}^0 \right) \left\| \nabla I^k \right\| \\ I^{k+1} = I^{k+\frac{1}{2}} & + \lambda \operatorname{sgn} \left( I_{\xi\xi}^0 \right) \left\| \nabla I^{k+\frac{1}{2}} \right\| \\ I^0 = I(x, y, t = 0) \end{cases} \quad (5.5)$$

où  $\lambda$  est le pas de discrétisation temporelle. C'est-à-dire que si le signe de  $I_{\xi\xi}^0$  est positif, alors on applique d'abord l'EDP d'érosion puis l'EDP de dilatation et vice-versa si celui-ci est négatif. Notons que dans la pratique, en utilisant une telle méthode, la propriété d'idempotence des opérateurs d'ouverture et de fermeture n'est plus préservée.

## 5.2 Résultats

Afin d'évaluer les performances de notre filtre de choc morphologique, nous allons dans cette partie comparer ses capacités de rehaussement, sa sensibilité au bruit et sa stabilité à celles du filtre de choc de RUDIN. Pour cela, nous appliquerons les filtres sur l'image de synthèse savoise issue de la banque d'images du GDR-PRC 134 TDSI du CNRS, lissée par un filtre gaussien de moyenne nulle et d'écart type 2 que nous noterons par la suite  $I_L$  (cf. figure 5.1).

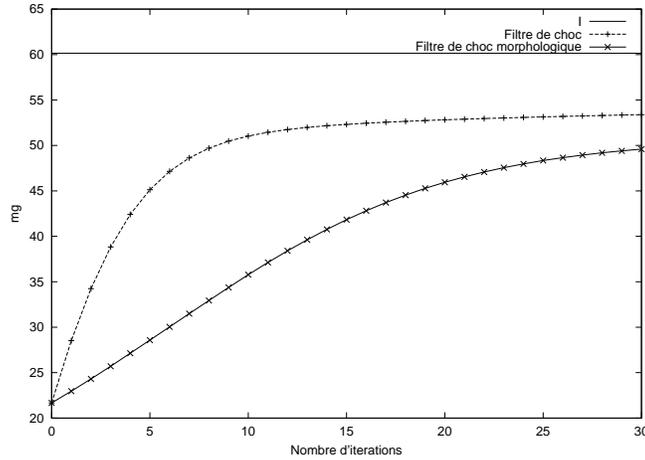


FIG. 5.2 – Évolution temporelle de la moyenne des gradients sur les contours de l'image  $I_L$  pour les deux processus et pour  $\lambda = 0.5$ .

### 5.2.1 Performances de rehaussement

#### Évolution temporelle de la moyenne des gradients sur les contours

L'un des objectifs principaux d'un filtre de rehaussement d'images est de réduire l'étendue de la zone de transition entre les régions. Pour caractériser cela, nous allons étudier l'évolution de la moyenne ( $m_g$ ) des gradients sur les contours de l'image lissée  $I_L$  au cours des deux processus itératifs précédents (cf. équations (5.1) et (5.5)). Nous présentons les résultats de cette expérience sur la figure 5.2. Nous avons fait figurer à titre de comparaison la moyenne des gradients sur les contours de l'image savoise  $\bar{I}$ . Nous constatons que les deux filtres réduisent bien la zone de transition entre les régions. Mais le filtre de choc offre de meilleures performances que le filtre de choc morphologique. Néanmoins, l'écart entre les deux méthodes se réduit au cours des itérations.

#### Évolution temporelle du contraste

Une autre manière d'évaluer la qualité de rehaussement d'une image est d'étudier l'évolution du contraste entre les régions adjacentes de l'image. Soient  $R_i$  et  $R_j$  deux régions adjacentes d'une image  $I$ . Le contraste entre ces deux régions sera défini ici par :

$$C(R_i, R_j) = \frac{\mu(R_i) - \mu(R_j)}{2^n - 1} \quad (5.6)$$

où  $\mu(R)$  et  $n$  sont respectivement la moyenne des niveaux de gris de la région  $R$  et le nombre de bits de codage de l'image. Par souci de concision, nous ne présentons ici, que l'évolution du contraste entre les régions  $R_1$  et  $R_2$ , puis  $R_1$  et  $R_6$  (cf. figure 5.1). Nous présentons ces résultats, respectivement sur les figures 5.3 et 5.4. De même que précédemment, nous faisons figurer à titre de comparaison le contraste entre les régions  $R_1$  et  $R_2$ , puis  $R_1$  et  $R_6$  pour

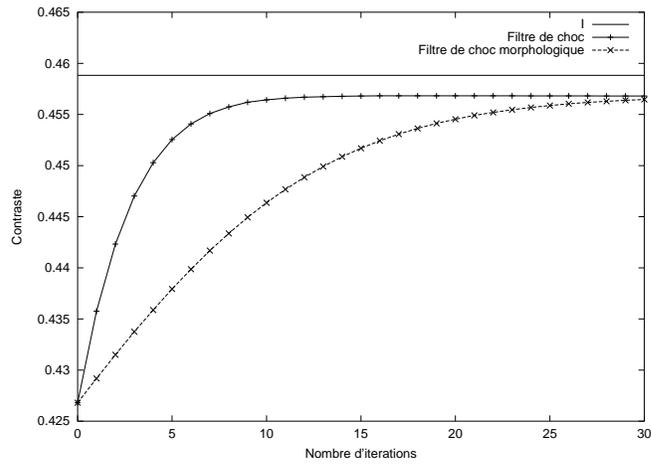


FIG. 5.3 – Évolution temporelle du contraste entre les régions  $R_1$  et  $R_2$  de l'image  $I_L$  pour les deux filtres de choc et pour  $\lambda = 0.5$ .

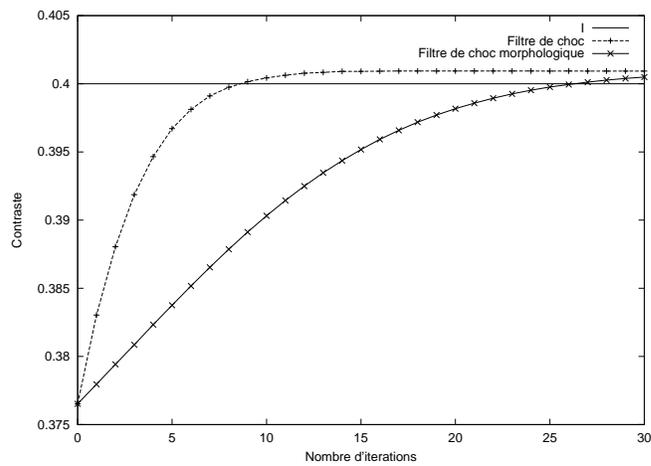


FIG. 5.4 – Évolution temporelle du contraste entre les régions  $R_1$  et  $R_6$  de l'image  $I_L$  pour les deux filtres de choc et pour  $\lambda = 0.5$ .

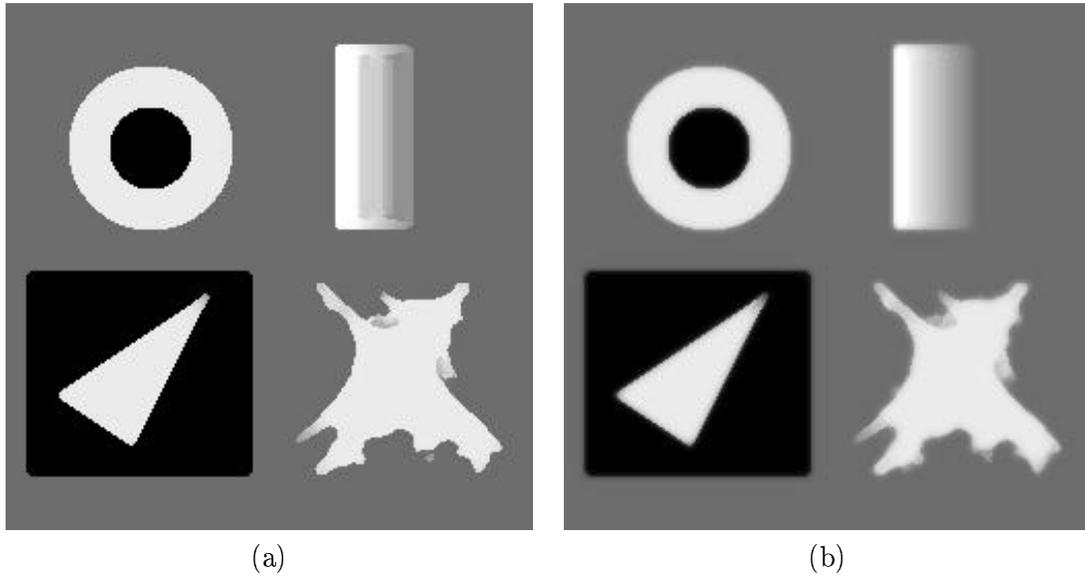


FIG. 5.5 – (a) : image  $I_L$  rehaussée par (5.1), (b) : image  $I_L$  rehaussée par (5.5) pour  $t = 5$ .

l'image savoise. Nous constatons d'une part que pour les deux filtres, le contraste augmente au cours des itérations et d'autre part, que le filtre de choc offre des performances légèrement meilleures.

Finalement, en termes de rehaussement, pour un même nombre d'itérations, le filtre de choc classique est plus performant que le filtre de choc morphologique. On peut vérifier qualitativement ces faits sur la figure 5.5.

### 5.2.2 Sensibilité au bruit

Soit  $B_1$  un bruit additif, gaussien, centré et d'écart type 0,1. Soit  $B_2$  un bruit de type « speckle » d'écart type 0,1. Soient  $I_{LB_1}$  et  $I_{LB_2}$  respectivement, l'image  $I_L$  entachée des bruits  $B_1$  et  $B_2$  (cf. figure 5.6). Nous allons comparer la sensibilité au bruit des deux filtres de choc sur ces deux images de synthèse. Pour cela, nous utiliserons le rapport signal sur bruit (RSB) comme critère quantitatif :

$$RSB(I, Ref) = 20 \log_{10} \left( \frac{\sum_{i,j} I_{i,j}^2}{\sum_{i,j} (I_{i,j} - Ref_{i,j})^2} \right) \quad (5.7)$$

où  $Ref$  est l'image de référence (ou de synthèse). Soient  $C_5$  et  $CM_5$  les images respectives obtenues par les équations de filtre de choc de RUDIN (5.1) et de filtre de choc morphologique (5.5) appliqués aux images  $I_{LB_1}$  ou  $I_{LB_2}$  pour  $t = 5$ . Les tableaux 5.1 et 5.2 présentent respectivement les rapports signal sur bruit pour les deux filtres de choc appliqués aux images  $I_{LB_1}$  et  $I_{LB_2}$  pour  $t = 5$ . Bien évidemment, pour les deux processus, le rapport signal sur bruit augmente au cours des itérations. Les filtres de rehaussement sont en effet faits pour accentuer les fréquences élevées du signal image. Il est donc naturel que les deux

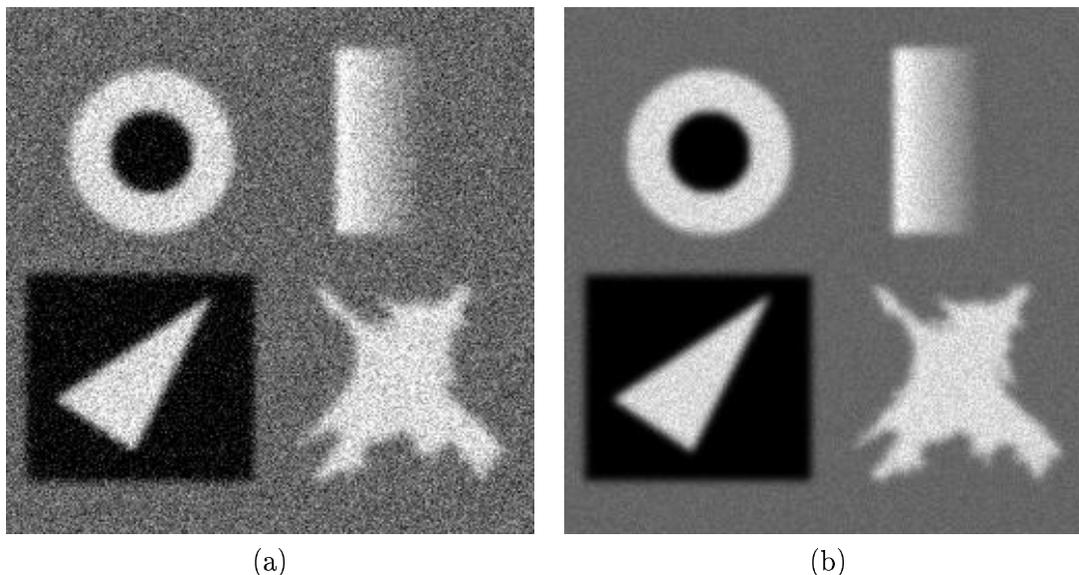


FIG. 5.6 – (a) : image  $I_{LB_1}$  , (b) : image  $I_{LB_2}$ .

Images	$I$	$I_L$	$I_{LB_1}$	$C_5$	$CM_5$
RSB (en dB)	$\infty$	35, 46	25, 28	18, 56	22, 07

TAB. 5.1 – Comparaison des rapports signal sur bruit des deux filtres de choc appliqués à l'image  $I_{LB_1}$  pour  $t = 5$ .

filtres de choc soient sensibles au bruit. Néanmoins, que ce soit pour le bruit gaussien ou pour le bruit de type « speckle », le filtre de choc morphologique est nettement moins perturbé par le bruit que le filtre de choc. Nous pouvons l'observer parfaitement sur la figure 5.7.

Afin de réduire la sensibilité au bruit du filtre de choc certains auteurs [Kor98], [AM94a] modifient l'équation (5.1) de la façon suivante :

$$\begin{cases} I_t & = -[h_\tau(\|\nabla I_\sigma\|)] \operatorname{sgn}\left(\left(I_{\tilde{\sigma}}^0\right)_{\xi\xi}\right) \|\nabla I\| \\ I(x, y, t = 0) & = I^0(x, y) \end{cases} \quad (5.8)$$

avec

$$h_\tau = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau \geq 0 \\ 0 & \text{si } \tau < 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

$I_\sigma$  et  $I_{\tilde{\sigma}}$  étant respectivement l'image  $I$  lissée par les gaussiennes d'écart type  $\sigma$  et  $\tilde{\sigma}$ . Cette modification permet d'estimer au mieux le signe de  $I_{\xi\xi}^0$  et de n'effectuer des chocs que sur les structures significatives. Pour simplifier la comparaison entre les deux filtres de choc nous n'avons pas jugé nécessaire d'introduire de telles modifications.

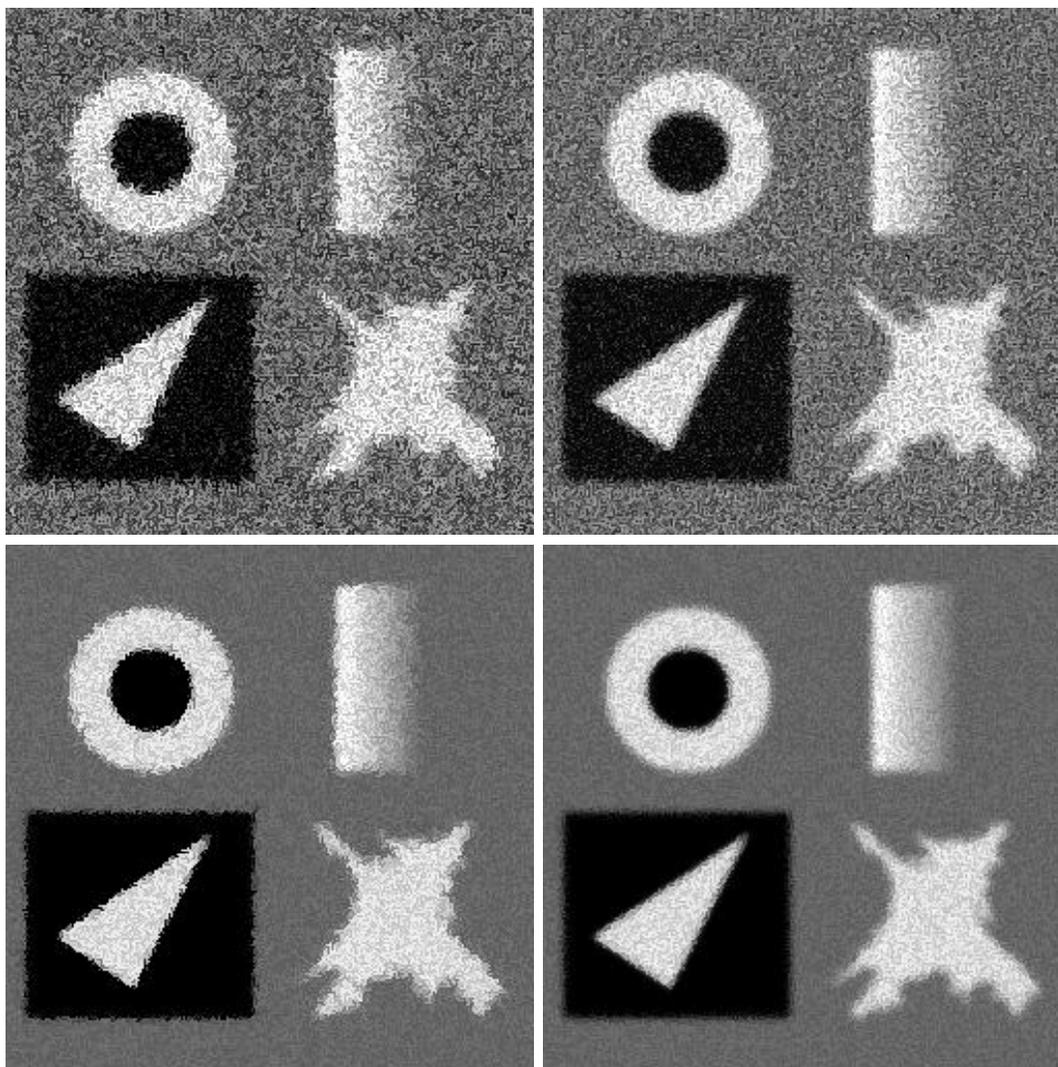


FIG. 5.7 – En haut :  $I_{LB_1}$  rehaussée par (5.1) et par (5.5) pour  $t = 5$ , en bas :  $I_{LB_2}$  rehaussée par (5.1) et par (5.5) pour  $t = 5$ .

Images	$I$	$I_L$	$I_{LB_1}$	$C_5$	$CM_5$
RSB (en dB)	$\infty$	35,46	33,90	30,67	33,25

TAB. 5.2 – Comparaison des rapports signal sur bruit des deux filtres de choc appliqués à l'image  $I_{LB_2}$  pour  $t = 5$ .

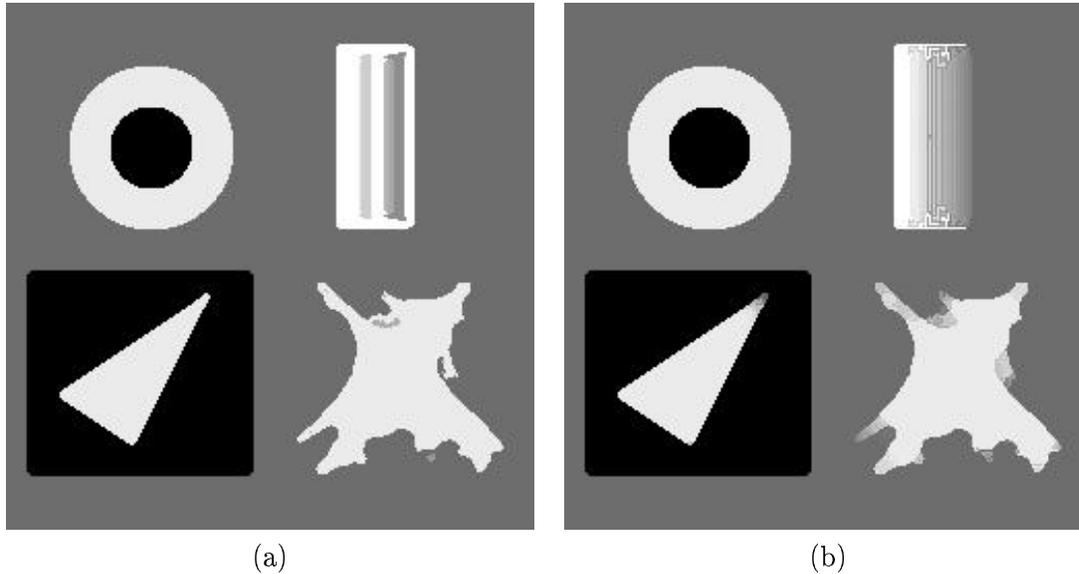


FIG. 5.8 – (a) : image  $I_L$  rehaussée par (5.1) pour  $t = 500$ , (b) : image  $I_L$  rehaussée par (5.5) pour  $t = 500$ .

### 5.2.3 Stabilité du processus

L'équation (5.5) se décomposant en deux équations d'HAMILTON-JACOBI équivalentes (à un signe près) à l'équation (5.1), la condition CFL (COURANT-FRIEDRICHS-LEWY) nécessaire à la stabilité du schéma numérique de l'équation (5.5) est donc la même que pour l'équation (5.1), c'est-à-dire  $\lambda \leq 0.5$ . Le processus itératif (5.5) présente donc des propriétés de stabilité aussi bonnes que le processus (5.1). Sur la figure 5.8, les résultats de l'application des deux filtres de choc sur l'image  $I_L$  pour  $t = 500$  (avec  $\lambda = 0.5$ ) montrent que les deux processus restent stables, même après un grand nombre d'itérations.

## 5.3 Combinaison avec un terme de lissage

Le filtre de rehaussement proposé ici peut, à l'instar d'ALVAREZ et *al.* [AM94a] ou KORN-PROBST [Kor98], facilement être couplé avec un terme de lissage et donc améliorer sensiblement un processus de restauration d'images. Dans cette section, nous proposons de coupler le filtre de choc morphologique avec le processus de lissage que nous avons présenté dans le

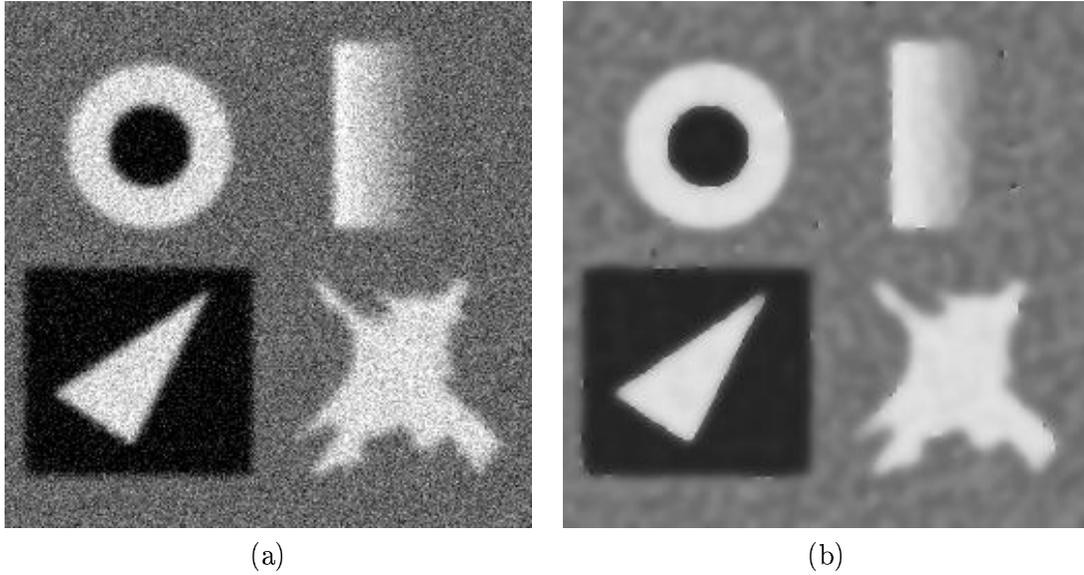


FIG. 5.9 – (a) : image  $I_{LB1}$ , (b) : image  $I_{LB1}$  rehaussée par (5.10) pour  $\lambda_2(\|\nabla I\|, k = 18)$ ,  $\lambda = 0,5$ ,  $\alpha_d = 1$ ,  $\alpha_r = 0,5$  et  $\tilde{\sigma} = 1$ .

chapitre précédent. L'EDP de restauration ainsi définie, se présente alors comme suit :

$$\begin{cases} I^{k+\frac{1}{2}} &= I^k + \underbrace{\alpha_d \lambda_2 \left( \|\nabla I^k\|, k \right) \Delta I^k}_{L(I)} + \underbrace{\alpha_r \lambda \operatorname{sgn} \left( (I_{\tilde{\sigma}}^0)_{\xi\xi} \right) \|\nabla I^k\|}_{R(I)} \\ I^{k+1} &= I^{k+\frac{1}{2}} - \lambda \operatorname{sgn} \left( (I_{\tilde{\sigma}}^0)_{\xi\xi} \right) \|\nabla I^{k+\frac{1}{2}}\| \\ I^0 &= I(x, y, t = 0) \end{cases} \quad (5.10)$$

où  $\alpha_d$  et  $\alpha_r$  sont des coefficients réels positifs permettant de pondérer l'action du terme de lissage,  $L(I)$  et du terme de rehaussement,  $R(I)$ . Le paramètre d'évolution adaptatif du terme de lissage est  $\lambda_2(\|\nabla I\|, k)$  et  $\lambda$  est un pas de discrétisation temporelle associé au terme de rehaussement.

Le résultat de l'application de cette EDP à l'image  $I_{LB1}$ , est présenté sur la figure 5.9. Ici, les coefficients de pondération  $\alpha_d$  et  $\alpha_r$  ont été respectivement fixés aux valeurs 1, 0 et 0, 5, les paramètres d'évolution de l'EDP utilisés sont  $\lambda = 0,5$  et  $\lambda_2 = \left(1 + \frac{\|\nabla I\|^2}{18^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$  et l'écart type de la gaussienne de préfiltrage du terme  $I_{\xi\xi}^0$  est pris égal à 1. On peut constater que, comme nous l'espérions, la restauration obtenue avec ce processus apparaît visuellement meilleure que celle obtenue précédemment en utilisant le terme de rehaussement seul (cf. figure 5.9). Par ailleurs, il est à noter que les contours restent relativement bien préservés. Enfin, d'un point de vue quantitatif, le rapport signal sur bruit obtenu ici est de 32, 59 dB, alors qu'il n'était que de 22, 07 dB précédemment, cf. tableau 5.1.

## 5.4 Conclusion

Après avoir fait le lien entre l'EDP de filtre de choc et les opérateurs d'érosion et de dilatation de la morphologie mathématique en niveaux de gris, nous avons proposé un nouveau filtre de choc permettant de rehausser les contours de façon stable et non oscillante avec une moindre sensibilité au bruit. Finalement, nous avons présenté un nouveau processus de restauration d'images fondé sur la combinaison de la méthode de lissage que nous avons exposée au chapitre précédent et le filtre de choc morphologique.

Bien que les résultats obtenus soient très satisfaisants, nous avons la conviction qu'ils pourraient être encore améliorés si nous arrivions à définir, de la même manière que nous l'avons fait précédemment pour l'équation de diffusion linéaire, un paramètre d'évolution adaptatif pour le processus itératif correspondant à l'EDP de filtre de choc morphologique. Il serait par ailleurs intéressant de comparer de manière plus formelle l'EDP de filtre de choc et l'EDP de filtre de choc morphologique.

## Chapitre 6

# Lissage par courbure moyenne d'images vectorielles

Depuis quelques années, la géométrie différentielle prend de plus en plus d'importance dans le domaine du traitement d'images. Les opérateurs différentiels que sont les courbures des isophotes et les courbes tracées sur la surface image sont notamment utilisés à des fins de lissage, de mise en correspondance, de segmentation..., d'images en niveaux de gris. Mais, à notre connaissance, très peu de travaux concernent encore l'utilisation des courbures pour des images vectorielles. Dans ce chapitre, nous utilisons le formalisme de la géométrie riemannienne pour proposer des définitions de courbures pour des images vectorielles. Nous supposons ici qu'une image vectorielle est un ensemble de  $p$  images bidimensionnelles. Dans la première section, après avoir déterminé les première et seconde formes fondamentales pour une image vectorielle, nous définissons les courbures principales, moyenne et totale d'une image vectorielle. Dans la seconde section, nous proposons une nouvelle EDP de lissage fondée sur la courbure moyenne d'une image vectorielle. La troisième section présente finalement une méthode de détection des lignes centrales pour une image vectorielle.

### 6.1 Définitions de courbures pour des images vectorielles

#### 6.1.1 Définition de la première forme fondamentale

Comme KIMMEL et SOCHEN [KMS00], [SKM98], nous nous plaçons dans le cadre de la géométrie riemannienne. Nous reprenons ici les notations de l'annexe B. Nous supposons une variété  $\Sigma$  de dimension 2 et de coordonnées  $(u, v)$ , représentant la surface image, localement immergée dans une variété  $M$  de dimension  $p$  de coordonnées  $(\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^2, \dots, \mathcal{S}^p)$ . L'application  $\mathbf{S} : \Sigma \rightarrow M$  est alors définie par  $p$  fonctions de deux variables :

$$\mathbf{S} = (\mathcal{S}^1(u, v), \mathcal{S}^2(u, v), \dots, \mathcal{S}^p(u, v)).$$

On notera dès à présent qu'en chaque point de  $\mathbf{S}$ , l'espace tangent à la surface  $T$  est défini par  $(\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v) = (\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v})$ . L'immersion dans  $M$  permet de réécrire  $\mathbf{S}$  selon :

$$\mathbf{S} = (\mathcal{S}^1(u, v) = u, \mathcal{S}^2(u, v) = v, \{\mathcal{S}^i(u, v) = I^{i-2}(u, v)\}_{i \in \{3, p-2\}}). \quad (6.1)$$

Les coordonnées et les images  $I^i(u, v)$  sont généralement à valeur dans  $\mathbb{R}$ . Nous pouvons donc assimiler  $M$  à  $\mathbb{R}^p$ . Si l'on choisit la métrique induite par la métrique euclidienne de  $M$  sur  $\Sigma$ , la matrice  $F_1 = (g_{ij})_{i,j \in \{1,2\}}$  associée à la première forme fondamentale est de la forme

$$F_1 = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{S}_u, \mathbf{S}_u \rangle_{\mathbb{R}^p} & \langle \mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v \rangle_{\mathbb{R}^p} \\ \langle \mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v \rangle_{\mathbb{R}^p} & \langle \mathbf{S}_v, \mathbf{S}_v \rangle_{\mathbb{R}^p} \end{pmatrix}$$

avec ici :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_u &= (1, 0, I_u^1, \dots, I_u^{p-2})^T \\ \mathbf{S}_v &= (0, 1, I_v^1, \dots, I_v^{p-2})^T \end{aligned}$$

soit

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{p-2} (I_u^i)^2 & \sum_{i=1}^{p-2} I_u^i I_v^i \\ \sum_{i=1}^{p-2} I_u^i I_v^i & 1 + \sum_{i=1}^{p-2} (I_v^i)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Désormais en utilisant les définitions respectives (B.19), (B.24) et (B.25) nous pouvons étendre les notions de longueur, angle et aire à une surface d'image vectorielle.

### 6.1.2 Définition de la seconde forme fondamentale et des courbures

Contrairement à Sochen et *al.* [SKM98] qui eux n'en avaient pas l'utilité nous cherchons ici à obtenir une écriture explicite de la seconde forme fondamentale. La deuxième forme fondamentale va nous permettre de définir la notion de courbure pour des images vectorielles. La matrice associée à la seconde forme fondamentale s'écrit :

$$F_2 = \begin{pmatrix} \langle \vec{n}, \mathbf{S}_{uu} \rangle_M & \langle \vec{n}, \mathbf{S}_{uv} \rangle_M \\ \langle \vec{n}, \mathbf{S}_{uv} \rangle_M & \langle \vec{n}, \mathbf{S}_{vv} \rangle_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$$

Les dérivées partielles secondes  $\mathbf{S}_{uu}$ ,  $\mathbf{S}_{uv}$  et  $\mathbf{S}_{vv}$  s'expriment simplement par

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{uu} &= (0, 0, I_{uu}^1, \dots, I_{uu}^{p-2})^T \\ \mathbf{S}_{uv} &= (0, 0, I_{uv}^1, \dots, I_{uv}^{p-2})^T \\ \mathbf{S}_{vv} &= (0, 0, I_{vv}^1, \dots, I_{vv}^{p-2})^T \end{aligned}$$

Alors, il ne reste plus qu'à déterminer un vecteur normal à la surface pour écrire explicitement la seconde forme fondamentale.

### 6.1.3 Choix d'un vecteur normal à la surface

Pour calculer la seconde forme fondamentale nous avons besoin de choisir un vecteur normal à la surface immergée dans  $\mathbb{R}^p$ . Si  $p > 3$ , il n'y a pas unicité de ce vecteur et la seconde forme fondamentale est par conséquent mal définie. Nous devons donc choisir un vecteur  $\vec{N}$  dans l'espace  $T^\perp$  orthogonal à  $T$ . Supposons que  $T^\perp$  soit engendré par les  $p-2$  vecteurs de  $\mathbb{R}^p$  de la base  $(e_1, e_2, \dots, e_{p-2})$ . Les coordonnées de chaque vecteur sont notées comme suit :  $e_i = (e_i^1, \dots, e_i^p)$ . Cette base de  $T^\perp$  doit pour tout  $e_i$  vérifier  $\langle e_i, \mathbf{S}_u \rangle_{\mathbb{R}^p} = 0$  et  $\langle e_i, \mathbf{S}_v \rangle_{\mathbb{R}^p} = 0$ . Parmi les différents choix possibles, nous proposons de définir les  $e_i$  comme suit :

$$\begin{cases} e_i^1 &= -I_u^i \\ e_i^2 &= -I_v^i \\ e_i^k &= \delta_i^{k-2}, \quad 2 < k < p. \end{cases} \quad (6.2)$$

$\delta_i^k$  étant l'opérateur de KRONECKER. Par conséquent, la matrice de passage  $\Delta$  de la base  $(\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v, e_1, e_2, \dots, e_{p-2})$  à la base euclidienne de  $\mathbb{R}^p$  s'écrit :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -I_u^1 & -I_u^2 & \dots & -I_u^{p-2} \\ 0 & 1 & -I_v^1 & -I_v^2 & \dots & -I_v^{p-2} \\ I_u^1 & I_v^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ I_u^2 & I_v^2 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ I_u^{p-2} & I_v^{p-2} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme

$$\det(\Delta) = 1 + \sum_{i=1}^{p-2} \|\nabla I^i\|_{\mathbb{R}^2}^2 + \sum_{i \neq j}^{p-2} (I_u^i I_v^j - I_v^i I_u^j)^2 \neq 0,$$

les vecteurs  $\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v, \{e_i\}_{i=1, \dots, p-2}$  sont donc indépendants et comme nous sommes dans un espace de dimension finie, nous en déduisons que  $(\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v, e_1, \dots, e_{p-2})$  est une base de  $\mathbb{R}^p$ . Nous pouvons donc choisir  $\vec{N}$  comme une combinaison linéaire des  $(e_i)_{i \in \{1, \dots, p-2\}}$ . Soit,

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i e_i$$

où les  $(\alpha_i)_{i \in \{1, \dots, p-2\}}$  sont des constantes réelles. En détaillant les calculs,  $\vec{N}$  se réécrit

$$\vec{N} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -I_u^1 \\ -I_v^1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -I_u^2 \\ -I_v^2 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{p-2} \begin{pmatrix} -I_u^{p-2} \\ -I_v^{p-2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

et finalement on obtient :

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i I_u^i \\ -\sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i I_v^i \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{p-2} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant calculer les éléments de la matrice  $F_2$  :

$$\langle \vec{n}, \mathbf{S}_{uu} \rangle_{\mathbb{R}^p} = \langle \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i I_u^i \\ -\sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i I_v^i \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{p-2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{uu}^1 \\ \vdots \\ I_{uu}^{p-2} \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}^p} = \frac{1}{\|\vec{N}\|_{\mathbb{R}^p}} \sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i I_{uu}^i,$$

$$\langle \vec{n}, \mathbf{S}_{uv} \rangle_{\mathbb{R}^p} = \langle \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i I_u^i \\ -\sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i I_v^i \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{p-2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{uv}^1 \\ \vdots \\ I_{uv}^{p-2} \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}^p} = \frac{1}{\|\vec{N}\|_{\mathbb{R}^p}} \sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i I_{uv}^i,$$

et

$$\langle \vec{n}, \mathbf{S}_{vv} \rangle_{\mathbb{R}^p} = \langle \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i I_u^i \\ -\sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i I_v^i \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{p-2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{vv}^1 \\ \vdots \\ I_{vv}^{p-2} \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}^p} = \frac{1}{\|\vec{N}\|_{\mathbb{R}^p}} \sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i I_{vv}^i,$$

ainsi, nous obtenons l'expression de la matrice  $F_2$  :

$$F_2 = \frac{1}{\|\vec{N}\|_{\mathbb{R}^p}} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i I_{uu}^i & \sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i I_{uv}^i \\ \sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i I_{uv}^i & \sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i I_{vv}^i \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

avec

$$\|\vec{N}\|_{\mathbb{R}^p} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i + \left(\sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i I_u^i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i I_v^i\right)^2} \quad (6.4)$$

Les coefficients  $\alpha_i$  peuvent être choisis de manière à privilégier ou neutraliser l'information portée par certaines composantes de l'image vectorielle. Si l'on souhaite donner autant d'importance à chaque composante, alors il suffit de choisir tout simplement les  $\alpha_i$  égaux à la valeur 1. De même que pour les dimensions inférieures (cf. annexe B), nous obtenons les courbures  $(k_1, k_2)$  et les directions principales  $(v_1, v_2)$  en recherchant les valeurs et vecteurs propres de la matrice  $\mathcal{A} = F_1^{-1}F_2$  :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{eg - f^2} \begin{pmatrix} gl - fm & gm - fn \\ em - fl & en - fm \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Nous pouvons alors respectivement définir les courbures *gaussienne* et *moyenne* d'images vectorielles par  $K = \det(\mathcal{A})$  et  $H = -\frac{1}{2}\text{trace}(\mathcal{A})$ .

## 6.2 Lissage d'images vectorielles par une EDP de courbure moyenne

### 6.2.1 Principe

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, une analyse multi-échelles peut être considérée comme un processus dont l'entrée est l'image initiale  $I^0(\mathbf{x})$  et la sortie  $I(\mathbf{x}, t)$  est généralement la solution d'une EDP de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = DI \\ I(\mathbf{x}, 0) = I^0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (6.6)$$

avec  $D$  un opérateur différentiel. Afin de préserver le mieux possible certaines entités géométriques le long de l'espace-échelles (comme par exemple les contours),  $D$  dépend le plus souvent de caractéristiques géométriques de l'image telles que les courbures des isophotes ou bien les courbures de la surface image, cela dépendant du choix initial de la modélisation de l'image. Récemment, EL-FALLAH et *al.* [EFFFAE94], SOCHEN et *al.* [SKM98], MALLADI et *al.* [MS96] ont proposé d'utiliser la courbure moyenne pour construire un espace-échelles pour des images en niveaux de gris (cf. paragraphe 3.1.4). Ils considèrent le processus de diffusion comme l'évolution locale de la surface image dans la direction de son vecteur normal, évolution guidée par la courbure moyenne de celle-ci. Géométriquement parlant, le long d'un contour, le vecteur normal à la surface est contenu dans le plan x-y de telle sorte que celui-ci soit préservé dans l'espace-échelles alors que les autres régions évoluent vers des surfaces minimales. Maintenant, nous proposons d'utiliser la courbure moyenne définie précédemment pour lisser et/ou débruiter des images vectorielles. Nous faisons l'hypothèse qu'en minimisant cette courbure moyenne, l'image vectorielle tendra à se comporter de la même manière qu'une image en niveaux de gris. Comme

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( x, y, \{I^i(x, y)\}_{i \in \{1, \dots, p-2\}} \right) = \left( 0, 0, \left\{ \frac{\partial I^i(x, y)}{\partial t} \right\}_{i \in \{1, \dots, p-2\}} \right)$$

pour faire évoluer  $\mathcal{S}$  il suffit de faire évoluer chaque plan image suivant l'EDP :

$$\frac{\partial I^i}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{en - 2fm + gl}{eg - f^2}, \quad i \in \{1, \dots, p-2\} \quad (6.7)$$

### 6.2.2 Application au lissage d'images en couleur

En se plaçant dans l'espace RVB, une image en couleur est modélisée par l'application :

$$\mathbf{S} = (\mathcal{S}^1(x, y) = x, \mathcal{S}^2(x, y) = y, \mathcal{S}^3(x, y) = R(x, y), \mathcal{S}^4(x, y) = V(x, y), \mathcal{S}^5(x, y) = B(x, y)).$$

Afin de ne favoriser aucun plan couleur par rapport aux autres pour l'estimation de la courbure moyenne, nous prenons  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ . À titre d'illustration, nous faisons évoluer le processus (6.7) sur différentes images couleur. Les dérivées de l'image sont approximées par différences finies et l'EDP est résolue par un schéma explicite. Les figures 6.1 et 6.2 montrent l'évolution des images « miss » et « zelda » pour une échelle croissante. Pour ces deux images, il est intéressant de constater que les contours sont bien préservés tout au long du filtrage multi-échelles alors que les régions sont aplaties éliminant ainsi les petits détails de l'image.

Sur la figure 6.3 nous appliquons notre processus à l'image « miss » entachée par un bruit gaussien d'écart type 0.1. Après plusieurs itérations, l'image est débruitée.

Sur la figure 6.4 nous lisons une image de naevus qui a été détériorée par un compression jpeg. Nous constatons qu'après lissage, l'effet de blocs a été atténué et les contours ont été malgré tout préservés.

## 6.3 Détection des lignes centrales dans une image vectorielle

Il s'agit ici de détecter les lignes virtuelles passant au centre d'objets de structure allongée dans une image vectorielle. Dans le chapitre 9, nous décrivons en détail comment détecter ces lignes dans des images en niveaux de gris. Ici, nous nous inspirons de ces travaux pour définir une fonction de réponse aux vallées (crêtes) pour les images vectorielles. La démarche consiste tout simplement à substituer les courbures principales d'une image vectorielle aux courbures principales d'une image en niveaux de gris dans une fonction  $\mathbf{D}$  vérifiant les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}(k_1, k_2) = \mathbf{D}(k_1, -k_2) \\ \lim_{k_1 \rightarrow 0, k_2 \rightarrow 0} \mathbf{D}(k_1, k_2) = 0 \\ \mathbf{D}(k_1, k_2) \text{ croissante suivant } k_1 \\ \mathbf{D}(k_1, k_2) \text{ décroissante suivant } k_2 \end{array} \right. \quad (6.8)$$

Nous choisissons par exemple, d'utiliser la fonction suivante :

$$\mathbf{D}(k_1, k_2) = \min(|k_1 + k_2|, |k_1 - k_2|) \quad (6.9)$$



FIG. 6.1 – De haut en bas et de gauche à droite : l'image originale « miss » et trois étapes au cours du processus de diffusion.



FIG. 6.2 – De haut en bas et de gauche à droite : l'image originale « zelda » et trois étapes au cours du processus de diffusion.

Les points de ligne de fond et de ligne de crête sont alors respectivement définis comme les points vérifiant :

$$\text{Point de ligne de fond : } \begin{cases} k_1 & \neq & k_2 \\ k_1 & \neq & -k_2 \\ \max(|k_1|, |k_2|) & = & k_1 \\ \nabla \mathbf{D} \cdot v_1 & = & 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

$$\text{Point de ligne de crête : } \begin{cases} k_1 & \neq & k_2 \\ k_1 & \neq & -k_2 \\ \max(|k_1|, |k_2|) & = & -k_2 \\ \nabla \mathbf{D} \cdot v_2 & = & 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

### 6.3.1 Application à la détection des lignes centrales dans une image en couleur

Les images sont traitées ici dans l'espace couleur RVB. De même que précédemment, nous prenons  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ . Avant d'appliquer un opérateur de réponse à une vallée (crête) sur les images, nous effectuons au préalable un lissage gaussien de ces images. Cela nous permet d'éliminer en partie le bruit et de régulariser les opérateurs différentiels. La figure 6.5 montre la réponse aux crêtes d'une image de filet de pêche. Le filet vert, la corde rouge et les barres métalliques rouillées répondent à la fonction  $\mathbf{D}$ . Sur la figure 6.6 nous observons la réponse aux vallées et aux crêtes sur l'image « tigre ». De même que précédemment, les rayures du tigre sont bien mises en valeur par la réponse.

