N°ORDRE : 4201



UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES LILLE 1

Thèse pour obtenir le grade de
Docteur en Science de l'Université Lille 1

présentée par **Youcef MAMMERI**

le 17 Juillet 2008

Discipline : **Mathématiques Appliquées**

Sur quelques modèles asymptotiques dans la théorie des ondes hydrodynamiques

Directeur de thèse : Nikolay TZVETKOV

Membres du Jury

Rapporteur	Sylvie BENZONI-GAVAGE	Professeur	Université Lyon 1
Examinateur	Christophe BESSE	Professeur	Université Lille 1
Examinateur	Jean-Paul CHEHAB	Professeur	Université de Picardie
Rapporteur	Thierry COLIN	Professeur	Université Bordeaux 1
Examinateur	Séraphin MEFIRE	M. de Conférence	Université de Picardie
Président	Jean-Claude SAUT	Professeur	Université Paris-Sud Orsay

Résumé

Les équations de Kadomtsev-Petviashvili (KP) décrivent les ondes de faible amplitude et de grande longueur se déplaçant à la surface de l'eau, principalement dans la direction Ox. Elles ont pour forme

$$u_t + u_x + \alpha u u_x + s\,\beta u_{xxx} + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = O(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

et sont appelées KP-I si $s > 0$ et KP-II si $s < 0$. Ici, α désigne le quotient entre l'amplitude des ondes et la profondeur de l'eau, β le carré du quotient entre la profondeur et la longueur d'onde, γ le carré du quotient entre les longueurs d'onde dans les deux directions du plan, et ∂_x^{-1} l'anti-dérivée. Quant à l'équation de Benjamin-Ono (BO), elle décrit de telles ondes se déplaçant à l'intérieur de l'eau. Elle s'écrit

$$u_t + u_x + \alpha u u_x - \beta H(u_{xx}) + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = O(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

où, dans ce cas, α est le quotient entre l'amplitude des ondes et la profondeur des ondes, β le quotient entre cette profondeur et la longueur d'onde, et H la transformée de Hilbert dans la direction Ox. En remarquant que $u_t + u_x = O(\alpha + \beta + \gamma)$, on trouve les équations de type Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

$$\begin{aligned} u_t + u_x + \alpha u u_x - s\,\beta u_{xxt} + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} &= O(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ u_t + u_x + \alpha u u_x + \beta H(u_{xt}) + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} &= O(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2). \end{aligned}$$

Notre travail se divise en trois parties. Dans la première, on rappelle la modélisation des différentes équations. On montre plus particulièrement comment les modèles asymptotiques BBM s'obtiennent à partir du principe fondamental de la dynamique. On compare alors les solutions des équations de KP, respectivement de BO, avec les solutions des équations de type BBM.
Dans la seconde partie, on s'intéresse à certaines propriétés qualitatives des équations généralisées de type BBM. Des résultats de prolongement en temps des bornes sur les normes de Sobolev, de décroissance en temps et de prolongement unique des solutions, sont établis.
Enfin, on termine avec une étude numérique des solutions des équations KP généralisées en dimension 3 d'espace. Dans cette dernière partie, en collaboration avec F. Hamidouche et S. Mefire, on inspecte numériquement les phénomènes de dispersion, d'explosion en temps fini, de comportement solitonique et d'instabilité transversale.

Mots clés : équations de KP, BO, BBM, modélisation, comparaison, bornes en grand temps, décroissance en temps, prolongement unique, méthode spectrale, méthode de relaxation, méthode d'Adams, dispersion, explosion en temps fini, instabilité transversale.

Classification Mathématique : 35B05, 35B10, 35B35, 35B40, 35B60, 35Q53, 35M70, 65M99, 76B03, 76B15, 76B55

Abstract

The Kadomtsev-Petviashvili equations (KP) describe the small amplitude long waves moving at the surface of the water, mainly in the $x-$direction. They are written under the form

$$u_t + u_x + \alpha u u_x + s\,\beta u_{xxx} + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = O(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

called KP-I if $s > 0$ and KP-II if $s < 0$. Here, α denotes the quotient between the amplitude of the waves and the depth of the water, β the square of the quotient between the depth and the wavelength, γ the square of quotient between the wavelengths in the two directions of the plan, and ∂_x^{-1} the anti-derivative. Concerning the Benjamin-Ono equation (BO), it describe such waves moving inside the water, and is written

$$u_t + u_x + \alpha u u_x - \beta H(u_{xx}) + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = O(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

where, in this case, α is the quotient between the amplitude of the waves and the depth of the waves, β the quotient between this depth and the wavelength, and H the Hilbert transform in the $x-$direction. By noticing that $u_t + u_x = O(\alpha + \beta + \gamma)$, we find the equations of Benjamin-Bona-Mahony type (BBM)

$$\begin{aligned} u_t + u_x + \alpha u u_x - s\,\beta u_{xxt} + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} &= O(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ u_t + u_x + \alpha u u_x + \beta H(u_{xt}) + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} &= O(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2). \end{aligned}$$

Our work is subdivided in three parts. In the first part, we recall the modelling of the different equations. We show more particularly how the asymptotic BBM models are obtained from the fundamental principle of dynamics. We compare then the solutions of the KP equations, respectively of the BO one, with the solutions of the equations of BBM type.
In the second part, we are interested in some qualitative properties of the generalized equations of BBM type. Some results of continuation in time of bounds on Sobolev norms, decay in time and unique continuation of the solutions, are established.
Finally, we conclude with a numerical study of the solutions of the generalized KP equations in space dimension 3. In this last part, in collaboration with F. Hamidouche and S. Mefire, we inspect numerically the phenomena of dispersion, blow-up in finite time, solitonic behaviour and transverse instability.

Keywords : equations of KP, BO, BBM, modelling, comparison, bounds in long time, decay in time, unique continuation, spectral method, relaxation method, Adams method, dispersion, blow-up in finite time, transverse instability.

Mathematics Classification : 35B05, 35B10, 35B35, 35B40, 35B60, 35Q53, 35M70, 65M99, 76B03, 76B15, 76B55

Remerciements

Mes premiers mots de remerciements vont à Nikolay Tzvetkov, pour ce qu'il m'apporté aussi bien scientifiquement qu'humainement. Je le remercie pour la confiance qu'il m'a accordée durant ces trois années de thèse, et pour sa grande disponibilité.

Je n'aurais certainement pas effectué cette thèse sans avoir rencontré Jean-Paul Chehab, il a su m'encourager à poursuivre le chemin des mathématiques appliquées. C'est pour moi une grande fierté qu'il fasse partie de ce jury.

Sylvie Benzoni et Thierry Colin ont accepté de rapporter cette thèse. Leurs lectures attentives m'ont révélé certaines imprécisions, ce qui a permis d'améliorer mon travail. Je les remercie très sincèrement pour l'intérêt et le temps consacrés à ces travaux.

Merci à Christophe Besse pour ces coups de pouce, sa gentillesse et d'avoir accepté d'être examinateur de cette thèse.

Un remerciement particulier à Séraphin Mefire pour m'avoir proposé de travailler avec lui. Cela m'a permis d'enrichir de façon considérable ma vision numérique. C'est un plaisir de l'avoir dans mon jury. Je saisis l'opportunité pour remercier le personnel du LAMFA pour son toujours sympathique accueil.

Je suis extrêmement honoré de la présence de Jean-Claude Saut dans ce jury.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance aux membres du laboratoire Paul Painlevé, (tous vous citer serait un peu long) plus particulièrement l'équipe AN-EDP. En premier lieu, les anciens thésards pour leur accueil et leurs conseils. Je remercie les doctorants et post-doctorants pour le soutien lors de mes deux années en tant que représentant. J'espère avoir été à la hauteur de leurs attentes. J'en profite pour saluer le personnel administratif, toujours prêt à rendre service. Merci à toutes les personnes qui m'ont accompagné lors de mon monitorat et bien sûr tous les élèves que j'ai rencontrés.

Enfin, je finirais par remercier mes parents, mes frères, Lila et tout le reste de ma famille qui me supportent au quotidien.

Table des matières

Introduction 5

I Modélisation et Comparaison des modèles 19

1 Modèles d'ondes de surface 2D 21
1.1 Dérivation des équations . . . 23
1.1.1 Principes physiques . . . 23
1.1.2 Réécriture dans le plan . . . 25
1.1.3 Petite amplitude de surface en dimension 1 . . . 26
1.1.4 Dérivation de KP-BBM . . . 33
1.2 Comparaison des solutions de KP-II et KP-BBM-II . . . 37
1.2.1 Discussion linéaire . . . 38
1.2.2 Problèmes de Cauchy . . . 39
1.2.3 Comparaison des solutions . . . 51
1.2.4 Le cas périodique . . . 58
1.2.5 Comparaison numérique des solutions . . . 60

2 Modèles d'ondes internes 2D 69
2.1 Dérivation des équations . . . 70
2.1.1 Équations gouvernant l'écoulement . . . 70
2.1.2 Petites perturbations en dimension 2 . . . 71
2.2 Comparaison de BO et BO-BBM . . . 77
2.2.1 Discussion linéaire . . . 77
2.2.2 Problèmes de Cauchy locaux . . . 78
2.2.3 Comparaison des solutions . . . 79
2.2.4 Le cas périodique . . . 80
2.2.5 Comparaison numérique des solutions . . . 81

II Propriétés Qualitatives des Solutions 85

3 Prolongement en temps des bornes H^s 87
3.1 Comportement des solutions de BO-BBM . . . 87

3.1.1 Existence et unicité de solution 89
3.1.2 Prolongement des bornes en temps 93
3.2 Comportement des solutions de KP-II 101
3.2.1 Remarque sur l'équation KP-BBM-II 110

4 Prolongement unique des solutions 113
4.1 Prolongement unique des solutions de l'équation d'Airy 113
4.1.1 Estimations pour une fonction entière 114
4.1.2 Préparation de la preuve 117
4.1.3 Argument final 118
4.2 Principe de la méthode 119
4.3 Prolongement unique des solutions de KP-BBM-II 120
4.3.1 Théorie d'existence 121
4.3.2 Propriété de prolongement unique 122

5 Sur la décroissance en temps des solutions 125
5.1 Décroissance en temps des solutions de gBO-BBM 125
5.1.1 Estimations pour le problème de Cauchy linéaire 127
5.1.2 Résultats préliminaires 136
5.1.3 Existence et unicité de solution globale 137
5.2 Décroissance en temps des solutions de gKP-BBM-II 145
5.2.1 Estimations pour le problème de Cauchy linéaire 147
5.2.2 Existence et unicité de solution globale 154

III Etude Numérique 3D 163

6 Comportement en temps long des solutions de 3D-KP 165
6.1 Discrétisations numériques 168
6.1.1 L'approche spectrale 168
6.1.2 La discrétisation en temps 170
6.2 Comportement en temps long de données localisées 172
6.2.1 Le cas non-généralisé : $p = 1$ 172
6.2.2 Le cas généralisé : $p > 1$ 176
6.3 Instabilités transversales dans les directions O_y et O_z 182
6.3.1 Le cas non-généralisé : $p = 1$ 183
6.3.2 Le cas généralisé : $p = 2$ 190
6.4 Instabilité transversale dans la direction O_z 197
6.5 Adaptivité du pas en temps 201

Notations **207**

Table des figures **215**

Bibliographie **221**

Introduction

La propagation des ondes unidirectionnelles de faible amplitude et de grande longueur (par rapport à la profondeur) se déplaçant de gauche à droite à la surface d'un canal est modélisée en dimension 1 d'espace par l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) [KdV95]

$$u_t + u_x + \alpha\, uu_x + \beta\, u_{xxx} = O(\alpha^2 + \beta^2), \tag{0.1}$$

où u est la surface libre, α le quotient entre l'amplitude des ondes et la profondeur de l'eau, et β le carré du quotient entre la profondeur et la longueur d'onde. En remarquant que (formellement) $u_t + u_x = O(\alpha+\beta)$, Benjamin, Bona et Mahony [BBM72] ont introduit avec l'idée de remplacer le troisième terme de (0.1) une nouvelle équation, dite BBM,

$$u_t + u_x + \alpha\, uu_x - \beta\, u_{xxt} = O(\alpha^2 + \beta^2). \tag{0.2}$$

L'équation (0.2) est censée être plus "régulière" que (0.1). Commençons par comparer les relations de dispersion de ces deux équations. Pour cela, on considère une solution de l'équation linéaire liée à KdV de la forme $\mathrm{e}^{iwt-ikx}$, où w désigne la pulsation, k le nombre d'ondes, inversement proportionnel à la longueur d'onde, et on remarque que les quantités w et k vérifient la relation de dispersion suivante :

$$w = k - \beta k^3.$$

D'autre part, en ce qui concerne l'équation BBM, la relation de dispersion s'écrit

$$w = \frac{k}{1 + \beta k^2},$$

et pour k petit, un développement limité donne $w = k - \beta k^3 + O(k^5)$ et les deux premiers termes sont égaux à ceux de la relation de dispersion de KdV. Autrement dit, pour des ondes de longueur grande, ce qui est convenable sachant que ces équations sont des modèles décrivant de telles ondes, la relation de dispersion de l'équation KdV est très proche de celle de l'équation BBM. L'intérêt d'étudier l'équation BBM, comparativement à l'étude de l'équation KdV, est d'autant plus grand que ces deux équations modélisent le même phénomène physique.

On se propose d'étudier dans cette thèse les modèles BBM des équations de Benjamin-Ono (BO) [Ben67, DA67, Ono75] et Kadomtsev-Petviashvili (KP) [KP70]. Les équations

KP généralisent l'équation KdV en dimension 2 d'espace (ondes bidimensionnelles avec faible perturbation transversale). Plus précisement, elles décrivent les ondes de faible amplitude et de grande longueur se déplaçant à la surface de l'eau, principalement dans la direction Ox de la gauche vers la droite. Elles ont pour forme

$$u_t + u_x + \alpha u u_x + s\,\beta u_{xxx} + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = O(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2), \tag{0.3}$$

où γ désigne le carré du quotient entre les longueurs d'onde dans les deux directions du plan, ∂_x^{-1} l'anti-dérivée définie par $\widehat{\partial_x^{-1} u}\,(k,l) := \dfrac{\widehat{u}(k,l)}{\mathrm{i}\,k}$. Ces équations sont appelées KP-I si $s = -1$ et KP-II si $s = 1$, avec s lié à la tension de surface.
Quant à l'équation BO, elle décrit de telles ondes se déplaçant dans une direction entre deux fluides de masses volumiques distinctes, dont un fluide est de profondeur infinie. Dans une certaine mesure, cette équation peut être considérée comme un modèle de propagation de ce type d'ondes à l'intérieur de l'eau. Elle s'écrit

$$u_t + u_x + \alpha\, u u_x - \beta\, H(u_{xx}) + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = O(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

où ici u est la surface libre séparant les deux fluides, α le quotient entre l'amplitude des ondes et la profondeur du premier fluide, β le quotient entre cette profondeur et la longueur d'onde, et H la transformée de Hilbert dans la direction Ox, définie par $\widehat{H(u)}\,(k,l) := -\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(k)\widehat{u}(k,l)$..

Notre travail se divise en trois parties principales. Dans la première, on obtient, à partir de l'équation d'Euler irrotationnel incompressible homogène, les équations de type BBM en dimension 2 d'espace. On y compare ensuite les solutions des équations KP, respectivement celles de l'équation BO, avec leurs homologues BBM. Dans la seconde partie, on s'intéresse à quelques propriétés qualitatives des équations de type BBM, on y étudie le prolongement en temps des normes de Sobolev, une propriété de prolongement unique et la vitesse de décroissance en temps des solutions correspondantes. Enfin, dans une dernière partie, le comportement numérique des solutions des équations KP généralisées en dimension 3 d'espace, sera investigué.

Dans la suite de cette introduction, on décrit les résultats obtenus et qui seront développés dans les différents chapitres.

1. Modélisation et Comparaison des modèles

Nous rappelons la modélisation des équations et vérifions que les versions BBM de ces équations s'obtiennent par une analyse asymptotique à partir du principe fondamental de la dynamique.

1.1. Modèles d'ondes de surface

On considère un flux irrotationnel d'un fluide parfait incompressible homogène. On suppose de plus que le fond est plat (voir Fig. 1) .

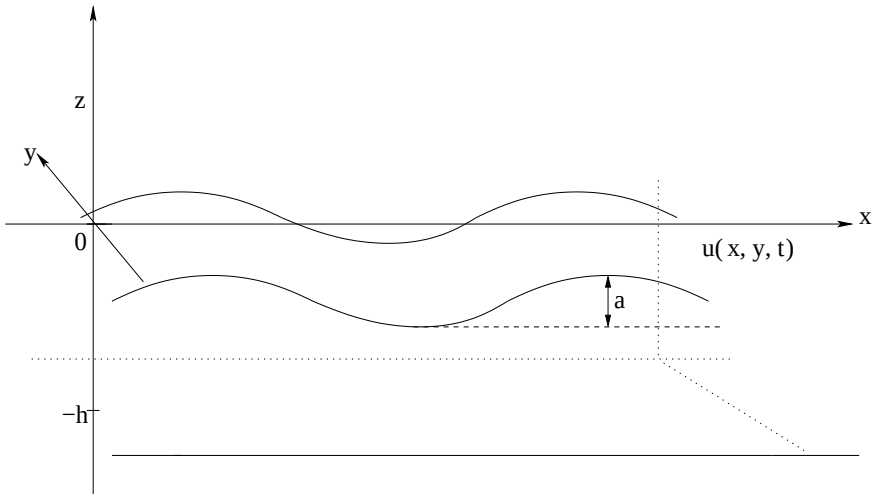


FIG. 1 – Surface du fluide

Il existe une fonction potentiel de vitesse φ et une fonction u décrivant la surface libre qui vérifient :

$$\begin{aligned}
\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz} &= 0 \quad \text{si} - h < z < u(x,y,t)\ , && (0.4)\\
\varphi_t+\frac{1}{2}(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)+gu & \\
-\frac{T}{\rho_0}\frac{u_{xx}(1+u_y^2)+u_{yy}(1+u_x^2)-2u_{xy}u_xu_y}{(1+u_x^2+u_y^2)^{3/2}} &= 0 \quad \text{si} \quad z=u(x,y,t)\ , && (0.5)\\
u_t+\varphi_x u_x+\varphi_y u_y-\varphi_z &= 0 \quad \text{si} \quad z=u(x,y,t)\ , && (0.6)\\
\varphi_z &= 0 \quad \text{si} \quad z=-h, && (0.7)
\end{aligned}$$

où $\rho_0 > 0$ désigne la masse volumique, supposée constante, et $T \geq 0$ la tension de surface. Ces équations sont appelées respectivement équation de Laplace (déduite de l'incompressibilité), équation d'Euler homogène avec tension de surface (équivaut au principe fondamental de la dynamique), condition cinématique à la surface (la vitesse est tangente à la surface), et enfin condition de non-pénétration dans le fond.

On suppose alors que l'amplitude des ondes a est négligeable par rapport à la profondeur h et que cette profondeur h est elle même négligeable par rapport à k la longueur d'onde dans la direction Ox, c'est à dire que l'on s'intéresse aux ondes de faible amplitude et de grande longueur par rapport à la profondeur. Mais on suppose aussi que k la longueur d'onde dans la direction Ox est négligeable par rapport à l la longueur d'onde dans la direction Oy, c'est à dire que l'écoulement se fait principalement dans la direction Ox.

On adimensionne les équations précédentes. Pour cela, on suppose que, pour $c = \sqrt{gh}$ la vitesse caractéristique des ondes, les fonctions φ et u s'écrivent

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y,z,t) &= \frac{gka}{c}\widetilde{\varphi}(\frac{x}{k},\frac{y}{l},\frac{z}{h}+1,\frac{c}{k}t),\\
u(x,y,t) &= a\widetilde{u}(\frac{x}{k},\frac{y}{l},\frac{c}{k}t),
\end{aligned}$$

où $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{u}$ sont des profils. Ce changement de fonctions est important, il nous permet de sélectionner parmis toutes les ondes modélisées par l'équation d'Euler celles de faible amplitude et de grande longueur. Ensuite, on cherche une solution de l'équation de Laplace (0.4) sous la condition (0.7) comme série de la forme (par abus, les tildes ont été supprimés) :

$$\varphi(x,y,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x,y,t) z^n. \tag{0.8}$$

On remplace alors cette solution dans les équations (0.5)-(0.6), puis en exprimant φ en fonction de u par une analyse asymptotique et considérant que l'onde se déplace de la gauche vers la droite dans la direction Ox, on trouve les équations KP

$$u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha u u_x + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \sigma)\beta u_{xxx} + \frac{\gamma}{2}\partial_x^{-1} u_{yy} = O(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

appelées KP-I si $\sigma > 1/3$, KP-II si $\sigma < 1/3$, où $\sigma \geq 0$ désigne le nombre de Bond lié à la tension de surface. Comme $u_t = -u_x + O(\alpha + \beta + \gamma)$, on déduit de l'équation précédente les équations KP-BBM

$$u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha u u_x - \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \sigma)\beta u_{xxt} + \frac{\gamma}{2}\partial_x^{-1} u_{yy} = O(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

appelées KP-BBM-I si $\sigma > 1/3$ et KP-BBM-II si $\sigma < 1/3$. Ce problème est mal posé dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ si $\sigma > 1/3$, en effet on peut écrire l'équation précédente

$$\left(1 - \frac{\beta}{2}(\frac{1}{3} - \sigma)\,\partial_x^2\right) u_t = -u_x - \frac{3}{2}\,\alpha\, u u_x - \frac{\gamma}{2}\partial_x^{-1} u_{yy},$$

et l'opérateur $(1 + c\,\partial_x^2)$, pour $c > 0$, n'est pas inversible sur $L^2(\mathbb{R}^2)$, car, pour toute fonction u de $L^2(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\left(1 + c\,\partial_x^2\right) u(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\left((1 - ck^2)\mathcal{F}u\right)\,(x,y),$$

et $(1 - ck^2)$ s'annule si $c > 0$, où $\mathcal{F}$ représente la transformée de Fourier. Le seul modèle physiquement raisonnable est donc celui déterminé par KP-BBM-II.
Une fois ce travail de modélisation effectué, et après avoir remarqué que les équations de type II décrivent des modèles avec une faible tension de surface, on compare les solutions des équations KP-II et KP-BBM-II lorsque α, β et γ sont égaux. On reprend alors la méthode introduite dans l'article de Bona, Pritchard et Scott [BPS83]. Ils y comparent les solutions d'ondes longues en dimension 1, à savoir les solutions des équations KdV et BBM :

Théorème 0.1 *[BPS83]*
Soient $m \geq 1$, et $f \in H^{m+5}(\mathbb{R})$. Soit $\alpha > 0$ et soient u et v respectivement l'unique solution de KdV

$$u_t + u_x + \alpha\, u u_x + \alpha\, u_{xxx} = 0,$$

et de BBM

$$u_t + u_x + \alpha\, u u_x - \alpha\, u_{xxt} = 0,$$

dans $\mathcal{C}([0,\infty[;H^{m+5}(\mathbb{R}))$, *sous la condition initiale* $u|_{t=0} = v|_{t=0} = f$. *Alors, il existe* $\alpha_0 > 0$, *et pour* $0 \leq i \leq m-1$, *une constante* $M_i > 0$, *telle que si* $0 < \alpha \leq \alpha_0$, *et pour* $0 \leq t \leq \alpha^{-1}$, *on ait*

$$||\partial_x^i u(.,t) - \partial_x^i v(.,t)||_{L^\infty} \leq M_i \alpha^2\, t.$$

Remarquons que les résultats d'existence et d'unicité pour KdV et BBM au niveau de la régularité considérée dans le théorème précédent sont assurés par des théorèmes classiques.

On note $X^m(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions f de $H^m(\mathbb{R}^2)$ telles que $\partial_x^{-1} f$ soit dans $H^m(\mathbb{R}^2)$, muni de la norme

$$|f|_m = \left(||f||_m^2 + ||\partial_x^{-1} f||_m^2\right)^{1/2}.$$

Les solutions des équations KP-II et KP-BBM-II vérifient :

Théorème 0.2 *(voir théorème 1.14, [Mam07])*
Soient $m \geq 2$, *et* $f \in X^{m+5}(\mathbb{R}^2)$. *Soit* $\alpha > 0$ *et soient* u *et* v *respectivement l'unique solution de KP-II*

$$u_t + u_x + \alpha u u_x + \alpha u_{xxx} + \alpha \partial_x^{-1} u_{yy} = 0,$$

et de KP-BBM-II

$$u_t + u_x + \alpha u u_x - \alpha u_{xxt} + \alpha \partial_x^{-1} u_{yy} = 0,$$

dans $\mathcal{C}\left([-T,T];H^{m+5}(\mathbb{R}^2)\right)$, *avec* $T := \dfrac{\alpha^{-1}}{C_{m+5}|f|_{m+5}}$, *sous la condition initiale* $u|_{t=0} = v|_{t=0} = f$. *Alors, il existe* $\alpha_0 > 0$, *et pour tous entiers naturels* $0 \leq i+j \leq m-2$, *une constante* $N_{i,j} > 0$, *dépendant uniquement de* $|f|_{m+5}$, *telle que si* $0 < \alpha \leq \alpha_0$, *et pour* $|t| \leq T$, *on ait*

$$||\partial_x^i \partial_y^j u(.,.,t) - \partial_x^i \partial_y^j v(.,.,t)||_{L^\infty} \leq N_{i,j} \alpha^{3/2}\, |t|^{1/2}.$$

De plus, notre résultat se généralise au cas périodique.

Rappelons aussi que même l'existence globale de la solution de l'équation KP-II est assurée par Bourgain [Bou93c] et celle de la solution de l'équation KP-BBM-II est elle assurée par Saut et Tzvetkov [ST04].

Ce premier chapitre fait l'objet de l'article [Mam07], paru dans Mathematical Modelling and Numerical Analysis.

1.2. Modèles d'ondes internes

Dans le même ordre d'idée, on trouve en utilisant la méthode de Matsuno [Mat98, PLS03], à partir de l'équation d'Euler, un modèle en dimension 2 modélisant la surface séparant deux fluides de densités distinctes ρ_1 et ρ_2 (voir Fig. 2).

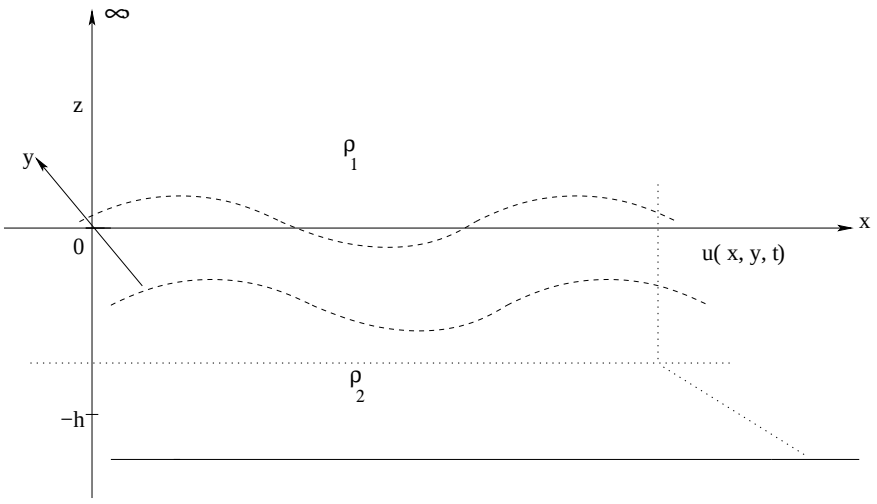


FIG. 2 – Interface entre deux fluides

Ainsi, on obtient l'équation de Benjamin-Ono-2D (2D-BO)

$$u_t + u_x + \alpha u u_x - \beta H(u_{xx}) + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = 0, \tag{0.9}$$

où ici α est le quotient entre l'amplitude des ondes et la profondeur du premier fluide, β le quotient entre cette profondeur et la longueur d'onde, et H la transformée de Hilbert dans la direction Ox. On voit alors que de la même manière que l'on passe de l'équation de KdV à celle de BBM, on obtient une nouvelle équations régularisée, appelée Benjamin-Ono-BBM-2D (2D-BO-BBM), à savoir

$$v_t + v_x + \alpha v v_x + \beta H(v_{xt}) + \gamma \partial_x^{-1} v_{yy} \quad = \quad 0 \tag{0.10}$$

Si on suppose que $\alpha = \beta = \gamma$, alors de la même manière que pour les équations KP et après avoir établi l'existence et l'unicité locale de solutions du problème de Cauchy, on prouve :

Théorème 0.3 *(voir théorème 2.5)*
Soient $m \geq 2$, et $f \in X^{m+3}(\mathbb{R}^2)$. Soit $\alpha > 0$ et soient u et v respectivement l'unique solution de 2D-BO et de 2D-BO-BBM dans $\mathcal{C}([-\alpha^{-1}T_0, \alpha^{-1}T_0]; H^{m+3}(\mathbb{R}^2))$, avec $T_0 := \dfrac{1}{C_{m+3}|f|_{m+3}}$, de même donnée initiale. Alors, il existe $\alpha_0 > 0$, et pour tous entiers naturels $0 \leq i + j \leq m - 2$, une constante $N_{i,j} > 0$, dépendant uniquement de $|f|_{m+3}$, telle que si $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, et pour $|t| \leq \alpha^{-1}T_0$, on ait

$$||\partial_x^i \partial_y^j u(.,.,t) - \partial_x^i \partial_y^j v(.,.,t)||_{L^\infty} \quad \leq \quad N_{i,j}\, \alpha^{3/2} |t|^{1/2}.$$

Ce chapitre ne fera pas l'objet d'une publication.

2. Etudes qualitatives des solutions

Dans la seconde partie de cette thèse, on s'intéresse à quelques phénomènes particuliers des équations de type BBM, à savoir le prolongement en temps des bornes sur les normes

de Sobolev, une propriété de prolongement unique et la vitesse de décroissance en temps des solutions correspondantes.

2.1. Prolongement en temps des bornes des normes de Sobolev des solutions

On considère l'équation BO-BBM

$$u_t + u_x + \alpha\, uu_x + \beta\, H(u_{xt}) = 0.$$

On montre l'existence globale de solution dans $H_0^m(\mathbb{T})$, $s > 1/2$, par la méthode de Brézis et Gallouet [BG80], où $H_0^m(\mathbb{T})$ est l'ensemble des fonctions $H^m(\mathbb{T})$ de moyenne nulle. En multipliant cette équation par u et en intégrant en espace, la norme de Sobolev $||u(.,t)||_{1/2}$ est conservée pour tout temps. Autrement dit, si u est solution de l'équation BO-BBM alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$||u(.,t)||_{1/2} = ||u(.,0)||_{1/2}.$$

La question que l'on se pose est de savoir ce qu'il en est des autres normes $H_0^m(\mathbb{T})$ pour $m > 1/2$. Le fait que le problème de Cauchy soit localement bien posé implique que, pour $0 < \alpha, \beta \leq 1$ et $m > 1/2$, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$, dépendant uniquement de m, telles que, si la donnée initiale satisfait $||f||_m \leq \varepsilon$, alors pour $|t| \leq C_2\, \varepsilon^{-1}\dfrac{\beta}{\alpha}$, la solution u satisfait

$$||u(.,.,t)||_m \leq C_1\, \varepsilon.$$

On se demande si cette borne est vraie plus longtemps. On reprend la méthode introduite par Tzvetkov [Tzv04], consistant à réécrire l'équation BO-BBM sous forme normale

$$v_t + L(v) = F(v),$$

où L est un opérateur linéaire et F un opérateur multilinéaire d'ordre strictement plus grand que 2, dans le but d'améliorer la nature quadratique de la non-linéarité de l'équation BO-BBM. Ici F est un opérateur trilinéaire. On montre alors :

Théorème 0.4 *(voir théorème 3.2)*
Soient $0 < \alpha, \beta \leq 1$ et $m > 1/2$. Il existe $0 < \varepsilon_0 < \dfrac{\beta^2}{\alpha}$, $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que si $f \in H_0^m(\mathbb{T})$ avec $||f||_m \leq \varepsilon$, pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, alors l'unique solution u du problème de Cauchy associé à l'équation périodique BO-BBM de donnée initiale f, satisfait pour $|t| \leq C_2 \left(\varepsilon^{-1}\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2$,

$$||u(.,t)||_m \leq C_1 \varepsilon. \tag{0.11}$$

La contrainte de petitesse sur ε_0 ne dépend pas de α et β lorsque $\dfrac{\beta^2}{\alpha} \geq 1$. On remarque aussi que le fait de choisir ε_0 de telle sorte que $\varepsilon < \dfrac{\beta^2}{\alpha}$, avec $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, implique que le temps prolongé $\left(\varepsilon^{-1}\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2$ est plus long que celui trouvé par le résultat d'existence locale $\varepsilon^{-1}\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Fixons $\alpha = 1$. Lorsque β tend vers zéro, le temps de persistance de la borne (0.11) donné par le théorème 0.5 tend aussi vers zéro. Cela n'est pas surprenant car la limite formelle, lorsque β tend vers zéro, de l'équation BO-BBM est celle de Burgers

$$u_t + u_x + uu_x = 0,$$

pour laquelle le temps d'existence du problème de Cauchy associé à cette équation, pour une donnée initiale de taille ε, est d'ordre ε^{-1} et ce temps est maximal.

D'autre part, dans ce chapitre, on donne une formulation du résultat de [Tzv04] en présence des paramètres physiques α, β, et γ. On considère donc l'équation KP-II

$$u_t + u_x + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = 0.$$

Cette équation est globalement bien posée dans $H_0^m(\mathbb{T}^2)$, avec $m \geq 0$, et $\mathbb{T}^2$ le tore de dimension 2 [Bou93c]. On remarque en multipliant cette équation par u et en intégrant en espace, que la masse définie par $||u(.,.,t)||_{L^2}$ est conservée pour tout temps. On montre alors pour les normes $H_0^m(\mathbb{T}^2)$, $m > 1$, le résultat suivant :

Théorème 0.5 *(voir théorème 3.18)*
Soient $0 < \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ *et* $s > 1$. *Il existe* $0 < \varepsilon_0 < \dfrac{\beta}{\alpha}$, $C_1 > 0$ *et* $C_2 > 0$ *telles que si* $f \in H_0^m(\mathbb{T}^2)$ *avec* $||f||_m \leq \varepsilon$, *pour* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, *alors l'unique solution* u *du problème de Cauchy associé à l'équation périodique KP de donnée initiale* f, *satisfait pour* $|t| \leq C_2 \left(\varepsilon^{-1} \dfrac{\sqrt{\beta}}{\alpha} \right)^2$,

$$||u(.,.,t)||_m \leq C_1 \varepsilon.$$

2.2. Propriété de prolongement unique

Une étude d'une propriété de prolongement unique est ensuite étudiée. On essaie de répondre à la question suivante : si la solution u du problème de Cauchy associé à l'équation KP-BBM-II

$$u_t + u_x + \alpha uu_x - \beta u_{xxt} + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = 0,$$

est à support compact pour tout temps, alors cette solution est-elle identiquement nulle ? Une réponse concernant l'équation KdV fut donnée par Saut et Scheurer [SS87], en utilisant la méthode de Carleman [Car33]. Panthee [Pan04, Pan05] prouva cette propriété de prolongement unique pour l'équation de KP-II par l'intermédiaire de la méthode de Bourgain [Bou97] basée sur des estimations de fonction entière. Grâce au théorème de Paley-Wiener, la fonction entière est ici donnée par un prolongement analytique de la transformée de Fourier en espace de la formule de Duhamel. Mais il n'est pas encore clair que la méthode de Bourgain s'étende à l'équation KP-BBM-II. En effet la méthode de Bourgain nécessite de prouver que pour tout $R > 0$, il existe $(k, l) \in \mathbb{R}^2$, avec $|k| + |l| > R$ tel que

$$|\partial_k L(k,l)| \geq |f(k,l)|, \quad \text{with} \quad \lim_{|k|+|l| \to \infty} |f(k,l)| = +\infty, \tag{0.12}$$

où L est le symbole de l'évolution linéaire. Pour les équations KP, le symbole de la relation de dispersion est donnée par $L(k,l) = k - s\beta k^3 + \gamma l^2/k$, d'où

$$\partial_k L(k,l) = 1 - 3s\beta k^2 - \gamma\frac{l^2}{k^2}.$$

Si $s = 1$, la condition 0.12 est satisfaite, avec $f(k,l) = |k|+|l|$ [Pan05]. Si $s = -1$, *i.e.* pour l'équation KP-I, il existe (k,l) grand ($l \sim k^2$) tel que $\partial_k L(k,l)$ s'annule, et la méthode introduite par Bourgain ne s'applique plus.

De même, l'évolution linéaire est donnée pour l'équation KP-BBM-II par $L(k,l) = \dfrac{k+\gamma l^2/k}{1+\beta k^2}$, d'où

$$\partial_k L(k,l) = \frac{(1-\beta k^2)k^2 - \gamma l^2(1+3\beta k^2)}{k^2(1+\beta k^2)^2}.$$

Or, pour k et l grands, $\partial_k L(k,l)$ peut devenir très petit si $|l| \ll |k|$.
Ici, pour résoudre le problème lié à l'équation KP-BBM-II, on s'inspire alors d'une méthode introduite par Constantin [Con05] basée sur des intégrations par partie.

Théorème 0.6 *(voir théorème 4.8)*
Soit $m > 2$ et $u \in \mathcal{C}([-T,T]; X^m(\mathbb{R}^2))$ solution du problème de Cauchy associé à l'équation KP-BBM-II. Supposons qu'il existe $0 < B < +\infty$ et $C > D$ dans $\mathbb{R}$, avec $\dfrac{|D-C|}{\sqrt{\beta\gamma}} < \pi$, tels que pour tout $t \in [-T,T]$

$$supp\, u(t) \subseteq [-B,B] \times [D,C].$$

Alors u est identiquement nulle.

Au début du chapitre, on rappelle la méthode de Bourgain dans le contexte de l'équation d'Airy.

2.3. Décroissance en temps des solutions

Une généralisation mathématique des équations de KP-BBM-II consiste à considérer les équations gKP-BBM-II

$$u_t + u_x + u^\rho u_x - u_{xxt} + \partial_x^{-1} u_{yy} = 0,$$

où $\rho \geq 1$ est un entier naturel. On étudie dans ce chapitre la vitesse de dispersion des solutions de cette équation pour une donnée initiale petite en fonction de la non-linéarité ρ. Le fait que l'on considère des données petites mais dans un contexte non-périodique ne nous permet pas d'employer la méthode des formes normales vue précédemment pour étudier les bornes H^s des solutions. Néanmoins, dans le cas continu, on peut exploiter les propriétés de dispersion de l'évolution libre, ces propriétés étant fausses dans le cas périodique.

Pour $1 < p < 2$ et $(m_0, m_1) \in \mathbb{R}^2$, on note $X^{m_0,m_1,p}(\mathbb{R}^2) = H^{m_0}(\mathbb{R}^2) \cap W^{m_1,p}(\mathbb{R}^2)$ l'espace des fonctions f telles que la norme

$$||f||_{X^{m_0,m_1,p}} := ||f||_{H^{m_0}} + ||f||_{W^{m_1,p}}$$

soit finie. Notre résultat s'écrit alors :

Théorème 0.7 *(voir théorème 5.21, [Mam08])*
Soit $\rho \geq 3$. *Pour* $0 < \delta < \frac{1}{5} - \frac{8}{15\rho}$, *on pose* $m = \frac{1}{2\delta} - 2$. *Choisissons* $1 < p < 2$ *et* $q > 2$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $0 < \frac{1}{q} < \frac{1}{2} - \frac{4}{3\rho(1-5\delta)}$.
Alors il existe $\varepsilon > 0$ *petit pour que pour tout* $f \in X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}(\mathbb{R}^2)$ *telle que* $||f||_{X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}} \leq \varepsilon$, *il existe une unique solution globale en temps* $u \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}; X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}(\mathbb{R}^2)\right)$ *de l'équation gKP-BBM-II de donnée initiale* f.
De plus cette solution vérifie qu'il existe une constante $C > 0$, *dépendant uniquement de* m, p *et* ε *telle que pour tout temps* $t \in \mathbb{R}$, *on a*

$$||u(.,.,t)||_{L^q} + ||u_x(.,.,t)||_{L^q} \leq C\varepsilon(1+|t|)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)}.$$

Notons que ce théorème fournit aussi un résultat d'existence globale de solutions.

Rappelons que, pour les équations KP généralisées

$$u_t + u_x + u^\rho u_x + u_{xxx} + \partial_x^{-1} u_{yy} = 0,$$

Hayashi, Naumkin et Saut [HNS99] ont montré que pour $\rho \geq 2$, le taux de décroissance des solutions de ces équations est essentiellement d'ordre 1.
D'autre part, concernant l'équation généralisée gBO-BBM

$$u_t + u_x + u^\rho u_x + H(u_{xt}) = 0,$$

on montre de la même façon :

Théorème 0.8 *(voir théorème 5.12, [Mam08])*
Soit $\rho \geq 3$. *Pour* $0 < \delta < \frac{1}{3} - \frac{8}{9\rho}$, *on pose* $m = \frac{1}{2\delta} - 1$. *Choisissons* $1 < p < 2$ *et* $q > 2$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $0 < \frac{1}{q} < \frac{1}{2} - \frac{4}{3\rho(1-3\delta)}$.
Alors il existe $\varepsilon > 0$ *petit pour que pour tout* $f \in X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}(\mathbb{R})$ *telle que* $||f||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}} \leq \varepsilon$, *il existe une unique solution globale en temps* $u \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}; X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}(\mathbb{R})\right)$ *de l'équation gBO-BBM de donnée initiale* f.
De plus cette solution vérifie qu'il existe une constante $C > 0$, *dépendant uniquement de* m, p *et* ε *telle que pour tout temps* $t \in \mathbb{R}$, *on a*

$$||u(.,t)||_{L^q} + ||u_x(.,t)||_{L^q} \leq C\varepsilon(1+|t|)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)}.$$

Que ce soit pour l'équation gBO-BBM ou l'équation gKP-BBM-II, on utilise la méthode de Strauss [Str74] pour prouver cette décroissance en temps. Pour $T > 0$, elle consiste à choisir une norme N_T, qui dépend *a priori* du temps, telle que, pour une solution de l'équation, toutes les dérivées agissent comme un terme linéaire et sont incluses dans une norme de Sobolev d'ordre suffisamment élevé et telle que la puissance ρ soit liée à la décroissance en temps.
Le chapitre 5 nous donnera les détails de l'article [Mam08] paru dans Communications on Pure and Applied Analysis.

3. Etude numérique 3D

Cette dernière partie, en collaboration avec F. Hamidouche et S.M. Mefire, est consacrée à l'étude numérique des solutions des équations de Kadomtsev-Petviashvili généralisées en dimension 3 d'espace. Un article en préparation en est issu.

L'approche de Kadomtsev et Petviashvili [KP70] pour introduire l'équation (0.3) à partir de KdV (0.1) peut être étendue à la dimension 3. On obtient de cette façon les équations 3D-KP :

$$u_t + u^\rho u_x + u_{xxx} + a\partial_x^{-1}u_{yy} + b\partial_x^{-1}u_{zz} \;=\; 0\,, \tag{0.13}$$

où $\rho \geq 1$, et les constantes a et b sont normalisées à ± 1.

L'existence, aussi bien que la non-existence, d'ondes solitaires sont prouvées dans [dBS97a, dBS97b] et Saut établit dans [Sau95] un résultat d'explosion en temps fini à l'égard de (0.13) pour $a = b = -1$ et $\rho \geq 2$. Liu [Liu02] étend ce résultat et prouve que, lorsque la solution de (0.13), pour $a = b = -1$ et $1 \leq \rho < 4/3$, est initialement proche d'une onde solitaire instable, alors cette solution explose en temps fini. Il n'y a pas encore d'autre résultat théorique sur ces questions, notamment dans les cas $a = b = 1$ et $ab = -1$. Il devient alors intéressant d'étudier numériquement les solutions de (0.13) dans ces divers contextes. Le but de cette partie ne consiste pas uniquement à inspecter numériquement quelques propriétés théoriques déjà prouvés, mais surtout d'investiguer des aspects non encore établis comme l'explosion en temps fini, la dispersion, le comportement solitonique et l'instabilité transversale.

3.1. Comportement en temps long de données localisées

On étudie la propagation de la solution du problème de Cauchy associé à (0.13) de donnée initiale

$$u_0(x,y,z) \;=\; \alpha(1-2sx^2)\,\mathrm{e}^{-s(x^2+y^2+z^2)}\,,$$

où α, $s \in \mathbb{R}_+^*$. Cette étude nous donne quelques idées de validité de l'explosion en temps fini dans le contexte de [Sau95]. Typiquement, les observations numériques nous amènent à penser que l'effet de deux directions transversales négatives ($a = b = -1$) est bien moins régularisant que l'effet engendré par les autres choix de directions transversales. En effet, la solution discrète correspondant au cas $a = b = -1$ explose en temps fini dès $\rho = 2$, alors que celle correspondant à $a = b = 1$, $ab = -1$, explose en temps fini quand $\rho = 3$.

3.2. Instabilité transversale dans les directions Oy et Oz

Par abus, on parle d'instabilité de la solution au lieu d'instabilité orbitale de l'onde solitaire comparativement à cette solution.

On étend à la dimension 3 le travail de Hamidouche [Ham01]. On observe une forme plus forte d'instabilité dans le sens où l'évolution des solutions de 3D-KP, proche initialement d'une onde solitaire, conduit à une explosion en temps fini.

On étudie l'instabilité dans les deux directions transversales Oy et Oz en associant à (0.13) comme donnée initiale

$$u_0(x,y,z) = \Phi_{c(y,z)}(x,0),$$

où $c(y,z) = c\left(1+\varepsilon\cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda_y}+\frac{2\pi z}{\lambda_z}\right)\right)$, est une perturbation infinitésimale dans les directions Oy et Oz, avec $\varepsilon > 0$ fixé petit, de la vitesse du line-soliton définie par

$$\Phi_c(x,t) := \left(\frac{(\rho+1)(\rho+2)}{2}\,c\right)^{1/\rho} \operatorname{sech}^{2/\rho}\left(\frac{\rho\sqrt{c}}{2}\,(x-ct)\right).$$

Lorsque $\rho = 1,2$ et $a = b = -1$, respectivement $\rho = 2$ et $ab = -1$, on observe numériquement que pour une longueur d'onde λ_y, ou λ_z, ni trop petite et ni trop grande, la solution discrète de 3D-KP avec une telle donnée initiale explose en temps fini (en particulier le line-soliton est instable sous le flot de (0.13)). Ces observations nous mènent à la conjecture suivante :

Conjecture 0.9
Soient $\rho \geq 1$ et $a = b = -1$, respectivement $\rho \geq 2$ et $ab = -1$. Alors il existe deux longueurs d'onde critiques $0 < \lambda_c^1 \ll \lambda_c^2$, dépendant uniquement de c, telles que la solution de 3D-KP, avec pour donnée initiale u_0, explose en temps fini si $\lambda_c^1 < \lambda_y < \lambda_c^2$ ou $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$.

L'existence de la valeur critique λ_c^1 signifie que la solution de 3D-KP, avec une large perturbation du line-soliton pour donnée initiale, explose en temps fini, celle de λ_c^2 traduit le fait que la limite formelle, lorsque λ_y et λ_z tendent vers l'infini, du line-soliton perturbé est celui de KdV de vitesse $c(1+\varepsilon)$, celui-ci étant stable [Ben72]. Ces observations étaient prévisibles connaissant celles obtenues pour KP-I.

Une autre observation intéressante est faite lorsque $\rho = 1$ et $a = 1, b = -1$, à savoir lorsque l'équation 3D-KP est formée de KP-II et en addition d'une direction transversale négative, la solution discrète correspondante explose en temps fini si la longueur d'onde dans la direction transversale négative (ici λ_z) est suffisamment forte par rapport à celle dans la direction transversale positive, bien que KP-II n'admette pas de solution instable. De manière symétrique, la même observation est notée pour $a = -1, b = 1$. Plus précisement, on peut formuler :

Conjecture 0.10
Soient $\rho = 1$ et $a = 1$, $b = -1$, respectivement $a = -1$, $b = 1$. Alors il existe deux longueurs d'onde critiques $0 < \lambda_c^1 \ll \lambda_c^2$, dépendant uniquement de c, telles que la solution de 3D-KP, avec pour donnée initiale u_0, explose en temps fini si $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$, $\lambda_y < \lambda_c^1$ ou $\lambda_y > \lambda_c^2$, respectivement $\lambda_c^1 < \lambda_y < \lambda_c^2$, $\lambda_z < \lambda_c^1$ ou $\lambda_z > \lambda_c^2$.

3.3. Instabilité transversale dans la direction Oz

Pour le cas spécial $\rho = 1$ avec $a = -1$, on étudie l'instabilité transversale dans la direction Oz lorsque l'on associe à (0.13) la donnée initiale

$$u_0(x,y,z) = \psi_{c(z)}(x,y,0),$$

où $c(z) = c\left(1+\varepsilon\cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda_z}\right)\right)$ est une légère perturbation dans la direction Oz, avec $\varepsilon > 0$ fixé petit, de la vitesse du soliton de Zaitsev. Celui-ci est défini par

$$\psi_c(x,y,t) := 12\alpha^2 \frac{1-\beta\cosh(\alpha x-\Omega t)\cos(\delta y)}{(\cosh(\alpha x-\Omega t)-\beta\cos(\delta y))^2},$$

avec $\beta = \sqrt{\dfrac{\delta^2 - 3\alpha^4}{\delta^2}}$, $\Omega = \dfrac{\delta^2 + \alpha^4}{\alpha}$, $3\alpha^4 < \delta^2$ et $c = \dfrac{\Omega}{\alpha}$.

Il dérive des expériences numériques que la longueur d'onde λ_z caractérise l'instabilité du soliton de Zaitsev par perturbations transversales. Plus précisément, pour $b = -1$, il existe deux longueurs d'onde critiques $0 < \lambda_c^1 \ll \lambda_c^2$, dépendant uniquement de c, telles que la solution de (0.13) avec donnée initiale u_0 explose (et par conséquent le soliton de Zaitsev est instable sous le flot de (0.13)) si $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$.

On aura notamment remarqué que toutes les instabilités, que ce soit dans le cas d'une perturbation dans deux directions transversales, aussi bien que dans celui d'une perturbation dans une seule direction transversale, sont dûes à une explosion en temps fini.

4. Conclusions et Perspectives

4.1. Il sera intéressant de généraliser notre travail à des modèles physiquement plus raisonnables, prenant par exemple en compte la force de Coriolis [Ost78], ou encore des modèles d'ondes internes n'imposant pas une profondeur infinie [BLS].

4.2. Modélisation et Comparaison

Lors de la modélisation, on remarque que partant de l'équation d'Euler en dimension 3 d'espace, la résolution de l'équation de Laplace (0.4) sous la condition (0.7) comme série de la forme

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, t) z^n,$$

nous permet de trouver les équations KP en dimension 2 d'espace. De même, de l'équation d'Euler en dimension 2 découle l'équation KdV en dimension 1. Il est alors naturel de se demander si les équations KP en dimension 3 s'obtiennent à partir du principe fondamental de la dynamique, via une analyse asymptotique, et de ce que représente la seconde direction transversale Oz. Il faut alors envisager un autre changement de variables ou penser à un autre phénomène physique.

Lorsque l'on compare les solutions des équations KP-II et KP-BBM-II avec même donnée initiale de norme 1, on remarque qu'elles sont proches pour un temps d'ordre α^{-1}. Les simulations numériques et l'étude des équations linéaires nous laissent croire que ce temps peut être plus long. La borne en temps α^{-2}, déduite des problèmes linéaires, semblent être une borne limite.

Autre remarque intéressante, le passage de KP à sa version BBM peut être réappliqué, de la sorte que l'on obtienne une troisième équation de type KP [Kru75]

$$u_t + u_x + \alpha u u_x + \beta u_{xtt} + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = 0.$$

Il est tentant de vouloir comparer les solutions de cette dernière équation avec celles de KP-II et KP-BBM-II. Bona et Chen [BC99] montre en dimension 1 un résultat similaire, à celui obtenu pour KdV et BBM, de comparaison des solutions pour un temps maximum de comparaison d'ordre $\alpha^{-1/2}$. Dans le cas de la dimension 2, le temps de comparaison peut devenir d'ordre α, ce qui est bien trop court pour comparer les solutions.

4.3. Prolongement en temps des bornes des normes de Sobolev des solutions

Là encore, rien ne dit que la borne en temps, obtenue par la méthode des formes normales, est optimale. De plus, dans le cas de l'équation KP, la preuve nécessite d'imposer une régularité d'ordre $s > 1$, et on peut se demander ce qui se passe pour une régularité plus faible.

D'autre part, cette méthode ne s'applique pas au cas de l'équation KP-BBM-II. Si on note pour $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$, $\sigma(k,l) = i\dfrac{k+\gamma\frac{l^2}{k}}{1+\beta k^2}$, alors pour (k,l) et (k_1,l_1) dans $\mathbb{Z}^2$, avec $k \neq 0$, $k_1 \neq 0$ et $k \neq k_1$, le symbole σ de la relation de dispersion vérifie

$$|\sigma(k_1,l_1)+\sigma(k-k_1,l-l_1)-\sigma(k,l)| = \big|\,\beta(3+\beta(k_1^2-kk_1+k^2))+R\,\big| \times \frac{|kk_1(k-k_1)|}{(1+\beta k^2)(1+\beta k_1^2)(1+\beta(k-k_1)^2)},$$

où $R = R(k,k_1,l,l_1,\gamma,\beta)$. Pour appliquer la méthode des formes normales, il faut que cette égalité ne s'annule pas, ce qui n'est pas le cas ici.

4.4. Propriété de prolongement unique

Concernant la propriété de prolongement unique, la simplicité de la méthode est contrebalancé par le fait que le support dans la direction Oy de la solution doit être petit. D'autre part, il n'est pas encore clair que la méthode de Bourgain s'applique à l'équation KP-BBM-II.

4.5. Décroissance en temps des solutions

Enfin, que ce soit pour l'équation KdV généralisée ou sa version BBM, on note que l'ordre de décroissance en temps est d'ordre 1/3 dans les deux cas [Str74, Alb86]. En dimension 2, Haysahi, Naumkin et Saut [HNS99] ont prouvé que, pour l'équation KP généralisée, l'ordre de décroissance en temps est 1. Or, rien ne dit que notre résultat est optimal et on se demande alors si on peut trouver un ordre de décroissance en temps meilleur que 1/2, et se rapprocher de la valeur 1 pour la version BBM. Autre question en suspend, peut-on diminuer la non-linéarité ρ? Dans notre analyse, l'existence globale de solutions est prouvée pour $\rho \geq 3$ alors que [HNS99] la démontre jusque $\rho \geq 2$.

Première partie

Modélisation et Comparaison des modèles

Chapitre 1

Modèles d'ondes de surface en dimension 2

Ce premier chapitre fait l'objet de l'article [Mam07], paru dans Mathematical Modelling and Numerical Analysis.