## Conclusion

Dans ce chapitre, le cadre théorique de la géométrie riemannienne nous a permis de définir des courbures pour des images vectorielles. Au même titre que cela a été fait avec les images en niveaux de gris [EFFAE94], [MS96], [TAL01], nous avons utilisé ces courbures à des fins de lissage et de détection de caractéristiques dans les images vectorielles. Pour illustrer ces procédés, nous les avons appliqués à des images couleurs. Il serait toutefois intéressant de tester nos méthodes sur d'autres types d'images vectorielles. Plus particulièrement, dans le cadre du traitement des images en couleur, l'emploi d'autres espaces couleur tel que le Cie Lab et/ou le choix d'une métrique non euclidienne pour l'espace  $M$  pourraient donner de meilleurs résultats.



FIG. 6.3 – À gauche : image « miss » entachée par un bruit gaussien, à droite : l'image débruitée par l'équation (6.7).

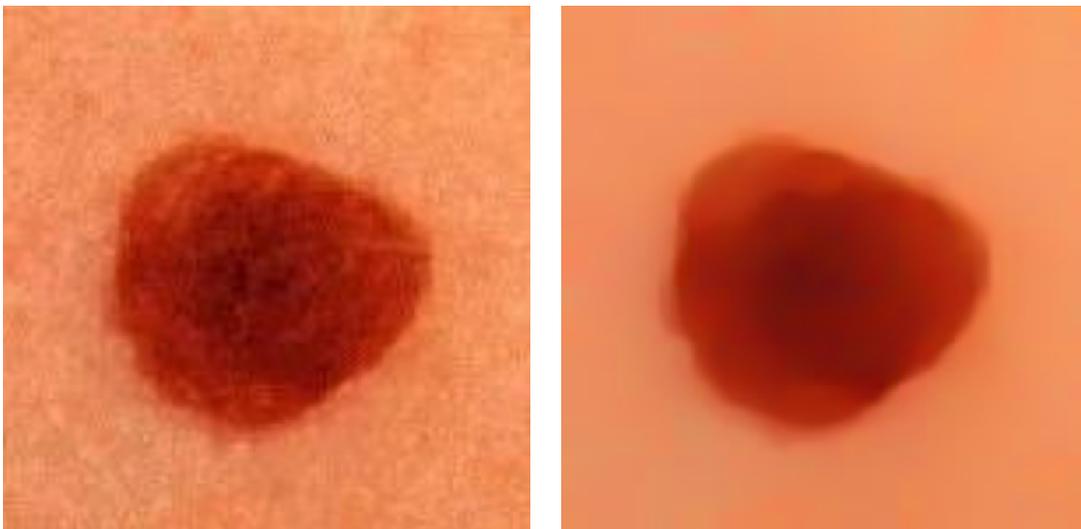


FIG. 6.4 – À gauche : image jpeg d'un naevus, à droite : image lissée par l'équation (6.7).

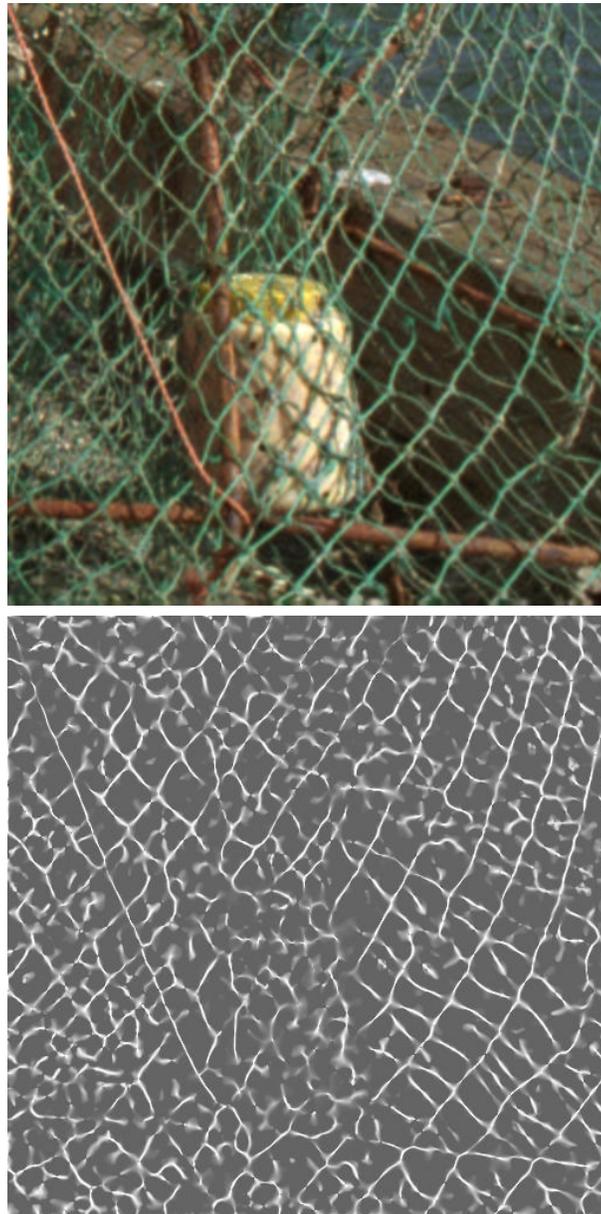


FIG. 6.5 – En haut : image de cordages, en bas : image de la réponse aux crêtes.

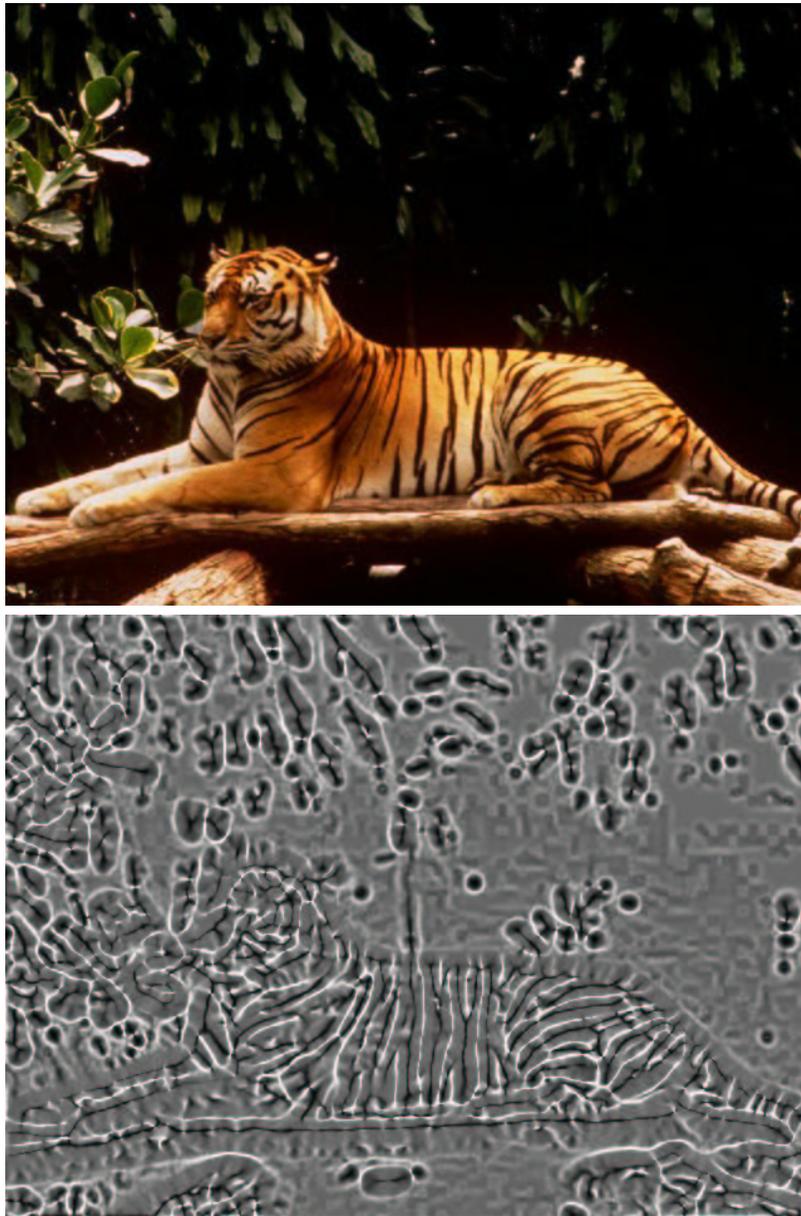


FIG. 6.6 – En haut : image « tigre », en bas : image de la réponse aux crêtes et aux vallées.

Deuxième partie

Extraction de caractéristiques  
linéiques dans des angiographies par  
rayons X 2D



# Chapitre 7

## Coronographie par rayons X 2D

Ce chapitre vise à présenter d'une part le contexte médical dans lequel intervient notre étude, et d'autre part les conditions expérimentales de l'examen coronographique. Ce chapitre a été rédigé en s'inspirant de travaux de synthèse déjà effectués sur le sujet [BM99], [CCD<sup>+</sup>02], [Ric98] et des discussions que nous avons pu avoir avec les médecins du CHRU de Poitiers. Dans la première section, nous exposons dans un premier temps quelques notions d'anatomie et fonctionnement cardiovasculaire puis nous traitons, dans un second temps, de la pathologie cardiovasculaire principale qu'est l'athérosclérose ainsi que des traitements de celle-ci. La seconde section est consacrée à la présentation de la modalité d'imagerie appelée coronographie par rayons X.

### 7.1 Contexte médical

#### 7.1.1 Quelques notions d'anatomie

##### Le cœur

Le cœur est un organe musculaire creux situé dans la cage thoracique, entre les deux poumons, au carrefour des grosses artères et des grosses veines de l'organisme<sup>1</sup>. Sa fonction est d'assurer la circulation sanguine par pompage du sang pour l'envoyer aux différents organes. Le cœur a la forme d'une pyramide triangulaire dont la base est située en arrière et en haut<sup>2</sup>. Il comporte trois faces : la face antérieure se projetant sur le thorax, une face inférieure ainsi qu'une face latérale gauche. Il est divisé en deux moitiés, droite et gauche, chacune comportant deux chambres, l'oreillette et le ventricule. Ces deux chambres sont séparées par une valvule auriculo-ventriculaire, dite *valve mitrale* pour le cœur gauche et la *valve tricuspide* pour le cœur droit. Ces deux valvules canalisent le sang de l'oreillette vers le ventricule (cf. figure 7.1). Les oreillettes et ventricules sont respectivement séparés

---

<sup>1</sup>Par convention, on appelle veine tout vaisseau amenant le sang au cœur et artère tout vaisseau transportant le sang expulsé du cœur

<sup>2</sup>Nous rappelons que toutes les descriptions anatomiques sont données en regardant le patient de face.

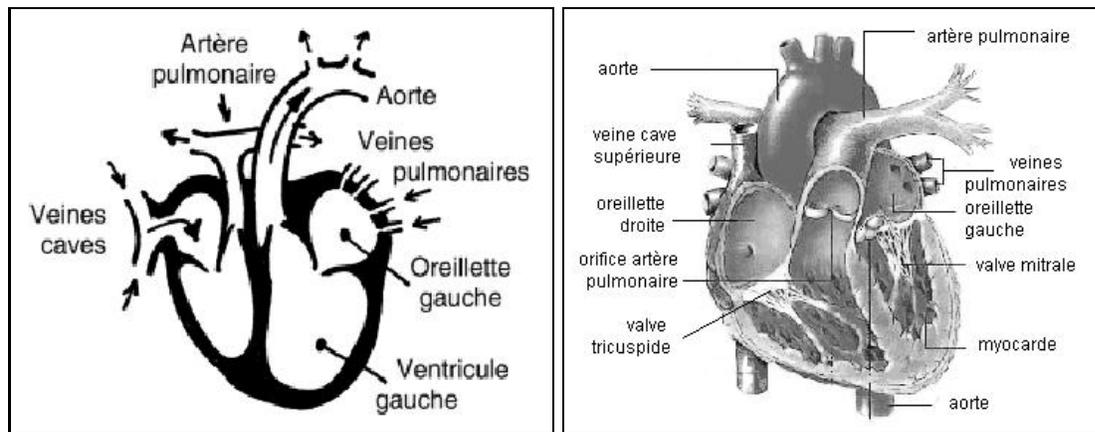


FIG. 7.1 – Schémas d'une coupe du cœur.

entre elles par le *septum interauriculaire* et le *septum interventriculaire*. L'oreillette gauche reçoit des poumons, le sang oxygéné, épuré de son gaz carbonique, et le ventricule gauche le propulse par l'aorte vers l'ensemble des artères de l'organisme qui assurent l'irrigation de tous les organes. Le sang effectue ainsi avec chaque organe, un échange en oxygène et en substances nutritives. Le sang appauvri en oxygène revient vers l'oreillette droite par les veines caves supérieures et inférieures. L'oreillette droite fait passer le sang au ventricule droit qui le propulse alors aux poumons par l'intermédiaire de l'artère pulmonaire. Ceux-ci se chargent alors de la réoxygénation du sang et le réacheminement par les veines pulmonaires vers l'oreillette gauche. Le sang effectue ainsi un cycle. La circulation sanguine est assurée par un mouvement périodique du cœur appelé *cycle cardiaque*. Ce mouvement comprend une phase de contraction ventriculaire, appelée *systole* et une phase de dilatation ventriculaire, appelée *diastole*.

### Les artères coronaires

Comme tout autre organe, le cœur est lui aussi irrigué par des branches artérielles : les artères coronaires. Elles prennent naissance dans l'aorte au niveau d'orifices appelés *ostium*. Les deux artères principales sont l'artère coronaire gauche et l'artère coronaire droite (cf. figure 7.2). L'artère coronaire gauche se subdivise en l'*artère interventriculaire antérieure* et l'*artère circonflexe*. Ces trois artères principales présentent chacune des artères secondaires (cf. figure 7.3). Ainsi, les branches secondaires de l'artère interventriculaire antérieure sont les *artères diagonales* et *septales*. Celles de l'artère circonflexe sont appelées les *artères marginales obtuses*. Les branches secondaires de l'artère coronaire droite sont les artères *marginales*, l'*artère interventriculaire postérieure* et l'*artère rétroventriculaire*.

Par ailleurs, les artères coronaire droite, interventriculaire antérieure et circonflexe peuvent être divisées en trois zones : le *tiers proximal*, situé à proximité de l'aorte, le *tiers distal* situé à l'extrémité des artères et le *tiers moyen* situé entre ces deux zones. Ces trois zones sont délimitées par des traits pointillés sur la figure 7.3, les tiers proximal, moyen et distal correspondant respectivement aux chiffres romains I, II et III.

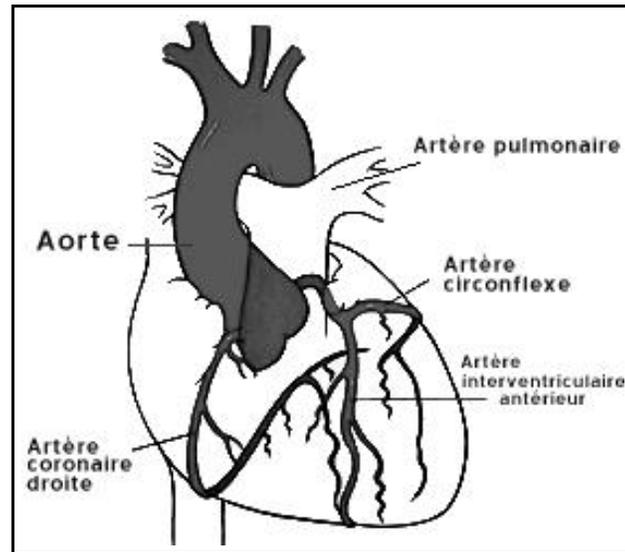


FIG. 7.2 – Schéma des artères coronaires principales.

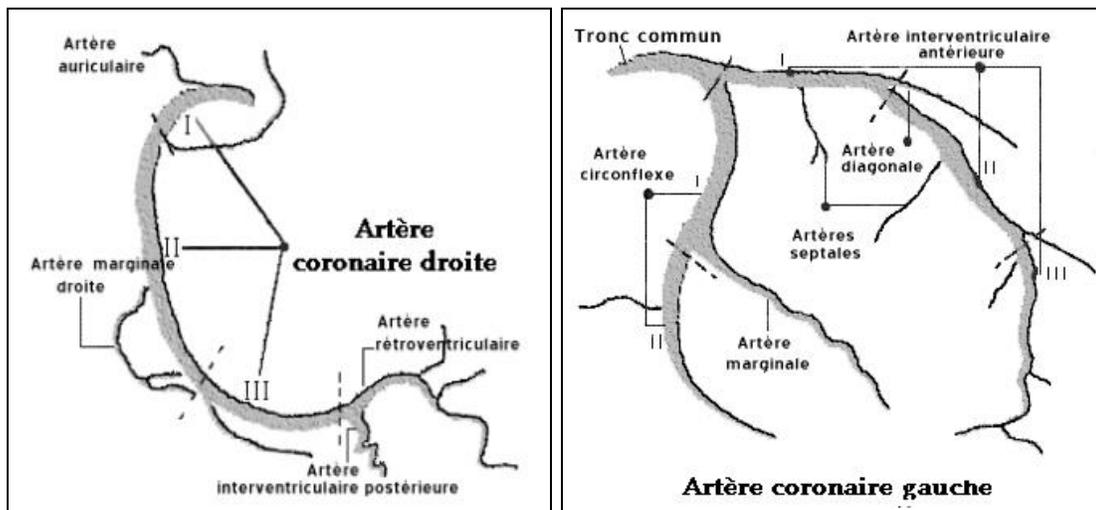


FIG. 7.3 – À droite l'artère coronaire droite, à gauche l'artère coronaire gauche.

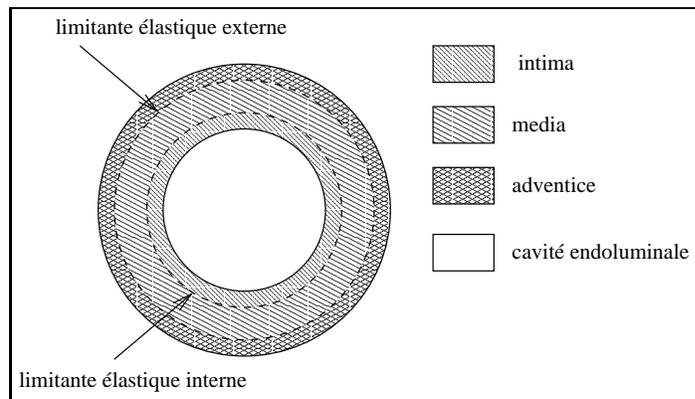


FIG. 7.4 – Schéma en coupe d'une artère saine.

La paroi artérielle est constituée de plusieurs tuniques disposées de manière concentrique autour de la cavité endoluminale, vers la périphérie de l'artère. Ces trois tuniques sont : l'*intima*, la *média*, et l'*adventice* et sont séparées par la *limitante élastique externe* et la *limitante élastique interne* (cf. figure 7.4). Il est à noter que le terme lumière est parfois employé pour désigner la cavité endoluminale. Le diamètre des artères coronaires varie de 1 à 5 mm.

### 7.1.2 Pathologie des artères coronaires : l'athérosclérose

L'*athérosclérose* a été définie par l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS) en 1957 par : « une association variable de modifications de l'intima des artères, constituant une accumulation focale de lipides, de glucides complexes, de sang et de produits sanguins, un développement de tissus fibreux et de dépôts calcaires, le tout associé à des modifications de la média ». Par conséquent, l'athérosclérose est caractérisée par un épaississement et une perte d'élasticité de la paroi interne des artères pouvant engendrer par ailleurs une réduction significative du calibre artériel, ou sténose (cf. figure 7.5). La sténose réduit par conséquent l'irrigation par les artères coronaires du muscle cardiaque, *i.e.* le myocarde, et peut mener à un infarctus du myocarde. L'athérosclérose affecte plus particulièrement les grosses et moyennes artères et peut être considérée comme un vieillissement prématuré de la paroi interne des vaisseaux bien qu'elle puisse survenir dans les dix premières années de la vie. Les principaux facteurs favorisant des lésions *athéromateuses* sont de natures variées, en voici quelques uns :

- l'hypertension artérielle ;
- le tabac ;
- le diabète ;
- l'hyperlipidémie ;
- le manque d'activité physique ;
- le profil psychologique : sujet hyperactif et stressé.

Pour évaluer la gravité des lésions et en déduire un traitement adéquat, le médecin doit pouvoir caractériser au mieux la sténose artérielle. Plusieurs critères ou facteurs permettent

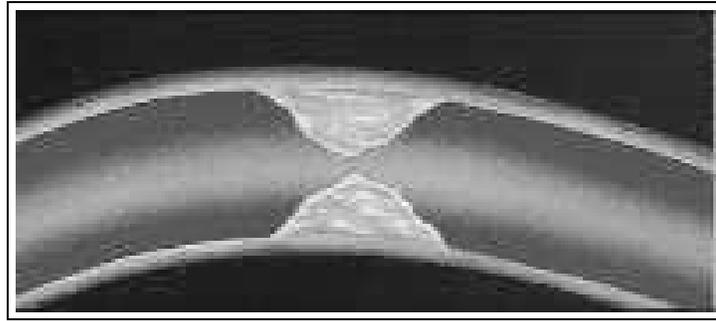


FIG. 7.5 – Un exemple de sténose.

l'analyse d'un segment artériel :

- la localisation de la sténose dans l'arbre coronarien : plus la lésion est située à proximité du tiers proximal plus elle est sévère puisqu'elle contrôle l'irrigation d'un territoire myocardique plus important que si elle était située au niveau du tiers distal. Par ailleurs, la localisation de la sténose peut également influencer sur la technique et la réussite du traitement ;
- le nombre de branches artérielles lésées : des lésions de plusieurs artères, situées à niveau égal, sont de pronostics plus sévères qu'une lésion monoartérielle ;
- la morphologie de la sténose : concentrique, excentrée, tubulaire (segment concentrique long), complexe (irrégularité importante des bords de la sténose) ;
- l'état du lit aval ;
- le développement d'artères collatérales : un développement important peut signifier la présence d'une lésion ;
- la longueur de la sténose ;
- le pourcentage de sténose, ou la variation relative d'un diamètre de référence et du diamètre minimal observé au niveau de la sténose : plus le rétrécissement du calibre artériel est sévère, plus le pronostic risque d'être sévère ;
- la composition de la plaque athéromateuse : une perte d'élasticité de la paroi de l'artère peut induire une propagation anormalement rapide du sang dans l'artère lésée.

Bien que la sévérité de l'obstruction de la lumière artérielle soit un facteur important, il arrive que des sténoses sévères n'impliquent pas d'infarctus du tout. Cela est probablement dû au développement d'un réseau de vaisseaux collatéraux initié au début de l'athérosclérose. Par ailleurs, des lésions non obstructives peuvent engendrer des infarctus du myocarde. Il a été découvert que les principaux facteurs de rupture de la plaque sont la taille et la consistance du noyau lipidique constituant la plaque, l'épaisseur de la couche fibreuse couvrant le noyau et l'inflammation et le manque de collagène au voisinage de la couche. Les perturbations dues à la plaque athéromateuse dépendent plus de la composition de la plaque que de sa taille [Led02]. En somme, le médecin doit s'intéresser aussi bien à la forme de la sténose qu'à la composition de la paroi interne de l'artère.

### 7.1.3 Traitements des pathologies

Le traitement des pathologies peut s'effectuer soit par médication, soit par voie chirurgicale, soit par des techniques de radiologie interventionnelle. Le traitement par médication consiste tout simplement à administrer au patient des médicaments anti coagulants. L'intervention chirurgicale consiste à ouvrir la cage thoracique de manière à effectuer un pontage aorto-coronarien. C'est de loin le traitement le plus lourd puisque d'une part plusieurs organes sont traumatisés et d'autre part, il nécessite une anesthésie générale. La technique et la difficulté de l'intervention dépend du nombre et de la localisation des lésions. Les techniques de radiologie interventionnelle consiste à introduire par les voies naturelles que constituent les artères, des outils endovasculaires tels que des ballons de gonflage ou des *stents*<sup>3</sup> afin d'élargir de manière artificielle la lumière artérielle. Ces techniques sont peu traumatisantes pour le patient puisqu'elles ne nécessitent qu'une anesthésie locale et se font par les voies naturelles. Cependant, de telles interventions sont d'autant plus difficiles à réaliser que la lésion est éloignée de l'ostium.

### 7.1.4 Choix de la modalité d'imagerie des vaisseaux

À la différence de nombreuses artères de l'organisme, les artères coronaires subissent en plus des mouvements relatifs à la respiration et aux éventuels déplacements du patient, des mouvements rapides dus aux contractions cardiaques. Ainsi, la fréquence d'acquisition de l'appareil d'imagerie doit être suffisamment élevée pour que les mouvements cardiaques n'influencent pas la qualité des images. De plus, une bonne résolution spatiale est nécessaire de manière à ce que le médecin puisse à la fois observer les artères coronaires principales dont le diamètre varie de 1 à 5 mm et analyser le plus finement possible le contour de leur paroi interne. Par ailleurs, dans la mesure du possible l'appareil doit permettre un examen le moins invasif et nocif possible pour le patient. Enfin, des notions de coût matériel peuvent aussi intervenir dans le choix de l'appareil d'investigation.

Les médecins disposent de plusieurs modalités d'imagerie des vaisseaux dont l'angiographie par rayons X 2D, l'angiographie par scanner classique ou hélicoïdal, l'angiographie par rayons X 3D, l'angiographie par résonance magnétique (ARM) et l'échographie endovasculaire. Ces modalités sont fondées sur l'utilisation de trois types de technologie : les rayons X, les champs magnétiques et les ultrasons. Les appareils utilisant les rayons X, c'est-à-dire l'angiographe 2D et les différents scanners, nécessitent l'injection d'un produit opaque aux rayons X de manière à rendre visible la lumière des artères. Ils ne fournissent donc pas d'information sur les parois des vaisseaux. L'échographie endovasculaire permet par contre de fournir en plus de la lumière du vaisseau exploré, une information sur les tissus de la paroi artérielle. Néanmoins, ces informations restent locales et ne permettent pas l'étude de l'ensemble de l'arbre coronarien. Les modalités d'imagerie 3D telles que l'angiographie par scanner, l'angiographie par rayons X 3D, l'angiographie par résonance magnétique ne présentent pas, actuellement, des résolutions temporelle et spatiale suffisamment élevées pour permettre leur utilisation en coronographie. Notons toutefois que l'ARM présente de nom-

---

<sup>3</sup>Les stents sont des prothèses en forme de petits ressorts permettant d'assurer la rigidité de la paroi artérielle

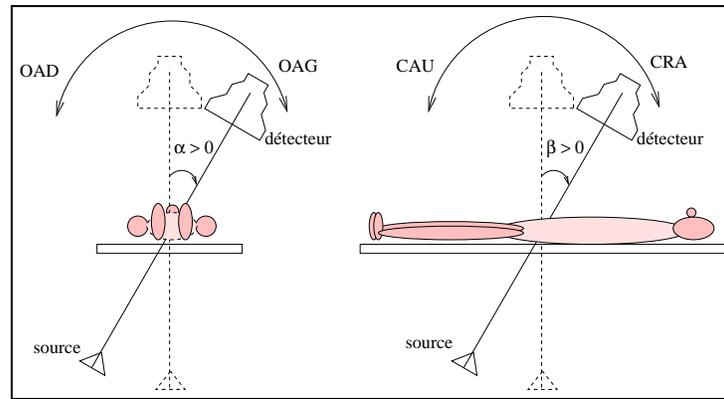


FIG. 7.6 – Angles anatomiques de rotation autour du patient.

breuses qualités : c'est un moyen d'investigation non invasif, qui permet l'étude des structures et dimensions de la lumière artérielle et des parois, ainsi que l'étude du flux sanguin. Toutefois, l'utilisation de cette modalité en coronographie est encore à l'état de recherche. Les moyens d'imagerie tridimensionnelle ne fournissant pas pour le moment de performances acceptables, l'imagerie par rayons X 2D représente actuellement la seule modalité offrant une résolution spatiale et temporelle suffisante à une caractérisation quantitative précise des structures vasculaires. Nous présentons plus en détail cette modalité dans la section suivante.

## 7.2 Coronographie par rayons X 2D

### 7.2.1 Description de l'angiographe 2D utilisé

Les images sur lesquelles nous allons travailler dans cette partie, nous ont été fournies par les médecins du CHRU de Poitiers. Elles ont été acquises à partir d'un angiographe monoplan de type LC, construit par General Electric Medical Systems. Cet appareil dispose d'une chaîne d'acquisition par rayons X, constituée d'une source de rayons X et d'un détecteur de type intensificateur de luminance (cf. annexe E). Il permet donc l'acquisition en temps réel d'une séquence numérique d'images rayons X (cf. figure 7.8). Il est muni d'un bras supportant la source et le détecteur, autorisant trois degrés de rotation autour du patient et permettant ainsi le réglage de l'incidence souhaitée. Dans la pratique, les médecins s'intéressent plus particulièrement d'une part, au plan vertical de rotation suivant un axe longitudinal au patient, permettant d'obtenir les incidences oblique antérieure droite, OAD, et oblique antérieure gauche, OAG, et d'autre part, au plan vertical de rotation suivant un axe perpendiculaire au précédent, permettant d'obtenir les incidences craniale CRA et caudale CAU (cf. figure 7.6). Ces angles correspondent respectivement aux angles  $\alpha$  et  $\beta$  de la figure 7.6. Ainsi, un angle  $\alpha$  positif correspond à une incidence oblique antérieure gauche, un angle  $\alpha$  négatif correspond à une incidence oblique antérieure droite, un angle  $\beta$  positif correspond à une incidence craniale et un angle  $\beta$  négatif correspond à une incidence caudale. Par ailleurs, l'angiographe fournit des images de résolution  $512 \times 512$  codées sur 8 bits à une cadence de 12,5 images par seconde. A titre d'illustration, nous présentons sur la figure 7.7

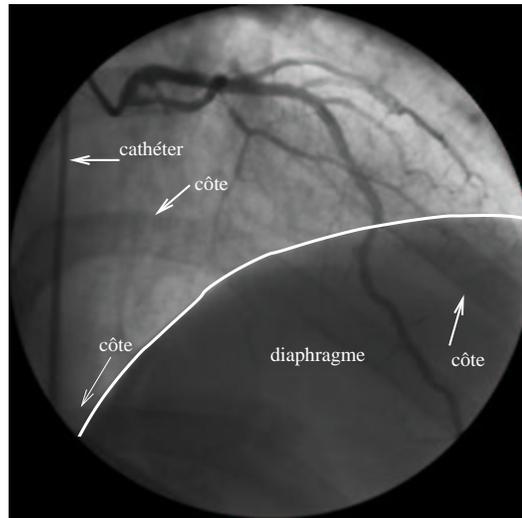


FIG. 7.7 – Angiographie d'angles anatomiques 12° OAD et 21° CRA.

une image obtenue avec cet appareil lorsque l'opacification de l'arbre coronarien est maximale. On y observe plusieurs structures anatomiques : les artères, les côtes, le diaphragme et une structure artificielle : le cathéter, tuyau souple servant à injecter le produit de contraste. Les artères y apparaissent comme des structures sombres, allongées et ramifiées. Les côtes caractérisées par de larges bandes grises, sont indiquées par des flèches obliques, la zone sombre située sous la ligne blanche désigne le diaphragme. Enfin, on peut remarquer que toutes ces structures situées sur des plans anatomiques différents se superposent.

### 7.2.2 Déroulement de l'examen coronographique

L'examen coronographique repose sur l'injection d'un produit opaque aux rayons X à base d'iode, appelé *produit de contraste*, dans les artères coronaires faisant ainsi apparaître leur morphologie interne. La démarche de l'examen est donc la suivante. Tout d'abord, le médecin s'assure que le patient n'est pas allergique à l'iode, auquel cas il devra lui administrer des médicaments antiallergiques. Des anxiolitiques sont très souvent administrés juste avant l'examen, le malade est à jeun et les médicaments anticoagulants sont éventuellement arrêtés. Ensuite, après une anesthésie locale, le médecin ponctionne une artère d'un des membres de manière à mettre en place un guide souple. L'artère fémorale, située dans le creux de l'aîne, est souvent choisie mais il arrive que l'artère radiale, artère du bras, soit utilisée. Un cathéter est ensuite enfilé progressivement sur le guide jusqu'à l'aorte. Le cathéter est opaque aux rayons X de manière à ce que le médecin puisse suivre son parcours jusqu'à l'aorte. Une fois le cathéter positionné à l'entrée de l'une des artères coronaires, le produit de contraste est injecté très rapidement. Dans le même temps, un film radiologique est enregistré et permet d'observer l'ensemble de l'artère coronaire injectée. L'opacification des vaisseaux ne dure que quelques secondes, pour visualiser correctement l'artère, plusieurs incidences, typiquement 5 pour l'artère coronaire gauche et 3 pour l'artère coronaire droite, et par conséquent plusieurs injections sont nécessaires. Le médecin renouvelle cette opération pour

la seconde artère coronaire et effectue généralement une injection supplémentaire dans le ventricule gauche afin de déterminer la fraction d'éjection de celui-ci. Un tel examen dure de quinze à vingt minutes.

- Pour l'analyse d'un segment artériel pathologique [CCD<sup>+</sup>02], le médecin s'arrange pour :
- positionner le segment au milieu de la fenêtre de l'imageur de manière à limiter les déformations géométriques dues à l'intensificateur de luminance (cf. annexe E) ;
  - choisir l'incidence de telle sorte que le segment artériel ne soit pas superposé à un autre segment ;
  - choisir, dans la mesure du possible, des incidences perpendiculaires à l'axe artériel afin de limiter les déformations géométriques ;
  - choisir deux incidences orthogonales de manière à apprécier au mieux la géométrie du segment artériel ;
  - choisir l'image de la séquence offrant l'opacification maximale des vaisseaux.

C'est à partir de ces images particulières de la séquence que l'on devra tirer l'information pertinente permettant la reconstruction 3D. Nous présentons sur la figure 7.8 quelques images successives composant un film radiologique obtenu suivant une incidence donnée. Sur la première image de la séquence le cathéter apparaît sous la forme d'un objet filiforme sombre, puis sur les images suivantes on observe la propagation progressive du produit de contraste dans l'arbre vasculaire.

### 7.2.3 Contraintes et limitations du système d'imagerie

Du fait qu'elle n'est pas une modalité tridimensionnelle, la coronographie par rayons X 2D présente de nombreuses limitations. Tout d'abord, l'image bidimensionnelle obtenue est l'image de la projection des artères suivant l'incidence des rayons X et peut, par conséquent, subir des déformations géométriques inhérentes aux variations de l'angle d'incidence des rayons X. Plusieurs incidences sont donc nécessaires pour extrapoler la morphologie 3D des vaisseaux et des sténoses éventuelles. De plus, suivant la complexité du réseau coronarien, il est fréquent que le médecin procède à plusieurs injections de produit de contraste avant de trouver un angle d'incidence optimal. Enfin, les niveaux de gris de l'image résultent de la contribution de tous les organes traversés par les rayons X (cf. annexe E). Cette étape d'acquisition, qui est une pratique quotidienne pour les médecins, est encore complexifiée par le fait que des segments artériels d'intérêt peuvent être masqués par d'autres branches artérielles.

Par ailleurs, le produit de contraste ne met en évidence que la morphologie de la lumière artérielle et ne fournit aucune information sur la paroi des vaisseaux.

La coronographie par rayons X, n'est pas un examen complètement inoffensif pour le patient puisque d'une part, les produits iodés présentent à forte dose une toxicité rénale et peuvent engendrer des réactions allergiques du patient et d'autre part une exposition répétée aux rayons X n'est pas bénigne.

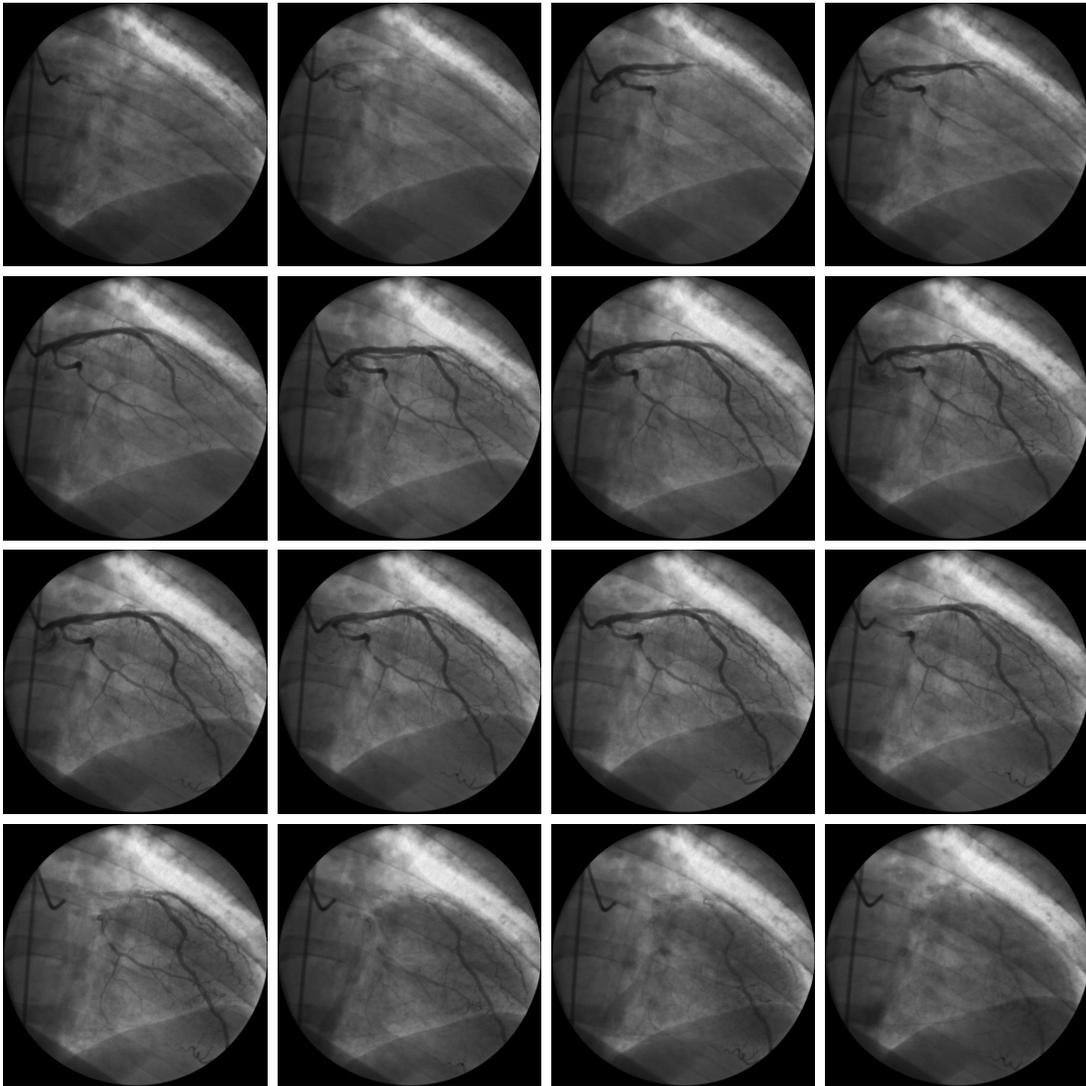


FIG. 7.8 – Séquence angiographique.

## Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir présenté le contexte médical de notre application nous avons détaillé le fonctionnement de l'appareil d'imagerie utilisé ainsi que les conditions expérimentales de l'examen coronographique. Cela nous a permis de caractériser les images à partir desquelles nous devons extraire la localisation, la taille et l'organisation des vaisseaux. Le chapitre suivant présente un état de l'art des méthodes de détection des lignes centrales et des contours des vaisseaux sanguins.



## Chapitre 8

# Détection des lignes centrales et des contours des vaisseaux sanguins : état de l'art

Dans ce chapitre nous présentons un état de l'art des méthodes de détection de la ligne centrale et/ou des contours des vaisseaux sanguins. Cette étape permet de caractériser de façon compacte les vaisseaux sanguins et ainsi de faciliter la reconstruction 3D de l'arbre vasculaire. La ligne centrale fournit une information sur la localisation et la topologie de l'arbre vasculaire. Les contours donnent, eux, une information sur la morphologie des vaisseaux. Les images angiographiques par rayons X 2D non soustraites sont particulièrement difficiles à traiter. Les difficultés majeures sont les suivantes :

- la luminance des angiographies dépend énormément des conditions d'acquisition, c'est-à-dire du dosage de rayons X, de l'angle de projection, des fortes différences d'absorption des rayons X suivant les organes... ;
- les côtes, les vertèbres et le cathéter, inintéressants à l'examen coronographique, ressemblent aux vaisseaux sanguins et perturbent les processus de détection automatique ;
- le produit de contraste ne se diffuse pas de façon uniforme dans les vaisseaux sanguins ;
- la variabilité de la taille des artères ;
- le bruit inhérent à un système par rayons X.

C'est pourquoi de nombreuses méthodes « classiques » du traitement d'images telles que les approches par contours et par régions [BCC<sup>+</sup>95] échouent le plus souvent. Des méthodes plus spécifiques à ce type d'images sont donc nécessaires.

Après avoir introduit la terminologie de ce chapitre, nous présentons diverses constatations et définitions permettant de caractériser les vaisseaux sanguins dans des angiographies obtenues par rayons X. Ensuite, nous présentons successivement diverses méthodes de détection des lignes centrales et/ou des contours<sup>1</sup>. Nous classons ces méthodes en cinq grandes catégories qui sont : les approches fondées sur la morphologie mathématique, les méthodes

---

<sup>1</sup>Compte tenu de la morphologie allongée des vaisseaux sanguins, les entités structurelles que sont les lignes centrales et les contours sont duales. C'est-à-dire que la détection des lignes centrales permet la détection des contours et vice-versa.

Désignation	Description
<i>Vallée</i>	dépression allongée entre des montagnes
<i>Ligne de fond</i>	ensemble de points localisés dans le fond d'une vallée
<i>Crête</i>	vallée du relief inverse
<i>Ligne de crête</i>	ensemble de points localisés au sommet d'une crête
<i>Pli</i>	point d'une ligne de fond ou de ligne de crête
<i>Ligne centrale ou médiane</i>	ligne de fond ou ligne de crête
<i>Axe médian</i>	entité contenant la localisation de la ligne centrale d'un objet et la taille de celui-ci

TAB. 8.1 – Terminologie pour désigner les points de la surface.

de suivi, les méthodes utilisant les modèles déformables, les méthodes multi-résolutions et les méthodes multi-échelles. Finalement, nous discutons et concluons sur ces différentes méthodes.

## 8.1 Caractérisation des vaisseaux sanguins

Tout d'abord, on essaie de dégager les informations spécifiques qui peuvent permettre de caractériser des vaisseaux sanguins dans des angiographies obtenues par rayons X. En utilisant ces informations supplémentaires, on peut espérer améliorer la qualité de la détection des structures par rapport aux méthodes classiques. Dans ces images obtenues par rayons X, les vaisseaux sont des structures allongées et sombres sur un fond plus clair. Par ailleurs, la nature tubulaire des vaisseaux engendre une plus grande absorption des rayons X dans leur partie axiale que sur leurs contours. Donc, si l'on étudie le profil d'intensité de l'image dans une direction perpendiculaire à la direction du vaisseau, la localisation de la ligne centrale de celui-ci correspond à celle du minimum de la fonction intensité (cf. figure 8.1). Des études ont montré que le profil d'un vaisseau sanguin peut être modélisé par une fonction racine carrée [PL88], [KTS88]. Néanmoins, pour des raisons calculatoires de nombreux auteurs préfèrent utiliser des profils plus simples à étudier comme les profils de type barre, gaussien, triangulaire ou parabolique (cf. annexe C). Si l'on modélise l'image comme une surface, l'image s'assimile à un relief. Ainsi, certaines caractéristiques de l'image peuvent être décrites en termes topographiques. Les artères coronaires deviennent alors des vallées dans le relief de la surface image. Extraire les lignes centrales des vaisseaux sanguins signifie donc localiser les points de fond de vallée de la surface image. Tout au long de ce chapitre, nous utiliserons la terminologie du tableau 8.1 pour désigner des points ou ensembles de points du relief. A titre d'illustration nous observons sur la figure 8.2 les lignes de fond d'une angiographie superposées au relief de celle-ci.

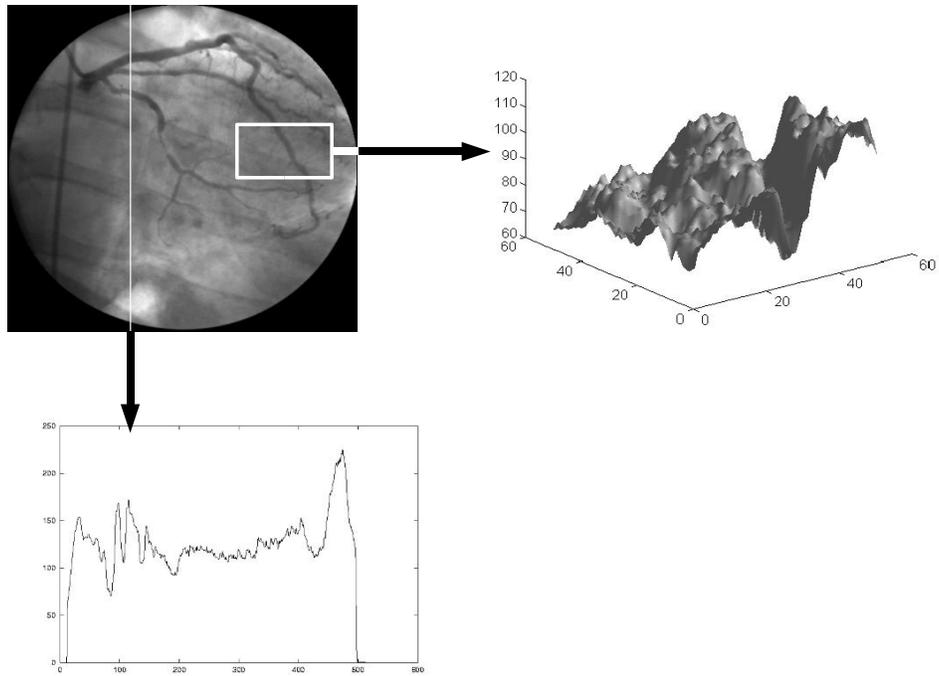


FIG. 8.1 – En haut à gauche : angiographie, à droite : relief de l'image correspondant à la zone délimitée par le rectangle blanc, en bas : profil des niveaux de gris de l'angiographie suivant la ligne blanche.

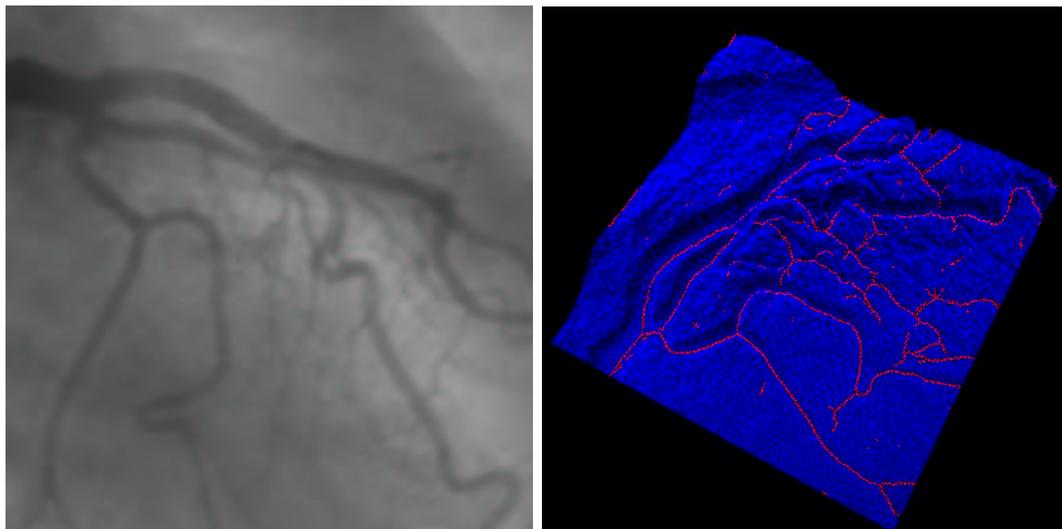


FIG. 8.2 – A droite : les lignes de fond de vallées superposées au relief de l'angiographie de gauche.

### 8.1.1 Diverses définitions de crêtes et vallées

#### Définition discrète

On s'intéresse à la localisation d'un minimum (vallée) ou maximum (crête) suivant des directions discrètes. Pour BASSET-MERLE [BM99] un pixel est considéré comme minimum local de l'image si c'est un minimum local le long d'un profil dans au moins l'une des quatre directions discrètes :

#### Définition 2

Un point  $x_0$  est un minimum local le long d'un profil s'il satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} I(x_0) \leq I(x_0 + 1) & \text{et} \quad I(x_0) \leq I(x_0 - 1) \\ I(x_0) \leq I(x_0 + 2) & \text{et} \quad I(x_0) \leq I(x_0 - 2) \\ I(x_0) \leq I(x_0 + 3) & \text{et} \quad I(x_0) \leq I(x_0 - 3) \\ I(x_0) + H < I(x_0 + L) & \text{et} \quad I(x_0) + H < I(x_0 - L) \end{array} \right. \quad (8.1)$$

où  $H$  et  $L$  sont des valeurs désignant respectivement la hauteur et la largeur de la vallée. Le principal problème des méthodes recherchant un *extremum* parmi plusieurs directions discrètes est qu'elles n'utilisent aucune information sur la direction de recherche des *extrema*. C'est pourquoi, d'autres auteurs proposent l'étude de la matrice hessienne afin de pallier ce manque.

#### Définition de hauteur

La matrice hessienne permet de généraliser la recherche des *extrema* locaux de fonctions réelles unidimensionnelles aux fonctions multidimensionnelles. L'idée est de se placer en un point critique ( $\nabla I = 0$ ) et d'étudier la matrice hessienne pour déterminer si un point est maximum, minimum ou point selle et de plus obtenir une information sur la direction de l'*extremum*. Soit  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $t_1, t_2$  les valeurs et vecteurs propres respectifs de la matrice hessienne  $\mathcal{H}$ . Ces caractéristiques issues de  $\mathcal{H}$  ont une signification géométrique puisque  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  permettent de caractériser la position de la fonction multidimensionnelle par rapport au plan tangent. DE SAINT-VENANT [Ven52], HARALICK [Har83], LINDBERG [Lin96] et STEGER [Ste96] définissent un point de pli comme étant un point non singulier vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} |\lambda_\alpha| > |\lambda_\beta| & \alpha, \beta \in \{1, 2\}, \alpha \neq \beta \\ \nabla I \cdot t_\alpha = 0 & \\ \lambda_\alpha < 0 & \text{signifie une crête} \\ \lambda_\alpha > 0 & \text{signifie une vallée} \end{array} \right. \quad (8.2)$$

Les plis sont donc les lieux de hauteur extrême pour  $I$  dans la direction le long de laquelle  $I$  a la plus grande dérivée seconde.

#### Définition fondée sur la géométrie différentielle

Dans ces approches on modélise l'image par une surface régulière de dimension 2 localement immergée dans un espace de caractéristiques de dimension 3. Sous ce formalisme, une

image en niveaux de gris est modélisée par l'application (cf. annexe B) :

$$\mathbf{S} : (x, y) \rightarrow (S^1(x, y) = x, S^2(x, y) = y, S^3(x, y) = I(x, y)) \quad (8.3)$$

Les directions respectives  $v_1$  et  $v_2$  de la courbe tracée sur la surface ayant la plus grande courbure  $k_1$  et de la courbe tracée sur la surface ayant la plus petite courbure  $k_2$  sont alors obtenues en diagonalisant la matrice  $\mathcal{A} = F_1^{-1}F_2$ , cf. annexe B. En reprenant la classification de la figure B.6 nous voyons que mathématiquement, les points de plis sont les points tels que  $k_i = 0$  et  $k_j \neq 0$  ( $i, j \in \{1, 2\}; i \neq j$ ). Ainsi, la définition ci-dessous a été utilisée par LORENTZ et al. [LCB<sup>+</sup>97] et SATO et al. [SAH<sup>+</sup>98] avec la métrique euclidienne ainsi que par NASSER [Nas95] et PRINET et al. [PMM96] pour la métrique induite :

$$\left\{ \begin{array}{ll} |k_\alpha| > |k_\beta| & \alpha, \beta \in \{1, 2\}, \alpha \neq \beta \\ \nabla k_\alpha \cdot v_\alpha = 0 & \\ k_\alpha < 0 & \text{signifie une crête} \\ k_\alpha > 0 & \text{signifie une vallée} \end{array} \right. \quad (8.4)$$

### Définition fondée sur les lignes de niveau de l'image

Hydrologiquement, un pli dans un paysage est un endroit où l'eau converge (vallée) ou diverge (crête). Un pli peut alors s'exprimer comme un *extrema* de la courbure des lignes de niveau dans la direction des lignes de niveau. La courbure d'une ligne de niveau sur la surface image s'exprime comme suit :

$$\mathcal{K} = -\frac{I_{\eta\eta}}{I_\xi} = -\frac{I_y^2 I_{xx} - 2I_x I_y I_{xy} + I_x^2 I_{yy}}{I_x^2 + I_y^2} \quad (8.5)$$

La direction principale est bien évidemment  $\eta = \frac{1}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}(I_y, -I_x)^t$ . Un pli sera défini dans cette optique par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} e = \nabla \mathcal{K} \cdot \eta = 0 & \\ \nabla e \cdot \eta < 0 \text{ et } \mathcal{K} > 0 & \text{signifie une crête} \\ \nabla e \cdot \eta > 0 \text{ et } \mathcal{K} < 0 & \text{signifie une vallée} \end{array} \right. \quad (8.6)$$

Cette définition a été utilisée par EBERLY et al. [EGM<sup>+</sup>94], GAUCH et al. [GP93] et THIRION et al. [TB93]. Les points de courbure maximale le long des isophotes sont reliés entre eux et forment des lignes de crêtes. De façon similaire, les termes  $|I_{\eta\eta}|$ ,  $|\mathcal{K}|$  ou  $|I_{\eta\eta} I_\xi^\alpha|$  avec  $\alpha \in [-1, 0]$ , peuvent être considérés comme des détecteurs de crêtes [MdEV96]. De fait, plus  $\alpha$  est proche de  $-1$ , plus l'opérateur est sensible aux petits plis. Après utilisation de ces détecteurs, un simple seuillage permet alors d'extraire les plis. D'après MAINTZ et al. [MdEV96], la définition fondée sur les lignes de niveau de l'image est surtout adaptée à la mise en correspondance d'images plutôt qu'à la détection de lignes centrales.

Notons qu'EBERLY et al. [EGM<sup>+</sup>94] étendent les définitions de plis précédentes (8.2), (8.4) et (8.6) aux dimensions supérieures.

## 8.2 Approches utilisant la morphologie mathématique

TOUMOULIN *et al.* [TCC90] utilisent une combinaison d'opérateurs de morphologie mathématique [Ser82], [Ser88] pour renforcer les lignes de crêtes vasculaires dans des angiographies soustraites. Les lignes centrales sont alors extraites en utilisant un opérateur « chapeau haut de forme » [Ser88]. Les contours sont ensuite extraits en utilisant des opérateurs de dilatation et de gradient morphologiques.

EIHO *et al.* [EQ97] utilisent un opérateur « chapeau haut de forme » muni d'un élément structurant de taille équivalente à celle des plus gros vaisseaux. Pour diminuer le bruit, ils effectuent une érosion sur l'image résultante. Ils procèdent ensuite à un seuillage pour étiqueter les points appartenant aux artères et au fond de l'image. Les lignes centrales sont obtenues en amincissant l'image binaire. Les contours des artères sont extraits en utilisant un algorithme de ligne de partage des eaux [BM93] avec comme marqueur intérieur la ligne centrale et comme marqueur extérieur le fond de l'image.

## 8.3 Méthodes de suivi

HOFFMAN *et al.* [HSL<sup>+</sup>97] sélectionnent manuellement quelques points de la ligne centrale (2 à 4 points). Les portions de vaisseau situées entre deux points sélectionnés sont détectées automatiquement en utilisant un algorithme de suivi. Le suivi se fait en étudiant les niveaux de gris dans un secteur circulaire de 90° centré sur le vecteur formé par les deux points. Par ailleurs, les bifurcations sont identifiées par leur proximité à la ligne centrale. Ensuite, les vaisseaux proches d'une bifurcation sont comparés à une courbe polynomiale d'ordre 2. Par la suite, les lignes centrales des vaisseaux secondaires sont extrapolées pour intersecter les lignes centrales des vaisseaux primaires. Finalement, la hiérarchie des vaisseaux est établie automatiquement sur l'arbre des vaisseaux suivis.

JANSEN *et al.* [JKdK<sup>+</sup>02] proposent un algorithme fondé sur le principe de la propagation d'un front d'onde [BM97]. Un front d'onde est initié dans l'image et propagé suivant une vitesse locale dépendant des niveaux de gris de l'image. Le but de cet algorithme est de trouver le chemin le plus rapide d'un point de départ à un point final tous deux indiqués par l'utilisateur. Cet utilisateur a la possibilité d'ajouter un point de passage pour éviter que le front se propage dans une mauvaise direction lors de la superposition d'artères par exemple. Avant d'appliquer leur algorithme, JANSEN *et al.* effectuent un sous-échantillonnage non linéaire de l'image pour réduire le temps de calcul. Un filtre morphologique est ensuite utilisé pour renforcer les artères.

HILDEBRAND *et al.* [HG95] détectent la ligne centrale avec un algorithme de minimisation de coût  $A^*$  [Mar72] qui connecte deux points donnés par l'utilisateur. L'utilisateur indique aussi manuellement les points finaux et les bifurcations de chaque vaisseau. Un certain nombre de lignes de recherche orthogonales à la ligne centrale sont sélectionnées. Les points de contours sont localisés entre les passages par zéro du laplacien et les maxima locaux du gradient. Les points de contour individuels sont ensuite connectés.

LIU *et al.* [LS93] présentent une méthode récursive de suivi des structures 2D. L'algo-

rithme proposé effectue la détection en suivant la direction locale de la ligne centrale et en recherchant simultanément les deux bords par extrapolation et mise à jour du diamètre local. Les auteurs supposent pour cela la continuité de la ligne centrale, de l'orientation, du diamètre et de la densité des vaisseaux. L'algorithme utilisé a une structure similaire à un filtre de KALMAN. Ainsi, lorsqu'une branche a été entièrement parcourue, elle est effacée afin que l'algorithme récursif traite bien toutes les branches.

LECORNU [Lec95] étend l'algorithme de MARTELLI de recherche de chemin de coût minimum dans un graphe valué au suivi simultané des deux bords [SRWC93]. Un nœud du graphe contient une paire de contours élémentaires. Il met en place un algorithme de coût uniforme ( $A^*$ ) [Mar72], [Mar76] pour trouver le chemin optimal. La fonction de coût utilisée se décompose en trois parties : un coût fondé sur le contraste entre le fond et le vaisseau, un coût qui mesure le parallélisme entre les deux contours d'un nœud et un coût qui prend en compte la courbure du chemin.

HARIS *et al.* [HEM<sup>+</sup>99] proposent un algorithme de suivi séquentiel récursif pour l'extraction des lignes centrales. L'image doit subir un prétraitement par un opérateur chapeau haut de forme et un lissage gaussien. Ils définissent un élément artériel par la position du point de ligne centrale  $p_i$ , sa direction  $d_i$  et sa taille approximative  $w_i$  en ce point. L'élément artériel suivant est déterminé récursivement à partir de l'élément précédent. Un échantillonnage circulaire de centre  $p_i$  et de rayon  $r_i = \gamma(\frac{w_i}{2})$  est créé et analysé. Le coefficient  $\gamma$  est choisi de manière à ce que le diamètre du cercle soit légèrement plus grand que celui des artères. Ainsi, généralement le cercle intersecte les contours de part et d'autre de la ligne centrale. Soit alors  $b_i^{(1)}$  et  $b_i^{(2)}$  les deux bords courant détectés. La position, la direction et la taille du prochain élément sont respectivement données par  $p_{i+1} = \frac{1}{2}(b_i^{(1)} + b_i^{(2)})$ ,  $d_{i+1} = p_{i+1} - p_i$  et  $w_{i+1} = d(b_i^{(1)}, b_i^{(2)})$ . L'extraction se fait par un algorithme en largeur d'abord. Le processus s'arrête lorsqu'aucun point de contour n'est détecté ou lorsque la distance entre les deux points détectés est inférieure à un certain seuil. Une fois l'arbre coronarien détecté, l'image est découpée en fenêtres d'étude contenant chacune un seul segment artériel. La taille de la fenêtre est calculée de manière à ce que tous les disques de diamètre  $w_i$  y soient contenus. Sur chaque fenêtre, on calcule le gradient de l'image puis on applique une ligne de partage des eaux avec comme marqueur intérieur la ligne centrale. Les points de contours sont alors recherchés dans la région délimitée par la réunion des disques ce qui permet donc finalement de limiter la sur-segmentation inhérente à l'algorithme de ligne de partage des eaux.

PELLOT *et al.* [PHSH92] effectuent un suivi dynamique du maximum (ou minimum<sup>2</sup>) du profil d'intensité dans une fenêtre de recherche. L'algorithme trouve le chemin optimal à travers une table de coûts numériques représentant les intensités cumulées des éléments de la fenêtre de pixel. La continuité globale est maintenue en restreignant les déviations latérales. Cet algorithme est initialisé en entrant les coordonnées et directions (4-connexes) approximatives de l'extrémité de chaque branche. Les points qui initialisent le suivi de la ligne centrale sont recherchés dans une fenêtre dont la taille est choisie de manière à permettre les changements d'orientation du vaisseau et à ne pas empiéter sur les vaisseaux voisins. Il est à noter que cette méthode traite les bifurcations. Pour la détection des contours PELLOT *et al.* calculent le gradient morphologique de l'image angiographique. L'algorithme de suivi de

---

<sup>2</sup>On utilise un maximum pour une angiographie soustraite et minimum sinon.

crête (ou vallée) précédent est finalement utilisé de part et d'autre de la ligne centrale pour extraire les contours des artères.

TOLIAS et *al.* [TP98] utilisent l'algorithme de classification des « Fuzzy C Means » [BC77] sur des coupes transverses de vaisseaux rétinien. Cela permet d'obtenir deux fonctions d'appartenance : la fonction d'appartenance au vaisseau et la fonction d'appartenance au fond. Les positions de la ligne centrale et des contours sont déterminées à partir de la fonction d'appartenance aux vaisseaux. Ces informations sont alors utilisées dans un algorithme de suivi séquentiel itératif. L'algorithme détermine automatiquement les pixels initiaux et terminaux des vaisseaux. Il permet aussi de traiter les bifurcations et intersections des vaisseaux.

FIGUEIREDO et *al.* [FL95] se limitent à l'étude d'un segment artériel. L'utilisateur choisit deux coupes transverses délimitant le vaisseau à étudier. Des coupes transverses équidistantes (en angle et en distance) du segment sont ensuite générées à partir des coupes initiales. Pour chaque coupe, les points candidats à la ligne centrale sont extraits à partir de l'application d'un opérateur « chapeau haut de forme » sur chaque coupe transverse. Chaque candidat est caractérisé par sa position et la valeur du « chapeau haut de forme ». Un graphe est ensuite construit à partir des candidats. Les nœuds sont connectés à tous les nœuds des coupes adjacentes, mais ne sont pas connectés s'ils appartiennent à la même coupe. La fonction de coût sur les arcs du graphe est élaborée à partir des caractéristiques des candidats. Le chemin de coût minimum est trouvé par un algorithme de programmation dynamique. Pour détecter les contours des artères, les auteurs appliquent le même algorithme sur chaque contour placé de part et d'autre de la ligne centrale. Les candidats sont ici choisis en extrayant les maxima locaux d'un gradient obtenu à partir d'un opérateur de dilatation.

## 8.4 Méthodes utilisant les modèles déformables

KLEIM et *al.* [KLA97] modélisent les contours par des modèles déformables de type B-splines. Chaque contour est interactivement initialisé et optimisé en utilisant un algorithme de programmation dynamique. L'énergie externe du modèle déformable est déterminée à partir de filtres « stretched-GABOR » [HRvdH<sup>+</sup>92]. Un parcours itératif permet alors d'extraire la ligne centrale de manière à ce qu'elle soit exactement située au milieu des deux contours. L'objectif des auteurs est de quantifier une sténose sur un segment artériel.

CHEN et *al.* [CC00] détectent la ligne centrale à l'aide d'un modèle déformable. L'utilisateur indique plusieurs points proches de la ligne centrale dans la lumière de chaque artère. Une courbe spline est formée à partir des points sélectionnés et sert d'initialisation au processus. Les minima locaux de l'image intensité servent à définir la force externe qui va attirer la courbe initiale le plus près possible de la ligne centrale des artères. Les vaisseaux sont ensuite étiquetés automatiquement par un algorithme en largeur d'abord. L'arbre coronarien est codé par un graphe dirigé. Les caractéristiques des vaisseaux : bifurcations, diamètre, et direction de bifurcation, sont stockées dans les nœuds correspondants.

## 8.5 Analyse multi-résolutions

Les méthodes multi-résolutions comme leur nom l'indique permettent d'étudier les images à plusieurs résolutions et ainsi de faciliter et/ou d'accélérer certains processus classiques du traitement d'images. Au fur et à mesure que la résolution diminue, l'image est simplifiée et sous-échantillonnée. La multi-résolutions peut être obtenue par différents procédés tels que les ondelettes [Mal89], [Dau92], [Mey94] ou la pyramide gaussienne [Bur81]. Le principal inconvénient de ces méthodes est la difficulté de l'étape de fusion. Compte tenu de la différence de taille entre deux résolutions successives, il n'est en effet pas toujours évident de suivre une structure à différentes résolutions. Dans ce but, BASSET-MERLE [BM99] utilise une pyramide gaussienne afin d'obtenir une représentation à différentes résolutions des artères coronaires. La détection des lignes de fond se fait en extrayant les minima locaux par la méthode présentée au paragraphe 8.1.1 à deux résolutions différentes, la première résolution étant écartée afin de réduire les fausses détections. La résolution la plus élevée est amincie par un algorithme de squelettisation [Lan78]. Ensuite, un algorithme de concaténation des informations, à base de voisinages, entre les différentes résolutions est utilisé. Pour finir, les boucles du squelette sont supprimées.

## 8.6 Analyse multi-échelles linéaire

L'analyse multi-échelles linéaire est une méthode qui permet de détecter des structures de différentes tailles dans une image. Une réponse à la structure recherchée, lignes centrales, contours, coins, est élaborée. L'échelle à laquelle la réponse à cette structure est la plus élevée est directement liée à la taille de cette même structure. Généralement, pour traiter au mieux la masse d'information qu'est l'espace-échelles il est nécessaire de :

- s'assurer de la stabilité du détecteur ou indicateur que l'on utilise au travers des échelles ;
- choisir l'échelle  $\sigma_{opt}$  la mieux adaptée (*échelle optimale*) à la taille des structures étudiées dans l'image ;
- choisir l'intervalle d'échelles  $[\sigma_{min}, \sigma_{max}]$  adapté au problème ;
- choisir le nombre d'échelles qui vont être nécessaires à l'extraction des caractéristiques ;
- fusionner les réponses des échelles retenues, c'est-à-dire, résumer au mieux l'information pertinente issue de toutes ces échelles en une seule image afin de faciliter l'étape de décision.

Malheureusement, il semble qu'il n'y ait pas de solution générale au problème de fusion. Il faut donc, actuellement, résoudre ce problème au cas par cas suivant l'application visée. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, l'analyse multi-échelles linéaire possède les propriétés de linéarité, d'invariance aux rotations, aux translations et aux zooms. Elle peut être établie soit à partir d'un processus par EDP, cf. équation (3.1), soit par filtrage gaussien. Dans la suite de cette section nous passons en revue les différentes étapes d'une analyse multi-échelles linéaire en explicitant les solutions adoptées par différents auteurs.

### 8.6.1 Stabilité du détecteur

En ce qui concerne la détection des lignes centrales, le détecteur est généralement fondé sur l'une des définitions de pli de la section 8.1. Par définition, le détecteur est dit stable s'il ne crée pas de nouvelles structures lorsque l'échelle augmente [Wit83]. On peut observer la stabilité du détecteur sur un diagramme  $(x, y)$ - $\sigma$  où l'on reporte pour chaque point  $(x, y)$  de l'image la détection d'un élément caractéristique à l'échelle  $\sigma$ .

### 8.6.2 Détermination de l'échelle optimale

Pour détecter une structure de taille  $\omega$ , il faut trouver l'échelle optimale  $\sigma_{opt}$  pour laquelle une réponse  $R(x, \sigma, \omega)$ <sup>3</sup> caractérisant cette structure est maximale suivant  $\sigma$  dans l'espace échelles. Généralement, les auteurs [Nas95], [Lin96], [KGSD95], [SAH<sup>+</sup>98], [LCB<sup>+</sup>97], se donnent un modèle analytique de la vallée (crête) à détecter pour déterminer l'échelle optimale. Le plus souvent, le modèle analytique est un cylindre généralisé engendré par l'un des profils présentés en annexe C. La réponse multi-échelles à une structure de taille  $\omega$  est alors définie par la convolution du modèle de vaisseau  $P(x, \omega)$  par la réponse à une vallée/crête à l'échelle  $\sigma$  :

$$R(x, \sigma, \omega) = R(x, \sigma) * P(x, \omega) \quad (8.7)$$

Ensuite, il reste à chercher  $\sigma = \sigma_{opt}$  donnant la réponse maximale :

$$\begin{cases} \frac{\partial R(x, \sigma, \omega)}{\partial \sigma} = 0 \\ \frac{\partial^2 R(x, \sigma, \omega)}{\partial \sigma^2} < 0 \end{cases} \quad (8.8)$$

Principalement deux types de réponses  $R(x, \sigma)$  sont proposées dans la littérature. PIZER et al. [PBC<sup>+</sup>94] les nomment « central medialness » et « offset medialness ». La réponse de type « central medialness » est obtenue en étudiant les dérivées locales de l'image à une échelle  $\sigma$ . Dans ce but, LORENTZ [LCB<sup>+</sup>97], FRANGI [FNVV98] et SATO [SAH<sup>+</sup>98] utilisent une ou plusieurs valeurs propres de la matrice hessienne en un point  $P$  pour élaborer leur réponse multi-échelles aux vaisseaux. Ils proposent alors la réponse suivante pour déterminer l'échelle optimale :

$$R(x, \sigma, \omega) = \sigma^\gamma \frac{d^2 g(x, \sigma)}{dx^2} \star P(x, \omega) \quad (8.9)$$

où  $\sigma^\gamma$  est un terme de normalisation dont l'utilité sera expliquée par la suite. NASSER [Nas95] utilise la courbure maximale correspondant à la valeur propre la plus élevée en valeur absolue de la matrice de WEINGARTEN. Dans ce cas, la réponse s'exprime comme suit :

$$R(x, \sigma, \omega) = -\frac{\frac{d^2 g(x, \sigma)}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dg(x, \sigma)}{dx}\right)^2\right)} \star P(x, \omega) \quad (8.10)$$

---

<sup>3</sup>Pour la détection des vallées (ou crêtes) cette réponse dépendra généralement d'une ou plusieurs courbures.

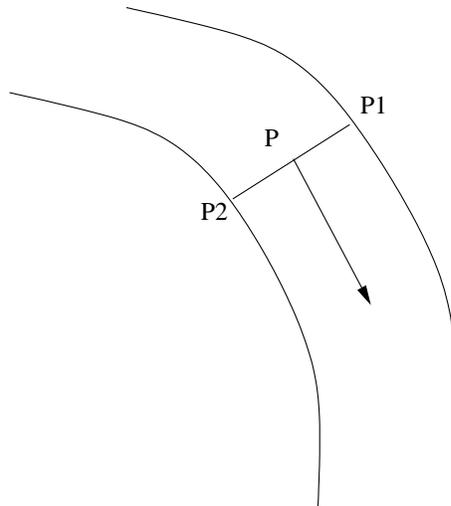


FIG. 8.3 – « Offset medialness ».

Quant à elle, la réponse de type « offset medialness » utilise la localisation des contours de l'objet en moyennant l'information sur une région circulaire dont le rayon est proportionnel à  $\sigma$ . Quant à eux, KOLLER et *al.* [KGS95], KRISIAN [Kri00], BLONDEL et *al.* [BVD<sup>+</sup>02] utilisent les vecteurs propres de la matrice hessienne de l'image pour déterminer en chaque point  $P$  la direction perpendiculaire à celle du vaisseau. Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux points localisés à la même distance de  $P$  dans cette direction (cf. figure 8.3). La réponse au point  $P$  est alors définie par :

$$\min_{i \in \{1,2\}} \frac{|\overrightarrow{PP_i} \cdot \nabla I(P_i)|}{|\overrightarrow{PP_i}|} \quad (8.11)$$

La réponse sera donc élevée si les gradients dans la direction de part et d'autre de  $P$  sont mutuellement élevés.

### 8.6.3 Détermination de l'intervalle d'échelles

Le choix de l'intervalle d'échelles doit se faire en fonction de la taille des structures à détecter. La plus petite échelle à laquelle on peut observer la plus petite structure contour, vallée, crête ou coins, est  $\sigma_{min}$ . Elle dépend d'une part, de l'échelle optimale correspondant à la plus petite structure que l'on souhaite détecter, qui dépend donc du problème envisagé, et d'autre part des conditions numériques imposées par le détecteur (théorème de SHANNON, erreurs d'approximation). Si l'on connaît la taille de la plus grande structure  $\omega_{max}$  présente dans l'image, la plus grande échelle  $\sigma_{max}$  est égale à  $\sigma_{opt}(\omega_{max})$ . Dans le cadre de la détection des artères coronaires, le choix d'une échelle trop grande rendrait ainsi le détecteur sensible aux structures indésirables de l'arrière plan telles que les côtes ou le diaphragme...

### 8.6.4 Échantillonnage de l'espace-échelles

Nous voulons trouver toutes les structures intéressantes entre  $\sigma_{min}$  et  $\sigma_{max}$ . Pour cela, nous devons trouver la meilleure représentation multi-échelles discrète. Principalement deux types de solutions sont proposées dans la littérature. La première est d'effectuer un échantillonnage linéaire :

$$\sigma^{k+1} = \sigma^k + \Delta\sigma \quad (8.12)$$

où  $\Delta\sigma = \sigma_{opt}(w = 1)$ . C'est la méthode employée par NASSER [Nas95]. Le cas idéal, pour ne pas privilégier d'échelle est que les événements aient lieu de manière linéaire avec le paramètre d'échelle. Or, LINDEBERG [Lin93] a montré que les événements (détections) arrivent de manière logarithmique avec l'échelle. La seconde solution consiste donc à échantillonner l'échelle de manière logarithmique :

$$\tau = \log\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \quad (8.13)$$

$\tau$  est appelée *échelle effective* et  $\epsilon$  est une échelle cachée correspondant à la taille d'un pixel dans l'image originale. On remarquera que souvent  $\epsilon$  est pris égal à un. Cette solution est notamment envisagée par KRISSIAN [Kri00], FIDRICH et al. [FT94] et FLORACK [Flo93].

### 8.6.5 Fusion des informations de l'espace-échelles

L'objectif de cette étape est de générer une seule image des lignes centrales à partir des images obtenues aux différentes échelles étudiées. D'une manière générale, il y a principalement deux stratégies pour fusionner  $p$  images<sup>4</sup>. La première consiste à effectuer des mesures sur chacune des images puis à utiliser un opérateur de fusion adéquat pour l'étape de décision finale (cf. figure 8.4). La seconde stratégie consiste à effectuer une décision sur chacune des  $p$  images puis à fusionner les  $p$  décisions et finalement arbitrer les conflits<sup>5</sup> éventuels entre les différentes décisions pour obtenir une décision finale (cf. figure 8.5). Notons que pour pouvoir comparer équitablement les informations obtenues aux différentes échelles, ces informations doivent être du même ordre de grandeur. C'est pourquoi, une normalisation est généralement effectuée avant l'étape de fusion. Pour compenser la décroissance des opérateurs différentiels par rapport au paramètre d'échelle, LINDEBERG [Lin96] propose l'utilisation des opérateurs de dérivées normalisées suivants :

$$\partial_{x,\gamma norm}^n = (\sigma^\gamma)^n \partial_x^n \quad (8.14)$$

avec  $n$  l'ordre de différentiation. Ici,  $\gamma$  sera choisi en fonction du modèle analytique et des structures à détecter. Ainsi, KOLLER et al. [KGS95], LORENTZ et al. [LCB<sup>+</sup>97], SATO et al. [SAH<sup>+</sup>98] utilisent cette normalisation. Voici quelques méthodes de fusion proposées dans la littérature.

---

<sup>4</sup>Bien que le domaine de la fusion d'images concerne plus particulièrement l'utilisation conjointe d'images de sources hétérogènes, nous présentons l'étape de fusion sous cet angle car les méthodes employées pour la fusion d'images et la détection multi-échelles sont malgré tout semblables. Ici, les échelles et les réponses correspondent respectivement aux sources et aux mesures.

<sup>5</sup>Le conflit est généralement arbitré en mémorisant les réponses pour chacune des échelles.

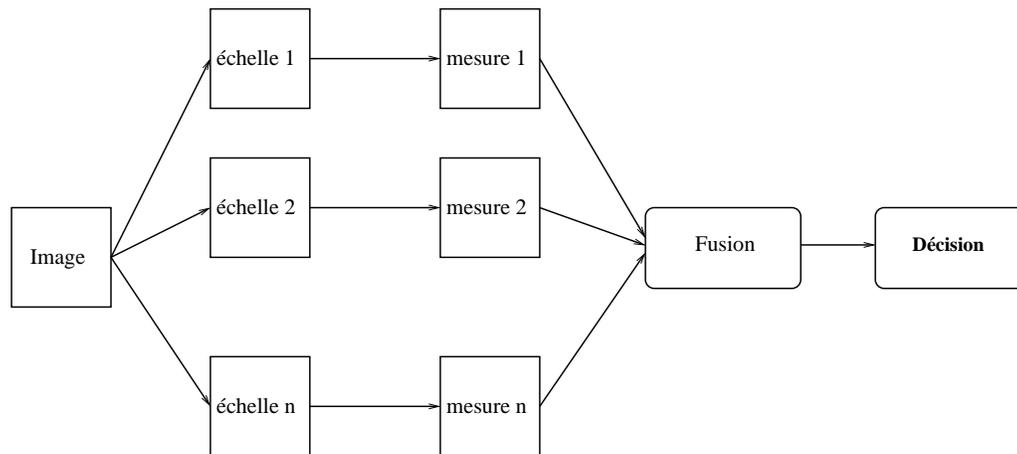


FIG. 8.4 – Processus général de fusion de données : mesure-fusion-décision.

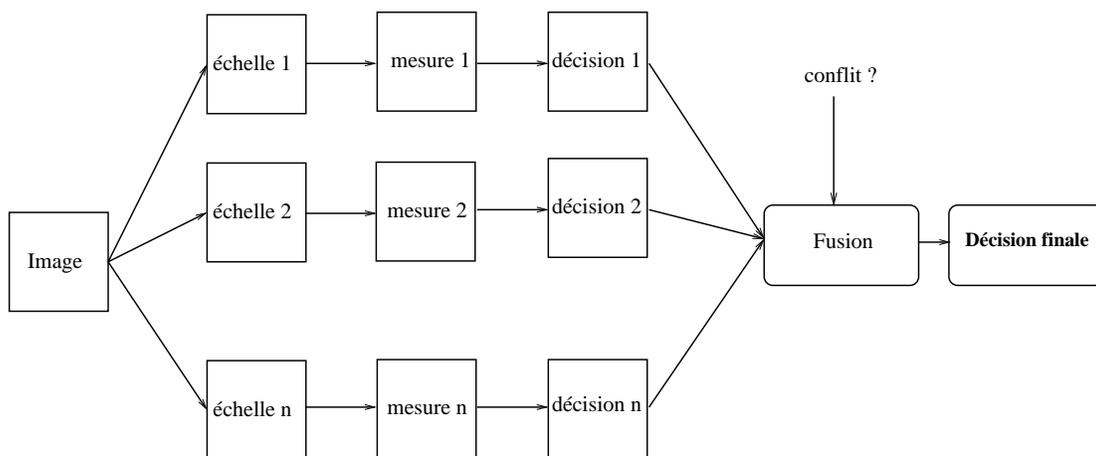


FIG. 8.5 – Processus général de fusion de données : mesure-décision-fusion-décision.

BLONDEL et *al.* [BVD<sup>+</sup>02] proposent la démarche suivante :

- choix empirique de quelques échelles d'étude  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$  ;
- calcul des réponses normalisées  $R_{\sigma_i}^n(I)$  de l'image  $I$  à une vallée pour toutes ces échelles ;
- utilisation de l'opérateur de fusion disjonctif *max* pour fusionner les images de réponse à une vallée en une image  $R_{\sigma_{max}} = \max_{\sigma} R_{\sigma}^n(I)$ .
- seuillage par hystérésis de  $R_{\sigma_{max}}$  ;
- détection des maxima locaux de l'image seuillée de  $R_{\sigma_{max}}$  dans la direction de la courbure maximale (obtenus par diagonalisation de la matrice hessienne) à l'échelle  $\sigma_{max}$ .

NASSER [Nas95] propose la démarche suivante :

- détection des *extrema* locaux de la courbure maximale pour toutes les échelles optimales (*i.e.* pour chaque échelle correspondant à une taille de structure recherchée dans l'image) ;
- élimination des fausses réponses du détecteur en minimisant la norme du gradient dans la direction de la courbure maximale ;
- si les vallées/crêtes de l'image sont symétriques une simple addition des réponses suffit, l'auteur supposant dans ce cas que la localisation des lignes centrales est stable au cours de l'espace-échelles ;
- si les vallées/crêtes de l'image ne sont pas symétriques, il faut considérer un voisinage de distance 1 autour des réponses pour pouvoir annihiler le décalage dû à la non symétrie.

FIDRICH [FT94] et LINDEBERG [Lin94a] représentent l'espace-échelles par un empilement d'images 2D ce qui donne un espace de données de dimension  $3 = 2 + 1$ . L'idée est d'extraire les iso-surfaces de l'espace-échelles et les iso-surfaces des passages par zéro d'un opérateur différentiel sur l'espace-échelles. L'intersection de ces deux iso-surfaces, obtenue par l'algorithme des « marching lines » [TG92], [TB93], permet d'extraire les lignes centrales multi-échelles (cf. figure 8.6).

LINDEBERG [Lin94a] attribue de plus, à chaque détection multi-échelles une mesure d'importance, dépendant de la réponse multi-échelles, de manière à classer les détections par une mesure décroissante. Cela permet de ne garder que les détections les plus « fortes ». KRISIAN [Kri00] propose une version simplifiée de cette méthode en définissant un maximum local dans l'espace-échelles comme un point  $M(x, t_k)$  vérifiant :

$$R^n(x, t_k) \geq R^n(x \pm v_1, t_k) \text{ et } R^n(x, t_k) \geq R^n(x, t_k \pm 1)$$

avec  $R^n$ ,  $v_1$  et  $t_k$  respectivement la réponse normalisée, la direction de la courbure maximale, et le paramètre d'échelle discrète.

MONGA et *al.* [MLD94] proposent de construire un graphe d'adjacence multi-échelles à partir de  $p$  échelles  $\sigma_{i \in \{1, \dots, p\}}$ . Les nœuds du graphe sont les points  $P$  tels qu'il existe au moins une échelle  $\sigma_k$  telle que  $Z_{\sigma_k}(P) = 1$ , où  $Z_{\sigma_k}(P)$  est un détecteur de contour ou de crête/vallée à l'échelle  $\sigma_k$ . Chaque nœud contient toutes les échelles  $\sigma_k$  vérifiant  $Z_{\sigma_k}(P) = 1$  ainsi que toutes les caractéristiques différentielles, réponse à une vallée/crête, direction des courbures, gradient, etc. Un arc est construit entre deux nœuds si les nœuds sont adjacents en 26-connexités dans l'espace-échelles. Le graphe est ensuite simplifié en ne gardant que les nœuds ayant été détectés au moins  $N$  fois. Cette simplification est en fait une hypothèse de stabilité du détecteur au travers des échelles. Cette hypothèse empirique a été notamment préconisée

par BISHOFF et COELLI [BC86] et WITKIN et *al.* [WA93]. De même, les composantes connexes du graphe ayant moins de  $P$  nœuds sont éliminées.

## Discussions et conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté différentes approches pour la détection des lignes centrales et/ou des contours des vaisseaux sanguins. Le choix d'une méthode dépendra comme toujours de l'objectif envisagé. Afin de comparer ces différentes approches de détection, nous évaluons dans le tableau 8.2, la satisfaction de chacune des méthodes aux critères suivants :

- niveau d'interaction de l'utilisateur dans le processus de détection ;
- détections des deux entités structurelles : les contours et les lignes centrales ;
- possibilité de traiter ou non les bifurcations et intersections ;
- détection globale (arbre vasculaire complet), ou locale (segment de vaisseau).

Nous aurions pu imaginer d'autres critères d'évaluation tels que la précision et qualité des résultats et le temps de calcul. Néanmoins, compte-tenu du fait que d'une part, les différentes méthodes proposées dans la littérature ont été appliquées à différents systèmes angiographiques, à différentes époques et que, d'autre part, la précision des résultats n'est pas toujours fournie par les auteurs, nous ne pouvons évaluer correctement ces critères. Dans le cadre de notre application, le niveau d'interaction de l'utilisateur devra être réduit au maximum car les médecins doivent pouvoir évaluer le plus rapidement possible la gravité des lésions.

Ainsi, nous constatons qu'exceptée la méthode proposée par TOLIAS qui utilise une spécificité des angiographies rétinienne pour initialiser son algorithme, la plupart des méthodes de suivi nécessitent l'intervention de l'utilisateur. Il en est de même pour les méthodes fondées sur les modèles déformables où plusieurs points doivent être indiqués au préalable. Dans bien des applications, les structures allongées présentes dans les images sont de différentes tailles et intensités. Les deux principales méthodes permettant de prendre en compte de manière automatique, la taille variable des structures sont l'analyse multi-résolutions et l'analyse multi-échelles linéaire. Outre leur aptitude à traiter les structures de différentes tailles, ces méthodes ont un effet régularisateur sur le calcul des dérivées de l'image. Une fois les lignes centrales détectées, l'information sur la taille des vaisseaux est implicitement connue par le biais de l'échelle optimale. Bien que délicate pour ces deux approches, l'étape de fusion semble plus aisée pour l'analyse multi-échelles que pour l'analyse multi-résolutions. D'une manière générale, nous pensons qu'il est préférable de détecter la (les) ligne(s) centrale(s) avant de détecter les contours car leur détection est beaucoup plus sensible à la présence de sténoses. Dans le chapitre suivant, nous proposons une méthode de détection multi-échelles des lignes centrales des artères coronaires.