Dans ce chapitre, nous étudions certains modèles asymptotiques des ondes hydrodynamiques. On s'intéresse plus particulièrement aux modèles d'ondes longues de faible amplitude en eau de surface en dimensions 1 et 2. L'écoulement du flux irrotationnel d'un fluide parfait incompressible homogène est décrit par l'équation d'Euler

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\left(\frac{u^2}{2}\right) = -\nabla\left(\frac{P}{\rho_0}\right) - \nabla g\, z,$$

où $u \in \mathbb{R}^3$ désigne le champ de vitesse. A partir de cette équation, on obtient les équations décrivant la surface libre η de ces ondes en dimension 1, à savoir les équations de Korteweg-de Vries (KdV) [KdV95]

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\,\alpha\,\eta\eta_x + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \sigma)\,\beta\,\eta_{xxx} = 0,$$

et de Benjamin-Bona-Mahony (BBM) [BBM72], pour $\sigma < 1/3$,

$$\eta_x + \eta_t + \frac{3}{2}\,\alpha\,\eta\eta_x - \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \sigma)\,\beta\,\eta_{xxt} = 0,$$

où $\sigma > 0$ désigne le nombre de Bond lié à la tension de surface, α est le quotient entre l'amplitude des ondes et la profondeur de l'eau, et β est le carré du quotient entre la profondeur et la longueur d'onde. En dimension 2, les modèles asymptotiques sont donnés par les équations de Kadomstev-Petviashvili [KP70]

$$\left(\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \sigma)\beta\eta_{xxx}\right)_x + \frac{\gamma}{2}\eta_{yy} = 0,$$

appelées KP-I si $\sigma > 1/3$, KP-II si $\sigma < 1/3$, où ici γ désigne le carré du quotient entre les longueurs d'onde dans les deux directions du plan.
De la même manière que l'on passe de KdV à BBM, on peut se demander quels sont les

modèles correspondant aux équations KP-I et KP-II. Dans un premier temps, on vérifiera que seul le modèle décrit par l'équation KP-BBM-II

$$\left(\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \sigma)\beta\eta_{xxt}\right)_x + \frac{\gamma}{2}\eta_{yy} = 0,$$

pour $\sigma < 1/3$, est linéairement bien posé dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, et donc est le seul modèle raisonnable. De même, BBM est un modèle raisonnable uniquement pour $\sigma < 1/3$.
Une fois ce travail de modélisation effectué, on pourra, dans un second temps, comparer les solutions des équations de KP-II et KP-BBM-II. On supposera alors que α, β et γ sont égaux.
Avant d'énoncer notre résultat, rappelons que Bona, Pritchard et Scott [BPS83] ont montré en dimension 1 :

Théorème 1.1
Soient $m \geq 1$, et $f \in H^{m+5}(\mathbb{R})$. Soit $\alpha > 0$ et soient η et ζ respectivement l'unique solution de KdV et de BBM dans $\mathcal{C}([0,\infty[; H^{m+5}(\mathbb{R}))$, sous la condition initiale $\eta|_{t=0} = \zeta|_{t=0} = f$. Alors, il existe $\alpha_0 > 0$, et pour $0 \leq i \leq m-1$, une constante d'ordre un $M_i > 0$, telle que si $0 < \alpha \leq \alpha_0$, et pour $0 \leq t \leq \alpha^{-1}$, on ait

$$||\partial_x^i \eta(.,t) - \partial_x^i \zeta(.,t)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M_i \alpha^2 \, t.$$

Pour les modèles de dimension 2 sans tension de surface, on montrera un résultat similaire. Si on note $X^m(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions f de $H^m(\mathbb{R}^2)$ telles que $\partial_x^{-1} f$ soit dans $H^m(\mathbb{R}^2)$, on peut énoncer :

Théorème 1.2
Soient $m \geq 2$, et $f \in X^{m+5}(\mathbb{R}^2)$. Soit $\alpha > 0$ et soient η et ζ respectivement l'unique solution de KP-II et de KP-BBM-II dans $\mathcal{C}([-T,T]; H^{m+5}(\mathbb{R}^2))$, avec $T := \dfrac{\alpha^{-1}}{C_{m+5}|f|_{m+5}}$, sous la condition initiale $\eta|_{t=0} = \zeta|_{t=0} = f$. Alors, il existe $\alpha_0 > 0$, et pour tous entiers naturels $0 \leq i + j \leq m-2$, une constante $N_{i,j} > 0$, dépendant uniquement de la norme de f dans $X^{m+5}(\mathbb{R}^2)$, telle que si $0 < \alpha \leq \alpha_0$, et pour $|t| \leq T$, on ait

$$||\partial_x^i \partial_y^j \eta(.,.,t) - \partial_x^i \partial_y^j \zeta(.,.,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq N_{i,j} \alpha^{3/2} \, |t|^{1/2}.$$

La preuve consistera à étudier les solutions des équations

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + \partial_x^{-1} u_{yy} = 0 \tag{1.1}$$
$$v_t + vv_x + v_{xxx} - \alpha v_{xxt} + \partial_x^{-1} v_{yy} = 0. \tag{1.2}$$

La chose importante est de remarquer que, lorsque l'on prend $\alpha = \beta = \gamma$, le passage de KP-II à (1.1) et de KP-BBM-II à (1.2) se fait uniquement à l'aide du changement de variables

$$u(x,y,t) = \eta(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t) \ , \ v(x,y,t) = \zeta(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t).$$

Clairement, ce changement de variables nous permettra de généraliser nos résultats à des problèmes périodiques dans les deux directions d'espace.

On pourra alors s'intéresser à cette comparaison de façon numérique en se restreignant à des domaines de type $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$, puis en prolongeant par périodicité. On se demandera alors si l'intervalle du temps de comparaison pourrait être plus grand. On observera, effectivement, que les inégalités de comparaison restent vraies au delà du temps donné par le théorème précédent, et que le comportement du problème non linéaire est semblable à celui du problème linéaire lors des premiers instants d'observation.

1.1 Dérivation des équations

On s'appuie ici essentiellement sur les livres [MT99, Whi74]. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}_+$. On considère une partie de fluide S remplissant un volume Ω_{t_0} de $\mathbb{R}^3$ au temps initial $t_0\in I$, et un volume Ω_t de $\mathbb{R}^3$ au temps $t\in I$. Soit $\rho=\rho(x,t)\in\mathbb{R}$ la masse volumique du système au point $x\in\Omega_t$, et au temps $t\in I$. On suppose que ρ est de classe $\mathcal{C}^1$ en espace et en temps. On se donne une particule de fluide se trouvant à la position $a\in\Omega_{t_0}$ au temps initial t_0, et à la position $x\in\Omega_t$ au temps $t\in I$. On appelle déformation l'application $\Phi=\Phi(a,t_0,t)$

$$\Phi : a\in\Omega_{t_0}\mapsto x\in\Omega_t.$$

On suppose que Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω_{t_0} sur Ω_t.

1.1.1 Principes physiques

On se place désormais dans un référentiel galiléen de $\mathbb{R}^3$, c'est à dire qu'on se munit d'un repère orthonormée (Ox_1,Ox_2,Ox_3) avec Ox_3 vertical dirigé vers le haut et d'une chronologie, pour nous permettre d'étudier les aspects cinématiques de l'écoulement du fluide. On admet les principes Newtoniens, on peut alors définir la vitesse de la particule occupant la position $x\in\Omega_t$ au temps $t\in I$ comme étant le vecteur de $\mathbb{R}^3$

$$u(x,t):=\frac{\partial\Phi}{\partial t}(a,t_0,t),$$

et l'accélération le vecteur de $\mathbb{R}^3$

$$\gamma(x,t):=\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 t}(a,t_0,t).$$

La vitesse et l'accélération sont indépendantes du choix de t_0. On choisit une description Eulérienne de l'écoulement, c'est à dire qu'on cherche le champ de vitesse $u=u(x,t)\in\mathbb{R}^3$ en chaque point $x\in\Omega_t$ et temps $t\in I$. On suppose que la vitesse u est de classe $\mathcal{C}^1$ en espace et en temps.
On appelle masse du système S au temps $t\in I$ l'intégrale

$$\int_{\Omega_t}\rho(x,t)\,dx.$$

Le domaine d'intégration varie avec le temps. Le *principe de conservation de la masse* postule qu'il n'y a ni apparition ni disparition de matière, cela peut s'écrire encore que pour tout ouvert Ω'_{t_0} de Ω_{t_0}, on a pour $\Omega'_t=\Phi(\Omega'_{t_0},t)$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega'_t}\rho(x,t)\,dx=0.$$

Proposition 1.3 *[MT99, propostion 5]*
Pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in \Omega_t$, on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \nabla \cdot (\rho(x,t)u(x,t)) = 0.$$

Un fluide parfait est un fluide non visqueux, c'est à dire que l'on néglige les forces d'interactions entre molécules. Un fluide est dit incompressible si le volume de toute quantité de fluide reste constant durant le mouvement. Un fluide est dit homogène si la masse volumique ρ est constante. En particulier, d'après la proposition 1.3, la divergence de la vitesse est nulle.
Le flux d'un fluide est dit irrotationnel si le vecteur $\omega := (\nabla \wedge u)$ est nul. On l'appelle vecteur tourbillon. On rappelle que pour Ω_{t_0} simplement connexe, ω est nul si et seulement si u est le gradient d'une fonction φ, appelée potentiel de vitesse ([Tay96] p.69).
Dans le cas d'un flux irrotationnel, la conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \nabla \varphi) = 0.$$

On remarque alors que pour un flux irrotationnel d'un fluide parfait homogène, la fonction potentiel de vitesse est une fonction harmonique. En effet, comme le flux est irrotationnel, il existe une fonction φ telle que $u = \nabla\varphi$. Le fait que le fluide soit homogène implique

$$0 = \nabla \cdot u = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = \Delta\varphi.$$

Le *principe fondamental de la dynamique* postule que l'accélération subie par un corps est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse.
Pour un fluide, il existe trois types de force :
- la pesanteur $-\rho \nabla g\, x_3$,
- la pression $-\nabla P$,
- les forces de viscosité, qui dans notre étude sont négligées.

Calculons l'accélération comme un dérivée Eulérienne. En effet, il faut tenir compte du fait que la position dépend également du temps. On a par définition

$$\gamma(x,t) := \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(a,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(\Phi(a,t),t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \sum_{i=1}^{3} u_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t),$$

ou encore

$$\gamma(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + (u.\nabla)u(x,t) =: \frac{Du}{Dt}(x,t).$$

On remarque que

$$\begin{aligned}\left(\nabla\left(\frac{u^2}{2}\right) + (\nabla \wedge u) \wedge u\right)_1 &= u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) u_3 - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) u_2 \\ &= \gamma_1.\end{aligned}$$

De même pour les deux autres composantes. Finalement l'accélération est donnée par

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\left(\frac{u^2}{2}\right) + (\nabla \wedge u) \wedge u.$$

Le terme $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ est l'accélération locale, elle traduit la non permanence de l'écoulement et le terme $\nabla\left(\dfrac{u^2}{2}\right) + (\nabla \wedge u) \wedge u$ est appelé accélération convective, elle traduit la non uniformité de l'écoulement.
Le *principe fondamental de la dynamique* donne l'équation d'Euler

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\left(\frac{u^2}{2}\right) + (\nabla \wedge u) \wedge u\right) = -\nabla P - \rho\,\nabla g\, x_3.$$

1.1.2 Réécriture dans le plan

On se place désormais dans le plan (Ox, Oy) et on étudie un flux irrotationnel d'un fluide parfait incompressible homogène, remplissant le domaine plan Ω_t, défini par $-h < y < \eta(x,t)$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que la surface libre du fluide Σ_t soit décrite par l'équation $y = \eta(x,t)$ (voir fig.1.1). On note ρ_0 la constante représentant la masse volumique du fluide. On suppose que la pression de surface est donnée par $P = p - \dfrac{T}{R}$, où p est la pression extérieure appliquée sur la surface, T est appelée tension de surface et R est le rayon de courbure de cette surface.

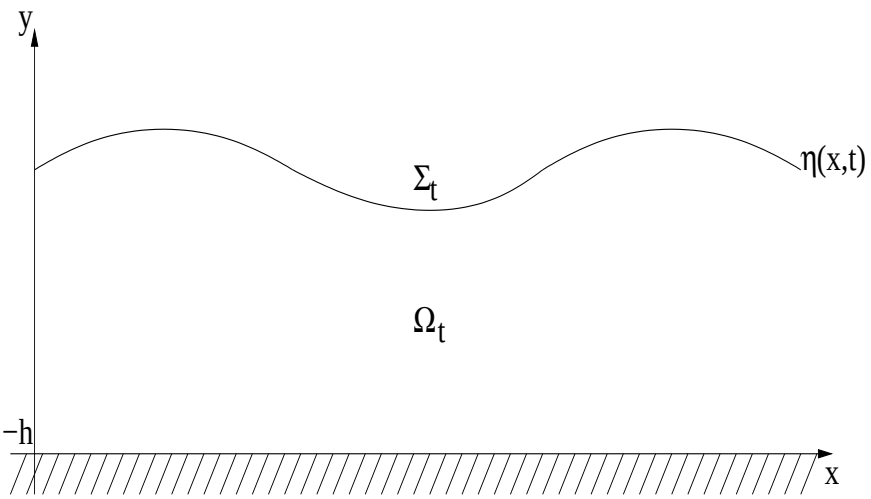


Fig. 1.1 – Surface du fluide au temps t

Il existe une fonction potentiel de vitesse φ telle que $u = \nabla\varphi$ et vérifiant l'équation de Laplace

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0. \tag{1.3}$$

Comme $(\nabla \wedge u) = 0$, l'équation d'Euler sur la surface Σ_t devient

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi) + \nabla\left((\nabla\varphi)^2/2\right) + \nabla\left(\frac{p}{\rho_0}\right) - \nabla\left(\frac{T}{\rho_0 R}\right) + \nabla g\, y = 0.$$

On en déduit une condition dynamique l'équation de Bernoulli

$$\varphi_t + \frac{1}{2}\left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right) + \frac{p}{\rho_0} + gy - \frac{T}{\rho_0 R} = c(t),$$

où $c(t)$ est indépendante des variables d'espace.
A la surface Σ_t, la pression est constante, et comme φ est définie à l'addition d'une fonction temporelle près, on peut remplacer φ par $\varphi + \int_0^t \frac{p}{\rho_0} - c(s)\,ds$, pour obtenir sur Σ_t :

$$\varphi_t + \frac{1}{2}\left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right) + g\eta - \frac{T}{\rho_0}\frac{\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{3/2}} = 0. \tag{1.4}$$

La vitesse normale de la surface, donnée par $-\eta_t$, doit être égale à la vitesse normale du fluide, donnée par $\varphi_x\eta_x - \varphi_y$. Il s'ensuit une condition cinématique

$$\eta_t + \varphi_x\eta_x - \varphi_y = 0. \tag{1.5}$$

Sur la surface intérieure, on impose une condition de non pénétration

$$\varphi_y = 0 \quad \text{si} \quad y = -h. \tag{1.6}$$

Jusqu'à la section 1.2, les résultats seront formels.

1.1.3 Petite amplitude de surface en dimension 1

On suppose que l'équation de la surface Σ_t vérifie $\eta = O(a)$, où a est l'amplitude des ondes. On suppose de plus que l'amplitude des ondes a est négligeable par rapport à la profondeur h et que cette profondeur h est elle même négligeable par rapport à k la longueur d'onde dans la direction x, c'est à dire que l'on s'intéresse aux ondes de faible amplitude et de grande longueur (voir Fig.1.2).

On cherche à adimensionner les équations précédentes. Pour cela, on suppose que, pour $c = \sqrt{gh}$ la vitesse caractéristique des ondes, les fonctions φ et η s'écrivent

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,t) &= \frac{gka}{c}\widetilde{\varphi}(\frac{x}{k}, \frac{y}{h} + 1, \frac{c}{k}t), \\ \eta(x,t) &= a\widetilde{\eta}(\frac{x}{k}, \frac{c}{k}t). \end{aligned}$$

Ce changement de fonctions est important, il nous permet de passer de fonctions qui peuvent être très oscillantes, donc difficiles à manipuler, ici φ et η, à des fonctions avec beaucoup moins d'oscillations, autrement dit de grande longueur d'ondes, ici $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\eta}$. On pose alors

$$\begin{aligned} &\widetilde{x} = \frac{x}{k}, \quad \widetilde{y} = \frac{y}{h} + 1, \quad \widetilde{t} = \frac{c}{k}t, \\ &\alpha = \frac{a}{h}, \quad \beta = \frac{h^2}{k^2}, \qquad T = h^2\rho_0 g\sigma, \end{aligned}$$

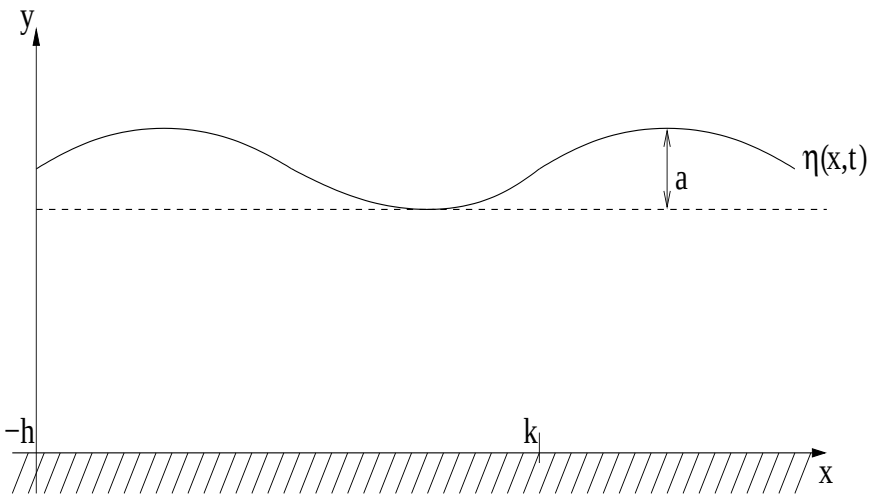


Fig. 1.2 – Petite amplitude de surface

où $\sigma > 0$ est le nombre de Bond. Par abus, on supprimera les tildes dans les équations obtenues par ces changements. L'équation de Σ_t devient $y = 1+\alpha\eta$, et les équations (1.3), (1.4), (1.5) et (1.6)

$$\beta\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad \text{si} \quad 0 < y < 1 + \alpha\eta\,, \tag{1.7}$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2}\alpha\varphi_x^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\varphi_y^2 + \eta - \beta\sigma\frac{\eta_{xx}}{(1+\alpha^2\beta\eta_x^2)^{3/2}} = 0 \quad \text{si} \quad y = 1 + \alpha\eta\,, \tag{1.8}$$

$$\eta_t + \alpha\varphi_x\eta_x - \frac{1}{\beta}\varphi_y = 0 \quad \text{si} \quad y = 1 + \alpha\eta\,, \tag{1.9}$$

$$\varphi_y = 0 \quad \text{si} \quad y = 0. \tag{1.10}$$

Vérifions que l'on retrouve bien les équations précédentes.

(i) L'équation de Σ_t est

$$\begin{aligned} y &= \eta \\ &= a\widetilde{\eta}. \end{aligned}$$

D'où

$$\widetilde{y} = 1 + \frac{y}{h} = 1 + \alpha\widetilde{\eta}.$$

(ii) L'équation de Laplace (1.3) devient

$$\frac{1}{k^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{x}\widetilde{x}} + \frac{1}{h^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{y}\widetilde{y}} = 0.$$

Multiplier par h^2 donne le résultat.

(iii) L'équation (1.4) devient

$$ga\widetilde{\eta} + \frac{gka}{c}\frac{c}{k}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{t}} + \frac{1}{2}\left((\frac{gka}{c})^2\frac{1}{k^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{x}}^2 + (\frac{gka}{c})^2\frac{1}{h^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{y}}^2\right) - h^2 g\sigma\frac{\frac{a}{k^2}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}}{(1+\frac{a^2}{k^2}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}}^2)^{3/2}} = 0.$$

En divisant par ga, on trouve

$$\widetilde{\eta} + \widetilde{\varphi}_{\widetilde{t}} + \frac{1}{2}\left(\frac{ga}{c^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{x}}^2 + \frac{ga}{c^2}\frac{k^2}{h^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{y}}^2\right) - \frac{h^2}{k^2}\sigma\frac{\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}}{(1+\frac{a^2}{h^2}\frac{h^2}{k^2}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}}^2)^{3/2}} = 0,$$

qui est l'équation (1.8).

(iv) L'équation (1.5) devient

$$\begin{aligned}\frac{ac}{k}\widetilde{\eta}_{\widetilde{t}} + \frac{gka}{c}\frac{1}{k}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{x}}\frac{a}{k}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}} - \frac{gka}{c}\frac{1}{h}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{y}} &= 0\\ \frac{ac}{k}\widetilde{\eta}_{\widetilde{t}} + \frac{ga^2}{kc}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{x}}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}} - \frac{gka}{ch}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{y}} &= 0.\end{aligned}$$

En divisant par $\dfrac{ac}{k}$, on trouve

$$\begin{aligned}\widetilde{\eta}_{\widetilde{t}} + \frac{ga}{c^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{x}}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}} - \frac{g}{c^2}\frac{k^2}{h}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{y}} &= 0\\ \widetilde{\eta}_{\widetilde{t}} + \frac{a}{h}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{x}}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}} - \frac{k^2}{h^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{y}} &= 0,\end{aligned}$$

qui est l'équation (1.9).

On veut résoudre l'équation de Laplace (1.7) sous la condition (1.10). Pour cela, on cherche une solution sous forme de série, on suppose

$$\varphi(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x,t)y^n.$$

On obtient

$$\varphi_y(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(x,t)y^{n-1},$$

d'où si $y=0$, on a $f_1(x,t)=0$. L'équation (1.7) s'écrit

$$\begin{aligned}\beta\sum_{n=0}^{\infty} y^n\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)y^{n-2}f_n &= 0\\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\beta\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + (n+1)(n+2)f_{n+2}\right)y^n &= 0.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout entier n,

$$\beta\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + (n+1)(n+2)f_{n+2} = 0.$$

On résout ces équations par récurrence sur n. Comme $f_1 = 0$, on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad f_{2n+1} = 0.$$

Pour les indices pairs, on a

$$\beta\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + 2f_2 = 0 \quad , \quad \beta\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + 12f_4 = 0,$$

ou encore

$$f_2 = -\frac{\beta}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} \quad , \quad f_4 = \frac{\beta^2}{24}\frac{\partial^4 f_0}{\partial x^4}.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad f_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\beta^n\frac{\partial^{2n} f_0}{\partial x^{2n}}.$$

Posons $f(x,t) := f_0(x,t)$, l'expression de φ est alors

$$\varphi(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{y^{2n}}{(2n)!}\,\beta^n\,\frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n}}(x,t).$$

Comme on s'intéresse aux ondes de faible amplitude et de grande longueur, α et β sont petits, on effectue alors un développement limité pour β proche de zéro. On a

$$\varphi = f - \frac{y^2}{2}\,f_{xx}\,\beta + \frac{y^4}{24}\,f_{xxxx}\,\beta^2 + O(\beta^3),$$

et les dérivées en espace donnent

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\beta}\varphi_y &= y\,f_{xx} - \frac{y^3}{6}\,f_{xxxx}\,\beta + O(\beta^2), \\ \varphi_x &= f_x - \frac{y^2}{2}\,f_{xxx}\,\beta + O(\beta^2). \end{aligned}$$

L'équation (1.9) devient pour $y = 1 + \alpha\eta$

$$\begin{aligned} \eta_t + \alpha\left(f_x - \frac{(1+\alpha\eta)^2}{2}\,f_{xxx}\,\beta\right)\eta_x + (1+\alpha\eta)\,f_{xx} - \frac{(1+\alpha\eta)^3}{6}\,f_{xxxx}\,\beta &= O\left(\alpha^2+\beta^2\right), \\ \eta_t + (\alpha\eta_x f_x + (1+\alpha\eta)f_{xx}) - \frac{\beta}{6}\,f_{xxxx} &= O\left(\alpha^2+\beta^2\right). \end{aligned}$$

Or $\alpha\eta_x f_x + (1+\alpha\eta)f_{xx} = ((1+\alpha\eta)f_x)_x$, donc finalement on obtient

$$\eta_t + ((1+\alpha\eta)f_x)_x - \frac{\beta}{6}f_{xxxx} = O\left(\alpha^2+\beta^2\right). \tag{1.11}$$

De plus, $\varphi_t = f_t - \dfrac{y^2}{2}f_{xxt}\beta + O(\beta^2)$, on déduit alors de (1.8)

$$\begin{aligned} \eta + f_t - \frac{\beta}{2}(1+\alpha\eta)^2 f_{xxt} + \frac{\alpha}{2}f_x^2 - \beta\sigma\eta_{xx} &= O\left(\alpha^2+\beta^2\right), \\ \eta + f_t + \frac{\alpha}{2}f_x^2 - \frac{\beta}{2}f_{xxt} - \beta\sigma\eta_{xx} &= O\left(\alpha^2+\beta^2\right). \end{aligned} \tag{1.12}$$

On simplifie (1.11) et (1.12) en posant $w = f_x$ et en dérivant (1.12) par rapport à x

$$\eta_t + ((1+\alpha\eta)w)_x - \frac{\beta}{6} w_{xxx} = O\left(\alpha^2+\beta^2\right) \quad (1.13)$$

$$\eta_x + w_t + \alpha w w_x - \beta\left(\frac{1}{2} w_{xxt} + \sigma\eta_{xxx}\right) = O\left(\alpha^2+\beta^2\right). \quad (1.14)$$

Ces deux dernières équations sont appelées équations de Boussinesq.

A l'ordre le plus bas, les équations (1.13) et (1.14) deviennent

$$\begin{aligned} \eta_t + w_x &= O(\alpha+\beta), \\ \eta_x + w_t &= O(\alpha+\beta), \end{aligned}$$

ce qui implique $\eta_{tt} - \eta_{xx} = O(\alpha+\beta)$. Si on suppose que les ondes se déplacent de la gauche vers la droite, la solution de cette équation est de la forme $\eta(x,t) = \eta(x-t,0) + O(\alpha+\beta)$, ce qui implique $\eta_t + \eta_x = O(\alpha+\beta)$. On a donc

$$\begin{aligned} \eta_t - w_t = \eta_t + \eta_x &= O(\alpha+\beta), \\ \eta_x - w_x = \eta_x + \eta_t &= O(\alpha+\beta), \end{aligned}$$

d'où $\eta = w$ à l'ordre le plus bas. Pour revenir aux équations (1.13) et (1.14), il nous faut corriger cette dernière égalité, on cherche donc w sous la forme

$$w = \eta + \alpha A + \beta B + O\left(\alpha^2+\beta^2\right),$$

et on veut déterminer la valeur de A et B à l'ordre $\alpha+\beta$ près. D'après (1.13), on a

$$\eta_t + w_x = O(\alpha+\beta),$$

et la forme de w implique

$$\eta_t + \eta_x = O(\alpha+\beta).$$

On déduit de (1.13)

$$\begin{aligned} \eta_t + ((1+\alpha\eta)(\eta+\alpha A+\beta B))_x - \frac{\beta}{6}(\eta+\alpha A+\beta B)_{xxx} &= O\left(\alpha^2+\beta^2\right), \\ \eta_t + ((1+\alpha\eta)\eta + \alpha A + \beta B)_x - \frac{\beta}{6}\eta_{xxx} &= O\left(\alpha^2+\beta^2\right), \\ \eta_t + \eta_x + 2\alpha\eta\eta_x + \alpha A_x + \beta B_x - \frac{\beta}{6}\eta_{xxx} &= O\left(\alpha^2+\beta^2\right), \end{aligned}$$

d'où l'équation

$$\eta_t + \eta_x + \alpha(A_x + 2\eta\eta_x) + \beta(B_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx}) = O\left(\alpha^2+\beta^2\right). \quad (1.15)$$

De la même manière, on déduit de (1.14)

$$\begin{aligned} \eta_x + (\eta+\alpha A+\beta B)_t + \alpha(\eta+\alpha A+\beta B)(\eta+\alpha A+\beta B)_x & \\ -\beta(\frac{1}{2}(\eta+\alpha A+\beta B)_{xxt} + \sigma\eta_{xxx}) &= O\left(\alpha^2+\beta^2\right), \\ \eta_x + \eta_t + \alpha A_t + \beta B_t + \alpha\eta\eta_x - \beta(\frac{1}{2}\eta_{xxt} + \sigma\eta_{xxx}) &= O\left(\alpha^2+\beta^2\right), \end{aligned}$$

d'où l'équation

$$\eta_x + \eta_t + \alpha(A_t + \eta\eta_x) + \beta(B_t - \frac{1}{2}\,\eta_{xxt} - \sigma\eta_{xxx}) = O\left(\alpha^2 + \beta^2\right). \tag{1.16}$$

Comme $\eta_t = -\eta_x + O(\alpha+\beta)$, l'équation précédente devient

$$\eta_x + \eta_t + \alpha(A_t + \eta\eta_x) + \beta(B_t + \frac{1}{2}\,\eta_{xxx} - \sigma\eta_{xxx}) = O\left(\alpha^2 + \beta^2\right). \tag{1.17}$$

La compatibilité des équations (1.15) et (1.17) dans le développement limité implique

$$\begin{aligned} A_x + 2\eta\eta_x &= A_t + \eta\eta_x, \\ B_x - \frac{1}{6}\,\eta_{xxx} &= B_t + \frac{1}{2}\,\eta_{xxx} - \sigma\eta_{xxx}, \end{aligned}$$

que l'on peut encore écrire

$$\begin{aligned} A_t - A_x &= \eta\eta_x, \\ B_t - B_x &= -\frac{2}{3}\,\eta_{xxx} + \sigma\eta_{xxx}. \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variables

$$\begin{aligned} r = x - t \quad &, \quad s = x + t, \\ x = \frac{s+r}{2} \quad &, \quad t = \frac{s-r}{2}. \end{aligned}$$

On surligne les fonctions ayant pour variables (r, s). On obtient alors

$$\begin{aligned} \overline{\eta}_s = \eta_x\, x_s + \eta_t\, t_s &= \frac{1}{2}\,\eta_x + \frac{1}{2}\,\eta_t = O(\alpha+\beta), \\ \overline{\eta}_r = \eta_x\, x_r + \eta_t\, t_r &= \frac{1}{2}\,\eta_x - \frac{1}{2}\,\eta_t = \eta_x + O(\alpha+\beta). \end{aligned}$$

Revenons au calcul de A, on a alors

$$\begin{aligned} A_t = \overline{A}_r\, r_t + \overline{A}_s\, s_t &= -\overline{A}_r + \overline{A}_s, \\ A_x = \overline{A}_r\, r_x + \overline{A}_s\, s_x &= \overline{A}_r + \overline{A}_s. \end{aligned}$$

d'où

$$A_t - A_x = -2\overline{A}_r.$$

Comme $A_t - A_x = \eta\eta_x$, on a

$$\begin{aligned} -2A_r = \eta\eta_x &= \overline{\eta}\,\overline{\eta}_r + O(\alpha+\beta) \\ &= \left(\frac{\overline{\eta}^2}{2}\right)_r + O(\alpha+\beta), \end{aligned}$$

donc

$$A = -\frac{\eta^2}{4}.$$

On calcule de la même manière B, et on trouve

$$B_t - B_x = -2\overline{B}_r,$$

et comme $B_t - B_x = (-\frac{2}{3} + \sigma)\,\eta_{xxx}$,

$$-2\overline{B}_r = (-\frac{2}{3} + \sigma)\,\overline{\eta}_{rrr} + O(\alpha + \beta),$$

donc

$$B = (\frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2})\eta_{xx}.$$

Remplacer les valeurs de A et B dans l'équation (1.15) donne

$$\eta_t + \eta_x + \alpha(-\frac{1}{2}\eta\eta_x + 2\eta\eta_x) + \beta\left((\frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2})\eta_{xxx} - \frac{1}{6}\,\eta_{xxx}\right) \;=\; O\left(\alpha^2 + \beta^2\right),$$

d'où

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\,\alpha\,\eta\eta_x + (\frac{1}{6} - \frac{\sigma}{2})\,\beta\,\eta_{xxx} \;=\; O\left(\alpha^2 + \beta^2\right).$$

Comme $\eta_t = -\eta_x + O(\alpha + \beta)$, on déduit de cette équation

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\,\alpha\,\eta\eta_x - (\frac{1}{6} - \frac{\sigma}{2})\,\beta\,\eta_{xxt} \;=\; O\left(\alpha^2 + \beta^2\right).$$

Les équations au premier ordre sont respectivement l'équation de KdV

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\,\alpha\,\eta\eta_x + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \sigma)\,\beta\,\eta_{xxx} = 0,$$

et l'équation de BBM

$$\eta_x + \eta_t + \frac{3}{2}\,\alpha\,\eta\eta_x - \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \sigma)\,\beta\,\eta_{xxt} = 0.$$

Ce problème est mal posé dans $L^2(\mathbb{R})$ si $\sigma > 1/3$, en effet on peut écrire l'équation précédente

$$\left(1 - \frac{\beta}{2}(\frac{1}{3} - \sigma)\,\partial_x^2\right)\eta_t = -\eta_x - \frac{3}{2}\,\alpha\,\eta\eta_x,$$

et l'opérateur $(1 + c\,\partial_x^2)$, pour $c > 0$, n'est pas inversible sur $L^2(\mathbb{R})$ car, pour toute fonction u de $L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\left(1 + c\,\partial_x^2\right)u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left((1 - ck^2)\mathcal{F}u\right)\,(x),$$

et $(1 - ck^2)$ s'annule si $c > 0$.

1.1.4 Dérivation de KP-BBM

Revenons dans un repère (Ox, Oy, Oz) de $\mathbb{R}^3$, avec Oz l'axe vertical dirigé vers le haut. On considère un flux irrotationnel d'un fluide parfait incompressible homogène. Il existe une fonction potentiel de vitesse φ vérifiant

$$\begin{aligned}
\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} &= 0 \quad \text{si} - h < z < \eta(x,y,t)\ , && (1.18)\\
\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) + g\eta & \\
-\frac{T}{\rho_0}\frac{\eta_{xx}(1+\eta_y^2) + \eta_{yy}(1+\eta_x^2) - 2\eta_{xy}\eta_x\eta_y}{(1+\eta_x^2+\eta_y^2)^{3/2}} &= 0 \quad \text{si} \quad z = \eta(x,y,t)\ , && (1.19)\\
\eta_t + \varphi_x\eta_x + \varphi_y\eta_y - \varphi_z &= 0 \quad \text{si} \quad z = \eta(x,y,t)\ , && (1.20)\\
\varphi_z &= 0 \quad \text{si} \quad z = -h. && (1.21)
\end{aligned}$$

De la même manière que pour la section 1.1.3, on suppose que l'équation de la surface Σ_t vérifie $\eta = O(a)$, où a est l'amplitude des ondes. On suppose encore que l'amplitude des ondes a est négligeable par rapport à la profondeur h et que cette profondeur h est elle même négligeable par rapport à k la longueur d'onde dans la direction x, c'est à dire que l'on s'intéresse toujours aux ondes de faible amplitude et de grande longueur. Mais on suppose aussi que k la longueur d'onde dans la direction x est négligeable par rapport à l la longueur d'onde dans la direction y, c'est à dire que la propagation d'ondes se fait principalement dans la direction x.
On cherche de nouveau à adimensionner les équations précédentes. Pour cela, on suppose que, pour $c = \sqrt{gh}$ la vitesse caractéristique des ondes, les fonctions φ et η s'écrivent

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y,z,t) &= \frac{gka}{c}\widetilde{\varphi}(\frac{x}{k}, \frac{y}{l}, \frac{z}{h} + 1, \frac{c}{k}t),\\
\eta(x,y,t) &= a\widetilde{\eta}(\frac{x}{k}, \frac{y}{l}, \frac{c}{k}t).
\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}
&\widetilde{x} = \frac{x}{k}, \quad \widetilde{y} = \frac{y}{l}, \quad \widetilde{z} = \frac{z}{h} + 1, \quad \widetilde{t} = \frac{c}{k}t,\\
&\alpha = \frac{a}{h}, \quad \beta = \frac{h^2}{k^2}, \quad \gamma = \frac{k^2}{l^2}, \qquad T = h^2\rho_0 g\sigma,
\end{aligned}$$

où $\sigma > 0$ désigne toujours le nombre de Bond. Par abus, on supprimera les tildes dans les équations obtenues par ces changements. L'équation de Σ_t devient $z = 1 + \alpha\eta$, et les équations (1.18), (1.19), (1.20) et (1.21)

$$\begin{aligned}
\beta\varphi_{xx} + \beta\gamma\varphi_{yy} + \varphi_{zz} &= 0 \quad \text{si} \quad 0 < z < 1 + \alpha\eta\ , && \\
\varphi_t + \frac{1}{2}\alpha\varphi_x^2 + \frac{1}{2}\alpha\gamma\varphi_y^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\varphi_z^2 + \eta & && (1.22)\\
-\beta\sigma\frac{\eta_{xx}(1+\alpha^2\beta\gamma\eta_y^2) + \gamma\eta_{yy}(1+\alpha^2\beta\eta_x^2) - 2\alpha^2\beta\gamma\eta_{xy}\eta_x\eta_y}{(1+\alpha^2\beta\eta_x^2+\alpha^2\beta\gamma\eta_y^2)^{3/2}} &= 0 \quad \text{si} \quad z = 1 + \alpha\eta\ , && (1.23)\\
\eta_t + \alpha\varphi_x\eta_x + \alpha\gamma\varphi_y\eta_y - \frac{1}{\beta}\varphi_z &= 0 \quad \text{si} \quad z = 1 + \alpha\eta\ , && (1.24)\\
\varphi_z &= 0 \quad \text{si} \quad z = 0. && (1.25)
\end{aligned}$$

Vérifions que l'on retrouve bien les équations précédentes.

(i) L'équation de Laplace (1.18) donne

$$\frac{1}{k^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}+\frac{1}{l^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{y}\widetilde{y}}+\frac{1}{h^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{z}\widetilde{z}}=0.$$

Multiplier par h^2 donne (1.22).

(ii) L'équation (1.19) donne

$$\begin{aligned} ga\widetilde{\eta}+\frac{gka}{c}\frac{c}{k}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{t}}+\frac{1}{2}\left((\frac{gka}{c})^2\frac{1}{k^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{x}}^2+(\frac{gka}{c})^2\frac{1}{l^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{y}}^2+(\frac{gka}{c})^2\frac{1}{h^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{z}}^2\right)&\\ -gh^2\sigma\frac{\frac{a}{k^2}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}(1+\frac{a^2}{l^2}\widetilde{\eta}_{\widetilde{y}}^2)+\frac{a}{l^2}\widetilde{\eta}_{\widetilde{y}\widetilde{y}}(1+\frac{a^2}{k^2}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}}^2)-2\frac{a^3}{k^2l^2}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}\widetilde{y}}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}}\widetilde{\eta}_{\widetilde{y}}}{(1+\frac{a^2}{k^2}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}}^2+\frac{a^2}{l^2}\widetilde{\eta}_{\widetilde{y}}^2)^{3/2}} &= 0. \end{aligned}$$

En divisant par ga, on trouve

$$\begin{aligned} \widetilde{\eta}+\widetilde{\varphi}_{\widetilde{t}}+\frac{1}{2}\left(\frac{ga}{c^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{x}}^2+\frac{ga}{c^2}\frac{k^2}{l^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{y}}^2+\frac{ga}{c^2}\frac{k^2}{h^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{z}}^2\right)&\\ -\frac{h^2}{k^2}\sigma\frac{\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}(1+\frac{a^2}{h^2}\frac{h^2}{k^2}\frac{k^2}{l^2}\widetilde{\eta}_{\widetilde{y}}^2)+\frac{k^2}{l^2}\widetilde{\eta}_{\widetilde{y}\widetilde{y}}(1+\frac{a^2}{h^2}\frac{h^2}{k^2}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}}^2)-2\frac{a^2}{h^2}\frac{h^2}{k^2}\frac{k^2}{l^2}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}\widetilde{y}}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}}\widetilde{\eta}_{\widetilde{y}}}{(1+\frac{a^2}{h^2}\frac{h^2}{k^2}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}}^2+\frac{a^2}{h^2}\frac{h^2}{k^2}\frac{k^2}{l^2}\widetilde{\eta}_{\widetilde{y}}^2)^{3/2}} &= 0. \end{aligned}$$

qui est l'équation (1.23).

(iii) L'équation (1.20) donne

$$\begin{aligned} \frac{ac}{k}\widetilde{\eta}_{\widetilde{t}}+\frac{gka}{c}\frac{1}{k}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{x}}\frac{a}{k}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}}+\frac{gka}{c}\frac{1}{l}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{y}}\frac{a}{l}\widetilde{\eta}_{\widetilde{y}}-\frac{gka}{c}\frac{1}{h}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{z}} &= 0\\ \frac{ac}{k}\widetilde{\eta}_{\widetilde{t}}+\frac{ga^2}{kc}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{x}}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}}+\frac{ga^2}{c}\frac{k}{l^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{y}}\widetilde{\eta}_{\widetilde{y}}-\frac{gka}{ch}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{z}} &= 0. \end{aligned}$$

En divisant par $\dfrac{ac}{k}$, on trouve

$$\begin{aligned} \widetilde{\eta}_{\widetilde{t}}+\frac{ga}{c^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{x}}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}}+\frac{ga}{c^2}\frac{k^2}{l^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{y}}\widetilde{\eta}_{\widetilde{y}}-\frac{g}{c^2}\frac{k^2}{h}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{z}} &= 0\\ \widetilde{\eta}_{\widetilde{t}}+\frac{a}{h}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{x}}\widetilde{\eta}_{\widetilde{x}}+\frac{a}{h}\frac{k^2}{l^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{y}}\widetilde{\eta}_{\widetilde{y}}-\frac{k^2}{h^2}\widetilde{\varphi}_{\widetilde{z}} &= 0, \end{aligned}$$

qui est l'équation (1.24).

On veut à nouveau résoudre l'équation de Laplace (1.22) sous la condition (1.25). Pour cela, on cherche une solution sous forme de série, on suppose

$$\varphi(x,y,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x,y,t)z^n.$$

On obtient

$$\varphi_z(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}nf_n(x,y,t)z^{n-1},$$

d'où si $z=0$, on a $f_1(x,y,t)=0$. L'équation (1.22) s'écrit

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} z^n(\beta\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}+\beta\gamma\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2})+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}f_n &= 0\\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\beta\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}+\beta\gamma\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}+(n+1)(n+2)f_{n+2}\right)z^n &= 0.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout entier n,

$$\beta\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}+\beta\gamma\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}+(n+1)(n+2)f_{n+2}=0.$$

On résout ces équations par récurrence sur n. Comme $f_1=0$, on en déduit

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad , \quad f_{2n+1}=0.$$

Pour les indices pairs, on a

$$\beta\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}+\beta\gamma\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}+2f_2=0 \quad , \quad \beta\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}+\beta\gamma\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}+12f_4,$$

ou encore

$$f_2=-\left(\frac{\beta}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}+\frac{\beta\gamma}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}\right) \quad , \quad f_4=\left(\frac{\beta^2}{24}\frac{\partial^4 f_0}{\partial x^4}+\frac{\beta^2\gamma+\beta\gamma^2}{24}\frac{\partial^4 f_0}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\beta^2\gamma^2}{24}\frac{\partial^4 f_0}{\partial y^4}\right).$$

On note $f:=f_0$. On effectue alors un développement limité de φ pour β proche de zéro. On trouve

$$\varphi(x,y,z,t)=f-\left(\frac{\beta}{2}f_{xx}+\frac{\beta\gamma}{2}f_{yy}\right)z^2+\left(\frac{\beta^2}{24}f_{xxxx}+\frac{\beta^2\gamma+\beta\gamma^2}{24}f_{xxyy}+\frac{\beta^2\gamma^2}{24}f_{yyyy}\right)z^4+O(\beta^3).$$

L'équation (1.24) devient pour $z=1+\alpha\eta$

$$\begin{aligned}\eta_t+\alpha\left[f_x-\left(\frac{\beta}{2}f_{xxx}+\frac{\beta\gamma}{2}f_{xyy}\right)(1+\alpha\eta)^2\right]\eta_x+\alpha\gamma\left[f_y-\left(\frac{\beta}{2}f_{xxy}+\frac{\beta\gamma}{2}f_{yyy}\right)(1+\alpha\eta)^2\right]\eta_y\\ +(f_{xx}+\gamma f_{yy})(1+\alpha\eta)-\frac{\beta}{6}f_{xxxx}(1+\alpha\eta)^3=O\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right).\end{aligned}$$

A l'ordre le plus bas, on obtient l'équation linéaire

$$\eta_t+f_{xx}=O(\alpha+\beta+\gamma). \tag{1.26}$$

A l'ordre suivant, on obtient

$$\eta_t+\alpha f_x\eta_x+(1+\alpha\eta)f_{xx}-\frac{\beta}{6}f_{xxxx}+\gamma f_{yy}=O\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right),$$

ou encore

$$\eta_t+((1+\alpha\eta)f_x)_x-\frac{\beta}{6}f_{xxxx}+\gamma f_{yy}=O\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right).$$

De la même manière, l'équation (1.23) devient pour

$$\eta + \left[f_t - \left(\frac{\beta}{2} f_{xxt} + \frac{\beta\gamma}{2} f_{yyt} \right) (1+\alpha\eta)^2 \right]$$

$$+\frac{\alpha}{2} \left[f_x - \left(\frac{\beta}{2} f_{xxx} + \frac{\beta\gamma}{2} f_{xyy} \right) (1+\alpha\eta)^2 \right]^2 + \frac{\alpha\gamma}{2} \left[f_y - \left(\frac{\beta}{2} f_{xxy} + \frac{\beta\gamma}{2} f_{yyy} \right) (1+\alpha\eta)^2 \right]^2$$

$$+\frac{\alpha}{\beta} \left[(\beta f_{xx} + \beta\gamma f_{yy})(1+\alpha\eta) - \frac{\beta}{6} f_{xxxx} (1+\alpha\eta)^3 \right]^2 - \sigma\beta\eta_{xx} = O\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right).$$

A l'ordre le plus bas, on obtient une autre équation linéaire

$$\eta + f_t = O(\alpha + \beta + \gamma). \tag{1.27}$$

A l'ordre suivant, on obtient

$$\eta + f_t + \frac{\alpha}{2} f_x^2 - \beta \left(\frac{1}{2} f_{xxt} + \sigma\eta_{xx} \right) = O\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right).$$

On pose $w := f_x$ et on dérive par rapport à x pour avoir finalement deux équations de type Boussinesq

$$\eta_t + ((1+\alpha\eta)w)_x - \frac{\beta}{6} w_{xxx} + \gamma f_{yy} = O\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right), \tag{1.28}$$

$$\eta_x + w_t + \alpha w w_x - \beta \left(\frac{1}{2} w_{xxt} + \sigma\eta_{xxx} \right) = O\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right). \tag{1.29}$$

Pour la même raison qu'en dimension 1, on corrige l'égalité au premier ordre $w = \eta$ en cherchant w sous la forme

$$w = \eta + \alpha A + \beta B + \gamma C + O\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right),$$

et on veut déterminer les valeurs de A, B, et C au premier ordre. L'équation (1.28) devient

$$\eta_t + \eta_x + \alpha(A_x + 2\eta\eta_x) + \beta(B_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx}) + \gamma(C_x + f_{yy}) = O\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right), \tag{1.30}$$

et l'équation (1.29)

$$\eta_t + \eta_x + \alpha(A_t + \eta\eta_x) + \beta(B_t - \frac{1}{2}\eta_{xxt} - \sigma\eta_{xxx}) + \gamma C_t = O\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right), \tag{1.31}$$

et comme $\eta_t = -\eta_x + O(\alpha + \beta + \gamma)$

$$\eta_t + \eta_x + \alpha(A_t + \eta\eta_x) + \beta(B_t + \frac{1}{2}\eta_{xxx} - \sigma\eta_{xxx}) + \gamma C_t = O\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right). \tag{1.32}$$

La compatibilité des développements limités des équations (1.30) et (1.32) implique

$$\begin{aligned} A_x + 2\eta\eta_x &= A_t + \eta\eta_x, \\ B_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx} &= B_t + (\frac{1}{2} - \sigma)\eta_{xxx}, \\ C_x + f_{yy} &= C_t. \end{aligned}$$

On effectue le changement de variables

$$r = x - t \quad \text{et} \quad s = x + t,$$

pour obtenir

$$A = \frac{-\eta^2}{4} \quad , \quad B = \left(\frac{1}{3} - \frac{\sigma}{2}\right)\eta_{xx} \quad \text{et} \quad C_r = \frac{-1}{2} f_{yy}.$$

Remplacer ces valeurs dans (1.30) donne

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + (\frac{1}{6} - \frac{\sigma}{2})\beta\eta_{xxx} + \frac{\gamma}{2} f_{yy} = O\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right),$$

et comme $\eta_t = -\eta_x + O(\alpha + \beta + \gamma)$, on déduit de l'équation précédente

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - (\frac{1}{6} - \frac{\sigma}{2})\beta\eta_{xxt} + \frac{\gamma}{2} f_{yy} = O\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right).$$

Finalement on dérive par rapport à x ces deux dernières équations pour trouver

$$\begin{aligned}
\left(\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + (\frac{1}{6} - \frac{\sigma}{2})\beta\eta_{xxx}\right)_x + \frac{\gamma}{2}\eta_{yy} &= O\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right), \\
\left(\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - (\frac{1}{6} - \frac{\sigma}{2})\beta\eta_{xxt}\right)_x + \frac{\gamma}{2}\eta_{yy} &= O\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right).
\end{aligned}$$

Les équations au premier ordre sont les équations de KP

$$\left(\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \sigma)\beta\eta_{xxx}\right)_x + \frac{\gamma}{2}\eta_{yy} = 0, \tag{1.33}$$

appelées KP-I si $\sigma > 1/3$, KP-II si $\sigma < 1/3$, et

$$\left(\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \sigma)\beta\eta_{xxt}\right)_x + \frac{\gamma}{2}\eta_{yy} = 0, \tag{1.34}$$

appelées KP-BBM-I si $\sigma > 1/3$ et KP-BBM-II si $\sigma < 1/3$. De la même manière qu'en dimension 1, l'équation KP-BBM-I n'est pas un problème bien posé dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, le seul modèle raisonnable est celui décrit par KP-BBM-II.
On peut refaire la même démarche en supposant que la tension de surface T est nulle, on retrouve alors les équations de KP-II et KP-BBM-II.

Maintenant qu'il est clair que les équations de KP-II et KP-BBM-II modélisent le même phénomène physique, il est naturel de vouloir les comparer.

1.2 Comparaison des solutions de KP-II et KP-BBM-II

On considère les problèmes de Cauchy suivants

$$\begin{aligned}
\eta_t + \eta_x + \alpha\eta\eta_x + \alpha\eta_{xxx} + \alpha\partial_x^{-1}\eta_{yy} &= 0 && (1.35)\\
\zeta_t + \zeta_x + \alpha\zeta\zeta_x - \alpha\zeta_{xxt} + \alpha\partial_x^{-1}\zeta_{yy} &= 0 && (1.36)\\
\eta(x, y, 0) = \zeta(x, y, 0) &= f(x, y), && (1.37)
\end{aligned}$$

où $\alpha = \beta = \gamma$ dans la modélisation précédente. L'équation (1.35) est l'équation de KP-II et l'équation (1.36) est l'équation de KP-BBM-II.

1.2.1 Discussion linéaire

On linéarise le système précédent autour de zéro

$$\begin{aligned} \eta_t + \eta_x + \alpha\eta_{xxx} + \alpha\partial_x^{-1}\eta_{yy} &= 0 \\ \zeta_t + \zeta_x - \alpha\zeta_{xxt} + \alpha\partial_x^{-1}\zeta_{yy} &= 0 \\ \eta(x,y,0) = \zeta(x,y,0) &= f(x,y). \end{aligned}$$

Supposons que la donnée initiale f appartienne à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Pour alléger les écritures, on notera par $\wedge$ la transformée de Fourier en espace et $\vee$ la transformée de Fourier inverse. Formellement, la transformée de Fourier en espace donne pour l'équation KP-II

$$\hat{\eta}_t + ik(1 - \alpha k^2 + \alpha\frac{l^2}{k^2})\hat{\eta} = 0,$$

sous la condition initiale $\hat{\eta}(k,l,0) = \hat{f}(k,l)$, pour tout $(k,l) \in \mathbb{R}^2$. La solution de cette équation différentielle ordinaire est alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $(k,l) \in \mathbb{R}^2$

$$\hat{\eta}(k,l,t) = \exp\left(-ik(1 - \alpha k^2 + \alpha\frac{l^2}{k^2})t\right)\hat{f}(k,l).$$

De la même manière, la transformée de Fourier en espace donne pour l'équation KP-BBM-II

$$(1 + \alpha k^2)\hat{\zeta}_t + ik(1 + \alpha\frac{l^2}{k^2})\hat{\zeta} = 0,$$

sous la condition initiale $\hat{\zeta}(k,l,0) = \hat{f}(k,l)$, pour tout $(k,l) \in \mathbb{R}^2$. La solution est alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $(k,l) \in \mathbb{R}^2$

$$\hat{\zeta}(k,l,t) = \exp\left(-ik(\frac{1 + \alpha\frac{l^2}{k^2}}{1 + \alpha k^2})t\right)\hat{f}(k,l).$$

On a, pour tous réels k, l et t,

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(k,l,t) - \hat{\zeta}(k,l,t) &= \left(\exp\left(-ik(1 - \alpha k^2 + \alpha\frac{l^2}{k^2})t\right)\exp\left(ik(\frac{1 + \alpha\frac{l^2}{k^2}}{1 + \alpha k^2})t\right) - 1\right) \\ &\times \exp\left(-ik(\frac{1 + \alpha\frac{l^2}{k^2}}{1 + \alpha k^2})t\right)\hat{f}(k,l). \end{aligned}$$

On déduit du fait que pour $x \in \mathbb{R}$, $|\exp(ix) - 1| \leq 2|x|$, que

$$\begin{aligned} |\hat{\eta}(k,l,t) - \hat{\zeta}(k,l,t)| &= \left|\exp\left(-ik(1 - \alpha k^2 + \alpha\frac{l^2}{k^2})t\right)\exp\left(ik(\frac{1 + \alpha\frac{l^2}{k^2}}{1 + \alpha k^2})t\right) - 1\right| |\hat{f}(k,l)| \\ &\leq 2\left|-k(1 - \alpha k^2 + \alpha\frac{l^2}{k^2})t + k(\frac{1 + \alpha\frac{l^2}{k^2}}{1 + \alpha k^2})t\right| |\hat{f}(k,l)|, \end{aligned}$$

et en mettant au même dénominateur, on trouve

$$|\hat{\eta}(k,l,t) - \hat{\zeta}(k,l,t)| \leq 2\alpha^2|t|\frac{|-k^5+l^2k|}{1+\alpha k^2}|\hat{f}(k,l)|.$$

Comme, pour tout $k \in \mathbb{R}$, $1+\alpha k^2 \geq 1$, on en déduit que

$$|\hat{\eta}(k,l,t) - \hat{\zeta}(k,l,t)| \leq 2\alpha^2|t|\left(|k^5| + |l^2k|\right)|\hat{f}(k,l)|. \tag{1.38}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, le théorème de Plancherel implique que

$$\begin{aligned} ||\eta(.,.,t) - \zeta(.,.,t)||_\infty &= \sup_{x,y\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ikx+ily}(\hat{\eta}(k,l,t) - \hat{\zeta}(k,l,t))\, dk\, dl \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^2}||\hat{\eta}(.,.,t) - \hat{\zeta}(.,.,t)||_{L^1(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

L'inégalité (1.38) donne finalement

$$||\eta(.,.,t) - \zeta(.,.,t)||_\infty \leq \left(\frac{2}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}(|k^5| + |l^2k|)|\hat{f}(k,l)|\, dk\, dl\right)\alpha^2|t|.$$

Cette analyse du problème linéaire nous mène à la conjecture suivante :

Conjecture 1.4
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\widehat{\partial_x^5 f}$ et $\widehat{\partial_x\partial_y^2 f}$ soient intégrables sur $\mathbb{R}^2$. Alors η et ζ les solutions respectives de KP-II et KP-BBM-II vérifient qu'il existe une constante $C > 0$, qui dépend uniquement de f et une constante $0 < \delta < 1$, telle que pour $|t| \leq \alpha^{-1-\delta}$, on ait

$$||\eta(.,.,t) - \zeta(.,.,t)||_\infty \leq C\alpha^2|t|.$$

On verra qu'une comparaison semblable peut être prouvée sur un intervalle de temps $[0, \alpha^{-1}]$ dans la section 1.2.3. Néanmoins, on se demandera si, à l'aide d'une méthode numérique, on peut améliorer ce résultat et ainsi se rapprocher de la conjecture.

1.2.2 Problèmes de Cauchy

On rappelle tout d'abord les principales notations utilisées : On note $L^2(\mathbb{R}^2)$ l'espace des fonctions de carrés intégrables muni de la norme

$$||f||^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|^2\, dx\, dy,$$

et $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ l'espace des fonctions bornées muni de la norme

$$||f||_\infty = \sup \operatorname{ess}(f) := \inf\left\{c\,;\, |f(x,y)| \leq c \text{ presque partout dans } \mathbb{R}^2\right\}.$$

Pour tout réel positif m, $H^m(\mathbb{R}^2)$ est l'espace de Sobolev des fonctions de carré intégrable, dont les m premières dérivées sont aussi de carré intégrable, muni ici de la norme

$$||f||_m^2 = \int_{\mathbb{R}^2}(1+k^2+l^2)^m|\hat{f}(k,l)|^2\, dk\, dl.$$

On note $X^m(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions f de $H^m(\mathbb{R}^2)$ telles que $\partial_x^{-1} f$ soit dans $H^m(\mathbb{R}^2)$, muni de la norme

$$|f|_m = \left(||f||_m^2 + ||\partial_x^{-1} f||_m^2\right)^{1/2}.$$

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ désigne la classe de Schwartz, et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ celui des distributions tempérées. Si X est un espace de Banach quelconque, et $T > 0$, l'espace $\mathcal{C}([-T,T];X)$ est l'ensemble des fonctions continues de $[-T,T]$ dans X, muni de la norme $\sup_{-T\leq t\leq T} ||f||_X$, avec $||.||_X$ une norme sur X. L'espace $\mathcal{C}_w([-T,T];X)$ est l'ensemble des fonctions faiblement continues de $[-T,T]$ dans X.

On rappelle que les problèmes de Cauchy (1.35), (1.36), (1.37) sont globalement bien posé en temps. Pour l'équation de KP-II, Bourgain [Bou93c] montre que pour tout donnée initiale prise dans $H^m(\mathbb{R}^2)$, avec $m \geq 0$, il existe une unique solution de (1.35)-(1.37) globale en temps. Le problème de Cauchy pour l'équation de KP-BBM-II est traité dans les articles de Bona, Liu, Tom [BLT02], ou Saut, Tzvetkov [ST04], ils montrent que pour toute donnée initiale prise dans le sous espace de $L^2(\mathbb{R}^2)$ muni de la norme $(||u||^2 + ||u_x||^2)^{1/2}$, il existe une unique solution de (1.36)-(1.37) globale en temps.