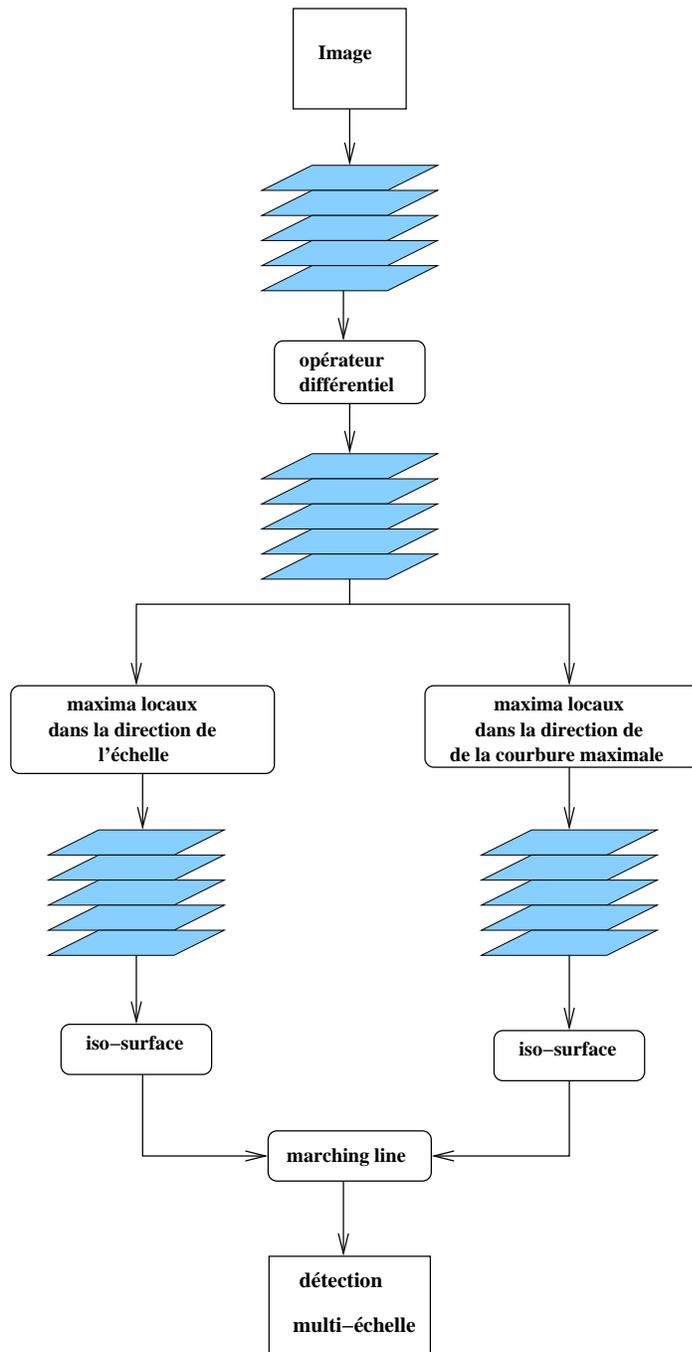


FIG. 8.6 – Processus de fusion par intersection d'iso-surfaces.

Auteur(s)	Interaction	Lignes centrales/Contours	bifurcations	Type de détection
TOUMOULIN [TCC90]	aucune	oui/oui	oui	globale
EIHO [EQ97]	aucune	oui/oui	oui	globale
LIU [HSL <sup>+</sup> 97]	point de départ	oui/oui	oui	globale
LECORNU [Lec95]	point initial zone finale	oui/oui	oui	globale
TOLIAS [TP98]	aucune	oui/oui	oui	globale
HARIS [HEM <sup>+</sup> 99]	point initial	oui/oui	oui	globale
PELLOT [PHSH92]	point initial point final	oui/oui	oui	locale
HOFFMAN [HSL <sup>+</sup> 97]	points dans lumière	oui/non	oui	globale
JANSEN [JKdK <sup>+</sup> 02]	point initial zone finale	oui/non	oui	locale
HILDEBRAND [HG95]	point initial point final bifurcations	oui/oui	oui	globale
FIGUEIREDO [FL95]	coupe initiale coupe finale	oui/oui	non	locale
KLEIM [KLA97]	point initial	oui/oui	oui	globale
CHEN [CC00]	points dans lumière	oui/oui	oui	globale
BASSEMERLE [BM99]	point final bifurcations	oui/non	oui	globale
NASSER [Nas95]	aucune	oui/non	oui	globale
LORENTZ [LCB <sup>+</sup> 97]	aucune	oui/oui	possible	globale
KOLLER [KGS95]	aucune	oui/non	possible	globale
BLONDEL [BVD <sup>+</sup> 02]	aucune	oui/non	oui	globale

TAB. 8.2 – Comparaison des algorithmes de détection des lignes centrales et des contours des vaisseaux sanguins.



## Chapitre 9

# Détection multi-échelles des lignes centrales des artères coronaires

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle méthode de détection des lignes centrales des vaisseaux sanguins. Pour cela, nous supposons que la détection se fait à partir d'une image fixe que le médecin a choisie de manière à ce que les vaisseaux sanguins aient été remplis au mieux par le produit de contraste. Compte tenu de la nature des images angiographiques, alliant complexité et relative mauvaise qualité, il paraît illusoire de vouloir fournir au médecin une méthode complètement automatique de détection des artères et fonctionnant donc dans tous les cas de figure. Néanmoins, nous portons une attention toute particulière à limiter et à retarder au maximum l'intervention du médecin dans cette étape. L'idée ici, est de proposer au praticien une détection et de lui laisser la possibilité de la corriger *a-posteriori*, si besoin est. Les méthodes multi-échelles semblent les plus adaptées à nos *desiderata* puisqu'elles permettent la gestion de structures de différentes tailles, une détection globale et automatique des structures, c'est-à-dire qu'aucune initialisation manuelle de la détection n'est nécessaire. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les méthodes fondées sur l'analyse multi-échelles nécessitent l'utilisation d'un détecteur caractérisant les structures à détecter. Ainsi les deux premières sections de ce chapitre sont consacrées à l'élaboration d'un nouveau détecteur spécialement conçu pour l'extraction de lignes de fond ou de lignes de crête. La troisième section présente la stratégie que nous envisageons pour la détection multi-échelles des lignes centrales des vaisseaux. Dans la quatrième section, nous analysons les résultats obtenus sur diverses coronographies. Finalement, nous envisageons l'adaptation de notre algorithme à d'autres types d'application.

### 9.1 Réponse à une vallée/crête

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent, du fait de la forte probabilité de présence de sténoses sur l'arbre artériel, nous préconisons plutôt l'utilisation d'une réponse aux points de vallée/crête de type « central medialness ». C'est cette méthode que nous allons présenter dans cette section.

### 9.1.1 Définition étendue de vallée et crête

Soient  $k_1$  et  $k_2$  ( $k_1 > k_2$ ) les courbures principales d'un point de la surface image. Dans le chapitre précédent (cf. section 8.1.1), nous avons vu que si d'une part  $k_1$  était nulle et  $k_2$  strictement négative, alors la surface avait localement l'allure d'une crête, et que si d'autre part  $k_2$  était nulle et  $k_1$  strictement positive, alors la surface avait localement l'allure d'une vallée. Si l'on construit un repère cartésien en portant respectivement les courbures principales maximale  $k_1$  et minimale  $k_2$  en abscisse et en ordonnée, alors les points vérifiant les conditions ci-dessus sont situés sur deux demi-axes. Néanmoins, du fait de la nature bruitée et des variations importantes de contraste des images, cette définition mathématique est un peu trop restrictive pour pouvoir caractériser de manière satisfaisante les points que nous considérons intuitivement comme des points de vallée ou de crête. Par conséquent, nous décidons d'étendre le domaine de recherche de ces points dans le plan  $(k_1, k_2)$  aux points selles, pics et trous situés à proximité des deux demi-axes définis précédemment. Nous définissons d'une part, le domaine de recherche des points de vallée  $\mathbf{V}$  par l'ensemble des points vérifiant :

$$\mathbf{V} : \begin{cases} k_1 & \neq k_2 \\ k_1 & \neq -k_2 \\ \max(|k_1|, |k_2|) & = k_1 \end{cases} \quad (9.1)$$

et d'autre part, le domaine de recherche des points de crête  $\mathbf{C}$  par l'ensemble des points vérifiant :

$$\mathbf{C} : \begin{cases} k_1 & \neq k_2 \\ k_1 & \neq -k_2 \\ \max(|k_1|, |k_2|) & = -k_2 \end{cases} \quad (9.2)$$

Ces domaines sont représentés sur la figure 9.1. Il est à noter que les points ombilics et minimaux sont exclus du domaine de recherche. Par la suite, afin de les distinguer des autres points de  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{C}$ , en parlant des points appartenant aux deux demi-axes nous emploierons les termes de *vallée pure* et *crête pure*.

### 9.1.2 Détermination d'une réponse aux plis

Du fait de la dualité existant entre les vallées et les crêtes, nous traitons plus particulièrement le cas d'une réponse à une vallée pure. Parmi les points de  $\mathbf{V}$ , nous devons extraire les points de ligne de fond. En étudiant localement la géométrie de la surface, c'est-à-dire en étudiant les courbures principales de la surface, nous pouvons attribuer à chaque point un degré d'appartenance à une ligne de fond, ou réponse. Ce degré d'appartenance est d'autant plus élevé que la surface ressemble localement à une vallée pure. Soit  $\mathbf{D}$  un application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^+$  caractérisant explicitement le degré d'appartenance à une vallée pure. Il s'agit donc de trouver une fonction  $\mathbf{D}$  qui ait une valeur plus élevée sur une ligne de fond qu'autour de celle-ci et, qui plus est, une valeur constante le long de cette ligne. Le tableau 9.1 contient quelques fonctions qui ont déjà été proposées dans la littérature. En étudiant de plus près ces fonctions nous constatons que celles-ci ne satisfont pas aux conditions aspirées. Elles peuvent tout à fait, en effet, avoir une valeur élevée sans pour autant que la surface ressemble localement à une vallée. Ainsi, la fonction  $\mathbf{D}_1$  présente des valeurs élevées aussi bien pour les points ombilics et minimaux que pour les points de vallée. De plus, les valeurs

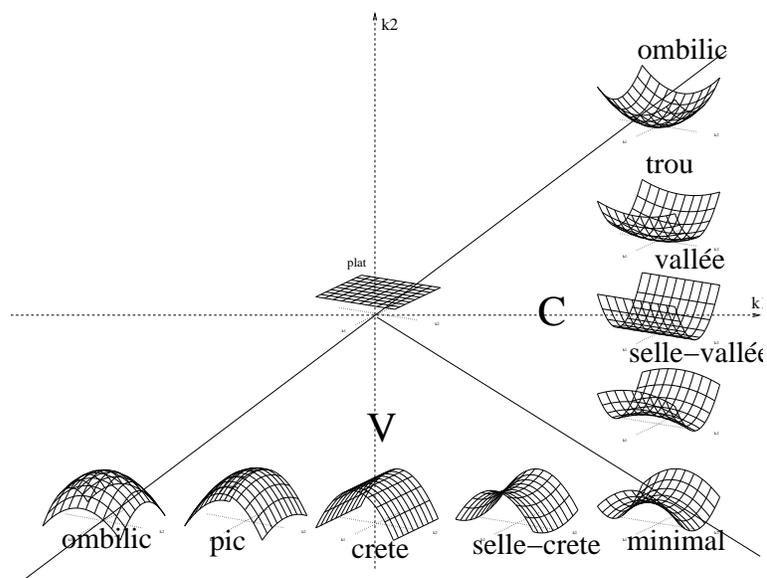


FIG. 9.1 – Domaines de recherche des points de vallée, **V** et des points de crête, **C**.

Auteur	Mesure
LINDBERG [Lin96]	$D_1 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$
LINDBERG [Lin96]	$D_2 = (k_1 - k_2)^2$
NASSER [Nas95], LORENTZ [LCB <sup>+</sup> 97]	$D_3 = \max( k_1 ,  k_2 )$

TAB. 9.1 – Quelques réponses à un pli proposées dans la littérature.

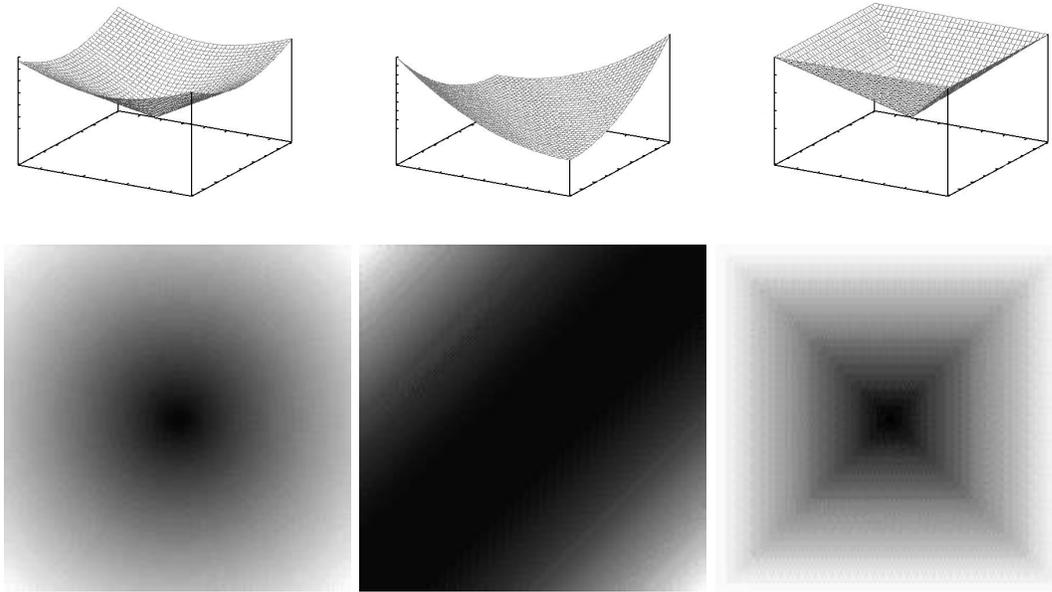


FIG. 9.2 – En haut, nous présentons l’allure respective des fonctions  $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{D}_2$  et  $\mathbf{D}_3$ , en bas, leur projection sur le plan  $(k_1, k_2)$ .

de cette fonction ne sont pas forcément plus élevées sur les points de vallée pure qu’ autour de ceux-ci. De même, la fonction  $\mathbf{D}_2$  présente ses valeurs les plus élevées pour les points minimaux. Quant à la fonction  $\mathbf{D}_3$ , elle présente des défauts similaires à ceux de la fonction  $\mathbf{D}_1$ . Sur la figure 9.2 nous donnons l’allure des fonctions  $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{D}_2$  et  $\mathbf{D}_3$  et ainsi que leurs projections dans le plan  $(k_1, k_2)$ . Les niveaux de gris clairs correspondent à des valeurs élevées de la fonction. Intuitivement, nous voudrions que la réponse à un pli :

1. soit faible lorsque les courbures principales sont faibles de façon à limiter l’influence du bruit et à ne pas répondre aux surfaces trop planes ;
2. soit élevée lorsque l’une des deux courbures est très supérieure à l’autre ;
3. soit faible au voisinage des points ombilics et minimaux.

Comme les axes correspondant aux points minimaux et ombilics sont symétriques par rapport à l’axe  $k_1$  la fonction devrait l’être aussi. Nous suggérons que la réponse  $\mathbf{D}$  à un pli vérifie les propriétés suivantes pour les points de  $\mathbf{V}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}(k_1, k_2) = \mathbf{D}(k_1, -k_2) ; \\ \lim_{k_1 \rightarrow 0, k_2 \rightarrow 0} \mathbf{D}(k_1, k_2) = 0 ; \\ \mathbf{D}(k_1, k_2) \text{ croissante suivant } k_1 ; \\ \mathbf{D}(k_1, k_2) \text{ décroissante suivant } k_2 \text{ (de part et d'autre de l'axe } k_1). \end{array} \right. \quad (9.3)$$

Voici quelques fonctions vérifiant ces propriétés :

$$\mathbf{D}_4(k_1, k_2) = \min(|k_1 - k_2|, |k_1 + k_2|) \quad (9.4)$$

$$\mathbf{D}_5(k_1, k_2) = |k_1 - k_2| |k_1 + k_2| \quad (9.5)$$

$$\mathbf{D}_6(k_1, k_2) = (|k_1| - |k_2|)^2 \quad (9.6)$$

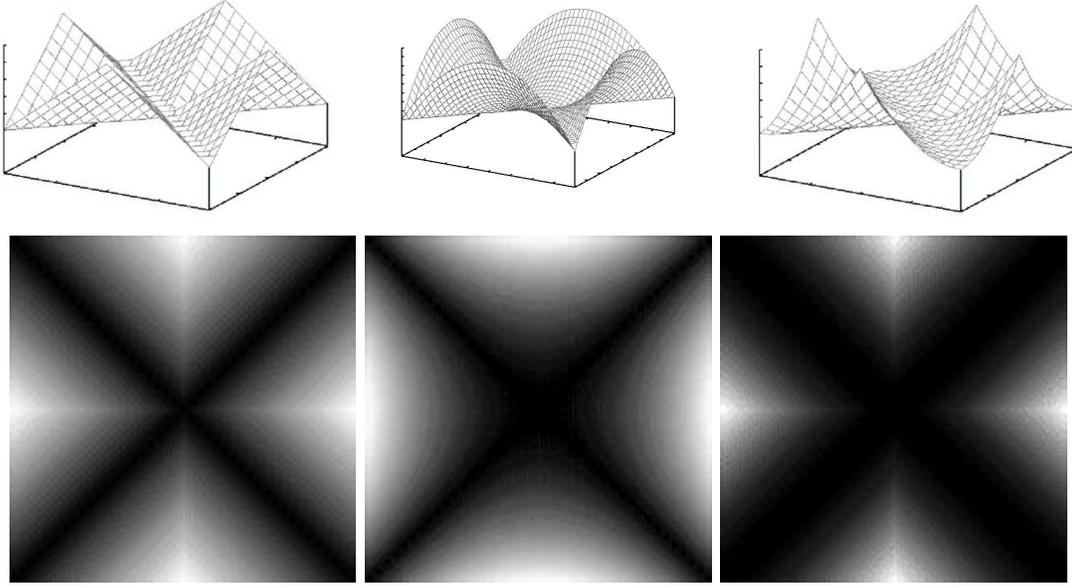


FIG. 9.3 – En haut, nous donnons l’allure respective des fonctions  $\mathbf{D}_4$ ,  $\mathbf{D}_5$  et  $\mathbf{D}_6$ , en bas, leur projection sur le plan  $(k_1, k_2)$ .

Pour avoir une idée de la forme de ces fonctions nous donnons sur la figure 9.3 leurs allures ainsi que leurs projections dans le plan  $(k_1, k_2)$ . Les niveaux de gris clairs correspondent, là encore, à des valeurs élevées de la fonction. Il faut remarquer qu’avec de telles fonctions, la réponse  $\mathbf{D}$  ne dépend que de  $k_1$  et  $k_2$ , elle est donc invariante aux translations, rotations, zooms, et changements de coordonnées, si l’on choisit la métrique induite.

### Remarque 2

La valeur de la réponse devant être d’autant plus faible que le point est proche d’un point ombilic ou minimal, les quantités  $|k_1 - k_2|$  et  $|k_1 + k_2|$  doivent être mutuellement élevées. Les mesures  $\mathbf{D}_4$  et  $\mathbf{D}_5$  reviennent en fait à appliquer un opérateur conjonctif aux quantités  $|k_1 + k_2|$  et  $|k_1 - k_2|$ , une  $T$ -norme [Zad65]. Nous pouvons alors imaginer de substituer n’importe quelle autre  $T$ -norme aux  $T$ -normes min,  $\mathbf{D}_4$ , et produit,  $\mathbf{D}_5$ .

Pour nous, les points de ligne de fond et les points de ligne de crête seront donc définis de la façon suivante :

$$\text{point de ligne de fond : } \begin{cases} k_1 & \neq & k_2 \\ k_1 & \neq & -k_2 \\ \max(|k_1|, |k_2|) & = & k_1 \\ \nabla \mathbf{D} \cdot v_1 & = & 0 \end{cases} \quad (9.7)$$

$$\text{point de ligne de crête : } \begin{cases} k_1 & \neq & k_2 \\ k_1 & \neq & -k_2 \\ \max(|k_1|, |k_2|) & = & -k_2 \\ \nabla \mathbf{D} \cdot v_2 & = & 0 \end{cases} \quad (9.8)$$

où  $\mathbf{D}$  vérifie les propriétés de l'équation (9.3).

À titre d'exemple, nous utilisons la réponse  $\mathbf{D}_4$  pour caractériser les vallées et les crêtes sur l'image « zèbre » de la figure 9.4 (a). Nous avons lissé l'image par une gaussienne d'écart type  $\sigma = 4$  de manière à éliminer les détails inintéressants. Les courbures sont calculées par différences finies et les images 9.4 (b) et 9.4 (c) représentent respectivement les réponses aux vallées et aux crêtes pures. L'image 9.4 (d) représente la superposition des réponses aux vallées pures, en sombre, et aux crêtes pures, en clair. Finalement, l'image 9.4 (e) représente avec les mêmes conventions, les lignes de fond et les lignes de crête superposées à l'image zèbre. Les lignes de fond, respectivement les lignes de crête, correspondent ici aux maxima locaux de la réponse dans la direction de la courbure maximale, respectivement minimale. Dans la section suivante, nous analyserons plus en détails des méthodes d'extraction des lignes de fond et lignes de crête. On peut observer que la réponse a effectivement une valeur plus élevée sur les lignes centrales qu'autour de celles-ci, et que par ailleurs, les lignes centrales sont bien localisées et relativement continues. Sur la figure 9.5 nous extrayons de la même manière les vallées et lignes de fond d'une angiographie lissée au préalable par une gaussienne d'écart type  $\sigma = 4$ . La tâche est plus ardue car les coronographies contiennent de nombreuses entités de caractéristiques surfaciques semblables aux artères dont les côtes, le diaphragme, le cathéter, des taches sombres... Le détecteur répond donc aussi à toutes ces entités, mais néanmoins on peut observer ici encore la bonne qualité des résultats.

## 9.2 Évaluation de diverses méthodes d'extraction des lignes centrales

D'une manière générale (cf. chapitre 8), détecter un pli signifie rechercher l'*extremum* d'une réponse caractérisant le pli dans une direction donnée  $v$ . Selon la méthode utilisée, la réponse dépend de l'étude d'opérateurs différentiels d'ordre 0, cf. équation (8.2), ou du second ordre, cf. équations (8.4) et (8.6), appliqués à la fonction image. Il existe plusieurs catégories de méthodes pour localiser les points de la surface vérifiant  $\nabla \mathbf{D} \cdot v = 0$ . La première et la plus correcte mathématiquement consiste à calculer  $\nabla \mathbf{D} \cdot v$ , puis à détecter ses passages par zéro. Néanmoins, une telle approche nécessite le calcul de dérivées de l'image à l'ordre trois, entraînant par conséquent des calculs supplémentaires ainsi qu'une sensibilité accrue au bruit. Par ailleurs, NASSER [Nas95] propose de rechercher les maxima locaux de la réponse  $\mathbf{D}$  dans la direction  $v$  en utilisant la même méthode que celle proposée par CANNY [Can86] pour l'extraction des contours d'une image. Bien que moins bien fondée mathématiquement, cette méthode semble donner des résultats d'une qualité équivalente à la première méthode [Nas95]. Une dernière solution est d'envisager l'utilisation d'un algorithme de ligne de partage des eaux [BM93] pour extraire les lignes centrales de la réponse à une vallée ou à une crête.

Dans cette section, nous allons donc évaluer diverses méthodes automatiques de détection des lignes centrales.

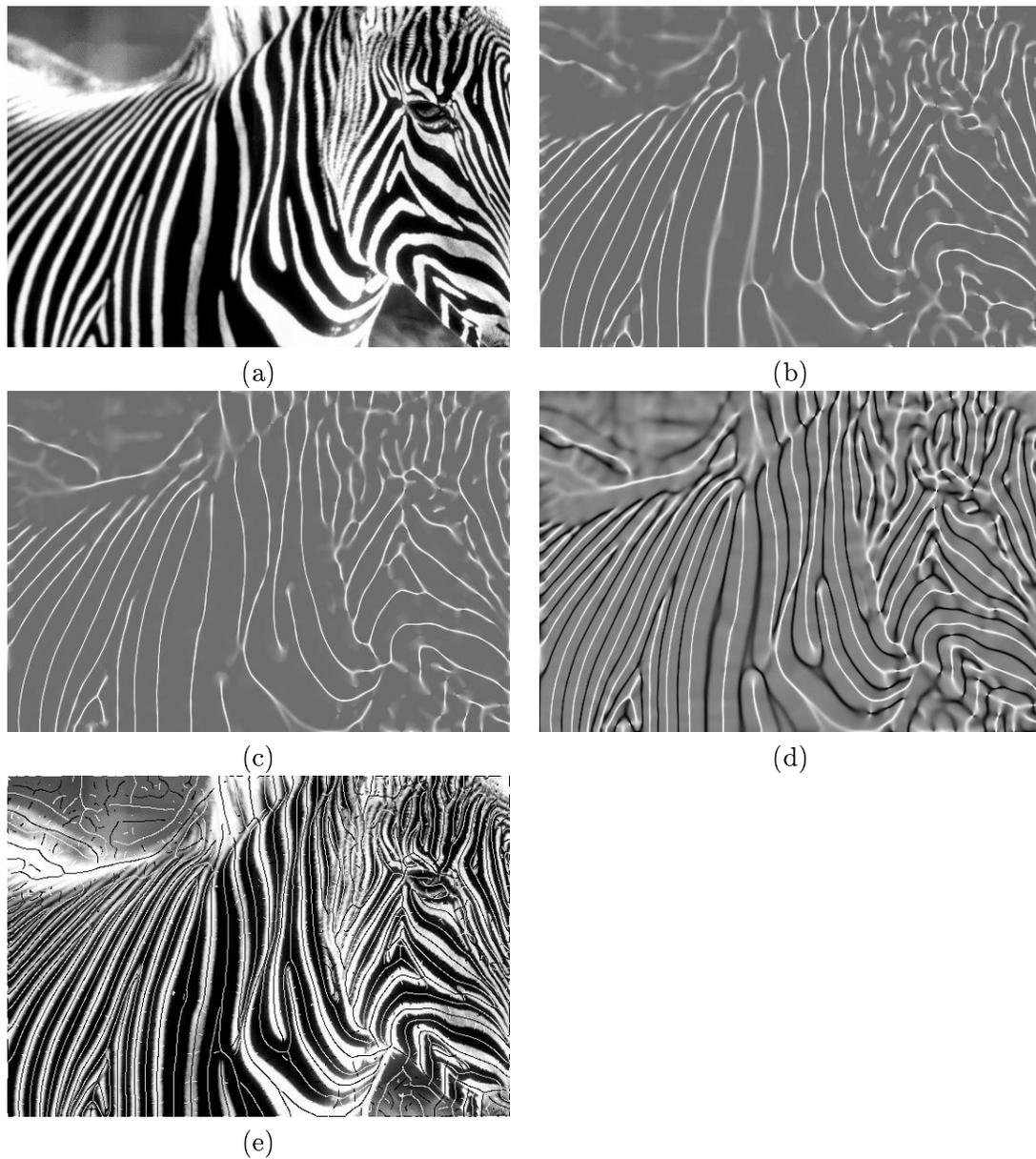


FIG. 9.4 – (a) : image « zèbre », (b) : réponse aux vallées pures, (c) : réponses aux crêtes pures, (d) : superposition des réponses aux crêtes pures (en clair) et aux vallées pures (en sombre), (e) : superposition des lignes de fond (en blanc) et des lignes de crête (en noir) avec l'image zèbre.

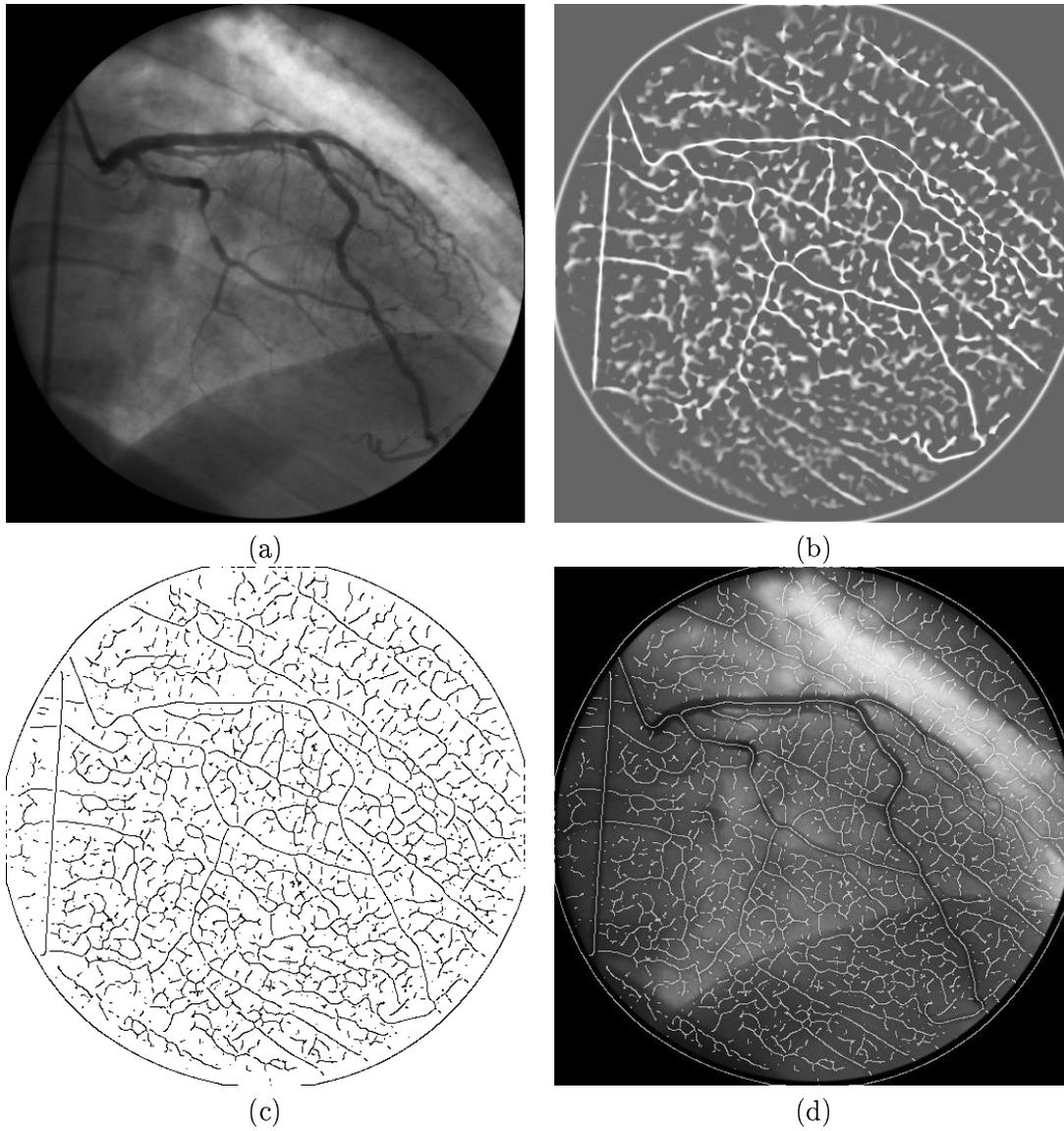


FIG. 9.5 – (a) : angiographie, (b) : réponse aux vallées pures, (c) : lignes de fond, (d) : superposition des lignes de fond et de l'angiographie.

Les méthodes employées sont les suivantes :

- **méthode a** : détection des maxima locaux de  $\mathbf{D}_4(k_{wein1}, k_{wein2})$  dans la direction de  $v_{wein1}$  ;
- **méthode b** : détection des maxima locaux de  $\mathbf{D}_4(k_{hess1}, k_{hess2})$  dans la direction de  $v_{hess1}$  ;
- **méthode c** : détection des maxima locaux de  $\mathbf{D}_4(k_{wein1}, k_{wein2})$  dans la direction de  $v_{hess1}$  ;
- **méthode d** : détection des passages par zéro de  $\nabla \mathbf{D}_4(k_{wein1}, k_{wein2}) \cdot v_{wein1}$  ;
- **méthode e** : détection des passages par zéro de  $\nabla \mathbf{D}_4(k_{wein1}, k_{wein2}) \cdot v_{hess1}$  ;
- **méthode f** : détection des passages par zéro de  $\nabla \mathbf{D}_4(k_{hess1}, k_{hess2}) \cdot v_{hess1}$  ;
- **méthode g** : détection des minima locaux de I dans la direction de  $v_{wein1}$  ;
- **méthode h** : détection des minima locaux de I dans la direction de  $v_{hess1}$  ;
- **méthode i** : ligne de partage des eaux de  $\mathbf{D}_4(k_{wein1}, k_{wein2})$ .

où  $k_{wein}$  et  $v_{wein}$  représentent respectivement les valeurs et vecteurs propres de la matrice de WEINGARTEN, et de même,  $k_{hess}$  et  $v_{hess}$  représentent respectivement les valeurs et vecteurs propres de la matrice hessienne.

Les méthodes c et e constituent de nouvelles méthodes que nous proposons. Il peut paraître un peu étrange d'associer les valeurs propres de la matrice de WEINGARTEN et les vecteurs propres de la matrice hessienne. Cependant, les couples de directions de  $(v_{hess1}, v_{hess2})$  et  $(v_{wein1}, v_{wein2})$  sont théoriquement égaux lorsque le gradient de l'image s'annule, c'est-à-dire sur un *extremum* local de la surface image, ce qui justifie ici la proposition de ces nouvelles méthodes.

Nous appliquons les méthodes ci-dessus à l'angiographie de la figure 9.5 (a) lissée par filtre gaussien d'écart type 4. Pour les exemples présentés ici, nous avons choisi d'utiliser la fonction de réponse  $\mathbf{D}_4$ .

Pour évaluer ces résultats nous reprenons les critères proposés par LOPEZ et *al.* [LLSV99] :

1. **Pas de sur-détection** : les plis non pertinents ne doivent pas être détectés ;
2. **Pas de sous-détection** : les vallées/crêtes abruptes doivent toujours être détectées ;
3. **Continuité** : des lignes centrales continues doivent être obtenues à partir d'objet continus ;
4. **Bon contraste** : une réponse de vallée/crête devrait avoir une valeur plus élevée sur une ligne centrale qu'autour de celle-ci et elle doit de plus maintenir une valeur constante le long de la ligne ;
5. **Stabilité structurelle** : de petites perturbations de l'image ne doivent pas altérer outre mesure la forme et la localisation des lignes centrales ;
6. **Bonne localisation** : les lignes centrales doivent être localisées au plus proche du squelette d'objets allongés.

Ces critères sont malheureusement très difficiles à quantifier et c'est pourquoi, nous nous contenterons ici de comparaisons d'ordre visuel. De manière à bien évaluer le critère de bonne localisation, nous présentons, pour chacune des méthodes, la superposition de l'image originale avec l'extraction des lignes centrales. Aucun seuillage n'est effectué afin de rendre

Critère/Méthode	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Pas de sur-détection	-	-	-	--	--	--	+	+	-
Pas de sous-détection	+	+	+	+	+	+	-	-	+
Continuité	+	+	++	-	+	+	-	-	+++

TAB. 9.2 – Tableau comparatif des méthodes de détections.

compte correctement des problèmes de sur-détection et sous-détection. Comme nous utilisons ici la même fonction de réponse  $\mathbf{D}_4$  pour toutes les méthodes nous supposons que le critère de bon contraste est satisfait quelle que soit la méthode. Nous n'évaluons pas le critère de stabilité structurelle puisque nous supposons que le lissage a éliminé les petites perturbations. Sur les figures 9.6, 9.7 et 9.8 nous présentons les résultats des diverses méthodes d'extraction des lignes centrales appliquées à l'angiographie de la figure 9.5.

Le premier commentaire que l'on puisse faire, est que, dans l'ensemble, les lignes centrales sont bien localisées et ce, quelle que soit l'approche. Les principales différences qualitatives entre les méthodes se font sur les critères de sur-détection, de sous-détection et de continuité. Dans le tableau 9.2, nous comparons les différentes méthodes suivant les trois critères précédents, un signe + correspondant à la validation d'un critère, un signe - correspondant à la non validation du critère. Les méthodes qui engendrent le plus de sur-détections sont celles de passages par zéro. L'ordre élevé de différentiation nécessaire à celles-ci, engendre une forte sensibilité au bruit. D'une façon générale les méthodes de détection locale ne fournissent pas des lignes centrales continues. Néanmoins, la méthode c donne des résultats très corrects de ce point de vue. L'algorithme de ligne de partage des eaux bien que fournissant les lignes centrales parfaitement continues a tendance à rejoindre des segments artériels qui n'ont pas lieu de l'être. C'est pourquoi son utilisation n'est pas envisageable dans ce cadre-là. En revanche, il peut se révéler très efficace pour l'étude d'une partie de segment artériel ([HEM<sup>+</sup>99], [EQ97]). Par la suite, le critère de continuité étant, dans le cadre de notre application, le plus important à nos yeux, nous choisissons la méthode c pour extraire les lignes centrales d'une image de réponse  $\mathbf{D}$ . Utilisé au sein d'une analyse multi-échelles linéaire, ce détecteur nous permettra de détecter les lignes centrales de vaisseaux sanguins de différents diamètres.

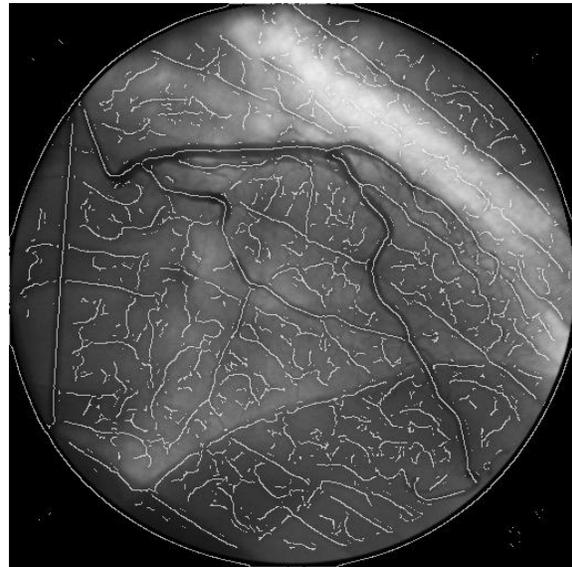
### 9.3 Un traitement multi-échelles de détection des lignes centrales des vaisseaux sanguins

Pour générer l'espace-échelles linéaire, nous prenons le parti d'utiliser l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t} &= \Delta I(x, y, t) \\ I(x, y, 0) &= I_0(x, y) \\ \frac{\partial I}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases} \quad (9.9)$$



méthode a

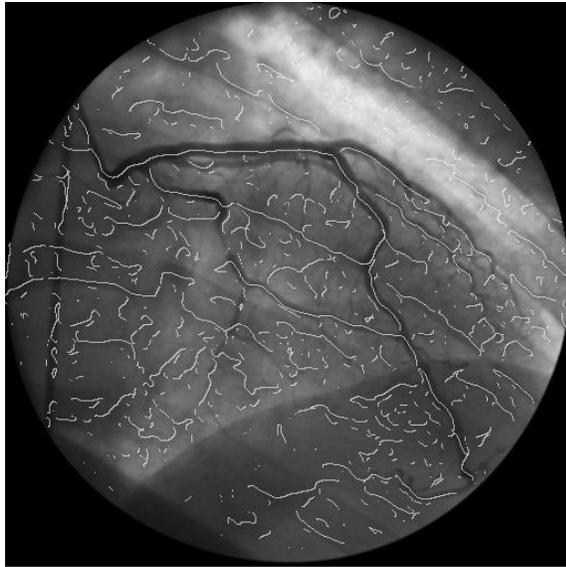


méthode b



méthode c

FIG. 9.6 – Méthodes par extraction des maxima locaux de la réponse.



méthode d

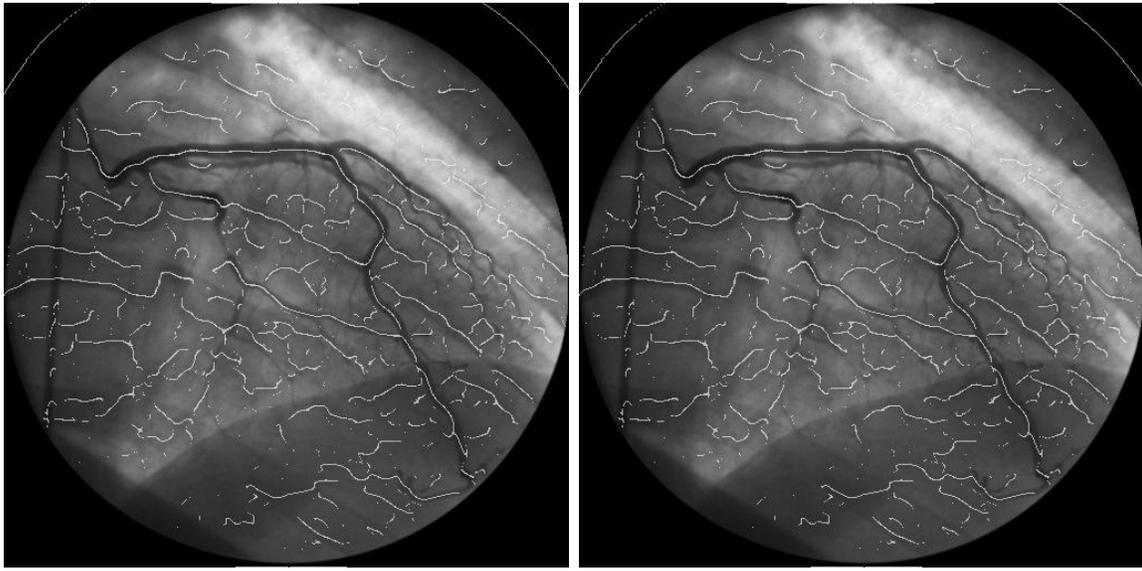


méthode e



méthode f

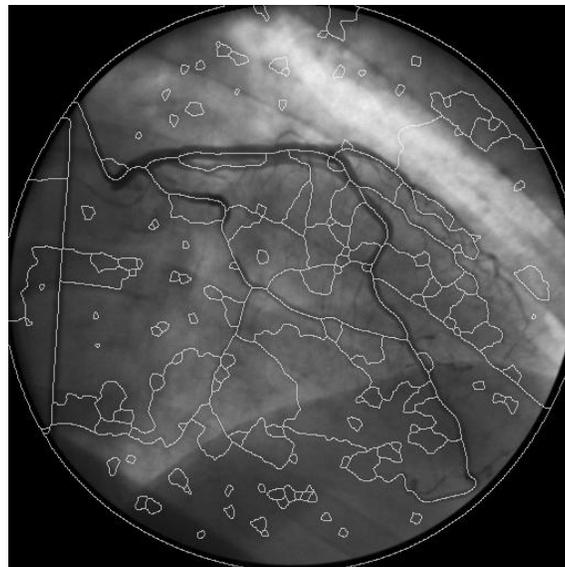
FIG. 9.7 – Méthodes de passage par zéro de la réponse.



méthode g

méthode h

FIG. 9.8 – Extraction des minima locaux de la réponse dans la direction de la courbure maximale.



méthode i

FIG. 9.9 – Méthode par ligne de partage des Eaux.

que nous résolvons à l'aide d'un schéma de résolution explicite :

$$\begin{cases} I_{i,j}^{n+1} &= I_{i,j}^n + \lambda \Delta_8 I_{i,j}^n \\ I_{i,j}^0 &= (I_0)_{i,j} \end{cases} \quad (9.10)$$

avec  $\lambda < 0.25$ , le paramètre du processus d'évolution et  $\Delta_8$  le masque de convolution :

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Cette approximation discrète de l'opérateur laplacien assure la causalité et l'isotropie [Alv96], [Lin94a].