Nous n'aurons besoin dans ce travail que de l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy local. On effectue alors le changement de fonctions

$$u(x,y,t) = \eta(x+\alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t)\ ,\ v(x,y,t) = \zeta(x+\alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t).$$

Le problème de Cauchy (1.35)-(1.36)-(1.37) devient

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + \partial_x^{-1} u_{yy} = 0 \tag{1.39}$$

$$v_t + vv_x + v_{xxx} - \alpha v_{xxt} + \partial_x^{-1} v_{yy} = 0 \tag{1.40}$$

$$u(x,y,0) = v(x,y,0) = f(x,y), \tag{1.41}$$

Pour le problème de Cauchy (1.39)-(1.41), Iório et Nunes [IN98] nous donnent la condition suivante :

Proposition 1.5
Soit $f \in X^m(\mathbb{R}^2)$, $m > 2$. Alors il existe une constante $C_m > 0$, dépendant uniquement de m, telle que pour

$$T_0 := \frac{1}{C_m |f|_m},$$

il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}([-T_0,T_0];X^m(\mathbb{R}^2))$ du problème de Cauchy (1.39)-(1.41). De plus, cette solution vérifie qu'il existe une constante $c_m > 0$ telle que pour $|t| \leq T_0$,

$$|u(t)|_m \leq c_m |f|_m.$$

On utilise la méthode décrite dans l'article de Iório et Nunes [IN98] pour trouver un résultat analogue pour le problème de Cauchy (1.40)-(1.41).

Proposition 1.6
Soit $f \in X^m(\mathbb{R}^2)$, $m > 2$. Alors il existe une constante $C_m > 0$, dépendant uniquement de m, telle que pour

$$T_0 := \frac{1}{C_m |f|_m},$$

il existe une unique solution $v \in \mathcal{C}_w([-T_0,T_0];X^m(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}_w([-T_0,T_0];H^m(\mathbb{R}^2))$ *du problème de Cauchy (1.40)-(1.41). De plus, cette solution vérifie qu'il existe une constante* $c_m > 0$ *telle que pour* $|t| \leq T_0$,

$$|v(t)|_m \leq c_m |f|_m.$$

Lemme 1.7
Soit $m > 2$. *Il existe une constante* $C_m > 0$, *dépendant uniquement de* m, *telle que pour tout* $v \in H^m(\mathbb{R}^2)$

$$|\langle v, vv_x\rangle_m| \leq C_m ||v||_m^3,$$

où le produit scalaire est défini par, pour f *et* g *appartenant à* $H^m(\mathbb{R}^2)$

$$\langle f,g\rangle_m := \int_{\mathbb{R}^2} (1+k^2+l^2)^m \hat{f}(k,l)\,\overline{\hat{g}(k,l)}\,dk\,dl.$$

Démonstration : On définit l'opérateur J^m par, pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$,

$$\widehat{J^m(f)}(k,l) := (1+k^2+l^2)^{m/2}\hat{f}(k,l).$$

En particulier, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on a

$$J^m(f)(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{i(xk+yl)}(1+k^2+l^2)^{m/2}\hat{f}(k,l)\,dk\,dl.$$

Kato et Ponce [KP88] montrent qu'il existe une constante $C_m > 0$ telle que pour f et g appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on ait

$$||\left[J^m,f\right](g)|| \leq C_m\left(||f||_\infty ||J^{m-1}g|| + ||J^m f||\,||g||_\infty\right), \tag{1.42}$$

où le crochet est défini par $\left[J^m,f\right](g) = J^m(fg) - fJ^m(g)$.
On remarque tout d'abord que pour f fonction réelle, $J^m(f)$ est aussi réel, en effet, on a

$$\begin{aligned}\overline{J^m(f)(x,y)} &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-i(xk+yl)}(1+k^2+l^2)^{m/2}\overline{\hat{f}(k,l)}\,dk\,dl \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-i(xk+yl)}(1+k^2+l^2)^{m/2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{i(\widetilde{x}k+\widetilde{y}l)}f(\widetilde{x},\widetilde{y})\,d\widetilde{x}\,d\widetilde{y}\right)dk\,dl,\end{aligned}$$

le changement de variable $(k,l) \to (-k,-l)$, implique que $\overline{J^m(f)} = J^m(f)$.
Supposons que v appartienne à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on a alors

$$\begin{aligned}\langle v, vv_x\rangle_m &= \int_{\mathbb{R}^2} J^m(v)\overline{J^m(vv_x)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} J^m(v)J^m(vv_x).\end{aligned}$$

Or, $J^m(vv_x) = vJ^m(v_x) + \left[J^m,v\right](v_x)$, d'où

$$\langle v, vv_x\rangle_m = \int_{\mathbb{R}^2} vJ^m(v_x)J^m(v) + \int_{\mathbb{R}^2}\left[J^m,v\right](v_x)J^m(v).$$

Majorons ces deux intégrales : d'une part

$$\int_{\mathbb{R}^2} v J^m(v_x) J^m(v) \;=\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} v\left(J^m(v)^2\right)_x,$$

une intégration par parties donne

$$\int_{\mathbb{R}^2} v J^m(v_x) J^m(v) \;=\; -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} v_x J^m(v)^2,$$

d'où

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} v J^m(v_x) J^m(v)\right| \;\leq\; \frac{1}{2}||v_x||_\infty ||J^m v||^2,$$

et l'injection de Sobolev implique qu'il existe une constante $C_m > 0$ telle que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} v J^m(v_x) J^m(v)\right| \leq C_m ||v||_m^3.$$

D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} \left[J^m, v\right](v_x) J^m(v)\right| \;\leq\; ||\left[J^m, v\right] v_x||\, ||J^m v||.$$

D'après l'inégalité (1.42) avec $f = v$ et $g = v_x$, on trouve

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} \left[J^m, v\right](v_x) J^m(v)\right| \;\leq\; C_m\left(||v||_\infty ||J^{m-1} v_x|| + ||J^m v||\, ||v_x||_\infty\right) ||J^m v||,$$

et l'injection de Sobolev implique

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} \left[J^m, v\right](v_x) J^m(v)\right| \leq C_m ||v||_m^3.$$

On généralise ce résultat aux fonctions de $H^m(\mathbb{R}^2)$ par densité de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ dans les espaces de Sobolev. □

On considère tout d'abord l'équation linéaire

$$v_t + v_{xxx} - \alpha v_{xxt} + \partial_x^{-1} v_{yy} = 0.$$

On pose alors pour $v \in X^m(\mathbb{R}^2)$

$$A_0\, v := \left(-i\left(\frac{k^3 - l^2/k}{1+\alpha k^2}\right)\hat{v}(k,l)\right)^\vee.$$

On remarque que si v appartient à $X^m(\mathbb{R}^2)$ alors $A_0\, v$ appartient à $H^{m-3}(\mathbb{R}^2)$, en effet on a

$$\begin{aligned} ||A_0\, v||_{m-3}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} (1+k^2+l^2)^{m-3}\left|\frac{k^3 - l^2/k}{1+\alpha k^2}\right|^2 |\hat{v}(k,l)|^2 dk\, dl \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} (1+k^2+l^2)^{m-3} |k^3 - l^2/k|^2 |\hat{v}(k,l)|^2 dk\, dl, \end{aligned}$$

car $1+\alpha\,k^2 \geq 1$,

$$\begin{aligned} ||A_0\,v||^2_{m-3} &\leq 2\int_{\mathbb{R}^2}(1+k^2+l^2)^{m-3}\,|k^3\hat{v}(k,l)|^2+(1+k^2+l^2)^{m-3}\,|l^2/k\,\hat{v}(k,l)|^2 dk\,dl \\ &\leq 2||v||^2_m+2||\partial_x^{-1}v||^2_{m-1} \\ &\leq 2|v|^2_m. \end{aligned}$$

On a pour $v\in X^m(\mathbb{R}^2)$ solution de l'équation linéaire, l'égalité suivante dans $H^{m-3}(\mathbb{R}^2)$

$$v_t+A_0v=0.$$

Revenons à l'équation avec non-linéarité. On effectue maintenant une régularisation parabolique de cette équation, c'est à dire que l'on considère le problème

$$\begin{aligned} v_t+A_\mu v+a(v) &= 0 \qquad (1.43)\\ v(x,y,0) &= f(x,y), \qquad (1.44) \end{aligned}$$

où $A_\mu := -\mu\Delta+A_0$, pour $\mu\geq 0$, $a(v):=\left(\dfrac{ik}{2(1+\alpha k^2)}\widehat{v^2}\right)^\vee$ et $f\in X^m(\mathbb{R}^2)$. On pose $E_\mu(t):=\exp(-tA_\mu)$.

Lemme 1.8
Soient m et n deux réels positifs. Alors il existe une constante $K_n>0$, dépendant uniquement de n telle que pour tout $v\in X^m(\mathbb{R}^2)$ et pour tout temps $t\geq 0$, on ait

$$|E_\mu(t)v|_{m+n}\leq K_n\left(1+\left(\frac{1}{2\mu t}\right)^n\right)^{1/2}|v|_m. \qquad (1.45)$$

Démonstration : Soit n un réel positif et soient $v\in X^m(\mathbb{R}^2)$, et t strictement positif. Le produit scalaire faisant intervenir le conjugué, le terme en A_0 n'intervient pas dans la norme de E_μ, on a alors

$$\begin{aligned} |E_\mu(t)v|^2_{m+n} &= \int_{\mathbb{R}^2}(1+k^2+l^2)^{m+n} \\ &\quad\times\left(\left|\exp(-\mu t(k^2+l^2))\hat{v}(k,l)\right|^2+\left|\frac{1}{k}\exp(-\mu t(k^2+l^2))\hat{v}(k,l)\right|^2\right)dk\,dl \\ &\leq \sup_{(k,l)\in\mathbb{R}^2}\left[(1+k^2+l^2)^n\exp(-2\mu t(k^2+l^2))\right]|v|^2_m \\ &\leq K_n\left(1+\sup_{(k,l)\in\mathbb{R}^2}\left[(k^2+l^2)^n\exp(-2\mu t(k^2+l^2))\right]\right)|v|^2_m. \end{aligned}$$

Or, on a aussi

$$\begin{aligned} \sup_{(k,l)\in\mathbb{R}^2}\left[(k^2+l^2)^n\exp(-2\mu t(k^2+l^2))\right] &= \sup_{(k,l)\in\mathbb{R}^2}\left[\frac{(k^2+l^2)}{\exp(2\mu t(k^2+l^2)/n)}\right]^n \\ &\leq \sup_{(k,l)\in\mathbb{R}^2}\left[\frac{(k^2+l^2)}{\frac{2\mu t}{n}(k^2+l^2)}\right]^n=\frac{n^n}{(2\mu t)^n}, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (1.45). □

Lemme 1.9
Soit $m > 2$. Il existe un temps T, dépendant de μ, tel que sur la boule fermée

$$\overline{B}_m(T) = \{v \in \mathcal{C}\left([0,T]; X^m(\mathbb{R}^2)\right); |E_\mu(t)f - v(t)|_m \leq |f|_m\},$$

l'application

$$\Phi(v)(t) := E_\mu(t)f - \int_0^t E_\mu(t-\tau)a(v)(\tau)d\tau \tag{1.46}$$

soit une contraction.
De plus, il existe une constante $C_m > 0$, indépendant de μ, telle que la solution v de (1.46), définie sur $[0,T]$, se prolonge de manière unique sur $[0,T_0]$, avec $T_0 = \dfrac{1}{C_m|f|_m}$.

Démonstration : Soient $T > 0$, et u, v deux éléments de $\overline{B}_m(T)$, on a pour $t \in [0,T]$, d'après l'inégalité de Minkowski,

$$\begin{aligned} |\Phi(v)(t) - \Phi(u)(t)|_m &= \left| \int_0^t E_\mu(t-\tau)a(u)(\tau) - E_\mu(t-\tau)a(v)(\tau)\, d\tau \right|_m \\ &\leq \int_0^t |E_\mu(t-\tau)a(u)(\tau) - E_\mu(t-\tau)a(v)(\tau)|_m \, d\tau, \end{aligned}$$

que l'on réécrit

$$|\Phi(v)(t) - \Phi(u)(t)|_m \leq \int_0^t |E_\mu(t-\tau)(a(u)(\tau) - a(v)(\tau))|_{m-1+1} \, d\tau.$$

L'inégalité (1.45) donne

$$|\Phi(v)(t) - \Phi(u)(t)|_m \leq K_1 \int_0^t \left(1 + \frac{1}{2\mu(t-\tau)}\right)^{1/2} |a(v)(\tau) - a(u)(\tau)|_{m-1} d\tau.$$

On remarque que

$$\begin{aligned} ||a(v) - a(u)||^2_{m-1} &= \int_{\mathbb{R}^2} (1+k^2+l^2)^{m-1} \left| \frac{ik}{2(1+\alpha k^2)} (\widehat{v^2} - \widehat{u^2}) \right|^2 dk\, dl \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} (1+k^2+l^2)^{m-1} |k|^2 \left| \widehat{v^2} - \widehat{u^2} \right|^2 dk\, dl \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} (1+k^2+l^2)^{m} |\widehat{(v-u)(v+u)}|^2 \, dk\, dl \\ &\leq ||(v+u)(v-u)||^2_m, \end{aligned}$$

et comme $m > 2$, il existe une constante $C_m > 0$ telle que

$$||a(v) - a(u)||^2_{m-1} \leq C_m^2 (||u||_m + ||v||_m)^2 ||v-u||^2_m.$$

Plus généralement, on montre

$$|a(v) - a(u)|_{m-1} \leq C_m (|u|_m + |v|_m)|v-u|_m.$$

Finalement

$$|\Phi(v)(t)-\Phi(u)(t)|_m \leq C_m K_1 \int_0^t \left(1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}\right)^{1/2} (|u|_m+|v|_m)(\tau)|v-u|_m(\tau)d\tau$$

Or, pour v appartenant à la boule $\overline{B}_m(T)$, on a d'après l'inégalité (1.45),

$$\begin{aligned} |v|_m &\leq |E_\mu(t)(f)-v(t)|_m + |E_\mu(t)(f)|_m \\ &\leq \left(1+\sqrt{2}K_0\right)|f|_m, \end{aligned}$$

d'où

$$|\Phi(v)(t)-\Phi(u)(t)|_m \leq 2C_m K_1 \left(1+\sqrt{2}K_0\right)|f|_m \int_0^t \left(1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}\right)^{1/2} d\tau \left(\sup_{\tau\in[0,t]}|v-u|_m(\tau)\right).$$

Comme, pour a et b positifs, $\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$, on a aussi que

$$\int_0^t \left(1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}\right)^{1/2} d\tau \leq \int_0^\infty 1+\left(\frac{1}{2\mu(t-\tau)}\right)^{1/2} d\tau \leq t+\frac{t^{1/2}}{\mu}$$

et comme $t\leq T$, on trouve

$$\int_0^t \left(1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}\right)^{1/2} d\tau \leq T+\frac{T^{1/2}}{2\mu}.$$

Finalement, on a

$$\sup_{t\in[0,T]}|\Phi(v)(t)-\Phi(u)(t)|_m \leq C_m K_1(1+\sqrt{2}K_0)\left(T+\frac{T^{1/2}}{2\mu}\right)|f|_m \sup_{t\in[0,T]}|v-u|_m(t).$$

Pour conclure sur l'existence d'un temps T telle que l'application Φ soit contractante, il suffit d'écrire que l'image de la boule fermée $\overline{B}_m(T)$ par Φ est incluse dans $\overline{B}_m(T)$:

$$\begin{aligned} |E_\mu(f)(t)-\Phi(v)(t)|_m &= |\Phi(0)(t)-\Phi(v)(t)|_m \\ &\leq C_m K_1(1+\sqrt{2}K_0)\left(T+\frac{T^{1/2}}{2\mu}\right)|f|_m^2 \\ &\leq |f|_m, \end{aligned}$$

et il faut choisir $T>0$ de telle sorte que

$$\left(T+\frac{T^{1/2}}{2\mu}\right) < \frac{1}{C_m K_1(1+\sqrt{2}K_0)|f|_m}.$$

Reste à montrer que l'on peut prolonger la solution de (1.46) sur $[0,T_0]$, où ce temps T_0 peut être choisi indépendamment de μ. Soit v^μ une solution de (1.43)-(1.44), on a

$$\begin{aligned} \partial_t||v^\mu||_m^2 &= 2\langle v^\mu, v_t^\mu\rangle_m \\ &= -2\langle v^\mu, A_\mu v^\mu\rangle_m - 2\langle v^\mu, a(v^\mu)\rangle_m \\ &= 2\langle v^\mu, \mu\Delta v^\mu\rangle_m - 2\langle v^\mu, A_0 v^\mu\rangle_m - 2\langle v^\mu, a(v^\mu)\rangle_m. \end{aligned}$$

Le premier produit scalaire est négatif, en effet on a

$$\begin{aligned} 2\langle v^\mu, \mu\Delta v^\mu\rangle_m &= 2\int_{\mathbb{R}^2}(1+k^2+l^2)^m \hat{v}^\mu \overline{\widehat{\mu\Delta v^\mu}}\, dk\, dl \\ &= -2\mu\int_{\mathbb{R}^2}(1+k^2+l^2)^m(k^2+l^2)|\hat{v}^\mu|^2 dk\, dl. \end{aligned}$$

Pour le second produit scalaire, on a

$$\begin{aligned} -2\langle v^\mu, A_0 v^\mu\rangle_m &= 2\int_{\mathbb{R}^2}(1+k^2+l^2)^m \hat{v}^\mu(k,l)\overline{i\left(\frac{k^3-l^2/k}{1+\alpha k^2}\right)\hat{v^\mu}(k,l)}dk\, dl \\ &= -2i\int_{\mathbb{R}^2}(1+k^2+l^2)^m \hat{v}^\mu(k,l)\hat{v}^\mu(-k,-l)\left(\frac{k^3-l^2/k}{1+\alpha k^2}\right)dk\, dl, \end{aligned}$$

car, la fonction v^μ étant réelle, on a $\overline{\hat{v}^\mu(k,l,t)} = \hat{v}^\mu(-k,-l,t)$, et le changement de variables $(k,l) \to (-k,-l)$ implique que l'intégrale est nulle. On en déduit, via le lemme 1.7, que, pour $m > 2$, il existe une constante $C_m > 0$ dépendant uniquement de m telle que

$$\partial_t ||v^\mu||_m^2 \;\le\; 2|\langle v^\mu, v^\mu v_x^\mu\rangle_m| \;\le\; 2C_m||v^\mu||_m^3 \;\le\; 2C_m|v^\mu|_m^3.$$

De la même manière, on trouve

$$\partial_t ||\partial_x^{-1}v^\mu||_m^2 \;\le\; 2|\langle \partial_x^{-1}v^\mu, \partial_x^{-1}(v^\mu v_x^\mu)\rangle_m| \;\le\; 2C_m|v^\mu|_m^3.$$

Finalement, on obtient

$$\partial_t |v^\mu(t)|_m^2 \le 2C_m|v^\mu(t)|_m^3,$$

ou encore

$$|v^\mu(t)|_m^2 \le |f|_m^2 + 2C_m\int_0^t |v^\mu(\tau)|_m^3\, d\tau.$$

Il s'ensuit que $|v^\mu(t)|_m^2 \le \rho(t)$, avec ρ solution de

$$\begin{aligned} \partial_t\rho(t) &= 2C_m\rho^{3/2}(t) \\ \rho(0) &= |f|_m^2. \end{aligned}$$

D'où $\rho(t)^{1/2} = \dfrac{\rho(0)^{1/2}}{1-C_m\rho(0)^{1/2}t}$. On en déduit

$$|v^\mu(t)|_m \;\le\; \frac{|f|_m}{1-C_m|f|_m t},$$

et v^μ peut être prolongée en temps à l'intervalle $0 \le t \le T_0$ avec $T_0 = \dfrac{1}{2C_m|f|_m}$. □

Démonstration de la proposition 1.6 : On remarque tout d'abord que résoudre le problème de Cauchy (1.43)-(1.44) revient à trouver un point fixe de l'application (1.46). En effet, soit v vérifiant (1.43)-(1.44), et posons $w(t) := \mathrm{e}^{tA_\mu}v(t)$, on a

$$\begin{aligned} w_t(t) &= A_\mu \mathrm{e}^{tA_\mu}v(t) + \mathrm{e}^{tA_\mu}v_t(t) \\ &= A_\mu \mathrm{e}^{tA_\mu}v(t) - A_\mu \mathrm{e}^{tA_\mu}v(t) - \mathrm{e}^{tA_\mu}a(v)(t) \\ &= -\mathrm{e}^{tA_\mu}a(v)(t). \end{aligned}$$

Or, $w(t) = w(0) + \displaystyle\int_0^t w_t(\tau)d\tau$, d'où

$$v(t) = \mathrm{e}^{-tA_\mu} f - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)A_\mu} a(v)(\tau)d\tau.$$

Il suffit de voir si la limite lorsque μ tend vers 0 de v^μ existe sur l'intervalle de temps $[0, T_0]$. Soient μ et ν deux réels positifs, v^μ et u^ν les solutions respectives de (1.43)-(1.44). De la même manière que précédemment, on a pour $t \in [0, T_0]$

$$\begin{aligned}\partial_t||v^\mu - u^\nu||^2 &= 2\langle v^\mu - u^\nu, v_t^\mu - u_t^\nu\rangle \\ &= -2\langle v^\mu - u^\nu, A_\mu v^\mu - A_\nu u^\nu\rangle - 2\langle v^\mu - u^\nu, a(v^\mu) - a(u^\nu)\rangle \\ &= 2\langle v^\mu - u^\nu, \mu\Delta v^\mu - \nu\Delta u^\nu\rangle - 2\langle v^\mu - u^\nu, A_0 v^\mu - A_0 u^\nu\rangle - 2\langle v^\mu - u^\nu, a(v^\mu) - a(u^\nu)\rangle.\end{aligned}$$

L'opérateur A_0 étant linéaire, on a vu précédemment que

$$\langle v^\mu - u^\nu, A_0(v^\mu - u^\nu)\rangle = 0.$$

Pour le premier produit scalaire, on a

$$2\langle v^\mu - u^\nu, \mu\Delta v^\mu - \nu\Delta u^\nu\rangle \;=\; 2(\mu-\nu)\langle v^\mu - u^\nu, \Delta v^\mu\rangle + 2\nu\langle v^\mu - u^\nu, \Delta(v^\mu - u^\nu)\rangle.$$

Le fait que, pour $t \in [0, T_0]$, $v^\mu(t)$ et $u^\nu(t)$ appartiennent à $X^m(\mathbb{R}^2)$, implique que ces fonctions et leurs dérivées d'ordre inférieur à m tendent vers 0 à l'infini.
Une intégration par parties implique alors que

$$\langle v^\mu - u^\nu, \Delta(v^\mu - u^\nu)\rangle \le 0.$$

On en déduit que

$$\partial_t||v^\mu - u^\nu||^2 \;\le\; 2|\mu-\nu|\,|\langle v^\mu - u^\nu, \Delta v^\mu\rangle| + 2|\langle v^\mu - u^\nu, a(v^\mu) - a(u^\nu)\rangle|.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$\begin{aligned}|\langle v^\mu - u^\nu, \Delta v^\mu\rangle| &\le ||v^\mu - u^\nu||_1||v^\mu||_1 \\ &\le (|v^\mu|_m + |u^\nu|_m)|v^\mu|_m.\end{aligned}$$

Comme $|v^\mu|_m \le \rho^{1/2}(t)$ et $|u^\nu|_m \le \rho^{1/2}(t)$, on trouve pour le premier produit scalaire, si on pose $M = \sup_{t\in[0,T_0]} \rho(t)$,

$$2|\mu-\nu|\,|\langle v^\mu - u^\nu, \Delta v^\mu\rangle| \;\le\; 4M|\mu-\nu|.$$

Pour le second produit scalaire, on a

$$2|\langle v^\mu - u^\nu, a(v^\mu) - a(u^\nu)\rangle| \;\le\; 2|\langle v^\mu - u^\nu, v^\mu v_x^\mu - u^\nu u_x^\nu\rangle|,$$

et deux intégrations par parties donnent

$$2|\langle v^\mu - u^\nu, a(v^\mu) - a(u^\nu)\rangle| \leq \frac{||v_x^\mu + u_x^\nu||_\infty}{2}||v^\mu - u^\nu||^2.$$

L'injection de Sobolev implique qu'il existe une constante $C_m > 0$ telle que

$$2|\langle v^\mu - u^\nu, a(v^\mu) - a(u^\nu)\rangle| \leq C_m M^{1/2}||v^\mu - u^\nu||^2.$$

On obtient finalement

$$\partial_t||v^\mu - u^\nu||^2 \leq 4M|\mu - \nu| + C_m M^{1/2}||v^\mu - u^\nu||^2.$$

Le lemme de Gronwall implique alors que, pour $t \in [0, T_0]$, la suite $(v_\mu(t))_\mu$ est de Cauchy dans un espace complet, donc elle converge vers $v(t) = \lim_{\mu\to 0} v^\mu(t)$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ et est unique. De plus, d'après le lemme précédent, l'application qui à $t \in [0, T_0]$ associe $v_\mu(t)$ solution de (1.43)-(1.44), est continue et uniformément bornée dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ par $M^{1/2}$. En particulier, la suite $(v_\mu(t))_\mu$ converge faiblement dans $X^m(\mathbb{R}^2)$ vers $v(t)$, pour tout $t \in [0, T_0]$, et l'application qui à $t \in [0, T_0]$ associe $v(t)$ est faiblement continue et uniformément bornée par $M^{1/2}$. En effet, en prenant μ suffisamment petit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|t - s| < \delta$, alors pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\begin{aligned} |\langle v(t) - v(s), \varphi\rangle_m| &\leq |\langle v(t) - v^\mu(t), \varphi\rangle_m| + |\langle v^\mu(t) - v^\mu(s), \varphi\rangle_m| + |\langle v^\mu(s) - v(s), \varphi\rangle_m| \\ &\leq 3\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Pour déduire la continuité forte, et la continuité par rapport à la donnée initiale se montre par l'intermédiare de l'argument de Bona-Smith [BS75]. L'idée est d"approcher la donnée initiale f par des fonctions régulières $f_{\varepsilon,n}$ et obtenir des estimations uniformes par rapport à n pour les solutions correspondantes et leurs dérivées lorsque ε tend vers zéro.

Rappelons en quoi consiste cette méthode. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, telle que $\hat\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, et $\hat\varphi(k, l) = 1$ sur un voisinage de $(0, 0)$. Pour $0 < \varepsilon < 1$, on pose $\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\varphi(x/\varepsilon, y/\varepsilon)$. On note toujours v la solution du problème de Cauchy (1.43)-(1.44) de donnée initiale $f \in X^m(\mathbb{R}^2)$, $m > 2$, et on désigne par v_ε la solution de donnée initiale $f_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * f$.

Lemme 1.10 *[BS75]*
Sous ces hypothèses, on a, pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} ||f_\varepsilon||_{m+n} &\leq O(\varepsilon^{-n})\,||f||_m \\ ||f_\varepsilon||_{m-n} &\leq o(\varepsilon^n)\,||f||_m, \end{aligned}$$

lorsque ε tend vers 0.

Pour $0 < \varepsilon' < \varepsilon < 1$, on pose $w = v_\varepsilon - v_{\varepsilon'}$. Alors w résoud l'équation suivante

$$2w_t + 2w_{xxx} - 2\alpha w_{xxt} + 2\partial_x^{-1} w_{yy} + (\partial_x v_\varepsilon + \partial_x v_{\varepsilon'})w + (v_\varepsilon + v_{\varepsilon'})w_x = 0. \tag{1.47}$$

On applique J^{m-1} à l'équation (1.47), résultat que l'on multiplie par $J^{m-1}w$, pour obtenir, après utilisation de l'inégalité de Kato-Ponce (1.42) et l'injection de Sobolev pour $m > 2$,

$$\frac{d}{dt}||w(t)||_m^2 \leq \frac{d}{dt}\left(||w(t)||_{m-1}^2 + \alpha||w(t)||_m^2\right) \leq C\left(||v_\varepsilon(t)||_m + ||v_{\varepsilon'}(t)||_m\right)||w(t)||_{m-1}^2. \tag{1.48}$$

Comme, pour $t \in [0, T_0]$, $||v(t)||_m \leq C||f||_m$, on en déduit $||v_\varepsilon(t)||_m \leq C||f_\varepsilon||_m$. Le précédent lemme implique que $||v_\varepsilon(t)||_m \leq C$ et $||w(t)||_1 \leq C\varepsilon^m$. Finalement, en interpolant et en utilisant le lemme de Gronwall, on trouve

$$||w(t)||_m = ||v_\varepsilon(t) - v_{\varepsilon'}(t)||_m = o(1),$$

où $o(1) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. En particulier la suite $(v_\varepsilon(t))_\varepsilon$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}([-T_0, T_0]; H^m(\mathbb{R}^2))$.

Pour prouver la continuité par rapport à la donnée initiale, on considère une suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ convergeant vers f dans $X^m(\mathbb{R}^2)$. On veut montrer qu'alors, la solution correspondante $(u_p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $\mathcal{C}([0, T_0]; H^m(\mathbb{R}^2))$. En effet, on a, pour $t \in [0, T_0]$,

$$||u_p(t) - u(t)||_s \leq ||u_p(t) - u_{\varepsilon,p}(t)||_s + ||u_{\varepsilon,p}(t) - u_\varepsilon(t)||_s + ||u_\varepsilon(t) - u(t)||_s.$$

De la même manière que pour la continuité en temps en prenant $\varepsilon' \to 0$, on montre

$$\begin{aligned} ||u_p(t) - u_{\varepsilon,p}(t)||_s &\leq C\left(||f_{\varepsilon,p} - f_\varepsilon||_s + o(1)\right) \\ ||u_\varepsilon(t) - u(t)||_s &\leq C\left(||f_\varepsilon - f||_s + o(1)\right), \end{aligned}$$

où $o(1) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. Finalement, on montre aussi

$$\begin{aligned} ||u_{\varepsilon,p}(t) - u_\varepsilon(t)||_s &\leq C\left(||f_{\varepsilon,p} - f_\varepsilon||_s + o(1)\right) \\ &\leq C\left(||\varphi_\varepsilon * (f_p - f)||_s + o(1)\right) \leq C\left(||f_p - f||_s + o(1)\right). \end{aligned}$$

Pour les temps négatifs, il suffit de considérer dans les preuves précédentes $\mu \leq 0$, ce qui équivaut au cas où le temps est positif, ainsi que μ. □

Remarque 1.11
Pour la continuité de l'anti-dérivée, on pourra s'inspirer de la section 7 de l'article [MST07a].

Le fait que le temps T_0, donné par la proposition précédente, soit une constante indépendante de α est crucial, en effet on verra que le passage de u à η et de v à ζ implique que si le temps T_0 est d'ordre 1 pour les solutions u et v, alors il sera d'ordre α^{-1} pour les solutions η et ζ, à cela s'ajoute le fait que α est petit.

On aura aussi besoin de deux autres inégalités :

Lemme 1.12
Soient $m \geq 2$, et $u \in H^m(\mathbb{R}^2)$. On a

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}^2} |u(x,y)| \leq 2\left(||u||\,||u_x||\,||u_y||\,||u_{xy}||\right)^{1/4}. \tag{1.49}$$

Démonstration : Soit u une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} |u(x,y)|^2 &= \int_{-\infty}^{x} (u^2(\widetilde{x}, y))_x \, d\widetilde{x} \\ &= 2\int_{-\infty}^{x} u(\widetilde{x}, y)\, u_x(\widetilde{x}, y)\, d\widetilde{x}, \end{aligned}$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$|u(x,y)|^2 \leq 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(\widetilde{x},y)\,d\widetilde{x}\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(\widetilde{x},y)\,d\widetilde{x}\right)^{1/2}.$$

Mais on a aussi

$$\begin{aligned}|u(\widetilde{x},y)|^2 &= \int_{-\infty}^{y}(u^2(\widetilde{x},\widetilde{y}))_y\,d\widetilde{y}\\ &= 2\int_{-\infty}^{y} u(\widetilde{x},\widetilde{y})\,u_y(\widetilde{x},\widetilde{y})\,d\widetilde{y},\end{aligned}$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$|u(\widetilde{x},y)|^2 \leq 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(\widetilde{x},\widetilde{y})\,d\widetilde{y}\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_y^2(\widetilde{x},\widetilde{y})\,d\widetilde{y}\right)^{1/2}.$$

De même

$$|u_x(\widetilde{x},y)|^2 \leq 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(\widetilde{x},\widetilde{y})\,d\widetilde{y}\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xy}^2(\widetilde{x},\widetilde{y})\,d\widetilde{y}\right)^{1/2}.$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned}|u(x,y)|^2 \leq\ & 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(\widetilde{x},\widetilde{y})\,d\widetilde{y}\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_y^2(\widetilde{x},\widetilde{y})\,d\widetilde{y}\right)^{1/2} d\widetilde{x}\right)^{1/2}\\ & \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(\widetilde{x},\widetilde{y})\,d\widetilde{y}\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xy}^2(\widetilde{x},\widetilde{y})d\widetilde{y}\right)^{1/2} d\widetilde{x}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Une dernière utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}^2}|u(x,y)| \leq 2\left(||u||\,||u_x||\,||u_y||\,||u_{xy}||\right)^{1/4}.$$

On conclut en utilisant la densité des fonctions $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ dans les espaces de Sobolev. □

De la même manière que pour le lemme de Gronwall, on montre :

Lemme 1.13
Soient f et g deux fonctions continues de $[0,T_0]$ dans $\mathbb{R}$, et c un réel tels que pour tout $t\in[0,T_0]$, on ait

$$f(t) \leq g(t) + c\int_0^t f(\tau)\,d\tau.$$

Alors pour tout $t\in[0,T_0]$, on a

$$f(t) \leq g(t) + c\,e^{ct}\int_0^t g(\tau)\,e^{-c\tau}\,d\tau.$$

On a désormais tous les outils en main pour comparer les solutions de KP-II et KP-BBM-II. On étudiera la différence entre u et v solution du problème de Cauchy (1.39)-(1.40)-(1.41) pour laquelle le temps maximum de comparaison est de l'ordre d'une constante, on en déduira alors des résultats sur η et ζ solution du problème de Cauchy (1.35)-(1.36)-(1.37).

1.2.3 Comparaison des solutions

Théorème 1.14
Soient $m \geq 0$, et $f \in X^{m+5}(\mathbb{R}^2)$. Soit $\alpha > 0$ et soient η et ζ l'unique solution du problème de Cauchy (1.35), (1.36), (1.37) dans $\mathcal{C}([-\alpha^{-1}T_0, \alpha^{-1}T_0]; H^{m+5}(\mathbb{R}^2))$, avec $T_0 := \dfrac{1}{C_{m+5}|f|_{m+5}}$. Alors, il existe $\alpha_0 > 0$, et pour tous entiers naturels $0 \leq i+j \leq m$, une constante $M_{i,j} > 0$, dépendant uniquement de $|f|_{m+5}$, telle que si $0 < \alpha \leq \alpha_0$, et pour $|t| \leq \alpha^{-1}T_0$, on ait

$$||\partial_x^i \partial_y^j \eta(.,.,t) - \partial_x^i \partial_y^j \zeta(.,.,t)|| \leq M_{i,j}\, \alpha^{3/2} |t|^{1/2}.$$

Remarque 1.15 *Notons que l'existence et l'unicité des solutions η et ζ sont assurées par la section précédente.*

Démonstration : On va montrer ce théorème par récurrence sur le nombre total de dérivées, autrement dit sur $i+j$. On suppose que le temps est positif, la preuve s'adaptera de la même manière dans le cas où le temps est négatif.
Effectuons tout d'abord le changement de fonctions

$$u(x,y,t) = \eta(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t)\ ,\ v(x,y,t) = \zeta(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t).$$

Les équations (1.35), (1.36), (1.37) deviennent

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + u_{xxx} + \partial_x^{-1} u_{yy} &= 0 \\ v_t + vv_x + v_{xxx} - \alpha v_{xxt} + \partial_x^{-1} v_{yy} &= 0 \\ u(x,y,0) = v(x,y,0) &= f(x,y). \end{aligned}$$

On retrouve exactement les équations (1.39), (1.40) et (1.41). Posons $w = u - v$, alors w satisfait le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} w_t + ww_x + w_{xxx} - \alpha w_{xxt} + \partial_x^{-1} w_{yy} &= \alpha u_{xxt} - (uw)_x \\ w(x,y,0) &= 0. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Pour $i+j = 0$, c'est à dire pour $i = j = 0$, on multiplie l'équation (1.50) par w et intègre en espace

$$\int_{\mathbb{R}^2} [ww_t + w^2 w_x + ww_{xxx} - \alpha w w_{xxt} + w\partial_x^{-1} w_{yy}]\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} [\alpha w u_{xxt} - w(uw)_x]\, dx\, dy.$$

Simplifions l'intégrale de gauche : comme $w \in H^{m+5}$ et $\partial_x^{-1} w \in H^{m+5}$, en particulier, $\partial_x^i \partial_y^j w(x,y)$ et $\partial_x^{i-1} \partial_y^j w(x,y)$, pour $0 \leq i+j \leq m+5$, tendent vers zéro à l'infini. On a alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} w^2 w_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{w^3}{3}\right]_{-\infty}^{+\infty} dy = 0,$$

et une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}[ww_{xxx}+w\partial_x^{-1}w_{yy}]\,dx\,dy &= -\int_{\mathbb{R}^2}[w_xw_{xx}+w_y\partial_x^{-1}w_y]\,dx\,dy\\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{w_x^2}{2}+\frac{(\partial_x^{-1}w_y)^2}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty}dy\\ &= 0.\end{aligned}$$

Il reste alors, après une dernière intégration par parties, et l'utilisation du théorème de dérivation de Lebesgue,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}[ww_t+w^2w_x+ww_{xxx}-\alpha ww_{xxt}+w\partial_x^{-1}w_{yy}]\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}^2}[ww_t+\alpha w_xw_{xt}]\,dx\,dy\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2}[w^2+\alpha w_x^2]\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Simplifions maintenant l'intégrale de droite : par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}[\alpha wu_{xxt}-w(uw)_x]\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}^2}[\alpha wu_{xxt}+w_xuw]\,dx\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}[\alpha wu_{xxt}+u\left(\frac{w^2}{2}\right)_x]\,dx\,dy,\end{aligned}$$

et une nouvelle intégration par parties donne

$$\int_{\mathbb{R}^2}[\alpha wu_{xxt}-w(uw)_x]\,dx\,dy=\int_{\mathbb{R}^2}[\alpha wu_{xxt}-\frac{w^2}{2}u_x]\,dx\,dy.$$

Finalement, on a

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2}[w^2+\alpha w_x^2]\,dx\,dy=\int_{\mathbb{R}^2}[2\alpha wu_{xxt}-w^2u_x]\,dx\,dy,$$

ou encore, comme $w(x,y,0)=0$,

$$\int_{\mathbb{R}^2}[w^2+\alpha w_x^2]\,dx\,dy=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}[2\alpha wu_{xx\tau}-w^2u_x]\,dx\,dy\,d\tau.$$

On en déduit, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}||w(t)||^2 &\leq 2\alpha\int_0^t||w(\tau)||\,||u_{xx\tau}(\tau)||\,d\tau+\int_0^t||w(\tau)||^2\,||u_x(\tau)||_\infty d\tau\\ &\leq 2\alpha c_2\int_0^t||w(\tau)||\,d\tau+c_1\int_0^t||w(\tau)||^2\,d\tau,\end{aligned}\tag{1.51}$$

pour $t\in[0,T_0]$, où les constantes c_1 et c_2 sont déterminées de telle sorte qu'elles majorent respectivement $||u_x(\tau)||_\infty$ et $||u_{xx\tau}(\tau)||$, pour $\tau\in[0,t]$, indépendamment du temps et de α. En effet d'après la proposition 1.5, on a pour $t\in[0,T_0]$

$$||u(t)||_{m+5}\leq c_{m+5}|f|_{m+5}.$$

D'où, via l'inégalité (1.49),

$$\sup_{\tau\in[0,T_0]}||u_x(\tau)||_\infty \le 2\sup_{\tau\in[0,T_0]}\left(||u_x||\,||u_{xx}||\,||u_{xy}||\,||u_{xxy}||(\tau)\right)^{1/4}\le c_1,$$

et

$$\begin{aligned}\sup_{\tau\in[0,T_0]}||u_{xx\tau}(\tau)|| &= \sup_{\tau\in[0,T_0]}||\partial_x^2(u_{xxx}+uu_x+\partial_x^{-1}u_{yy})(\tau)||\\ &\le \sup_{\tau\in[0,T_0]}\left(||u_{xxxxx}(\tau)||+3||u_x(\tau)||\,||u_{xx}(\tau)||+||u(\tau)||\,||u_{xxx}(\tau)||+||u_{xyy}(\tau)||\right)\\ &\le c_2.\end{aligned}$$

Comme, pour a et b réels, $2ab\le a^2+b^2$, on a

$$||w(t)||^2\le(\alpha c_2)^2t+(1+c_1)\int_0^t||w(\tau)||^2\,d\tau.$$

On utilise le lemme de type Gronwall 1.13 avec $f(t)=||w(t)||^2$, $g(t)=(\alpha c_2)^2t$ et $c=(1+c_1)$, on trouve

$$\begin{aligned}||w(t)||^2 &\le (\alpha c_2)^2t+(1+c_1)\mathrm{e}^{(1+c_1)t}\int_0^t(\alpha c_2)^2\tau\,\mathrm{e}^{-(1+c_1)\tau}\,d\tau\\ &= (\alpha c_2)^2\frac{(\mathrm{e}^{(1+c_1)t}-1)}{1+c_1}.\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{(\mathrm{e}^{(1+c_1)t}-1)}{1+c_1}=\dfrac{1+(1+c_1)t+\sum_{n=2}^{+\infty}(1+c_1)^nt^n-1}{1+c_1}=t\left(1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(1+c_1)^nt^n\right)$, et donc, pour $0\le t\le T_0=\dfrac{1}{C_{m+5}|f|_{m+5}}$, on a $\dfrac{(\mathrm{e}^{(1+c_1)t}-1)}{1+c_1}\le t\,\mathrm{e}^{\frac{(1+c_1)|f|_{m+5}}{C_{m+5}}}$. Finalement, on a pour $0\le t\le T_0$

$$||w(t)||\le c_2e^{\frac{(1+c_1)|f|_{m+5}}{2C_{m+5}}}\alpha\,t^{1/2}=M_0\,\alpha\,t^{1/2},$$

avec M_0 qui ne dépend que de $|f|_{m+5}$.

On suppose que le résultat est vrai jusqu'au rang $m-1$, plus précisément pour $0\le i+j\le m-1$, et $0\le t\le T_0$, il existe une constante $M_{i,j}>0$ telle que

$$||\partial_x^i\partial_y^jw(t)||\le M_{i,j}\,\alpha\,t^{1/2},$$

et montrons qu'il reste vrai au rang m.
Il s'agira d'obtenir une inégalité du type (1.51), la seule différence sera que cette fois ci, le terme cubique en w ne s'élimine pas par intégration. On utilisera le fait que w est bornée en norme $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et l'hypothèse de récurrence.
On note $\partial_x^{2i}\partial_y^{2j}w$ la dérivée d'ordre $2i$ dans la direction x et $2j$ dans la direction y, de telle sorte que $i+j=m$. On multiplie alors l'équation (1.50) par $\partial_x^{2i}\partial_y^{2j}w$ et intègre en espace

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left[w_t+ww_x+w_{xxx}-\alpha w_{xxt}+\partial_x^{-1}w_{yy}\right]\partial_x^{2i}\partial_y^{2j}w\,dx\,dy=\int_{\mathbb{R}^2}\left[\alpha u_{xxt}-(uw)_x\right]\partial_x^{2i}\partial_y^{2j}w\,dx\,dy.$$

Simplifions l'intégrale de gauche : en effectuant i intégrations par parties dans la direction x et j intégrations par parties en y, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\partial_x^{2i}\partial_y^{2j} w\, w_{xxx} + \partial_x^{2i}\partial_y^{2j} w\, \partial_x^{-1} w_{yy}]\, dx\, dy = \\ = (-1)^{i+j} \int_{\mathbb{R}^2} [\partial_x^{i+1}\partial_y^{j} w\, \partial_x^{i+2}\partial_y^{j} w + \partial_x^{i}\partial_y^{j+1} w\, \partial_x^{i-1}\partial_y^{j+1} w]\, dx\, dy \\ = (-1)^{i+j} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{(\partial_x^{i+1}\partial_y^{j} w)^2}{2} + \frac{(\partial_x^{i-1}\partial_y^{j+1} w)^2}{2} \right]_{-\infty}^{+\infty} dy = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\partial_x^{2i}\partial_y^{2j} w\, w w_x]\, dx\, dy = (-1)^{i+j} \int_{\mathbb{R}^2} [\partial_x^{i}\partial_y^{j} w\, \frac{\partial_x^{i+1}\partial_y^{j}(w^2)}{2}]\, dx\, dy,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\partial_x^{2i}\partial_y^{2j} w\, w_t - \alpha \partial_x^{2i}\partial_y^{2j} w\, w_{xxt}]\, dx\, dy = (-1)^{i+j} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\partial_x^{i}\partial_y^{j} w\, \partial_x^{i}\partial_y^{j} w_t + \alpha\, \partial_x^{i+1}\partial_y^{j} w\, \partial_x^{i+1}\partial_y^{j} w_t \right]\, dx\, dy.$$

Le théorème de dérivation de Lebesgue implique

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\partial_x^{2i}\partial_y^{2j} w\, w_t - \alpha\, \partial_x^{2i}\partial_y^{2j} w\, w_{xxt}]\, dx\, dy \;=\; \frac{(-1)^{i+j}}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} [(\partial_x^{i}\partial_y^{j} w)^2 + \alpha\, (\partial_x^{i+1}\partial_y^{j} w)^2]\, dx\, dy.$$

Simplifions désormais l'intégrale de droite : par intégration par parties, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\alpha\, \partial_x^{2i}\partial_y^{2j} w\, u_{xxt} - \partial_x^{2i}\partial_y^{2j} w\, (uw)_x]\, dx\, dy = \\ (-1)^{i+j} \int_{\mathbb{R}^2} [\alpha\, \partial_x^{i}\partial_y^{j} w\, \partial_x^{i+2}\partial_y^{j} u_t - \partial_x^{i}\partial_y^{j} w\, \partial_x^{i+1}\partial_y^{j} (uw)]\, dx\, dy.$$

Finalement, comme $w(x, y, 0) = 0$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^{i}\partial_y^{j} w)^2 + \alpha\, (\partial_x^{i+1}\partial_y^{j} w)^2\, dx\, dy = \\ 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x^{i}\partial_y^{j} w \left(\alpha\, \partial_x^{i+2}\partial_y^{j} u_\tau - \partial_x^{i+1}\partial_y^{j} (uw + \frac{w^2}{2}) \right)\, dx\, dy\, d\tau.$$

On applique la formule de Leibniz pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^{i}\partial_y^{j} w)^2 + \alpha\, (\partial_x^{i+1}\partial_y^{j} w)^2\, dx\, dy = 2\alpha \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x^{i}\partial_y^{j} w\, \partial_x^{i+2}\partial_y^{j} u_\tau\, dx\, dy\, d\tau \\ - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{r=0}^{i+1} \sum_{s=0}^{j} \begin{pmatrix} i+1 \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ s \end{pmatrix} \left(\partial_x^{i+1-r}\partial_y^{j-s} w\, \partial_x^{r}\partial_y^{s} w \right) \partial_x^{i}\partial_y^{j} w\, dx\, dy\, d\tau \\ -2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{r=0}^{i+1} \sum_{s=0}^{j} \begin{pmatrix} i+1 \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ s \end{pmatrix} \left(\partial_x^{i+1-r}\partial_y^{j-s} w\, \partial_x^{r}\partial_y^{s} u \right) \partial_x^{i}\partial_y^{j} w\, dx\, dy\, d\tau,$$

puis on sépare les dérivées d'ordre $m+1$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^i\partial_y^j w)^2 + \alpha\,(\partial_x^{i+1}\partial_y^j w)^2\,dx\,dy = 2\alpha\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2} \partial_x^i\partial_y^j w\,\partial_x^{i+2}\partial_y^j u_\tau\,dx\,dy\,d\tau \tag{1.52}$$

$$-2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2} [w\,\partial_x^{i+1}\partial_y^j w\,\partial_x^i\partial_y^j w + u\,\partial_x^{i+1}\partial_y^j w\,\partial_x^i\partial_y^j w]\,dx\,dy\,d\tau$$

$$-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{r=1}^{i+1}\sum_{s=1}^{j}\binom{i+1}{r}\binom{j}{s}\partial_x^{i+1-r}\partial_y^{j-s} w\,\partial_x^r\partial_y^s w\,\partial_x^i\partial_y^j w\,dx\,dy\,d\tau$$

$$-2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{r=1}^{i+1}\sum_{s=1}^{j}\binom{i+1}{r}\binom{j}{s}\partial_x^{i+1-r}\partial_y^{j-s} w\,\partial_x^r\partial_y^s u\,\partial_x^i\partial_y^j w\,dx\,dy\,d\tau.$$

La première intégrale du membre de droite de (1.52) est majorée, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, sur $[0,T_0]$, par

$$\left|2\alpha\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\partial_x^i\partial_y^j w(\tau)\,\partial_x^{i+2}\partial_y^j u_\tau(\tau)\,dx\,dy\,d\tau\right| \leq 2\alpha\int_0^t ||\partial_x^i\partial_y^j w(\tau)||\,||\partial_x^{i+2}\partial_y^j u_\tau(\tau)||\,d\tau$$
$$\leq \alpha c\int_0^t ||w_{i,j}(\tau)||\,d\tau,$$

car d'après la proposition 1.5

$$\sup_{\tau\in[0,T_0]}||\partial_x^{i+2}\partial_y^j u_\tau(\tau)|| = \sup_{\tau\in[0,T_0]}||\partial_x^{i+2}\partial_y^j(u_{xxx}+uu_x+\partial_x^{-1}u_{yy})(\tau)||$$
$$\leq c.$$

Par abus, on continuera de noter c les différentes constantes intervenant dans les majorations. La seconde intégrale de (1.52) donne, après une intégration par parties dans la direction x,

$$\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}(w_x(\tau)+u_x(\tau))(\partial_x^i\partial_y^j w)^2(\tau)\,dx\,dy\,d\tau\right| \leq \int_0^t(||w_x(\tau)||_\infty + ||u_x(\tau)||_\infty)||\partial_x^i\partial_y^j w(\tau)||^2 d\tau$$
$$\leq \int_0^t(||v_x(\tau)||_\infty + 2||u_x(\tau)||_\infty)||\partial_x^i\partial_y^j w(\tau)||^2 d\tau,$$

et d'après l'inégalité (1.49) et les propositions 1.5 et 1.6, on a pour $t\in[0,T_0]$

$$\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}(w_x(\tau)+u_x(\tau))(\partial_x^i\partial_y^j w)^2\,dx\,dy\,d\tau\right| \leq c\int_0^t||\partial_x^i\partial_y^j w(\tau)||^2 d\tau.$$

La troisième intégrale de (1.52) est majorée d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{r=1}^{i+1}\sum_{s=1}^{j}\binom{i+1}{r}\binom{j}{s}\partial_x^{i+1-r}\partial_y^{j-s} w(\tau)\,\partial_x^r\partial_y^s w(\tau)\,\partial_x^i\partial_y^j w(\tau)\,dx\,dy\,d\tau\right| \leq$$
$$\sum_{r=1}^{i+1}\sum_{s=1}^{j}\binom{i+1}{r}\binom{j}{s}\int_0^t||\partial_x^r\partial_y^s w(\tau)||_\infty\,||\partial_x^i\partial_y^j w(\tau)||\,||\partial_x^{i+1-r}\partial_y^{j-s} w(\tau)||\,d\tau.$$

Or, pour $1 \leq r \leq i+1$ et $1 \leq s \leq j$, on a

$$\begin{array}{rcccl} 2 & \leq & r+s & \leq & m+1 \\ 0 & \leq & (i+1-r)+(j-s) & \leq & m-1. \end{array}$$

D'après les propositions 1.5 et 1.6, pour tout $\tau \in [0, T_0]$, on a en utilisant l'inégalité (1.49) pour $1 \leq r \leq i+1$ et $1 \leq s \leq j$,

$$||\partial_x^r \partial_y^s w(\tau)||_\infty \leq ||\partial_x^r \partial_y^s v(\tau)||_\infty + ||\partial_x^r \partial_y^s u(\tau)||_\infty \leq c,$$

et l'hypothèse de récurrence implique que pour $\tau \in [0, T_0]$

$$\sum_{r=1}^{i+1} \sum_{s=1}^{j} \left(\begin{array}{c} i+1 \\ r \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} j \\ s \end{array} \right) \int_0^t ||\partial_x^r \partial_y^s w(\tau)||_\infty \, ||\partial_x^i \partial_y^j w(\tau)|| \, ||\partial_x^{i+1-r} \partial_y^{j-s} w(\tau)|| \, d\tau \leq$$
$$\alpha c \sum_{r=1}^{i+1} \sum_{s=1}^{j} \left(\begin{array}{c} i+1 \\ r \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} j \\ s \end{array} \right) M_{i+1-r,j-s} \int_0^t \tau^{1/2} \, ||\partial_x^i \partial_y^j w(\tau)|| \, d\tau,$$

et comme $0 \leq \tau \leq T_0$,

$$\sum_{r=1}^{i+1} \sum_{s=1}^{j} \left(\begin{array}{c} i+1 \\ r \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} j \\ s \end{array} \right) \int_0^t ||\partial_x^r \partial_y^s w(\tau)||_\infty \, ||\partial_x^i \partial_y^j w(\tau)|| \, ||\partial_x^{i+1-r} \partial_y^{j-s} w(\tau)|| \, d\tau \leq$$
$$\alpha c \sum_{r=1}^{i+1} \sum_{s=1}^{j} \left(\begin{array}{c} i+1 \\ r \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} j \\ s \end{array} \right) M_{i+1-r,j-s} \int_0^t ||\partial_x^i \partial_y^j w(\tau)|| \, d\tau.$$

Finalement, on a trouvé que la troisième intégrale est majorée par

$$\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{r=1}^{i+1} \sum_{s=1}^{j} \left(\begin{array}{c} i+1 \\ r \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} j \\ s \end{array} \right) \partial_x^{i+1-r} \partial_y^{j-s} w(\tau) \, \partial_x^r \partial_y^s w(\tau) \, \partial_x^i \partial_y^j w(\tau) \, dx \, dy \, d\tau \right| \leq$$
$$\alpha \, c \int_0^t ||\partial_x^i \partial_y^j w(\tau)|| \, d\tau.$$

La dernière intégrale de (1.52) est majorée par

$$\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{r=1}^{i+1} \sum_{s=1}^{j} \left(\begin{array}{c} i+1 \\ r \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} j \\ s \end{array} \right) \partial_x^{i+1-r} \partial_y^{j-s} w(\tau) \, \partial_x^r \partial_y^s u(\tau) \, \partial_x^i \partial_y^j w(\tau) \, dx \, dy \, d\tau \right| \leq$$
$$\sum_{r=1}^{i+1} \sum_{s=1}^{j} \left(\begin{array}{c} i+1 \\ r \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} j \\ s \end{array} \right) \int_0^t ||\partial_x^r \partial_y^s u(\tau)||_\infty \, ||\partial_x^i \partial_y^j w(\tau)|| \, ||\partial_x^{i+1-r} \partial_y^{j-s} w(\tau)|| \, d\tau.$$

D'après l'inégalité (1.49) et la proposition 1.5, pour tout $\tau \in [0, T_0]$, on a

$$||\partial_x^r \partial_y^s u(\tau)||_\infty \leq c,$$

et l'hypothèse de récurrence implique que pour $\tau \in [0, T_0]$

$$\sum_{r=1}^{i+1}\sum_{s=1}^{j}\left(\begin{array}{c} i+1 \\ r \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} j \\ s \end{array}\right)\int_0^t ||\partial_x^r\partial_y^s u(\tau)||_\infty\,||\partial_x^i\partial_y^j w(\tau)||\,||\partial_x^{i+1-r}\partial_y^{j-s}w(\tau)||\,d\tau \leq$$
$$\alpha c\sum_{r=1}^{i+1}\sum_{s=1}^{j}\left(\begin{array}{c} i+1 \\ r \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} j \\ s \end{array}\right)M_{i+1-r,j-s}\int_0^t ||\partial_x^i\partial_y^j w(\tau)||\,d\tau.$$

Finalement, on a trouvé que la dernière intégrale est majorée par

$$\left|2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{r=1}^{i+1}\sum_{s=1}^{j}\left(\begin{array}{c} i+1 \\ r \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} j \\ s \end{array}\right)\partial_x^{i+1-r}\partial_y^{j-s}w(\tau)\,\partial_x^r\partial_y^s u(\tau)\,\partial_x^i\partial_y^j w(\tau)\,dx\,dy\,d\tau\right| \leq$$
$$\alpha\,c\int_0^t ||\partial_x^i\partial_y^j w(\tau)||\,d\tau.$$

En résumé, on a sur l'intervalle de temps $[0,T_0]$,

$$||\partial_x^i\partial_y^j w(t)||^2 \leq \alpha c_1\int_0^t ||\partial_x^i\partial_y^j w(\tau)||\,d\tau + c_2\int_0^t ||\partial_x^i\partial_y^j w(\tau)||^2\,d\tau.$$

On conclut de la même manière qu'au premier rang à l'aide du lemme 1.13. Il suffit alors de remarquer que

$$||\partial_x^i\partial_y^j\eta(.,.,t) - \partial_x^i\partial_y^j\zeta(.,.,t)|| = ||\partial_x^i\partial_y^j w(\alpha\,t)|| \leq M_{i,j}\alpha^{3/2}t^{1/2}.$$

□

Corollaire 1.16
Soient $m \geq 2$, et $f \in X^{m+5}(\mathbb{R}^2)$. Soit $\alpha > 0$ et soient η et ζ l'unique solution du problème de Cauchy (1.35), (1.36), (1.37) dans $\mathcal{C}\left([-\alpha^{-1}T_0,\alpha^{-1}T_0];H^{m+5}(\mathbb{R}^2)\right)$, avec $T_0 := \dfrac{1}{C_{m+5}|f|_{m+5}}$. Alors, il existe $\alpha_0 > 0$, et pour tous entiers naturels $0 \leq i+j \leq m-2$, une constante $N_{i,j} > 0$, dépendant uniquement de $|f|_{m+5}$, telle que si $0 < \alpha \leq \alpha_0$, et pour $|t| \leq \alpha^{-1}T_0$, on ait

$$||\partial_x^i\partial_y^j\eta(.,.,t) - \partial_x^i\partial_y^j\zeta(.,.,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq N_{i,j}\,\alpha^{3/2}\,|t|^{1/2}.$$

Démonstration : L'inégalité (1.49) implique

$$||\partial_x^i\partial_y^j(\eta-\zeta)||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq$$
$$2\left(||\partial_x^i\partial_y^j(\eta-\zeta)||\,||\partial_x^{i+1}\partial_y^j(\eta-\zeta)||\,||\partial_x^i\partial_y^{j+1}(\eta-\zeta)||\,||\partial_x^{i+1}\partial_y^{j+1}(\eta-\zeta)||\right)^{1/4}.$$

Le théorème précédent s'applique et donne, pour $|t| \leq \alpha^{-1}T_0$,

$$||\partial_x^i\partial_y^j(\eta-\zeta)(t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq$$
$$2\left(M_{i,j}\,\alpha^{3/2}\,|t|^{1/2}\,M_{i+1,j}\,\alpha^{3/2}\,|t|^{1/2}\,M_{i,j+1}\alpha^{3/2}\,|t|^{1/2}\,M_{i+1,j+1}\alpha^{3/2}\,|t|^{1/2}\right)^{1/4}.$$

Il suffit de prendre $N_{i,j} = 2\left(M_{i,j}\,M_{i+1,j}\,M_{i,j+1}\,M_{i+1,j+1}\right)^{1/4}$. □

Remarque 1.17
On a remarqué que les équations de KP-II et KP-BBM-II sont des corrections au premier ordre de l'équation

$$\eta_t + \eta_x = O(\alpha).$$

On peut alors obtenir une troisième équation de type KP [Kru75]

$$\xi_t + \xi_x + \alpha\xi\xi_x + \alpha\xi_{xtt} + \alpha\partial_x^{-1}\xi_{yy} = 0. \tag{1.53}$$

Il est tentant de vouloir comparer les solutions de cette dernière équation avec celles de KP-II et KP-BBM-II. Bona et Chen [BC99] montre en dimension 1 un résultat similaire au corollaire 1.16 pour un temps maximum de comparaison d'ordre $\alpha^{-1/2}$. Dans le cas de la dimension 2, la transformée Fourier en espace de l'équation (1.53) donne une équation différentielle ordinaire du second ordre, pour laquelle les solutions de l'équation caractéristique peuvent être doubles, ce qui n'apparaissait pas en dimension 1. Dans le cas de racines simples, on retrouve le résultat de Bona et Chen [BC99], mais en cas de racines doubles, le temps de comparaison devient d'ordre α, ce qui est bien trop court pour comparer les solutions. Il serait intéressant de voir s'il est possible de décrire les modes pour lesquelles les racines doubles apparaissent.

1.2.4 Le cas périodique

Dans l'article de Bona, Pritchard et Scott [BPS83], on considère les équations de KdV et BBM sous la forme

$$\begin{aligned} N_t + N_x + NN_x + N_{xxx} &= 0 \\ M_t + M_x + MM_x - M_{xxt} &= 0 \\ N(x,0) = M(x,0) &= \alpha f(\alpha^{1/2}x). \end{aligned}$$

Le passage de ces équations à celles en u et v suivantes

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + u_{xxx} &= 0 \\ v_t + vv_x + v_{xxx} - \alpha v_{xxt} &= 0 \\ u(x,0) = v(x,0) &= f(x), \end{aligned}$$

s'effectue via le changement de variables

$$u(x,t) = \alpha^{-1}M(\alpha^{-1/2}x + \alpha^{-3/2}t, \alpha^{-3/2}t)\ ,\ v(x,t) = \alpha^{-1}N(\alpha^{-1/2}x + \alpha^{-3/2}t, \alpha^{-3/2}t).$$

De même, on y voit que le passage des équations en M et N aux équations en η et ζ suivantes

$$\begin{aligned} \eta_t + \eta_x + \alpha\eta\eta_x + \alpha\eta_{xxx} &= 0 \\ \zeta_t + \zeta_x + \alpha\zeta\zeta_x - \alpha\zeta_{xxt} &= 0 \\ \eta(x,0) = \zeta(x,0) &= f(x), \end{aligned}$$

se fait par le changement de variables

$$\eta(x,t) = \alpha^{-1}N(\alpha^{1/2}x, \alpha^{1/2}t)\ ,\ \zeta(x,y,t) = \alpha^{-1}M(\alpha^{1/2}x, \alpha^{1/2}t).$$

Par contre, dans notre travail, on a remarqué qu'il suffisait, pour passer des équations de KP-II et KP-BBM-II

$$\begin{aligned} \eta_t + \eta_x + \alpha\eta\eta_x + \alpha\eta_{xxx} + \alpha\partial_x^{-1}\eta_{yy} &= 0 \\ \zeta_t + \zeta_x + \alpha\zeta\zeta_x - \alpha\zeta_{xxt} + \alpha\partial_x^{-1}\zeta_{yy} &= 0, \end{aligned}$$

aux équations

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + u_{xxx} + \partial_x^{-1}u_{yy} &= 0 \\ v_t + vv_x + v_{xxx} - \alpha v_{xxt} + \partial_x^{-1}v_{yy} &= 0, \end{aligned}$$

d'effectuer le changement de fonctions

$$u(x,y,t) = \eta(x+\alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t)\ ,\ v(x,y,t) = \zeta(x+\alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t).$$

De plus, la donnée initiale reste toujours la même. Ce qui est important dans notre cas, c'est que l'on n'effectue aucune homothétie sur les variables d'espace x et y, ce qui implique que nos résultats restent vrais dans le cas périodique. On obtient des résultats similaires aux propositions 1.5 et 1.6 pour le problème de Cauchy local dans le cas périodique [IN98]. Si on note

$$M_\pi(\mathbb{R}^2) := \left\{ g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2), 2\pi - \text{périodique en } x \text{ et en } y; \int_{-\pi}^{\pi} g(x,y)\,dx = 0 \text{ pour } y \in [-\pi,\pi] \right\}$$

et $X_\pi^m(\mathbb{R}^2)$ la fermeture de $M_\pi(\mathbb{R}^2)$ par rapport à la norme $||g||_m^2 = \sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2} (1+k^2+l^2)^m |\hat{g}(k,l)|^2$,

on peut énoncer

Théorème 1.18
Soient $m \geq 0$, et $f \in X_\pi^{m+5}(\mathbb{R}^2)$. Soit $\alpha > 0$ et soient η et ζ l'unique solution du problème de Cauchy (1.35), (1.36), (1.37) dans $\mathcal{C}([-\alpha^{-1}T_0, \alpha^{-1}T_0]; X_\pi^{m+5}(\mathbb{R}^2))$, avec $T_0 := \dfrac{1}{C_{m+5}|f|_{m+5}}$. Alors, il existe $\alpha_0 > 0$, et pour tous entiers naturels $0 \leq i+j \leq m$, une constante $M_{i,j} > 0$, dépendant uniquement de $|f|_{m+5}$, telle que si $0 < \alpha \leq \alpha_0$, et pour $|t| \leq \alpha^{-1}T_0$, on ait

$$||\partial_x^i\partial_y^j\eta(.,.,t) - \partial_x^i\partial_y^j\zeta(.,.,t)|| \leq M_{i,j}\,\alpha^{3/2}|t|^{1/2}.$$

Corollaire 1.19
Soient $m \geq 2$, et $f \in X_\pi^{m+5}(\mathbb{R}^2)$. Soit $\alpha > 0$ et soient η et ζ l'unique solution du problème de Cauchy (1.35), (1.36), (1.37) dans $\mathcal{C}([-\alpha^{-1}T_0, \alpha^{-1}T_0]; X_\pi^{m+5}(\mathbb{R}^2))$, avec $T_0 := \dfrac{1}{C_{m+5}|f|_{m+5}}$. Alors, il existe $\alpha_0 > 0$, et pour tous entiers naturels $0 \leq i+j \leq m-2$, une constante $N_{i,j} > 0$, dépendant uniquement de $|f|_{m+5}$, telle que si $0 < \alpha \leq \alpha_0$, et pour $|t| \leq \alpha^{-1}T_0$, on ait

$$\sup_{(x,y)\in[0,2\pi]^2} |\partial_x^i\partial_y^j\eta(x,y,t) - \partial_x^i\partial_y^j\zeta(x,y,t)| \leq N_{i,j}\,\alpha^{3/2}\,|t|^{1/2}.$$

Remarque 1.20
Les résultats de Bona, Pritchard et Scott [BPS83] se généralisent à des solutions périodiques des équations de KdV et de BBM sur l'intervalle de temps $|t| \leq \alpha^{-1}$.

1.2.5 Comparaison numérique des solutions de KP-II et KP-BBM-II

Le but de cette partie ne sera pas d'analyser de manière approfondie le schéma numérique utilisé mais plutôt de chercher les idées nous permettant d'établir la validité de la conjecture 1.4.
On considère alors le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + u_{xxx} + \partial_x^{-1} u_{yy} &= 0 && (1.54)\\ v_t + vv_x + v_{xxx} - \alpha v_{xxt} + \partial_x^{-1} v_{yy} &= 0 && (1.55)\\ u(x,y,0) = v(x,y,0) &= f(x,y), && (1.56) \end{aligned}$$

avec f une fonction de $X_\pi^{m+5}(\mathbb{R}^2)$, $m \geq 2$. On sait que, d'après les théorème 1.18 et corollaire 1.19, les solutions de ce problème sont telles qu'il existe $\alpha_0 > 0$, une constante C_{m+5} strictement positive et dépendant uniquement de m, telle que si $0 < \alpha \leq \alpha_0$, et pour $0 \leq t \leq \dfrac{1}{C_{m+5}|f|_{m+5}}$, on ait

$$||u(.,.,t) - v(.,.,t)|| \leq M_{0,0}\,\alpha\, t^{1/2} \text{ et } \sup_{(x,y)\in[0,2\pi]^2} |u(x,y,t) - v(x,y,t)| \leq N_{0,0}\,\alpha\, t^{1/2}. \quad (1.57)$$

On voudrait inspecter numériquement la conjecture 1.4, c'est à dire que l'on s'intéresse, d'un point de vue numérique, à l'optimalité du paramètre $0 < \delta < 1$ tel que sur l'intervalle de temps $[0, \alpha^{-\delta}]$, les inégalités (1.57) soient vraies. On reprend la méthode de relaxation associée à un schéma semi-implicite en temps, décrite par Besse [Bes04], que l'on adapte aux équations de KP à l'aide d'une FFT. On fait ce choix car les méthodes de type Cranck-Nicholson ou de splitting ne sont pas judicieuses pour notre étude. En effet, Hamidouche [Ham01] utilise une méthode de Cranck-Nicholson pour approcher les solutions des équations de KP et KP-BBM, mais pour laquelle les itérations de Picard deviennent coûteuses, d'autant plus que nous aurons besoin de faire des comparaisons pour des temps d'ordre α^{-1}. En ce qui concerne la méthode de splitting, la résolution du problème non linéaire revient à celle de l'équation de Burgers, on risque alors de faire apparaître des chocs alors qu'il n'y en avait pas pour les équations de KP. Donc finalement, on utilise la méthode de relaxation restreinte au domaine $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$. On réécrit les équations (1.54)-(1.55)-(1.56) sous la forme

$$\begin{aligned} u_t + \frac{1}{2}\phi_x + u_{xxx} + \partial_x^{-1} u_{yy} &= 0\\ \phi &= u^2\\ v_t + \frac{1}{2}\psi_x + v_{xxx} - \alpha v_{xxt} + \partial_x^{-1} v_{yy} &= 0\\ \psi &= v^2\\ u(k,l,0) = v(k,l,0) &= f(k,l). \end{aligned}$$

Soit T_0 le temps maximum de comparaison des solutions de KP-II et KP-BBM-II, et soit δt le pas de discrétisation en temps. On note $\hat{u}^{n+1}$, respectivement $\hat{v}^{n+1}$, $\hat{\phi}^{n+\frac{1}{2}}$, $\hat{\psi}^{n+\frac{1}{2}}$, l'approximation de $\hat{u}$ au temps $(n+1)\delta t$, respectivement de $\hat{v}$ au temps $(n+1)\delta t$, de $\hat{\phi}$ au

temps $(n+\frac{1}{2})\delta t$, $\hat{\psi}$ au temps $(n+\frac{1}{2})\delta t$, pour n compris entre 0 et $\dfrac{T_0}{\delta t}$. En ce qui concerne les dérivées en espace, on utilise une transformée de Fourier rapide. On obtient finalement le schéma pour l'équation KP-II

$$\begin{cases} \dfrac{\hat{\phi}^{n+\frac{1}{2}}(k,l)+\hat{\phi}^{n-\frac{1}{2}}(k,l)}{2} = \widehat{(u^n)^2}(k,l) \\ \dfrac{\hat{u}^{n+1}(k,l)-\hat{u}^n(k,l)}{\delta t} + \dfrac{ik}{2}\hat{\phi}^{n+\frac{1}{2}}(k,l) - i\left(k^3-\dfrac{l^2}{k}\right)\dfrac{\hat{u}^{n+1}(k,l)+\hat{u}^n(k,l)}{2} = 0 \\ \hat{u}^{n+1}(0,l) = \hat{u}^n(0,l) \\ \dfrac{-N_x}{2} \le k \le \dfrac{N_x}{2}-1 \\ \dfrac{-N_y}{2} \le l \le \dfrac{N_y}{2}-1, \end{cases} \tag{1.58}$$

et pour l'équation KP-BBM-II

$$\begin{cases} \dfrac{\hat{\psi}^{n+\frac{1}{2}}(k,l)+\hat{\psi}^{n-\frac{1}{2}}(k,l)}{2} = \widehat{(v^n)^2}(k,l) \\ (1+\alpha k^2)\dfrac{\hat{v}^{n+1}(k,l)-\hat{v}^n(k,l)}{\delta t} + \dfrac{ik}{2}\hat{\psi}^{n+\frac{1}{2}}(k,l) - i\left(k^3-\dfrac{l^2}{k}\right)\dfrac{\hat{v}^{n+1}(k,l)+\hat{v}^n(k,l)}{2} = 0 \\ \hat{v}^{n+1}(0,l) = \hat{v}^n(0,l) \\ \dfrac{-N_x}{2} \le k \le \dfrac{N_x}{2}-1 \\ \dfrac{-N_y}{2} \le l \le \dfrac{N_y}{2}-1, \end{cases} \tag{1.59}$$

avec pour données initiales $\hat{u}^0 = \hat{v}^0 = \hat{f}$ et $\hat{\phi}^{-\frac{1}{2}} = \hat{\psi}^{-\frac{1}{2}} = \widehat{f^2}$, N_x et N_y sont respectivement le nombre de modes de Fourier dans les directions x et y, et c'est aussi le nombre de points de discrétisation dans ces même directions.
L'appartenance de f à $X_\pi^{m+5}(\mathbb{R}^2)$, en particulier le fait que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\,dx = 0$, permet de pallier la singularité en k. On a vu lors de la modélisation que, dans les variables u et v, les solutions des problèmes asymptotiques ne doivent pas être trop oscillantes, on choisit alors la donnée initiale de cette manière sur $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ et de telle sorte que sa norme $L^2(\mathbb{R}^2)$ soit égale à 1, les pas de discrétisation en espace n'ont alors pas besoin d'être trop élevés. On aura remarqué lors de nos tests que pour des nombres de points de discrétisation en espace N_x et N_y pris égaux ou non, parmi 64 et 128, les résultats sont sensiblement les mêmes. On remarque la même chose pour un pas de discrétisation en temps δt pris aux alentours de 10^{-3} et 0.05. On choisit d'illustrer les résultats pour $N_x = 128$, $N_y = 128$ et $\delta t = 0.05$. Le temps maximum de comparaison théorique est de l'ordre d'une constante, on effectue alors des itérations pour un intervalle de temps d'ordre α^{-1}. Dans un premier temps, on observera la comparaison numérique du problème non linéaire, ainsi que du problème linéaire. On espère alors que le temps de comparaison du problème non linéaire soit meilleur que le temps théorique mais devrait être moins bon que le temps de comparaison du problème linéaire. Dans un second temps, on effectue la comparaison du problème non linéaire pour différents choix de α. Le but sera de voir si le temps de comparaison dépend ou non de α.

On effectue les tests (voir Fig.1.3) pour

$$f(x,y) = \frac{\cos(x+y)}{||\cos(x+y)||} \quad , \quad Nx = 128 \quad , \quad Ny = 128 \quad , \quad \delta t = 0.05 \quad , \quad \alpha = 10^{-3}.$$

On remarque une très forte croissance des normes à peu près à partir du temps $t = 140$, c'est à dire pour $\delta = \frac{\ln 14}{3 \ln 10} + \frac{1}{3} \simeq 0,715$. On effectue un second test (voir Fig.1.3) pour

$$f(x,y) = \frac{\cos x \ \cos y}{||\cos x \ \cos y||} \quad , \quad Nx = 128 \quad , \quad Ny = 128 \quad , \quad \delta t = 0.05 \quad , \quad \alpha = 10^{-3}.$$

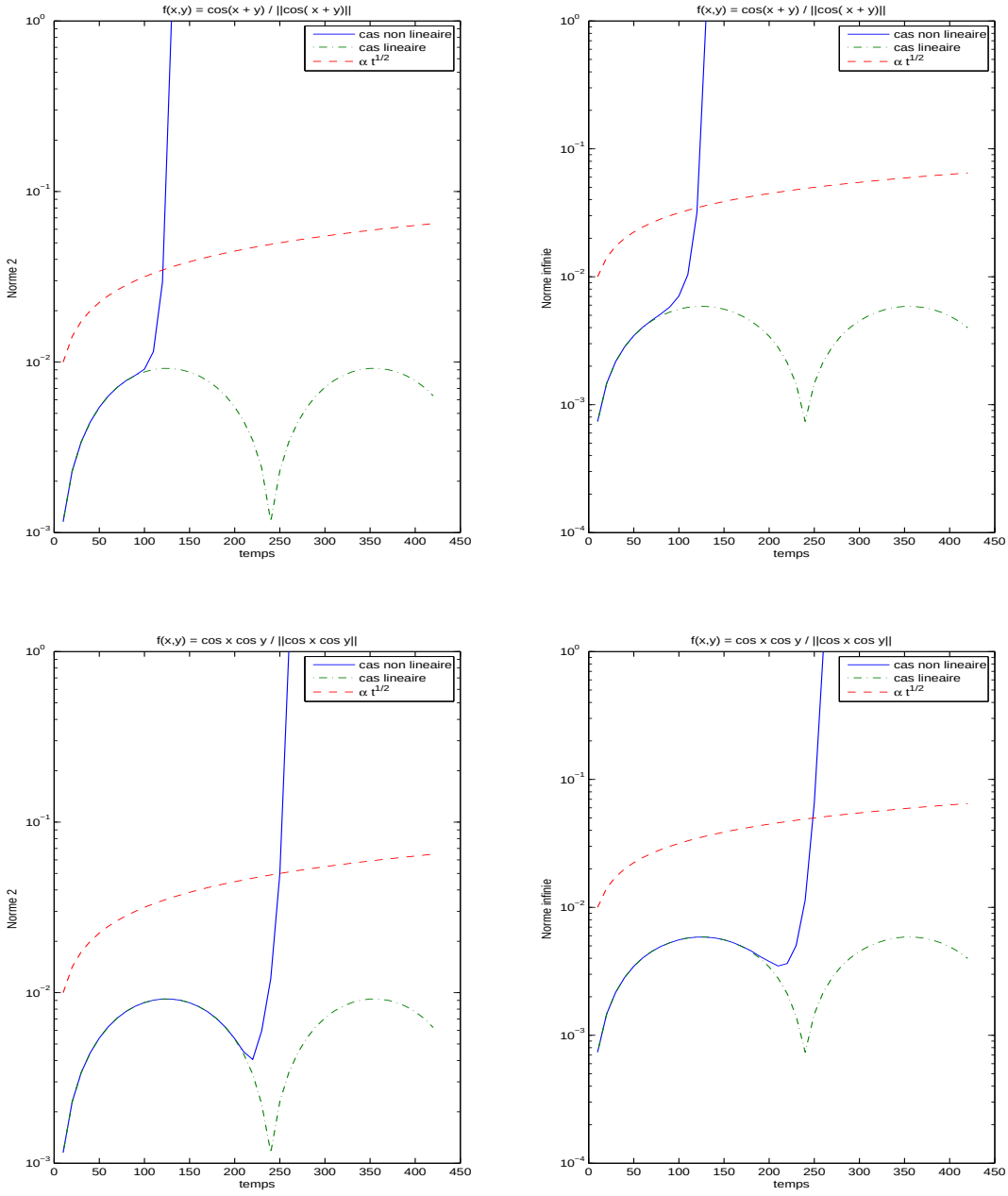


Fig. 1.3 – Comparaison numérique des normes L^2 et L^∞ pour les problèmes linéaire et non linéaire avec $\alpha = 10^{-3}$ sur l'intervalle de temps $[0, \alpha^{-1}]$ et avec les données initiales $f(x,y) = \dfrac{\cos(x+y)}{||\cos(x+y)||}$ et $f(x,y) = \dfrac{\cos x \cos y}{||\cos x \cos y||}$ en utilisant l'échelle logarithmique sur Oy.

On remarque pour ce dernier test une très forte croissance des normes à peu près à partir du temps $t = 260$, soit $\delta = \dfrac{\ln 26}{3 \ln 10} + \dfrac{1}{3} \simeq 0,804$, ce qui reste bien meilleur que le temps théorique. En ce qui concerne la comparaison numérique du problème linéaire, on observe dans tous nos tests que les inégalités (1.57) restent vraies pour toutes les itérations, ceci est dû au caractère périodique des solutions du problème linéaire.

Reprenons les tests précédents en augmentant cette fois-ci le nombre d'oscillations de la donnée initiale, résumons tout cela dans un tableau :

Donnée initiale $f(x,y)$	Temps maximum de comparaison non linéaire	δ	Donnée initiale $f(x,y)$	Temps max	δ
$\dfrac{\cos(x+y)}{\|\|\cos(x+y)\|\|}$	140	$\delta \simeq 0.715$	$\dfrac{\cos x \cos y}{\|\|\cos x \cos y\|\|}$	260	$\delta \simeq 0.804$
$\dfrac{\cos(2x+y)}{\|\|\cos(2x+y)\|\|}$	130	$\delta \simeq 0.704$	$\dfrac{\cos 2x \cos y}{\|\|\cos 2x \cos y\|\|}$	260	$\delta \simeq 0.804$
$\dfrac{\cos(x+2y)}{\|\|\cos(x+2y)\|\|}$	140	$\delta \simeq 0.715$	$\dfrac{\cos x \cos 2y}{\|\|\cos x \cos 2y\|\|}$	260	$\delta \simeq 0.804$
$\dfrac{\cos(2x+2y)}{\|\|\cos(2x+2y)\|\|}$	130	$\delta \simeq 0.704$	$\dfrac{\cos 2x \cos 2y}{\|\|\cos 2x \cos 2y\|\|}$	250	$\delta \simeq 0.799$

Tab. 1.1 – Temps maximum de comparaison en fonction du nombre d'oscillations de la donnée initiale

Effectuons la deuxième série de tests. Il s'agira de voir l'influence du paramètre α et aussi trouver une borne pour la valeur limite α_0. Choisir la valeur $\alpha_\star = 2.5 \times 10^{-4}$, correspond sensiblement à ce qui est observé dans l'océan pacifique, à savoir des ondes de surface d'une amplitude de 1 mètre, de longueur d'onde 213 kilomètres dans la direction x, pour une profondeur de 4000 mètres [Cen03]. On compare ces choix aux valeurs $\alpha = 10^{-2}$, 10^{-3} et 10^{-4} dans nos tests (voir Fig.1.4). On se limite à des valeurs de α prises supérieures à 10^{-4}, car lorsque α est très petit, on perd la notion de petitesse de α au profit d'erreurs de calcul du programme. Il serait intéressant de trouver un schéma numérique mieux adapté aux calculs pour α très petit.

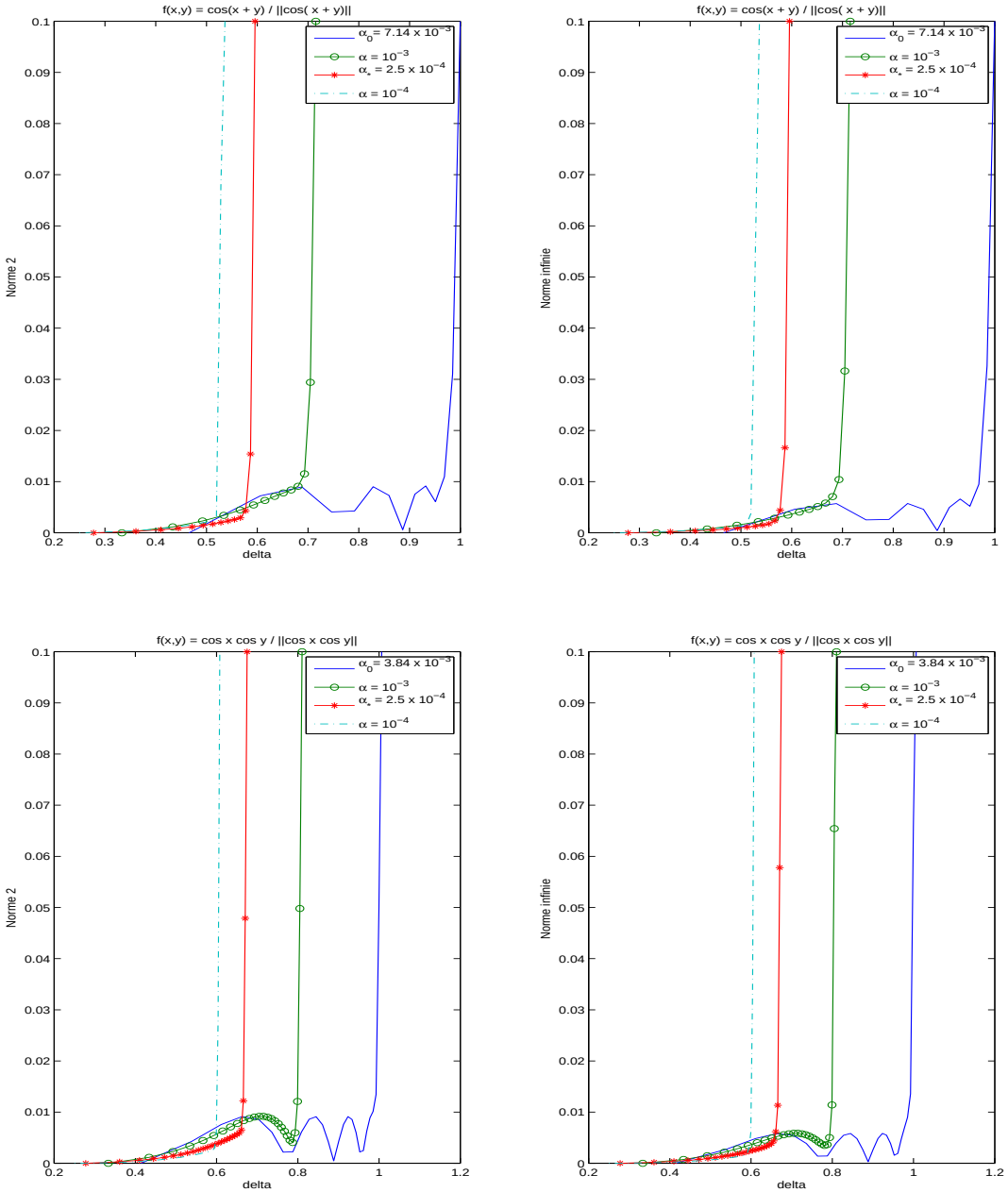


Fig. 1.4 – Comparaison numérique des normes L^2 et L^∞ pour le problème non linéaire avec $\alpha = 10^{-3}$, 2.5×10^{-4}, 10^{-4} et $\alpha_0 = 7.14 \times 10^{-3}$, 3.84×10^{-3} respectivement pour chacune des données initiales $f(x,y) = \dfrac{\cos(x+y)}{||\cos(x+y)||}$ et $f(x,y) = \dfrac{\cos x \cos y}{||\cos x \cos y||}$.

La valeur 10^{-2} apparaît comme une borne dans le choix de α_0 vérifiant, pour $0 < \alpha \leq \alpha_0$, qu'il existe $0 < \delta < 1$ tel que les inégalités (1.57) soient vraies sur l'intervalle de temps $0 < t < \alpha^{-\delta}$. En effet, on note que, dans tous les cas, le temps de comparaison ne change pas selon la valeur de α, mais ce temps étant donné par la relation $t = \alpha^{-\delta}$, on trouve :

- avec la donnée initiale $f(x,y) = \dfrac{\cos(x+y)}{||\cos(x+y)||}$, δ est égal à 1.073, 0.715, 0.596 et 0.544,
- avec la donnée initiale $f(x,y) = \dfrac{\cos x \cos y}{||\cos x \cos y||}$, δ est égal à 1.207, 0.804, 0.670 et 0.604,

respectivement pour α égal à 10^{-2}, 10^{-3}, 2.5×10^{-4} et 10^{-4}. Essayons de voir plus précisément quel serait le cas limite dans le choix de α_0. Pour cela, on reprend les tests pour différentes valeurs de α proche de 10^{-2}

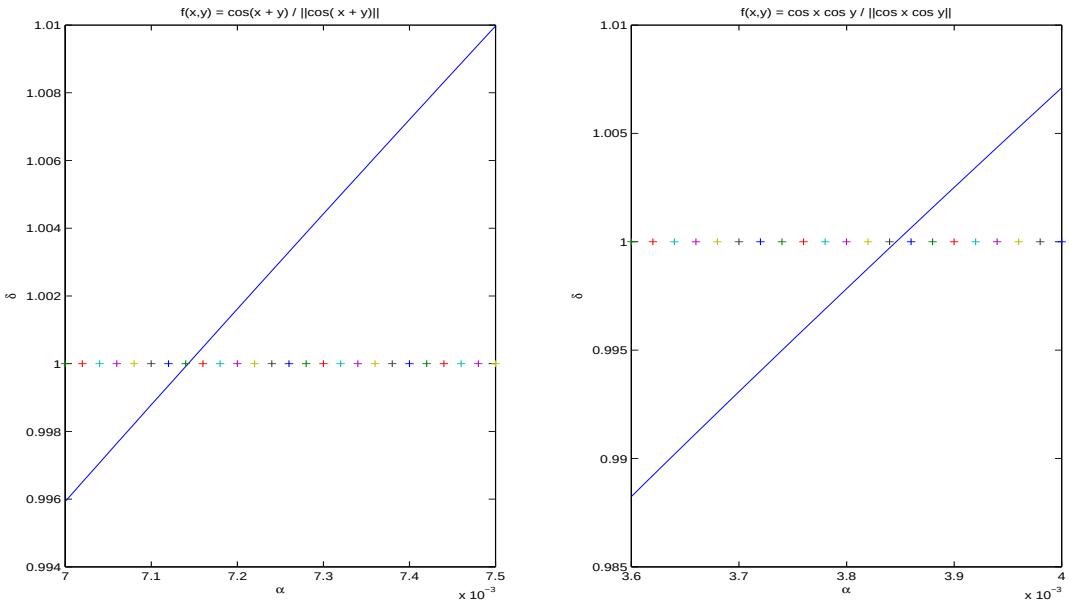


Fig. 1.5 – Evolution de δ en fonction de α pour le problème non linéaire avec les données initiales $f(x,y) = \dfrac{\cos(x+y)}{||\cos(x+y)||}$ et $f(x,y) = \dfrac{\cos x \cos y}{||\cos x \cos y||}$.

Il résulte des simulations effectuées que la borne α_0 est proche de 7.14×10^{-3} et 3.84×10^{-3}, respectivement pour les données initiales $f(x,y) = \dfrac{\cos(x+y)}{||\cos(x+y)||}$ et $\dfrac{\cos x \cos y}{||\cos x \cos y||}$ (voir Fig.1.5). On a vu aussi que ces bornes numériques n'engendrent pas de limitation dans les choix physiques possibles de valeurs de alpha, étant donné que ces deux cas ne sont pas réalistes. Pour les données initiales $\dfrac{\sin(x+y)}{||\sin(x+y)||}$ et $\dfrac{\sin x \sin y}{||\sin x \sin y||}$, on obtient des résultats similaires.

Il semblerait que la conjecture 1.4 soit vraie, il reste alors à montrer jusqu'où peut-on prolonger le temps de comparaison des solutions de KP-II et KP-BBM-II, on peut tout

de même faire quelques observations :

- le nombre d'oscillations de la donnée initiale dans les directions x et y, qui ne doit pas être trop élevé de part la modélisation, n'influence pas la comparaison,
- la comparaison du problème non linéaire, lors des premiers instants d'observation, a un comportement sensiblement proche de celle du problème linéaire,
- le paramètre δ est plus ou moins proche de 1 que de 0, autrement dit le temps de comparaison est plus proche du temps donné par le problème linéaire que du temps théorique, selon que α est plus ou moins proche de α_0. De plus, cette valeur limite α_0 semble dépendre de la donnée initiale,
- si α était nul, les équations de KP-II et KP-BBM-II se réduisant à la seule équation des ondes, les solutions respectives seraient donc les mêmes et δ vaudrait 1,
- finalement, on constate que pour des données semblables à ce que l'on observe dans la réalité, c'est à dire pour $10^{-4} \leq \alpha \leq 10^{-3}$, les solutions des équations de KP-II et KP-BBM-II sont suffisamment proches l'une de l'autre sur un intervalle plus grand que le temps théorique pour cette modélisation du problème physique.

Chapitre 2

Modèles d'ondes internes en dimension 2

L'équation de Benjamin-Ono [Ben67, DA67, Ono75] est obtenue par une analyse asymptotique à partir de l'équation d'Euler, autrement dit du principe fondamental de la dynamique, lorsqu'on étudie les ondes unidirectionnelles, de grande longueur, entre deux fluides de masses volumiques distinctes, ce qui correspond aussi à étudier les ondes internes de l'eau. Elle a pour forme

$$\eta_t + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - \frac{\beta}{2}H(\eta_{xx}) = 0,$$

où α est le quotient entre l'amplitude des ondes et la profondeur du premier fluide, β le quotient entre cette profondeur et la longueur d'onde, et H la transformée de Hilbert dans la direction x.

Dans un premier temps, on dérivera à partir de l'équation d'Euler l'équation Benjamin-Ono-2D (2D-BO) suivante [Mat98, PLS03]

$$\eta_t + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - \frac{\beta}{2}H(\eta_{xx}) + \frac{\gamma}{2}\partial_x^{-1}\,\eta_{yy} = 0,$$

où ici γ désigne le carré du quotient entre les longueur d'ondes dans les deux directions du plan.
On voit alors que de la même manière que l'on passe de l'équation de KdV à celle de BBM, on obtient une nouvelle équation régularisée, à savoir

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{\beta}{2}H(\eta_{xt}) + \frac{\gamma}{2}\partial_x^{-1}\eta_{yy} = 0,$$

appelée Benjamin-Ono-BBM-2D (2D-BO-BBM).
Une fois ce travail de modélisation effectué, on pourra, dans un second temps, comparer les solutions des équations 2D-BO et 2D-BO-BBM. On supposera alors que α, β et γ sont égaux.
Après avoir établi l'existence et l'unicité de solutions locales des problèmes de Cauchy pour 2D-BO et 2D-BO-BBM, on démontre le résultat suivant :

Théorème 2.1
Soient $m \geq 2$, et $f \in X^{m+3}(\mathbb{R}^2)$. Soit $\alpha > 0$ et soient η et ζ respectivement l'unique solution de 2D-BO et de 2D-BO-BBM dans $\mathcal{C}([-T,T]; H^{m+3}(\mathbb{R}^2))$, avec $T := \dfrac{\alpha^{-1}}{C_{m+3}|f|_{m+3}}$,

sous la condition initiale $\eta|_{t=0} = \zeta|_{t=0} = f$. *Alors, il existe* $\alpha_0 > 0$, *et pour tous entiers naturels* $0 \leq i+j \leq m-2$, *une constante* $N_{i,j} > 0$, *dépendant uniquement de la norme de* f *dans* $X^{m+3}(\mathbb{R}^2)$, *telle que si* $0 < \alpha \leq \alpha_0$, *et pour* $|t| \leq T$, *on ait*

$$||\partial_x^i \partial_y^j \eta(.,.,t) - \partial_x^i \partial_y^j \zeta(.,.,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq N_{i,j} \alpha^{3/2} |t|^{1/2}.$$

La preuve consistera à étudier les solutions des équations

$$u_t + uu_x - H(u_{xx}) + \partial_x^{-1} u_{yy} = 0 \tag{2.1}$$
$$v_t + vv_x - H(v_{xx}) + \alpha H(v_{xt}) + \partial_x^{-1} v_{yy} = 0. \tag{2.2}$$

La chose importante est de remarquer que le passage de 2D-BO à (2.1) et de 2D-BO-BBM à (2.2) se fait uniquement à l'aide du changement de variables

$$u(x,y,t) = \eta(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t) \ , \ v(x,y,t) = \zeta(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t).$$

Clairement, ce changement de variables nous permettra de généraliser nos résultats à des problèmes périodiques dans les deux directions d'espace, ce qui permettre d'étudier cette comparaison de façon numérique en se restreignant à des domaines de type $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

2.1 Dérivation des équations

On s'appuie principalement ici sur l'article de Matsuno [Mat98]. Jusqu'à la section 2.2, les résultats seront formels.

2.1.1 Équations gouvernant l'écoulement

On considère un flux irrotationnel de deux fluides parfaits homogènes incompressibles de l'espace de dimension 3 muni d'un repère (Ox, Oy, Oz) avec Oz vertical dirigé vers le haut et d'une chronologie. On note $\eta(x,y,t)$ la surface séparant ces deux fluides. On suppose que la masse volumique est constante dans chacun des deux fluides, égale à ρ_1 pour $z > \eta(x,y,t)$ et égale à ρ_2 pour $-h < z < \eta(x,y,t)$, telle que $\rho_1 < \rho_2$ (voir Fig.2.1).

Il existe deux fonctions potentiel de vitesse φ_1 et φ_2 vérifiant :

– la conservation de la masse

$$\varphi_{1,xx} + \varphi_{1,yy} + \varphi_{1,zz} = 0 \quad \text{si} \quad z > \eta(x,y,t), \tag{2.3}$$
$$\varphi_{2,xx} + \varphi_{2,yy} + \varphi_{2,zz} = 0 \quad \text{si} \quad -h < z < \eta(x,y,t), \tag{2.4}$$

– la condition cinématique à l'interface entre les deux fluides, si $z = \eta(x,y,t)$

$$\eta_t + \varphi_{1,x}\eta_x + \varphi_{1,y}\eta_y = \varphi_{1,z}, \tag{2.5}$$
$$\eta_t + \varphi_{2,x}\eta_x + \varphi_{2,y}\eta_y = \varphi_{2,z}, \tag{2.6}$$

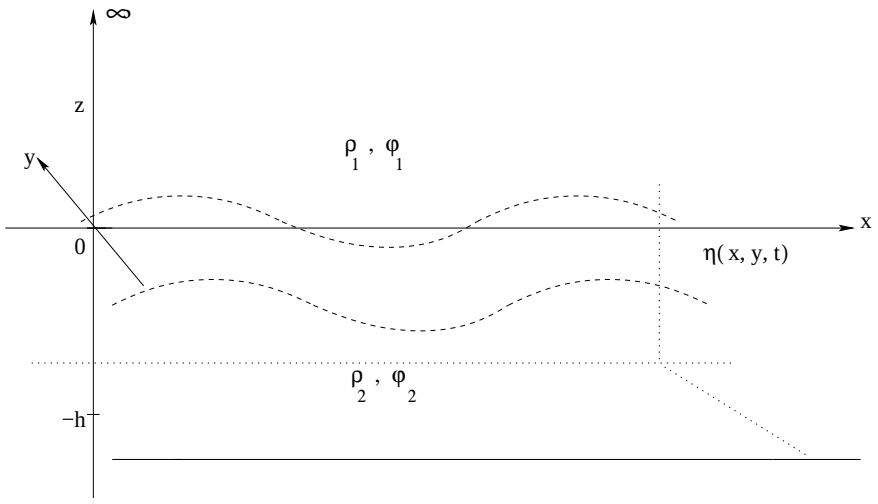


Fig. 2.1 – Interface entre deux fluides

– l'équation de Bernoulli à l'interface entre les deux fluides, si $z = \eta(x, y, t)$

$$\rho_1\left(\varphi_{1,t} + \frac{1}{2}(\varphi_{1,x}^2 + \varphi_{1,y}^2 + \varphi_{1,z}^2) + g\eta\right) = \rho_2\left(\varphi_{2,t} + \frac{1}{2}(\varphi_{2,x}^2 + \varphi_{2,y}^2 + \varphi_{2,z}^2) + g\eta\right), \quad (2.7)$$

– avec pour conditions aux bords

$$\varphi_{1,z} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad z \to +\infty, \quad (2.8)$$

$$\varphi_{2,z} = 0 \quad \text{si} \quad z = -h. \quad (2.9)$$

2.1.2 Petites perturbations en dimension 2

On suppose que l'équation de la surface Σ_t vérifie $\eta = O(a)$, où a est l'amplitude des ondes. On suppose que l'amplitude des ondes a est négligeable par rapport à la profondeur h et que cette profondeur h est elle-même négligeable par rapport à k la longueur d'onde dans la direction x, c'est à dire que l'on s'intéresse aux ondes de faible amplitude et de grande longueur.
On suppose que pour $\rho = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} < 1$ et $c = \sqrt{(1-\rho)gh}$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y, z, t) &= ac\widetilde{\varphi}_1(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, \frac{z}{h}, \frac{c}{k}t), \\
\varphi_2(x, y, z, t) &= \frac{ack}{h}\widetilde{\varphi}_2(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, \frac{z}{h}, \frac{c}{k}t), \\
\eta(x, y, t) &= a\widetilde{\eta}(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, \frac{c}{k}t).
\end{aligned}$$

On pose alors

$$\widetilde{x} = \frac{x}{k}, \quad \widetilde{y} = \frac{y}{k}, \quad \widetilde{z} = \frac{z}{h}, \quad \widetilde{t} = \frac{c}{k}t, \quad \alpha = \frac{a}{h}, \quad \beta = \frac{h}{k}$$

Par abus, on supprimera les tildes dans les équations obtenues par ces changements. L'équation de Σ_t devient $z = \alpha\eta$, et les équations gouvernant l'écoulement :

– la conservation de la masse

$$\beta^2\left(\varphi_{1,xx}+\varphi_{1,yy}\right)+\varphi_{1,zz} = 0 \quad \text{si} \quad z>\alpha\eta, \tag{2.10}$$
$$\beta^2\left(\varphi_{2,xx}+\varphi_{2,yy}\right)+\varphi_{2,zz} = 0 \quad \text{si} \quad -1<z<\alpha\eta, \tag{2.11}$$

– la condition cinématique à l'interface des fluides, si $z=\alpha\eta$

$$\eta_t+\alpha\beta\left(\varphi_{1,x}\eta_x+\varphi_{1,y}\eta_y\right) = \frac{1}{\beta}\varphi_{1,z}, \tag{2.12}$$
$$\eta_t+\alpha\left(\varphi_{2,x}\eta_x+\varphi_{2,y}\eta_y\right) = \frac{1}{\beta^2}\varphi_{2,z}, \tag{2.13}$$

– l'équation de Bernoulli à l'interface des fluides, si $z=\alpha\eta$

$$\rho\left[\beta\varphi_{1,t}+\frac{1}{2}\alpha\beta^2\left(\varphi_{1,x}^2+\varphi_{1,y}^2\right)+\frac{1}{2}\alpha\varphi_{1,z}^2+\frac{1}{1-\rho}\eta\right] = \varphi_{2,t}+\frac{1}{2}\alpha\left(\varphi_{2,x}^2+\varphi_{2,y}^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta^2}\varphi_{2,z}^2+\frac{1}{1-\rho}\eta, \tag{2.14}$$

– avec pour conditions aux bords

$$\varphi_{1,z} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad z\to+\infty, \tag{2.15}$$
$$\varphi_{2,z} = 0 \quad \text{si} \quad z=-1. \tag{2.16}$$

Vérifions que l'on retrouve bien les équations précédentes :

(i) Les équations de Laplace (2.3) et (2.4) donnent pour $i=1,2$

$$\frac{1}{k^2}\widetilde{\varphi}_{i,\tilde{x}\tilde{x}}+\frac{1}{k^2}\widetilde{\varphi}_{i,\tilde{y}\tilde{y}}+\frac{1}{h^2}\widetilde{\varphi}_{i,\tilde{z}\tilde{z}}=0.$$

Multiplier par h^2 donne (2.10) et (2.11).

(ii) L'équation (2.5) donne

$$a\frac{c}{k}\widetilde{\eta}_{\tilde{t}}+\frac{ac}{k}\widetilde{\varphi}_{1,\tilde{x}}\frac{a}{k}\widetilde{\eta}_{\tilde{x}}+\frac{ac}{k}\widetilde{\varphi}_{1,\tilde{y}}\frac{a}{k}\widetilde{\eta}_{\tilde{y}}-\frac{ac}{h}\widetilde{\varphi}_{1,\tilde{z}} = 0.$$

En divisant par $\dfrac{ac}{k}$, on trouve

$$\widetilde{\eta}_{\tilde{t}}+\frac{a}{k}\widetilde{\varphi}_{1,\tilde{x}}\widetilde{\eta}_{\tilde{x}}+\frac{a}{k}\widetilde{\varphi}_{1,\tilde{y}}\widetilde{\eta}_{\tilde{y}}-\frac{k}{h}\widetilde{\varphi}_{1,\tilde{z}} = 0$$
$$\widetilde{\eta}_{\tilde{t}}+\frac{a}{h}\frac{h}{k}\widetilde{\varphi}_{1,\tilde{x}}\widetilde{\eta}_{\tilde{x}}+\frac{a}{h}\frac{h}{k}\widetilde{\varphi}_{1,\tilde{y}}\widetilde{\eta}_{\tilde{y}}-\frac{k}{h}\widetilde{\varphi}_{1,\tilde{z}} = 0,$$

qui est l'équation (2.12).

L'équation (2.6) donne

$$a\frac{c}{k}\widetilde{\eta}_{\tilde{t}}+\frac{ack}{h}\frac{a}{k^2}\widetilde{\varphi}_{\tilde{x}}\widetilde{\eta}_{\tilde{x}}+\frac{ack}{h}\frac{a}{k^2}\widetilde{\varphi}_{\tilde{y}}\widetilde{\eta}_{\tilde{y}}-\frac{ack}{h^2}\widetilde{\varphi}_{\tilde{z}} = 0.$$

En divisant par $\dfrac{ac}{k}$, on trouve

$$\widetilde{\eta}_{\tilde{t}}+\frac{a}{h}\widetilde{\varphi}_{\tilde{x}}\widetilde{\eta}_{\tilde{x}}+\frac{a}{h}\widetilde{\varphi}_{\tilde{y}}\widetilde{\eta}_{\tilde{y}}-\frac{k^2}{h^2}\widetilde{\varphi}_{\tilde{z}} = 0,$$

qui est l'équation (2.13).

(iii) L'équation (2.7) donne

$$\rho\left[ac\frac{c}{k}\widetilde{\varphi}_{1,\tilde{t}}+\frac{1}{2}\left((\frac{ac}{k})^2\widetilde{\varphi}^2_{1,\tilde{x}}+(\frac{ac}{k})^2\widetilde{\varphi}^2_{1,\tilde{y}}+(\frac{ac}{h})^2\widetilde{\varphi}^2_{1,\tilde{z}}\right)+ga\widetilde{\eta}\right] =$$
$$\frac{ack}{h}\frac{c}{k}\widetilde{\varphi}_{2,\tilde{t}}+\frac{1}{2}\left((\frac{ack}{h})^2\frac{1}{k^2}\widetilde{\varphi}^2_{2,\tilde{x}}+(\frac{ack}{h})^2\frac{1}{k^2}\widetilde{\varphi}^2_{2,\tilde{y}}+(\frac{ack}{h})^2\frac{1}{h^2}\widetilde{\varphi}^2_{2,\tilde{z}}\right)+ga\widetilde{\eta}.$$

En divisant par $\frac{ac^2}{h}$, on trouve

$$\rho\left[\frac{h}{k}\widetilde{\varphi}_{1,\tilde{t}}+\frac{1}{2}\left(\frac{ah}{k^2}\widetilde{\varphi}^2_{1,\tilde{x}}+\frac{ah}{k^2}\widetilde{\varphi}^2_{1,\tilde{y}}+\frac{a}{h}\widetilde{\varphi}^2_{1,\tilde{z}}\right)+\frac{gh}{c^2}\widetilde{\eta}\right] =$$
$$\widetilde{\varphi}_{2,\tilde{t}}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{h}\widetilde{\varphi}^2_{2,\tilde{x}}+\frac{a}{h}\widetilde{\varphi}^2_{2,\tilde{y}}+\frac{a}{h}\widetilde{\varphi}^2_{2,\tilde{z}}\right)+\frac{gh}{c^2}\widetilde{\eta},$$

qui est l'équation (2.14).