### 9.3.1 Détermination des paramètres de l'espace-échelles

#### Échelle optimale

Dans sa thèse, NASSER [Nas95] a constaté empiriquement que le comportement du signal dans l'espace-échelles était similaire pour une crête de profil barre que pour les crêtes de profil toit (ou triangulaire), gaussien et parabolique. Par conséquent, nous modélisons le vaisseau par un cylindre généralisé de profil symétrique, de type barre, afin de calculer l'échelle optimale<sup>1</sup>. Pour des raisons de simplicité, nous présentons ici le calcul de l'échelle optimale pour un profil de type crête. Le raisonnement reste le même pour un profil de type vallée puisque seul le signe du profil change dans la modélisation. Soit  $H$  la fonction de HEAVISIDE :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un profil symétrique de largeur  $\omega > 0$  et de hauteur  $A > 0$  est alors défini par la fonction  $P$  :

$$P(x, \omega) = A \left[ H \left( x + \frac{\omega}{2} \right) - H \left( x - \frac{\omega}{2} \right) \right]$$

L'allure de la fonction ci-dessus est représentée sur la figure 9.10.

Soit  $\Phi$  la fonction de répartition :

$$\Phi(x, \sigma) = \int_{-\infty}^x g(t, \sigma) dt$$

où  $g(t, \sigma)$  est une gaussienne centrée d'écart type  $\sigma$  :

$$g(t, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left( \frac{-t^2}{2\sigma^2} \right)$$

---

<sup>1</sup>La démarche ici est sensiblement différente de celles de KOLLER et *al.* [KGSD95] et KRISSIAN [Kri00] puisque la fonction de réponse aux vallées n'est pas définie à partir des contours des artères.

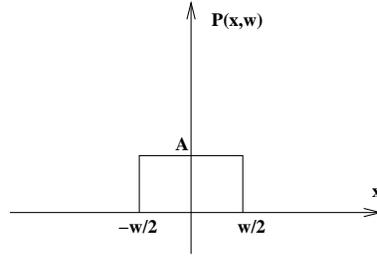


FIG. 9.10 – Profil de type barre.

Le profil s'exprime alors à l'échelle  $\sigma$  de la façon suivante :

$$P(x, \sigma, \omega) = P(x, \omega) * g(x, \sigma) = A \left[ \Phi \left( x + \frac{\omega}{2}, \sigma \right) - \Phi \left( x - \frac{\omega}{2}, \sigma \right) \right]$$

Si l'on se place dans la direction perpendiculaire au vaisseau, quelle que soit la réponse à un pli choisie, l'étude de la réponse à un pli se réduit à l'étude de l'expression de la courbure d'un signal monodimensionnel :

$$\mathbf{D}(x, \sigma, \omega) = - \frac{P_{xx}(x, \sigma)}{(1 + P_x^2(x, \sigma))^{\frac{3}{2}}} \quad (9.11)$$

Par ailleurs, les dérivées spatiales première et seconde du profil s'expriment comme suit :

$$P_x(x, \sigma, \omega) = A \left[ g \left( x + \frac{\omega}{2}, \sigma \right) - g \left( x - \frac{\omega}{2}, \sigma \right) \right] \quad (9.12)$$

$$P_{xx}(x, \sigma, \omega) = - \frac{A}{\sigma^2} \left[ \left( x + \frac{\omega}{2} \right) g \left( x + \frac{\omega}{2}, \sigma \right) - \left( x - \frac{\omega}{2} \right) g \left( x - \frac{\omega}{2}, \sigma \right) \right] \quad (9.13)$$

En substituant les équations (9.12) et (9.13) dans l'équation (9.11), nous en déduisons l'expression de  $\mathbf{D}(x, \sigma, \omega)$  en  $x = 0$  :

$$\mathbf{D}(0, \sigma, \omega) = - \frac{- \frac{A}{\sigma^2} \left[ \frac{\omega}{2} g \left( \frac{\omega}{2}, \sigma \right) + \frac{\omega}{2} g \left( -\frac{\omega}{2}, \sigma \right) \right]}{\left( 1 + A^2 \left[ g \left( \frac{\omega}{2}, \sigma \right) - g \left( -\frac{\omega}{2}, \sigma \right) \right]^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

La fonction  $g(x, \sigma)$  étant symétrique il vient :

$$\mathbf{D}(0, \sigma, \omega) = \frac{A}{\sigma^2} \left[ \omega g \left( \frac{\omega}{2}, \sigma \right) \right] \quad (9.14)$$

Afin de trouver l'échelle optimale pour un profil symétrique de largeur  $\omega > 0$ , il faut annuler la dérivée de la réponse à l'origine par rapport à la variable  $\sigma$ . Nous devons par conséquent trouver  $\sigma_{opt}$  qui satisfait la relation :

$$\frac{\partial \mathbf{D}(0, \sigma_{opt}, \omega)}{\partial \sigma} = 0$$

Or, on a

$$\frac{\partial \mathbf{D}(0, \sigma, \omega)}{\partial \sigma} = A\omega \left[ -2\sigma^{-3} g \left( \frac{\omega}{2}, \sigma \right) + \sigma^{-2} g_{\sigma} \left( \frac{\omega}{2}, \sigma \right) \right]$$

avec

$$g_\sigma \left( \frac{\omega}{2}, \sigma \right) = \frac{\partial g \left( \frac{\omega}{2}, \sigma \right)}{\partial \sigma},$$

soit

$$g_\sigma \left( \frac{\omega}{2}, \sigma \right) = \left( \frac{\left( \frac{\omega}{2} \right)^2 - \sigma^2}{\sigma^3} \right) g \left( \frac{\omega}{2}, \sigma \right).$$

Il vient donc

$$\frac{\partial \mathbf{D}(0, \sigma, \omega)}{\partial \sigma} = A\omega \left[ \frac{-2\sigma^2 + \left( \frac{\omega}{2} \right)^2 - \sigma^2}{\sigma^5} \right] g \left( \frac{\omega}{2}, \sigma \right)$$

Par ailleurs,  $\sigma > 0$ ,  $\omega > 0$  et  $g \left( \frac{\omega}{2}, \sigma \right) > 0$ , et l'équation :

$$\frac{\partial \mathbf{D}(0, \sigma, \omega)}{\partial \sigma} = 0$$

est équivalente à :

$$-2\sigma^2 + \left( \frac{\omega}{2} \right)^2 - \sigma^2 = 0$$

d'où nous tirons l'expression de  $\sigma_{opt}$  en fonction de  $\omega$  :

$$\sigma_{opt}(\omega) = \frac{\omega}{2\sqrt{3}} \quad (9.15)$$

Après calcul, nous obtenons l'expression de la dérivée seconde de  $\mathbf{D}(0, \sigma, \omega)$  par rapport à la variable  $\sigma$  :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{D}(0, \sigma, \omega)}{\partial \sigma^2} = A\omega \left[ 12\sigma^4 - \frac{9}{4}\omega^2\sigma^2 + \frac{\omega^4}{16} \right] g \left( \frac{\omega}{2}, \sigma \right)$$

Il est alors facile de vérifier que :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{D}(0, \sigma_{opt}, \omega)}{\partial \sigma^2} < 0$$

et par conséquent que  $\mathbf{D}(0, \sigma_{opt}, \omega)$  est un maximum.

## Échelle minimale

Pour déterminer l'échelle minimale, nous tenons tout d'abord compte des problèmes d'échantillonnage. En effet, plus l'échelle  $\sigma$  est petite, plus la transformée de FOURIER de la dérivée d'une gaussienne a un support étendu. Ainsi, pour des échelles trop petites cela conduit au phénomène bien connu d'aliasing. Par ailleurs, il existe une relation entre l'ordre de différentiation  $n$ , l'échelle  $\sigma$  et la précision de calcul requise. Cette erreur  $\epsilon$  s'exprime en pourcentage de la façon suivante [tHRF00] :

$$\epsilon(n, \sigma) = 100 \frac{\int_{-\pi}^{\pi} (i\omega)^{2n} (\mathcal{F}[g(x, \sigma)])^2 d\omega}{\int_0^{\infty} (i\omega)^{2n} (\mathcal{F}[g(x, \sigma)])^2 d\omega} \quad (9.16)$$

où  $g(x, \sigma)$  et  $\mathcal{F}[\cdot]$  désignent respectivement une gaussienne centrée d'écart type  $\sigma$  et la transformée de FOURIER. Si l'on veut une erreur inférieure à 5 %, le paramètre d'échelle doit respecter les inégalités suivantes :

- $\sigma \geq 0,6$  pour  $n = 1$  ;
- $\sigma \geq 0,8$  pour  $n = 2$ .

Ainsi, comme notre mesure de vallée fait intervenir des dérivées jusqu'à l'ordre deux, la borne minimale de l'intervalle d'échelle doit être supérieure à 0,8. Nous choisissons de prendre  $\sigma_{min} = 1,0$ .

### Échelle maximale

L'échelle maximale est déterminée de façon empirique en fonction de la taille des plus grosses artères. Pour les artériographies que nous étudions ici, nous avons constaté que la taille des plus grosses artères était d'environ 20 pixels. Ce qui correspond à :

$$\sigma_{max} = \sigma_{opt}(\omega = 20) = 5,77.$$

Connaître la taille des plus grosses structure à détecter permet d'éviter de définir l'échelle maximale en fonction de la taille de l'image et ainsi de réduire notablement le nombre d'échelles d'étude pour l'analyse.

### 9.3.2 Échantillonnage du paramètre échelle

Il s'agit maintenant de déterminer au mieux le nombre d'échelles  $p$  et la répartition des échelles à étudier dans l'intervalle  $[\sigma_{min}, \sigma_{max}]$ . Le cas idéal serait, bien entendu, de connaître les différentes tailles des vaisseaux et de choisir les échelles d'étude en conséquence. Mais dans la pratique, la tâche se révèle plus délicate puisque nous n'avons généralement accès qu'à la taille approximative des artères les plus grosses, même s'il est concevable de demander à un praticien de sélectionner ces tailles.

L'utilisation d'un échantillonnage logarithmique semble cohérent avec l'évolution des avatars de l'image dans le traitement itératif générateur de l'espace échelle. Néanmoins, dans le cadre de notre application, l'objectif de l'analyse multi-échelles est de nous permettre de suivre les lignes centrales détectées dans l'espace-échelles. Pour cela, nous devons prendre garde à ce que le pas d'échantillonnage du paramètre échelle ne soit pas trop grand. Or, nous avons constaté qu'aux petites échelles, l'utilisation d'un échantillonnage logarithmique ne satisfaisait pas cette contrainte. Nous proposons alors d'utiliser un échantillonnage uniforme jusqu'à une certaine échelle  $\sigma_c$ , puis d'utiliser pour les échelles supérieures un échantillonnage logarithmique. Cet échantillonnage *quasi-logarithmique* nous permet de suivre au mieux les lignes centrales dans l'espace-échelles.

Nous présentons dans le tableau 9.3 ainsi que sur le graphique de la figure 9.11 la séquence d'échantillonnage proposée pour l'analyse multi-échelles des lignes centrales des artères coronaires.

### 9.3.3 Stabilité du détecteur de ligne de fond

NASSER [Nas95] a montré que la courbure d'un signal monodimensionnel continu était stable sur les *extrema* du premier ordre dans un espace-échelles linéaire. Bien que l'on ne

$t$	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
$\sigma$	1,00	1,22	1,41	1,58	1,73	1,87	2,00	2,12	2,23
$t$	2,75	3,50	4,50	5,75	7,50	9,25	12,25	15,75	-
$\sigma$	2,34	2,64	3,00	3,39	3,87	4,30	4,95	5,61	-

TAB. 9.3 – Échelles utilisées pour l'analyse multi-échelles des lignes centrales des artères coronaires.

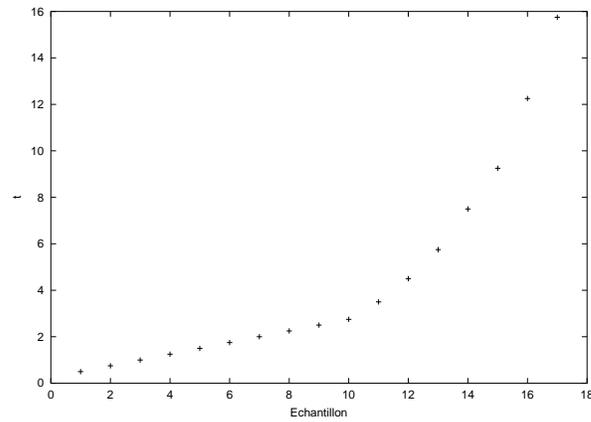


FIG. 9.11 – Évolution du paramètre  $t$  suivant l'échantillonnage quasi-logarithmique correspondant aux valeurs du tableau 9.3.

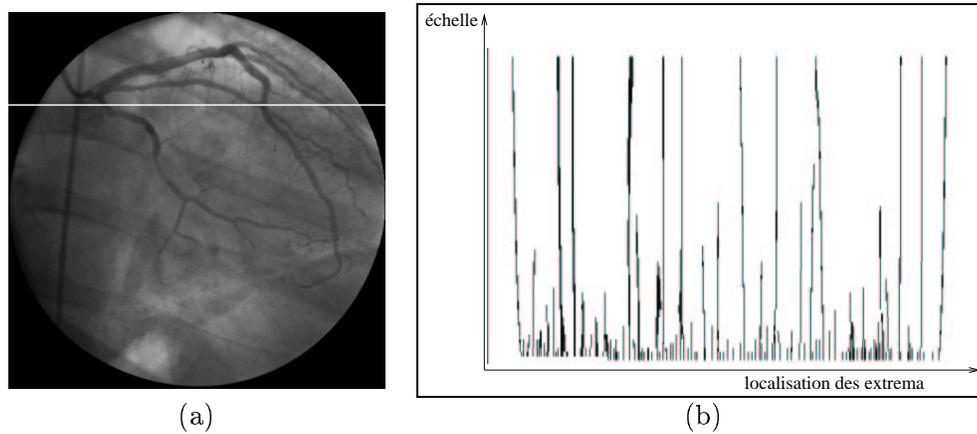


FIG. 9.12 – (a) : angiographie, (b) : coupe de l'espace-échelles des extrema locaux du détecteur suivant la ligne blanche.

soit pas assuré que cela soit toujours le cas pour un signal discret bidimensionnel, nous supposons qu'un détecteur défini à partir des courbures principales comme le notre reste stable dans l'espace-échelles linéaire. L'expérience montre que cette hypothèse est valable dans la pratique.

Pour illustrer nos propos, nous calculons l'espace-échelles des *extrema locaux* du détecteur correspondant à la méthode c (cf. section 9.2) sur l'image (a) de la figure 9.12, puis nous en extrayons une coupe. On peut constater, d'une part qu'aucun nouvel *extremum* n'est créé et, d'autre part, que leur localisation ne varie quasiment pas aux cours des échelles. Notons toutefois, que lorsque deux vallées parallèles sont très proches l'une de l'autre, qu'au cours des échelles, les deux détections correspondant aux vallées peuvent fusionner au cours des échelles, occasionnant ainsi une délocalisation des lignes de fond. Ce phénomène reste néanmoins peu gênant dans le cadre de notre application puisque les artères d'intérêt sont généralement suffisamment espacées les unes des autres.

### 9.3.4 Normalisation des réponses

De manière à pouvoir comparer les réponses aux différentes échelles, nous normalisons chaque image de réponse par la fonction suivante :

$$I_{norm}(x, y) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{I(x, y) - \mu[I]}{\sigma[I]}\right)} \quad (9.17)$$

avec  $\mu[I]$  et  $\sigma[I]$  respectivement la moyenne et la variance de l'image.

### 9.3.5 Détection multi-échelles des lignes centrales

Nous proposons ici, un nouvel algorithme de détection multi-échelles inspiré de plusieurs algorithmes de la littérature [FT94], [Lin94a], [MLD94] cf. section 8.6.5. Une fois les para-

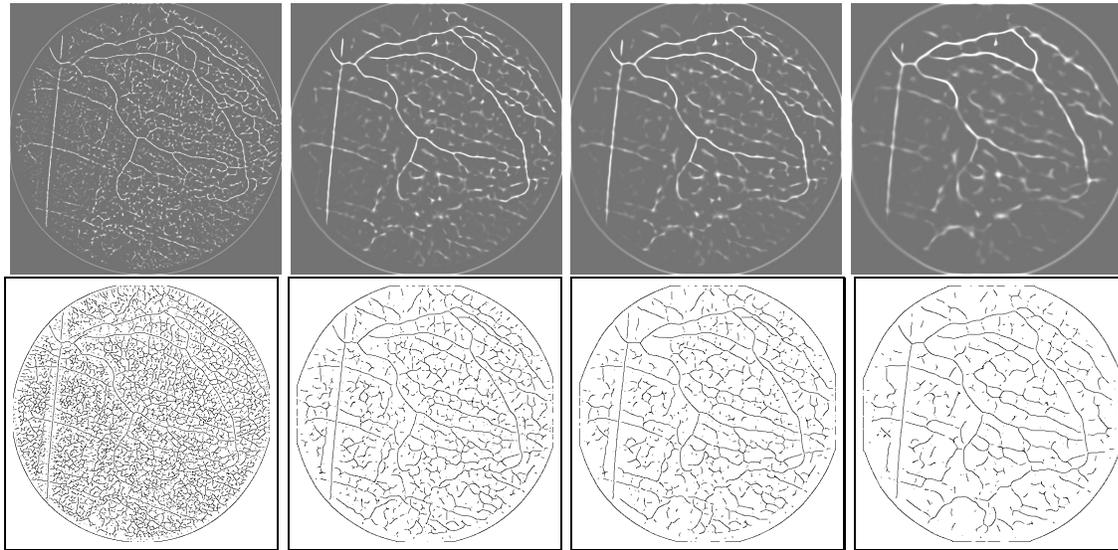


FIG. 9.13 – En haut : quelques échelles de l'espace-échelles des réponses aux vallées normalisées, en bas : quelques échelles de l'espace-échelles des lignes de fond.

mètres de l'analyse multi-échelles linéaire déterminés, nous pouvons désormais pour chacune des  $p$  échelles  $\sigma_i \in \{1, \dots, p\}$ , calculer d'une part les réponses aux vallées normalisées et extraire d'autre part, les maxima locaux de la mesure  $\mathbf{D}$  dans la direction de la courbure principale maximale. Nous nommons respectivement ces deux ensembles de  $p$  images, l'*espace-échelles des vallées* et l'*espace-échelles des lignes de fond*. Les images des réponses aux vallées et des lignes de fond à l'échelle  $\sigma_i$  sont notées respectivement  $V_{\sigma_i}$  et  $LF_{\sigma_i}$ . La figure 9.13 présente quelques échelles de ces espaces-échelles pour la coronographie « CG-OAD12-CRA20 » (cf. image (a) de la figure 9.17). On peut observer la disparition progressive des petits vaisseaux ou détails de l'angiographie au cours de l'analyse multi-échelles. Ensuite, de la même manière que MONGA et al. [MLD94] nous construisons un graphe d'adjacence multi-échelles à partir de ces deux espaces-échelles. Les nœuds du graphe sont les points  $P$  ayant été détectés au moins une fois dans l'espace-échelles des lignes de fond, c'est-à-dire les points tels qu'il existe  $\sigma_i$  telle que  $LF_{\sigma_i}(P) = 1$ . Chaque nœud contient toutes les échelles  $\sigma_i$  vérifiant  $LF_{\sigma_i}(P) = 1$  ainsi que la réponse à une vallée et la direction des courbures principales. Un arc est alors construit entre deux nœuds si les points sont adjacents en 26-connexité dans l'espace-échelles. Pour ne pas perdre le lien entre les lignes centrales d'une échelle à la suivante, il conviendra d'avoir choisi l'échantillonnage du paramètre échelle de telle sorte que deux échelles successives ne soient pas trop distantes l'une de l'autre. En observant l'espace-échelles des lignes de fond (cf. figure 9.12), nous constatons que le détecteur utilisé préserve relativement bien la localisation des détections au travers des échelles. Les décalages ne dépassent pas un ou deux pixels. Nous pouvons donc utiliser l'hypothèse de stabilité initialement préconisée par WITKIN et al. [WA93] : les points *extrema* qui survivent sur un grand nombre d'échelles sont les plus significatifs, ils représentent les détails qui sautent aux yeux. Ainsi, nous décidons de simplifier le graphe en ne gardant que les nœuds ayant été détectés au moins  $N$  fois. Cela permet d'éliminer énormément de lignes de fond non significatives. Notons que l'expérience montre que ce paramètre est directement fonction du type d'images à traiter, restant donc

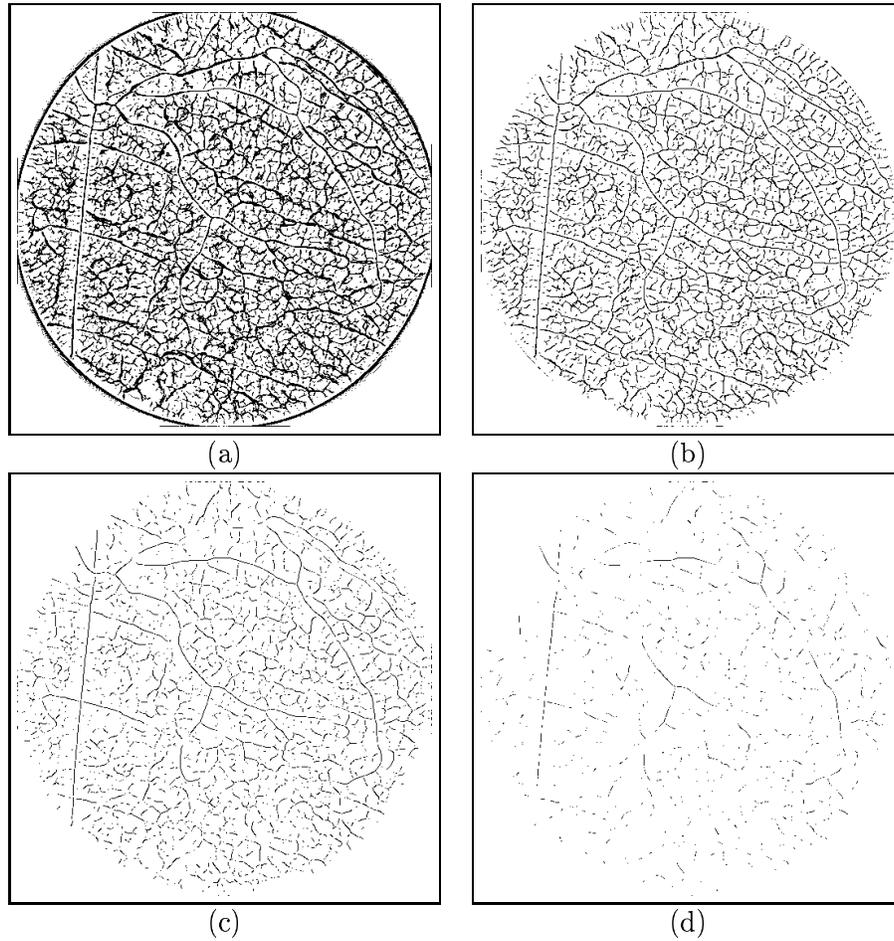


FIG. 9.14 – (a) : projection de l'espace-échelles (16 échelles) des lignes de fond dans le plan, (b) : projection des pixels ayant été détectés au moins 4 fois, (c) : projection des pixels ayant été détectés au moins 8 fois, (d) : projection des pixels ayant été détectés au moins 12 fois.

un invariant de l'application. La figure 9.14 montre l'intérêt d'un tel seuil dans l'élimination des lignes de fond de moindre importance. Soit  $\#C$  le nombre de composantes connexes du graphe, nous désignons par  $\{CC_k\}$ ,  $k \in \{1, \dots, \#C\}$  l'ensemble de ces composantes connexes. Nous attribuons alors à chaque composante connexe la mesure suivante :

$$M(CC_k) = \frac{\sum_{P \in CC_k} R(P)}{\#CC_k} \quad (9.18)$$

où  $\#CC_k$  et  $R(P)$  désignent respectivement le nombre de nœuds de la composante connexe  $CC_k$  et la réponse aux vallées pour le point P,  $M(CC_k)$  étant la moyenne des réponses de la composante connexe  $CC_k$ . Nous trions alors les composantes connexes par ordre décroissant selon les valeurs de  $M(CC_k)$ . En choisissant un nombre  $K$  compris entre le 1 et  $\#C$ , il est désormais possible de ne garder que les  $K$  plus « fortes » composantes connexes. Dans notre application, le choix de ce paramètre peut être laissé à l'appréciation de l'utilisateur. En projetant ces composantes dans le plan de l'image, nous obtenons le support des  $K$  plus fortes

composantes connexes. Un algorithme d'amincissement homotopique [Lan78] nous permet ensuite d'obtenir des lignes centrales 8-connexes de largeur un pixel. Compte-tenu de la très faible délocalisation des détections au cours des échelles, nous estimons que la localisation des lignes centrales ainsi obtenue reste valable. Bien que théoriquement les segments d'artères de même largeur doivent avoir une réponse maximale pour la même échelle, dans la pratique ce n'est pas toujours le cas. Cela est probablement dû, d'une part à une diffusion non uniforme du produit de contraste dans les artères et, d'autre part, aux variations importantes du contraste dans ce type d'images. La projection dans le plan permet alors de reconnecter certains segments artériels. Les détections parasites restantes sont éliminées en supprimant les lignes centrales de très faible longueur. Sur la figure 9.15 on peut observer l'effet du choix de  $K$ .

En résumé, notre méthode de détection multi-échelles des lignes centrales comporte les étapes suivantes :

1. calculs des images de réponses aux vallées pour  $p$  échelles ;
2. détection des *extrema* locaux des images de réponses dans la direction de la courbure maximale ;
3. construction d'un graphe d'adjacence multi-échelles à partir des  $p$  images de détection ;
4. simplification du graphe en ne gardant que les nœuds ayant été détectés au moins  $N$  fois ;
5. à chaque composante connexe du graphe est attribuée la moyenne des réponses obtenues pour chacun de ses nœuds ;
6. classement des composantes connexes par ordre décroissant suivant leur réponse multi-échelles ;
7. sélection des  $K$  composantes connexes les plus « fortes » ;
8. projection dans le plan des  $K$  plus « fortes » composantes connexes ;
9. amincissement homotopique de la projection ;
10. élimination des contours de faible longueur.

L'algorithme est par ailleurs présenté de manière plus synthétique sur la figure 9.16.

## 9.4 Résultats

Dans cette section nous appliquons la méthode de détection multi-échelles des lignes centrales présentée précédemment à deux angiographies de l'artère coronaire gauche « CG-OAD12-CRA20 » et « CG-OAD15-CRA0 » ainsi qu'à deux angiographies de la coronaire droite : « CD-OAG55-CAU2 » « CD-OAG89-CRA2 ». Les résultats sont présentés sur les figures 9.17, 9.18, 9.19 et 9.20. En général, la taille des plus grandes artères recherchées varie très peu d'une angiographie à l'autre, ainsi nous utilisons le même nombre d'échelles  $p$  pour chacune des analyses multi-échelles. Par conséquent, le paramètre  $N$  est ici fixé à 5 pour l'étude de ces quatre images. En revanche, le paramètre  $K$  est adapté au cas par cas de manière à privilégier la détection des artères principales puisque ce sont celles qui présentent de l'intérêt pour les médecins.

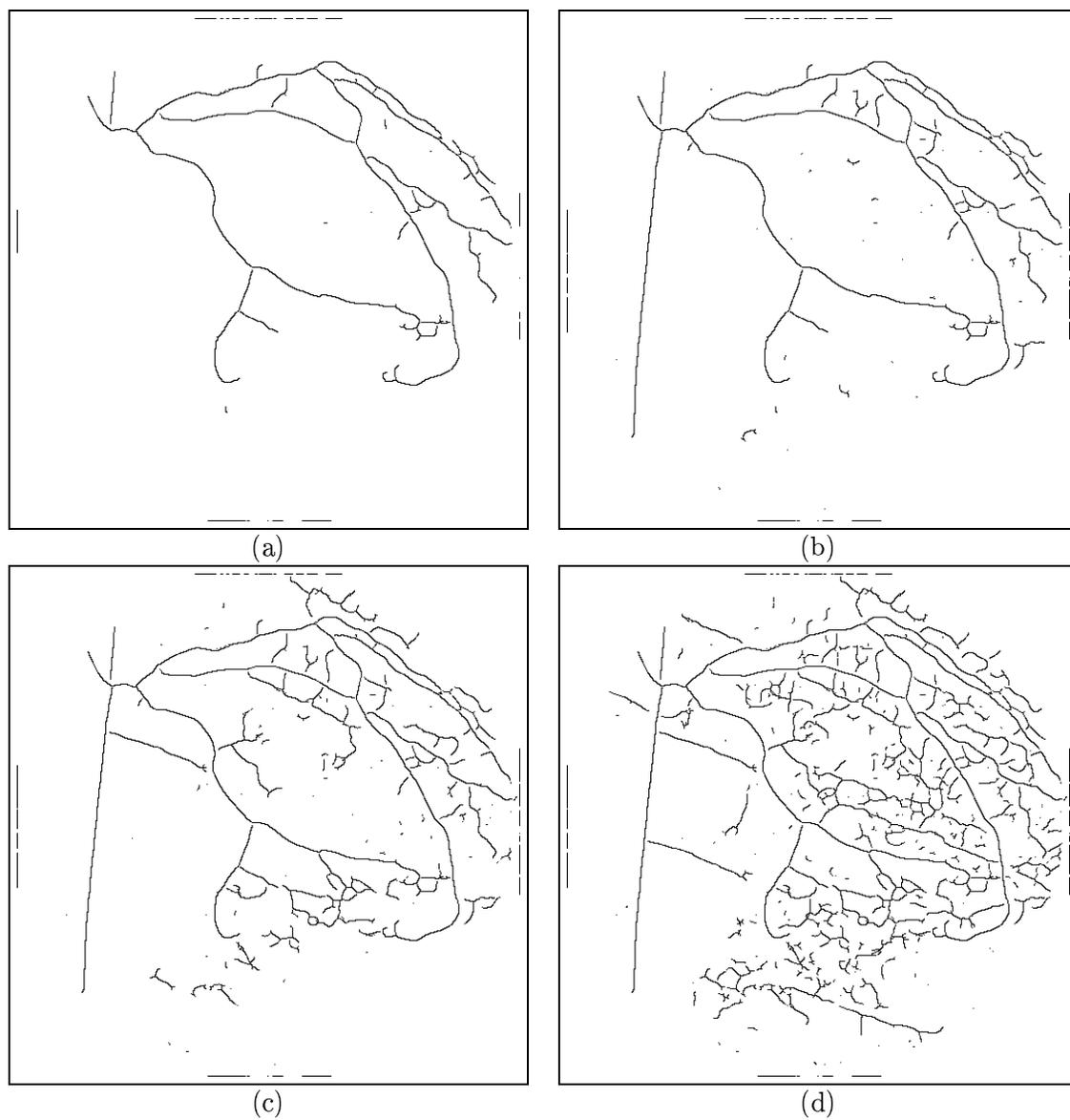


FIG. 9.15 – Détection multi-échelles de « CG-OAD12-CRA20 » pour (a) :  $K = 50$ , (b) :  $K = 100$ , (c) :  $K = 150$ , (d) :  $K = 300$ .

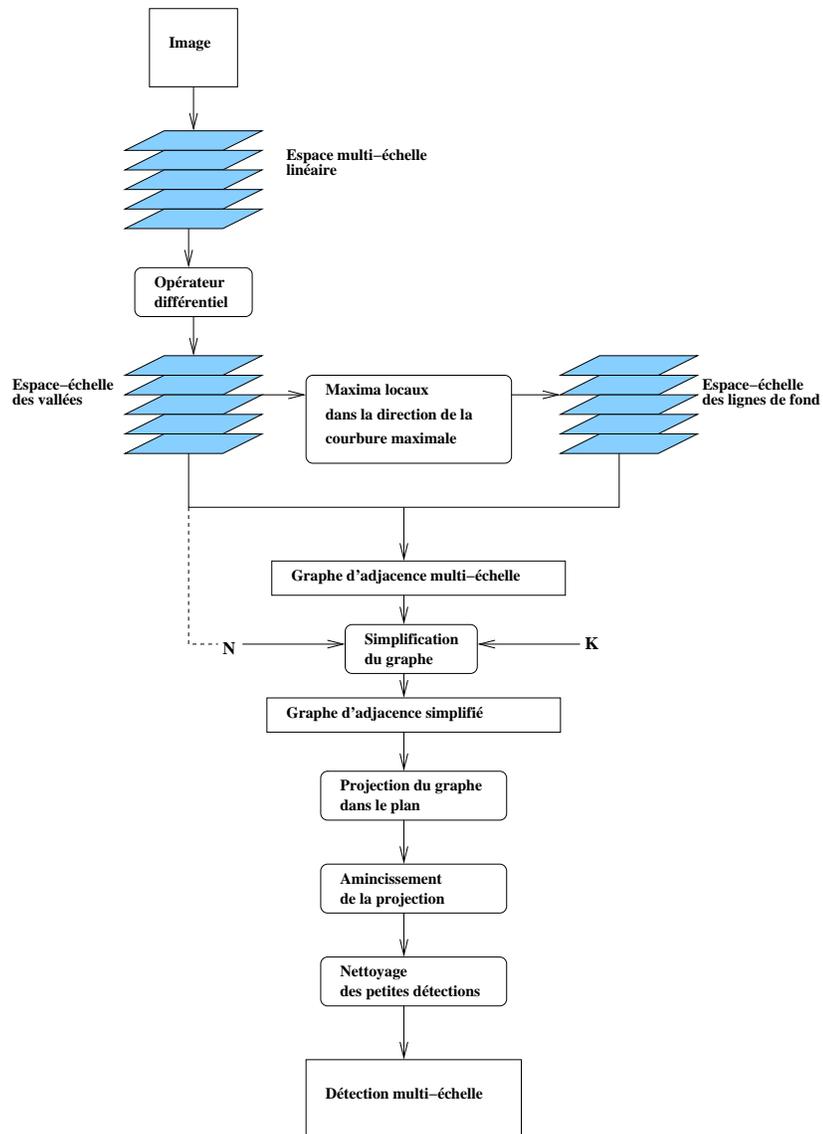


FIG. 9.16 – Algorithme de détection multi-échelles des lignes centrales.

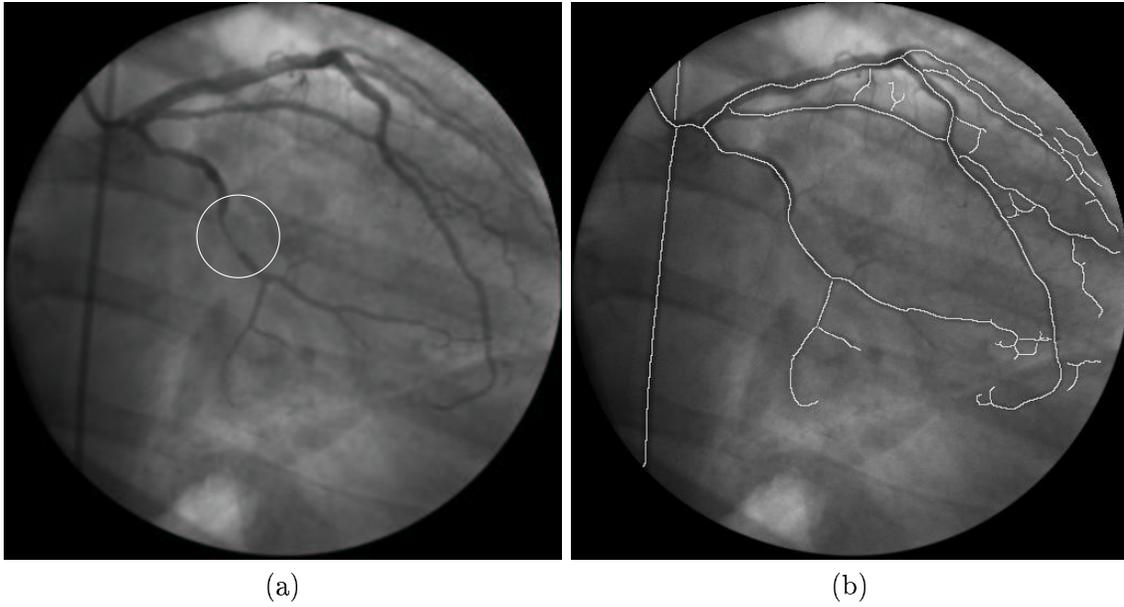


FIG. 9.17 – (a) : angiographie « CG-OAD12-CRA20 » présentant une sténose, localisée ici par un cercle blanc (b) : détection multi-échelles des lignes centrales superposée à l'image originale avec  $N = 5$ ,  $K = 100$ .

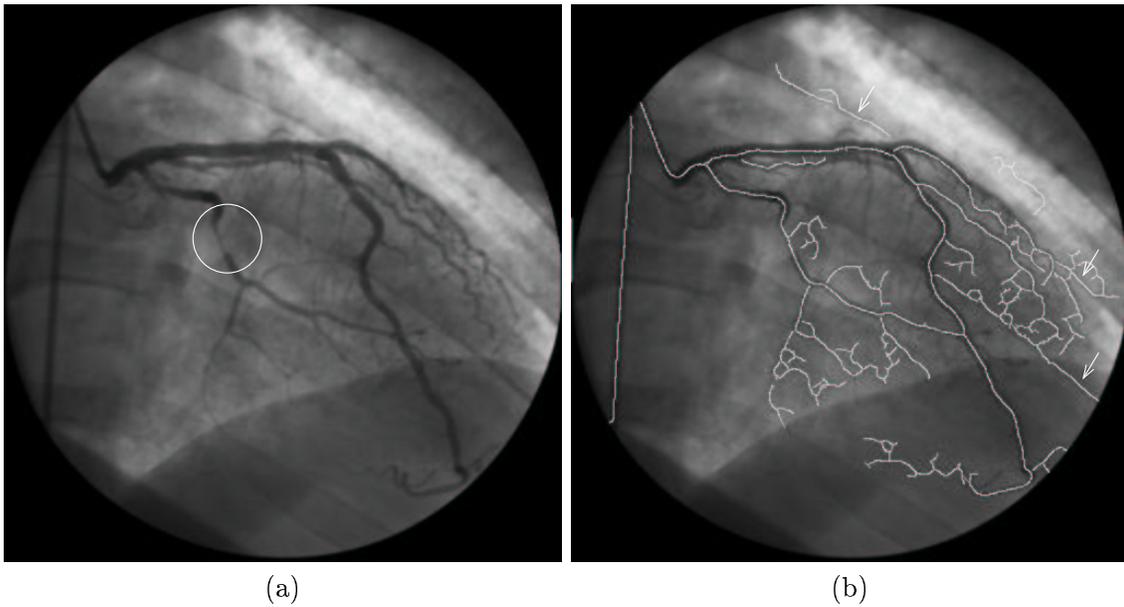


FIG. 9.18 – (a) : angiographie « CG-OAD15-CRA0 » présentant une sténose, localisée ici par un cercle blanc, (b) : détection multi-échelles superposée à l'image originale avec  $N = 5$ ,  $K = 80$ , les flèches indiquent certaines fausses détections dues à la présence des côtes du patient.

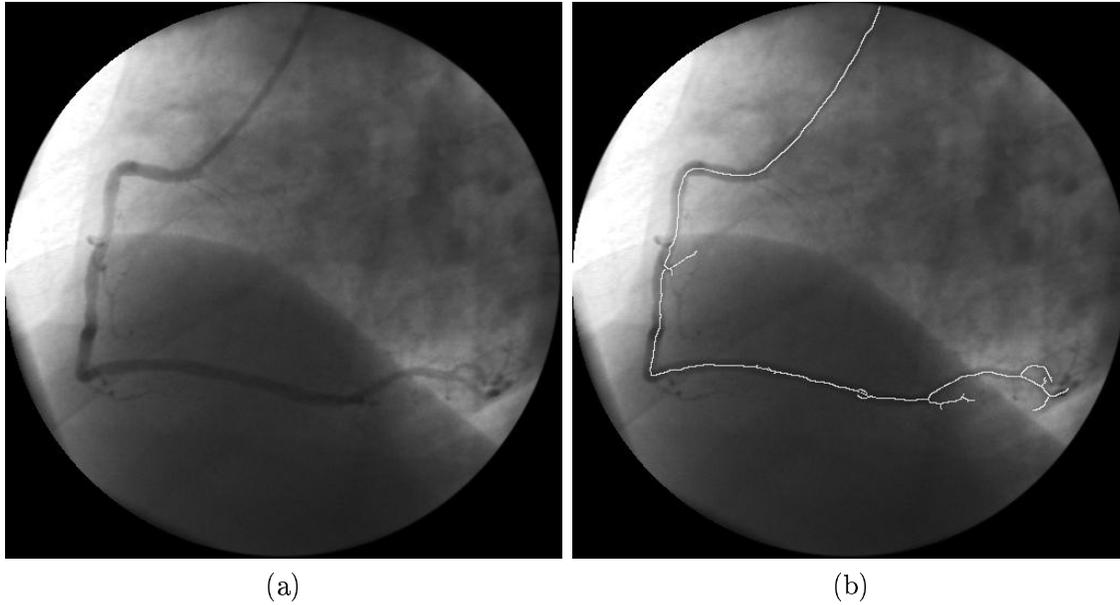


FIG. 9.19 – (a) : angiographie « CD-OAG55-CAU2 », (b) : détection multi-échelles superposée à l'image originale avec  $N = 5$ ,  $K = 100$ .

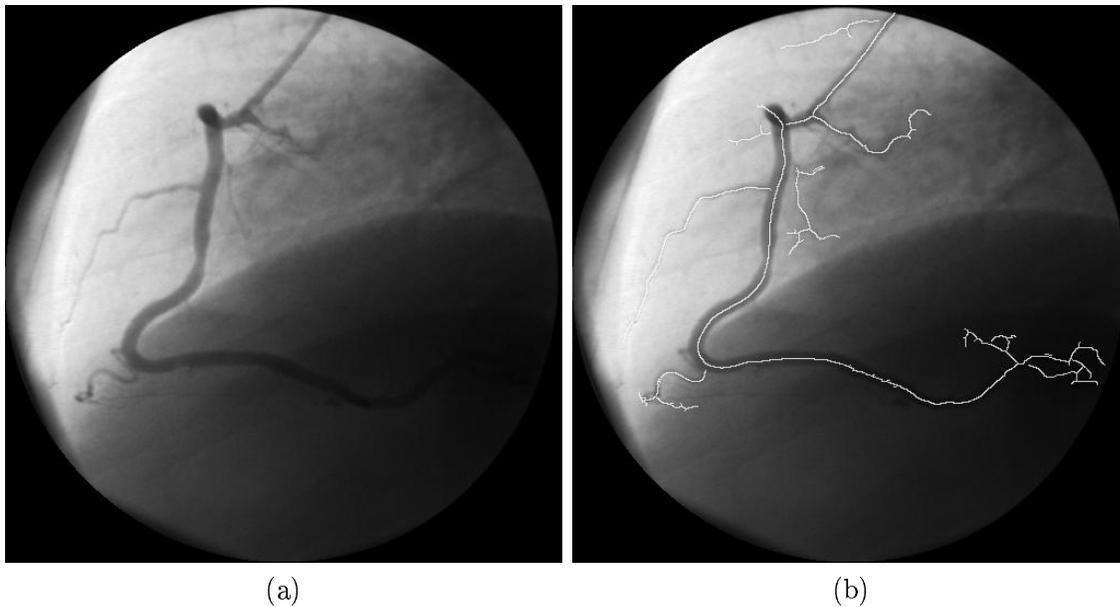


FIG. 9.20 – (a) : angiographie « CD-OAG89-CRA2 », (b) : détection multi-échelles superposée à l'image originale avec  $N = 5$ ,  $K = 80$ .

Sur un ordinateur personnel doté d'un processeur AMD K7 THUNDERBIRD de 1 Ghz et de 256 Mo de mémoire vive, le temps d'exécution de l'algorithme sur une image  $512 \times 512$  codée sur 8 bits et pour l'étude de 16 échelles est d'environ 24 secondes<sup>2</sup>. Nous constatons que pour l'ensemble des angiographies, la détection multi-échelles obtenue est quasiment continue. Malgré la présence d'une sévère sténose (située dans le cercle blanc) sur les images « CG-OAD12-CRA20 » et « CG-OAD15-CRA0 » la continuité de la détection n'est pas affectée. De plus, la figure 9.20 montre la robustesse du processus sur une image de très faible contraste. Ces résultats ne sont pas surprenants dans la mesure où tout au long de la chaîne de traitement, nous avons attaché une attention toute particulière à l'importance de la continuité de la détection.

Néanmoins, certains segments artériels restent déconnectés alors qu'intuitivement il semblerait qu'ils devraient l'être, compte tenu des connaissances que le praticien a sur la topologie réelle d'un arbre coronarien. Dans cette situation, il y a trois cas de figure :

- soit la connexion doit effectivement avoir lieu à l'intersection « visible » des deux segments, auquel cas c'est l'algorithme de détection qui est mis en défaut<sup>3</sup> ;
- soit la connexion doit avoir lieu, mais compte tenu de la superposition des vaisseaux, sa localisation est incertaine ;
- soit la connexion ne doit pas avoir lieu car les deux vaisseaux se croisent.

Comme dans la majorité des cas les segments déconnectés ne sont distants que de un ou deux pixels, nous pouvons envisager de les reconnecter de manière automatique. Toutefois, il faudra distinguer ces points de connexion incertains des points de connexion détectés par l'algorithme. Cela laissera ainsi au médecin la possibilité de garder ou non ces points de connexion. Inversement, deux vaisseaux peuvent avoir été connectés alors qu'intuitivement ils n'auraient pas dû l'être. Le plus souvent, cela survient lors de la superposition ou du croisement de deux vaisseaux. En outre, il est aussi possible que notre algorithme de détection multi-échelles soit mis en défaut par la présence du cathéter, des côtes du patient, ou de taches sombres situées à proximité des artères. Ces entités présentent en effet des caractéristiques de luminance qui ne permettent pas de les distinguer d'un véritable vaisseau sanguin. Ainsi, lorsqu'il est présent dans les images, le cathéter est toujours détecté. Ce n'est pas pas nécessairement un handicap, puisque sa taille réelle étant connue, en estimant son diamètre nous pouvons espérer calibrer les vaisseaux sanguins. En revanche, les côtes du patient sont beaucoup plus gênantes car elles peuvent croiser à de nombreuses occasions l'arbre coronarien et ainsi être confondues avec des segments de vaisseaux par l'algorithme. C'est notamment le cas sur l'image de la figure 9.18 (b) où les côtes désignées par les flèches blanches viennent perturber la détection. Les taches sombres peuvent engendrer la prolongation erronée de certains vaisseaux. Dans de telles circonstances, il nous paraît difficile à partir d'une seule image de lever toutes ces ambiguïtés de détection. Nous pensons donc, qu'à ce stade de l'analyse de l'arbre coronarien il serait judicieux et peu coûteux de faire intervenir le médecin pour lever au mieux ces ambiguïtés.

---

<sup>2</sup>Il est tout à fait raisonnable de penser que les performances données ici peuvent être améliorées compte tenu du fait que la programmation de l'algorithme n'en est encore qu'à un stade expérimental, c'est-à-dire que la rapidité des traitements n'a pas été privilégiée dans un premier temps.

<sup>3</sup>Il est reconnu que l'algorithme d'extraction des maxima locaux pose certains problèmes pour la détection des points multiples.

$t$	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,775	3,50	4,50	5,75
$\sigma$	1,00	1,22	1,41	1,58	1,73	1,87	2,00	2,12	2,23	2,34	2,64	3,00	3,39

TAB. 9.4 – Échelles utilisées pour l'analyse multi-échelles de l'angiographie rétinienne.

## 9.5 Autres applications

Bien que notre algorithme de détection multi-échelles des lignes centrales ait été spécialement conçu pour l'analyse de coronographies, nous avons la possibilité de l'adapter à d'autres types d'images. Pour illustrer nos propos, nous appliquons tout d'abord notre algorithme à une angiographie rétinienne, puis nous étudierons une image de roche.

### 9.5.1 Détection des vaisseaux sanguins de la rétine

Pour cette application, la problématique est sensiblement la même que pour l'analyse des coronographies puisqu'il s'agit là aussi d'étudier un réseau de vaisseaux sanguins. Les différences résident principalement dans le système d'imagerie et la complexité du réseau sanguin. Une image d'angiographie rétinienne est présentée sur la figure 9.21. Pour cette image, le diamètre maximal des vaisseaux est généralement inférieur à environ 12 pixels. En reprenant les calculs du paragraphe 9.3.1 pour  $\omega = 12$  nous obtenons  $\sigma_{max} = 3,46$ . Ici, nous utilisons la séquence d'échantillonnage présentée dans le tableau 9.4. Sur un ordinateur personnel doté d'un processeur AMD K7 THUNDERBIRD de 1 Ghz et de 256 Mo de mémoire vive, le temps d'exécution de l'algorithme de détection sur une angiographie rétinienne de taille  $596 \times 603$  codée sur 8 bits et pour l'étude de 13 échelles est d'environ 25 secondes. Les résultats de la détection multi-échelles des lignes centrales des vaisseaux sanguins de la rétine sont présentés sur la figure 9.21. On peut constater que la qualité des résultats semble meilleure que pour les coronographies, les angiographies rétiniennes offrant en effet un bien meilleur contraste.

### 9.5.2 Analyse de gravures sur roche

Actuellement, pour étudier les gravures faites par l'homme et accumulées au fil des ans sur une même roche, les archéologues projettent tout d'abord une image de celle-ci sur une vitre puis décalquent manuellement les gravures présentes sur la roche. Les archéologues ont pensé analyser celle-ci à l'aide d'un appareil de mesure au laser qui relève pas à pas les altitudes de la roche. Par conséquent, les données de sortie de cet appareil se présentent sous la forme d'une carte qui associe à chaque point du plan de mesure une élévation. Ici, l'idée de base est d'interpréter les relevés d'altitude de la roche comme une image. Nous pouvons par conséquent considérer les gravures comme étant des vallées de l'image d'élévation. Il est alors possible d'appliquer notre algorithme de détection multi-échelles des lignes de fond à ce type de données. Le résultat de la détection offre à l'archéologue une détection automatique des gravures et lui évite ainsi, l'étape fastidieuse du dessin. A titre d'illustration, nous détectons les gravures de la roche de l'image (a) de la figure 9.22. Cette image nous a été fournie par

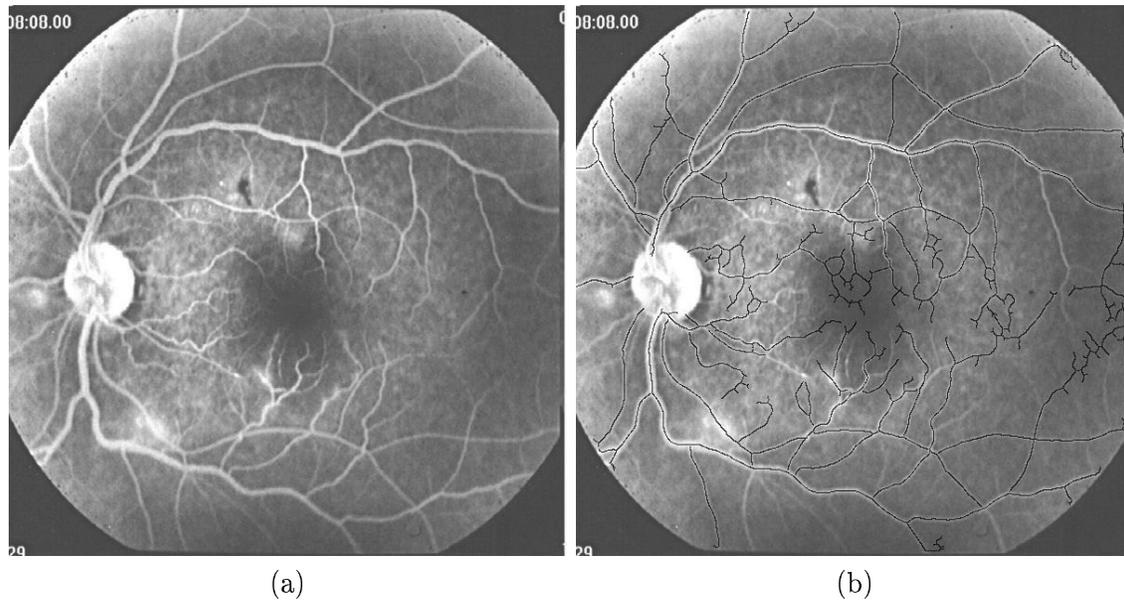


FIG. 9.21 – (a) : angiographie rétinienne, (b) : détection multi-échelles des lignes de crête des vaisseaux superposée à l'image originale pour  $N = 3$  et  $K = 100$ .

$t$	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,50	4,50
$\sigma$	1,00	1,22	1,41	1,58	1,73	1,87	2,00	2,12	2,23	2,34	2,64	3,00

TAB. 9.5 – Échelles utilisées pour l'analyse multi-échelles de l'image archéologique.

Jean AIRVAUX membre du service régional d'archéologie du Poitou-Charentes. En observant attentivement cette image, on peut remarquer une gravure représentant une tête d'homme. La séquence d'échantillonnage de l'analyse multi-échelles est présentée dans le tableau 9.5. Pour cette application nous avons pris  $N = 5$  et  $K = 700$ . La valeur de  $K$  est relativement élevée de manière à proposer à l'archéologue un choix quasi-exhaustif des gravures. Il aura ensuite le loisir de garder ou non les détections proposées par l'algorithme. Sur un ordinateur personnel doté d'un processeur AMD K7 THUNDERBIRD de 1 Ghz et de 256 Mo de mémoire vive, le temps d'exécution de l'algorithme de détection sur une image archéologique de taille  $550 \times 500$  codée sur 8 bits et pour l'étude de 10 échelles est d'environ 18 secondes. Nous présentons la superposition de la détection des gravures avec l'image originale sur l'image (b) de la figure 9.22, et constatons que l'algorithme fait bien ressortir les traits de la tête humaine.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons dans un premier temps proposé une fonction des deux courbures principales permettant de caractériser les points de pli. Ensuite, la comparaison de diverses méthodes d'extraction des lignes de fond nous a permis d'en choisir une

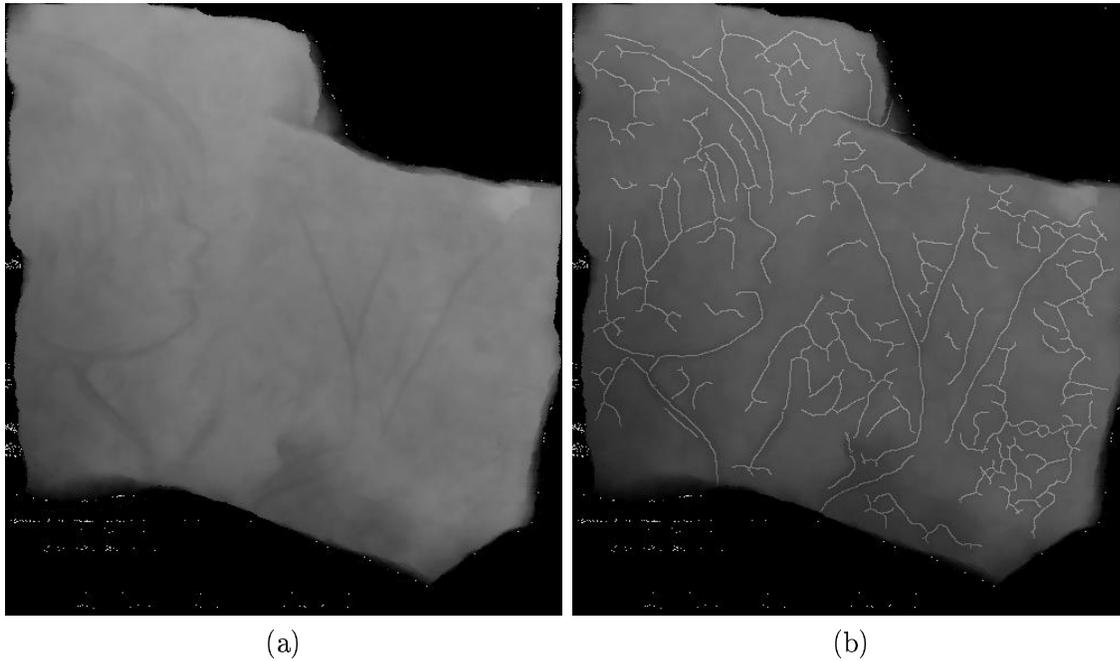


FIG. 9.22 – (a) : image archéologique, (b) : détection multi-échelles superposée à l'image originale.

appropriée à notre problématique. Puis, nous avons proposé une stratégie automatique de détection multi-échelles des lignes centrales des vaisseaux sanguins. Nous avons pu constater la qualité des résultats, que ce soit en terme de continuité ou de localisation et cela malgré la présence de sténoses sévères et le mauvais contraste des angiographies. Par ailleurs, le temps d'exécution de l'algorithme est tout à fait raisonnable. Moyennant la modification de quelques paramètres, l'algorithme a montré ses facultés d'adaptation à d'autres modalités d'imagerie. Toutefois, en ce qui concerne la détection des artères coronaires, l'intervention d'un spécialiste peut s'avérer utile pour corriger, voire lever certaines ambiguïtés.

Dans le chapitre suivant, nous présentons une modélisation de l'arbre artériel détecté offrant la possibilité de lever les ambiguïtés de détection et de faciliter l'étape d'appariement, préalable à la reconstruction 3D des artères.

## Chapitre 10

# Modélisation de l'arbre artériel détecté

L'algorithme proposé dans le chapitre précédent fournit au médecin une détection multi-échelles des lignes centrales des artères coronaires. Chaque ligne centrale correspond à un chemin 8-connexe reliant deux points particuliers. Ces points particuliers, représentés sur la figure 10.1, sont de deux catégories :

- les *points de connexion* qui connectent trois ou quatre segments. Nous les nommons respectivement *points de bifurcation* et *points d'intersection* ;
- les *points extrêmes* qui n'ont qu'un seul pixel voisin appartenant à la ligne centrale.

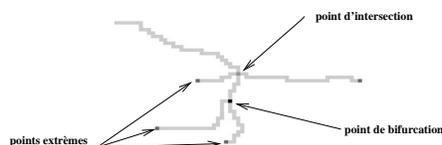


FIG. 10.1 – Points particuliers des lignes centrales.

Suivant la qualité de la détection, la ligne centrale correspond ou non à un vaisseau. De manière à traiter au mieux les ambiguïtés, nous voulons donner au médecin la possibilité de corriger, le cas échéant, la détection proposée par l'algorithme. Ainsi, le médecin doit avoir accès aux fonctionnalités suivantes :

- conservation, élimination ou rajout des points extrêmes et des points de connexion ;
- conservation ou élimination des segments détectés.

Pour cela, il nous faut trouver une structure nous permettant, d'une part d'organiser les lignes centrales et les points particuliers entre eux et, d'autre part, de faciliter l'étape préliminaire à la reconstruction 3D des vaisseaux qu'est l'appariement. Dans la première section de ce chapitre nous élaborons un modèle d'arbre coronarien permettant de modifier la détection des artères. La seconde section présente des méthodes de détection automatique des points particuliers des lignes centrales. Dans la troisième section, nous estimons le diamètre des artères coronaires à partir de la détection multi-échelles des lignes centrales. En dernier lieu,

nous proposons une stratégie d'appariement des vaisseaux sanguins détectés.

## 10.1 Proposition d'un modèle

Anatomiquement l'arbre coronarien peut être modélisé, comme son nom l'indique, par un arbre binaire tridimensionnel. Néanmoins, comme nous l'avons vu précédemment, la projection de cet arbre sur le capteur rayons X engendre généralement des superpositions et des croisements. Par conséquent, il advient que la détection automatique proposée présente une structure plus complexe qu'un arbre. Nous décidons donc de modéliser l'arbre coronarien par un graphe attribué. Les nœuds de ce graphe sont les points particuliers. Les arcs sont les lignes centrales reliant deux points particuliers. À chaque arc, nous associons les attributs suivants :

- la liste des points de la ligne centrale ainsi que leurs caractéristiques individuelles :
  - les coordonnées du point,
  - les directions de courbures maximale et minimale,
  - les coordonnées des points de contours situés de part et d'autre du point de ligne centrale,
  - le diamètre local du segment artériel en ce point,
  - la liste des segments passant par ce point,
- un identifiant, c'est-à-dire un numéro permettant d'identifier le segment ;
- deux points particuliers situés au début et à la fin du segment ;
- la longueur du segment ;
- le diamètre moyen du segment ;
- le nom de la structure anatomique correspondante.

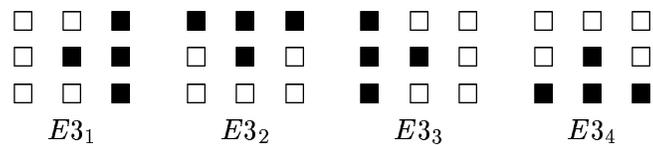
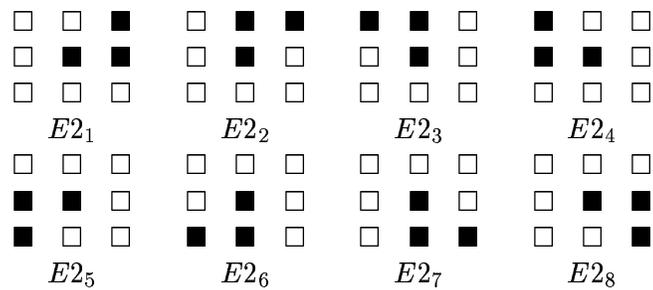
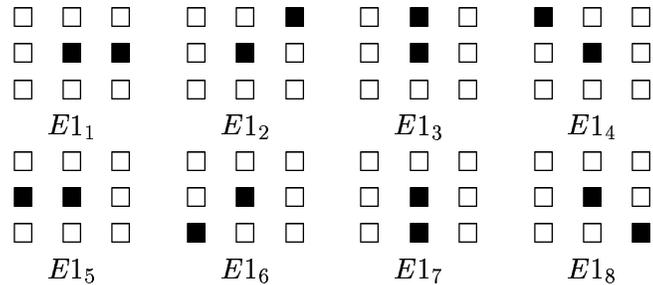
Ces informations sémantiques permettent de décrire le segment détecté. Nous verrons dans la section 10.4 que le dernier attribut nous permet d'éviter simplement le problème délicat d'appariement. Cette modélisation correspond à la structure que nous avons programmée.

## 10.2 Détection automatiques de points particuliers

À partir de l'image binaire des lignes centrales (un point de ligne centrale a la valeur 1, les autres points ont la valeur 0) nous cherchons à détecter automatiquement les points extrêmes, les points de bifurcation et les points d'intersection. Pour cela, nous allons analyser le voisinage élémentaire d'un pixel de ligne centrale. Ce voisinage élémentaire peut être représenté par un masque  $3 \times 3$ . Si l'on attribue des valeurs 1 (carré noir) ou 0 (carré blanc) à chacun des points constituant le masque, on forme ce que l'on appelle une *configuration de voisinage* [Ser82]. Si un point de l'image binaire a la configuration de voisinage recherchée, le point est alors étiqueté en conséquence.

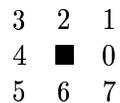
### 10.2.1 Les points extrêmes

Un point extrême est un point situé à l'extrémité d'une ligne centrale. Ces points ont les configurations de voisinage suivantes :



La détection des configurations de voisinage de la famille *E1* se fait très aisément : le masque  $3 \times 3$  doit contenir uniquement deux pixels noirs dont le pixel central.

Si l'on ordonne les voisins du pixel central de la façon suivante :



et que l'on suppose que le pixel successeur de pixel 7 est le pixel 0, la famille *E2* est caractérisée par les masques contenant trois pixels noirs dont le pixel central et deux autres pixels consécutifs suivant l'ordre des pixels précédents.

Pour détecter les configurations de voisinage de la famille *E3* il suffit de tester chacune des quatre configurations. Les points de ligne centrale correspondant aux configurations de voisinage de la famille *E3* bien qu'étant des points extrêmes ne présentent pas un grand intérêt dans notre cas. Ces points correspondent en effet à des branches d'un pixel de long et constituent plutôt des pixels parasites que des points extrêmes.

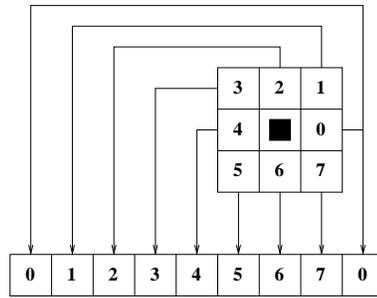


FIG. 10.2 – Codage de la configuration de voisinage sous la forme d'un vecteur.

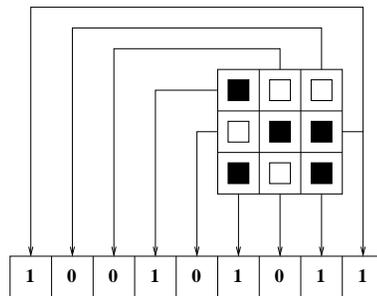


FIG. 10.3 – Exemple d'une configuration de voisinage de type bifurcation et son vecteur associé.

### 10.2.2 Les points de bifurcation

Un point de bifurcation du plan est un point situé à l'intersection de trois branches séparant le plan en trois parties disjointes. Ici, nous voulons définir les points de bifurcation sur une grille discrète. Établir de manière exhaustive toutes les combinaisons possibles des pixels du masque  $3 \times 3$  comportant trois composantes connexes blanches et une composante connexe noire serait très fastidieux et coûteux en temps de calcul. Nous proposons ici une méthode permettant de les détecter simplement. Pour cela, il suffit de :

1. stocker les valeurs des pixels de la configuration de voisinage dans un vecteur suivant l'ordre défini précédemment en rajoutant le premier voisin en fin de vecteur (cf. figure 10.2) ;
2. compter le nombre de changements dans le vecteur, c'est-à-dire le nombre de passages de 0 à 1 et de 1 à 0 ;
3. si le nombre de changements est égal à six, le masque courant contient trois composantes connexes blanches et une composante connexe noire, le point courant est alors un point de bifurcation, sinon il n'en est pas un.

Sur la figure 10.3, nous présentons un exemple de configuration de voisinage correspondant à une bifurcation ainsi que le vecteur associé à celle-ci. On vérifie aisément que celui-ci comporte 6 changements binaires.

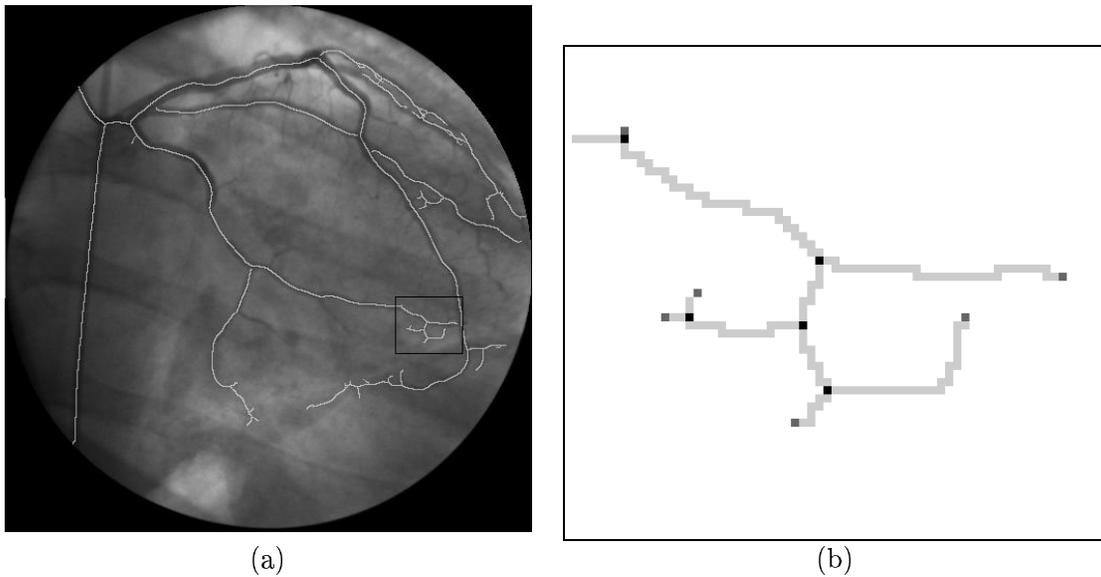
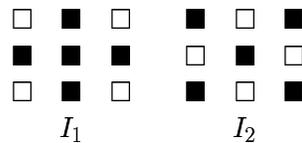


FIG. 10.4 – (a) : détection multi-échelles des lignes centrales superposée avec l'angiographie, (b) : zoom de la zone délimitée par le rectangle noir (en noir les points de bifurcation, en gris foncé les points extrêmes).

### 10.2.3 Les points d'intersection

Les deux seules configurations de voisinage pour les points d'intersection sont les suivantes :



Nous pouvons donc de même que précédemment stocker la configuration de voisinage dans un vecteur et compter les changements de ce vecteur. Si le nombre de changements est de huit, le masque courant contient quatre composantes connexes blanches et une composante connexe noire, le point courant est alors un point d'intersection, sinon il n'en est pas un.

À titre d'illustration, nous présentons sur la figure 10.4 le résultat de l'extraction des points particuliers à partir de la détection multi-échelles des lignes de fond de l'image « CG-OAD12-CRA20 ». Pour plus de clarté, nous avons effectué un zoom sur la zone délimitée par le rectangle noir. Les points extrêmes et les points de bifurcation sont respectivement représentés en noir et en gris foncé sur l'image (b) de la figure. En partant des points particuliers nous pouvons simplement identifier chaque ligne centrale, stocker la liste des points de ligne centrale situés entre chaque paire de points particuliers et déterminer la longueur de chaque ligne centrale.

Dans les deux sections suivantes nous nous intéressons respectivement à l'estimation du diamètre associé à chaque ligne centrale et à l'identification anatomique des segments détectés.

## 10.3 Estimation du diamètre des artères

### 10.3.1 Mise en œuvre

Dans le cas idéal, l'analyse multi-échelles offre la possibilité d'accéder par le biais de l'échelle optimale de détection, à une estimation du diamètre des artères. Néanmoins, lorsque l'on échantillonne la variable échelle, il s'avère que l'échelle donnant la réponse maximale ne reflète qu'approximativement le diamètre des vaisseaux. En effet, les échelles d'étude étant espacées, et c'est particulièrement le cas pour l'échantillonnage logarithmique, l'échelle ayant la réponse maximale n'est pas pour autant celle correspondant à l'échelle optimale. Ainsi si nous notons  $\sigma_{rmax}$  l'échelle donnant la réponse maximale, la seule information que l'on puisse en tirer est que l'échelle optimale est comprise entre l'échelle précédente  $\sigma_{rmax-1}$  et l'échelle suivante  $\sigma_{rmax+1}$ . Pour ces raisons, nous préférons localiser les contours de part et d'autre de chaque point de ligne centrale en analysant, en ce point, le gradient du profil des niveaux de gris dans la direction perpendiculaire à celle du vaisseau. La direction des courbures maximales restant assez stable tout au long de l'espace-échelles, nous estimons la direction perpendiculaire au vaisseau par la moyenne des directions de la courbure maximale sur l'ensemble des échelles sélectionnées. Le gradient du profil a, au préalable, été lissé par un filtre gaussien de manière à limiter l'influence du bruit dans l'étude de ce profil. Les pixels donnant les réponses maximales au gradient de part et d'autre du point de ligne centrale seront alors considérés comme étant les deux points de contours associés au point de ligne centrale. Le diamètre local du vaisseau est finalement estimé en calculant la distance euclidienne entre ces deux points de contours. Cette méthode, bien que sans doute non optimale, a le mérite d'être simple à mettre en place. De surcroît, comme à terme nous recherchons à estimer le diamètre tridimensionnel des artères par une approche fondée sur les modèles déformables, nous pensons que cette méthode de segmentation simple constitue un bonne initialisation pour le processus.

### 10.3.2 Résultats

À titre d'exemple, nous appliquons l'algorithme précédent aux résultats des détections multi-échelles des lignes centrales des angiographies « CG-OAD15-CRA0 », « CG-OAD12-CRA20 », « CD-OAG55-CAU2 » et « CD-OAG89-CRA2 » des figures 9.18, 9.17, 9.19 et 9.20. Nous présentons ces résultats sur les images 10.5, 10.6, 10.7 et 10.8. Dans l'ensemble, nous constatons que la détection des contours est relativement bien localisée. Comme la détection multi-échelles des lignes centrales des vaisseaux était quasiment continue nous obtenons une segmentation des contours, eux-mêmes relativement continus. Néanmoins, la méthode est mise en défaut lorsque les vaisseaux sont trop proches les uns des autres. C'est notamment le cas pour les angiographies de l'artère coronaire gauche « CG-OAD12-CRA20 » et « CG-OAD15-CRA0 » des figures 10.5 et 10.6. Toutefois, dans le cadre d'une reconstruction partielle de l'arbre coronarien, ces imperfections ne sont pas gênantes, étant donné que le praticien choisi généralement la projection de manière à obtenir une vue dégagée du ou des segments artériels qui l'intéressent.

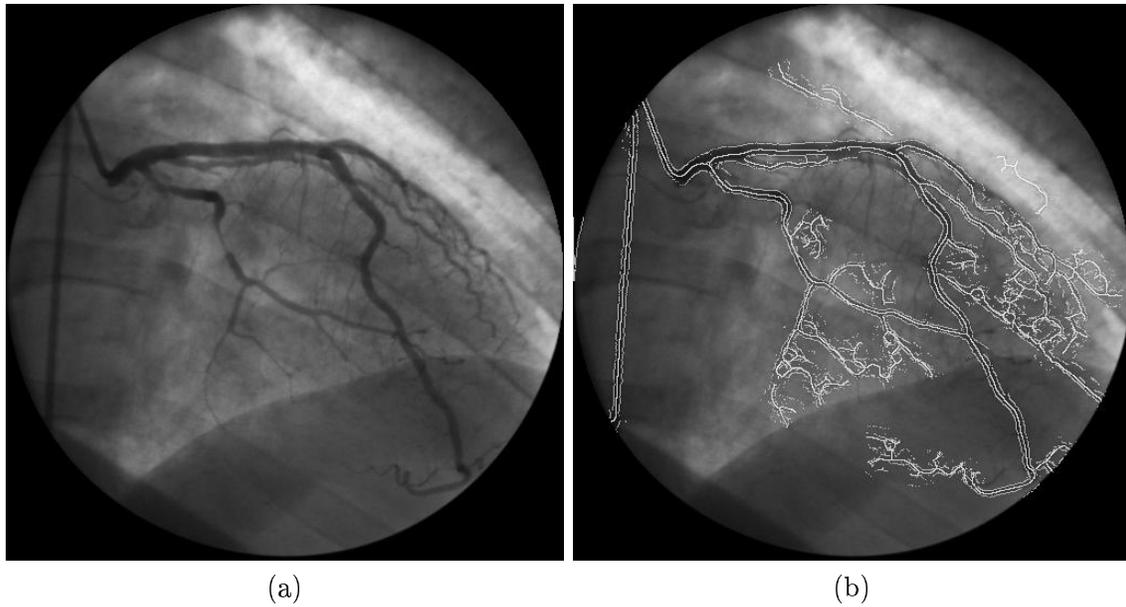


FIG. 10.5 – (a) : angiographie « CG-OAD15-CRA0 », (b) : détection multi-échelles des lignes centrales et détection des contours superposées à l'image originale avec  $N = 5$ ,  $K = 80$ .

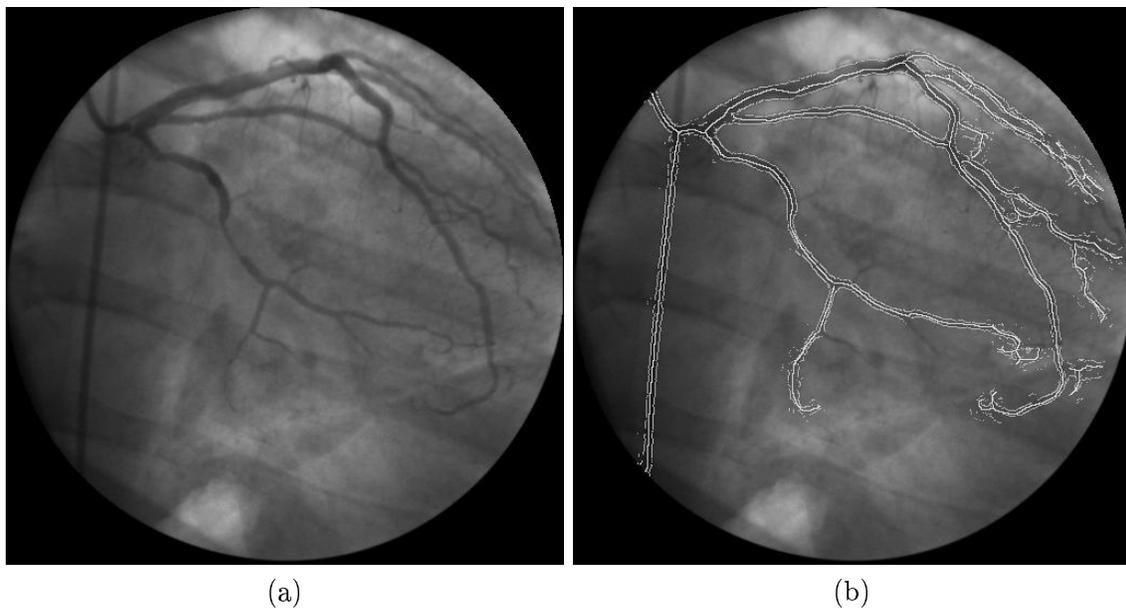


FIG. 10.6 – (a) : angiographie « CG-OAD12-CRA20 », (b) : détection multi-échelles des lignes centrales et détection des contours superposées à l'image originale avec  $N = 5$ ,  $K = 100$ .

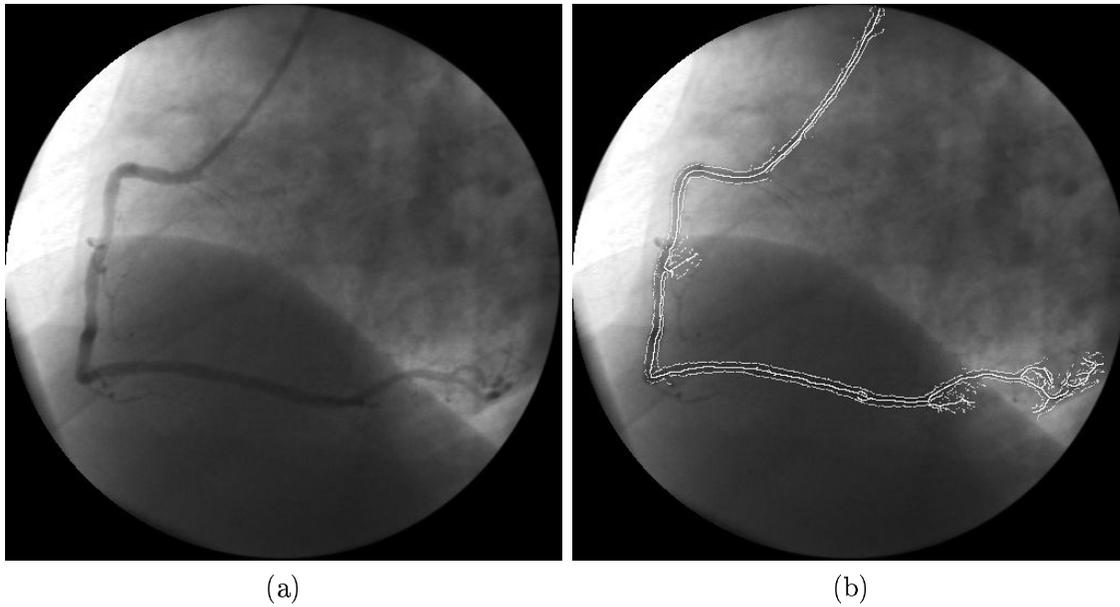


FIG. 10.7 – (a) : angiographie « CD-OAG55-CAU2 », (b) : détection multi-échelles des lignes centrales et détection des contours superposées à l'image originale avec  $N = 5$ ,  $K = 100$ .

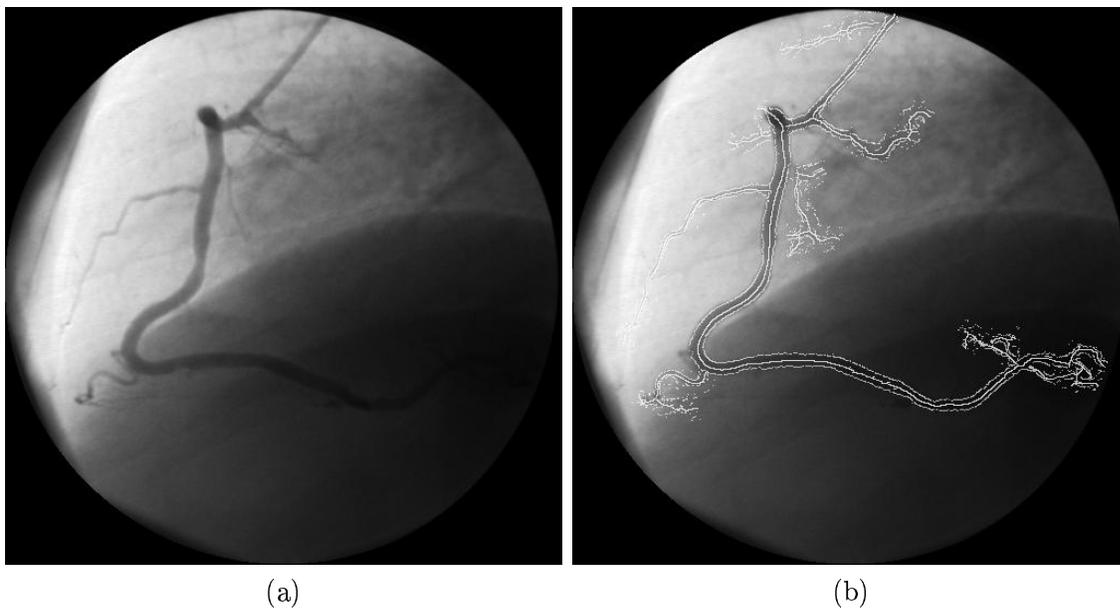


FIG. 10.8 – (a) : angiographie « CD-OAG89-CRA2 », (b) : détection multi-échelles des lignes centrales et détection des contours superposées à l'image originale avec  $N = 5$ ,  $K = 80$ .

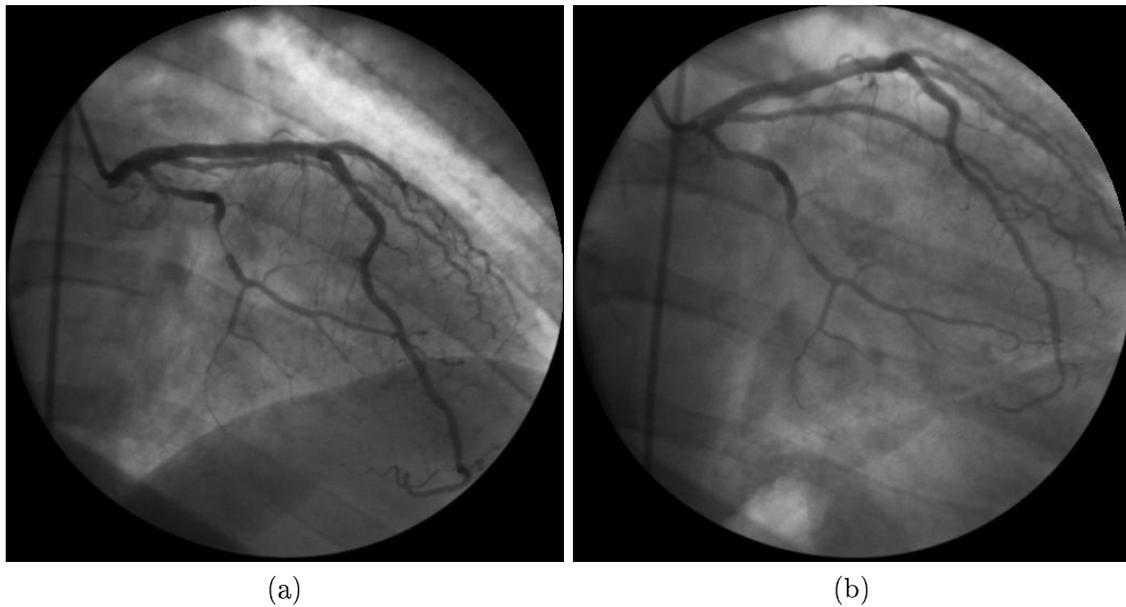


FIG. 10.9 – (a) : angiographie « CG-OAD15-CRA0 », (b) angiographie « CG-OAD12-CRA20 ».

## 10.4 Appariement des deux projections

En appliquant les algorithmes de détection multi-échelles des lignes centrales et des contours des vaisseaux sanguins sur au moins deux projections nous avons la possibilité, si nous arrivons à mettre en correspondance les structures détectées dans chacune des projections, d'effectuer une reconstruction 3D de l'arbre coronarien. Nous proposons dans cette section une stratégie d'appariement des vaisseaux sanguins de projections différentes.

Cette tâche est loin d'être triviale puisque nous sommes soumis aux contraintes suivantes :

- les différentes acquisitions ne se font pas de manière simultanée ;
- les angles d'acquisitions présentent des écarts très importants.

La première contrainte fait que nous ne sommes pas certains que les acquisitions proposées correspondent à un même instant de cycles cardiaques distincts. Nous ne sommes pas non plus certains que le produit de contraste se soit réparti de manière équivalente, c'est-à-dire en présentant les mêmes niveaux de gris dans la lumière des vaisseaux ni que le patient n'ait pas bougé entre les acquisitions. La seconde contrainte fait que de mêmes vaisseaux peuvent apparaître avec des longueurs et des topologies très différentes sur chacune des projections. À titre d'illustration, nous présentons sur la figure 10.9 un même arbre coronarien vu sous des angles de projection différents. On peut alors constater plus particulièrement les difficultés inhérentes à l'écart élevé des angles de projection.

Face à ces difficultés, nous proposons d'effectuer l'étape d'appariement par le biais d'un modèle anatomique tridimensionnel de l'arbre coronarien. Pour cela nous devons donc tout d'abord définir un modèle anatomique approprié. Nous supposons que la topologie anatomique de l'arbre coronarien inter-patients est invariante et nous décomposons la branche

artérielle de la coronaire droite selon les vaisseaux suivants :

- segment proximal de l'artère coronaire droite ;
- segment moyen de l'artère coronaire droite ;
- segment distal de l'artère coronaire droite ;
- marginale 1 ;
- inter ventriculaire postérieure ;
- rétro ventriculaires 1.

De même, nous avons pour l'artère coronaire gauche :

- tronc commun ;
- segment proximal de l'interventriculaire antérieure ;
- segment moyen de l'interventriculaire antérieure ;
- segment distal de l'interventriculaire antérieure ;
- septale 1 ;
- diagonale 1 ;
- diagonale 2 ;
- segment proximal de la circonflexe ;
- segment distal de la circonflexe ;
- marginale obtuse 1 ;
- marginale obtuse 2.

Dans un premier temps, nous proposons que le médecin effectue sur chaque vue l'étiquetage manuel des vaisseaux détectés. Cela revient en fait à effectuer l'appariement des projections par le biais d'un modèle topologique tridimensionnel. Nous illustrons le principe de cette méthode sur le schéma de la figure 10.10. Chacune des projections fournit la topologie 2D et la géométrie 2D des vaisseaux détectés. Ensuite, la mise en correspondance de chaque géométrie 2D permet d'apparier implicitement les deux vues. Finalement, une reconstruction 3D permet d'obtenir la topologie 3D et la géométrie 3D de l'arbre coronarien. Bien que manuelle, l'étape d'étiquetage n'est pas trop fastidieuse puisqu'à ce stade-là, le nombre de segments détectés à étiqueter est réduit, et cela d'autant plus si le médecin ne s'intéresse qu'à la reconstruction 3D d'un segment anatomique.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une modélisation de l'arbre artériel détecté offrant au médecin la possibilité, d'une part, d'interagir sur le résultat de la détection et d'autre part de faciliter l'étape délicate d'appariement. En outre, nous avons présenté une méthode simple et efficace de détection de points particuliers des lignes centrales ainsi qu'une méthode d'estimation du diamètre des vaisseaux détectés.