On veut trouver la forme des potentiels de vitesse φ_1 et φ_2. On commence par chercher la solution φ_2 de l'équation (2.11) avec la condition (2.16) sous forme de série, on suppose

$$\varphi_2(x,y,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_2^{(n)}(x,y,t)(z+1)^n.$$

On obtient

$$\varphi_{2,z}(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}nf_2^{(n)}(x,y,t)(z+1)^{n-1},$$

d'où si $z=-1$, on a $f_2^{(1)}(x,y,t)=0$. L'équation (2.11) s'écrit

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n(\beta^2\frac{\partial^2 f_2^{(n)}}{\partial x^2}+\beta^2\frac{\partial^2 f_2^{(n)}}{\partial y^2})+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)(z+1)^{n-2}f_2^{(n)} = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\beta^2\frac{\partial^2 f_2^{(n)}}{\partial x^2}+\beta^2\frac{\partial^2 f_2^{(n)}}{\partial y^2}+(n+1)(n+2)f_2^{(n+2)}\right)(z+1)^n = 0.$$

Il s'ensuit que pour tout entier n,

$$\beta\frac{\partial^2 f_2^{(n)}}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^2 f_2^{(n)}}{\partial y^2}+(n+1)(n+2)f_2^{(n+2)}=0.$$

On résout ces équations par récurrence sur n. Comme $f_2^{(1)}=0$, on en déduit

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad , \quad f_2^{(2n+1)}=0.$$

Pour les indices pairs, on a

$$\beta^2\frac{\partial^2 f_2^{(0)}}{\partial x^2}+\beta^2\frac{\partial^2 f_2^{(0)}}{\partial y^2}+2f_2^{(2)}=0 \quad , \quad \beta^2\frac{\partial^2 f_2^{(2)}}{\partial x^2}+\beta^2\frac{\partial^2 f_2^{(2)}}{\partial y^2}+12f_2^{(4)},$$

ou encore

$$f_2^{(2)} = -\frac{\beta^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f_2^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2^{(0)}}{\partial y^2}\right) \quad , \quad f_4 = \frac{\beta^4}{24}\left(\frac{\partial^4 f_2^{(0)}}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f_2^{(0)}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f_2^{(0)}}{\partial y^4}\right).$$

On note $f_2 := f_2^{(0)}$ et on a

$$\begin{aligned} \varphi_2(x,y,z,t) &= f_2(x,y,t) - \frac{\beta^2}{2}\left(f_{2,xx}(x,y,t) + f_{2,yy}(x,y,t)\right)(z+1)^2 \\ &+ \frac{\beta^4}{24}\left(f_{2,xxxx}(x,y,t) + 2f_{2,xxyy}(x,y,t) + f_{2,yyyy}(x,y,t)\right)(z+1)^4 + O(\beta^6). \end{aligned} \tag{2.17}$$

On résout désormais l'équation (2.10) sous la condition (2.15). En utilisant la transformée de Fourier dans les directions x et y, la solution φ_1 est de la forme

$$\varphi_1(x,y,z,t) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1^\vee(\xi_1,\xi_2,t)}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} \mathrm{e}^{-i(\xi_1 x+\xi_2 y)} \mathrm{e}^{-\beta\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}z} d\xi_1\, d\xi_2,$$

avec

$$f_1^\vee = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x,y,t)\mathrm{e}^{i(\xi_1 x+\xi_2 y)} dx\, dy,$$

où f_1 est une fonction à déterminer. On en déduit que pour $z = \alpha\eta$

$$\begin{aligned} \varphi_{1,xx} + \varphi_{1,yy} &= \int_{\mathbb{R}^2} f_1^\vee(\xi_1,\xi_2,t)\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\mathrm{e}^{-i(\xi_1 x+\xi_2 y)}\mathrm{e}^{-\alpha\beta\eta\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} d\xi_1\, d\xi_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f_1^\vee(\xi_1,\xi_2,t)\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\mathrm{e}^{-i(\xi_1 x+\xi_2 y)} d\xi_1\, d\xi_2 + O(\alpha\beta), \end{aligned}$$

en effectuant un développement limité de l'exponentielle suivant $\alpha\beta$. De la même manière, on a pour $z = \alpha\eta$

$$\begin{aligned} \varphi_{1,z} &= \int_{\mathbb{R}^2} \beta f_1^\vee(\xi_1,\xi_2,t)\mathrm{e}^{-i(\xi_1 x+\xi_2 y)}\mathrm{e}^{-\alpha\beta\eta\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} d\xi_1\, d\xi_2 \\ &= \beta f_1 - \alpha\beta^2\eta\left(\varphi_{1,xx} + \varphi_{1,yy}\right) + O(\alpha^2\beta^3). \end{aligned}$$

L'équation (2.12) implique

$$f_1 = \eta_t + O(\alpha\beta),$$

on en déduit alors que pour $z = \alpha\eta$

$$\begin{aligned} \varphi_{1,t} &= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2} f_{1,t}(x',y',t)\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\mathrm{e}^{i(\xi_1(x'-x)+\xi_2(y'-y))}}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} d\xi_1\, d\xi_2\right) dx'\, dy' + O(\alpha\beta) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{f_{1,t}(x',y',t)}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}} dx'\, dy' + O(\alpha\beta) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\eta_{tt}(x',y',t)}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}} dx'\, dy' + O(\alpha\beta). \end{aligned}$$

On remplace les fonctions potentiels dans les équations (2.13) et (2.14) pour obtenir deux équations de type Boussinesq

$$\eta_t + f_{2,xx} + f_{2,yy} + \alpha(\eta f_{2,x})_x + \alpha(\eta f_{2,y})_y - \frac{\beta^2}{6}(f_{2,xxxx} + 2f_{2,xxyy} + f_{2,yyyy}) = O(\alpha\beta^2) \tag{2.18}$$

$$\eta + f_{2,t} + \frac{\alpha}{2}f_{2,x}^2 + \frac{\alpha}{2}f_{2,y}^2 - \beta^2\left(\frac{1}{2}f_{2,xxt} + \frac{1}{2}f_{2,yyt}\right) + \rho\beta L(\eta_{tt}) = O(\alpha\beta^2), \tag{2.19}$$

avec

$$L(\eta)(x,y,t) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\eta(x',y'+y,t)}{\sqrt{(x'-x)^2+y'^2}}dx'\,dy'. \tag{2.20}$$

On se place désormais dans le cas où k la longueur d'onde dans la direction x est négligeable par rapport à l la longueur d'onde dans la direction y, c'est à dire que l'écoulement se fait principalement dans la direction x, on suppose alors pour $\gamma = \dfrac{k^2}{l^2}$

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,y,z,t) &= \widetilde{\varphi}_1(x,\sqrt{\gamma}y,z,t),\\ \varphi_2(x,y,z,t) &= \widetilde{\varphi}_2(x,\sqrt{\gamma}y,z,t),\\ \eta(x,y,t) &= \widetilde{\eta}(x,\sqrt{\gamma}y,t),\end{aligned}$$

et on pose $\widetilde{y} = \gamma y$. On suppose que l'équation de la surface η admet un développement limité par rapport à sa deuxième variable, autrement dit on a

$$\eta(x',\sqrt{\gamma}(y'+y),t) = \widetilde{\eta}(x',\widetilde{y},t) + O(\gamma).$$

Cela implique que l'opérateur L peut être exprimé, au sens des distributions, comme une transformée de Hilbert. En effet, on a, après une intégration par parties,

$$\begin{aligned}L(\eta_x)(x,y,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\widetilde{\eta}_x(x',\widetilde{y},t)}{\sqrt{(x'-x)^2+y'^2}}dx'\,dy' + O(\gamma)\\ &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{P}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\widetilde{\eta}(x',\widetilde{y},t)}{x'-x}dx'\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(1+y^2)^{3/2}} + O(\gamma).\end{aligned}$$

Il suffit alors d'effectuer le changement de variable $y = \cosh\theta$, pour trouver

$$\begin{aligned}L(\eta_x)(x,y,t) &= \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\widetilde{\eta}(x',\widetilde{y},t)}{x'-x}dx' + O(\gamma)\\ &=: -H(\widetilde{\eta})(x,\widetilde{y},t) + O(\gamma),\end{aligned}$$

où H désigne la transformée de Hilbert dans la direction x.
Par abus, on supprimera de nouveau les tildes dans les différentes équations. Ces changements donnent dans les équations (2.18) et (2.19)

$$\eta_t + f_{2,xx} + \gamma f_{2,yy} + \alpha(\eta f_{2,x})_x + \alpha\gamma(\eta f_{2,y})_y - \frac{\beta^2}{6}(f_{2,xxxx} + 2\gamma f_{2,xxyy} + \gamma^2 f_{2,yyyy}) = O(\alpha\beta^2)$$

$$\eta + f_{2,t} + \frac{\alpha}{2}f_{2,x}^2 + \frac{\alpha\gamma}{2}f_{2,y}^2 - \beta^2\left(\frac{1}{2}f_{2,xxt} + \frac{\gamma}{2}f_{2,yyt}\right) + \rho\beta L(\eta_{tt}) = O(\alpha\beta^2),$$

d'où, en négligeant aussi les termes d'ordre $\alpha\gamma$ et d'ordre $\beta\gamma$,

$$\begin{aligned} \eta_t + f_{2,xx} + \alpha(\eta f_{2,x})_x + \gamma f_{2,yy} &= O(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \\ \eta + f_{2,t} + \frac{\alpha}{2} f_{2,x}^2 + \rho\beta L(\eta_{tt}) &= O(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2). \end{aligned}$$

On pose $w := f_{2,x}$ et on dérive par rapport à x pour avoir finalement

$$\eta_t + w_x + \alpha(\eta w)_x + \gamma\partial_x^{-1} w_{yy} = O(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \quad (2.21)$$

$$\eta_x + w_t + \alpha w w_x - \rho\beta H(\eta_{tt}) = O(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2). \quad (2.22)$$

A l'ordre le plus bas, les équations (2.21) et (2.22) deviennent

$$\begin{aligned} \eta_t + w_x &= O(\alpha+\beta+\gamma), \\ \eta_x + w_t &= O(\alpha+\beta+\gamma), \end{aligned}$$

ce qui implique $\eta_{tt} - \eta_{xx} = O(\alpha+\beta+\gamma)$. Si on suppose que les ondes se déplacent de la gauche vers la droite, la solution de cette équation est de la forme $\eta(x,y,t) = \eta(x-t,y,0) + O(\alpha+\beta+\gamma)$, ce qui implique $\eta_t + \eta_x = O(\alpha+\beta+\gamma)$. On a donc

$$\begin{aligned} \eta_t - w_t = \eta_t + \eta_x &= O(\alpha+\beta+\gamma), \\ \eta_x - w_x = \eta_x + \eta_t &= O(\alpha+\beta+\gamma), \end{aligned}$$

d'où $w = \eta$ à l'ordre le plus bas. Pour revenir aux équations (2.21) et (2.22), il nous faut corriger cette dernière égalité, on cherche donc w sous la forme

$$w = \eta + \alpha A + \beta B + \gamma C + O(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),$$

et on veut déterminer les valeurs de A, B, et C au premier ordre. L'équation (2.21) devient

$$\eta_t + \eta_x + \alpha(A_x + 2\eta\eta_x) + \beta B_x + \gamma(C_x + \partial_x^{-1}\eta_{yy}) = O(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2), \quad (2.23)$$

et l'équation (2.22)

$$\eta_t + \eta_x + \alpha(A_t + \eta\eta_x) + \beta(B_t - \rho H(\eta_{tt})) + \gamma C_t = O(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2), \quad (2.24)$$

et comme $\eta_t = -\eta_x + O(\alpha+\beta+\gamma)$, l'équation précédente devient

$$\eta_t + \eta_x + \alpha(A_t + \eta\eta_x) + \beta(B_t - \rho H(\eta_{xx})) + \gamma C_t = O(\alpha^2+\beta^4+\gamma^4). \quad (2.25)$$

La compatibilité des développements limités des équations (2.23) et (2.25) implique

$$\begin{aligned} A_x + 2\eta\eta_x &= A_t + \eta\eta_x, \\ B_x &= B_t + -\rho H(\eta_{xx}), \\ C_x + \partial_x^{-1}\eta_{yy} &= C_t. \end{aligned}$$

On effectue le changement de variables

$$r = s - t \quad \text{et} \quad s = x + t,$$

pour obtenir

$$A = \frac{-\eta^2}{4} \quad , \quad B = -\frac{\rho}{2}H(\eta_x) \quad \text{et} \quad C_r = \frac{-1}{2}\partial_x^{-1}\eta_{yy}.$$

Remplacer ces valeurs dans (2.23) donne

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - \frac{\rho}{2}\beta H(\eta_{xx}) + \frac{\gamma}{2}\partial_x^{-1}\eta_{yy} \quad = \quad O(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),$$

comme $\eta_t = -\eta_x + O(\alpha+\beta+\gamma)$, on en déduit une autre équation

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - \frac{\rho}{2}\beta H(\eta_{xx}) + \frac{\gamma}{2}\partial_x^{-1}\eta_{yy} \quad = \quad O(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

Les équations au premier ordre sont

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - \frac{\rho}{2}\beta H(\eta_{xx}) + \frac{\gamma}{2}\partial_x^{-1}\eta_{yy} = 0, \tag{2.26}$$

appelée Benjamin-Ono (2D-BO), et

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{\rho}{2}\beta H(\eta_{xt}) + \frac{\gamma}{2}\partial_x^{-1}\eta_{yy} = 0, \tag{2.27}$$

appelée Benjamin-Ono-BBM (2D-BO-BBM).

Remarque 2.2 *Le terme de dispersion de type KP, η_{xxx}, apparait à l'ordre β^2.*

Il est désormais clair que les équations de 2D-BO et 2D-BO-BBM modélisent le même phénomène physique, nous allons pouvoir les comparer.

2.2 Comparaison de BO et BO-BBM

On considère les problèmes de Cauchy suivants

$$\begin{aligned}
\eta_t + \eta_x + \alpha\eta\eta_x - \alpha H(\eta_{xx}) + \alpha\partial_x^{-1}\eta_{yy} &= 0 && (2.28)\\
\zeta_t + \zeta_x + \alpha\zeta\zeta_x + \alpha H(\zeta_{xt}) + \alpha\partial_x^{-1}\zeta_{yy} &= 0 && (2.29)\\
\eta(x,y,0) = \zeta(x,y,0) &= f(x,y), && (2.30)
\end{aligned}$$

où $\alpha = \beta = \gamma$ dans la modélisation précédente. L'équation (2.28) est l'équation 2D-BO et l'équation (2.29) est l'équation 2D-BO-BBM.

2.2.1 Discussion linéaire

Considérons les problèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned}
\eta_t + \eta_x - \alpha H(\eta_{xx}) + \alpha\partial_x^{-1}\eta_{yy} &= 0\\
\zeta_t + \zeta_x + \alpha H(\zeta_{xt}) + \alpha\partial_x^{-1}\zeta_{yy} &= 0\\
\eta(x,y,0) = \zeta(x,y,0) &= f(x,y).
\end{aligned}$$

Supposons que la donnée initiale f appartienne à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Formellement, la solution de 2D-BO est donnée, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $(k,l) \in \mathbb{R}^2$, par

$$\hat{\eta}(k,l,t) = \exp\left(-ik(1-\alpha|k| + \alpha\frac{l^2}{k^2})t\right)\hat{f}(k,l).$$

De la même manière la transformée de Fourier en espace donne pour l'équation 2D-BO-BBM, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $(k,l) \in \mathbb{R}^2$,

$$\hat{\zeta}(k,l,t) = \exp\left(-ik(\frac{1+\alpha\frac{l^2}{k^2}}{1+\alpha|k|})t\right)\hat{f}(k,l).$$

On a alors, pour tous réels k, l et t,

$$|\hat{\eta}(k,l,t) - \hat{\zeta}(k,l,t)| \leq 2\alpha^2|t|\left(|k^3| + |l^2|\right)|\hat{f}(k,l)|.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, le théorème de Plancherel implique que

$$||\eta(.,.,t) - \zeta(.,.,t)||_\infty \leq \left(\frac{2}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}(|k^3| + |l^2|)|\hat{f}(k,l)|\,dk\,dl\right)\alpha^2|t|.$$

Cette analyse du problème linéaire nous mène à la conjecture suivante :

Conjecture 2.3
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\widehat{\partial_x^3 f}$ et $\widehat{\partial_y^2 f}$ soient intégrables sur $\mathbb{R}^2$. Alors η et ζ les solutions respectives de 2D-BO et 2D-BO-BBM vérifient qu'il existe une constante $C > 0$, qui dépend uniquement de f et une constante $0 < \delta < 1$, telle que pour $|t| \leq \alpha^{-1-\delta}$, on ait

$$||\eta(.,.,t) - \zeta(.,.,t)||_\infty \leq C\alpha^2|t|.$$

On verra qu'une comparaison semblable peut être obtenue sur un intervalle de temps $[0, \alpha^{-1}]$ dans la section 2.2.3. Néanmoins, on se demandera si, à l'aide d'une méthode numérique, on peut améliorer ce résultat et ainsi ce rapprocher de la conjecture.

2.2.2 Problèmes de Cauchy locaux

On effectue le changement de fonctions

$$u(x,y,t) = \eta(x+\alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t)\ ,\ v(x,y,t) = \zeta(x+\alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t).$$

Le problème de Cauchy (2.28)-(2.29)-(2.30) devient

$$\begin{aligned} u_t + uu_x - H(u_{xx}) + \partial_x^{-1}u_{yy} &= 0 && (2.31)\\ v_t + vv_x - H(v_{xx}) + \alpha H(v_{xt}) + \partial_x^{-1}v_{yy} &= 0 && (2.32)\\ u(x,y,0) = v(x,y,0) &= f(x,y). && (2.33) \end{aligned}$$

Nous n'aurons besoin dans ce travail que de l'existence et l'unicité du problème de Cauchy local. De la même manière que dans le chapitre 1, on utilise la méthode décrite dans l'article de Iório et Nunes [IN98].

Proposition 2.4
Soit $f \in X^m(\mathbb{R}^2)$, $m > 2$. Alors il existe une constante C_m strictement positive, dépendant uniquement de m, telle pour

$$T_0 := \frac{1}{C_m |f|_m},$$

il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}([-T_0, T_0]; H^m(\mathbb{R}^2))$ du problème de Cauchy (2.31)-(2.33), respectivement $v \in \mathcal{C}([-T_0, T_0]; H^m(\mathbb{R}^2))$ du problème de Cauchy (2.32)-(2.33). De plus, ces solutions vérifient qu'il existe une constante c_m strictement positive telle que pour $|t| \leq T_0$,

$$\begin{aligned} |u|_m &\leq c_m |f|_m \\ |v|_m &\leq c_m |f|_m. \end{aligned}$$

On va désormais comparer les solutions de 2D-BO et 2D-BO-BBM. On étudiera la différence entre u et v solution du problème de Cauchy (2.31)-(2.32)-(2.33) pour laquelle le temps maximum de comparaison est de l'ordre d'une constante, on en déduira alors la comparaison des solutions du problème de Cauchy (2.28)-(2.29)-(2.30) pour un temps maximum de comparaison d'ordre α^{-1}.

2.2.3 Comparaison des solutions

Théorème 2.5
Soient $m \geq 0$, et $f \in X^{m+3}(\mathbb{R}^2)$. Soit $\alpha > 0$ et soient η et ζ l'unique solution du problème de Cauchy (2.28), (2.29), (2.30) dans $\mathcal{C}([-\alpha^{-1}T_0, \alpha^{-1}T_0]; H^{m+3}(\mathbb{R}^2))$, avec $T_0 := \frac{1}{C_{m+3}|f|_{m+3}}$. Alors, il existe $\alpha_0 > 0$, et pour tous entiers naturels $0 \leq i + j \leq m$, une constante $M_{i,j} > 0$, dépendant uniquement de $|f|_{m+3}$, telle que si $0 < \alpha \leq \alpha_0$, et pour $|t| \leq \alpha^{-1}T_0$, on ait

$$||\partial_x^i \partial_y^j \eta(.,.,t) - \partial_x^i \partial_y^j \zeta(.,.,t)|| \leq M_{i,j}\, \alpha^{3/2} |t|^{1/2}.$$

Remarque 2.6 *Notons que l'existence et l'unicité des solutions η et ζ sont assurées par la section précédente.*

Démonstration : On va montrer ce théorème par récurrence sur le nombre total de dérivées, autrement dit sur $i+j$. On suppose que le temps est positif, la preuve s'adaptera de la même manière dans le cas où le temps est négatif.
Effectuons tout d'abord le changement de fonctions

$$u(x,y,t) = \eta(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t) \ , \ v(x,y,t) = \zeta(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t).$$

Les équations (2.28), (2.29), (2.30) deviennent

$$\begin{aligned} u_t + uu_x - H(u_{xx}) + \partial_x^{-1} u_{yy} &= 0 \\ v_t + vv_x - H(v_{xx}) + \alpha H(v_{xt}) + \partial_x^{-1} v_{yy} &= 0 \\ u(x,y,0) = v(x,y,0) &= f(x,y). \end{aligned}$$

On retrouve exactement les équations (2.31), (2.32) et (2.33). Posons $w = v - u$, alors w satisfait le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} w_t + ww_x - H(w_{xx}) + \alpha H(w_{xt}) + \partial_x^{-1} w_{yy} &= \alpha H(u_{xt}) - (uw)_x \\ w(x,y,0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Le reste de la preuve est similaire à celle du théorème 1.14. □

Corollaire 2.7
Soient $m \geq 2$, et $f \in X^{m+3}(\mathbb{R}^2)$. Soit $\alpha > 0$ et soient η et ζ l'unique solution du problème de Cauchy (2.28), (2.29), (2.30) dans $\mathcal{C}([-\alpha^{-1}T_0, \alpha^{-1}T_0]; H^{m+3}(\mathbb{R}^2))$, avec $T_0 := \dfrac{1}{C_{m+3}|f|_{m+3}}$. Alors, il existe $\alpha_0 > 0$, et pour tous entiers naturels $0 \leq i+j \leq m-2$, une constante $N_{i,j} > 0$, dépendant uniquement de $|f|_{m+3}$, telle que si $0 < \alpha \leq \alpha_0$, et pour $|t| \leq \alpha^{-1}T_0$, on ait

$$||\partial_x^i \partial_y^j \eta(.,.,t) - \partial_x^i \partial_y^j \zeta(.,.,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq N_{i,j}\, \alpha^{3/2}\, |t|^{1/2}.$$

2.2.4 Le cas périodique

Grâce à l'unique changement de fonctions

$$u(x,y,t) = \eta(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t)\ ,\ v(x,y,t) = \zeta(x + \alpha^{-1}t, y, \alpha^{-1}t),$$

on n'effectue aucune homothétie sur les variables d'espace x et y, et la donnée initiale reste toujours la même. Ceci implique que nos résultats restent vrais dans le cas périodique. On obtient des résultats similaires à la proposition 2.4 pour le problème de Cauchy local dans le cas périodique ([IN98]). Si on note

$$M_\pi(\mathbb{R}^2) := \left\{ g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2), 2\pi - \text{périodique en } x \text{ et en } y; \int_{-\pi}^{\pi} g(x,y)\, dx = 0 \text{ pour } y \in [-\pi, \pi] \right\}$$

et $X_\pi^m(\mathbb{R}^2)$ la fermeture de $M_\pi(\mathbb{R}^2)$ par rapport à la norme $||g||_m^2 = \sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2} (1 + k^2 + l^2)^m |\hat{g}(k,l)|^2$,

on peut énoncer

Théorème 2.8
Soient $m \geq 0$, et $f \in X_\pi^{m+3}(\mathbb{R}^2)$. Soit $\alpha > 0$ et soient η et ζ l'unique solution du problème de Cauchy (2.28), (2.29), (2.30) dans $\mathcal{C}([-\alpha^{-1}T_0, \alpha^{-1}T_0]; X_\pi^{m+3}(\mathbb{R}^2))$, avec $T_0 := \dfrac{1}{C_{m+3}|f|_{m+3}}$. Alors, il existe $\alpha_0 > 0$, et pour tous entiers naturels $0 \leq i+j \leq m$, une constante $M_{i,j} > 0$, dépendant uniquement de $|f|_{m+3}$, telle que si $0 < \alpha \leq \alpha_0$, et pour $|t| \leq \alpha^{-1}T_0$, on ait

$$||\partial_x^i \partial_y^j \eta(.,.,t) - \partial_x^i \partial_y^j \zeta(.,.,t)|| \leq M_{i,j}\, \alpha^{3/2} |t|^{1/2}.$$

Corollaire 2.9
Soient $m \geq 2$, et $f \in X_\pi^{m+3}(\mathbb{R}^2)$. Soit $\alpha > 0$ et soient η et ζ l'unique solution du

problème de Cauchy (2.28), (2.29), (2.30) dans $\mathcal{C}([-\alpha^{-1}T_0, \alpha^{-1}T_0]; X_\pi^{m+3}(\mathbb{R}^2))$, *avec* $T_0 := \dfrac{1}{C_{m+3}|f|_{m+3}}$. *Alors, il existe* $\alpha_0 > 0$, *et pour tous entiers naturels* $0 \leq i+j \leq m-2$, *une constante* $N_{i,j} > 0$, *dépendant uniquement de* $|f|_{m+3}$, *telle que si* $0 < \alpha \leq \alpha_0$, *et pour* $|t| \leq \alpha^{-1}T_0$, *on ait*

$$\sup_{(x,y)\in[0,2\pi]^2} |\partial_x^i \partial_y^j \eta(x,y,t) - \partial_x^i \partial_y^j \zeta(x,y,t)| \leq N_{i,j}\, \alpha^{3/2}\, |t|^{1/2}.$$

Remarque 2.10
Tous les résultats restent vrais en dimension 1 *dans les cas périodique et non périodique.*

2.2.5 Comparaison numérique des solutions de BO et BO-BBM

On illustre ici la conjecture 2.3 de manière à nous donner quelques idées sur sa possible validité.
On considère alors le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t + uu_x - H(u_{xx}) + \partial_x^{-1} u_{yy} &= 0 && (2.35)\\ v_t + vv_x - H(v_{xx}) + \alpha H(v_{xt}) + \partial_x^{-1} v_{yy} &= 0 && (2.36)\\ u(x,y,0) = v(x,y,0) &= f(x,y), && (2.37) \end{aligned}$$

avec f une fonction de $X_\pi^{m+3}(\mathbb{R}^2)$, $m \geq 2$. On sait que d'après les théorème 2.8 et corollaire 2.9, les solutions de ce problème sont telles qu'il existe $\alpha_0 > 0$, une constante C_{m+3} strictement positive et dépendant uniquement de m, telle que si $0 < \alpha \leq \alpha_0$, et pour $0 \leq t \leq \dfrac{1}{C_{m+3}|f|_{m+3}}$, on ait

$$||u(.,.,t) - v(.,.,t)|| \leq M_{0,0}\alpha t^{1/2} \quad \text{et} \quad \sup_{(x,y)\in[0,2\pi]^2} |u(x,y,t) - v(x,y,t)| \leq N_{0,0}\alpha t^{1/2}. \quad (2.38)$$

On s'intéresse à l'optimalité du paramètre $0 \leq \delta < 1$ tel que sur l'intervalle de temps $[0, \alpha^{-\delta}]$, les inégalités (2.38) soient vraies. On reprend la méthode de relaxation associée à un schéma semi-implicite en temps, décrite par Besse [Bes04], associée à une FFT, restreinte au domaine $[-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$. Le choix de cette méthode se justifie par des temps de calcul plus court et par la possibilité d'aller plus loin dans le temps que les méthodes de type point fixe. On réécrit les équations (2.35)-(2.36)-(2.37) sous la forme

$$\begin{aligned} u_t + \frac{1}{2}\phi_x - H(u_{xx}) + \partial_x^{-1} u_{yy} &= 0\\ \phi &= u^2\\ v_t + \frac{1}{2}\psi_x - H(v_{xx}) + \alpha H(v_{xt}) + \partial_x^{-1} v_{yy} &= 0\\ \psi &= v^2\\ u(k,l,0) = v(k,l,0) &= f(k,l). \end{aligned}$$

Soit T_0 le temps maximum de comparaison des solutions de 2D-BO et 2D-BO-BBM, et soit δt le pas de discrétisation en temps. On note $\hat{u}^{n+1}$, respectivement $\hat{v}^{n+1}$, $\hat{\phi}^{n+\frac{1}{2}}$, $\hat{\psi}^{n+\frac{1}{2}}$,

l'approximation de $\hat{u}$ au temps $(n+1)\delta t$, respectivement de $\hat{v}$ au temps $(n+1)\delta t$, de $\hat{\phi}$ au temps $(n+\frac{1}{2})\delta t$, $\hat{\psi}$ au temps $(n+\frac{1}{2})\delta t$, pour n compris entre 0 et $\dfrac{T_0}{\delta t}$. Pour les dérivées en espace, on effectue une transformée de Fourier rapide. On obtient finalement le schéma pour l'équation 2D-BO

$$\begin{cases} \dfrac{\hat{\phi}^{n+\frac{1}{2}}(k,l)+\hat{\phi}^{n-\frac{1}{2}}}{2} = \widehat{(u^n)^2}(k,l) \\ \dfrac{\hat{u}^{n+1}(k,l)-\hat{u}^n(k,l)}{\delta t} + \dfrac{ik}{2}\hat{\phi}^{n+\frac{1}{2}}(k,l) - i\left(|k|\,k - \dfrac{l^2}{k}\right)\dfrac{\hat{u}^{n+1}(k,l)+\hat{u}^n(k,l)}{2} = 0 \\ \hat{u}^{n+1}(0,l) = \hat{u}^n(0,l) \\ \dfrac{-N_x}{2} \le k \le \dfrac{N_x}{2}-1 \\ \dfrac{-N_y}{2} \le l \le \dfrac{N_y}{2}-1; \end{cases} \tag{2.39}$$

et pour l'équation 2D-BO-BBM

$$\begin{cases} \dfrac{\hat{\psi}^{n+\frac{1}{2}}(k,l)+\hat{\psi}^{n-\frac{1}{2}}(k,l)}{2} = \widehat{(v^n)^2}(k,l) \\ (1+\alpha|k|)\dfrac{\hat{v}^{n+1}(k,l)-\hat{v}^n(k,l)}{\delta t} + \dfrac{ik}{2}\hat{\psi}^{n+\frac{1}{2}}(k,l) \\ \qquad\qquad -i\left(|k|\,k - \dfrac{l^2}{k}\right)\dfrac{\hat{v}^{n+1}(k,l)+\hat{v}^n(k,l)}{2} = 0 \\ \hat{v}^{n+1}(0,l) = \hat{v}^n(0,l) \\ \dfrac{-N_x}{2} \le k \le \dfrac{N_x}{2}-1 \\ \dfrac{-N_y}{2} \le l \le \dfrac{N_y}{2}-1; \end{cases} \tag{2.40}$$

avec pour données initiales $\hat{u}^0 = \hat{v}^0 = \hat{f}$ et $\hat{\phi}^{-\frac{1}{2}} = \hat{\psi}^{-\frac{1}{2}} = \widehat{f^2}$, et où N_x et N_y sont respectivement le nombre de modes de Fourier dans les directions x et y, et c'est aussi le nombre de points de discrétisation dans ces même directions. On choisit d'illustrer les résultats pour $N_x = 128$, $N_y = 128$ et $\delta t = 0.05$. Le temps maximum de comparaison théorique est de l'ordre d'une constante, on effectue alors des itérations pour un intervalle de temps d'ordre α^{-1}. Dans un premier temps, on observera la comparaison numérique du problème non linéaire, ainsi que du problème linéaire. On espère alors que le temps de comparaison du problème non linéaire soit meilleur que le temps théorique mais devrait être moins bon que le temps de comparaison du problème linéaire. Dans un second temps, on effectue la comparaison du problème non linéaire pour différents choix de α. Le but sera de voir si le temps de comparaison dépend ou non de α.
On effectue les tests (voir Fig.2.2) pour

$$f(x,y) = \frac{\cos(x+y)}{||\cos(x+y)||} \quad , \quad Nx = 128 \quad , \quad Ny = 128 \quad , \quad \delta t = 0.05 \quad , \quad \alpha = 10^{-3}.$$

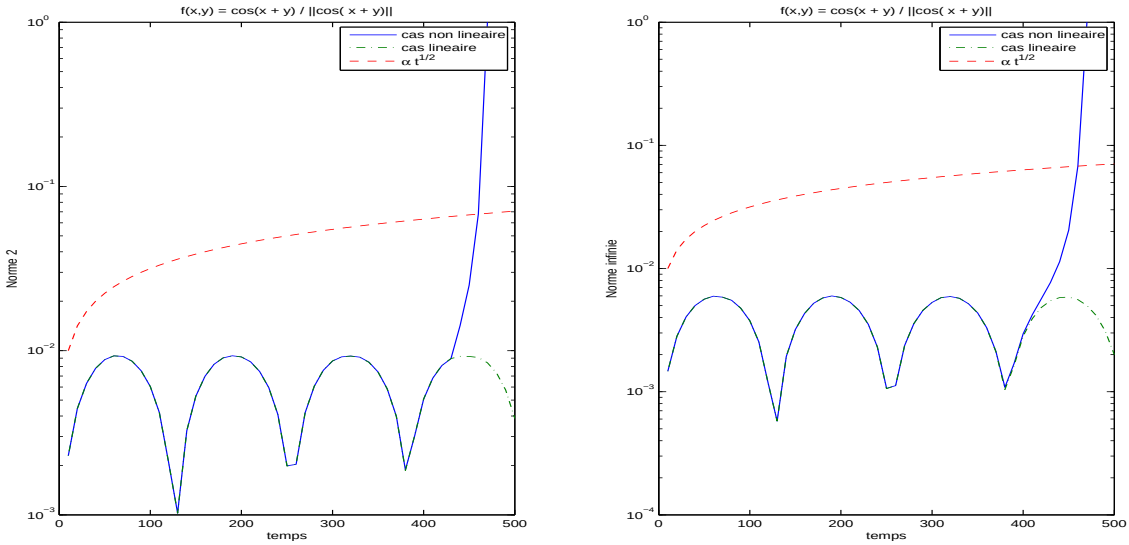


Fig. 2.2 – Comparaison numérique des normes L^2 et L^∞ pour les problèmes linéaire et non linéaire avec $\alpha = 10^{-3}$ sur l'intervalle de temps $[0, \alpha^{-1}]$ avec la donnée initiale $f(x,y) = \dfrac{\cos(x+y)}{||\cos(x+y)||}$ en utilisant l'échelle logarithmique sur Oy.

On remarque une très forte croissance des normes à peu près à partir du temps $t = 460$, c'est à dire pour $\delta = \dfrac{\ln 46}{3 \ln 10} + \dfrac{1}{3} \simeq 0,887$, ce qui est bien meilleur que le temps théorique. On peut alors effectuer les tests en augmentant de nouveau le nombre d'oscillations et on voit que la croissance des normes a lieu à peu près toujours au même moment. Comme dans le chapitre précédent, on effectue des tests pour les valeurs $\alpha_0 = 2.18 \times 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-4}$ et $\alpha_\star = 2.5 \times 10^{-4}$ On compare ces choix à la valeur précédente $\alpha = 10^{-3}$ dans nos tests (voir Fig.2.3), et on trouve δ égal à 1, 0.665, 0.739 et 0.887 respectivement.

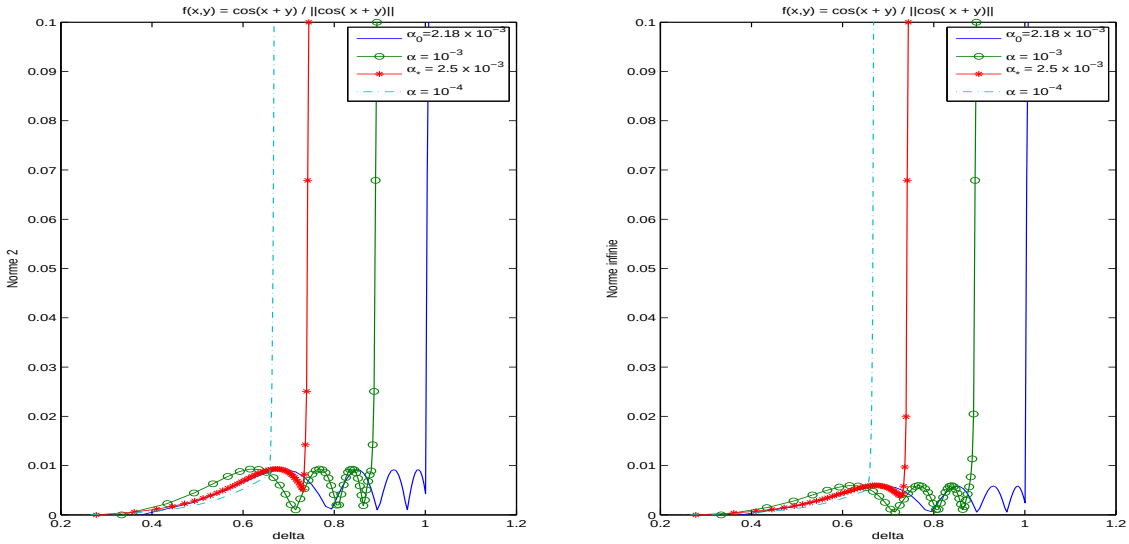


Fig. 2.3 – Comparaison numérique des normes L^2 et L^∞ pour le problème non linéaire avec $\alpha_0 = 2.18 \times 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-3}$, 2.5×10^{-4} et 10^{-4} avec la donnée initiale $f(x,y) = \dfrac{\cos(x+y)}{||\cos(x+y)||}$.

Il semblerait que la conjecture 2.3 soit vraie, on observe la même chose que dans le chapitre précédent, à savoir :

- le nombre d'oscillations de la donnée initiale dans les directions x et y, qui ne doit pas être trop élevé de part la modélisation, n'influence pas la comparaison,
- la comparaison du problème non linéaire, lors des premiers instants d'observation, a un comportement sensiblement proche de celle du problème linéaire,
- le paramètre δ est plus ou moins proche 1 que de 0, autrement dit le temps de comparaison est plus proche du temps donné par le problème linéaire que du temps théorique, selon que α est plus ou moins proche de α_0. De plus, cette valeur limite α_0 semble dépendre de la donnée initiale,
- si α était nul, les équations de 2D-BO et 2D-BO-BBM se réduisant à la seule équation des ondes, les solutions respectives seraient donc les mêmes et δ vaudrait 1,
- finalement, on constate que pour des données semblables à ce que l'on observe dans la réalité, c'est à dire pour $10^{-4} \leq \alpha \leq 10^{-3}$, les solutions des équations de 2D-BO et 2D-BO-BBM sont suffisamment proches l'une de l'autre sur un intervalle plus grand que le temps théorique pour cette modélisation du problème physique.

Deuxième partie

Propriétés Qualitatives des Solutions

Chapitre 3

Prolongement en temps des bornes H^s des solutions

3.1 Behaviour of solutions of the BO-BBM equation

The small amplitude long waves moving inside a nonhomogeneous fluid are modelled in dimension 1 by the Benjamin-Ono equation [Ben67, DA67, Ono75, Mat93]

$$u_t + u_x + \alpha u u_x - \beta H(u_{xx}) = 0,$$

where H denotes the Hilbert transform in the $x-$direction, α the quotient between the characteristic waves amplitude and the depth of the waves and β the quotient between this depth and the wavelength. We recall that α and β are positive and small constants, namely $0 < \alpha, \beta \leq 1$. Since this equation is obtained correcting, at the second order, the transport equation $u_t + u_x = 0$, we find the BO-BBM equation [BBM72]

$$u_t + u_x + \alpha u u_x + \beta H(u_{xt}) = 0. \tag{3.1}$$

First of all, we prove the global in time well-posedness of the Cauchy problem associated with the BO-BBM equation (3.1) using the Brezis-Gallouet's method.

Theorem 3.1
Let $0 < \alpha, \beta \leq 1$ and $s > 1/2$. Let $f \in H^s_0(\mathbb{T})$. Then there exists an unique global in time solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s_0(\mathbb{T}))$ of the Cauchy problem associated with (3.1) of initial datum f.

In particular, we deduce that the norm $||u(t)||_{1/2}$ is conserved by BO-BBM flow, *i.e.* for all $t \in \mathbb{R}$, $||u(t)||_{1/2} = ||u(0)||_{1/2}$. We ask then how does the other norms $H^s_0(\mathbb{T})$, for $s > 1/2$, behave. As a consequence of the local in time well-posedness of the Cauchy problem associated with the BO-BBM equation, for $0 < \alpha, \beta \leq 1$ and $s > 1/2$, there exists two constants $C_1 > 0$ and $C_2 > 0$ such that if the initial datum f, satisfying $||f||_s \leq \varepsilon$, then for $|t| \leq C_2\, \varepsilon^{-1} \dfrac{\beta}{\alpha}$, the solution u satisfies

$$||u(t)||_s \leq C_1 \varepsilon. \tag{3.2}$$

This bound can be true longer, and our result reads as follows.

Theorem 3.2
Let $0 < \alpha, \beta \leq 1$ and $s > 1/2$. There exists $0 < \varepsilon_0 < \dfrac{\beta^2}{\alpha}$, $C_1 > 0$ and $C_2 > 0$ such that if $f \in H^s_0(\mathbb{T})$ with $||f||_s \leq \varepsilon$, for $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, then the unique solution u of the periodic BO-BBM equation (3.1) with initial datum f, satisfies for $|t| \leq C_2 \left(\varepsilon^{-1}\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2$,

$$||u(t)||_s \leq C_1 \varepsilon. \tag{3.3}$$

The principle of the proof consists in rewriting the BO-BBM equation under the normal form

$$v_t + L(v) = F(v),$$

where L is a linear operator and F a multilinear operator of order strictly higher than 2, to ameliorate the quadratic nature of the nonlinearity of the BO-BBM equation. In our work, we are inspired by the method introduced by Tzvetkov [Tzv04], and F will be a trilinear operator. In a more general way, this method is called Poincaré theory of normal forms [Arn83].

The constraint of smallness on ε_0 does not depend on α and β when $\dfrac{\beta^2}{\alpha} \geq 1$. We also notice that the fact that ε_0 is chosen in the such way $\varepsilon < \dfrac{\beta^2}{\alpha}$, with $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, implies that the prolonged time $\left(\varepsilon^{-1}\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2$ is longer than the one found by the local existence $\varepsilon^{-1}\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Let us fix $\alpha = 1$. When β tends to zero, the persistence time of the bound (3.3) given by the theorem 3.2 also tends to zero. That is not surprising because the formal limit, when β tends to zero, of the BO-BBM equation is the Burgers one

$$u_t + u_x + uu_x = 0.$$

The existence time of the Cauchy problem associated with this equation, for an initial datum of size ε, is of order ε^{-1} and this time is maximum.

In concrete terms, we consider small amplitude long waves moving at the level of a thermocline. For example, in the strait of Gibraltar, the studied waves propagate at $200\,m$ deep inside the Mediterranean sea (of total depth $900\,m$), have an amplitude contained between $50\,m$ and $80\,m$, for a wavelength from $1\,km$ to $2\,km$ [Jac04], in particular $\dfrac{1}{4} = \dfrac{50}{200} \leq \alpha \leq \dfrac{80}{200} = \dfrac{2}{5}$ and $\dfrac{1}{10} = \dfrac{200}{2000} \leq \beta \leq \dfrac{200}{1000} = \dfrac{1}{5}$.

We will use the following notations : $\mathbb{T} = \mathbb{R}\,/\,(2\pi\mathbb{Z})$ is the one-dimensional torus, $\mathbb{Z}^*$ the set of nonzero integers. For $s \in \mathbb{R}$, we define $H^s_0(\mathbb{T})$ the space of zero x-mean value functions equipped with the norm

$$||u(t)||_s = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |k|^{2s}|\hat{u}(k)|^2\right)^{1/2},$$

where $\hat{u}$ denotes the Fourier transform defined by

$$\hat{u}(k) = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{-ikx} u(x) d\mu(x).$$

The measure $d\mu(x)$ is chosen proportional to the Lebesgue one on $\mathbb{T}$ and normalized such that

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \mathrm{e}^{ikx}\hat{u}(k).$$

3.1.1 Existence and Uniqueness of solution

We consider the Cauchy problem, for $t \in \mathbb{R}$, and $x \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned} u_t + u_x + \alpha u u_x + \beta H(u_{xt}) &= 0 \qquad (3.4)\\ u(x,0) &= f(x). \qquad (3.5)\end{aligned}$$

The equation (3.4) is rewritten as

$$u_t + \frac{\partial_x}{1+\beta|D_x|}u = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial_x}{1+\beta|D_x|}u^2,$$

where $\dfrac{\partial_x}{1+\beta|D_x|}$ is defined by the Fourier symbol $\sigma(k) := \dfrac{ik}{1+\beta|k|}$.

The existence and uniqueness of local in time solution are proved first of all.

Theorem 3.3
Let $0 < \alpha, \beta \leq 1$ and $s > 1/2$. Let $f \in H^s_0(\mathbb{T})$. There exists a constant $C_0 > 0$, depending only on s, such that for

$$T = \frac{1}{C_0||f||_s}\frac{\beta}{\alpha},$$

there exists an unique solution $u \in \mathcal{C}([-T,T]; H^s_0(\mathbb{T}))$ of the periodic Cauchy problem (3.4)-(3.5).
Moreover, for all $M > 0$ with $||f||_s \leq M$ and $||g||_s \leq M$, there exists a constant $C_1 > 0$ such that the solutions u and v, associated with the initial data f and g respectively, satisfy for $t \in [-T,T]$, with $T = \dfrac{1}{C_0 M}\dfrac{\beta}{\alpha}$,

$$||u(t) - v(t)||_s \leq C_1||f-g||_s.$$

Proof. The proof is done for positive time.
It is enough to remark for $u \in H^s_0(\mathbb{T})$

$$\left|\left|\frac{\partial_x}{1+\beta|D_x|}u\right|\right|^2_s = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|k|^{2s}\left(\frac{k}{1+\beta|k|}\right)^2|\hat{u}(k)|^2,$$

and since $1+\beta|k| \geq \beta|k|$, for $k \in \mathbb{Z}^*$, we deduce

$$\alpha\left|\left|\frac{\partial_x}{1+\beta|D_x|}u\right|\right|_s \leq \frac{\alpha}{\beta}||u||_s. \qquad (3.6)$$

Let $T>0$. The Duhamel formula implies that u is the solution of the Cauchy problem (3.4)-(3.5) if and only if u is the solution of the following equation, for $t\in[0,T]$,

$$u(t)=\Phi u(t):=S_tf-\frac{\alpha}{2}\int_0^t S_{t-\tau}\left(\frac{\partial_x}{1+\beta|D_x|}u^2\right)(\tau)\,d\tau, \tag{3.7}$$

with $S_tf:=\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{e}^{-it\frac{k}{1+\beta|k|}}\hat{f}(k)$. We aim to apply the fixed point theorem. We deduce from the preceding formula and the inequality (3.6) that, for $t\in[0,T]$,

$$||\Phi u(t)||_s \leq ||f||_s+\frac{\alpha}{2\beta}\int_0^t\left|\left|\frac{\partial_x}{1+\beta|D_x|}u^2\right|\right|_s(\tau)\,d\tau,$$

and since $s>1/2$, the Sobolev injection implies that there exists a constant $C_s>0$, depending only on s, such that

$$\begin{aligned}||\Phi u(t)||_s &\leq ||f||_s+\frac{\alpha}{\beta}C_s\int_0^t||u||_s^2(\tau)\,d\tau\\ &\leq ||f||_s+\frac{\alpha}{\beta}C_sT\left(\sup_{t\in[0,T]}||u(t)||_s\right)^2.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Then there exists $C_0>0$ such that for $T=\dfrac{1}{C_0||f||_s}\dfrac{\beta}{\alpha}$, the closed ball

$$\overline{B}_T:=\left\{u\in\mathcal{C}([0,T];H_0^s(\mathbb{T}))\ ;\ \sup_{t\in[0,T]}||u(t)||_s\leq 2||f||_s\right\}$$

verifies $\Phi(\overline{B}_T)\subset\overline{B}_T$. Indeed, let $u\in\overline{B}_T$, the inequality (3.8) becomes

$$||\Phi u(t)||_s\leq||f||_s+\frac{4C_s||f||_s}{C_0},$$

and $||f||_s+\dfrac{4C_s||f||_s}{C_0}\leq 2||f||_s$ if $C_0\geq 4C_s$.
Let u and v in $\overline{B}_T$. The Duhamel formula (3.7) gives, for $t\in[0,T]$,

$$||\Phi u(t)-\Phi v(t)||_s \leq \frac{\alpha}{2}\int_0^t\left|\left|\frac{\partial_x}{1+\beta|D_x|}(u^2-v^2)\right|\right|_s(\tau)\,d\tau,$$

and the Sobolev injection implies

$$\begin{aligned}||\Phi u(t)-\Phi v(t)||_s &\leq \frac{4\alpha}{\beta}C_s||f||_sT\sup_{t\in[-T,T]}||u-v||_s(t)\\ &= \frac{4C_s}{C_0}\sup_{t\in[0,T]}||u-v||_s(t).\end{aligned}$$

For $C_0>4C_s$, the map Φ is a contraction on $\overline{B}_T$. Finally, according to the fixed point theorem, there exists an unique solution u of $\Phi u(t)=u(t)$ in $\overline{B}_T$.

It remains to prove the continuity with the initial datum. Let u and v solutions of the Cauchy problem (3.4)-(3.5) with initial data f and g respectively, such that $||f||_s \leq M$ and $||g||_s \leq M$. The Duhamel formula (3.7) gives for $t \in [0,T]$, with $T = \dfrac{1}{C_0 M}\dfrac{\beta}{\alpha}$,

$$\begin{aligned} ||u(t)-v(t)||_s &\leq ||f-g||_s + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \left|\left|\frac{\partial_x}{1+\beta|D_x|}(u^2-v^2)\right|\right|_s(\tau)\,d\tau \\ &\leq ||f-g||_s + \frac{2C_s}{C_0 M}(||f||_s+||g||_s)\sup_{t\in[0,T]}||u-v||_s(t). \end{aligned}$$

Since $C_0 > 4C_s$, we find

$$||u(t)-v(t)||_s \leq ||f-g||_s + \frac{1}{2}\sup_{t\in[0,T]}||u-v||_s(t),$$

thus

$$\sup_{t\in[0,T]}||u-v||_s \leq 2||f-g||_s.$$

□

Remark 3.4
The time T of local existence, given by the preceding theorem, can be chosen independent on s. We prove that for $s > r > 1/2$, we can take $T_s = T_r = \dfrac{1}{C_r||f||_r}\dfrac{\beta}{\alpha}$. It is enough to notice that, in the same way the inequality (3.8) is found, we have for $t \in [0,T_r]$,

$$||\Phi u(t)||_s \leq ||f||_s + \frac{\alpha}{\beta}C_r T_r \sup_{t\in[0,T_r]}||u(t)||_s \sup_{t\in[0,T_r]}||u(t)||_r.$$

Remark 3.5
The time of the local well-posedness could be larger, especially in the case where $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$, but we have to impose more regularity for the initial datum [Ió r90]. More precisely, let us suppose $s > 3/2$ and $f \in H_0^s(\mathbb{T})$. Then, there exists a constant $C_0 > 0$, depending only on s, such that for

$$T = \frac{1}{C_0||f||_s}\frac{1}{\alpha},$$

there exists an unique solution $u \in \mathcal{C}([-T,T];H_0^s(\mathbb{T}))$ of the periodic Cauchy problem (3.4)-(3.5).

On the other hand, the choice of ε_0 in the theorem 3.2 also implies that the prolonged time $\left(\varepsilon^{-1}\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2$ is longer than the one found by this local existence result $\varepsilon^{-1}\dfrac{1}{\alpha}$.

Now, we prove global well-posedness of the BO-BBM equation.

Proposition 3.6
Let $s > 1/2$ and $f \in H_0^s(\mathbb{T})$. Then the solution u of the Cauchy problem (3.4)-(3.5) verify for all $t \in [-T,T]$,

$$||u(t)||_{1/2} = ||f||_{1/2}.$$

Proof. For $n \in \mathbb{N}$, we define $f_n(x) := \sum_{|k|\leq n} \mathrm{e}^{ikx}\hat{f}(k)$. Then $f_n \in H_0^{s+10}(\mathbb{T})$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tends to f in $H_0^s(\mathbb{T})$ when n tends to infinity and for $n \in \mathbb{N}$, $||f_n||_s \leq ||f||_s$. Let $u_n \in \mathcal{C}([-T_n, T_n]; H_0^{s+10}(\mathbb{T}))$ the solution of the Cauchy problem (3.4)-(3.5) of initial datum f_n. In particular $T_n \geq T$ and $u_n \in \mathcal{C}([-T, T]; H_0^{s+10}(\mathbb{T}))$. We multiply the equation (3.4) by u_n to obtain

$$||u_n(t)||_{1/2} = ||f_n||_{1/2}.$$

According to the theorem 3.3, there exists a constant $C_1 > 0$ such that, for $t \in [-T, T]$,

$$||u(t) - u_n(t)||_{1/2} \leq ||u(t) - u_n(t)||_s \leq C_1||f - f_n||_s,$$

thus $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ tends to $u(t)$ in $H_0^{1/2}(\mathbb{T})$ when n tends to infinity. By unicity of the limiting value, $||u_n(t)||_{1/2} = ||f_n||_{1/2}$ tends to $||u(t)||_{1/2} = ||f||_{1/2}$ when n tends to infinity.

□

To prove the global well-posedness, the Brezis-Gallouet method [BG80] will be used.

Lemma 3.7
Let $s > 1/2$ and $u \in \mathcal{C}([-T, T]; H_0^s(\mathbb{T}))$ the solution of the Cauchy problem (3.4)-(3.5). Then there exists $C_1 > 0$ such that

$$||u||_{L^\infty} \leq C_1 \left(1 + \sqrt{\log(1 + ||u||_s)}\right).$$

Proof. Let $R > 0$, where R is to be chosen. We write

$$\begin{aligned} ||u||_{L^\infty} \leq ||\hat{u}||_{L^1} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |\hat{u}(k)| = \sum_{|k|<R} |\hat{u}(k)| + \sum_{|k|\geq R} |\hat{u}(k)| \\ &= \sum_{0<|k|<R} \left(\frac{|k|}{|k|}\right)^{1/2} |\hat{u}(k)| + \sum_{|k|\geq R} \left(\frac{|k|}{|k|}\right)^{s} |\hat{u}(k)|. \end{aligned}$$

The Cauchy-Schwarz inequality gives

$$||u||_{L^\infty} \leq \left(\sum_{0<|k|<R} |k||\hat{u}(k)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{0<|k|<R} \frac{1}{|k|}\right)^{1/2} + \left(\sum_{|k|\geq R} |k|^{2s}|\hat{u}(k)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{|k|\geq R} \frac{1}{|k|^{2s}}\right)^{1/2}.$$

Since $s > 1/2$, there exists $\varepsilon > 0$ such that $2(s - \varepsilon) > 1$. We deduce

$$\begin{aligned} ||u||_{L^\infty} &\leq C\,||u||_{1/2}\sqrt{\log(R)} + \frac{||u||_s}{R^\varepsilon} \left(\sum_{|k|\geq R} \frac{1}{|k|^{2(s-\varepsilon)}}\right)^{1/2} \\ &\leq C\,||u||_{1/2}\sqrt{\log(R)} + C\,\frac{||u||_s}{R^\varepsilon}. \end{aligned}$$

We choose $R = (1 + ||u||_s)^{1/\varepsilon}$ to get

$$||u||_{L^\infty} \leq C\,\varepsilon^{-1/2}||u||_{1/2}\sqrt{\log(1 + ||u||_s)} + C\,\frac{||u||_s}{1 + ||u||_s}.$$

□

Theorem 3.8
Let $0 < \alpha, \beta \leq 1$ and $s > 1/2$. Let $f \in H^s_0(\mathbb{T})$. Then there exists an unique global in time solution $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s_0(\mathbb{T}))$ of the Cauchy problem (3.4)-(3.5).

Proof. We denote again T the time of the local existence given by the theorem 3.3. For $t \in [-T, T]$, the Duhamel formula is written

$$u(t) = S_t f - \frac{\alpha}{2} \int_0^t S_{t-\tau} \left(\frac{\partial_x}{1+\beta|D_x|} u^2 \right)(\tau)\, d\tau,$$

with $S_t f := \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \mathrm{e}^{ikx} \mathrm{e}^{-it\frac{k}{1+\beta|k|}} \hat{f}(k)$. We get then

$$||u(t)||_s \leq ||f||_s + \frac{\alpha}{2\beta} \int_0^t ||u(\tau)||_{L^\infty} ||u(\tau)||_s \, d\tau.$$

The preceding lemma 3.7 implies that there exists $C_1 > 0$ such that

$$||u(t)||_s \leq ||f||_s + \frac{\alpha}{2\beta} C_1 \int_0^t \left(1 + \sqrt{\log(1 + ||u(\tau)||_s)}\right) ||u(\tau)||_s \, d\tau =: \Psi(t).$$

We remark

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= \frac{\alpha}{2\beta} C_1 \left(1 + \sqrt{\log(1 + ||u(t)||_s)}\right) ||u(t)||_s \\ &\leq \frac{\alpha}{2\beta} C_1 \left(1 + \sqrt{\log(1 + \Psi(t)}\right) \Psi(t) \leq \frac{\alpha}{2\beta} C_1 \left(1 + \log(1 + \Psi(t)\right) \Psi(t), \end{aligned}$$

or in another way, there exists $C_0 > 0$ such that

$$\frac{d}{dt} \log\left(1 + \log(1 + \Psi(t)\right) \leq C_0.$$

We deduce that there exists $C_2 > 0$ and $C_3 > 0$ such that for all $t \in [-T, T]$, $||u(t)||_s \leq \mathrm{e}^{c_2 \mathrm{e}^{c_3 t}}$. In particular, $||u(t)||_s$ remains bounded on every finite time interval and the solution of the BO-BBM equation can be extended in time at all $\mathbb{R}$.

□

3.1.2 Long time bounds for the periodic BO-BBM equation

A consequence of the local well-posedness is written.

Corollary 3.9
Let $0 < \alpha, \beta \leq 1$, $s > 1/2$. Let $\varepsilon > 0$ and $f \in H^s_0(\mathbb{T})$ with $||f||_s \leq \varepsilon$. Then there exists $C_0 > 0$ and $C_1 > 0$ such that the solution u of the Cauchy problem (3.4)-(3.5) verify for $|t| \leq C_0\, \varepsilon^{-1} \dfrac{\beta}{\alpha}$,

$$||u(t)||_s \leq C_1 \varepsilon.$$

We ask if the solution remains small longer, we will use a method introduced by Tzvetkov [Tzv04].

We first prove some useful results. We recall that, for $k \in \mathbb{Z}$, $\sigma(k) = \dfrac{ik}{1+\beta|k|}$.