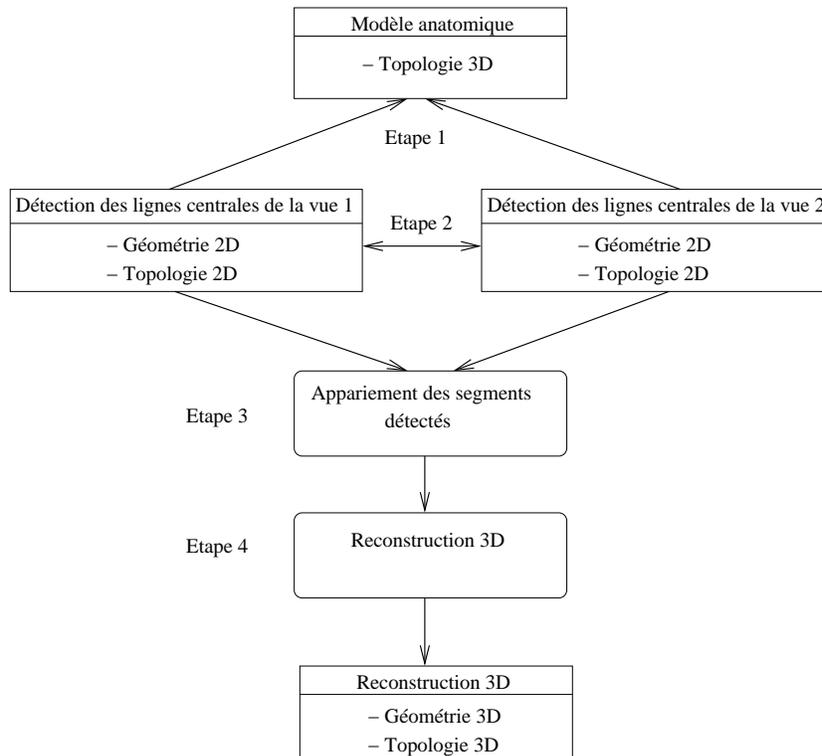


FIG. 10.10 – Stratégie d'appariement des segments détectés.



# Chapitre 11

## Conclusion et perspectives

Le travail original réalisé dans cette thèse découle d'un ensemble d'approches fondées sur les équations aux dérivées partielles et leur résolution ainsi que sur la géométrie différentielle. Les points principaux abordés dans cette thèse sont au nombre de cinq.

Nous avons tout d'abord centré nos travaux sur les traitements relatifs à la résolution numérique des EDP de lissage « classiques » en traitement d'images. Nous avons apporté un point de vue différent, en considérant les techniques de résolution des EDP comme des méthodes itératives, dites de recherche de point fixe. Cela nous a conduit à la proposition d'une méthode de résolution à pas adaptatif, dite  $\lambda$ -résolution pour l'équation de diffusion linéaire. Cette méthode nous a permis, en contrôlant la vitesse de convergence du processus de diffusion linéaire, de proposer également une nouvelle analyse multi-échelles linéaire qui a la particularité de préserver les contours. Nous avons ainsi obtenu un nouveau filtre de diffusion isotrope présentant de meilleures performances de débruitage qu'un filtre de diffusion anisotrope classique. Enfin, dans ce même chapitre, nous avons utilisé ce processus dans la phase de prétraitement d'un algorithme de détection des contours. Les contours ainsi obtenus sont bien détectés et bien localisés que ce soit sur des images en niveaux de gris ou sur des images en couleur.

Nous avons ensuite proposé une nouvelle EDP de filtre de choc inspirée des méthodes de la morphologie mathématique qui permet de rehausser les contours de façon stable et non oscillante avec une moindre sensibilité au bruit que le premier filtre de choc proposé par RUDIN [Rud84]. Nous l'avons de surcroît couplée avec une EDP de diffusion linéaire, résolue avec un pas adaptatif de manière à obtenir un filtre permettant d'éliminer le flou et le bruit dans les images.

Puis, nous avons utilisé le formalisme de la géométrie différentielle pour proposer des définitions de courbures adaptées aux images vectorielles. À partir de ces résultats théoriques, nous avons pu introduire une nouvelle EDP de lissage par courbure moyenne qui permet de lisser les images tout en préservant leurs contours ainsi qu'un moyen de mettre en évidence les crêtes et les vallées dans des images vectorielles. Ces méthodes ont finalement été appliquées à diverses images en couleur.

Enfin, nous avons proposé une stratégie automatique de détection multi-échelles des lignes

centrales des vaisseaux sanguins. L'algorithme proposé met en œuvre une nouvelle fonction de réponse ainsi qu'une nouvelle méthode d'extraction des lignes de fond. Cette méthode fournit des résultats de bonne qualité, tant en termes de continuité que de localisation, cela malgré la présence de sténoses sévères et le mauvais contraste des angiographies. De plus, l'algorithme présente un temps d'exécution raisonnable et peut facilement être adapté à d'autres modalités d'imagerie. De plus, nous avons montré que notre algorithme n'était pas cantonné à l'étude des coronographies. Nous avons en effet pu établir son efficacité aussi bien pour le traitement d'angiographies rétiniennes que pour le traitement d'images archéologiques de roche.

D'autre part, la modélisation sous forme de graphe attribué de l'arbre artériel nous a permis de fournir au médecin un outil de segmentation interactif permettant de lever les ambiguïtés de détection dues à la complexité du réseau vasculaire, aux superpositions et aux croisements des vaisseaux et donnant de surcroît accès à une estimation du diamètre des artères d'intérêt. Cette modélisation nous semble appropriée pour une reconstruction 3D ultérieure.

Différentes perspectives sont envisageables dans la continuité de ce travail.

Sur le plan théorique, plusieurs points restent encore à explorer concernant la  $\lambda$ -résolution des EDP. Tout d'abord, il serait intéressant de savoir si les propriétés remarquables du processus de diffusion linéaire telles que l'invariance aux translations, l'invariance aux rotations, et l'invariance aux zooms sont toujours vérifiées lorsque celui-ci utilise la  $\lambda$ -résolution. Puis, la localisation des contours étant préservée par notre processus de résolution, nous envisageons de l'intégrer dans un algorithme de segmentation multi-échelles. Ensuite, nous envisageons de proposer d'autres méthodes de résolutions en utilisant des paramètres de résolutions différents suivant les composantes axiales de l'image, ce qui pourrait apporter un intérêt dans le cadre d'un traitement sur une séquence d'images ou sur un volume. De plus, l'extension de la  $\lambda$ -résolution aux équations de diffusion non linéaires pourrait se révéler payante.

En outre, nous avons la conviction que les résultats obtenus par le filtre de lissage et rehaussement présenté dans le cinquième chapitre pourraient être encore améliorés si nous arrivions à définir, de la même manière que nous l'avons fait précédemment pour l'équation de diffusion linéaire, un paramètre d'évolution adaptatif pour le processus itératif correspondant à l'EDP de filtre de choc morphologique.

Finalement, en ce qui concerne le lissage d'images vectorielles par l'EDP de courbure moyenne, il serait intéressant de démontrer que cette équation fait effectivement évoluer les surfaces locales vers des surfaces minimales.

Sur le plan applicatif, nous envisageons de poursuivre le projet médical. À court terme, nous envisageons, pour cela, l'élaboration d'un algorithme de reconstruction 3D de segments artériels d'intérêt. Nous envisageons pour cela, d'utiliser une démarche similaire à celle proposée par BASSET-MERLE [BM99]. Cette démarche consiste à utiliser la géométrie épipolaire de manière à approximer les coordonnées tridimensionnelles des points particuliers des lignes centrales appariées, puis à modéliser la ligne centrale 3D des vaisseaux par une B-spline rationnelle non uniforme passant par les points particuliers reconstruits, et finalement à déformer itérativement ce modèle de manière à ce qu'il corresponde au mieux à la projection

des lignes centrales des deux incidences. La ligne centrale 3D ainsi obtenue, pourra ensuite être « habillée » par un cylindre généralisé à base elliptique qui lui-même sera déformé de manière à correspondre aux données 2D détectées.

Puis, à plus long terme, nous projetons d'élaborer, en étroite collaboration avec les chercheurs du groupement scientifique FISC, une image de synthèse 3D sur laquelle on pourra effectuer des simulations d'écoulements sanguins et ainsi apporter une indication symptomatique et une meilleure évaluation du retentissement hémodynamique des sténoses sur la perfusion myocardique. Par ailleurs, l'étape de fusion de notre algorithme de détection multi-échelles pourrait probablement être améliorée en utilisant des algorithmes plus complexes permettant de suivre les lignes centrales dans l'espace-échelles plutôt que les points des lignes centrales. Les résultats de la segmentation pourraient de plus être améliorés en appliquant de manière localisée, comme HARIS [HEM<sup>+</sup>99], un algorithme de ligne de partage des eaux contraint par la ligne centrale détectée. Une automatisation de l'étape d'appariement est par ailleurs envisageable en utilisant à la fois les contraintes épipolaires et un modèle anatomique de l'arbre coronarien.



# Annexe A

## Fonctions de diffusions et fonctions potentielles

Dans le tableau A.1 nous présentons des fonctions de diffusion permettant le rehaussement de contour. Les fonctions potentielles associées ne sont donc pas convexes et la condition (3.19) n'est pas respectée. Dans le tableau A.2 nous présentons des fonctions de diffusion permettant de lisser de façon anisotrope et correspondant à des fonctions potentielles convexes. Elles vérifient toutes les conditions (3.18) et (3.19).

Dans la table A.3 nous présentons les EDP qui peuvent se mettre sous le formalisme :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c_\xi I_{\xi\xi} + c_\eta I_{\eta\eta} \quad (\text{A.1})$$

où  $c_\xi$  et  $c_\eta$  contrairement aux fonctions précédentes n'ont pas forcément de liens entre eux. Cependant en remplaçant  $\Phi''(u)$  par  $c_\xi$  et  $\frac{\Phi'(u)}{u}$  par  $c_\eta$ , ces fonctions vérifient toutes les conditions 3.18 et 3.19.

Auteur(s)	Fonction D(u)	$\Phi''(u)$	$\frac{u\Phi''(u)}{\Phi'(u)}$
PERONA-MALIK [PM90]	$\exp(-(\frac{u}{s})^2)$	$(1 - \frac{2u^2}{k^2}) \exp(-(\frac{u}{k})^2)$	$1 - 2(\frac{u}{k})^2$
PERONA-MALIK 2 [PM90]	$\frac{1}{1 + (\frac{u}{k})^2}$	$\frac{1 - (\frac{u}{k})^2}{1 + (\frac{u}{k})^2}$	$\frac{1 - (\frac{u}{k})^2}{1 + (\frac{u}{k})^2}$
GEMAN-REYNOLDS [GR92]	$\frac{2}{k^2(1 + (\frac{u}{k})^2)^2}$	$\frac{2}{k^4} \frac{k^2 - 3u^2}{(1 + (\frac{u}{k})^2)^3}$	$\frac{1 - 3(\frac{u}{k})^2}{1 + (\frac{u}{k})^2}$

TAB. A.1 – Quelques fonctions de diffusion permettant le rehaussement de contour.

Auteur(s)	Fonction D(u)	$\Phi''(u)$	$\frac{u\Phi''(u)}{\Phi'(u)}$
GREEN [Gre90]	$\frac{\tanh(\frac{u}{k})}{ku}$	$\frac{1}{k^2 \cosh^2(\frac{u}{k})}$	$\frac{u}{k \sinh(\frac{u}{k}) \cosh(\frac{u}{k})}$
AUBERT et al. [AV97]	$\frac{1}{k^2 \sqrt{1 + (\frac{u}{s})^2}}$	$\frac{1}{k^2 (1 + (\frac{u}{k})^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{1 + (\frac{u}{k})^2}$
Saint-Marc et al. [SMCM91]	$\frac{1}{1+u}$	$\frac{1}{1+u^2}$	$\frac{1+u}{1+u^2}$
EL-FALLAH et al. [EFFAE94]	$\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{1+u^2}$	$\frac{1}{1+u^2}$
RUDIN-OSHER [ROF92]	$\frac{1}{u}$	0	0

TAB. A.2 – Quelques fonctions potentielles convexes.

Auteur(s)	$c_\eta$	$c_\xi$	$\frac{c_\xi}{c_\eta}$
ALVAREZ et al. [AGLM92]	$g(u)$	$(1 - h(u))g(u)$	$1 - h(u)$
KORNPROBST [Kor98]	1	$h(u)$	$h(u)$
MALLADI-SETHIAN [MS96]	1	$\frac{1}{1+u^2}$	$\frac{1}{1+u^2}$
SOCHEN et al. [SKM98]	$\frac{1}{1+u^2}$	$\frac{1}{(1+u^2)^2}$	$\frac{1}{1+u^2}$

TAB. A.3 – Quelques EDP pouvant s'écrire sous la forme  $c_\xi I_{\xi\xi} + c_\eta I_{\eta\eta}$ .

## Annexe B

# Quelques notions de géométrie différentielle et riemannienne

### Introduction

Dans cette annexe, nous présentons rapidement les principaux opérateurs différentiels que nous utilisons à de nombreuses reprises dans ce manuscrit ainsi que quelques notions de géométrie différentielle et riemannienne. Ces outils mathématiques permettent de décrire la forme locale des objets continus (courbes, surfaces...) qui composent les images. La géométrie différentielle fait appel à de nombreuses notions mathématiques et nous n'avons pas, ici, la prétention de faire une présentation exhaustive du sujet. Les lecteurs intéressés pourront se reporter aux ouvrages de DOUBROVINE et *al.* [DNF82], de SPIVAK [Spi79] ou de CARTAN [Car67]. Après avoir donné les notations de différentiation sur des images, nous présentons deux modélisations continues de l'image : la modélisation par ensembles de niveau et la modélisation par surface.

### B.1 Notations

Nous utilisons ici les notations les plus courantes rencontrées dans la littérature. L'image est modélisée par une fonction continue de luminance (ou intensité) :

$$I : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}.$$

Soit  $\chi = \{x^1, \dots, x^n\}$  le système de coordonnées. Lorsque celui-ci est bidimensionnel, nous le notons  $\chi = \{x, y\}$ . Pour simplifier les expressions, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous substituons  $I$  à  $I(x^1, \dots, x^n)$  pour désigner la fonction intensité de l'image. Enfin, nous supposons  $I$  suffisamment différentiable.

La dérivée première de la fonction intensité de l'image suivant la coordonnée  $x^i$  est notée :

$$I_{x^i} = \frac{\partial I}{\partial x^i}$$

Le gradient de l'image est le vecteur  $\nabla I$  tel que :

$$\nabla I = \left( \frac{\partial I}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial I}{\partial x^n} \right)^T$$

où  $(.)^T$  désigne l'opérateur de transposition. Par extension, la dérivée première dans la direction constante  $a \in \mathbb{R}^n / \{0\}$  est notée :

$$I_a = \langle \nabla I, a \rangle$$

où  $\langle \nabla I, a \rangle$  désigne le produit scalaire euclidien des vecteurs  $\nabla I$  et  $a$ . La dérivée seconde par rapport aux coordonnées  $x^i$  et  $x^j$  est désignée par l'expression :

$$I_{x^i x^j} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^i \partial x^j}$$

La matrice hessienne est alors la matrice  $\mathcal{H}I$  :

$$\mathcal{H}I = \begin{pmatrix} I_{x^1 x^1} & \cdots & I_{x^1 x^n} \\ \vdots & I_{x^i x^j} & \vdots \\ I_{x^n x^1} & \cdots & I_{x^n x^n} \end{pmatrix}$$

Lorsqu'il n'y aura pas ambiguïté, nous utiliserons  $\mathcal{H}$  pour désigner  $\mathcal{H}I$ . Plus généralement, la dérivée par rapport au vecteur  $b \in \mathbb{R}^n / \{0\}$  de la dérivée de l'intensité dans la direction constante  $a$  est notée :

$$I_{ab} = \langle \nabla I_a, b \rangle = a^T \mathcal{H}I b \quad (\text{B.1})$$

On pourra noter que  $I_{ab} = I_{ba}$ . Soit  $\mathcal{E}$  un espace vectoriel quelconque, pour ne pas confondre le produit scalaire et la norme associés à cet espace à ceux associés à l'espace euclidien nous les désignons respectivement  $\langle x, y \rangle_{\mathcal{E}}$  et  $\|.\|_{\mathcal{E}}$ . Ainsi, les notations  $\|.\|$  et  $\|.\|_{\mathbb{R}^n}$  désignent la norme euclidienne. De même,  $\langle ., . \rangle$  et  $\langle ., . \rangle_{\mathbb{R}^n}$  désignent de façon équivalente le produit scalaire euclidien.

## B.2 Modélisation d'une image par un empilement d'ensembles de niveau

### Définition 3

Les ensembles de niveau d'une image  $I$  sont les lieux  $(I_c)_{c \in \mathbb{R}}$  du plan euclidien vérifiant :

$$\forall c \in \mathbb{R}, \quad I^c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid I(x) = c\} \quad (\text{B.2})$$

Ils définissent une partition complète du plan euclidien en une famille d'ensembles fermés stables et autorisant une reconstruction de l'image :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad I(x) = \sup \{c \in \mathbb{R} \mid x \in I^c\} \quad (\text{B.3})$$

Cette partition comprend :

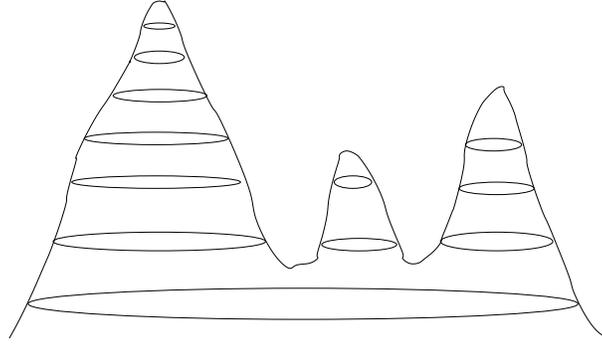


FIG. B.1 – Quelques lignes de niveau tracées sur une surface.

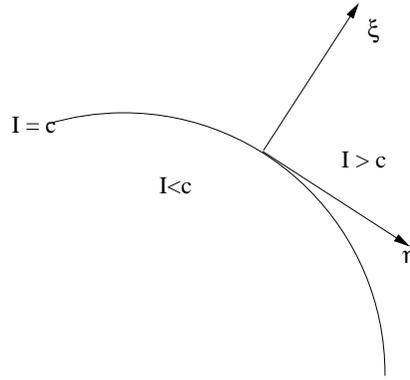


FIG. B.2 – Définition des directions principales par rapport à l'isophote.

- des domaines de luminance constante correspondant aux *extrema* régionaux et aux plateaux de la surface de luminance;
- des courbes planes  $\mathcal{C}^2$ -continues, deux à deux disjointes, appelées *lignes de niveau* ou *isophotes*.

À titre d'illustration, nous présentons quelques lignes de niveau d'une surface quelconque sur la figure B.1. Soient

$$\xi = \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} = \frac{(I_x, I_y)^T}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}, \quad \eta = \left( \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \right)^\perp = \frac{(I_y, -I_x)^T}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}$$

respectivement, les vecteurs normal et tangent à une isophote donnée de la surface image (cf. figure B.2). Les dérivées première et seconde de l'image dans les directions  $\eta$  et  $\xi$  donnent des informations sur la géométrie locale de la surface.

### B.2.1 Dérivées premières dans la base $(\eta, \xi)$

La dérivée première dans la direction de  $\xi$  s'exprime :

$$I_\xi = \langle \nabla I, \xi \rangle = \|\nabla I\| \tag{B.4}$$

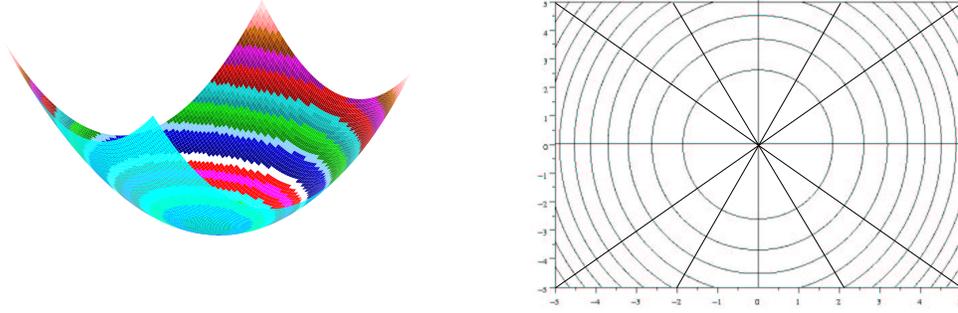


FIG. B.3 – À gauche : une surface d'équation  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ , à droite : réseau formé par les lignes de niveau et les lignes de courant de cette surface.

$I_\xi$  n'est rien d'autre que l'usuelle norme du gradient de l'image et  $\xi$  indique la direction de la plus grande pente de la surface. C'est aussi un invariant différentiel, *i.e.* elle est indépendante du système de coordonnées, du premier ordre. La dérivée première dans la direction de  $\eta$  s'exprime :

$$I_\eta = \langle \nabla I, \eta \rangle = 0 \quad (\text{B.5})$$

Le niveau de gris étant constant sur l'isophote, la dérivée dans cette direction est bien évidemment nulle. Cette équation montre l'existence de lignes orthogonales aux lignes de niveau. Ces lignes sont appelées *lignes de courant* et forment un réseau avec les lignes de niveau. On peut voir sur la figure B.3 le réseau correspondant à une surface en forme de cuvette.

### B.2.2 Dérivées secondes dans la base $(\eta, \xi)$

Soit  $\mathcal{H}_{(\eta, \xi)}$  la matrice hessienne exprimée dans base  $(\eta, \xi)$  :

$$\mathcal{H}_{(\eta, \xi)} = \begin{pmatrix} I_{\eta\eta} & I_{\eta\xi} \\ I_{\eta\xi} & I_{\xi\xi} \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

En utilisant la relation (B.1) on déduit l'expression de cette matrice en fonction de la matrice hessienne exprimée dans la base  $(x, y)$  :

$$\mathcal{H}_{(\eta, \xi)} = [\eta \quad \xi]^T \mathcal{H}_{(x, y)} [\eta \quad \xi] \quad (\text{B.7})$$

Soit :

$$\mathcal{H}_{(\eta, \xi)} = \frac{1}{I_x^2 + I_y^2} \begin{pmatrix} I_y & -I_x \\ I_x & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_y & I_x \\ -I_x & I_y \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\mathcal{H}_{(\eta, \xi)} = \begin{pmatrix} \frac{I_y^2 I_{xx} - 2I_x I_y I_{xy} + I_x^2 I_{yy}}{I_x^2 + I_y^2} & \frac{(I_y^2 - I_x^2) I_{xy} + I_x I_y (I_{xx} - I_{yy})}{I_x^2 + I_y^2} \\ \frac{(I_y^2 - I_x^2) I_{xy} + I_x I_y (I_{xx} - I_{yy})}{I_x^2 + I_y^2} & \frac{I_x^2 I_{xx} + 2I_x I_y I_{xy} + I_y^2 I_{yy}}{I_x^2 + I_y^2} \end{pmatrix}$$

D'où,

$$I_{\eta\eta} = \frac{I_y^2 I_{xx} - 2I_x I_y I_{xy} + I_x^2 I_{yy}}{I_x^2 + I_y^2} \quad (\text{B.8})$$

$$I_{\xi\xi} = \frac{I_x^2 I_{xx} + 2I_x I_y I_{xy} + I_y^2 I_{yy}}{I_x^2 + I_y^2} \quad (\text{B.9})$$

$$I_{\eta\xi} = \frac{(I_y^2 - I_x^2)I_{xy} + I_x I_y (I_{xx} - I_{yy})}{I_x^2 + I_y^2} \quad (\text{B.10})$$

La matrice précédente définit trois invariants différentiels du deuxième ordre qui ont les expressions suivantes :

$$\mathcal{K} = -\frac{I_{\eta\eta}}{\|\nabla I\|} \quad (\text{B.11})$$

$$\delta_g = -\frac{I_{\xi\xi}}{\|\nabla I\|} \quad (\text{B.12})$$

$$\mu = -\frac{I_{\eta\xi}}{\|\nabla I\|} \quad (\text{B.13})$$

Ce sont respectivement la courbure des lignes de niveau, la variation relative du champ scalaire  $\|\nabla I\|$  le long des lignes de courant et la courbure des lignes de courant. Il est à noter que  $\mathcal{K}$  et  $\mu$  sont de plus invariants aux transformations inversibles de la luminosité.

### B.3 Modélisation d'une image par une surface

Dans cette section, l'image est modélisée par une surface. L'étude des courbes tracées sur la surface image permet de caractériser localement la géométrie de la surface. Nous supposons que les courbes et surfaces de cette section sont suffisamment différentiables pour que toutes les notions abordées dans cette section soient fondées. Pour faciliter la compréhension et la visualisation, nous prenons ici le parti de nous limiter à la dimension trois. Toutefois, nous conservons des notations un peu plus générales. Soit  $\Sigma$  une variété de dimension 2 localement immergée dans un espace  $M$  de dimension  $m$ . Par exemple,  $M$  est l'espace euclidien  $\mathbb{R}^m$ . Une surface peut être définie localement par l'application  $\mathbf{S}$  de  $\Sigma$  dans  $M$  :

$$\mathbf{S} = (S^1(u^1, u^2), S^2(u^1, u^2), \dots, S^m(u^1, u^2)) \quad (\text{B.14})$$

$u^1$  et  $u^2$  étant les coordonnées curvilignes sur la surface image. En chaque point de  $\mathbf{S}$ , l'espace tangent  $T$  est défini comme le plan engendré par les vecteurs (cf. figure B.4) :

$$\mathbf{S}_{u^1} = \frac{\partial \mathbf{S}(u^1, u^2)}{\partial u^1} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_{u^2} = \frac{\partial \mathbf{S}(u^1, u^2)}{\partial u^2}.$$

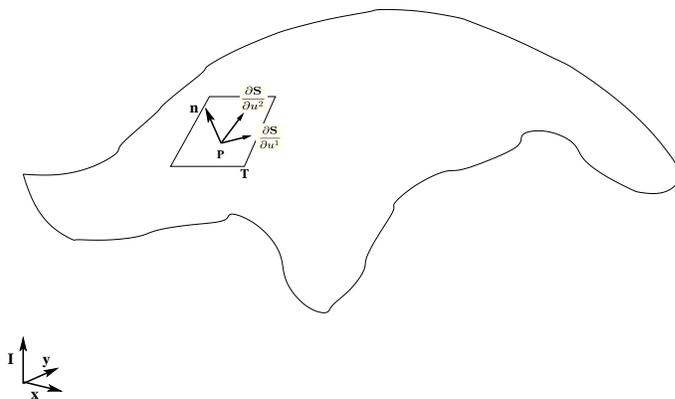


FIG. B.4 – Plan tangent à la surface au point P.

### B.3.1 Première forme fondamentale

#### Préambule

On peut construire une courbe régulière ( $\Gamma$ ) tracée sur  $\mathbf{S}$  de la façon suivante : soit une application  $\varphi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$t \rightarrow (u^1, u^2) = \varphi(t) = (\varphi^1(t), \varphi^2(t)).$$

$$C(t) = \mathbf{S}(\varphi(t)) = \mathbf{S}(\varphi^1(t), \varphi^2(t)), \quad (\text{B.15})$$

est alors une représentation paramétrique d'une courbe tracée sur  $\mathbf{S}$ . Le vecteur tangent  $\vec{\tau}$  de la courbe au point  $\mathbf{S}(\varphi(t))$  est obtenue par dérivation de (B.15) :

$$\vec{\tau} = C'(t) = \varphi'^1(t) \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^1}(\varphi(t)) + \varphi'^2(t) \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^2}(\varphi(t)) \quad (\text{B.16})$$

La formule ci-dessus confirme bien l'intuition que  $\vec{\tau}$  doit appartenir au plan tangent à la surface. La longueur d'un arc tracé sur la surface entre les points  $C(t_0)$  et  $C(t_1)$  s'écrit :

$$l_{[t_0, t_1]} = \int_{t_0}^{t_1} \|C'(t)\| dt$$

or,

$$\|C'(t)\| = \sqrt{\langle C'(t), C'(t) \rangle_{\mathbb{R}^3}} \quad (\text{B.17})$$

Soit :

$$l_{[t_0, t_1]} = \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{i,j=1}^2 \langle \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^i}, \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^j} \rangle_{\mathbb{R}^m} \varphi'^i(t) \varphi'^j(t) \right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (\text{B.18})$$

La formule précédente nous fournit implicitement la longueur au carré d'un petit déplacement sur ( $\Gamma$ ) pour une petite variation des coordonnées curvilignes.

### Définition de la première forme fondamentale

La distance au carré,  $ds^2$  entre deux points proches de la surface correspond à la *première forme fondamentale* et est définie par une forme bilinéaire symétrique définie positive  $g_{\mu\nu}(u^1, u^2)$  :

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} du^i du^j \quad (\text{B.19})$$

où

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^i}, \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^j} \right\rangle_{\mathbb{R}^m}$$

$du^1$  et  $du^2$  représentent les différentielles respectives des coordonnées  $u^1$  et  $u^2$ . Notons  $F_1 = (g_{ij})_{i,j=1,2}$ , la matrice associée à cette forme :

$$F_1 = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{S}_{u^1}, \mathbf{S}_{u^1} \rangle & \langle \mathbf{S}_{u^1}, \mathbf{S}_{u^2} \rangle \\ \langle \mathbf{S}_{u^1}, \mathbf{S}_{u^2} \rangle & \langle \mathbf{S}_{u^2}, \mathbf{S}_{u^2} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \quad (\text{B.20})$$

La première forme fondamentale nous permet de définir une métrique ( $g_{\mu\nu}(u^1, u^2)$ ) sur l'espace  $\Sigma$ . Ainsi, l'extension aux surfaces des notions de longueur, d'angle et d'aire de la géométrie plane est possible. Soit  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Sigma$ , la métrique  $g_{\mu\nu}$  définit naturellement un produit scalaire sur  $\Sigma$  :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Sigma} = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} u^i v^j \quad (\text{B.21})$$

Nous remarquons que si  $g_{\mu\nu}$  est la métrique euclidienne ( $g_{\mu\nu} = \mathcal{I}_2$ ) nous retrouvons bien le produit scalaire euclidien. Soit  $g_{\Sigma}$  et  $g_M$  les métriques respectives de  $\Sigma$  et  $M$ . On peut utiliser la métrique de  $M$  pour construire une métrique sur  $\Sigma$ . Pour cela, il suffit de trouver  $S^*$  tel que :

$$(g_{\mu\nu})_{\Sigma} = S^*(g_{ij})_M \quad (\text{B.22})$$

Cette métrique est appelée *métrique induite* :

$$(g_{\mu\nu})_{\Sigma} = \sum_{i,j=1}^m (g_{ij})_M \frac{\partial S^i}{\partial u^{\mu}} \frac{\partial S^j}{\partial u^{\nu}} \quad (\text{B.23})$$

Supposons à titre d'exemple que la surface soit définie localement par l'application :

$$\mathbf{S} = (S^1(x, y) = x, S^2(x, y) = y, S^3(x, y) = I(x, y))$$

alors :

$$\begin{aligned} S_x &= (1, 0, I_x)^T \\ S_y &= (0, 1, I_y)^T \end{aligned}$$

d'où nous déduisons les expressions des  $g_{ij}$  :

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + I_x^2 \\ g_{12} &= I_x I_y \\ g_{22} &= 1 + I_y^2 \end{aligned}$$

il vient alors :

$$ds^2 = (1 + I_x^2)dx^2 + 2I_x I_y dx dy + (1 + I_y^2)dy^2$$

La figure B.5 illustre géométriquement la relation précédente.

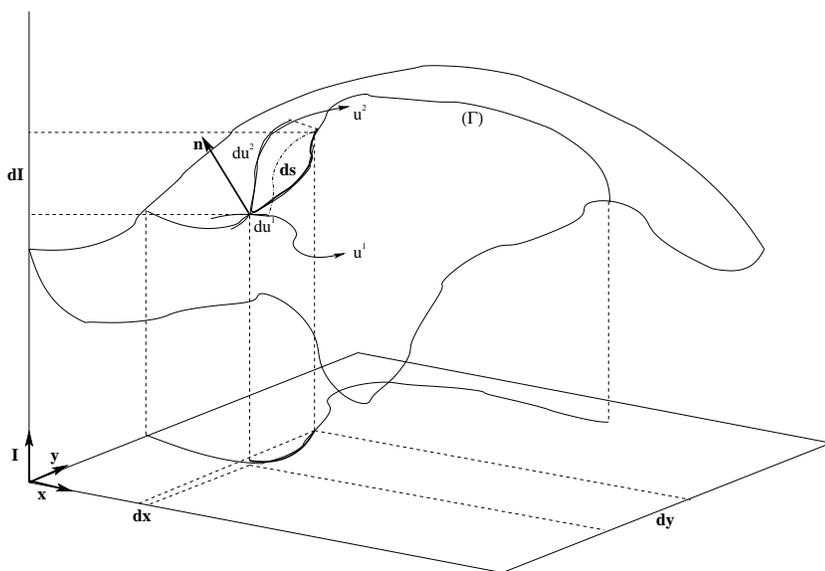


FIG. B.5 – Une courbe  $(\Gamma)$  tracée sur une surface.

### Angle entre deux courbes tracées sur la surface

#### Définition 4

Soient  $(\Gamma_1)$  et  $(\Gamma_2)$  deux courbes tracées sur une surface  $\mathbf{S}$  de  $\mathbb{R}^3$  se coupant en un point  $P$  appartenant à la surface. L'angle entre les deux courbes est défini par l'angle  $\alpha$  entre leurs vecteurs tangents  $\vec{t}_1$  et  $\vec{t}_2$  au point  $P$ .

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{t}_1, \vec{t}_2 \rangle_{\Sigma}}{\|\vec{t}_1\|_{\Sigma} \|\vec{t}_2\|_{\Sigma}}, \quad \alpha \in [0, \pi] \quad (\text{B.24})$$

### Aire d'un élément de surface

#### Théorème 4

L'aire d'un domaine  $U$  sur la surface  $\mathbf{S}$  est donnée par l'expression :

$$A(U) = \int_U \sqrt{ef - g^2} du^1 du^2 \quad (\text{B.25})$$

### B.3.2 Seconde forme fondamentale

Nous nous plaçons ici, dans  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\vec{N}$  un vecteur orthogonal à la surface tel que le triplet  $(\mathbf{S}_{u^1}, \mathbf{S}_{u^2}, \vec{N})$  forme un trièdre direct. Autrement dit,  $\vec{N} = \mathbf{S}_{u^1} \wedge \mathbf{S}_{u^2}$ . Soit  $\vec{n}$  le vecteur unitaire :

$$\vec{n} = \frac{\mathbf{S}_{u^1} \wedge \mathbf{S}_{u^2}}{\|\mathbf{S}_{u^1} \wedge \mathbf{S}_{u^2}\|} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} \quad (\text{B.26})$$

La *deuxième forme fondamentale* représente la courbure des courbes tracées sur la surface. Elle permet de définir la variation de la normale  $\vec{n}$  à la surface en un point pour une variation des paramètres. Elle est définie par :

$$\begin{aligned} L_2 &= \langle d\mathbf{S}, d\vec{n} \rangle \\ L_2 &= \langle \vec{n}, \mathbf{S}_{u^1 u^1} \rangle du^1 du^1 + 2 \langle \vec{n}, \mathbf{S}_{u^1 u^2} \rangle du^1 du^2 + \langle \vec{n}, \mathbf{S}_{u^2 u^2} \rangle du^2 du^2 \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

C'est une forme bilinéaire symétrique qui a pour matrice associée :

$$F_2 = \begin{pmatrix} \langle \vec{n}, \mathbf{S}_{u^1 u^1} \rangle & \langle \vec{n}, \mathbf{S}_{u^1 u^2} \rangle \\ \langle \vec{n}, \mathbf{S}_{u^1 u^2} \rangle & \langle \vec{n}, \mathbf{S}_{u^2 u^2} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \quad (\text{B.28})$$

Soit  $\vec{\nu}$  le vecteur normal à la courbe  $(\Gamma)$ . La courbure de la projection de  $(\Gamma)$  sur le plan défini par le triplet  $(C(t), \vec{\tau}, \vec{\nu})$  est appelée *courbure normale*, elle s'exprime comme le rapport des deux formes fondamentales :

$$k_n = \frac{l du^1 du^1 + 2m du^1 du^2 + n du^2 du^2}{e du^1 du^1 + 2f du^1 du^2 + g du^2 du^2} \quad (\text{B.29})$$

En dimension 3,  $k_n$  présente deux valeurs extrémales dénommées *courbures principales*. Nous les noterons  $k_1$  et  $k_2$  par la suite. Par ailleurs, le vecteur unitaire  $\vec{n}$  définit une application de  $\mathbf{S}$  sur la sphère unité appelée *application de Gauss*. La différentielle de cette application est une application linéaire du plan tangent  $T$  sur lui-même. Ainsi, nous obtenons les relations de WEINGARTEN :

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial u^1} = a_{11} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^1} + a_{12} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^2} \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial u^2} = a_{21} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^1} + a_{22} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^2} \quad (\text{B.31})$$

qui peuvent être réécrites sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.32})$$

avec  $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1,2}$ . On peut montrer que la matrice  $\mathcal{A}$  et les matrices  $F_1$  et  $F_2$  respectivement associées aux première et seconde formes fondamentales sont liées par la relation :

$$\mathcal{A} = F_1^{-1}F_2. \quad (\text{B.33})$$

Par conséquent, en utilisant les équations (B.20) et (B.28),  $\mathcal{A}$  s'exprime de manière plus explicite sous la forme :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{eg - f^2} \begin{pmatrix} gl - fm & gm - fn \\ em - fl & en - fm \end{pmatrix} \quad (\text{B.34})$$

En outre, il se trouve que les valeurs propres  $k_1$  et  $k_2$  et les vecteurs propres  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  de  $\mathcal{A}$  correspondent respectivement aux courbures principales et aux directions de courbures principales. Ces entités s'expriment facilement en fonction des valeurs de la matrice  $\mathcal{A}$  :

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}) \\ k_2 &= \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}) \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

$$\vec{v}_1 = \pm \begin{pmatrix} a_{12} \\ k_1 - a_{11} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = \pm \begin{pmatrix} a_{12} \\ k_2 - a_{11} \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, les courbures principales peuvent être combinées en des quantités indépendantes de la direction appelées *courbure gaussienne* et *courbure moyenne*.

#### Définition 5

La courbure gaussienne de la surface est le produit des courbures principales :

$$K = k_1k_2 = \det(\mathcal{A}) = \frac{ln - m^2}{eg - f^2} \quad (\text{B.36})$$

$K$  permet de caractériser l'écart de la surface par rapport au plan tangent.

#### Définition 6

La courbure moyenne de la surface est la somme des courbures principales :

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = -\text{trace}(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \frac{en + gl - 2fm}{eg - f^2} \quad (\text{B.37})$$

En sens inverse, les courbures principales peuvent alors s'exprimer en fonction de la courbure moyenne et de la courbure gaussienne.

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad (\text{B.38})$$

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (\text{B.39})$$

Si la métrique sur la surface est la métrique euclidienne, la matrice  $F_1$  est alors la matrice identité. Ainsi, la matrice  $\mathcal{A}$  devient la matrice hessienne. Par contre, si la métrique sur la surface est la métrique induite, la matrice  $\mathcal{A}$  est appelée matrice de WEINGARTEN que nous

Métrique	Euclidienne	Induite
$F_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 + I_x^2 & I_x I_y \\ I_x I_y & 1 + I_y^2 \end{pmatrix}$
$F_2$	$\mathcal{H}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + I_x^2 + I_y^2}} \mathcal{H}$
$K$	$I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2$	$\frac{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}{1 + I_x^2 + I_y^2}$
$H$	$\frac{I_{xx} + I_{yy}}{2}$	$\frac{(1 + I_y^2) I_{xx} - 2 I_x I_y I_{xy} + (1 + I_x^2) I_{yy}}{2(1 + I_x^2 + I_y^2)^{\frac{3}{2}}}$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{W} = F_1^{-1} F_2$

TAB. B.1 – Caractéristiques différentielles suivant le choix de la métrique sur  $\Sigma$ .

notons  $\mathcal{W}$ . Nous présentons dans le tableau B.1 les expressions des formes fondamentales, des courbures moyenne et gaussienne suivant le choix de la métrique sur la surface. Ces deux métriques sont invariantes pour les transformations euclidiennes. En revanche, seule la métrique induite est invariante aux transformées unitaires spatiales. De même que les courbures moyenne et gaussienne, les courbures principales permettent de classer les points de la surface selon les catégories suivantes : *vallée*, *crête*, *plat*, *ombilic*, *minimal* et *selle*, *pic* et *trou*. Ainsi,

- un point plat est caractérisé par  $k_1 = k_2 = 0$  ;
- un point ombilic est caractérisé par  $k_1 = k_2$  ;
- un point minimal est caractérisé par  $k_1 = -k_2$  ;
- un point crête est caractérisé par  $k_1 = 0$  et  $k_2 < 0$  ;
- un point vallée est caractérisé par  $k_1 > 0$  et  $k_2 = 0$  ;
- un point selle est un point caractérisé par  $k_1 k_2 < 0$  et  $k_1 \neq k_2$  ;
- un point pic est un point caractérisé par  $k_1 < 0$ ,  $k_2 < 0$  et  $-k_2 > -k_1$  ;
- un point trou est un point caractérisé par  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$  et  $k_1 > k_2$ .

La figure B.6 illustre cette classification.

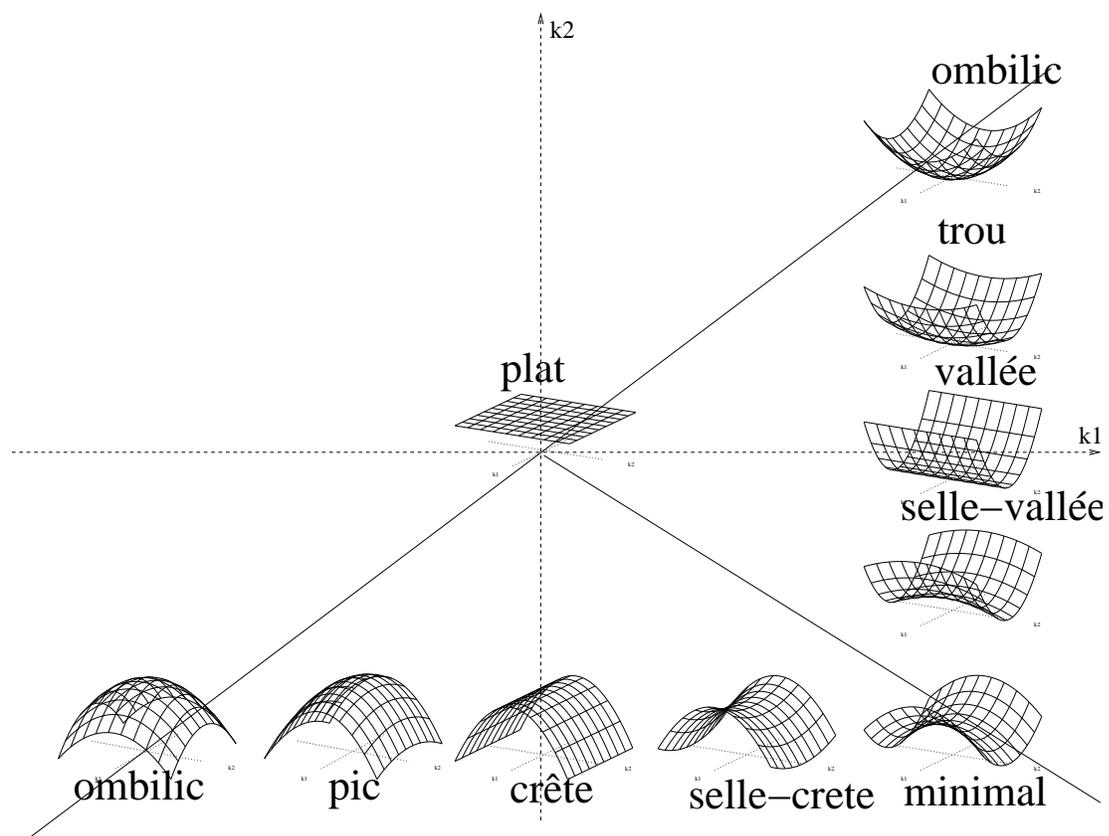
## B.4 Relation entre les courbures des isophotes et les courbures 3D

Soient  $\theta$  l'angle entre  $\vec{n}$  et  $\xi$  puis  $\delta$  l'angle entre  $\vec{v}_1$  et  $\vec{\tau}$ . La courbure normale  $k_n$ , la courbure d'une isophote  $\mathcal{K}$ , et les courbures principales  $k_1$  et  $k_2$  sont alors liées par la relation :

$$k_n = \mathcal{K} \cos \theta = k_1 \cos^2 \delta + k_2 \sin^2 \delta \quad (\text{B.40})$$

On peut remarquer ici, que si  $\vec{n}$  et  $\xi$  sont colinéaires alors la courbure normale et la courbure de l'isophote sont égales :

$$k_n = \mathcal{K}.$$

FIG. B.6 – Types de points en fonction  $k_1$  et  $k_2$ .