Lemma 3.10
This Fourier symbol σ satisfies for all k and k_1 in $\mathbb{Z}^*$

$$|\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)| \geq \beta^2 \frac{|kk_1(k-k_1)|}{(1+\beta|k|)(1+\beta|k_1|)(1+\beta|k-k_1|)}.$$

Proof. Six cases have to be studied.
i. If $k>0$, $k_1>0$ and $k-k_1>0$, we have

$$|\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)| = \frac{|\beta(2+\beta k)k_1(k-k_1)|}{(1+\beta|k|)(1+\beta|k_1|)(1+\beta|k-k_1|)}.$$

ii. If $k>0$, $k_1>0$ and $k-k_1<0$, we have

$$|\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)| = \frac{|\beta k(2+\beta k_1)(k-k_1)|}{(1+\beta|k|)(1+\beta|k_1|)(1+\beta|k-k_1|)}.$$

iii. If $k>0$ and $k_1<0$, we have

$$|\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)| = \frac{|\beta kk_1(2+\beta(k-k_1))|}{(1+\beta|k|)(1+\beta|k_1|)(1+\beta|k-k_1|)}.$$

iv. If $k<0$ and $k_1>0$, we have

$$\begin{aligned}|\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)| &= \frac{|-\beta kk_1(2-\beta(k-k_1))|}{(1+\beta|k|)(1+\beta|k_1|)(1+\beta|k-k_1|)}\\ &= \frac{\beta|k|k_1(2+\beta|k-k_1|)}{(1+\beta|k|)(1+\beta|k_1|)(1+\beta|k-k_1|)}.\end{aligned}$$

v. If $k<0$, $k_1<0$ and $k-k_1>0$, we have

$$\begin{aligned}|\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)| &= \frac{|-\beta k(2-\beta k_1)(k-k_1)|}{(1+\beta|k|)(1+\beta|k_1|)(1+\beta|k-k_1|)}\\ &= \frac{\beta|k|(2+\beta|k_1|)(k-k_1)}{(1+\beta|k|)(1+\beta|k_1|)(1+\beta|k-k_1|)}.\end{aligned}$$

vi. If $k<0$, $k_1<0$ and $k-k_1<0$, we have

$$\begin{aligned}|\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)| &= \frac{|(2-\beta k)(-\beta k_1)(k-k_1)|}{(1+\beta|k|)(1+\beta|k_1|)(1+\beta|k-k_1|)}\\ &= \frac{(2+\beta|k|)\beta|k_1|(k-k_1)}{(1+\beta|k|)(1+\beta|k_1|)(1+\beta|k-k_1|)}.\end{aligned}$$

□

Let $D := \{(k,k_1) \in \mathbb{Z}^2 \ ; \ k\neq 0, k_1 \neq 0, k \neq k_1\}$ and we define the bilinear operator

$$B(u,v) := -\frac{\alpha}{2}\sum_D \mathrm{e}^{ikx}\frac{ik}{1+\beta|k|}\frac{\hat{u}(k_1)\,\hat{v}(k-k_1)}{\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)}.$$

Lemma 3.11
Let $s > 1/2$. There exists a constant $C > 0$ such that for all u and v in $H_0^s(\mathbb{T})$

$$||B(u,v)||_s \ \leq \ C\frac{\alpha}{\beta^2}||u||_s||v||_s.$$

Proof. By duality, to prove the lemma is equivalent to prove for all $w \in \mathcal{S}(\mathbb{T})$

$$\left|\sum_D \widehat{B(u,v)}(k)\hat{w}(k)\right| \leq C\frac{\alpha}{\beta^2}\left(||u||_s||v||_s\right)||w||_{-s}. \tag{3.9}$$

Indeed, we have

$$||B(u,v)||_s^2 \ = \ \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|k|^{2s}|\widehat{B(u,v)}(k)|^2 \ = \ \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\widehat{B(u,v)}(k)\left(|k|^{2s}\widehat{B(u,v)}(k)\right).$$

We set then $\hat{w}(k) = |k|^{2s}\widehat{B(u,v)}(k)$. We write

$$||B(u,v)||_s^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\widehat{B(u,v)}(k)\,\hat{w}(k),$$

and according to the inequality (3.9)

$$||B(u,v)||_s^2 \leq C\frac{\alpha}{\beta^2}\left(||u||_s||v||_s\right)||w||_{-s}.$$

However

$$||w||_{-s} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|k|^{-2s}|k|^{4s}|\widehat{B(u,v)}(k)|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|k|^{2s}|\widehat{B(u,v)}(k)|^2\right)^{1/2} = \ ||B(u,v)||_s.$$

We define then

$$\hat{u}_1(k) = |k|^s\hat{u}(k)\ ,\ \hat{v}_1(k) = |k|^s\hat{v}(k) \ \text{ and } \ \hat{w}_1(k) = |k|^{-s}\hat{w}(k).$$

In particular, this implies

$$||u_1||_{L^2} = ||u||_s\ ,\ ||v_1||_{L^2} = ||v||_s \ \text{ and } \ ||w_1||_{L^2} = ||w||_{-s}.$$

We find then

$$\begin{aligned}\widehat{B(u,v)}(k) \ &= \ \frac{\alpha}{2}\frac{ik}{1+\beta|k|}\sum_{\substack{k_1\in\mathbb{Z}^*\\ k_1\neq k}}\frac{\hat{u}(k_1)\hat{v}(k-k_1)}{\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)}\\ &= \ \frac{\alpha}{2}\frac{ik}{1+\beta|k|}\sum_{\substack{k_1\in\mathbb{Z}^*\\ k_1\neq k}}\frac{|k|^s\hat{u}_1(k_1)\hat{v}_1(k-k_1)}{|k_1|^s|k-k_1|^s(\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k))}.\end{aligned}$$

Finally, it is enough to prove

$$\left|\frac{\alpha}{2}\sum_D\frac{ik}{1+\beta|k|}\frac{|k|^s\hat{u}_1(k_1)\hat{v}_1(k-k_1)\hat{w}_1(k)}{|k_1|^s|k-k_1|^s(\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k))}\right| \leq C\frac{\alpha}{\beta^2}\left(||u_1||_{L^2}||v_1||_{L^2}\right)||w||_{L^2}.$$

Lemma 3.12
We have for k and k_1 in D

$$\left|\frac{ik}{1+\beta|k|}\frac{1}{\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)}\right| \leq \frac{4}{\beta^2}.$$

Proof. According to the lemma 3.10, we have for k and k_1 in D,

$$\left|\frac{ik}{1+\beta|k|}\frac{1}{\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)}\right| \leq \frac{(1+\beta|k_1|)(1+\beta|k-k_1|)}{\beta^2|k_1(k-k_1)|}.$$

Since $0<\beta\leq 1$ and $k,k_1\in\mathbb{Z}^*$, we have $1+\beta|k_1|\leq 2\,|k_1|$ and $1+\beta|k-k_1|\leq 2\,|k-k_1|$, thus

$$\left|\frac{ik}{1+\beta|k|}\frac{1}{\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)}\right| \leq \frac{4}{\beta^2}.$$

□

For $s>1/2$, the triangle inequality implies

$$\frac{|k|^s}{|k_1|^s|k-k_1|^s} \leq C\left(\frac{1}{|k_1|^s}+\frac{1}{|k-k_1|^s}\right),$$

and thanks to the preceding lemma, it remains to bound

$$\frac{\alpha}{\beta^2}\sum_D \frac{|\hat{u}_1(k_1)|\,|\hat{v}_1(k-k_1)||\hat{w}_1(k)|}{|k_1|^s} + \frac{\alpha}{\beta^2}\sum_D \frac{|\hat{u}_1(k_1)|\,|\hat{v}_1(k-k_1)||\hat{w}_1(k)|}{|k-k_1|^s} =: \mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

The Cauchy-Schwarz inequality in k gives for the first term of the preceding sum

$$\mathrm{I} \leq \frac{\alpha}{\beta^2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left(\sum_{\substack{k_1\in\mathbb{Z}^*\\ k_1\neq k}}\frac{|\hat{u}_1(k_1)|\,|\hat{v}_1(k-k_1)|}{|k_1|^s}\right)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|\hat{w}_1(k)|^2\right)^{1/2},$$

then the Cauchy-Schwarz inequality in k_1 is applied again,

$$\mathrm{I} \leq \frac{\alpha}{\beta^2}\left(\sum_{\substack{k_1\in\mathbb{Z}^*\\ k_1\neq k}}\frac{1}{|k_1|^{2s}}\right)^{1/2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\sum_{\substack{k_1\in\mathbb{Z}^*\\ k_1\neq k}}|\hat{u}_1(k_1)|^2|\hat{v}_1(k-k_1)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|\hat{w}_1(k)|^2\right)^{1/2}.$$

Since $s>1/2$, there exists a constant $C>0$ such that

$$\mathrm{I} \leq C\frac{\alpha}{\beta^2}\left(||u_1||_{L^2}||v_1||_{L^2}\right)||w_1||_{L^2}.$$

By symmetry, we find similar inequality for II. □

For $\delta > 0$, we pose $U_\delta := \{u \in H_0^s(\mathbb{T}); ||u||_s < \delta\}$. For $u \in H_0^s(\mathbb{T})$, we define the operator Λ by,

$$\Lambda u := u + B(u, u).$$

The differential of this operator is given by, for all $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{T})$

$$\langle d\Lambda(u)\,,\, \varphi\rangle = \varphi + 2B(u, \varphi),$$

the preceding lemma implies that $d\Lambda$ is continuous from $H_0^s(\mathbb{T})$ to itself. Since $d\Lambda(0)$ is the identity, the inverse function theorem is applied to give the following lemma.

Lemma 3.13
Let $s > 1/2$. Then there exists $0 < \delta' < \dfrac{\beta^2}{\alpha}$, $\delta > 0$, and $C > 0$ such that for all $v \in U_\delta$, there exists an unique $u \in U_{\delta'}$ such that $\Lambda u = v$. Moreover

$$||u||_s \leq C||v||_s,$$

and the map Λ^{-1} is of class $\mathcal{C}^1$.

We aim to know which equation is satisfied by Λ, *i.e.* what is the normal form of the BO-BBM equation.

Lemma 3.14
Let $s > 1/2$. There exists a trilinear operator

$$F : H_0^s(\mathbb{T}) \times H_0^s(\mathbb{T}) \times H_0^s(\mathbb{T}) \longrightarrow H_0^s(\mathbb{T})$$

satisfying that there exists a constant $C > 0$ such that for all $(u_1, u_2, u_3) \in H_0^s(\mathbb{T}) \times H_0^s(\mathbb{T}) \times H_0^s(\mathbb{T})$

$$||F(u_1, u_2, u_3)||_s \leq C\frac{\alpha^2}{\beta^2}||u_1||_s||u_2||_s||u_3||_s,$$

and satisfying, if $u \in \mathcal{C}([-T, T]; H_0^s(\mathbb{T}))$ is solution of the equation (3.4), then v defined by, for $t \in [-T, T]$

$$v(t) := u(t) + B(u(t), u(t)),$$

is solution of

$$v_t + \frac{D_x}{1 + \beta|D_x|}v = F(u, u, u).$$

Proof. We remark first of all that $v \in \mathcal{C}([-T, T]; H_0^s(\mathbb{T}))$ according to the lemma 3.11. We write

$$\begin{aligned} v_t + \frac{D_x}{1 + \beta|D_x|}v &= u_t + \partial_t B(u, u) + \frac{D_x}{1 + \beta|D_x|}u + \frac{D_x}{1 + \beta|D_x|}B(u, u) \\ &= -\frac{\alpha}{2}\frac{D_x}{1 + \beta|D_x|}u^2 + \partial_t B(u, u) + \frac{D_x}{1 + \beta|D_x|}B(u, u). \end{aligned}$$

In one hand, we have

$$\begin{aligned}\partial_t B(u,u) &= B(u_t,u)+B(u,u_t) = 2B(u_t,u)\\ &= -\alpha\sum_D \mathrm{e}^{ikx}\frac{ik}{1+\beta|k|}\frac{\hat{u}_t(k_1)\hat{u}(k-k_1)}{\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)}.\end{aligned}$$

Since u is solution of the equation (3.4), we obtain

$$\hat{u}_t(k) = -\frac{\alpha}{2}\frac{ik}{1+\beta|k|}\widehat{u^2}(k)-\sigma(k)\hat{u}(k),$$

thus, by symmetry, we have

$$\begin{aligned}\partial_t B(u,u) &= -\frac{\alpha^2}{2}\sum_D \mathrm{e}^{ikx}\frac{kk_1}{(1+\beta|k|)(1+\beta|k_1|)}\frac{\widehat{u^2}(k_1)\hat{u}(k-k_1)}{\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)}\\ &\quad+\frac{\alpha}{2}\sum_D \mathrm{e}^{ikx}\frac{ik}{1+\beta|k|}\frac{(\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1))\hat{u}(k_1)\hat{u}(k-k_1)}{\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)}.\end{aligned}$$

In the other hand, we have

$$\frac{D_x}{1+\beta|D_x|}B(u,u) = -\frac{\alpha}{2}\sum_D \mathrm{e}^{ikx}\frac{ik}{1+\beta|k|}\frac{\sigma(k)\hat{u}(k_1)\hat{u}(k-k_1)}{\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)}.$$

The last term gives

$$-\frac{\alpha}{2}\frac{D_x}{1+\beta|D_x|}u^2 = -\frac{\alpha}{2}\sum_D \mathrm{e}^{ikx}\frac{ik}{1+\beta|k|}\hat{u}(k_1)\hat{u}(k-k_1).$$

Finally, we find

$$v_t+\frac{D_x}{1+\beta|D_x|}v = -\frac{\alpha^2}{2}\sum_D \mathrm{e}^{ikx}\frac{kk_1}{(1+\beta|k|)(1+\beta|k_1|)}\frac{\widehat{u^2}(k_1)\hat{u}(k-k_1)}{\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)}. \tag{3.10}$$

We consider then $D_1 := \{(k,k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^3; k\neq 0, k_1\neq 0, k_2\neq 0, k\neq k_1, k_1\neq k_2\}$ and we deduce from (3.10) that F is defined by

$$F(u_1,u_2,u_3) := -\frac{\alpha^2}{2}\sum_{D_1} \mathrm{e}^{ikx}\frac{kk_1}{(1+\beta|k|)(1+\beta|k_1|)}\frac{\hat{u}_1(k_2)\hat{u}_2(k_1-k_2)\hat{u}_3(k-k_1)}{\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)}. \tag{3.11}$$

Lemma 3.15
We have for k, k_1 and k_2 in D_1

$$\left|\frac{kk_1}{(1+\beta|k|)(1+\beta|k_1|)}\frac{1}{\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)}\right| \leq \frac{2}{\beta^2}.$$

Proof. According to the lemma 3.10, we have for k, k_1 and k_2 in D_1,

$$\left|\frac{kk_1}{(1+\beta|k|)(1+\beta|k_1|)}\frac{1}{\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)}\right| \leq \frac{1+\beta|k-k_1|}{\beta^2|k-k_1|},$$

and since $0<\beta\leq 1$ and $k,k_1\in\mathbb{Z}^*$, we have $1+\beta|k-k_1|\leq 2\,|k-k_1|$, thus

$$\left|\frac{kk_1}{(1+\beta|k|)(1+\beta|k_1|)}\frac{1}{\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)}\right| \leq \frac{2}{\beta^2}.$$

□

In the same manner as lemma 3.11, by duality, it is enough to bound

$$\mathrm{I} := \frac{\alpha^2}{2\beta^2}\sum_{D_1}\frac{|k|^s|\hat{u}_1(k_2)|\,|\hat{u}_2(k_1-k_2)|\,|\hat{u}_3(k-k_1)|\,|\hat{u}_4(k)|}{|k_2|^s|k_1-k_2|^s|k-k_1|^s}.$$

The Cauchy-Schwarz inequality is applied first in k to give

$$\mathrm{I} \leq \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left(\sum_{\substack{(k_1,k_2)\in(\mathbb{Z}^*)^2\\ k_1\neq k,\,k_2\neq k_1}}\frac{|k|^s|\hat{u}_1(k_2)|\,|\hat{u}_2(k_1-k_2)|\,|\hat{u}_3(k-k_1)|}{|k_2|^s|k_1-k_2|^s|k-k_1|^s}\right)\right)^{1/2}||u_4||_{L^2},$$

and then in (k_2,k_1),

$$\mathrm{I} \leq \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\sum_{\substack{(k_1,k_2)\in(\mathbb{Z}^*)^2\\ k_1\neq k,\,k_2\neq k_1}}|\hat{u}_1(k_2)|^2\,|\hat{u}_2(k_1-k_2)|^2\,|\hat{u}_3(k-k_1)|^2 \times\sum_{\substack{(k_1,k_2)\in(\mathbb{Z}^*)^2\\ k_1\neq k,\,k_2\neq k_1}}\frac{|k|^{2s}}{|k_2|^{2s}|k_1-k_2|^{2s}|k-k_1|^{2s}}\right)^{1/2}||u_4||_{L^2},$$

However, since $s>1/2$, the triangle inequality implies

$$\frac{|k|^{2s}}{|k_2|^{2s}|k_1-k_2|^{2s}|k-k_1|^{2s}} \leq C\left(\frac{1}{|k_2|^{2s}|k_1-k_2|^{2s}}+\frac{1}{|k_2|^{2s}|k-k_1|^{2s}}+\frac{1}{|k_1-k_2|^{2s}|k-k_1|^{2s}}\right),$$

thus

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^*}\sum_{\substack{(k_1,k_2)\in(\mathbb{Z}^*)^2\\ k_1\neq k,\,k_2\neq k_1}}\frac{|k|^{2s}}{|k_2|^{2s}|k_1-k_2|^{2s}|k-k_1|^{2s}}<+\infty.$$

□

Now, we prove the principal result of this chapter.

Proof of the theorem 3.2. We suppose $t > 0$, the proof is similar for negative time. Let δ and δ' the positive constants involved in the lemma 3.13.
According to the local well-posedness theorem 3.3, there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that if $f \in U_\varepsilon$, for $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, then for $t \leq C_2\, \varepsilon^{-1} \dfrac{\beta}{\alpha}$,

$$u(t) + B(u,u)(t) \in U_\delta \text{ and } u(t) \in U_{\delta'}.$$

Thus $u(t) = \Lambda^{-1} v(t)$ for $t \leq C_2\, \varepsilon^{-1} \dfrac{\beta}{\alpha} =: T$.
The Duhamel formula gives for $t \in [0, T]$

$$v(t) = S_t\left(f + B(f,f)\right) + \int_0^t S_{t-\tau}\left(F(u,u,u)\right)(\tau)\, d\tau, \tag{3.12}$$

with $S_t f := \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \mathrm{e}^{ikx} \mathrm{e}^{-it\frac{k}{1+\beta|k|}} \hat{f}(k)$. Thanks to the lemma 3.11, there exists a constant $C_1 > 0$ such that we have

$$\begin{aligned} ||S_t\left(f + B(f,f)\right)||_s &\leq ||f||_s + ||B(f,f)||_s \\ &\leq ||f||_s + C\frac{\alpha}{\beta^2}||f||_s^2 \\ &\leq C_1\varepsilon\left(1 + \varepsilon\frac{\alpha}{\beta^2}\right). \end{aligned}$$

Even if we take $\varepsilon_0 > 0$ smaller, we have $\varepsilon < \dfrac{\beta^2}{\alpha}$ and $1 < \left(1 + \varepsilon\dfrac{\alpha}{\beta^2}\right) < 2$, and we deduce

$$||S_t\left(f + B(f,f)\right)||_s \leq 2\, C_1\varepsilon. \tag{3.13}$$

The lemmas 3.13 and 3.14 imply that there exists a constant $C_3 > 0$ such that if $v(t) \in U_{\delta'}$ for $t \in [0, T]$, then

$$\left|\left|\int_0^t S_{t-\tau}\left(F(\Lambda^{-1}v, \Lambda^{-1}v, \Lambda^{-1}v)\right)(\tau)\, d\tau\right|\right|_{L^\infty([0,T];H_0^s(\mathbb{T}))} \leq C_3\frac{\alpha^2}{\beta^2}\, T\, ||v||^3_{L^\infty([0,T];H_0^s(\mathbb{T}))}. \tag{3.14}$$

Even if we take $\varepsilon_0 > 0$ smaller, we impose $2C_1\varepsilon_0 < \delta$. We set $C_0 = \dfrac{1}{54C_1^2C_3}$ and $T_0 = C_0\left(\varepsilon^{-1}\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2$. It follows then

$$||v||_{L^\infty([0,T_0];H_0^s(\mathbb{T}))} \leq 3\, C_1\varepsilon. \tag{3.15}$$

Let us suppose that the inequality (3.15) fails. Since

$$||v(0)||_s = ||f + B(f,f)||_s \leq C_1\varepsilon\left(1 + \varepsilon\frac{\alpha}{\beta^2}\right) < 3\, C_1\varepsilon,$$

by continuity with time, there exists $\tau \in [0, T_0]$ such that for $t \in [0, \tau]$

$$||v(t)||_s \leq 3\, C_1 \varepsilon \quad \text{and} \quad ||v(\tau)||_s = 3\, C_1 \varepsilon.$$

Let C the positive constant involved in the lemma 3.13, we impose also $3\, C_1 C \varepsilon_0 < \delta'$. We know that $u(t) \in U_{\delta'}$ for $|t| \leq T$, and with this choice of ε, it follows that $u(t) \in U_{\delta'}$ for $t \in [0, \tau]$. Indeed, if there exists $\tau_1 \in [0, \tau]$ such that for $t \in [0, \tau_1]$

$$||u(t)||_s < \delta' \quad \text{and} \quad ||u(\tau_1)||_s = \delta',$$

then by continuity with time and according to the lemma 3.13, we have

$$\begin{aligned} \delta' = ||u(\tau_1)||_s &= \lim_{t \to \tau_1} ||u(t)||_s \leq \sup_{0 \leq t < \tau_1} ||u(t)||_s \\ &\leq \sup_{0 \leq t < \tau_1} C||v(t)||_s \leq 3 C_1 C \varepsilon < \delta', \end{aligned}$$

which is a contradiction.
Finally, we find from the Duhamel formula (3.12)

$$||v||_{L^\infty([0,\tau];H^s_0(\mathbb{T}))} \leq 2\, C_1 \varepsilon + C_3 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \tau ||v||^3_{L^\infty([0,\tau];H^s_0(\mathbb{T}))},$$

or equivalently

$$3\, C_1 \varepsilon \leq 2\, C_1 \varepsilon + C_3 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \tau \left(3\, C_1 \varepsilon\right)^3,$$

which gives

$$\tau \geq 2\, C_0 \left(\varepsilon^{-1} \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 2T_0.$$

And this is a contradiction with the fact $\tau \in [0, T_0]$. Then the inequality (3.15) is true and using the lemma 3.13 we have for $t \in [0, T_0]$

$$||u(t)||_s \leq C||v(t)||_s \leq 3\, C_1 C \varepsilon.$$

□

Remark 3.16 *Nothing says, in this proof, that the bound in time* $\left(\varepsilon^{-1} \frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ *is optimal.*

3.2 Behaviour of solutions of the KP-II equation

The small amplitude long waves in shallow water, moving mainly in the direction x, are modelled in dimension 2 by Kadomtsev-Petviashvili equation [KP70]

$$u_t + u_x + \alpha u u_x + \sigma \beta u_{xxx} + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = 0, \tag{3.16}$$

called KP-I if $\sigma = -1$ and KP-II if $\sigma = 1$, according to whether the surface tension is or is not neglected. Here, α denotes the quotient between the characteristic waves amplitude

and the depth, β the square of the quotient between the depth and the wavelength in the $x-$direction and γ square of the quotient between the wavelengths in the two directions of the surface. We recall that α, β and γ are positive and small constants, namely $0 < \alpha, \beta, \gamma \leq 1$.
We recall that the global in time well-posedness of the KP-II equation is proved by Bourgain [Bou93c].

Theorem 3.17
Let $s \geq 0$. For every $f \in H_0^s(\mathbb{T}^2)$, there exists a global in time solution u of the KP-II equation with initial datum f, unique in a suitable class. For $s > 2$, $\mathcal{C}(\mathbb{R}; H_0^s(\mathbb{T}^2))$ can be taken as an uniqueness class.

In addition, the mass $||u(t)||_{L^2} = ||u(0)||_{L^2}$ is conserved for all time $t \in \mathbb{R}$. We ask then what is about the other norm $H_0^s(\mathbb{T}^2)$ for $s > 0$. As a consequence of the local in time well-posedness of the Cauchy problem associated with the KP equation [IN98], for $0 < \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ and $s > 2$, there exists two constants $C_1 > 0$ and $C_2 > 0$ such that if the initial datum f, satisfying $||f||_s \leq \varepsilon$, then for $|t| \leq C_2\, \varepsilon^{-1} \dfrac{1}{\alpha}$, the solution u satisfies

$$||u(t)||_s \leq C_1\, \varepsilon. \tag{3.17}$$

We ask us if this bound can be true longer, and our result reads as follows.

Theorem 3.18
Let $0 < \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ and $s > 1$. There exists $0 < \varepsilon_0 < \dfrac{\beta}{\alpha}$, $C_1 > 0$ and $C_2 > 0$ such that if $f \in H_0^s(\mathbb{T}^2)$ with $||f||_s \leq \varepsilon$, for $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, then the unique solution u of the the periodic KP equation (3.16) with initial datum f, satisfies for $|t| \leq C_2 \left(\varepsilon^{-1} \dfrac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\right)^2$,

$$||u(t)||_s \leq C_1 \varepsilon.$$

The constraint of smallness on ε_0 does not depend on α and β when $\dfrac{\beta}{\alpha} \geq 1$. We also notice that the fact that ε_0 is chosen in the such way $\varepsilon < \dfrac{\beta}{\alpha}$, with $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, implies that the prolonged time $\left(\varepsilon^{-1} \dfrac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\right)^2$ is longer than the one found by the local existence $\varepsilon^{-1} \dfrac{1}{\alpha}$. When $\alpha = \beta = \gamma = 1$, we find again the result proved by Tzvetkov [Tzv04].

In concrete terms, if we consider small amplitude long waves in shallow water moving on the Pacific ocean, *i.e.* for an average depth of 4000 metres, the waves studied must have an amplitude around $1\,m$, for a wavelength $213\,km$ [Cen03], in particular $\alpha = \dfrac{1}{4000} = 2.5 \times 10^{-4}$ and $\beta = \left(\dfrac{4000}{213000}\right)^2 \simeq 3.5 \times 10^{-4}$.

We will use the following notations : $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2$ is the one-dimensional torus, $\mathbb{Z}^*$ the set of nonzero integers. For $s \in \mathbb{R}$, we define $H_0^s(\mathbb{T}^2)$ the space of zero x-mean value

functions equipped with the norm

$$||u(t)||_s = \left(\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}} (|k|+|l|)^{2s} |\hat{u}(k,l)|^2 \right)^{1/2},$$

where $\hat{u}$ denotes the Fourier transform defined by

$$\hat{u}(k,l) = \int_{\mathbb{T}^2} \mathrm{e}^{-ikx-ily} u(x,y) d\mu(x,y).$$

The measure $d\mu(x,y)$ is chosen proportional to the Lebesgue one on $\mathbb{T}^2$ and normalized such that

$$u(x,y) = \sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{ikx+ily} \hat{u}(k,l).$$

We consider the Cauchy problem, for $t \in \mathbb{R}$ and $(x,y) \in \mathbb{T}^2$,

$$\begin{aligned} u_t + u_x + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} &= 0 \qquad (3.18) \\ u(x,y,0) &= f(x,y). \qquad (3.19) \end{aligned}$$

The equation (3.18) is rewritten as

$$u_t + L(D_x, D_y)u = -\alpha u u_x,$$

where $L(D_x, D_y)$ is defined by the Fourier symbol

$$\sigma(k,l) = i\left(k - \beta k^3 + \gamma \frac{l^2}{k}\right). \qquad (3.20)$$

This Fourier symbol σ satisfies for all k and k_1 in $\mathbb{Z}^*$, with $k \neq k_1$,

$$\sigma(k_1,l_1) + \sigma(k-k_1, l-l_1) - \sigma(k,l) = i\left(3\beta k k_1 (k-k_1) + \gamma \frac{(l_1 k - l k_1)^2}{k k_1 (k-k_1)}\right).$$

In particular, we find for k and k_1 in $\mathbb{Z}^*$, with $k \neq k_1$,

$$|\sigma(k_1,l_1) + \sigma(k-k_1, l-l_1) - \sigma(k,l)| \geq 3\beta |k k_1 (k-k_1)|. \qquad (3.21)$$

Let $D := \{(k,l,k_1,l_1) \in \mathbb{Z}^4 \ ; \ k \neq 0, k_1 \neq 0, k \neq k_1\}$ and we define the bilinear operator

$$B(u,v) := -\frac{\alpha}{2} \sum_D \mathrm{e}^{ikx+ily} \frac{ik\, \hat{u}(k_1,l_1)\, \hat{v}(k-k_1, l-l_1)}{\sigma(k_1,l_1) + \sigma(k-k_1,l-l_1) - \sigma(k,l)}.$$

We first prove some useful results.

Lemma 3.19
Let $s > 1$. There exists a constant $C > 0$ such that for all u and v in $H_0^s(\mathbb{T}^2)$

$$||B(u,v)||_s \ \leq \ C \frac{\alpha}{\beta} ||u||_s ||v||_s.$$

Proof. By duality, to prove the lemma is equivalent to prove for all $w \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^2)$

$$\left| \sum_D \widehat{B(u,v)}(k,l)\hat{w}(k,l) \right| \leq C\frac{\alpha}{\beta}\left(||u||_s||v||_s\right)||w||_{-s}. \tag{3.22}$$

Indeed, we have

$$||B(u,v)||_s^2 = \sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}} (|k|+|l|)^{2s}|\widehat{B(u,v)}|^2(k,l) = \sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}} \widehat{B(u,v)}(k,l)\left((|k|+|l|)^{2s}\widehat{B(u,v)}(k,l)\right).$$

We set then $\hat{w}(k,l) = (|k|+|l|)^{2s}\widehat{B(u,v)}(k,l)$, we write

$$||B(u,v)||_s^2 = \sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}} \widehat{B(u,v)}(k,l)\,\hat{w}(k,l),$$

and according to the inequality (3.22)

$$||B(u,v)||_s^2 \leq C\frac{\alpha}{\beta}(||u||_s||v||_s)||w||_{H_0^{-s}}.$$

However

$$\begin{aligned} ||w||_{-s} &= \left(\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}} (|k|+|l|)^{-2s}(|k|+|l|)^{4s}|\widehat{B(u,v)}|^2(k,l)\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}} (|k|+|l|)^{2s}|\widehat{B(u,v)}|^2(k,l)\right)^{1/2} = ||B(u,v)||_s. \end{aligned}$$

We define then

$$\hat{u}_1(k,l) = (|k|+|l|)^s\hat{u}(k,l)\ ,\ \hat{v}_1(k,l) = (|k|+|l|)^s\hat{v}(k,l) \text{ and } \hat{w}_1(k,l) = (|k|+|l|)^{-s}\hat{w}(k,l).$$

In particular, this implies

$$||u_1||_{L^2} = ||u||_s\ ,\ ||v_1||_{L^2} = ||v||_s \text{ and } ||w_1||_{L^2} = ||w||_{-s}.$$

We find then

$$\widehat{B(u,v)}(k,l) = \frac{\alpha}{2}ik \sum_{\substack{(k_1,l_1)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}\\ k_1\neq k}} \frac{\hat{u}(k_1,l_1)\hat{v}(k-k_1,l-l_1)}{\sigma(k_1,l_1)+\sigma(k-k_1,l-l_1)-\sigma(k,l)}$$

$$= \frac{\alpha}{2}ik \sum_{\substack{(k_1,l_1)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}\\ k_1\neq k}} \frac{(|k|+|l|)^s\hat{u}_1(k_1,l_1)\hat{v}_1(k-k_1,l-l_1)}{(|k_1|+|l_1|)^s(|k-k_1|+|l-l_1|)^s(\sigma(k_1,l_1)+\sigma(k-k_1,l-l_1)-\sigma(k,l))}.$$

Finally, it is enough to prove

$$\left|\frac{\alpha}{2}\sum_D ik\frac{(|k|+|l|)^s\hat{u}_1(k_1,l_1)\hat{v}_1(k-k_1,l-l_1)\hat{w}_1(k,l)}{(|k_1|+|l_1|)^s(|k-k_1|+|l-l_1|)^s(\sigma(k_1,l_1)+\sigma(k-k_1,l-l_1)-\sigma(k,l))}\right| \leq$$

$$C\frac{\alpha}{\beta}||u||_{L^2}||v||_{L^2}||w||_{L^2}.$$

According to (3.21), we have for (k,l) and (k_1,l_1) in D,

$$\left|\frac{ik}{\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)}\right| \leq \frac{1}{3\beta}.$$

Moreover, for $s>1$, the triangle inequality implies

$$\frac{(|k|+|l|)^s}{(|k_1|+|l_1|)^s(|k-k_1|+|l-l_1|)^s} \leq C\left(\frac{1}{(|k_1|+|l_1|)^s}+\frac{1}{(|k-k_1|+|l-l_1|)^s}\right),$$

and it remains to bound

$$\frac{\alpha}{\beta}\sum_D \frac{|\hat{u}_1(k_1,l_1)|\,|\hat{v}_1(k-k_1,l-l_1)||\hat{w}_1(k,l)|}{(|k_1|+|l_1|)^s} + \frac{\alpha}{\beta}\sum_D \frac{|\hat{u}_1(k_1,l_1)|\,|\hat{v}_1(k-k_1,l-l_1)||\hat{w}_1(k,l)|}{(|k-k_1|+|l-l_1|)^s} =: \ \mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

The Cauchy-Schwarz inequality in (k,l) gives for the first term of the preceding sum

$$\mathrm{I} \leq \frac{\alpha}{\beta}\left(\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}}\left(\sum_{\substack{(k_1,l_1)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}\\ k_1\neq k}}\frac{|\hat{u}_1(k_1,l_1)|\,|\hat{v}_1(k-k_1,l-l_1)|}{(|k_1|+|l_1|)^s}\right)^2\right)^{1/2} \times\left(\sum_{(k;l)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}}|\hat{w}_1(k,l)|^2\right)^{1/2},$$

then the Cauchy-Schwarz inequality in (k_1,l_1) is again applied

$$\mathrm{I} \leq \frac{\alpha}{\beta}\left(\sum_{\substack{(k_1,l_1)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}\\ k_1\neq k}}\frac{1}{(|k_1|+|l_1|)^{2s}}\right)^{1/2}\left(\sum_{\substack{(k,l)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}\\ (k_1,l_1)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}\\ k_1\neq k}}|\hat{u}_1(k_1,l_1)|^2|\hat{v}_1(k-k_1,l-l_1)|^2\right)^{1/2} \times\left(\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}}|\hat{w}_1(k,l)|^2\right)^{1/2}.$$

Since $s > 1$, there exists $C > 0$ such that

$$\mathrm{I} \leq C\frac{\alpha}{\beta}||u_1||_{L^2}||v_1||_{L^2}||w_1||_{L^2}.$$

By symmetry, we find similar inequality for II. □

For $\delta > 0$, we pose $U_\delta := \{u \in H_0^s(\mathbb{T}^2); ||u||_s < \delta\}$. For $u \in H_0^s(\mathbb{T}^2)$, we define the operator Λ by,

$$\Lambda u := u + B(u, u).$$

The differential of this operator is given by, for all $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^2)$

$$\langle d\Lambda(u)\,,\,\varphi\rangle = \varphi + 2B(u, \varphi),$$

the preceding lemma implies that $d\Lambda$ is continuous from $H_0^s(\mathbb{T})$ to $H_0^s(\mathbb{T})$. Since $d\Lambda(0)$ is the identity, the inverse function theorem is applied to give the following lemma.

Lemma 3.20
Let $s > 1$. Then there exists $0 < \delta' < \frac{\beta}{\alpha},$, $\delta > 0$, and $C > 0$ such that for all $v \in U_\delta$, there exists an unique $u \in U_{\delta'}$ such that $\Lambda u = v$. Moreover

$$||u||_s \leq C||v||_s,$$

and the map Λ^{-1} is of class $\mathcal{C}^1$.

We aim to know which equation is satisfied by Λ, *i.e.* what is the normal form of the KP-II equation.

Lemma 3.21
Let $s > 1$. There exists a trilinear operator

$$F : H_0^s(\mathbb{T}^2) \times H_0^s(\mathbb{T}^2) \times H_0^s(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H_0^s(\mathbb{T}^2)$$

satisfying that there exists a constant $C > 0$ such that for all $(u_1, u_2, u_3) \in H_0^s(\mathbb{T}^2) \times H_0^s(\mathbb{T}^2) \times H_0^s(\mathbb{T}^2)$

$$||F(u_1, u_2, u_3)||_s \leq C\frac{\alpha^2}{\beta}||u_1||_s||u_2||_s||u_3||_s.$$

Moreover, if $u \in \mathcal{C}([-T, T]; H_0^s(\mathbb{T}^2))$ is solution of the equation (3.18), then v defined by, for $t \in [-T, T]$

$$v(t) := u(t) + B(u(t), u(t)),$$

is solution of

$$v_t + L(D_x, D_y)v = F(u, u, u).$$

Proof. We remark first of all that $v \in \mathcal{C}([-T, T]; H_0^s(\mathbb{T}^2))$ according to the lemma 3.19. We write

$$\begin{aligned} v_t + L(D_x, D_y)v &= u_t + \partial_t B(u, u) + L(D_x, D_y)u + L(D_x, D_y)B(u, u) \\ &= -\alpha u u_x + \partial_t B(u, u) + \ L(D_x, D_y)B(u, u). \end{aligned}$$

In one hand, we have

$$\begin{aligned}\partial_t B(u,u) &= B(u_t,u)+B(u,u_t) = 2B(u_t,u)\\ &= -\alpha\sum_D \mathrm{e}^{ikx+ily}\frac{ik\,\hat{u}_t(k_1,l_1)\hat{u}(k-k_1,l-l_1)}{\sigma(k_1,l_1)+\sigma(k-k_1,l-l_1)-\sigma(k,l)}.\end{aligned}$$

Since u is solution of the equation (3.18), we obtain

$$\hat{u}_t(k,l) = -\frac{\alpha}{2}\,ik\,\widehat{u^2}(k,l) - \sigma(k,l)\hat{u}(k,l),$$

thus, by symmetry, we have

$$\begin{aligned}\partial_t B(u,u) &= -\frac{\alpha^2}{2}\sum_D \mathrm{e}^{ikx+ily}\frac{kk_1\,\widehat{u^2}(k_1,l_1)\hat{u}(k-k_1,l-l_1)}{\sigma(k_1,l_1)+\sigma(k-k_1,l-l_1)-\sigma(k,l)}\\ &\quad+\frac{\alpha}{2}\sum_D \mathrm{e}^{ikx+ily}\frac{ik\,(\sigma(k_1,l_1)+\sigma(k-k_1,l-l_1))\hat{u}(k_1,l-l_1)\hat{u}(k-k_1,l-l_1)}{\sigma(k_1,l_1)+\sigma(k-k_1,l-l_1)-\sigma(k,l)}.\end{aligned}$$

In the other hand, we have

$$L(D_x,D_y)B(u,u) = -\frac{\alpha}{2}\sum_D \mathrm{e}^{ikx+ily}\frac{ik\,\sigma(k,l)\hat{u}(k_1,l_1)\hat{u}(k-k_1,l-l_1)}{\sigma(k_1,l_1)+\sigma(k-k_1,l-l_1)-\sigma(k,l)}.$$

The last term gives

$$-\alpha u u_x = -\frac{\alpha}{2}\sum_D \mathrm{e}^{ikx+ily} ik\,\hat{u}(k_1,l_1)\hat{u}(k-k_1,l-l_1).$$

Finally, we find

$$v_t + L(D_x,D_y)v = -\frac{\alpha^2}{2}\sum_D \mathrm{e}^{ikx+ily}\frac{kk_1\,\widehat{u^2}(k_1,l_1)\hat{u}(k-k_1,l-l_1)}{\sigma(k_1,l_1)+\sigma(k-k_1,l-l_1)-\sigma(k,l)}. \tag{3.23}$$

We consider then $D_1 := \{(k,l,k_1,l_1,k_2,l_2)\in\mathbb{Z}^6; k\neq 0, k_1\neq 0, k_2\neq 0, k\neq k_1, k_1\neq k_2\}$ and we deduce from (3.23) that F is defined by

$$F(u_1,u_2,u_3) = -\frac{\alpha^2}{2}\sum_{D_1} \mathrm{e}^{ikx+ily}\frac{kk_1\,\hat{u}_1(k_2,l_2)\hat{u}_2(k_1-k_2,l_1-l_2)\hat{u}_3(k-k_1,l-l_1)}{\sigma(k_1,l_1)+\sigma(k-k_1,l-l_1)-\sigma(k,l)}. \tag{3.24}$$

According to (3.21), we have for k, k_1 and k_2 in D_1,

$$\left|\frac{kk_1}{\sigma(k_1)+\sigma(k-k_1)-\sigma(k)}\right| \leq \frac{1}{3\beta}.$$

In the same manner as lemma 3.19, by duality, it is enough to bound

$$\mathrm{I} := \frac{\alpha^2}{\beta}\sum_{D_1}\frac{(|k|+|l|)^s|\hat{u}_1(k_2,l_2)|\,|\hat{u}_2(k_1-k_2,l_1-l_2)|\,|\hat{u}_3(k-k_1,l-l_1)|\,|\hat{u}_4(k,l)|}{(|k_2|+|l_2|)^s(|k_1-k_2|+|l_1-l_2|)^s(|k-k_1|+|l-l_1|)^s}.$$

The Cauchy-Schwarz inequality is applied first in (k,l) to give

$$\mathrm{I}\leq\frac{\alpha^2}{\beta}\left(\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}}\left(\sum_{\substack{(k_1,l_1)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}\\(k_2,l_2)\in(\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z})^2\\k_1\neq k,k_2\neq k_1}}\frac{(|k|+|l|)^s|\hat{u}_1(k_2,l_2)|\,|\hat{u}_2(k_1-k_2,l_1-l_2)|\,|\hat{u}_3(k-k_1,l-l_1)|}{(|k_2|+|l_2|)^s(|k_1-k_2|+|l_1-l_2|)^s(|k-k_1|+|l-l_1|)^s}\right)^2\right)^{1/2}||u_4||_{L^2},$$

and then in (k_2,l_2,k_1,l_1)

$$\begin{aligned}\mathrm{I}\ \leq\ \frac{\alpha^2}{\beta^2}\Bigg(&\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}}\ \sum_{\substack{(k_1,l_1)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}\\(k_2,l_2)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}\\k_1\neq k,k_2\neq k_1}}|\hat{u}_1(k_2,l_2)|^2\,|\hat{u}_2(k_1-k_2,l_1-l_2)|^2\,|\hat{u}_3(k-k_1,l-l_1)|^2\\&\times\sum_{\substack{(k_1,l_1)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}\\(k_2,l_2)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}\\k_1\neq k,k_2\neq k_1}}\frac{(|k|+|l|)^{2s}}{(|k_2|+|l_2|)^{2s}(|k_1-k_2|+|l_1-l_2|)^{2s}(|k-k_1|+|l-l_1|)^{2s}}\Bigg)^{1/2}||u_4||_{L^2},\end{aligned}$$

However, since $s>1$, the triangle inequality implies

$$\begin{aligned}\frac{(|k|+|l|)^s}{(|k_2|+|l_2|)^s(|k_1-k_2|+|l_1-l_2|)^s(|k-k_1|+|l-l_1|)^s}\leq&\\C\Bigg(\frac{1}{(|k_2|+|l_2|)^s(|k_1-k_2|+|l_1-l_2|)^s}&+\frac{1}{(|k_2|+|l_2|)^s(|k-k_1|+|l-l_1|)^s}\\&+\frac{1}{(|k_1-k_2|+|l_1-l_2|)^s(|k-k_1|+|l-l_1|)^s}\Bigg),\end{aligned}$$

thus

$$\sup_{(k,l)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}}\ \sum_{\substack{(k_1,l_1)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}\\(k_2,l_2)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}\\k_1\neq k,k_2\neq k_1}}\frac{(|k|+|l|)^{2s}}{(|k_2|+|l_2|)^{2s}(|k_1-k_2|+|l_1-l_2|)^{2s}(|k-k_1|+|l-l_1|)^{2s}}<+\infty.$$

□

Now, we prove the principal result of this section.

Proof of the theorem 3.18. We suppose $t>0$, the proof is similar for negative time. Let δ and δ' the positive constants involved in the lemma 3.20.
There exists $\varepsilon_0>0$ such that if $f\in U_\varepsilon$, for $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[$, then for $t\leq T$, $u(t)+B(u,u)(t)\in U_\delta$ and $u(t)\in U_{\delta'}$. Thus $u(t)=\Lambda^{-1}v(t)$ for $t\leq T$.
The Duhamel formula gives

$$v(t)=S_t\left(f+B(f,f)\right)+\int_0^t S_{t-\tau}\left(F(u,u,u)\right)(\tau)\,d\tau,\tag{3.25}$$

with $S_t f := \sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{ikx+ily}\mathrm{e}^{-it(k-\beta k^3+\gamma\frac{l^2}{k})}\hat{f}(k,l)$. Thanks to the lemma 3.19, there exists a constant $C_1 > 0$ such that uniformly in time we have

$$\begin{aligned} ||S_t\,(f+B(f,f))||_s &\leq ||f||_s + ||B(f,f)||_s \\ &\leq ||f||_s + C\frac{\alpha}{\beta}||f||_s^2 \\ &\leq C_1\varepsilon\left(1+\varepsilon\frac{\alpha}{\beta}\right). \end{aligned}$$

Even if we take $\varepsilon_0 > 0$ smaller, we have $\varepsilon < \dfrac{\beta}{\alpha}$ and $1 < \left(1+\varepsilon\dfrac{\alpha}{\beta}\right) < 2$, and we deduce

$$||S_t\,(f+B(f,f))||_s \leq 2\,C_1\varepsilon. \tag{3.26}$$

The lemmas 3.20 and 3.21 imply that there exists a constant $C_2 > 0$ such that if $v(t) \in U_{\delta'}$ for $t \in [0,T]$ then

$$\left|\left|\int_0^t S_{t-\tau}\left(F(\Lambda^{-1}v,\Lambda^{-1}v,\Lambda^{-1}v)\right)(\tau)\,d\tau\right|\right|_{L^\infty([0,T];H^s_0(\mathbb{T}^2))} \leq C_2\frac{\alpha^2}{\beta}\,T\,||v||^3_{L^\infty([0,T];H^s_0(\mathbb{T}))}. \tag{3.27}$$

Even if we take $\varepsilon_0 > 0$ smaller, we impose $2C_1\varepsilon_0 < \delta$. We set $C_0 = \dfrac{1}{54C_1^2C_2}$ and $T_0 = C_0\left(\varepsilon^{-1}\dfrac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\right)^2$. It follows then

$$||v||_{L^\infty([0,T_0];H^s_0(\mathbb{T}^2))} \leq 3\,C_1\varepsilon. \tag{3.28}$$

Let us suppose that the inequality (3.28) fails. Since

$$||v(0)||_s = ||f+B(f,f)||_s \leq C_1\varepsilon\left(1+\varepsilon\frac{\alpha}{\beta}\right) < 3\,C_1\varepsilon,$$

by continuity with time, there exists $\tau \in [0,T_0]$ such that for $t \in [0,\tau]$

$$||v(t)||_s \leq 3\,C_1\varepsilon \quad\text{and}\quad ||v(\tau)||_s = 3\,C_1\varepsilon.$$

Let C the positive constant involved in the lemma 3.20, we impose also $3\,C_1C\varepsilon_0 < \delta'$. We know that $u(t) \in U_{\delta'}$ for $|t| \leq T$, and with this choice of ε, it follows that $u(t) \in U_{\delta'}$ for $t \in [0,\tau]$. Indeed, if there exists $\tau_1 \in [0,\tau]$ such that for $t \in [0,\tau_1]$

$$||u(t)||_s < \delta' \quad\text{and}\quad ||u(\tau_1)||_s = \delta'.$$

Then by continuity with time and according to the lemma 3.20, we have

$$\begin{aligned} \delta' = ||u(\tau_1)||_s &= \lim_{t\to\tau_1}||u(t)||_s \leq \sup_{0\leq t<\tau_1}||u(t)||_s \\ &\leq \sup_{0\leq t<\tau_1} C||v(t)||_s \leq 3C_1C\varepsilon < \delta', \end{aligned}$$

what is a contradiction.
Finally, we find

$$||v||_{L^\infty([0,\tau];H_0^s(\mathbb{T}^2))} \leq 2\,C_1\varepsilon + C_2\frac{\alpha^2}{\beta}\,\tau||v||^3_{L^\infty([0,\tau];H_0^s(\mathbb{T}^2))},$$

or equivalently

$$3\,C_1\varepsilon \leq 2\,C_1\varepsilon + C_2\frac{\alpha^2}{\beta}\tau\,(3\,C_1\varepsilon)^3\,,$$

which gives

$$\tau \geq 2\,C_0\left(\varepsilon^{-1}\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\right)^2 = 2T_0.$$

And this is a contradiction with the fact $\tau \in [0, T_0]$. Then the inequality (3.28) is true and using the lemma 3.20 gives for $t \in [0, T_0]$

$$||u(t)||_s \leq C||v(t)||_s \leq 3\,C_1C\varepsilon.$$

□

Remark 3.22 *With this proof, nothing says that the bound in time* $\left(\varepsilon^{-1}\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\right)^2$ *is optimal. Moreover, it would be interesting to expand same result for* $0 < s \leq 1$.

3.2.1 Remarks about the KP-BBM equation

Since the KP equations are correction, at the second order, of the transport equation, we find the regularized KP equations

$$v_t + v_x + \alpha v v_x - \sigma\beta v_{xxt} + \gamma\partial_x^{-1}v_{yy} = 0,$$

called KP-BBM-I if $\sigma = -1$ and KP-BBM-II if $\sigma = 1$.
The KP-BBM-I is not well posed in $L^2(\mathbb{R}^2)$, and so we study here only the KP-BBM-II equation.
We consider then the KP-BBM-II equation

$$v_t + v_x + \alpha v v_x - \beta v_{xxt} + \gamma\partial_x^{-1}v_{yy} = 0.$$

We can prove also the local well-posedness of the Cauchy problem (see chapter 1) [IN98, Iór90, Mam07, ST04]. Let $s > 2$ and $f \in H_0^s(\mathbb{T}^2)$ the initial datum. Then there exists two constants $\widetilde{C_1} > 0$ and $\widetilde{C_2} > 0$, depending only on s, such that the local well-posedness is valid until the time

$$T = \frac{1}{\widetilde{C_2}||f||_s}\frac{1}{\alpha},$$

and moreover if the initial datum satisfies $||f||_s \leq \varepsilon$, then for $|t| \leq C_2\varepsilon^{-1}\frac{1}{\alpha}$

$$||v(t)||_s \leq \widetilde{C_1}\,\varepsilon. \tag{3.29}$$

But this bound (3.29) can not be prolonged longer by using the normal form method for the KP-BBM-II equation. Indeed, if we denote for $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$, $\sigma(k,l) = i\dfrac{k+\gamma\frac{l^2}{k}}{1+\beta k^2}$, then for (k,l) and (k_1,l_1) in $\mathbb{Z}^2$, with $k \neq 0$, $k_1 \neq 0$ and $k \neq k_1$, the symbol σ verifies

$$|\sigma(k_1,l_1)+\sigma(k-k_1,l-l_1)-\sigma(k,l)| = |\,\beta(3+k_1^2-kk_1+k^2)+R\,| \times \frac{|kk_1(k-k_1)|}{(1+\beta k^2)(1+\beta k_1^2)(1+\beta(k-k_1)^2)}, \tag{3.30}$$

where $R = R(k,k_1,l,l_1,\gamma,\beta)$ can be negative, then the equality (3.30) can vanish. The first term in (3.30) can be used to find similar long time bounds for the BBM equation.

Chapitre 4

Prolongement unique des solutions

On commence par redémontrer une propriété de prolongement unique par l'intermédiaire de la méthode de Bourgain sur un exemple simple en considérant l'équation d'Airy. Les résultats de la section 4.1. ont été démontrés par Bourgain [Bou97], mais seront réécrits pour gagner en cohérence. Ensuite, on met en évidence la clé de cette méthode d'une manière plus générale. Cela nous permet de comprendre pourquoi elle ne s'applique pas tel quel à l'équation KP-BBM-II, notre manière de faire sera alors radicalement différente.

4.1 Unique continuation of solutions of the Airy equation

We consider in this section the KdV equation [KdV95]

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0,$$

modelling the small amplitude long waves in shallow water moving from left to right in the $x-$direction
The goal of this section is to answer if the solution of the Cauchy problem associated with the Airy equation has a compact support on a time interval, then this solution vanishes identically.
Saut and Scheurer [SS87] proved the unique continuation property for a general class of dispersive equation, in particular for the Korteweg- de Vries equation, by using the Carleman's method [Car33]. Here, we describe the Bourgain's method [Bou97] based on entire function estimates. Thanks to the Paley-Wiener theorem, the entire function here is given by an analytic continuation of the Fourier transform in space of the Duhamel formula. In this way, Panthee [Pan04, Pan05] proved the unique continuation property for the KP-II equation. But it is not yet clear if the proof can be expanded to the KP-BBM-II equation (see section 4.2).
The result reads as follows.

Theorem 4.1 *[Bou97]*
Let $s > 1$ integer and $u \in \mathcal{C}([-T,T]; H^s(\mathbb{R}))$ solution of the Cauchy problem associated with the Airy equation. If there exists a constant $0 < B < +\infty$, such that for all $t \in [-T,T]$

$$supp\, u(t) \subseteq [-B,B],$$

then u vanishes identically.

We will use the following notations. For $1 \leq p < \infty$, we denote $L^p(\mathbb{R})$ the space of p-power integrable functions equipped with the norm

$$||f||_{L^p} := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

$L^\infty(\mathbb{R})$ the space of functions equipped with the norm

$$||f||_\infty = \sup \operatorname{ess}(f) := \inf \{c \, ; |f(x)| \leq c \text{ almost everywhere in } \mathbb{R}\},$$

and $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ is the space of functions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ with compact support. For all positive real number s, $H^s(\mathbb{R})$ is the Sobolev space of square integrable functions, which the s first derivatives are also square integrable, equipped with the norm

$$||f||_s^2 = \int_{\mathbb{R}} (1+k^2)^s |\hat{f}(k)|^2 \, dk,$$

where the Fourier transform in space is defined by

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ikx} f(x) \, dx.$$

The notation $A \lesssim B$ means that there exists a constant $c > 0$ such that $A \leq c\, B$.

4.1.1 Estimates for an entire function

In this section, we recall the fundamental estimates introduced by Bourgain [Bou97]. The following proposition can be proved in the same way as [Bou97, lemma p.440].

Proposition 4.2
Let $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ a nonzero function. Then for all $Q > 0$ and $R > 0$, there exists $k \in \mathbb{R}$, with $|k| > R$, verifying

$$|\widehat{\Phi}(k)| \;>\; e^{-\frac{|k|}{Q}}. \tag{4.1}$$

Proof. Since $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, for $s > 1$, there exists a constant $C_1 > 0$ satisfying for all $k \in \mathbb{R}$,

$$|\widehat{\Phi}(k)| < \frac{C_1}{1+|k|^s}. \tag{4.2}$$

Let us suppose that the inequality (4.1) fails, *i.e.* there exists $Q > 0$ and $R > 0$ such that for all $k \in \mathbb{R}$, with $|k| > R$, we have

$$|\widehat{\Phi}(k)| \;\leq\; \mathrm{e}^{-\frac{|k|}{Q}}. \tag{4.3}$$

We claim that for all $k \in \mathbb{R}$

$$|\widehat{\Phi}(k)| < \frac{4C_1}{1+|k|^{s/2}} \, \mathrm{e}^{-\frac{|k|}{2(R+Q)}}. \tag{4.4}$$

First of all, we consider the case $|k| \leq R$. We have, according to the inequality (4.2), there exists $Q > 0$ and $R > 0$ so that

$$|\widehat{\Phi}(k)| < \frac{C_1}{1+|k|^s} = \frac{C_1 \mathrm{e}^{-\frac{|k|}{2(R+Q)}}}{1+|k|^{s/2}} \left(\frac{1+|k|^{s/2}}{1+|k|^s} \mathrm{e}^{\frac{|k|}{2(R+Q)}} \right),$$

and

$$\frac{1+|k|^{s/2}}{1+|k|^s} \mathrm{e}^{\frac{|k|}{2(R+Q)}} \leq 2\, \mathrm{e}^{\frac{R}{2(R+Q)}} < 4.$$

Secondly, we consider the case $|k| > R$. We define

$$R < |k_0| := \min \left\{ |k| \text{ for } k \in \mathbb{R}\,;\, |\widehat{\Phi}(k)| \geq \frac{4C_1}{1+|k|^{s/2}} \mathrm{e}^{-\frac{|k|}{2(R+Q)}} \right\}. \tag{4.5}$$

In particular, the inequality (4.3) is true for k_0 and according the inequality (4.2), we get

$$|\widehat{\Phi}(k_0)| < \left(\frac{C_1}{1+|k_0|^s} \mathrm{e}^{-\frac{|k_0|}{Q}} \right)^{1/2},$$

and since $\sqrt{2}\sqrt{1+|k_0|^s} \geq 1+|k_0|^{s/2}$, we have

$$|\widehat{\Phi}(k_0)| < \frac{\sqrt{2\,C_1}}{1+|k_0|^{s/2}} \mathrm{e}^{-\frac{|k_0|}{2Q}} < \frac{4C_1}{1+|k_0|^{s/2}} \mathrm{e}^{-\frac{|k_0|}{2(R+Q)}},$$

what contradicts the definition (4.5) of k_0.
Finally, the inequality (4.4) is true for all $k \in \mathbb{R}$. In particular, Φ has an analytic continuation to some neighborhood of the real axis. However, Φ has a compact support and thus Φ vanishes identically. □

We will need estimates for entire function proved by Bourgain [Bou97, lemma p.443] in dimension 1, and Panthee [Pan04, lemma 2.5 and cor 2.6] in dimension 2.

Lemma 4.3
Let $\widehat{\Phi} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entire function, bounded and integrable on the real axis, satisfying for all $\xi \in \mathbb{C}$

$$|\widehat{\Phi}(\xi)| \lesssim e^{B\,|Im\xi|}.$$

Then, for all $k \in \mathbb{R}$, we have

$$|\widehat{\Phi}'(k)| \lesssim B \sup_{|k_0| \geq |k|} |\widehat{\Phi}(k_0)| \left[1 + |\log \sup_{|k_0| \geq |k|} |\widehat{\Phi}(k_0)| \,| \right].$$

Corollary 4.4
Let $\widehat{\Phi} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entire function, bounded and integrable on the real axis, satisfying for all $\xi \in \mathbb{C}$

$$|\widehat{\Phi}(\xi)| \lesssim e^{B\,|Im\xi|}.$$

Then, for all $\xi = (k + im) \in \mathbb{C}$, *satisfying*

$$|m| \leq B^{-1}\Big[1 + |\log \sup_{|k_0|\geq|k|} |\widehat{\Phi}(k_0)|\,|\Big]^{-1}, \tag{4.6}$$

we have for k_1 *and* $m_1 \in \mathbb{R}$ *with* $|m_1| \leq |m|$

$$|\widehat{\Phi}'(k - k_1 + i\,m_1)| \lesssim B\left(\sup_{|k_0|\geq|k|} |\widehat{\Phi}(k_0)| + \sup_{|k_0|\geq|k-k_1|} |\widehat{\Phi}(k_0)|\right)\Big[1 + |\log \sup_{|k_0|\geq|k|} |\widehat{\Phi}(k_0)|\,|\Big].$$

We can generalize the proposition 4.2 to entire functions.