# Annexe C

## Modèles de profils de ligne

Tous les profils sont donnés de façon à avoir le minimum en 0 et sont de largeur  $2\omega$ .

### C.1 Notation

Soit  $H(x)$  la fonction de HEAVISIDE.

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Cette fonction est représentée sur la figure C.1

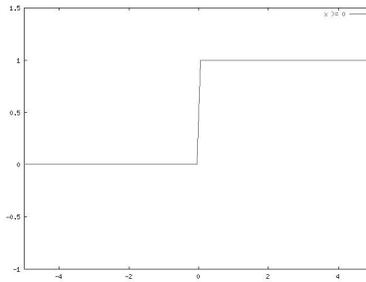


FIG. C.1 – Fonction de HEAVISIDE.

### C.2 Modèle barre

$$P(x, \omega) = A(H(x - \omega) - H(x + \omega)) \tag{C.1}$$

On peut observer cette fonction sur la figure C.2.

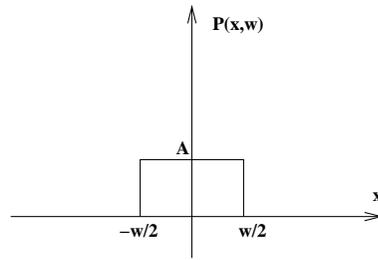


FIG. C.2 – Modèle de vallée barre.

### C.3 Modèle gaussien

$$P(x, \omega) = A \left( 1 - k \exp \left( - \frac{x^2}{2\omega^2} \right) \right) \quad (\text{C.2})$$

Ce profil est représenté sur la figure C.3.

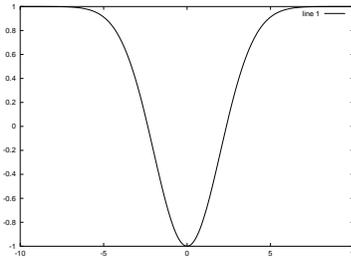


FIG. C.3 – Modèle de vallée gaussien.

### C.4 Modèle parabolique

$$P(x) = \begin{cases} A \left( \frac{x}{\omega} \right)^2 & \text{si } |x| \leq \omega \\ 0 & \text{si } |x| < \omega \end{cases}$$

Un exemple de profil parabolique est donné sur la figure C.4

### C.5 Modèle triangulaire

$$P(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x < -\omega \\ \alpha x & \text{si } -\omega \geq x \geq 0 \\ \beta x & \text{si } 0 \geq x \geq \omega \\ \beta & \text{si } x > \omega \end{cases}$$

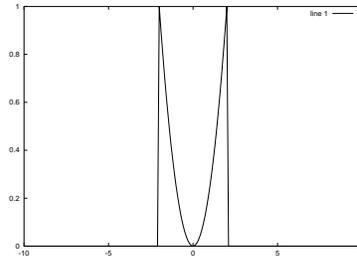


FIG. C.4 – Modèle de vallée parabolique.

avec  $\alpha < 0$  et  $\beta > 0$ .

## C.6 Modèle issu du modèle du vaisseau

Ce modèle est issu de la projection d'un modèle de vaisseau sur un plan.

$$P(x, \omega) = A(1 - \sqrt{(\omega)^2 - x^2}), \quad 0 < x < \omega \quad (\text{C.3})$$

On peut observer ce profil sur la figure C.5.

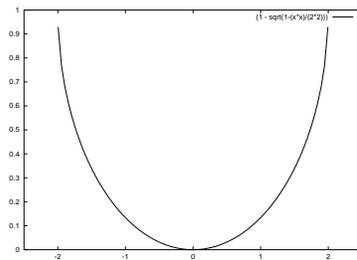


FIG. C.5 – Modèle de la projection d'un vaisseau.



# Annexe D

## Divers gradients en couleur

Soit  $I^i$  le  $i$ -ème plan couleur de l'image. On pourra prendre par exemple la base de représentation couleur RGB avec  $I^1 = R$ ,  $I^2 = G$  et  $I^3 = B$ .

### D.1 Gradient marginal

Notons  $\mathbf{I}(x, y) = \overrightarrow{I(x, y)} = (I^1(x, y), I^2(x, y), I^3(x, y))$ . Le gradient le plus simple est le gradient marginal. Sa norme est donnée par la somme des gradients des trois composantes.

$$\|\nabla \mathbf{I}\|^2 = \sum_{i=1}^3 \|\nabla I^i\|^2 \quad (\text{D.1})$$

Cela correspond à la norme de la matrice Jacobienne  $J = \left( \frac{\partial I^i}{\partial x} \mid \frac{\partial I^i}{\partial y} \right)$  (cf. section 3.1.5). Pour l'angle du gradient il y a plusieurs possibilités :

- direction du gradient de plus forte norme ;
- direction moyenne (à  $\pi$  près) ;
- ...

### D.2 Gradients vectoriels de DI-ZENZO et LEE-COK

Dans DI-ZENZO [Zen86], le gradient est considéré comme la distance au carré entre deux vecteurs voisins dans l'espace des composantes. La direction  $\theta$  qui maximise cette distance est la direction du gradient. La valeur de cette distance pour  $\theta$  est la norme du gradient. Et donc la norme du gradient vectoriel a pour expression :

$$\|\nabla \mathbf{I}\|^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \|\nabla I^i\|^2 + \sqrt{\left( \sum_{i=1}^3 (I_x^i)^2 - (I_y^i)^2 \right)^2 + 4 \sum_{i=1}^3 I_x^i I_y^i} \right) \quad (\text{D.2})$$

Et l'angle est :

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2 \sum_{i=1}^3 I_x^i I_y^i}{\sum_{i=1}^3 ((I_x^i)^2 - (I_y^i)^2)} \right) \quad (\text{D.3})$$

Soient  $\lambda^+$  et  $\lambda^-$  ( $\lambda^+ > \lambda^-$ ) les valeurs propres de la matrice :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 (I_x^i)^2 & \sum_{i=1}^3 I_x^i I_y^i \\ \sum_{i=1}^3 I_x^i I_y^i & \sum_{i=1}^3 (I_y^i)^2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

LEE et COK [LC91] proposent de prendre la plus grande valeur propre  $\lambda^+$  comme gradient vectoriel.  $\lambda^+$  correspond au gradient précédent :

$$\lambda^+ = \|\nabla \mathbf{I}\|^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \|\nabla I^i\|^2 + \sqrt{\left( \sum_{i=1}^3 (I_x^i)^2 - (I_y^i)^2 \right)^2 + 4 \sum_{i=1}^3 I_x^i I_y^i} \right)$$

L'angle est alors défini par le vecteur associé à  $\lambda^+$  :

$$\theta = \arctan \left( \frac{\sum_{i=1}^3 ((I_x^i)^2 - (I_y^i)^2) + \sqrt{\left( \sum_{i=1}^3 (I_x^i)^2 - (I_y^i)^2 \right)^2 + 4 \sum_{i=1}^3 I_x^i I_y^i}}{2 \sum_{i=1}^3 I_x^i I_y^i} \right) \quad (\text{D.5})$$

D'autres auteurs préfèrent utiliser les deux valeurs propres de la matrice pour définir un gradient vectoriel. Ainsi SAPIRO et *al.* [SR96] proposent d'utiliser :

$$\|\nabla \mathbf{I}\|^2 = \lambda^+ - \lambda^- = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^3 (I_x^i)^2 - (I_y^i)^2 \right)^2 + 4 \sum_{i=1}^3 I_x^i I_y^i} \quad (\text{D.6})$$

Notons que cette norme ne permet pas de détecter les coins puisque dans ce cas là  $\lambda^+ = \lambda^-$  et donc  $\|\nabla \mathbf{I}\|^2 = 0$ . SHAH [Sha96] propose :

$$\|\nabla \mathbf{I}\|^2 = \lambda^+ + \lambda^- = \sum_{i=1}^3 \|\nabla I^i\|^2 \quad (\text{D.7})$$

On retrouve ici, le gradient marginal!

### D.3 Gradient de SOCHEN et *al.*

Ici, SOCHEN et *al.* [SKM98] modélisent l'image en couleur par

$$\mathbf{I}(x, y) = (x, y, I^1(x, y), I^2(x, y), I^3(x, y))$$

et proposent d'étudier la métrique induite de cette surface définie sur  $\mathbb{R}^5$ . (cf. chapitre B) :

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + \sum_{i=1}^3 (I_x^i)^2 & \sum_{i=1}^3 I_x^i I_y^i \\ \sum_{i=1}^3 I_x^i I_y^i & 1 + \sum_{i=1}^3 (I_y^i)^2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.8})$$

Ils suggèrent d'utiliser le déterminant de  $g_{\mu\nu}$  comme gradient vectoriel :

$$\|\nabla \mathbf{I}\|^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 \|\nabla I^i\|^2 + \sum_{i \neq j} (I_x^i I_y^j - I_x^j I_y^i)^2 \quad (\text{D.9})$$

De même que LEE et COK on peut aussi prendre la plus grande valeur propre de  $g_{\mu\nu}$ . Les expressions du gradient et de son orientations sont donc les suivantes :

$$\|\nabla \mathbf{I}\|^2 = \frac{1}{2} \left( 2 + \sum_{i=1}^3 \|\nabla I^i\|^2 + \sqrt{\left( \sum_{i=1}^3 (I_x^i)^2 - (I_y^i)^2 \right)^2 + 4 \sum_{i=1}^3 I_x^i I_y^i} \right) \quad (\text{D.10})$$

et

$$\theta = \arctan \left( \frac{\sum_{i=1}^3 ((I_x^i)^2 - (I_y^i)^2) + \sqrt{\left( \sum_{i=1}^3 (I_x^i)^2 - (I_y^i)^2 \right)^2 + 4 \sum_{i=1}^3 I_x^i I_y^i}}{2 \sum_{i=1}^3 I_x^i I_y^i} \right) \quad (\text{D.11})$$



## Annexe E

# Chaîne d'acquisition par rayons X

Ici, nous présentons le principe d'une chaîne d'acquisition par rayons X. Une chaîne d'acquisition par rayons X est composée d'une part, d'un générateur de rayons X et d'autre part, d'un système d'imagerie, ou détecteur, placés de part et d'autre du patient (cf. figure E.1) [Ric98]. Nous les présentons respectivement dans les première et deuxième sections de cette annexe.

### E.1 Générateur de rayons X

Le rayonnement X est produit par le bombardement d'une anode métallique, appelée foyer, par un faisceau d'électrons accélérés par une très forte différence de potentiel, de l'ordre de 20 à 30 kV. Ce rayonnement électromagnétique a une longueur d'onde comprise entre 0,01 et 5 nm, une énergie moyenne s'étalant généralement de 40 à 150 keV dans le cadre du radiodiagnostic et, il se propage en ligne droite. Il faut noter que les rayons X ne sont pas anodins pour les patients puisqu'une exposition prolongée ou répétée à ces rayons peut engendrer la mort des cellules irradiées.

### E.2 Interaction des rayons X avec la matière

Les photons X créés sont émis en direction du patient et interagissent suivant différents modes avec la matière, cf. figure E.2 :

- une partie des photons est transmise à travers la matière sans modification, c'est-à-dire que leur énergie reste constante et rectiligne ;
- absorption ou *effet photoélectrique* : le photon incident entre en collision avec un atome et éjecte un électron proche du noyau de l'atome, le photon abandonne alors toute énergie et disparaît, puis il y a un réarrangement des électrons de l'atome. Ce processus occasionne alors un transfert de chaleur qui peut occasionner des brûlures sur les tissus ;
- diffusion de COMPTON ou *diffusion incohérente* : le photon incident heurte un électron des couches les plus superficielles, faiblement liés à l'atome, l'électron est libéré et

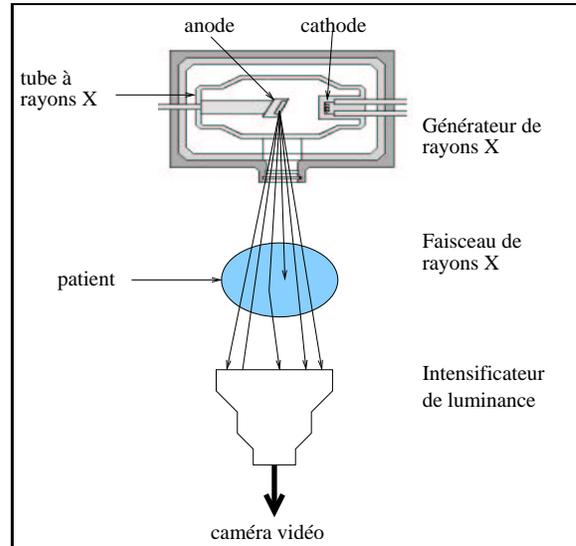


FIG. E.1 – Chaîne d'acquisition par rayons X.

le photon est dévié de sa trajectoire initiale, perd de l'énergie et possède alors une longueur d'onde plus courte ;

- diffusion de THOMSON-RAYLEIGH ou *diffusion cohérente* : c'est un effet voisin de l'effet de COMPTON, le photon incident subit une interaction qui entraîne un faible changement de direction sans perte d'énergie. Cet effet ne se manifeste que lorsque l'énergie des photons incidents est faible. Par contre, la probabilité de cet effet est d'autant plus grande que le numéro atomique de la matière rencontrée est élevé.

La diffusion de THOMSON-RAYLEIGH est négligeable en radiologie, par contre la diffusion de COMPTON se fait dans toutes les directions et introduit ainsi un effet de flou, c'est-à-dire une perte de contraste dans l'image résultante, notamment pour des rayons X de faible énergie. En supposant la source de rayons X ponctuelle, le spectre des rayons émis monochromatique, l'effet de la diffusion de COMPTON négligeable, et la linéarité de l'intensificateur, on peut lier l'intensité  $I(P)$  du rayonnement reçue en un point  $P$  du capteur à la distribution spatiale du coefficient d'atténuation linéaire  $\mu$  caractérisant la matière soumise au rayonnement et à l'intensité  $I_0$  du flux incident de rayons X. Cette relation est la loi de BEER-LAMBERT et s'écrit :

$$I(M) = I_0 \exp \left( - \int_{SP} \mu(x) dx \right) \quad (\text{E.1})$$

où  $SP$  représente le chemin de propagation du rayonnement rectiligne allant de la source  $S$  au point  $P$  du capteur. Par conséquent, lorsque le faisceau homogène incident de rayons X traverse un milieu qui présente des variations d'épaisseur, de densité ou de composition atomique, il subit une modulation. Cette modulation constitue l'*image radiante*, elle ne dépend que de la composition spectrale et de la nature du milieu traversé. L'image résultante superpose donc les différents plans corporels explorés et le contraste de l'image radiante est directement lié à la différence des coefficients linéaires d'atténuation. Dans l'organisme il est possible de distinguer quatre classes de tissus : poumon, graisse, muscle et os, classées ici

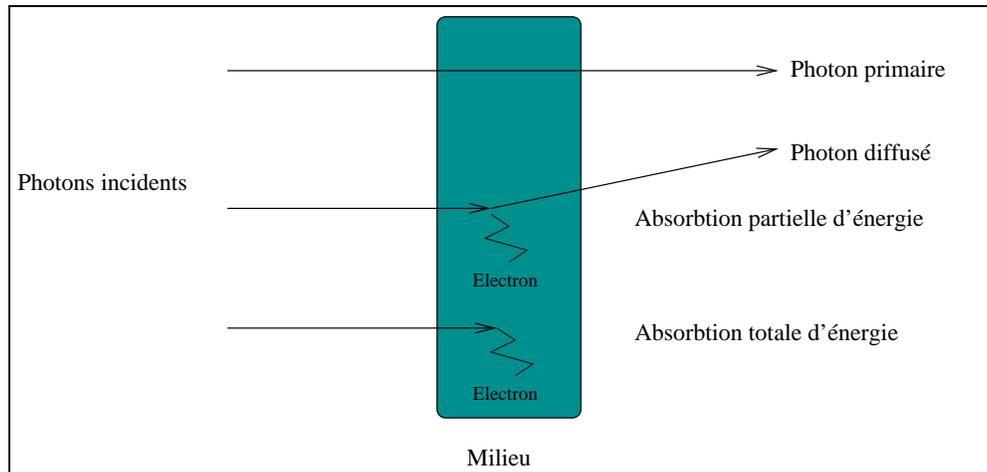


FIG. E.2 – Différentes interactions des rayons x avec la matière.

suivant l'ordre croissant de leur coefficient d'absorption. Lorsque le contraste de l'organe à étudier a un contraste similaire aux tissus voisins, comme c'est le cas pour le sang et les vaisseaux sanguins, on utilise un produit de contraste opaque aux rayons X à base d'iode.

### E.3 Systèmes d'imagerie

L'image radiante est transformée en image radiologique par un système d'imagerie ou détecteur. Il existe principalement quatre types de détecteurs :

- les films radiologiques ;
- les intensificateurs de luminance ;
- les matériaux photostimulables ;
- les détecteurs électrostatiques.

Les deux premiers sont analogiques et les deux derniers sont numériques. Parmi ces détecteurs, les détecteurs analogiques sont les plus courants, les détecteurs numériques étant plus récents. Pour l'examen coronographique, c'est l'intensificateur de luminance qui est généralement utilisé car il permet d'une part la visualisation en temps réel de la localisation des structures anatomiques, et d'autre part un abaissement significatif de l'exposition du patient. L'image résultante peut, suivant les besoins, être enregistrée sur un film photosensible ou numérisée.

Par ailleurs, cette image subit deux types de distorsion [BM99], [Gro93] (cf. figure E.3) :

- une distorsion en coussin due à la courbure de l'écran d'entrée de l'intensificateur ;
- une distorsion en « S » induite par le champ magnétique terrestre.

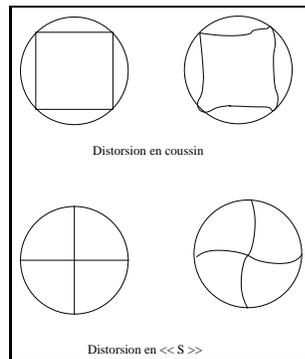


FIG. E.3 – Principales distorsions subies par l'image de l'intensificateur de luminance.

# Bibliographie

- [ABC94] S.T. Acton, A.C. Bovik, and M.M Crawford. Anisotropic diffusion pyramids for image segmentation. *IEEE ICIP*, 3 :478–482, Nov 1994.
- [AGLM92] L. Alvarez, F. Guichard, P. L. Lions, and J. L. Morel. Axioms and fundamental equations of images processing. Technical Report 9231, CEREMADE, Univ. Paris Dauphine, 1992.
- [ALM92] Luis Alvarez, Pierre-Louis Lions, and Jean-Michel Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion ii. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 29(3) :845–866, June 1992.
- [Alv96] Luis Alvarez. Images and PDE's. *ICAOS'96, 12th International Conference on Analysis and optimization of systems*, June 1996.
- [AM94a] L. Alvarez and L. Mazorra. Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 31(2) :590–605, April 1994.
- [AM94b] L. Alvarez and J. M. Morel. Formalization and computational aspects of image analysis. *Acta numerica*, pages 1–59, 1994.
- [Aug96] Bertrand Augereau. *Une contrainte de dynamique non-linéaire pour l'amélioration de l'apprentissage et l'élaboration de l'architecture des réseaux neuronaux multicouches*. PhD thesis, Université de Poitiers, 1996.
- [AV97] Gilles Aubert and Luminita Vese. A variational approach in image recovery. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 34(5) :1948–1979, October 1997.
- [BC77] J.C Bezdek and P.F. Castelaz. Prototype Classification and Feature Selection with Fuzzy Sets. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-7(2) :87–92, February 1977.
- [BC86] Walter F. Bischoff and Terry Caelli. Parsing scale-space and spatial stability analysis. *CVIGP*, 42 :192–205, 1986.
- [BCC<sup>+</sup>95] Ph. Bolon, J.M. Chassery, J.P Cocquerez, D. Demigny, C. Graffigne, A. Montanvert, S. Philipp, R. Zéboudj, and J. Zérubia. *Analyse d'images : filtrage et segmentation*. Ouvrage publié avec l'aide du ministère de l'Education national, de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Insertion professionnelle, 1995.
- [BM93] Beucher and Meyer. The Morphological Approach to Segmentation : The Watershed Transformation. *Mathematical Morphology in Image Processing, Optical engineering*, pages 433–482, 1993.

- [BM94] R. Brockett and P. Maragos. Evolution equations for continuous-scale morphological filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(12) :3377–3385, 1994.
- [BM96] E. Bänsch and K. Mikula. A coarsening finite element strategy in image selective smoothing. Technical Report 18/1996, University of Freiburg Germany, 1996.
- [BM97] W.A. Barrett and E.N. Mortensen. Interactive live-wire boundary extraction. *Medical Image Analysis*, 1 :331–341, 1997.
- [BM99] Armelle Basset-Merle. *Reconstruction 3D filaire de l'arbre coronaire en angiographie par rayons X*. PhD thesis, CREATIS, Lyon, Avril 1999.
- [BR96] M.J. Black and A. Rangarajan. On the unification of line processes, outliers rejection and robust statistics in early vision. *International Journal of Computer Vision*, 19(1) :57–91, 1996.
- [Bur81] Burt. Fast filter transforms for image processing. *Computer Graphics, Image Processing*, 16(20), 1981.
- [BVD<sup>+</sup>02] Christophe Blondel, Régis Vaillant, Frédéric Devernay, Grégoire Malandain, and Nicholas Ayache. Automatic trinocular 3D reconstruction of coronary artery centerlines from rotational X-ray angiography. In *Computer Assisted Radiology and Surgery 2002 Proceedings*, Paris, June 2002. Springer Publishers, Heidelberg. International Symposium on Cardiovascular Imaging - Invasive Coronary and Vascular Imaging.
- [CAB97] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud G. Aubert, and M. Barlaud. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(2) :298–311, February 1997.
- [Can86] J. Canny. A Computational Approach to Edge Detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(6) :679–698, November 1986.
- [Car67] H. Cartan. *Formes Différentielles*. ibid, 1967.
- [CC00] S.J. Chen and J.D. Carroll. 3-D reconstruction of Coronary Arterial Tree to Optimize Angiographic Visualization. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19(4) :318–336, April 2000.
- [CCD<sup>+</sup>02] P. Croisille, P. Chirossel, P. Douek, G. Finet, M. Janier, D. Revel, and G. Rioufol. Imagerie Cardiovasculaire et Thoracique. Site internet : <http://imagerie-cv.univ-lyon1.fr/default.html>, 2002.
- [CGCR94] J.L. Coatrieux, M. Garreau, R. Collorec, and C. Roux. Computer Vision Approaches for the Three-Dimensional Reconstruction of Coronary Arteries : Review and Prospects. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, 22(1) :1–38, 1994.
- [Cia98] Philippe G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Dunod, Paris, 1998.
- [CLMT92] F. Catte, P.L. Lions, J.M. Morel, and T. Coll. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 29(1) :182–193, February 1992.
- [Dau92] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.

- [DF95] R. Deriche and O. Faugeras. Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur. Technical Report 2697, INRIA, novembre 1995.
- [DNF82] B. Doubrovine, S. Novikov, and A. Fomenko. *Géométrie Contemporaine : Méthodes et Applications*, volume 1. Editions MIR, Moscou, 1982. Traduit du russe.
- [EFFAE94] A.I. El-Fallah, G.E. Ford, V.R. Algazi, and R.R. Estes. The Invariance of Edges and Corners Under Mean Curvature Diffusions of Images. *In Processing III SPIE*, 2421 :2–14, 1994.
- [EGM<sup>+</sup>94] D. Eberly, R. Gardner, B. Morse, S. Pizer, and C. Scharlach. Ridges for image analysis. *JMIV*, 4(4) :353–373, 1994.
- [EQ97] S. Eiho and Y. Qian. Detection of Coronary Artery Tree Using Morphological Operator. In *IEEE Proceedings Computer in Cardiology*, volume 24, Lund, Sweden, September 1997.
- [FL95] M.A.T. Figueiredo and J.M.N. Leitao. A Nonsmoothing Approach to the Estimation of Vessel Contours in Angiograms. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 14(1) :162–172, March 1995.
- [Flo93] L. Florack. *The Syntactical Structure of Scalar Images*. PhD thesis, Dept.Med.Phys. Univ Utrecht, Netherlands, 1993.
- [Flo97] L.M.J. Florack. *Image Structure*. Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, the Netherlands, 1997.
- [FNVV98] A.F. Frangi, W.J. Niessen, K.L. Vincken, and M.A. Viergever. Multi-scale vessel enhancement filtering. *MICCAI'98*, 1496 :130–137, 1998.
- [FT94] M. Fidrich and J.P. Thirion. Multiscale Extraction and Representation of Features from Medical Images. Technical Report 2365, INRIA, October, 1994.
- [FtHRKV92] L.M.J. Florack, Bart M ter Haar Romeny, Jan J Koenderink, and Max A Viergever. Scale and the differential structure of images. *Image and Vision Computing*, 10(6) :376–388, 1992.
- [FW94] J. Fröhlich and J. Weickert. Image processing using a wavelet algorithm for non linear diffusion. Technical Report 104, Laboratory of Technomathematics, University of Kaiserslautern, 1994.
- [GA93] G.Sapiro and A.Tannenbaum. Affine Invariant and Scale-space. *International Journal Computer Science*, 11(1) :25–44, 1993.
- [Gab65] D. Gabor. Information theory in electron microscopy. *Laboratory Investigation*, 14(6) :801–807, 1965.
- [GG84] S. Geman and D. Geman. Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6) :721–741, November 1984.
- [GORF92] G. Gerig, O.Kübler, R.Kikinis, and F.A.Jolesz. Non linear anisotropic filtering of MRI data. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 11 :221–232, 1992.

- [GP93] J. Gauch and S. Pizer. Multiresolution Analysis of Ridges and Valleys in Grey-Scale Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence*, 15(6) :635–646, June 1993.
- [GR92] S. Geman and G. Reynolds. Constrained Restauration and the Recovery of Discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence*, 14, 1992.
- [Gre90] P.J Green. Bayesian Reconstruction from Emission Tomography Data Using A Modified EM Algorithm. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1990.
- [Gro93] E. Groneneschild. Effect of Spatial Orientation on th Image-Intensifier Distorsion in Quantitative Coronary Angiography. *IEEE Proceedings Computers in Cardiology*, pages 595–598, September 1993. London, UK.
- [Gui94] F. Guichard. *Axiomatization of the multiscale analysis for images and movies*. PhD thesis, Université de Paris dauphine, Mars 1994.
- [Had23] J. Hadamard. Lectures on cauchy’s problem in linear partial differential equations. Yale University Press, New Haven, 1923.
- [Har83] R. Haralick. Ridges and valleys in digital images. *CVGIP*, pages 28–38, 1983.
- [HEM<sup>+</sup>99] K. Haris, S.N. Efstratiadis, N. Maglaveras, C. Pappas, J. Gourassas, and G. Louridas. Model-Based Morphological Segmentation and Labeling of Coronary Angiograms. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 18(10) :1003–1015, October 1999.
- [HG95] A. Hildebrand and S. Grosskopf. 3D Reconstruction of Coronary Arteries from X-ray Projections. In *Proceedings of CAR’95*, pages 201–207, 1995.
- [HRvdH<sup>+</sup>92] F. Heitger, L. Rosenthaler, R. von der Heydt, E. Peterhans, and O. Kubler. Simulation of neural contour mechanisms : From simple to end-stopped cells. *Vision Res.*, 32(5) :963–981, 1992.
- [HSL<sup>+</sup>97] K.R. Hoffmann, A. Sen, L. Lan, C.E. Metz, K.G. chua, B.B. Williams, J. Esthappan, M. Fiebich, M. Mazzuco, and K. Doi. Determination of 3D vessel trees from biplane images for coronary angiography. In H.U. Lemke, M.W. Vannier, and K. Inamura, editors, *Computer Assisted Radiology and Surgery 1997*, pages 162–165. Elsevier Science, 1997.
- [Hum86] R. Hummel. Representations based on zero-crossings in scale-space. *Proc. IEEE Computer Vision and Pattern Recognition Conference*, pages 204–209, 1986.
- [Jac92] P. Jackway. Morphological Scale-Space. In *ICPR*, volume C, pages 252–255, The Hague, 1992.
- [Jac96] P. T. Jackway. Gradient Watersheds in Morphological Scale-space. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5 :913–921, 1996.
- [Jai89] A.K. Jain. *Fundamentals of digital image processing*. Prentice Hall, 1989.
- [JKdK<sup>+</sup>02] J. Jansen, G. Koning, P.J.H de Koning, J.C. Tuinenburg, and J.H.C. Reiber. A novel approach for the detection of pathlines in X-ray angiograms : the wavefront propagation algorithm. In H.U. Lemke, M.W. Vannier, K. Inamura, A.G. Farman, K. Doi, and J.H.C. Reiber, editors, *CARS 2002 Computer assisted Radiology and Surgery*, pages 808–813, Paris, France, june 2002. Springer.

- [KGS95] T.M. Koller, G. Gerig, G. Szekely, and D. Dettwiler. Multiscale detection of curvilinear structures in 2D and 3D image data. *Fifth International Conference on Computer Vision*, pages 864–869, 1995.
- [KLA97] A.K. Klein, F. Lee, and A.A. Amini. Quantitative Coronary Angiography with Deformable Spline Model. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 16 :468–482, October 1997.
- [Kli71] A. Klinger. Pattern and search statistics. In *Optimizing methods in Statistics*. Academic Press, New York, 1971.
- [KMS00] R. Kimmel, R. Malladi, and N. Sochen. Images as Embedded Maps and Minimal Surfaces : Movies, Color, Texture, and Volumetric Medical Images. *International Journal of Computer Vision*, 39(2) :111–129, September 2000.
- [Koe84] J.J. Koenderink. The structure of images. *Biological Cybernetics*, 50(5) :363–370, 1984.
- [Kor98] Pierre Kornprobst. *Contribution à la restauration d'images et à l'analyse de séquences : approches variationnelles et solutions de viscosité*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, Novembre 1998.
- [Kri00] Karl Krissian. *Traitement multi-échelle : applications à l'imagerie médicale et à la détection tridimensionnelle de vaisseaux*. PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, 2000.
- [KS99] R. Kimmel and N. Sochen. Geometric-variational approach for color image enhancement and segmentation. *2nd Int. Conference on Scale-Space theories in Computer Vision Geometric Image Flows, Nonlinear diffusion, Functional Minimisation and linear Scale-Space*, 1999.
- [KTS88] K. Kitamura, J. M. Tobis, and J. Sklansky. Estimating the 3D-skeletons and Transverse Areas of Coronary Arteries from Biplane Angiograms. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 7(3) :173–187, September 1988.
- [Lan78] C. Lantuéjoul. *Détection squelettisation et son application aux mesures topologiques des mosaïques polycristallines*. PhD thesis, École des Mines de Paris, 1978.
- [LC91] H.-C. Lee and D. Cok. Detecting Boundaries in a Vector Field. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 39(5) :1181–1194, May 1991.
- [LCB<sup>+</sup>97] C. Lorentz, I.C. Carlsen, T.M. Buzug, C. Fassnacht, and J. Weese. Multi-scale Line Segmentation with Automatic Estimation of Width, Contrast and Tangential Direction in 2D and 3D Medical Images. *CVRMed-MRCAS*, pages 233–242, 1997.
- [Lec95] Laurent Lecornu. *De la segmentation d'images angiographiques en angiographie biplan à la reconstruction 3D d'un réseau vasculaire*. PhD thesis, Université de Rennes, Juillet 1995.
- [Led02] F. Ledru. Coronary atherosclerosis : from pathophysiology to imaging in clinical practice. In H.U. Lemke, M.W. Vannier, K. Inamura, A.G. Farman, K. Doi, and J.H.C. Reiber, editors, *CARS 2002*, pages 803–807. Springer, 2002.

- [LF87] Y.H. Lee and A.T. Fam. An edge gradient enhancing adaptative order statistic filter. *IEEE Transactions on ASPP*, 35(5) :680–695, 1987.
- [Lin90] T. Lindeberg. Scale-space for discrete signals. *IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence*, 12 :234–254, 1990.
- [Lin93] T. Lindeberg. Detecting salient blob-like image structures and their scales with a scale-space primal sketch : A method for focus-of-attention. *International Journal of Computer Vision*, 11(3) :349–376, 1993.
- [Lin94a] T. Lindeberg. Scale-space theory : A basic tool for analysing structures at different scales. *Journal of Applied Statistics*, 21(2) :225–270, 1994.
- [Lin94b] Tony Lindeberg. *Scale Space Theory in Computer Vision*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1994.
- [Lin96] Tony Lindeberg. Scale-space : A framework for handling image structures at multiple scales. In *CERN School of Computing*. Egmond Zee, September 1996.
- [LLSV99] A.M. Lopez, F. Lumbreira, J. Serrat, and J.J. Villanueva. Evaluation of Methods for Ridge and Valley Detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence*, 21(4) :327–334, April 1999.
- [LS93] I. Liu and Y. Sun. Recursive Tracking of Vascular Networks in Angiograms Based on the Detection-Deletion Scheme. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 12(2) :334–341, June 1993.
- [Mal89] S. Mallat. A theory for Multiresolution Signal Decomposition : the Wavelet transform. *IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence*, 11(7) :674–693, 1989.
- [Mar72] A. Martelli. Edge detection using heuristics search methods. *Computer Graphics and Image Processing*, 1(2) :169–182, August 1972.
- [Mar76] A. Martelli. An application of heuristic search methods to edge and contour detection. *Communication of the A.C.M.*, 19(2) :73–83, February 1976.
- [Mar82] D. Marr. *Vision*. Freeman, 1982.
- [Mar94] P. Maragos. Differential Morphology : Multiscale Image Dynamics, Max-Min Difference Equations, and Slope Transforms. *ICIP-II*, 94 :545–549, 1994.
- [MdEV96] J.B.A. Maintz, P.A. Van den Elsen, and M.A. Viergever. Evaluation of Ridge Seeking Operators for Multimodality Medical Image Matching. *IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence*, 18(4) :353–365, april 1996.
- [Mey94] Y. Meyer. *Les ondelettes : algorithmes et applications*. Armand Colin, Paris, 1994.
- [MLD94] Olivier Monga, Richard Lengagne, and Rachid Deriche. A multi-scale approach. Technical Report 2338, INRIA, juillet 1994.
- [MMRK90] P. Meer, D. Mintz, A. Rosenfeld, and D. Y. Kim. Robust regression methods for computer vision : a review. *International Journal of Computer Vision*, 6(1) :59–70, 1990.

- [MS96] R. Malladi and J.A. Sethian. Image Processing : Flows Under min/max Curvature and Mean Curvature. *Graphical Models and Image Processing*, 58(2) :127–141, March 1996.
- [Nas95] Armande Nasser. *Caratérisation de Réseaux Fins dans les Images 2D et 3D*. PhD thesis, Univerté de Paris-Sud Orsay, Mars 1995.
- [Nor90] N. Nordström. *Variational Edge Detection*. PhD thesis, University of California, Berkeley, May 1990.
- [PBC<sup>+</sup>94] S. Pizer, C. Burbeck, J. Coggins, J. Fritsch, and B. Morse. Object Shape before Boundary Shape : Scale-Space Medial Axes. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, (4) :303–313, 1994.
- [PHSH92] C. Pellet, A. Herment, M. Sigelle, and P. Horain. Segmentation, modeling and reconstruction of arterial bifurcations in digital angiography. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 30 :576–583, Nov 1992.
- [PL88] T. N. Pappas and J. S. Lim. A new method for estimation of coronary artery dimensions in angiograms. *IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing*, 36(9) :1501–1513, September 1988.
- [PM90] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7) :629–639, july 1990.
- [PMM96] V. Prinet, O. Monga, and SongDe Ma. Extraction of vascular network in 3d images. In *1996 International Conference on Image Processing*, Lausanne, Switzerland, september 1996.
- [Prê87] F. Prêteux. *Description et interprétation des images par la morphologie mathématique : application à l'imagerie médicale*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie Paris VI, 1987.
- [PSJ94] P. Perona, T. Shiota, and J.Malik. *Anisotropic diffusion*, chapter 3, pages 71–79. Kluwer Academic, 1994.
- [Ric98] M. Ricard. Imagerie par rayons X. Cours dispensé à l'ENST Paris, 1998.
- [ROF92] L.I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60 :259–268, 1992.
- [Rom94] Ter Haar Romeny, editor. *Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands, 1994.
- [Rud84] L. Rudin. Shock Filters. Technical report, Rockwell International Science Center Annual DARPA, 1984.
- [SA97] C.A. Segall and S.T. Acton. Morphological anisotropic diffusion. *IEEE International Conférence on Image Processing*, October 1997.
- [SAH<sup>+</sup>98] Y. Sato, T. Araki, M. Hanayama, H. Naito, and S. Tamura. A Viewpoint Determination System for Stenosis Diagnosis and Quantification in Coronary Angiographic Image Acquisition. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 17(1) :121–137, February 1998.
- [SC85] J. Shen and S. Castan. Un nouvel algorithme de detection de contours. *5ème Congrès AFCET-RFIA Grenoble*, pages 201–213, 1985.

- [Ser82] Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.
- [Ser88] Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2 : Theoretical Advances*. Academic Press, London, 1988.
- [Sha96] J. Shah. A common framework for curve evolution, segmentation, and anisotropic diffusion. *IEEE Conference Computer Vision and Pattern Recognition*, 6 :136–142, 1996.
- [SKM98] N. Sochen, R. Kimmel, and R. Malladi. A General Framework for Low Level Vision. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7 :310–318, 1998.
- [SMCM91] P. Saint-Marc, J. Chen, and G. Medioni. Adaptive Smoothing : A General Toll for Early Vision. *IEEE, Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence*, 13(6) :514–529, juin 1991.
- [SNF97] J. Sporring, M. Nielsen, and L. Florack. *Gaussian scale-space theory*. Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, the Netherlands, 1997.
- [Spi79] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, Houston (Texas), 1979.
- [SR96] G. Sapiro and D.L. Ringach. Anisotropic Diffusion of Multivalued Images with Applications to Color Filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5 :1582–1586, 1996.
- [SRWC93] M. Sonka, G.K. Reddy, M.D. Winniford, and S.M. Collins. Adaptive Simultaneous Coronary Border Detection. In *IEEE Proceedings Computers in Cardiology*, pages 109–112, London, September 1993.
- [Ste96] Carlsten Steger. An Unbiased Detector of Curvilinear Structures. Technical Report 96-03, FG BV, 1996.
- [Ste97] C. Stewart. Bias in Robust Estimation Caused by Discontinuities and Multiple Structures. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(8) :818–833, 1997.
- [TA77] Tikhonov and Arsenin. *Solutions of Ill-Posed Problems*. Wiley, New York, 1977.
- [TAL01] B. Tremblais, B. Augereau, and M. Leard. A P.D.E Based Approach for Medial Axis Detection in X-rays Angiographies. In *SPIE International Symposium on Medical Imaging*, San Diego, 17-22 February 2001.
- [TB93] JP. Thirion and S. Benayoun. Image Surface Extremal Points, New Feature Points for Image Registration. Technical Report 2003, INRIA, Aout 1993.
- [TCC90] C. Toumoulin, R. Collorec, and J.L. Coatrieux. Vascular network segmentation in subtraction angiograms : a comparative study. *Medical Informatic*, 15(4) :333–341, 1990.
- [TD01] D. Tschumperlé and R. Deriche. Constrained and unconstrained PDE's for vector image restoration. In *12th Scandinavian Conference on Image Analysis*, pages 153–160, Bergen, Norway, June 2001.
- [TG92] J. Thirion and A. Gourdon. The 3D marching lines algorithm and its application to crest lines extraction. Technical Report RR-1672, INRIA, Sophia Antipolis, 1992.

- [tHRF00] B. M. ter Harr Romeny and L.M.J. Florack. Front-End Vision, a Multiscale Geometry Engine. In *First IEEE International Workshop on Biologically Motivated Computer Vision (BMCV2000)*, pages 209–307, Seoul, Korea, May 15-17 2000. Springer-Verlag, Heidelberg.
- [Tik63] Tikhonov. Regularization of incorrectly posed problems. *Sov. Math. Dokl.*, 4 :1624–1627, 1963.
- [TP98] Y.A. Tolias and S.M. Panas. A Fuzzy Vessel Tracking Algorithm for Retinal Images Based on Fuzzy Clustering. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 17(2) :262–273, april 1998.
- [vdB92] R. van den Boomgaard. *Mathematical Morphology : Extensions towards Computer Vision*. PhD thesis, University of Amsterdam, 1992.
- [Ven52] De Saint Venant. Surfaces à plus grande pente constitués sur des lignes courbes. *Bulletin de la soc. philo. math., de Paris*, 1852.
- [WA93] Witkin and Angrew. Scale space filtering. *Proceedings of International Conference of Artificial Intelligence*, 511, 1993.
- [WB97] J. Weickert and J. Benhamouda. Why the Perona-Malik filter works. Technical Report 97-22, Department of Computer Science University of Copenhagen, 1997.
- [Wei94] J. Weickert. Scale-Space Properties of Nonlinear Diffusion Filtering with a Diffusion Tensor. Technical Report 110, Laboratory of Technomathematics, University of Kaiserslautern, October 1994.
- [Wei97a] J. Weickert. Coherence-Enhancing Diffusion of Color Images. *VII NSPRIA*, 1 :239–244, April 1997.
- [Wei97b] J. Weickert. Coherence-enhancing diffusion of colors images. In A. Sanfeliu, J.J. Villanueva, and J. Vitrià, editors, *7th National Symposium on Pattern Recognition and Image Analysis*, pages 239–244, April 1997.
- [Wei97c] J. Weickert. A review of nonlinear diffusion filtering. In B. ter Haar Romeny, L. Florack, J. Koenderink, and M. Viergever, editors, *Scale-space theory in computer vision, Lecture Notes in Computer Science*, volume 1252, pages 3–28. Springer, Berlin, 1997.
- [Wei98] J. Weickert. *Anisotropic diffusion in image processing*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1998.
- [WG94] R.T. Whitaker and G.Gerig. *Geometry-driven Diffusion in Computer Vision*, chapter 4, pages 93–134. Kluwer, 1994.
- [Wit83] A. P. Witkin. Scale-space filtering. In *AJCAI*, Karlsruhe, 1983.
- [WtHRLvE97] J. Weickert, B. M. ter Haar Romeny, A. Lopez, and W.J. van Enk. Orientation analysis by coherence-enhancing diffusion. *Proc. Symp. Real World Computing*, pages 96–103, 1997.
- [WtHRV98] J. Weickert, B.M. ter Haar Romeny, and M.A. Viergever. Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 7(3) :398–410, march 1998.
- [You87] R.A. Young. The gaussian derivative model for spatial vision : I. retinal mechanisms. *Spatial Vision*, 2 :273–293, 1987.

- [Yui88] A. Yuille. The creation of structure in dynamic shape. *Proceedings of the second ICCV*, pages 685–689, 1988.
- [Zad65] L. A. Zadeh. Fuzzy Sets. *Information and Control*, 1(8) :338–353, 1965.
- [Zen86] S. Di Zenzo. A note on the gradient of multi-image. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 33 :116–125, 1986.