Corollary 4.5
Let $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ *a nonzero function, with supp* $\Phi \subset [-B, B]$. *Then for all* $Q > 0$ *and* $R > 0$, *there exists* $k \in \mathbb{R}$, *with* $|k| > R$, *verifying for all* $m \in \mathbb{R}$, *with* $|m| \leq B^{-1}\Big[1 + |\log|\widehat{\Phi}(k)|\,|\Big]^{-1}$,

$$|\widehat{\Phi}(k + i\,m)| \;>\; \frac{1}{2}|\widehat{\Phi}(k)| \;>\; \frac{1}{2}e^{-\frac{|k|}{Q}}. \tag{4.7}$$

Proof. We denote Q and R the constants satisfying the proposition 4.2 and such that the inequality (4.1) is true.
The decrease at infinity of the Fourier transform in the direction k implies that there exists $k \in \mathbb{R}$, with $|k| > R$, verifying

$$|\widehat{\Phi}(k)| = \sup_{|k_0|\geq|k|} |\widehat{\Phi}(k_0)|.$$

In the other hand, since Φ has a compact support included in $[-B, B]$, the Paley-Wiener theorem [Sch66, chapter VII, theorem XVI] implies that $\widehat{\Phi}$ has an analytic continuation satisfying for all $(k + i\,m) \in \mathbb{C}$,

$$|\widehat{\Phi}(k + i\,m)| \lesssim \mathrm{e}^{B|m|}.$$

Let $m \in \mathbb{R}$, we write

$$|\widehat{\Phi}(k + i\,m)| = |\widehat{\Phi}(k + i\,m) - \widehat{\Phi}(k) + \widehat{\Phi}(k)|,$$

and the triangle inequality gives

$$|\widehat{\Phi}(k + i\,m)| \geq |\widehat{\Phi}(k)| - |\widehat{\Phi}(k + i\,m) - \widehat{\Phi}(k)|.$$

However, we have

$$|\widehat{\Phi}(k + i\,m) - \widehat{\Phi}(k)| \leq |m| \sup_{|m_0|\leq|m|} |\widehat{\Phi}'(k + i\,m_0)|,$$

and it is enough to choose $m \in \mathbb{R}$ satisfying the condition (4.6), or smaller, and to apply the corollary 4.4 with $k_1 = 0$ to find

$$|\widehat{\Phi}(k + i\,m) - \widehat{\Phi}(k)| \leq \frac{1}{2} \sup_{|k_0|\geq|k|} |\widehat{\Phi}(k_0)| = \frac{1}{2}|\widehat{\Phi}(k)|.$$

Finally, we have

$$|\widehat{\Phi}(k + i\,m)| \geq \frac{1}{2}|\widehat{\Phi}(k)|,$$

and we conclude by applying the proposition 4.2. □

4.1.2 Preparation of the proof

We now apply this result to the Airy equation. Let us consider the linear Cauchy problem

$$u_t + u_{xxx} = 0 \tag{4.8}$$
$$u(x,0) = f(x). \tag{4.9}$$

We suppose $f \in H^s(\mathbb{R})$. The Fourier transform in space gives an ordinary differential equation of which the solution is, for $k \in \mathbb{R}$ and $t \in \mathbb{R}$,

$$\hat{u}(k,t) = \mathrm{e}^{itk^3}\hat{f}(k). \tag{4.10}$$

Lemma 4.6
Let $s > 1$ integer and $u \in \mathcal{C}([-T,T]; H^s(\mathbb{R}))$ solution of the Cauchy problem (4.8)-(4.9). If there exists a constant $0 < B < +\infty$ such that for all $t \in [-T,T]$

$$supp\, u(t) \subseteq [-B,B],$$

then for all $k \in \mathbb{R}$ and $0 \leq i \leq s$, we have

$$\sup_{t\in[-T,T]} |\hat{u}(k,t)| \lesssim \frac{1}{1+|k|^i}.$$

Proof. The Cauchy-Schwarz inequality implies

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|\,dx \leq 2B\left(\int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^2\,dx\right)^{1/2} = 2B||f||_{L^2}.$$

We deduce that for $k \in \mathbb{R}$

$$|\hat{u}(k,t)| \leq ||\hat{u}(t)||_\infty \leq \frac{1}{2\pi}||u(t)||_{L^1} \leq \frac{2B}{2\pi}||f||_{L^2},$$

thus

$$\sup_{t\in[-T,T]} |\hat{u}(k,t)| \leq \frac{B}{\pi}||f||_{L^2}. \tag{4.11}$$

Let $i \in \mathbb{N}$, with $0 < i \leq s$. We have for $k \in \mathbb{R}$

$$(-1)^i k^i \hat{u}(k,t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ikx}\partial_x^i u(x,t)\,dx,$$

we get

$$|k^i|\,|\hat{u}(k,t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_x^i f(x)|\,dx,$$

and thanks (4.10), the Cauchy-Schwarz inequality implies

$$|k^i|\,|\hat{u}(k,t)| \leq 2B\left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_x^i f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

In particular, we find

$$|k^i| \sup_{t\in[-T,T]} |\hat{u}(k,t)| \leq 2B||f||_{H^s}. \tag{4.12}$$

The inequalities (4.11) and (4.12) imply that

$$\sup_{t\in[-T,T]} |\hat{u}(k,t)| \lesssim \frac{1}{1+|k|^i}.$$

□

Corollary 4.7
Let $s > 1$ integer and $u \in \mathcal{C}([-T,T];H^s(\mathbb{R}))$ solution of the Cauchy problem (4.8)-(4.9) with $u(t)$, for all $t \in [-T,T]$, has a compact support include in $[-B,B]$. Let us suppose that there exists $t_0 \in [-T,T]$ such that $u(t_0) \neq 0$. Then for all $Q > 0$ and $R > 0$, there exists $k \in \mathbb{R}$, with $|k| > R$, there exists $t_1 \in [-T,T]$, verifying

$$|\hat{u}(k,t_1)| \;=\; \sup_{|k_0|\geq|k|} \sup_{t\in[-T,T]} |\hat{u}(k_0,t)|, \tag{4.13}$$

and for all $m \in \mathbb{R}$, with $|m| \leq B^{-1}\Big[1+|\log|\hat{u}(k,t_1)|\,|\Big]^{-1}$,

$$|\hat{u}(k+i\,m,t_1)| \;>\; \frac{1}{2}|\hat{u}(k,t_1)| \;>\; \frac{1}{2}e^{-\frac{|k|}{Q}}. \tag{4.14}$$

Proof. We apply the proposition 4.2 and corollary 4.5 with the function Φ defined by, for $k \in \mathbb{R}$

$$\widehat{\Phi}(k) = \sup_{t\in[-T,T]} |\hat{u}(k,t)|.$$

□

4.1.3 Final argument

Let $s > 1$ and $f \in H^s(\mathbb{R})$. We suppose for all $t \in [-T,T]$, the solution $u(t)$ of the Airy equation has a compact support included in $[-B,B]$. The Paley-Wiener theorem implies that $\hat{u}(t)$ has an analytic continuation given by, for $(k+i\,m) \in \mathbb{C}$ and $t \in [-T,T]$,

$$\hat{u}(k+i\,m,t) = \mathrm{e}^{it(k+i\,m)^3}\hat{f}(k+i\,m).$$

The Paley-Wiener theorem implies also that there exists $C_0 > 0$ such that for all $(k+i\,m) \in \mathbb{C}$ and $t \in [-T,T]$,

$$|\hat{u}(k+i\,m,t)| \leq C_0\mathrm{e}^{B|m|}. \tag{4.15}$$

In the same time, we have for $(k+i\,m) \in \mathbb{C}$ and $t \in [-T,T]$,

$$|\hat{u}(k+i\,m,t)| = \mathrm{e}^{t(-3k^2m+m^3)}|\hat{f}(k+i\,m)|. \tag{4.16}$$

Then we ask us if, for all time $t \in [-T,T]$ with $t \neq 0$, we can choose $(k+i\,m) \in \mathbb{C}$ such that the inequality (4.15) and the equality (4.16) are incompatibles. Let us verify this fact. According to the corollary 4.7, for all $Q>0$ and $R>0$, there exists $k \in \mathbb{R}$, with $|k|>R$, and $t_1 \in [-T,T]$, verifying for all $m \in \mathbb{R}$, with $|m| \leq B^{-1}\Big[1+|\log|\hat{u}(k,t_1)|\,|\Big]^{-1}$,

$$|\hat{u}(k+i\,m,t_1)| > \frac{1}{2}|\hat{u}(k,t_1)| > \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{|k|}{Q}}. \tag{4.17}$$

Let $t_2 \in [-T,T]$, with $t_2 \neq t_1$. We write, for $\delta t = t_2 - t_1$,

$$\begin{aligned} |\hat{u}(k+i\,m,t_2)| &= \mathrm{e}^{t_2(-3k^2m+m^3)}|\hat{f}(k+i\,m)| \\ &= \mathrm{e}^{\delta t(-3k^2m+m^3)}|\hat{u}(k+i\,m,t_1)| \\ &> \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\delta t(-3k^2m+m^3)-\frac{|k|}{Q}}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Even if we take Q and R larger, there exists $k \in \mathbb{R}$, with $|k|>R$, and $t_1 \in [-T,T]$ satisfying

$$|k| \;>\; B(1+|\log|\hat{u}(k,t_1)|\,|).$$

Indeed, the inequality (4.17) can be rewritten, for all $Q>0$ and $R>0$, there exists $k \in \mathbb{R}$ satisfying

$$|k| > \frac{1}{2}\left(R+Q|\log|\hat{u}(k,t_1)|\,|\right),$$

and it is enough to take R and $Q>2B$.

Then we can choose $m \in \mathbb{R}$, with $|m| = \dfrac{1}{|k|} < B^{-1}\Big[1+|\log|\hat{u}(k,t_1)|\,|\Big]^{-1}$, where $m<0$ if $\delta t>0$ and $m>0$ if $\delta t<0$. The inequalities (4.15) and (4.18) give finally that there exists $C_1>0$ and $k \in \mathbb{R}$, depending on Q and R such that

$$\mathrm{e}^{|k|\left(3|\delta t|-\frac{1}{Q}\right)} \leq C_1,$$

which is impossible if take $Q > \dfrac{1}{3|\delta t|}$ and R large.

4.2 Summary of the method

To use this method, we need to prove that for all $R>0$, there exists $k \in \mathbb{R}$, with $|k|>R$, such that

$$|L'(k)| \geq |f(k)|, \quad \text{with} \quad \lim_{|k|\to\infty}|f(k)| = +\infty. \tag{4.19}$$

where L is the symbol of the linear evolution. In the context of the linear (or nonlinear) KdV equation, we chose $f(k)=k^2$. We notice for the BBM equation

$$u_t + u_x + \alpha u u_x - \beta u_{xxt} = 0,$$

the symbol of the linear evolution is given by $L(k) = \dfrac{k}{1+\beta k^2}$, thus $L'(k) = \dfrac{1-\beta k^2}{(1+\beta k^2)^2}$ tends to zero at infinity and the condition (4.19) is not satisfied.

In dimension 2, this condition becomes for all $R > 0$, there exists $(k,l) \in \mathbb{R}^2$, with $|k| + |l| > R$, such that

$$|\partial_k L(k,l)| \geq |f(k,l)|, \quad \text{with} \quad \lim_{|k|+|l|\to\infty} |f(k,l)| = +\infty. \tag{4.20}$$

Let us see how behave the KP equations

$$u_t + u_x + \alpha u u_x + s\,\beta u_{xxx} + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = 0.$$

We have $L(k,l) = k - s\beta k^3 + \gamma l^2/k$, and

$$\partial_k L(k,l) = 1 - 3s\beta k^2 - \gamma \frac{l^2}{k^2}.$$

If $s = 1$, *i.e.* for the KP-II equation, we choose $f(k,l) = |k| + |l|$ again and the condition (4.20) is satisfied [Pan05]. If $s = -1$, *i.e.* for the KP-I equation, there exists (k,l) large ($l \sim k^2$) such that $\partial_k L(k,l)$ vanishes, and the method introduced by Bourgain no longer applies.

In a similar way, the symbol of the linear evolution is given for the KP-BBM-II equation by

$L(k,l) = \dfrac{k + \gamma l^2/k}{1+\beta k^2}$, thus

$$\partial_k L(k,l) = \frac{(1-\beta k^2)k^2 - \gamma l^2(1+3\beta k^2)}{k^2(1+\beta k^2)^2}.$$

For k and l large, $\partial_k L(k,l)$ can be very small if $|l| \ll |k|$.

In order to study the unique continuation property, we have to envisage another way.

4.3 Unique continuation of solutions of the KP-BBM-II equation

The small amplitude long waves in shallow water moving mainly in the $x-$direction are modelled in dimension 2 by the Kadomtsev-Petviashvili equations [KP70]

$$u_t + u_x + \alpha u u_x + s\beta u_{xxx} + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = 0,$$

called KP-I if $s = -1$ and KP-II if $s = 1$, according to whether the surface tension is or is not neglected, and where α denotes the quotient between the waves amplitude and the depth of the water, β the square of the quotient between the depth and the wavelength, γ the square of the quotient between the wavelength in the two directions of the plan and ∂_x^{-1} denotes the anti-derivative, defined by the Fourier symbol $\widehat{\partial_x^{-1} u}(k) := \dfrac{\hat{u}(k)}{ik}$. We recall

that $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$. Since this equation is obtained correcting, at the second order, the transport equation $u_t + u_x = 0$, we find the KP-BBM equations [BBM72]

$$u_t + u_x + \alpha u u_x - s\beta u_{xxt} + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = 0,$$

called KP-BBM-I if $s = -1$ and KP-BBM-II if $s = 1$. The KP-BBM-I is not well posed in $L^2(\mathbb{R}^2)$ and so we study here only the KP-BBM-II equation. Indeed, the KP-BBM-I equation can be rewritten

$$(1 + \beta \partial_x^2) u_t = -u_x - \alpha u u_x - \gamma \partial_x^{-1} u_{yy},$$

and the operator $(1 + \beta \partial_x^2)$ is not invertible in $L^2(\mathbb{R}^2)$.
The goal of this work is to show that if the solution of the Cauchy problem associated with the KP-BBM-II equation has a compact support on a time interval, then this solution vanishes identically.
Here, in order to approach the KP-BBM-II problem, we are inspired by a method introduced by Constantin [Con05] based on integration by parts. If we denote $X^s(\mathbb{R}^2)$ the space of functions f in $H^s(\mathbb{R}^2)$ such that $\partial_x^{-1} f$ belongs to $H^s(\mathbb{R}^2)$, provided with the norm

$$|f|_s = \left(||f||_s^2 + ||\partial_x^{-1} f||_s^2 \right)^{1/2},$$

our result reads as follows.

Theorem 4.8
Let $s > 2$ and $u \in \mathcal{C}([-T, T]; X^s(\mathbb{R}^2))$ the solution of the Cauchy problem associated with the KP-BBM-II equation. Let us suppose that there exists $0 < B < +\infty$ and $C > D$ in $\mathbb{R}$, with $\dfrac{|D - C|}{\sqrt{\beta\gamma}} < \pi$, such that for all $t \in [-T, T]$

$$supp\, u(t) \subseteq [-B, B] \times [D, C].$$

Then u vanishes identically.

We recall that, for all positive real number s, $H^s(\mathbb{R}^2)$ is the Sobolev space of square integrable functions, which the s first derivatives are also square integrable, equipped with the norm

$$||f||_s^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + k^2 + l^2)^s |\hat{f}(k, l)|^2 \, dk \, dl,$$

where the Fourier transform in space is defined by

$$\hat{f}(k, l) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-i(kx + ly)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

4.3.1 Summary of existence theory

We consider the Cauchy problem

$$u_t + u_x + \alpha u u_x - \beta u_{xxt} + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = 0 \tag{4.21}$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y). \tag{4.22}$$

This Cauchy problem is dealt in the articles of Bona, Liu and Tom [BLT02], or Saut and Tzvetkov [ST04]. They proved that for all initial datum in the subspace of $L^2(\mathbb{R}^2)$ provided with the norm $(||u||^2 + ||u_x||^2)^{1/2}$, there exists an unique global in time solution.

4.3.2 Unique continuation property

We start proving that the anti-derivative ∂_x^{-1} can be written as an integral.

Lemma 4.9
Let $s > 2$ and $u \in \mathcal{C}([-T,T]; X^s(\mathbb{R}^2))$ solution of the Cauchy problem (4.21)-(4.22) with compact support include in $[-B,B] \times [D,C]$. Then, for all $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ and $t \in [-T,T]$,

$$\partial_x^{-1} u(x,y,t) = \int_{-\infty}^{x} u(x',y,t)\, dx'.$$

Moreover u is integrable with mean zero.

Proof. Let $u \in \mathcal{C}([-T,T]; X^s(\mathbb{R}^2))$ solution of the Cauchy problem (4.21)-(4.22). We denote

$$v(x,y,t) := \partial_x^{-1} u(x,y,t) \quad \text{and} \quad w(x,y,t) := \int_{-\infty}^{x} u(x',y,t)\, dx'.$$

We deduce that, for all $t \in [-T,T]$, $\hat{v}(t) = \hat{w}(t)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, where $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ is the space of tempered distributions. Since the Fourier transform is bijective on the tempered distribution, we conclude by definition of the Sobolev spaces with respect to $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.
Let us prove now that u is integrable with mean zero. Since u has compact support, and $u \in \mathcal{C}([-T,T]; X^s(\mathbb{R}^2))$, with $s > 2$, the Cauchy-Schwarz inequality implies that u is integrable over the x and $y-$directions. Moreover, $\partial_x^{-1} u \in \mathcal{C}([-T,T]; H^s(\mathbb{R}^2))$, thus, by property of Sobolev space,

$$\lim_{x \to +\infty} \partial_x^{-1} u(x,y,t) = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y,t)\, dx.$$

□

Lemma 4.10
Let $s > 2$ and $u \in \mathcal{C}([-T,T]; X^s(\mathbb{R}^2))$ solution of the Cauchy problem (4.21)-(4.22). If for all $t \in [-T,T]$, $u(t)$ has a compact support. Then, for all $t \in [-T,T]$ and $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{x}{\sqrt{\beta}}} g(y)(u - \beta u_{xx})(x,y,t)\, dx\, dy = 0.$$

Proof. Let $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ and $t \in [-T,T]$. Since $u(t)$ has a compact support, an integration by parts gives

$$\int_{\mathbb{R}^2} G(x,y)(u - \beta u_{xx})(x,y,t)\, dx\, dy = 0,$$

if

$$G(x,y) - \beta G_{xx}(x,y) = 0.$$

We set then $G(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{\beta}}} g(y)$. □

We can prove now the main result of this paper.

Proof of the theorem 4.8. We have, thanks to the differentiation under the integral sign theorem of Lebesgue,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{\beta}}} g(y)(u-\beta u_{xx})(x,y,t)\,dx\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{\beta}}} g(y)(u_t-\beta u_{xxt})(x,y,t)\,dx\,dy, \end{aligned}$$

and since u is the solution of the equation (4.21), we find

$$0=\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{\beta}}} g(y)(u_x+\alpha u u_x+\gamma\partial_x^{-1}u_{yy})(x,y,t)\,dx\,dy.$$

According to the lemma 4.9, we apply an integration by parts in the $x-$direction to find

$$0=\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{\beta}}}\frac{1}{\sqrt{\beta}}g(y)\left(u+\frac{\alpha}{2}u^2\right)+\mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{\beta}}}\sqrt{\beta}\gamma\, g(y)\,u_{yy}(x,y,t)\,dx\,dy.$$

Two new integrations by parts for the third term in the $y-$direction give

$$0=\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{\beta}}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}g(y)+\sqrt{\beta}\gamma g''(y)\right)u(x,y,t)+\frac{\alpha}{2\sqrt{\beta}}\mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{\beta}}}g(y)u^2(x,y,t)\,dx\,dy.$$

Our aim is to solve the ordinary differential equation

$$g(y)+\beta\gamma g''(y)=0 \quad \text{with} \quad g(y)>0. \tag{4.23}$$

One solution is given by $g(y)=\cos\left(\dfrac{y+y_0}{\sqrt{\beta\gamma}}\right)$, with y_0 to be chosen. Finally, we find

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{\beta}}}\cos\left(\frac{y+y_0}{\sqrt{\beta\gamma}}\right)u^2(x,y,t)\,dx\,dy=0.$$

We choose then y_0 such that $\dfrac{y+y_0}{\sqrt{\beta\gamma}}\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. However, for all $t\in[-T,T]$, the support of $u(t)$ verifies that $\operatorname{supp} u(t)\subseteq[-B,B]\times[D,C]$, with $\dfrac{|D-C|}{\sqrt{\beta\gamma}}<\pi$, and this implies that $\mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{\beta}}}\cos\left(\dfrac{y+y_0}{\sqrt{\beta\gamma}}\right)>0$ on the support of $u(t)$. In particular u vanishes identically.

□

Remark 4.11

In a mathematical point of view, the study of the KP equations with sign in front of u_{xxx} is equivalent to study the ones with sign in front of $\partial_x^{-1}u_{yy}$. If we consider the KP equations written under the form

$$u_t+u_x+\alpha u u_x+\beta u_{xxx}+s\gamma\partial_x^{-1}u_{yy}=0,$$

changing u_x by $-u_t$ in the fourth term, we find another KP-BBM equations

$$u_t+u_x+\alpha u u_x-\beta u_{xxt}+s\gamma\partial_x^{-1}u_{yy}=0.$$

In particular, the KP-BBM-I ($s=-1$) is here well-posed [ST04], and we can expand the result of unique continuation property as follows.

Theorem 4.12
Let $s > 2$ and $u \in \mathcal{C}([-T,T];X^s(\mathbb{R}^2))$ solution of the Cauchy problem associated with the KP-BBM-I equation. Let us suppose that there exists $0 < B < +\infty$ such that for all $t \in [-T,T]$

$$supp\, u(t) \subseteq [-B,B] \times [-B,B].$$

Then u vanishes identically.

Proof. *The proof is similar to the KP-BBM-II one by taking the function $G(x,y) = e^{\frac{x}{\sqrt{\beta}}+\frac{y}{\sqrt{\beta\gamma}}}$.* □

Let us notice that there is no restriction on the support in the $y-$direction in this case.

Chapitre 5

Sur la décroissance en temps des solutions

Ce chapitre correspond à l'article [Mam08] paru dans Communications on Pure and Applied Analysis.

5.1 Decay in time of solutions of generalized BO-BBM equation

The small amplitude long waves moving inside a nonhomogeneous fluid are modelled in dimension 1 by the Benjamin-Ono equation [Ben67, DA67, Ono75]

$$u_t + u_x + uu_x - H(u_{xx}) = 0,$$

where H denotes the Hilbert transform in the direction x. Since this equation is obtained correcting, at the second order, the transport equation $u_t + u_x = 0$, we find the BO-BBM equation [BBM72]

$$u_t + u_x + uu_x + H(u_{xt}) = 0.$$

We consider here a generalization of this equation, namely the gBO-BBM equation

$$u_t + u_x + u^\rho u_x + H(u_{xt}) = 0, \tag{5.1}$$

where ρ is a nonnegative integer. We are interested here in the decay in time for small amplitude solution of the equation (5.1).
For $1 < p < 2$ and $(m_0, m_1) \in \mathbb{R}^2$, we denote $X^{m_0,m_1,p}(\mathbb{R}) = H^{m_0}(\mathbb{R}) \cap W^{m_1,p}(\mathbb{R})$ the space of functions f such that the norm

$$||f||_{X^{m_0,m_1,p}} := ||f||_{H^{m_0}} + ||f||_{W^{m_1,p}}$$

is finite. Our result reads as follows.

Theorem 5.1
Let $\rho \geq 3$. For $0 < \delta < \frac{1}{3} - \frac{8}{9\rho}$, we set $m = \frac{1}{2\delta} - 1$. We choose $1 < p < 2$ and $q > 2$ such

that $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ *and* $0<\dfrac{1}{q}<\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{3\rho(1-3\delta)}$.
Then there exists $\varepsilon>0$ *sufficiently small so that for all* $f\in X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}(\mathbb{R})$ *such that* $||f||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}}\leq\varepsilon$, *there exists an unique global in time solution* $u\in\mathcal{C}\left(\mathbb{R};X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}(\mathbb{R})\right)$ *of the gBO-BBM equation (5.1) with initial datum* f.
Moreover this solution verifies that there exists a constant $C>0$, *depending only on* m, p *and* ε *such that for all time* $t\in\mathbb{R}$, *we have*

$$||u(t)||_{L^q}+||u_x(t)||_{L^q}\leq C(1+|t|)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)}.$$

We remark that if δ approaches zero then the decay rate of the norm L^q of $u(t)$, for $q\in[2,+\infty[$, approaches $t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)}$, but we need to impose more regularity on the initial datum. We notice that $t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)}$ is the decay rate of the norm L^q of the linear evolution. We are inspired by the method described by Albert [Alb86] for generalized Benjamin-Bona-Mahony equation

$$u_t+u_x+u^\rho u_x-u_{xxt}=0.$$

In this paper, Albert shows that, for a power ρ strictly higher than 4, the solution of the preceding equation decreases in time with a rate of order $\dfrac{1}{3}$, what is the same order as the rate of the decay in time of the solution of the generalized Korteweg-de Vries equation [KdV95, Str74]

$$u_t+u_x+u^\rho u_x+u_{xxx}=0.$$

In our work, we prove that the decay rate in time of the solution of the gBO-BBM equation is of order close to $\dfrac{1}{2}$, what is equal to the decay rate in time of the solution of generalized Benjamin-Ono equation [HN99].
The Strauss method [Str74] will be used to prove this fact. For $T>0$, it consists of choosing a norm N_T, which depends on time *a priori*, such that for a solution of the gBO-BBM equation, all the derivatives act like a linear term and are included in a Sobolev norm of sufficiently high order and such that the power ρ are linked with the decay in time. More precisely, the Duhamel formula is written for the gBO-BBM equation (5.1) and for $t\geq0$

$$\Phi u(t)=S_tf-\frac{1}{\rho+1}\int_0^t S_{t-\tau}\left(\frac{D_x}{1+|D_x|}u^{\rho+1}\right)(\tau)\,d\tau,$$

where $(S_t)_{t\geq0}$ is the semi-group of the gBO-BBM evolution and $\dfrac{D_x}{1+|D_x|}$ denotes the operator defined by the Fourier multiplicator $\sigma(k):=\dfrac{ik}{1+|k|}$. The fractional Leibniz rule implies for $m\geq0$ and $1<p<+\infty$, there exists a constant $C>0$ such that for $t\in[-T,T]$,

$$||D^m\left(u^{\rho+1}\right)||_{L^p}(t)\leq C||D^mu||_{L^p}(t)\,||u||_\infty^\rho(t).$$

The first term of this inequality is a linear term and a Sobolev norm, and for the second one, we choose $\theta>0$ such that

$$||u||_\infty(t)\leq CN_T(u)(1+t)^{-\theta}.$$

Then we show that for sufficiently small initial datum, this norm N_T is bounded independently of time. The principal difficulty here is that the operator $\dfrac{D_x}{1+|D_x|}$ is not bounded in $L^1(\mathbb{R})$ but only in $L^p(\mathbb{R})$ for $1 < p < +\infty$.

We will use the following notations : for $1 \leq p < \infty$, we denote $L^p(\mathbb{R})$ the space of p-power integrable functions equipped with the norm

$$||f||_{L^p} := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

we denote $L^\infty(\mathbb{R})$ the functions space equipped with the norm

$$||f||_\infty = \sup \operatorname{ess}(f) := \inf \{c \, ; |f(x)| \leq c \text{ almost everywhere in } \mathbb{R}\}.$$

Let T an operator from $L^p(\mathbb{R})$ to $L^q(\mathbb{R})$ with $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, we define the operator norm by

$$|||T|||_{L^q} := \sup_{||f||_{L^p}=1} ||Tf||_{L^q}.$$

The Schwartz space is denoted by $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ and for $1 \leq p \leq \infty$, $W^{m,p}(\mathbb{R})$ is the Sobolev space equipped with the norm

$$||f||_{W^{m,p}} := \left|\left|(1-\partial_x^2)^{m/2} f\right|\right|_{L^p}.$$

In particular, we will note $H^m(\mathbb{R})$ the Sobolev space $W^{m,2}(\mathbb{R})$.

5.1.1 Estimates for the linear Cauchy problem

We consider the linear Cauchy problem

$$\begin{aligned} u_t + u_x + H(u_{xt}) &= 0 \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

Let us suppose that the initial datum f belongs to the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Then the Fourier transform in space implies

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(1+|k|) + ik\hat{u} &= 0 \\ \hat{u}(k,0) &= \hat{f}(k). \end{aligned}$$

The solution u of this ordinary differential equation is given by, for all $x \in \mathbb{R}$ and $t \in \mathbb{R}^*$,

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)} \hat{f}(k) \, dk, \tag{5.2}$$

with $h_\alpha(k) = \dfrac{k}{1+|k|} - \alpha k$ and $\alpha = \dfrac{x}{t}$.

We aim to prove a result similar to the Van der Corput lemma for this oscillating integral in function of time [Ste86]. For this, we use the method of stationary phase.

Lemma 5.2
For all $a \leq b$, $\lambda > 0$, $t \neq 0$ and for all function $h \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$ real valued satisfying for all $k \in [a,b]$, $|h'(k)| \geq \lambda$ and $h''(k)$ is of constant sign, we have

$$\left| \int_a^b e^{-ith(k)}\, dk \right| \leq \frac{4}{\lambda |t|}. \tag{5.3}$$

Proof. Let us show it for $t > 0$. We have

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-ith(k)}\, dk \;=\; \frac{-1}{it} \int_a^b (\mathrm{e}^{-ith(k)})' \frac{1}{h'(k)}\, dk$$

An integration by parts gives

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-ith(k)}\, dk \;=\; \frac{-1}{it} \left(\int_a^b \mathrm{e}^{-ith(k)} \frac{h''(k)}{h'(k)^2}\, dk + \left[\frac{\mathrm{e}^{-ith(k)}}{h'(k)} \right]_a^b \right).$$

We deduce from it that

$$\left| \int_a^b \mathrm{e}^{-ith(k)}\, dk \right| \;\leq\; \frac{1}{t} \left(\int_a^b \frac{|h''(k)|}{h'(k)^2}\, dk + \frac{1}{|h'(a)|} + \frac{1}{|h'(b)|} \right).$$

Since h'' is of constant sign in $[a,b]$, we have

$$\int_a^b \frac{|h''(k)|}{h'(k)^2}\, dk = \left| \int_a^b \frac{h''(k)}{h'(k)^2}\, dk \right| = \left| \frac{1}{h'(b)} - \frac{1}{h'(a)} \right|.$$

Finally, we find

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \mathrm{e}^{-ith(k)}\, dk \right| &\leq \frac{1}{t} \left(\left| \frac{1}{h'(b)} - \frac{1}{h'(a)} \right| + \frac{1}{|h'(a)|} + \frac{1}{|h'(b)|} \right) \\ &\leq \frac{4}{\lambda t}. \end{aligned}$$

Since $\left| \int_a^b \mathrm{e}^{-ith(k)}\, dk \right| = \left| \int_a^b \mathrm{e}^{ith(k)}\, dk \right|$, the result remains true for negative times. □

Lemma 5.3
For all $a \leq b$, $\lambda > 0$, $t \neq 0$ and for all function $h \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$ real valued satisfying for all $k \in [a,b]$, $|h''(k)| \geq \lambda$, we have

$$\left| \int_a^b e^{-ith(k)}\, dk \right| \leq \frac{10}{(\lambda |t|)^{1/2}}. \tag{5.4}$$

Proof. As for the preceding lemma, we can suppose that $t > 0$ and h'' is strictly negative on $[a,b]$. The proof is similar in the other case.
Since h'' is strictly negative on $[a,b]$, the function h' is strictly decreasing on $[a,b]$. We have then two possibilities according to whether the function h' vanishes or not.

Let us suppose there exists $c \in [a,b]$ such that $h'(c) = 0$. The Taylor-Lagrange theorem implies that there exists $\xi \in [a,b]$ such that for $k \in [a,b]$, we have

$$h'(k) = h'(c) + (k-c)h''(\xi).$$

Since h'' is lower bounded on $[a,b]$ by λ, we find that, for $k \in [a,b]$,

$$|h'(k)| \geq \lambda |k-c|.$$

Let $\delta > 0$, we write

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-ith(k)}\, dk = \int_a^{\max(c-\delta,a)} \mathrm{e}^{-ith(k)}\, dk + \int_{\max(c-\delta,a)}^{\min(c+\delta,b)} \mathrm{e}^{-ith(k)}\, dk + \int_{\min(c+\delta,b)}^b \mathrm{e}^{-ith(k)}\, dk.$$

If the first integral isn't null, we have, for k belonging to the integral support,

$$|h'(k)| \geq \lambda\, \delta,$$

and the lemma 5.2 implies that

$$\left| \int_a^{\max(c-\delta,a)} \mathrm{e}^{-ith(k)}\, dk \right| \leq \frac{4}{\lambda\, \delta\, t}.$$

The exactly same result is found for the third integral. For the second integral, we have directly

$$\left| \int_{\max(c-\delta,a)}^{\min(c+\delta,b)} \mathrm{e}^{-ith(k)}\, dk \right| \leq \min(c+\delta, b) - \max(c-\delta, a) \leq 2\,\delta.$$

Finally, we have

$$\left| \int_a^b \mathrm{e}^{-ith(k)}\, dk \right| \leq \frac{8}{\lambda\, \delta\, t} + 2\,\delta.$$

Let us take then $\delta = (\lambda\, t\,)^{-1/2}$ to find

$$\left| \int_a^b \mathrm{e}^{-ith(k)}\, dk \right| \leq \frac{10}{(\lambda\, t)^{1/2}}.$$

If the function h' doesn't vanish on $[a,b]$. Let us suppose first of all that h' is strictly negative on $[a,b]$. The Taylor-Lagrange theorem implies that there exists $\xi \in [a,b]$ such that for $k \in [a,b]$,

$$h'(k) = h'(a) + (k-a)h''(\xi).$$

Since h' and h'' are strictly negatives on $[a,b]$, we deduce

$$|h'(k)| \geq \lambda |k-a|.$$

Let $\delta > 0$, we write

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-ith(k)}\, dk = \int_a^{\min(a+\delta,b)} \mathrm{e}^{-ith(k)}\, dk + \int_{\min(a+\delta,b)}^b \mathrm{e}^{-ith(k)}\, dk.$$

If the second integral isn't null, we have, for k belonging to the integral support,

$$|h'(k)| \geq \lambda\,\delta,$$

and the lemma 5.2 implies that

$$\left|\int_{\min(a+\delta,b)}^{b} \mathrm{e}^{-ith(k)}\,dk\right| \leq \frac{4}{\lambda\,\delta\,t}.$$

For the first integral, we have directly

$$\left|\int_{a}^{\min(a+\delta,b)} \mathrm{e}^{-ith(k)}\,dk\right| \leq \min(a+\delta,b) - a \leq \delta.$$

Finally, we have

$$\left|\int_{a}^{b} \mathrm{e}^{-ith(k)}\,dk\right| \leq \frac{4}{\lambda\,\delta\,t} + \delta,$$

and let us take $\delta = (\lambda\,t)^{-1/2}$ to find

$$\left|\int_{a}^{b} \mathrm{e}^{-ith(k)}\,dk\right| \leq \frac{5}{(\lambda\,t)^{1/2}}.$$

If h' is positive on $[a,b]$. In the same manner as previously, there exists $\xi \in [a,b]$ such that for $k \in [a,b]$,

$$h'(k) = h'(b) + (k-b)h''(\xi) > 0,$$

thus

$$|h'(k)| \geq \lambda|k-b|.$$

Let $\delta > 0$, we write

$$\int_{a}^{b} \mathrm{e}^{-ith(k)}\,dk = \int_{a}^{\max(b-\delta,a)} \mathrm{e}^{-ith(k)}\,dk + \int_{\max(b-\delta,a)}^{b} \mathrm{e}^{-ith(k)}\,dk.$$

For the first integral, we have, for k belonging to the integral support,

$$|h'(k)| \geq \lambda\,\delta,$$

and the lemma 5.2 implies that

$$\left|\int_{a}^{\max(b-\delta,a)} \mathrm{e}^{-ith(k)}\,dk\right| \leq \frac{4}{\lambda\,\delta\,t}.$$

For the second integral, we have directly

$$\left|\int_{\max(b-\delta,a)}^{b} \mathrm{e}^{-ith(k)}\,dk\right| \leq \delta.$$

To take $\delta = (\lambda\, t)^{-1/2}$ gives

$$\left| \int_a^b \mathrm{e}^{-ith(k)}\, dk \right| \leq \frac{5}{(\lambda\, t)^{1/2}}.$$

□

Now, the Van der Corput lemma is applied with the function h_α.

Lemma 5.4
Let $0 \leq \delta < \frac{1}{3}$. For all $\alpha \in \mathbb{R}$ and all time $|t| \geq 1$, we have

$$\left| \int_{-|t|^\delta+1}^{|t|^\delta-1} e^{-ith_\alpha(k)}\, dk \right| \leq 10\sqrt{2}|t|^{-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}}.$$

Proof. We only consider the contribution for $k \geq 0$, the contribution for $k \leq 0$ being dealt with similarly.
For $k \geq 0$, we have

$$h_\alpha(k) = \frac{k}{1+k} - \alpha\, k\ ,\ h'_\alpha(k) = \frac{1}{(1+k)^2} - \alpha\ \ ,\ \ h''_\alpha(k) = \frac{-2}{(1+k)^3},$$

and h'' is strictly negative on $[0, +\infty[$. For $k \in [0, |t|^\delta - 1]$, we have

$$|h''_\alpha(k)| \ = \ \left| \frac{-2}{(1+k)^3} \right| \ = \ \frac{2}{(1+k)^3} \ \geq \ 2|t|^{-3\delta}.$$

The lemma 5.3 is then applied to find

$$\left| \int_0^{|t|^\delta-1} \mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)}\, dk \right| \ \leq \ \frac{10}{(2|t|^{-3\delta}|t|)^{1/2}} \ \leq \ 5\sqrt{2}|t|^{-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}}.$$

The second inequality is found in the same way. □

The oscillating integral (5.2) can be majorized.

Lemma 5.5
Let $0 < \delta < \frac{1}{3}$ and $m = \frac{1}{2\delta} - 1$. For all $f \in H^m(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ and all time $|t| \geq 1$, we have

$$\left| \int_{|t|^\delta-1}^{+\infty} e^{-ith_\alpha(k)}\, \hat{f}(k)\, dk \right| \leq \sqrt{\frac{2^m}{2m-1}} ||f||_{H^m} |t|^{-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}},$$

and

$$\left| \int_{-\infty}^{-|t|^\delta+1} e^{-ith_\alpha(k)}\, \hat{f}(k)\, dk \right| \leq \sqrt{\frac{2^m}{2m-1}} ||f||_{H^m} |t|^{-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}}.$$

Proof. We have

$$\left|\int_{|t|^\delta-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)}\hat{f}(k)\,dk\right| \;\leq\; \int_{|t|^\delta-1}^{+\infty}\left|\hat{f}(k)\right|\,dk \;=\; \int_{|t|^\delta-1}^{+\infty}\frac{(1+k)^m}{(1+k)^m}\left|\hat{f}(k)\right|\,dk,$$

and the Cauchy-Schwarz inequality gives

$$\left|\int_{|t|^\delta-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)}\hat{f}(k)\,dk\right| \;\leq\; \left(\int_{|t|^\delta-1}^{+\infty}(1+k)^{2m}|\hat{f}(k)|^2\,dk\right)^{1/2}\left(\int_{|t|^\delta-1}^{+\infty}\frac{dk}{(1+k)^{2m}}\right)^{1/2}.$$

In one hand, since for $0<\delta<\dfrac{1}{3}$ and $m=\dfrac{1}{2\delta}-1$, the order m of the Sobolev space is strictly higher than $\dfrac{1}{2}$ and we have

$$\begin{aligned}\left(\int_{|t|^\delta-1}^{+\infty}\frac{dk}{(1+k)^{2m}}\right)^{1/2} &= \left(\left[\frac{-1}{(2m-1)(1+k)^{2m-1}}\right]_{|t|^\delta-1}^{+\infty}\right)^{1/2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2m-1}}|t|^{\frac{\delta}{2}(1-2m)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2m-1}}|t|^{-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}}.\end{aligned}$$

In the other hand, since for $k\in\mathbb{R}$, we have $(1+k)^2\leq 2(1+k^2)$, the first integral becomes

$$\begin{aligned}\left(\int_{|t|^\delta-1}^{+\infty}(1+k)^{2m}|\hat{f}(k)|^2\,dk\right)^{1/2} &\leq \sqrt{2^m}\left(\int_{|t|^\delta-1}^{+\infty}(1+k^2)^m|\hat{f}(k)|^2\,dk\right)^{1/2}\\ &\leq \sqrt{2^m}||f||_{H^m}.\end{aligned}$$

Finally, we find

$$\left|\int_{|t|^\delta-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)}\hat{f}(k)\,dk\right| \leq \sqrt{\frac{2^m}{2m-1}}||f||_{H^m}|t|^{-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}}.$$

□

By abuse, when there is no ambiguity, we will write C and C_m the different constants appearing in the following results.

Proposition 5.6
Let $0<\delta<\dfrac{1}{3}$ and $m=\dfrac{1}{2\delta}-1$. There exists a constant $C_m>0$, depending only on m, such that for all function $f\in L^1(\mathbb{R})\cap H^m(\mathbb{R})$, $\alpha\in\mathbb{R}$ and all time $t\in\mathbb{R}$, we have

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ith_\alpha(k)}\hat{f}(k)\,dk\right| \leq C_m(||f||_{L^1}+||f||_{H^m})(1+|t|)^{-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}}. \tag{5.5}$$

Proof. Let $0<\delta<\dfrac{1}{3}$ and $|t|\geq 1$, we write

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)}\hat{f}(k)\,dk \;=\; \int_0^{|t|^\delta-1} \mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)}\hat{f}(k)\,dk + \int_{|t|^\delta-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)}\hat{f}(k)\,dk.$$

For the first integral, the Fubini theorem implies

$$\begin{aligned}\int_0^{|t|^\delta-1} \mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)}\hat{f}(k)\,dk &= \int_0^{|t|^\delta-1} \mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ikx'}f(x')\,dx'\right)dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{|t|^\delta-1}\mathrm{e}^{ik(x-x')}\mathrm{e}^{-it\frac{k}{1+k}}\,dk\right)f(x')\,dx'.\end{aligned}$$

We deduce from it that

$$\left|\int_0^{|t|^\delta-1}\mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)}\hat{f}(k)\,dk\right| \leq \left|\left|\int_0^{|t|^\delta-1}\mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)}\,dk\right|\right|_\infty ||f||_{L^1}.$$

The lemmas 5.4 and 5.5 are applied to give

$$\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)}\hat{f}(k)\,dk\right| \leq \max\left(10\sqrt{2}\,;\,\sqrt{\frac{2^m}{2m-1}}\right)\left(||f||_{L^1}+||f||_{H^m}\right)|t|^{-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}}.$$

Since $|t|\geq 1$, we have $|t|\geq\dfrac{1+|t|}{2}$, thus we obtain finally

$$\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)}\hat{f}(k)\,dk\right| \leq C_m\left(||f||_{L^1}+||f||_{H^m}\right)(1+|t|)^{-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}}. \tag{5.6}$$

The contribution for $k\leq 0$ is dealt with similarly.
Let $|t|\leq 1$. We have directly

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)}\hat{f}(k)\,dk\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(k)\right|dk = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+k^2)^{m/2}}{(1+k^2)^{m/2}}\left|\hat{f}(k)\right|dk,$$

and the Cauchy-Schwarz inequality gives

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)}\hat{f}(k)\,dk\right| \leq C_m||f||_{H^m}.$$

Since $|t|\leq 1$, we have $1\geq\dfrac{1+|t|}{2}$, thus we obtain finally

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)}\hat{f}(k)\,dk\right| \leq 2^{\frac{1}{2}-\frac{3\delta}{2}}C_m||f||_{H^m}(1+|t|)^{-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}}. \tag{5.7}$$

The inequalities (5.6) and (5.7) give the result. □

We can deduce the following corollary.

Corollary 5.7
Let $0<\delta<\dfrac{1}{3}$ and $m=\dfrac{1}{2\delta}-1$. There exists a constant $C_m>0$, depending only on m,

such that for all function $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap H^m(\mathbb{R})$, *with* $1 \leq p \leq 2$, *for all* $\alpha \in \mathbb{R}$ *and all time* $t \in \mathbb{R}$, *we have*

$$\left|\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ith_\alpha(k)} \hat{f}(k)\, dk\right|\right|_{L^q} \leq C_m(||f||_{L^p} + ||f||_{H^m})(1+|t|)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)}, \tag{5.8}$$

where $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Proof. Let $0 < \delta < \dfrac{1}{3}$ and $|t| \geq 1$, we define the operator $I_t^{(1)}$ from $L^1(\mathbb{R})$ to $L^\infty(\mathbb{R})$ by, for $f \in L^1(\mathbb{R})$ and $x \in \mathbb{R}$,

$$I_t^{(1)} f(x) := \int_0^{|t|^\delta - 1} \mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)} \hat{f}(k)\, dk.$$

The lemma 5.4 gives that there exists a constant $C > 0$ such that

$$||I_t^{(1)} f||_\infty \leq C|t|^{-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}} ||f||_{L^1},$$

thus

$$|||I_t^{(1)}|||_\infty \leq C|t|^{-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}}. \tag{5.9}$$

The operator $I_t^{(1)}$ is rewritten

$$I_t^{(1)} f(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx} \mathrm{e}^{-it\frac{k}{1+|k|}} \hat{f}(k) \mathbf{1}_{[0,|t|^\delta - 1]}\, dk,$$

thus

$$||I_t^{(1)} f||_{L^2} \leq ||f||_{L^2},$$

and

$$|||I_t^{(1)}|||_{L^2} \leq 1. \tag{5.10}$$

The Riesz-Thorin interpolation theorem then implies that, for $1 \leq p \leq 2$, and $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, the operator $I_t^{(1)}$ is continuous from $L^p(\mathbb{R})$ to $L^q(\mathbb{R})$, and we have according to the inequalities (5.9) and (5.10)

$$|||I_t^{(1)}|||_{L^q} \leq C|t|^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)}.$$

We conclude that for $f \in L^p(\mathbb{R})$,

$$||I_t^{(1)} f||_{L^q} \leq C|t|^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)} ||f||_{L^p} \leq C(1+|t|)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)} ||f||_{L^p}.$$

Let $m = \dfrac{1}{2\delta} - 1$, we define now the operator $I_t^{(2)}$ from $H^m(\mathbb{R})$ to $L^\infty(\mathbb{R})$ by, for $f \in H^m(\mathbb{R})$ and $x \in \mathbb{R}$,

$$I_t^{(2)} f(x) := \int_{|t|^\delta - 1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)} \hat{f}(k)\, dk.$$

The lemma 5.5 implies that there exists a constant $C_m > 0$, depending only on m, such that

$$||I_t^{(2)} f||_\infty \leq C_m |t|^{-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}} ||f||_{H^m}. \tag{5.11}$$

Since the operator $I_t^{(2)}$ can be rewritten

$$I_t^{(2)} f(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ikx} \mathrm{e}^{-it\frac{k}{1+|k|}} \hat{f}(k) \mathbf{1}_{[|t|^\delta - 1, +\infty]}\, dk,$$

we have

$$||I_t^{(2)} f||_{L^2} \leq ||f||_{L^2},$$

and since $m > \dfrac{1}{2}$,

$$||I_t^{(2)} f||_{L^2} \leq ||f||_{H^m}. \tag{5.12}$$

The Hölder inequality then implies that, for $2 \leq q \leq \infty$, according to the inequalities (5.11) and (5.12), we have

$$||I_t^{(2)} f||_{L^q} \ \leq \ ||I_t^{(2)} f||_\infty^{1-\frac{2}{q}} ||I_t^{(2)} f||_{L^2}^{\frac{2}{q}} \ \leq \ C_m (1+|t|)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)} ||f||_{H^m}.$$

The contribution for $k \leq 0$ is dealt with similarly.
For $|t| \leq 1$, we define the operator $I_t^{(3)}$ from $H^m(\mathbb{R})$ to $L^\infty(\mathbb{R})$ by, for $f \in H^m(\mathbb{R})$ and $x \in \mathbb{R}$,

$$I_t^{(3)} f(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_\alpha(k)} \hat{f}(k)\, dk.$$

As for the proposition 5.6, we have directly that there exists a constant $C_m > 0$, depending only on m, such that

$$||I_t^{(3)} f||_\infty \leq C_m ||f||_{H^m} (1+|t|)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}\right)}. \tag{5.13}$$

Since the operator $I_t^{(3)}$ can be rewritten

$$I_t^{(3)} f(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ikx} \mathrm{e}^{-it\frac{k}{1+|k|}} \hat{f}(k) \mathbf{1}_{[0,+\infty[}\, dk,$$

we have, because $m > \dfrac{1}{2}$,

$$||I_t^{(3)} f||_{L^2} \leq ||f||_{H^m}. \tag{5.14}$$

The Hölder inequality then implies that, for $2 \leq q \leq \infty$, according to the inequalities (5.13) and (5.14), we have

$$||I_t^{(3)} f||_{L^q} \leq ||I_t^{(3)} f||_\infty^{1-\frac{2}{q}} ||I_t^{(3)} f||_{L^2}^{\frac{2}{q}} \leq C_m ||f||_{H^m} (1+|t|)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)}.$$

□

5.1.2 Preliminary results

We now quote some useful results for the proof of our principal result. We will need the Mikhlin-Hörmander theorem proved in [Ste93, chapter 6 - proposition 4.4].

Theorem 5.8
Let $\sigma : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ satisfying for all multi-index of length $0 \leq |\alpha| < l$, where l is the smallest integer with $l > \frac{n}{2}$, and for all $k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$|\partial_k^\alpha \sigma(k)| \leq C_\alpha |k|^{-|\alpha|}.$$

Then, for all $1 < p < +\infty$, there exists a constant $C_p > 0$, depending only on p, such that for all $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, we have

$$\left|\left|\mathcal{F}^{-1}(\sigma \hat{u})\right|\right|_{L^p} \leq C_p ||u||_{L^p}.$$

The fractional Leibniz rule will be also used [KP88, lemma X.4].

Theorem 5.9
For all $m \geq 0$ and $1 < p < +\infty$, there exists a constant $C_{m,p} > 0$, depending on m and p such that for all u and v in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, we have

$$||u\, v||_{W^{m,p}} \leq C_{m,p} \left(||u||_{W^{m,p}} ||v||_\infty + ||u||_\infty ||v||_{W^{m,p}} \right).$$

We need the Sobolev inequality [Fri69, chapter 1 - theorem 9.3].

Theorem 5.10
Let $1 \leq p, q \leq +\infty$ and $0 \leq j < m$, there exists a constant $C > 0$, depending on p, q, j and m, such that for all $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, we have

$$|| \left(-\partial_x^2\right)^{\frac{j}{2}} u||_{L^r} \leq C|| \left(-\partial_x^2\right)^{\frac{m}{2}} u||_{L^p}^a ||u||_{L^q}^{1-a},$$

where $\dfrac{1}{r} = \dfrac{j}{n} + a\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}\right) + \dfrac{1-a}{q}$ *and* $\dfrac{j}{m} \leq a < 1$.

Finally, we prove an integration's lemma.

Lemma 5.11
Let $\alpha > 1$ and $\beta > 0$. Then there exists $0 < \beta_1 < 1$ and $C > 0$ such that for all time $t \geq 0$

$$\int_0^t \frac{d\tau}{(1+\tau)^\alpha (1+t-\tau)^\beta} \leq \frac{C}{(1+t)^{\beta_1}},$$

with $\beta_1 = \beta$ if $0 < \beta < 1$.

Proof. If $t = 0$, the result is obvious. Let $t > 0$, we separate the time integral in two parts

$$\int_0^t \frac{d\tau}{(1+\tau)^\alpha (1+t-\tau)^\beta} = \int_0^{t/2} \frac{d\tau}{(1+\tau)^\alpha (1+t-\tau)^\beta} + \int_{t/2}^t \frac{d\tau}{(1+\tau)^\alpha (1+t-\tau)^\beta}.$$

For the first integral, we have

$$\begin{aligned}\int_0^{t/2} \frac{d\tau}{(1+\tau)^\alpha (1+t-\tau)^\beta} &\leq \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-\beta} \int_0^{t/2} \frac{d\tau}{(1+\tau)^\alpha} \\ &\leq \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-\beta} \left[\frac{(1+\tau)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_0^{t/2},\end{aligned}$$

since $-\alpha+1<0$, we find

$$\int_0^{t/2} \frac{d\tau}{(1+\tau)^\alpha (1+t-\tau)^\beta} \leq C\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-\beta}\left[1-\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-\alpha+1}\right] \leq C\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-\beta},$$

and it is enough to remark $1+\dfrac{t}{2} \geq \dfrac{1}{2}(1+t)$ to obtain

$$\int_0^{t/2} \frac{d\tau}{(1+\tau)^\alpha (1+t-\tau)^\beta} \leq \frac{C}{(1+t)^\beta}.$$

Let us suppose first of all that $0<\beta<1$. For the second integral, we have

$$\begin{aligned}\int_{t/2}^{t} \frac{d\tau}{(1+\tau)^\alpha (1+t-\tau)^\beta} &\leq \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-\alpha} \int_{t/2}^{t} \frac{d\tau}{(1+t-\tau)^\beta} \\ &= \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-\alpha} \left[-\frac{(1+t-\tau)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_{t/2}^{t}.\end{aligned}$$

Since $-\beta+1>0$ and $-\alpha+1<0$, we have

$$\int_{t/2}^{t} \frac{d\tau}{(1+\tau)^\alpha (1+t-\tau)^\beta} \leq C\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-\alpha-\beta+1} \leq C\,(1+t)^{-\beta}.$$

Let us suppose now $\beta \geq 1$. Then for $0<\beta_1<1$, we have for all $t \geq 0$

$$\int_0^{t} \frac{d\tau}{(1+\tau)^\alpha (1+t-\tau)^\beta} \leq \int_0^{t} \frac{d\tau}{(1+\tau)^\alpha (1+t-\tau)^{\beta_1}},$$

and the first part of the proof gives the result. □

5.1.3 Existence and Uniqueness of global solution

Let us return to the nonlinear problem. We consider the Cauchy problem

$$u_t + u_x + H(u_{xt}) + u^\rho u_x = 0 \tag{5.15}$$

$$u(x,0) = f(x). \tag{5.16}$$

We recall the principal result of this chapter.

Theorem 5.12
Let $\rho \geq 3$. For $0 < \delta < \frac{1}{3} - \frac{8}{9\rho}$, we set $m = \frac{1}{2\delta} - 1$. We choose $1 < p < 2$ and $q > 2$ such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ and $0 < \frac{1}{q} < \frac{1}{2} - \frac{4}{3\rho(1-3\delta)}$.
Then there exists $\varepsilon > 0$ sufficiently small so that for all $f \in X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}(\mathbb{R})$ such that $||f||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}} \leq \varepsilon$, there exists an unique global in time solution $u \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}; X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}(\mathbb{R})\right)$ of the Cauchy problem (5.15)-(5.16).
Moreover this solution verifies that there exists a constant $C > 0$, depending on m, p and ε such that for all time $t \in \mathbb{R}$, we have

$$||u(t)||_{L^q} + ||u_x(t)||_{L^q} \leq C(1+|t|)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)}.$$

Proof. The proof is carried out for positive time. By abuse, we will write C_m and $C_{m,p}$ the different constants depending respectively on m, and on m and p.
To simplify the writings, we denote $\frac{D_x}{1+|D_x|}$ the operator defined by the Fourier multiplicator $\sigma(k) := \frac{ik}{1+|k|}$, and we denote also $0 < \theta = \left(\frac{1}{2} - \frac{3\delta}{2}\right)\left(1 - \frac{2}{q}\right) < \frac{1}{2}$.
We remark that

$$\frac{3\theta\rho}{4} > 1. \tag{5.17}$$

Indeed we have

$$\frac{3\theta\rho}{4} > 1 \iff \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{3\delta}{2}\right)\left(1 - \frac{2}{q}\right)\rho > 1 \iff (1-3\delta)\left(1-\frac{2}{q}\right) > \frac{8}{3\rho},$$

since $1 - 3\delta > 0$, we find

$$\frac{3\theta\rho}{4} > 1 \iff \frac{1}{q} < \frac{1}{2} - \frac{4}{3\rho(1-3\delta)},$$

which inequality is the assumption on q.
The Duhamel formula implies that u is the solution the gBO-BBM equation (5.15)-(5.16) if and only if u is the solution of the following equation, for $t \geq 0$

$$u(t) \;=\; \Phi u(t) := S_t f - \frac{1}{\rho+1}\int_0^t S_{t-\tau}\left(\frac{D_x}{1+|D_x|}u^{\rho+1}\right)(\tau)\,d\tau, \tag{5.18}$$

where $S_t f := \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ikx - it\frac{k}{1+|k|}}\hat{f}(k)\,dk$.
We remark first of all that in one hand, we have for $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{D_x}{1+|D_x|}u^{\rho+1}\right|\right|_{H^m} &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^m\left(\frac{ik}{1+|k|}\right)^2|\widehat{u^{\rho+1}}|^2\,dk\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^m|\widehat{u^{\rho+1}}|^2\,dk\right)^{1/2} = ||u^{\rho+1}||_{H^m}. \end{aligned}\tag{5.19}$$

In the other hand, we have

$$\text{for } k \geq 0, \quad |\sigma'(k)| = \frac{1}{(1+k)^2} \quad \text{and for } k \leq 0, \quad |\sigma'(k)| = \frac{1}{(1-k)^2}.$$

The Mikhlin-Hörmander theorem 5.8 is applied to give, for $1 < p < 2$, there exists a constant $C_p > 0$ depending only on p such that

$$\left|\left| \frac{D_x}{1+|D_x|} u^{\rho+1} \right|\right|_{L^p} \leq C_p ||u^{\rho+1}||_{L^p}. \tag{5.20}$$

Let $T > 0$, we define the norm N_T by, for $u \in X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}(\mathbb{R})$,

$$N_T(u) := \sup_{0 \leq \tau \leq T} \left[(||u||_{L^q}(\tau) + ||u_x||_{L^q}(\tau))(1+\tau)^\theta + ||u||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}}(\tau) \right]. \tag{5.21}$$

We will proved separately some technical lemmas.

Lemma 5.13
There exists a constant $C_{m,p} > 0$ such that for all u and v in $X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}(\mathbb{R})$, we have

$$||\Phi u - \Phi v||_{L^q}(t) \leq C_{m,p} \left(\sum_{i=0}^{\rho} N_T(u)^{\rho-i} N_T(v)^i \right) (1+t)^{-\theta} N_T(u-v), \tag{5.22}$$

and

$$||(\Phi u - \Phi v)_x||_{L^q}(t) \leq C_{m,p} \left(\sum_{i=0}^{\rho} N_T(u)^{\rho-i} N_T(v)^i \right) (1+t)^{-\theta} N_T(u-v). \tag{5.23}$$

Proof. Let u and v two elements of $X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}(\mathbb{R})$, the Duhamel formula gives

$$||\Phi u - \Phi v||_{L^q} \quad \leq \quad \frac{1}{\rho+1} \int_0^t \left|\left| S_{t-\tau} \left(\frac{D_x}{1+|D_x|} (u^{\rho+1} - v^{\rho+1}) \right) \right|\right|_{L^q} (\tau)\, d\tau.$$

The corollary 5.7 implies that there exists a constant $C_m > 0$, depending only on m, such that

$$||\Phi u - \Phi v||_{L^q} \leq C_m \int_0^t \frac{\left(\left|\left| \frac{D_x}{1+|D_x|} (u^{\rho+1} - v^{\rho+1}) \right|\right|_{L^p} + \left|\left| \frac{D_x}{1+|D_x|} (u^{\rho+1} - v^{\rho+1}) \right|\right|_{H^m} \right)(\tau)}{(1+t-\tau)^\theta} \, d\tau,$$

and the inequalities (5.19) and (5.20) imply

$$||\Phi u - \Phi v||_{L^q} \leq C_{m,p} \int_0^t \frac{\left(||u^{\rho+1} - v^{\rho+1}||_{L^p} + ||u^{\rho+1} - v^{\rho+1}||_{H^m} \right)(\tau)}{(1+t-\tau)^\theta} \, d\tau.$$

From now, when there is no ambiguity, we will use the following notation : for any positive A and B, the notation $A \lesssim B$ means that there exists a constant $C > 0$ such that $A \leq C\, B$.

Since $u^{\rho+1}-v^{\rho+1}=(u-v)\sum_{i=0}^{\rho}u^{\rho-i}v^i$, we have according to the fractional Leibniz theorem 5.9 with $p=2$ and the Minkowski inequality

$$\begin{aligned}||u^{\rho+1}-v^{\rho+1}||_{H^m}(\tau) &\lesssim ||u-v||_{H^m}\sum_{i=0}^{\rho}||u^{\rho-i}v^i||_{\infty}(\tau)+||u-v||_{\infty}\sum_{i=0}^{\rho}||u^{\rho-i}v^i||_{H^m}(\tau)\\ &= \mathrm{I}\,(\tau)+\mathrm{II}\,(\tau).\end{aligned}$$

On the other hand, the Sobolev inequality 5.10 with $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $r=\infty$, $j=0$, $a=\frac{1}{4}$ and $m=3-\frac{2}{p}$ gives

$$||u||_{\infty} \;\leq\; C_p\,||u||^{1/4}_{W^{3-\frac{2}{p},p}}||u||^{3/4}_{L^q}. \tag{5.24}$$

According to the definition (5.21) of the norm N_T, we can see that the decay in time will be linked to the norm L^q and the power $3/4$. We deduce from the inequality (5.24) that for $\mathrm{I}\,(\tau)$, we have

$$\begin{aligned}\mathrm{I}\,(\tau) &\lesssim ||u-v||_{H^m}\sum_{i=0}^{\rho}\left(||u||^{3/4}_{L^q}||u||^{1/4}_{W^{3-\frac{2}{p},p}}\right)^{\rho-i}\left(||v||^{3/4}_{L^q}||v||^{1/4}_{W^{3-\frac{2}{p},p}}\right)^{i}(\tau)\\ &\lesssim ||u-v||_{H^m}\sum_{i=0}^{\rho}\left(||u||_{L^q}\frac{(1+\tau)^{\theta}}{(1+\tau)^{\theta}}\right)^{\frac{3(\rho-i)}{4}}||u||^{\frac{\rho-i}{4}}_{W^{3-\frac{2}{p},p}}\left(||v||_{L^q}\frac{(1+\tau)^{\theta}}{(1+\tau)^{\theta}}\right)^{\frac{3i}{4}}||v||^{\frac{i}{4}}_{W^{3-\frac{2}{p},p}}\\ &\lesssim \left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}}N_T(u-v).\end{aligned}$$

For $\mathrm{II}\,(\tau)$, the theorem 5.9 is again applied and we have

$$\begin{aligned}\mathrm{II}\,(\tau) \;\lesssim\; ||u-v||_{\infty}\Bigg(&||v||^{\rho-1}_{\infty}||v||_{H^m}+\sum_{i=0}^{\rho-1}||u||^{\rho-i-1}_{\infty}||u||_{H^m}||v||^{i}_{\infty}\\ &+||u||^{\rho-1}_{\infty}||u||_{H^m}+\sum_{i=1}^{\rho}||u||^{\rho-i}_{\infty}||v||^{i-1}_{\infty}||v||_{H^m}\Bigg)(\tau),\end{aligned}$$

and the inequality (5.24) gives

$$\begin{aligned}\mathrm{II}\,(\tau) \;\lesssim\;& ||u-v||^{3/4}_{L^q}||u-v||^{1/4}_{W^{3-\frac{2}{p},p}}\times\\ &\Bigg[\left(||v||^{3/4}_{L^q}||v||^{1/4}_{W^{3-\frac{2}{p},p}}\right)^{\rho-1}||v||_{H^m}+\left(||u||^{3/4}_{L^q}||u||^{1/4}_{W^{3-\frac{2}{p},p}}\right)^{\rho-1}||u||_{H^m}\\ &+\sum_{i=0}^{\rho-1}\left(||u||^{3/4}_{L^q}||u||^{1/4}_{W^{3-\frac{2}{p},p}}\right)^{\rho-i-1}||u||_{H^m}\left(||v||^{3/4}_{L^q}||v||^{1/4}_{W^{3-\frac{2}{p},p}}\right)^{i}\\ &+\sum_{i=1}^{\rho}\left(||u||^{3/4}_{L^q}||u||^{1/4}_{W^{3-\frac{2}{p},p}}\right)^{\rho-i}\left(||v||^{3/4}_{L^q}||v||^{1/4}_{W^{3-\frac{2}{p},p}}\right)^{i-1}||v||_{H^m}\Bigg](\tau)\\ \lesssim\;& \left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}}N_T(u-v).\end{aligned}$$

In the same manner, we have

$$\begin{aligned} ||u^{\rho+1}-v^{\rho+1}||_{L^p}(\tau) &\leq ||u-v||_{L^p}\sum_{i=0}^{\rho}||u||_\infty^{\rho-i}||v||_\infty^i(\tau) \\ &\lesssim \left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}}N_T(u-v). \end{aligned}$$

Finally, we find

$$||\Phi u-\Phi v||_{L^q}(t)\leq C_{m,p}\left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)N_T(u-v)\int_0^t\frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{3\theta\rho}{4}}(1+t-\tau)^\theta}.$$

Since $\dfrac{3\theta\rho}{4}>1$ by the inequality (5.17) and $0<\theta<\dfrac{1}{2}$, the lemma 5.11 can be applied to give

$$||\Phi u-\Phi v||_{L^q}(t)\leq C_{m,p}\left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+t)^{-\theta}N_T(u-v).$$

We have, for the space derivate,

$$(\Phi u-\Phi v)_x(t)=\int_0^t S_{t-\tau}\left(\frac{D_x}{1+|D_x|}(u^\rho u_x-v^\rho v_x)\right)(\tau)\,d\tau,$$

the corollary 5.7 and the inequalities (5.19) and (5.20) imply

$$||(\Phi u-\Phi v)_x||_{L^q}(t)\leq C_{m,p}\int_0^t\frac{\left(||u^\rho u_x-v^\rho v_x||_{L^p}+||u^\rho u_x-v^\rho v_x||_{H^m}\right)(\tau)}{(1+t-\tau)^\theta}\,d\tau.$$

Since $u^{\rho+1}-v^{\rho+1}=(u-v)\sum_{i=0}^{\rho}u^{\rho-i}v^i$, the fractional Leibniz rule gives

$$\begin{aligned} ||u^\rho u_x-v^\rho v_x||_{H^m}(\tau) &= ||(u-v)\sum_{i=0}^{\rho}u^{\rho-i}v^i||_{H^{m+1}}(\tau) \\ &\lesssim ||u-v||_{H^{m+1}}\sum_{i=0}^{\rho}||u^{\rho-i}v^i||_\infty(\tau)+||u-v||_\infty\sum_{i=0}^{\rho}||u^{\rho-i}v^i||_{H^{m+1}}(\tau) \\ &= \mathrm{I}(\tau)+\mathrm{II}(\tau). \end{aligned}$$

We deduce from the inequality (5.24) that for $\mathrm{I}(\tau)$, we have

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(\tau) &\lesssim ||u-v||_{H^{m+1}}\sum_{i=0}^{\rho}\left(||u||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)^{\rho-i}\left(||v||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)^i(\tau) \\ &\lesssim \left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}}N_T(u-v). \end{aligned}$$

For the second norm, the theorem 5.9 is again applied and we have

$$\begin{aligned}\mathrm{II}\,(\tau) \;\lesssim\; ||u-v||_\infty \Bigg(& ||v||_\infty^{\rho-1}||v||_{H^{m+1}} + \sum_{i=0}^{\rho-1} ||u||_\infty^{\rho-i-1}||u||_{H^{m+1}}||v||_\infty^{i} \\ & + ||u||_\infty^{\rho-1}||u||_{H^{m+1}} + \sum_{i=1}^{\rho} ||u||_\infty^{\rho-i}||v||_\infty^{i-1}||v||_{H^{m+1}} \Bigg)(\tau),\end{aligned}$$

and the inequality (5.24) gives

$$\begin{aligned}\mathrm{II}\,(\tau) \;\lesssim\; & ||u-v||_{L^q}^{3/4}||u-v||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4} \times \\ & \Bigg[\left(||v||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)^{\rho-1}||v||_{H^{m+1}} + \left(||u||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)^{\rho-1}||u||_{H^{m+1}} \\ & + \sum_{i=0}^{\rho-1}\left(||u||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)^{\rho-i-1}||u||_{H^{m+1}}\left(||v||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)^{i} \\ & + \sum_{i=1}^{\rho}\left(||u||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)^{\rho-i}\left(||v||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)^{i-1}||v||_{H^{m+1}}\Bigg](\tau) \\ \lesssim\; & \left(\sum_{i=0}^{\rho} N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}}N_T(u-v).\end{aligned}$$

In the same manner,

$$\begin{aligned}||u^\rho u_x - v^\rho v_x||_{L^p}(\tau) \lesssim\; & ||(u-v)_x||_{L^p}\sum_{i=0}^{\rho}||u||_\infty^{\rho-i}||v||_\infty^{i}(\tau) \\ & + ||u-v||_{L^p}\left(\sum_{i=0}^{\rho-1}||u||_\infty^{\rho-i-1}||u_x||_\infty||v||_\infty^{i} + \sum_{i=1}^{\rho}||u||_\infty^{\rho-i}||v||_\infty^{i-1}||v_x||_\infty\right)(\tau).\end{aligned}$$

According to the inequality (5.24), $||u_x||_\infty \le ||u_x||_{L^q}^{3/4}||u_x||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4} = ||u_x||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{4-\frac{2}{p},p}}^{1/4}$, we deduce

$$\begin{aligned}||u^\rho u_x - v^\rho v_x||_{L^p}(\tau) \;\lesssim\; & ||u-v||_{W^{1,p}}\sum_{i=0}^{\rho}\left(||u||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)^{\rho-i}\left(||v||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)^{i}(\tau) \\ & + ||u-v||_{L^p}\Bigg[\sum_{i=0}^{\rho-1}\left(||u||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)^{\rho-i-1}\left(||u_x||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{4-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)\left(||v||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)^{i} \\ & + \sum_{i=1}^{\rho}\left(||u||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)^{\rho-i}\left(||v||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)^{i-1}\left(||v_x||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{4-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)\Bigg](\tau),\end{aligned}$$

and since $4-\dfrac{2}{p} > 1$, we have

$$||u^\rho u_x - v^\rho v_x||_{L^p}(\tau) \;\lesssim\; \left(\sum_{i=0}^{\rho} N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}}N_T(u-v).$$

Thus we find

$$||(\Phi u-\Phi v)_x||_{L^q}(t)\leq C_{m,p}\left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+t)^{-\theta}N_T(u-v).$$

□

Lemma 5.14
There exists a constant $C_{m,p}>0$ such that for all u and v in $X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}(\mathbb{R})$, we have

$$||\Phi u-\Phi v||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}}(t)\leq C_{m,p}\left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)N_T(u-v). \tag{5.25}$$

Proof. We now majorize the norm $||(\Phi u-\Phi v)_x||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}}(t)$,

$$||\Phi u-\Phi v||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}}(t)\leq\frac{1}{\rho+1}\int_0^t\left|\left|S_{t-\tau}\left(\frac{D_x}{1+|D_x|}(u^{\rho+1}-v^{\rho+1})\right)\right|\right|_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}}(\tau)\,d\tau,$$

the inequalities (5.19) and (5.20) imply

$$||\Phi u-\Phi v||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}}(t)\ \leq\ \frac{1}{\rho+1}\int_0^t\left|\left|u^{\rho+1}-v^{\rho+1}\right|\right|_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}}(\tau)\,d\tau.$$

Since $X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}(\mathbb{R})=H^{m+1}(\mathbb{R})\cap W^{4-\frac{2}{p},p}(\mathbb{R})$ and $u^{\rho+1}-v^{\rho+1}=(u-v)\sum_{i=0}^{\rho}u^{\rho-i}v^i$, we have

$$||u^{\rho+1}-v^{\rho+1}||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}}(\tau)=||u^{\rho+1}-v^{\rho+1}||_{H^{m+1}}(\tau)+||u^{\rho+1}-v^{\rho+1}||_{W^{4-\frac{2}{p},p}}(\tau),$$

and as previously,

$$||u^{\rho+1}-v^{\rho+1}||_{H^{m+1}}(\tau)\ \lesssim\left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)N_T(u-v)(1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}}.$$

Since $4-\dfrac{2}{p}\geq 0$, the fractional Leibniz theorem 5.9 gives

$$\begin{aligned}||u^{\rho+1}-v^{\rho+1}||_{W^{4-\frac{2}{p},p}}(\tau)&\lesssim||u-v||_{W^{4-\frac{2}{p},p}}\sum_{i=0}^{\rho}||u^{\rho-i}v^i||_\infty(\tau)+||u-v||_\infty\sum_{i=0}^{\rho}||u^{\rho-i}v^i||_{W^{4-\frac{2}{p},p}}(\tau)\\&=\mathrm{I}(\tau)+\mathrm{II}(\tau).\end{aligned}$$

We deduce from the inequality (5.24)

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\tau)\ &\lesssim\ ||u-v||_{W^{4-\frac{2}{p},p}}\sum_{i=0}^{\rho}\left(||u||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)^{\rho-i}\left(||v||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{3-\frac{2}{p},p}}^{1/4}\right)^i(\tau)\\&\lesssim\ \left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}}N_T(u-v).\end{aligned}$$

For $\mathrm{II}\,(\tau)$, the theorem 5.9 is again applied and we have

$$\mathrm{II}\,(\tau) \lesssim ||u-v||_\infty \left(||v||_\infty^{\rho-1} ||v||_{W^{4-\frac{2}{p},p}} + \sum_{i=0}^{\rho-1} ||u||_\infty^{\rho-i-1} ||u||_{W^{4-\frac{2}{p},p}} ||v||_\infty^i \right.$$
$$\left. + ||u||_\infty^{\rho-1} ||u||_{W^{4-\frac{2}{p},p}} + \sum_{i=1}^{\rho} ||u||_\infty^{\rho-i} ||v||_\infty^{i-1} ||v||_{W^{4-\frac{2}{p},p}} \right)(\tau),$$

and the inequality (5.24) gives

$$\mathrm{II}\,(\tau) \lesssim \left(\sum_{i=0}^{\rho} N_T(u)^{\rho-i} N_T(v)^i \right) (1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}} N_T(u-v).$$

Finally we find

$$||u^{\rho+1} - v^{\rho+1}||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}}(\tau) \lesssim \left(\sum_{i=0}^{\rho} N_T(u)^{\rho-i} N_T(v)^i \right) N_T(u-v)(1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}},$$

thus

$$||\Phi u - \Phi v||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}}(t) \lesssim \left(\sum_{i=0}^{\rho} N_T(u)^{\rho-i} N_T(v)^i \right) N_T(u-v) \int_0^t (1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}}\, d\tau,$$

and thanks to the inequality (5.17),

$$||\Phi u - \Phi v||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}}(t) \leq C_{m,p} \left(\sum_{i=0}^{\rho} N_T(u)^{\rho-i} N_T(v)^i \right) N_T(u-v).$$

□

Lemma 5.15
There exists a constant $C_{m,p} > 0$ such that for all u and v in $X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}(\mathbb{R})$, we have

$$N_T(\Phi u - \Phi v) \leq C_{m,p} \left(\sum_{i=0}^{\rho} N_T(u)^{\rho-i} N_T(v)^i \right) N_T(u-v), \tag{5.26}$$

and

$$N_T(\Phi u) \leq C_{m,p} \left(||f||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}} + N_T(u)^{\rho+1} \right). \tag{5.27}$$

Proof. The inequalities (5.22), (5.23) and (5.25) give the inequality (5.26). For the second inequality, it is enough to take $v = 0$. □

Let $M > 0$, we consider the closed ball

$$\overline{B}_{T,M} := \left\{ u \in \mathcal{C}([-T,T]; X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}(\mathbb{R})); \ N_T(u) \leq M \right\}.$$

We would like to show that there exists an unique solution u of the equation (5.18) in this ball by using the fixed point theorem.
First, there exists $\varepsilon > 0$ sufficiently small such that if $||f||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}} \leq \varepsilon$, even if we take $C_{m,p}M$ instead of M, it is enough to take $M > 0$ satisfying $\varepsilon + M^{\rho+1} \leq M$ so that the inequality (5.27) implies that the image of the closed ball $\overline{B}_{T,M}$ by the map Φ is include in itself. Here, the crucial point is that ε is independent of T. Secondly, we prove that the map Φ is a contraction on this ball for M sufficiently small. Let u and v two elements of the closed ball $\overline{B}_{T,M}$. The inequality (5.26) gives

$$N_T(\Phi u - \Phi v) \leq C_{m,p}\, M^{\rho} N_T(u - v),$$

and it is enough to take $M > 0$ sufficiently small so that the quantity $C_{m,p}\, M^{\rho} < 1$. Then, the fixed point theorem is applied and there exists an unique solution of the equation (5.18) in the closed ball $\overline{B}_{T,M}$.
It remains to prove that this unique solution can be prolonged in time with all $[0, +\infty[$. By uniqueness of the solution, the inequality (5.27) is written

$$N_T(u) \leq C_{m,p} \left(||f||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}} + N_T(u)^{\rho+1} \right). \tag{5.28}$$

Since there exists $\varepsilon > 0$ sufficiently small such that $||f||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}} \leq \varepsilon$, we can find $M > 0$ such that

$$\begin{array}{rcl} N_0(u) & < & M \\ C_{m,p}\left(\varepsilon + M^{\rho+1}\right) & \leq & M. \end{array}$$

Then for all $T > 0$, we have $N_T(u) < M$. Indeed, if not by continuity, there exists a time $T > 0$ such that

$$\begin{array}{rcl} N_T(u) & = & M \\ & > & C_{m,p}\left(\varepsilon + M^{\rho+1}\right) \\ & > & C_{m,p}\left(\varepsilon + N_T(u)^{\rho+1}\right), \end{array}$$

what contradicts the inequality (5.28). Finally, there exists a constant $M > 0$ such that for all $T > 0$, $N_T(u) < M$. In particular, we have for all time $t \geq 0$

$$\begin{array}{rcl} ||u(t)||_{L^q} + ||u_x(t)||_{L^q} & \leq & C_{m,p} \left(||f||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}} + N_T(u)^{\rho+1} \right) (1+t)^{-\theta} \\ & \leq & C_{m,p}\left(\varepsilon + M^{\rho+1}\right)(1+t)^{-\theta}. \end{array} \tag{5.29}$$

We reason in a similar manner for negative times. □

5.2 Decay in time of solutions of generalized KP-BBM-II equation

The small amplitude long waves in shallow water moving mainly in the direction x are modelled in dimension 2 by the Kadomtsev-Petviashvili equations [KP70]

$$u_t + u_x + uu_x + \sigma u_{xxx} + \partial_x^{-1} u_{yy} = 0,$$

called KP-I if $\sigma = -1$ and KP-II if $\sigma = 1$, according to whether the surface tension is or isn't neglected. Since this equation is obtained correcting, at the second order, the transport equation $u_t + u_x = 0$, we find the KP-BBM equations [BBM72]

$$u_t + u_x + uu_x - \sigma u_{xxt} + \partial_x^{-1} u_{yy} = 0,$$

called KP-BBM-I if $\sigma = -1$ and KP-BBM-II if $\sigma = 1$. The KP-BBM-I is not well posed in $L^2(\mathbb{R}^2)$, and so we study here only the KP-BBM-II equation.
We consider here a generalization of this equation, namely the gKP-BBM-II equation

$$u_t + u_x + u^\rho u_x - u_{xxt} + \partial_x^{-1} u_{yy} = 0, \tag{5.30}$$

where ρ is a nonnegative integer. We are interested in the decay in time for small amplitude solution of the equation (5.30).
For $1 < p < 2$ and $(m_0, m_1) \in \mathbb{R}^2$, we denote $X^{m_0,m_1,p}(\mathbb{R}^2) = H^{m_0}(\mathbb{R}^2) \cap W^{m_1,p}(\mathbb{R}^2)$ the space of functions f such that the norm

$$||f||_{X^{m_0,m_1,p}} := ||f||_{H^{m_0}} + ||f||_{W^{m_1,p}}$$

is finite. Our result reads as follows.

Theorem 5.16
Let $\rho \geq 3$. For $0 < \delta < \frac{1}{5} - \frac{8}{15\rho}$, we set $m = \frac{1}{2\delta} - 2$. We choose $1 < p < 2$ and $q > 2$ such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ and $0 < \frac{1}{q} < \frac{1}{2} - \frac{4}{3\rho(1-5\delta)}$.
Then there exists $\varepsilon > 0$ sufficiently small so that for all $f \in X^{m+1,7-\frac{4}{p},p}(\mathbb{R}^2)$ such that $||f||_{X^{m+1,7-\frac{4}{p},p}} \leq \varepsilon$, there exists an unique global in time solution $u \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}; X^{m+1,7-\frac{4}{p},p}(\mathbb{R}^2)\right)$ of the gKP-BBM-II equation with initial datum f.
Moreover this solution verifies that there exists a constant $C > 0$, depending only on m, p and ε such that for all time $t \in \mathbb{R}$, we have

$$||u(t)||_{L^q} + ||u_x(t)||_{L^q} \leq C(1 + |t|)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)}.$$

We remark that if δ approaches zero then the decay rate of the L^q norm of $u(t)$, for $q \in [2, +\infty[$, approaches $t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)}$, but we need to impose more regularity on the initial datum.
For the generalized KP equations

$$u_t + u_x + u^\rho u_x + \gamma u_{xxx} + \partial_x^{-1} u_{yy} = 0,$$

Hayashi, Naumkin and Saut [HNS99] proved that for $\rho \geq 3$, the decay rate of the solution of these equations is of order 1.
The Strauss method [Str74] will be used to prove this fact. For $T > 0$, it consists of choosing a norm N_T, which depends on time *a priori*, such that for a solution of the KP-BBM-II equation, all the derivatives act like a linear term and are included in a Sobolev norm of sufficiently high order and such that the power ρ are linked with the decay in time.

More precisely, the Duhamel formula is written for the KP-BBM-II equation (5.43)-(5.44) and for $t \geq 0$

$$\Phi u(t) = S_t f - \frac{1}{\rho+1}\int_0^t S_{t-\tau}\left(\frac{D_x}{1+D_x^2}u^{\rho+1}\right)(\tau)\,d\tau,$$

where $(S_t)_{t\geq 0}$ is the semi-group of the KP-BBM-II evolution and $\dfrac{D_x}{1+D_x^2}$ denotes the operator defined by the Fourier multiplicator $\sigma(k,l) := \dfrac{ik}{1+k^2}$. The fractional Leibniz rule implies for $m \geq 0$ and $1 < p < +\infty$, there exists a constant $C > 0$ such that for $t \in [-T, T]$,

$$||D^m\left(u^{\rho+1}\right)||_{L^p}(t) \leq C||D^m u||_{L^p}(t)\,||u||_\infty^\rho(t)$$

the first term of this inequality is a linear term and a Sobolev norm, and for the second one, we choose $\theta > 0$ such that

$$||u||_\infty(t) \leq C N_T(u)(1+t)^{-\theta}.$$

Then we show that for sufficiently small initial datum, this norm N_T is bounded independently of time. The principal difficulty here is that the operator $\dfrac{D_x}{1+D_x^2}$ is not bounded in $L^1(\mathbb{R}^2)$ but only in $L^p(\mathbb{R}^2)$ for $1 < p < +\infty$.

We will use the following notations : for $1 \leq p < \infty$, we denote $L^p(\mathbb{R}^2)$ the space of p-power integrable functions equipped with the norm

$$||f||_{L^p} := \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|^p\,dx\,dy\right)^{1/p},$$

we denote $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ the functions space equipped with the norm

$$||f||_\infty = \sup \operatorname{ess}(f) := \inf\left\{c\,;\,|f(x,y)| \leq c \text{ almost everywhere in } \mathbb{R}^2\right\}.$$

Let T an operator from $L^p(\mathbb{R}^2)$ to $L^q(\mathbb{R}^2)$ with $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, we define the operator norm by

$$|||T|||_{L^q} := \sup_{||f||_{L^p}=1} ||Tf||_{L^q}.$$

The Schwartz space is denoted by $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ and for $m \in \mathbb{R}$ and $1 \leq p \leq \infty$, $W^{m,p}(\mathbb{R}^2)$ is the Sobolev space equipped with the norm

$$||f||_{W^{m,p}} := \left|\left|(1-\partial_x^2-\partial_y^2)^{m/2} f\right|\right|_{L^p}.$$

In particular, we will note $H^m(\mathbb{R}^2)$ the Sobolev space $W^{m,2}(\mathbb{R}^2)$.

5.2.1 Estimates for the linear Cauchy problem

We consider the linear problem

$$\begin{aligned} u_t + u_x - u_{xxt} + \partial_x^{-1}u_{yy} &= 0 \\ u(x,y,0) &= f(x,y). \end{aligned}$$

Let us suppose that the initial datum f belongs to the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Then the Fourier transform in space implies

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(1+k^2) + i\left(k + \frac{l^2}{k}\right)\hat{u} &= 0 \\ \hat{u}(k,l,0) &= \hat{f}(k,l). \end{aligned}$$

The solution u of this ordinary differential equation is given by, for all $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ and $t \in \mathbb{R}^*$,

$$u(x,y,t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)} \hat{f}(k,l)\, dk\, dl, \tag{5.31}$$

with $h_{\alpha,\beta}(k,l) = \dfrac{k + \frac{l^2}{k}}{1+k^2} - \alpha k - \beta l$, $\alpha = \dfrac{x}{t}$ and $\beta = \dfrac{y}{t}$.

We have to majorize this oscillating integral by finding a result similar to the Van der Corput lemma.

Lemma 5.17
Let $0 \le \delta < \dfrac{1}{5}$. For all $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, and all time $|t| \ge 1$, we have

$$\left| \int_{-|t|^\delta}^{|t|^\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\, dl\, dk \right| \le 3\sqrt{\pi}\, |t|^{-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}}.$$

Proof. We adapt the Haysahi-Naumkin-Saut method [HNS99] to the generalized KP-BBM-II equation. It consists of transforming the oscillating double integral (5.31) in a simple one. For $t \in \mathbb{R}^*$, we do the change of variables $l = l' \sqrt{\dfrac{|k|(1+k^2)}{|t|}}$ to obtain

$$\begin{aligned} \int_{-|t|^\delta}^{|t|^\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\, dl dk &= \int_{-|t|^\delta}^{|t|^\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ikx + iyl'\sqrt{\frac{|k|(1+k^2)}{|t|}} - it\frac{k}{1+k^2} - il'^2 \mathrm{sgn}(\frac{k}{t})} \sqrt{\frac{|k|(1+k^2)}{|t|}}\, dl'\, dk \\ &= \frac{1}{|t|^{1/2}} \int_{-|t|^\delta}^{|t|^\delta} \sqrt{|k|(1+k^2)}\, \mathrm{e}^{ikx - it\frac{k}{1+k^2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{iyl'\sqrt{\frac{|k|(1+k^2)}{|t|}} - il'^2 \mathrm{sgn}(\frac{k}{t})}\, dl' \right) dk. \end{aligned}$$

However,

$$\begin{aligned} iyl'\sqrt{\frac{|k|(1+k^2)}{|t|}} - il'^2 \mathrm{sgn}(\frac{k}{t}) &= -i\,\mathrm{sgn}(\frac{k}{t}) \left(l'^2 - l' y \sqrt{\frac{|k|(1+k^2)}{|t|}} \right) \\ &= -i\,\mathrm{sgn}(\frac{k}{t}) \left(l'^2 - \frac{y}{2}\sqrt{\frac{|k|(1+k^2)}{|t|}} \right)^2 + i\,\frac{y^2 k(1+k^2)}{4t}. \end{aligned}$$

A last change of variable gives

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{iyl'\sqrt{\frac{|k|(1+k^2)}{|t|}} - il'^2 \mathrm{sgn}(\frac{k}{t})}\, dl' &= \mathrm{e}^{\frac{y^2 k(1+k^2)}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\pm il^2}\, dl \\ &= \sqrt{\pi} \mathrm{e}^{\pm i\pi/4} \mathrm{e}^{\frac{y^2 k(1+k^2)}{4t}}. \end{aligned}$$

Finally, we find

$$\int_{-|t|^\delta}^{|t|^\delta}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\,dl\,dk = \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\pm i\pi/4}}{|t|^{1/2}}\int_{-|t|^\delta}^{|t|^\delta}\sqrt{|k|(1+k^2)}\,\mathrm{e}^{ixk+-it\frac{k}{1+k^2}+\frac{y^2}{4t^2}(k+k^3)}\,dk. \tag{5.32}$$

We deduce then

$$\begin{aligned}\left|\int_{-|t|^\delta}^{|t|^\delta}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\,dl\,dk\right| &= \sqrt{\pi}\,|t|^{-1/2}\int_{-|t|^\delta}^{|t|^\delta}\sqrt{|k|(1+k^2)}\,dk\\ &\leq 3\sqrt{\pi}\,|t|^{-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}}.\end{aligned}$$

□

The oscillating integral (5.31) can be majorized.

Lemma 5.18
Let $0<\delta<\dfrac{1}{5}$ and $m=\dfrac{1}{2\delta}-2$. There exists a constant $C_m>0$, depending only on m, such that for all $f\in H^{2m}(\mathbb{R}^2)$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ and all time $|t|\geq 1$, we have

$$\left|\int_{|t|^\delta}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dl\,dk\right| \leq C_m||f||_{H^{2m}}|t|^{-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}},$$

and

$$\left|\int_{-\infty}^{-|t|^\delta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dl\,dk\right| \leq C_m||f||_{H^{2m}}|t|^{-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}}.$$

Proof. We have

$$\left|\int_{|t|^\delta}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dl\,dk\right| \leq \int_{|t|^\delta}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(k,l)\right|\,dl\,dk,$$

the Fubini theorem implies

$$\left|\int_{|t|^\delta}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dl\,dk\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{|t|^\delta}^{+\infty}\frac{(1+k)^m}{(1+k)^m}\left|\hat{f}(k,l)\right|\,dk\,dl,$$

and the Cauchy-Schwarz inequality gives

$$\left|\int_{|t|^\delta}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dl\,dk\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{|t|^\delta}^{+\infty}(1+k)^{2m}|\hat{f}(k,l)|^2\,dk\right)^{1/2}\left(\int_{|t|^\delta}^{+\infty}\frac{dk}{(1+k)^{2m}}\right)^{1/2}dl.$$

In one hand, since for $0<\delta<\dfrac{1}{5}$ and $m=\dfrac{1}{2\delta}-2$, the order m of the Sobolev space is strictly higher than $\dfrac{1}{2}$ and we have

$$\begin{aligned}\left(\int_{|t|^\delta}^{+\infty}\frac{dk}{(1+k)^{2m}}\right)^{1/2} &= \left(\left[\frac{-1}{(2m-1)(1+k)^{2m-1}}\right]_{|t|^\delta}^{+\infty}\right)^{1/2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2m-1}}|t|^{\frac{\delta}{2}(1-2m)} = \frac{1}{\sqrt{2m-1}}|t|^{-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}}.\end{aligned}$$

In the other hand, since for $k \in \mathbb{R}$, we have $(1+k)^2 \leq 2(1+k^2)$, the first integral becomes

$$\left(\int_{|t|^\delta-1}^{+\infty}(1+k)^{2m}|\hat{f}(k)|^2\,dk\right)^{1/2} \leq \sqrt{2^m}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^m|\hat{f}(k)|^2\,dk\right)^{1/2}.$$

Then,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{|t|^\delta}^{+\infty}(1+k)^{2m}|\hat{f}(k,l)|^2\,dk\right)^{1/2}dl \leq \sqrt{2^m}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1+l^2}{1+l^2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^m|\hat{f}(k)|^2\,dk\right)^{1/2}dl,$$

and a last use of the Cauchy-Schwarz inequality and the Fubini theorem gives

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{|t|^\delta}^{+\infty}(1+k)^{2m}|\hat{f}(k,l)|^2\,dk\right)^{1/2}dl &\leq C_m\int_{-\infty}^{+\infty}(1+l^2)^m\int_{-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^m|\hat{f}(k)|^2\,dk\,dl\\ &\leq C_m||f||_{H^{2m}}.\end{aligned}$$

Finally, we find

$$\left|\int_{|t|^\delta}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dl\,dk\right| \leq C_m||f||_{H^{2m}}|t|^{-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}}.$$

□

Proposition 5.19
Let $0<\delta<\dfrac{1}{5}$ and $m=\dfrac{1}{2\delta}-2$. There exists a constant $C_m>0$, depending only on m, such that for all function $f\in L^1(\mathbb{R}^2)\cap H^{2m}(\mathbb{R}^2)$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ and all time $t\in\mathbb{R}$, we have

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}e^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dl\,dk\right| \leq C_m(||f||_{L^1}+||f||_{H^{2m}})(1+|t|)^{-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}}. \tag{5.33}$$

Proof. Let $0<\delta<\dfrac{1}{5}$ and $|t|\geq 1$, we write

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dl\,dk &= \int_{-\infty}^{-|t|^\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dl\,dk\\ &+\int_{-|t|^\delta}^{|t|^\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dl\,dk+\int_{|t|^\delta}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dl\,dk.\end{aligned}$$

For the second integral, the Fubini theorem implies

$$\begin{aligned}\int_{-|t|^\delta}^{|t|^\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ith_{\alpha,beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dl\,dk &= \int_{-|t|^\delta}^{|t|^\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-ikx'-ily'}f(x',y')\,dx'\,dy'\right)dl\,dk\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{-|t|^\delta}^{|t|^\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ik(x-x')+il(y-y')}\mathrm{e}^{-it\frac{k+\frac{l^2}{k}}{1+k^2}}\,dl\,dk\right)f(x',y')\,dx'\,dy'.\end{aligned}$$

We deduce from it that

$$\left|\int_{-|t|^\delta}^{|t|^\delta}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_{\alpha,beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dl\,dk\right| \;\leq\; \left|\left|\int_{-|t|^\delta}^{|t|^\delta}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\,dl\,dk\right|\right|_\infty ||f||_{L^1}.$$

Lemmas 5.17 and 5.18 are applied to obtain finally

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dl\,dk\right| \leq C_m(||f||_{L^1}+||f||_{H^{2m}})|t|^{-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}}.$$

Since $|t|\geq 1$, we have $|t|\geq \dfrac{1+|t|}{2}$, thus we obtain finally

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dk\,dl\right| \;\leq\; 2^{\frac{1}{2}-\frac{5\delta}{2}}C_m\left(||f||_{L^1}+||f||_{H^{2m}}\right)(1+|t|)^{-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}}. \quad (5.34)$$

Let $|t|\leq 1$. We have directly

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dk\,dl\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^2}\left|\hat{f}(k,l)\right|\,dk\,dl\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\frac{(1+k^2)^{m/2}(1+l^2)^{m/2}}{(1+k^2)^{m/2}(1+l^2)^{m/2}}\left|\hat{f}(k,l)\right|\,dk\,dl,\end{aligned}$$

and the Cauchy-Schwarz inequality, first in k and then in l, gives

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-ith_{\alpha,,\beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dk\,dl\right| \leq C_m||f||_{H^{2m}}.$$

Since $|t|\leq 1$, we have $1\geq \dfrac{1+|t|}{2}$, thus we obtain finally

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-ith_{\alpha}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dk\,dl\right| \;\leq\; 2^{\frac{1}{2}-\frac{5\delta}{2}}C_m||f||_{H^m}(1+|t|)^{-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}}. \quad (5.35)$$

The inequalities (5.34) and (5.35) give the result. □

We can deduce the following corollary.

Corollary 5.20
Let $0<\delta<\dfrac{1}{5}$ and $m=\dfrac{1}{2\delta}-2$. There exists a constant $C_m>0$, depending only on m, such that for all function $f\in L^p(\mathbb{R}^2)\cap H^{2m}(\mathbb{R}^2)$, with $1\leq p\leq 2$, for all $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ and all time $t\in\mathbb{R}$, we have

$$\left|\left|\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)}\hat{f}(k,l)\,dl\,dk\right|\right|_{L^q} \leq C_m(||f||_{L^p}+||f||_{H^m})(1+|t|)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)}, \quad (5.36)$$

where $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Proof. Let $0 < \delta < \frac{1}{5}$ and $|t| \geq 1$, we define the operator $I_t^{(1)}$ from $L^1(\mathbb{R}^2)$ to $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ by, for $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ and $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$I_t^{(1)} f(x,y) := \int_{-|t|^\delta}^{|t|^\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)} \hat{f}(k,l)\, dl\, dk.$$

The lemma 5.17 gives that there exists a constant $C > 0$ such that

$$||I_t^{(1)} f||_\infty \leq C|t|^{-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}} ||f||_{L^1},$$

thus

$$|||I_t^{(1)}|||_\infty \leq C|t|^{-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}}. \tag{5.37}$$

The operator $I_t^{(1)}$ is rewritten

$$I_t^{(1)} f(x) := \int_{-\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{ikx+ily} \mathrm{e}^{-it\frac{k+\frac{l^2}{k}}{1+k^2}} \hat{f}(k,l) \mathbf{1}_{[-|t|^\delta,|t|^\delta]}\, dl\, dk,$$

thus

$$||I_t^{(1)} f||_{L^2} \leq ||f||_{L^2},$$

and

$$|||I_t^{(1)}|||_{L^2} \leq 1. \tag{5.38}$$

The Riesz-Thorin interpolation theorem then implies that, for $1 \leq p \leq 2$, and $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, the operator $I_t^{(1)}$ is continuous from $L^p(\mathbb{R}^2)$ to $L^q(\mathbb{R}^2)$, and we have according to inequalities (5.37) and (5.38)

$$|||I_t^{(1)}|||_{L^q} \leq C|t|^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)}.$$

We conclude that for $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$,

$$||I_t^{(1)} f||_{L^q} \leq C|t|^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)} ||f||_{L^p} \leq C(1+|t|)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)} ||f||_{L^p}.$$

Let $m = \frac{1}{2\delta} - 2$, we define now the operator $I_t^{(2)}$ from $H^{2m}(\mathbb{R}^2)$ to $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ by, for $f \in H^{2m}(\mathbb{R}^2)$ and $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$I_t^{(2)} f(x,y) := \int_{|t|^\delta}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)} \hat{f}(k,l)\, dl\, dk.$$

The lemma 5.18 implies that there exists a constant $C_m > 0$, depending only on m, such that

$$||I_t^{(2)} f||_\infty \leq C_m |t|^{-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}} ||f||_{H^{2m}}. \tag{5.39}$$

Since the operator $I_t^{(2)}$ can be rewritten

$$I_t^{(2)} f(x) := \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{ikx+ily} \mathrm{e}^{-it\frac{k+\frac{l^2}{k}}{1+k^2}} \hat{f}(k,l) \mathbf{1}_{[|t|,+\infty]}\, dl\, dk,$$

we have

$$||I_t^{(2)} f||_{L^2} \leq ||f||_{L^2},$$

and since $m > \frac{1}{2}$,

$$||I_t^{(2)} f||_{L^2} \leq ||f||_{H^{2m}}. \tag{5.40}$$

The Hölder inequality then implies that, for $2 \leq q \leq \infty$, according to inequalities (5.39) and (5.40), we have

$$\begin{aligned} ||I_t^{(2)} f||_{L^q} &\leq ||I_t^{(2)} f||_{\infty}^{1-\frac{2}{q}} ||I_t^{(2)} f||_{L^2}^{\frac{2}{q}} \\ &\leq C_m (1+|t|)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)} ||f||_{H^{2m}}. \end{aligned}$$

The contribution for $k \neq 0$ is dealt with similarly.
For $|t| \leq 1$, we define the operator $I_t^{(3)}$ from $H^{2m}(\mathbb{R}^2)$ to $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ by, for $f \in H^{2m}(\mathbb{R}^2)$ and $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$I_t^{(3)} f(x,y) := \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-ith_{\alpha,\beta}(k,l)} \hat{f}(k,l)\, dk\, dl.$$

As for the proposition 5.19, we have directly that there exists a constant $C_m > 0$, depending only on m, such that

$$||I_t^{(3)} f||_{\infty} \leq C_m (1+|t|)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)} ||f||_{H^{2m}}. \tag{5.41}$$

Since the operator $I_t^{(3)}$ can be rewritten

$$I_t^{(3)} f(x,y) := \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{i(kx+ly)} \mathrm{e}^{-it\frac{k+\frac{l^2}{k}}{1+k^2}} \hat{f}(k,l)\, dk\, dl,$$

we have

$$||I_t^{(3)} f||_{L^2} \leq ||f||_{L^2},$$

and since $m > \frac{1}{2}$,

$$||I_t^{(3)} f||_{L^2} \leq ||f||_{H^{2m}}. \tag{5.42}$$

The Hölder inequality then implies that, for $2 \leq q \leq \infty$, according to the inequalities (5.41) and (5.42), we have

$$||I_t^{(3)} f||_{L^q} \leq ||I_t^{(3)} f||_{\infty}^{1-\frac{2}{q}} ||I_t^{(3)} f||_{L^2}^{\frac{2}{q}} \leq C_m (1+|t|)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)} ||f||_{H^{2m}}.$$

□

5.2.2 Existence and Uniqueness of global solution

Let us return to the nonlinear problem. We consider the Cauchy problem

$$u_t + u_x + u^\rho u_x - u_{xxt} + \partial_x^{-1} u_{yy} = 0 \tag{5.43}$$
$$u(x,y,0) = f(x,y). \tag{5.44}$$

We recall the principal result of this chapter.

Theorem 5.21
Let $\rho \geq 3$. For $0 < \delta < \frac{1}{5} - \frac{8}{15\rho}$, we set $m = \frac{1}{2\delta} - 2$. We choose $1 < p < 2$ and $q > 2$ such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ and $0 < \frac{1}{q} < \frac{1}{2} - \frac{4}{3\rho(1-5\delta)}$.
Then there exists $\varepsilon > 0$ sufficiently small so that for all $f \in X^{m+1,7-\frac{4}{p},p}(\mathbb{R}^2)$ such that $||f||_{X^{m+1,7-\frac{4}{p},p}} \leq \varepsilon$, there exists an unique global in time solution $u \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}; X^{m+1,7-\frac{4}{p},p}(\mathbb{R}^2)\right)$ of the Cauchy problem (5.43)-(5.44).
Moreover this solution verifies that there exists a constant $C > 0$, depending on m, p and ε such that for all time $t \in \mathbb{R}$, we have

$$||u(t)||_{L^q} + ||u_x(t)||_{L^q} \leq C(1+|t|)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)}.$$

Proof. The proof is carried out for positive time. By abuse, we will write C_m and $C_{m,p}$ the different constants depending respectively on m, and on m and p.
To simplify the writings, we denote $\frac{D_x}{1+D_x^2}$ the operator defined by the Fourier multiplicator $\sigma(k,l) := \frac{ik}{1+k^2}$, and we denote also $0 < \theta = \left(\frac{1}{2} - \frac{5\delta}{2}\right)\left(1 - \frac{2}{q}\right) < \frac{1}{2}$.
We remark that

$$\frac{3\theta\rho}{4} > 1. \tag{5.45}$$

Indeed we have

$$\frac{3\theta\rho}{4} > 1 \iff \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{5\delta}{2}\right)\left(1 - \frac{2}{q}\right)\rho > 1 \iff (1-5\delta)\left(1-\frac{2}{q}\right) > \frac{8}{3\rho},$$

since $1 - 5\delta > 0$, we find

$$\frac{3\theta\rho}{4} > 1 \iff \frac{1}{q} < \frac{1}{2} - \frac{4}{3\rho(1-5\delta)},$$

which inequality is the assumption on q.
The Duhamel formula implies that u is the solution of the gKP-BBM-II equation (5.43)-(5.44) if and only if u is the solution of the following equation, for $t \geq 0$

$$u(t) = \Phi u(t) := S_t f - \frac{1}{\rho+1}\int_0^t S_{t-\tau}\left(\frac{D_x}{1+D_x^2}u^{\rho+1}\right)(\tau)\,d\tau, \tag{5.46}$$

where $S_t f := \dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{ikx+ily-it\frac{k+l^2/k}{1+k^2}}\hat{f}(k,l)\,dl\,dk$.
We remark first of all that in one hand, we have for $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{D_x}{1+D_x^2}u^{\rho+1}\right|\right|_{H^m} &= \left(\int_{\mathbb{R}^2}(1+k^2+l^2)^m\left(\frac{ik}{1+k^2}\right)^2|\widehat{u^{\rho+1}}|^2\,dk\,dl\right)^{1/2}\\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2}(1+k^2+l^2)^m|\widehat{u^{\rho+1}}|^2\,dk\,dl\right)^{1/2} = ||u^{\rho+1}||_{H^m}. \quad (5.47)\end{aligned}$$

In the other hand, the Mikhlin-Hörmander theorem 5.8 is applied with σ, defined above, to give, for $1<p<2$, there exists a constant $C_p>0$ depending only on p such that

$$\left|\left|\frac{D_x}{1+D_x^2}u^{\rho+1}\right|\right|_{L^p} \leq C_p||u^{\rho+1}||_{L^p}. \quad (5.48)$$

Let $T>0$, we define the norm N_T by, for $u \in X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}(\mathbb{R}^2)$,

$$N_T(u) := \sup_{0\leq\tau\leq T}\left[(||u||_{L^q}(\tau)+||u_x||_{L^q}(\tau))(1+\tau)^\theta + ||u||_{X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}}(\tau)\right]. \quad (5.49)$$

We will proved separately some technical lemmas.

Lemma 5.22
There exists a constant $C_{m,p}>0$ such that for all u and v in $X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}(\mathbb{R}^2)$, we have

$$||\Phi u-\Phi v||_{L^q}(t) \leq C_{m,p}\left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+t)^{-\theta}N_T(u-v), \quad (5.50)$$

and

$$||(\Phi u-\Phi v)_x||_{L^q}(t) \leq C_{m,p}\left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+t)^{-\theta}N_T(u-v). \quad (5.51)$$

Proof. Let u and v two elements of $X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}(\mathbb{R}^2)$, the Duhamel formula gives

$$||\Phi u-\Phi v||_{L^q} \leq \frac{1}{\rho+1}\int_0^t\left|\left|S_{t-\tau}\left(\frac{D_x}{1+D_x^2}(u^{\rho+1}-v^{\rho+1})\right)\right|\right|_{L^q}(\tau)\,d\tau.$$

The corollary 5.20 implies that there exists a constant $C_m>0$, depending only on m, such that

$$||\Phi u-\Phi v||_{L^q} \leq C_m\int_0^t\frac{\left(\left|\left|\frac{D_x}{1+D_x^2}(u^{\rho+1}-v^{\rho+1})\right|\right|_{L^p}+\left|\left|\frac{D_x}{1+D_x^2}(u^{\rho+1}-v^{\rho+1})\right|\right|_{H^{2m}}\right)(\tau)}{(1+t-\tau)^\theta}\,d\tau,$$

and the inequalities (5.47) and (5.48) imply

$$||\Phi u-\Phi v||_{L^q} \leq C_{m,p}\int_0^t\frac{\left(||u^{\rho+1}-v^{\rho+1}||_{L^p}+||u^{\rho+1}-v^{\rho+1}||_{H^{2m}}\right)(\tau)}{(1+t-\tau)^\theta}\,d\tau.$$

From now, when there is no ambiguity, we will use the following notation : for any positive A and B, the notation $A \lesssim B$ means that there exists a constant $C>0$ such that

$A \leq C\, B$.

Since $u^{\rho+1} - v^{\rho+1} = (u-v)\sum_{i=0}^{\rho} u^{\rho-i}v^i$, we have according to the fractional Leibniz theorem 5.9 with $p=2$ and the Minkowski inequality

$$\begin{aligned}||u^{\rho+1}-v^{\rho+1}||_{H^{2m}}(\tau) &\lesssim ||u-v||_{H^{2m}}\sum_{i=0}^{\rho}||u^{\rho-i}v^i||_{\infty}(\tau) + ||u-v||_{\infty}\sum_{i=0}^{\rho}||u^{\rho-i}v^i||_{H^{2m}}(\tau)\\ &= \mathrm{I}\,(\tau)+\mathrm{II}\,(\tau).\end{aligned}$$

On the other hand, the Sobolev inequality 5.10 with $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $r=\infty$, $j=0$, $a=\frac{1}{4}$ and $m = 6-\frac{4}{p}$ gives

$$||u||_{\infty} \;\leq\; C_p\,||u||^{1/4}_{W^{6-\frac{4}{p},p}}||u||^{3/4}_{L^q}. \tag{5.52}$$

According to the definition (5.49) of the norm N_T, we can see that the decay in time will be linked to the norm L^q and the power $3/4$. We deduce from the inequality (5.52) that for $\mathrm{I}\,(\tau)$, we have

$$\begin{aligned}\mathrm{I}\,(\tau) &\lesssim ||u-v||_{H^{2m}}\sum_{i=0}^{\rho}\left(||u||^{3/4}_{L^q}||u||^{1/4}_{W^{6-\frac{4}{p},p}}\right)^{\rho-i}\left(||v||^{3/4}_{L^q}||v||^{1/4}_{W^{6-\frac{4}{p},p}}\right)^{i}(\tau)\\ &\lesssim ||u-v||_{H^{2m}}\sum_{i=0}^{\rho}\left(||u||_{L^q}\frac{(1+\tau)^{\theta}}{(1+\tau)^{\theta}}\right)^{\frac{3(\rho-i)}{4}}||u||^{\frac{\rho-i}{4}}_{W^{6-\frac{\prime}{p},p}}\left(||v||_{L^q}\frac{(1+\tau)^{\theta}}{(1+\tau)^{\theta}}\right)^{\frac{3i}{4}}||v||^{\frac{i}{4}}_{W^{6-\frac{4}{p},p}}\\ &\lesssim \left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}}N_T(u-v).\end{aligned}$$

For $\mathrm{II}\,(\tau)$, the theorem 5.9 is again applied and we have

$$\begin{aligned}\mathrm{II}\,(\tau) \;\lesssim\; ||u-v||_{\infty}\Bigg(&||v||^{\rho-1}_{\infty}||v||_{H^{2m}} + \sum_{i=0}^{\rho-1}||u||^{\rho-i-1}_{\infty}||u||_{H^{2m}}||v||^{i}_{\infty}\\ &+ ||u||^{\rho-1}_{\infty}||u||_{H^m} + \sum_{i=1}^{\rho}||u||^{\rho-i}_{\infty}||v||^{i-1}_{\infty}||v||_{H^{2m}}\Bigg)(\tau),\end{aligned}$$

and the inequality (5.52) gives

$$\begin{aligned}\mathrm{II}\,(\tau) \;\lesssim\;& ||u-v||^{3/4}_{L^q}||u-v||^{1/4}_{W^{6-\frac{4}{p},p}}\times\\ &\Bigg[\left(||v||^{3/4}_{L^q}||v||^{1/4}_{W^{6-\frac{4}{p},p}}\right)^{\rho-1}||v||_{H^{2m}} + \left(||u||^{3/4}_{L^q}||u||^{1/4}_{W^{6-\frac{4}{p},p}}\right)^{\rho-1}||u||_{H^{2m}}\\ &+\sum_{i=0}^{\rho-1}\left(||u||^{3/4}_{L^q}||u||^{1/4}_{W^{6-\frac{4}{p},p}}\right)^{\rho-i-1}||u||_{H^{2m}}\left(||v||^{3/4}_{L^q}||v||^{1/4}_{W^{6-\frac{4}{p},p}}\right)^{i}\\ &+\sum_{i=1}^{\rho}\left(||u||^{3/4}_{L^q}||u||^{1/4}_{W^{6-\frac{4}{p},p}}\right)^{\rho-i}\left(||v||^{3/4}_{L^q}||v||^{1/4}_{W^{6-\frac{4}{p},p}}\right)^{i-1}||v||_{H^{2m}}\Bigg](\tau)\\ \lesssim\;& \left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}}N_T(u-v).\end{aligned}$$

In the same manner, we have

$$\begin{aligned}||u^{\rho+1}-v^{\rho+1}||_{L^p}(\tau) &\leq ||u-v||_{L^p}\sum_{i=0}^{\rho}||u||_\infty^{\rho-i}||v||_\infty^i(\tau)\\ &\lesssim \left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}}N_T(u-v).\end{aligned}$$

Finally, we find

$$||\Phi u-\Phi v||_{L^q}(t)\leq C_{m,p}\left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)N_T(u-v)\int_0^t\frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{3\theta\rho}{4}}(1+t-\tau)^\theta}.$$

Since $\dfrac{3\theta\rho}{4}>1$ by the inequality (5.45) and $0<\theta<\dfrac{1}{2}$, the lemma 5.11 can be applied to give

$$||\Phi u-\Phi v||_{L^q}(t)\leq C_{m,p}\left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+t)^{-\theta}N_T(u-v).$$

We have, for the space derivate,

$$(\Phi u-\Phi v)_x(t)=\int_0^t S_{t-\tau}\left(\frac{D_x}{1+|D_x|}(u^\rho u_x-v^\rho v_x)\right)(\tau)\,d\tau,$$

the corollary 5.20 and the inequalities (5.47) and (5.48) imply

$$||(\Phi u-\Phi v)_x||_{L^q}(t)\leq C_{m,p}\int_0^t\frac{\left(||u^\rho u_x-v^\rho v_x||_{L^p}+||u^\rho u_x-v^\rho v_x||_{H^{2m}}\right)(\tau)}{(1+t-\tau)^\theta}\,d\tau.$$

Since $u^{\rho+1}-v^{\rho+1}=(u-v)\sum_{i=0}^{\rho}u^{\rho-i}v^i$, the fractional Leibniz rule gives

$$\begin{aligned}||u^\rho u_x-v^\rho v_x||_{H^{2m}}(\tau) &= ||(u-v)\sum_{i=0}^{\rho}u^{\rho-i}v^i||_{H^{2m+1}}(\tau)\\ &\lesssim ||u-v||_{H^{2m+1}}\sum_{i=0}^{\rho}||u^{\rho-i}v^i||_\infty(\tau)+||u-v||_\infty\sum_{i=0}^{\rho}||u^{\rho-i}v^i||_{H^{2m+1}}(\tau)\\ &= \mathrm{I}(\tau)+\mathrm{II}(\tau).\end{aligned}$$

We deduce from the inequality (5.52) that for $\mathrm{I}(\tau)$, we have

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\tau) &\lesssim ||u-v||_{H^{2m+1}}\sum_{i=0}^{\rho}\left(||u||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4}\right)^{\rho-i}\left(||v||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4}\right)^i(\tau)\\ &\lesssim \left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}}N_T(u-v).\end{aligned}$$

For the second norm, the theorem 5.9 is again applied and we have

$$\begin{aligned}\mathrm{II}(\tau) \lesssim\ & ||u-v||_\infty \left(||v||_\infty^{\rho-1}||v||_{H^{2m+1}} + \sum_{i=0}^{\rho-1} ||u||_\infty^{\rho-i-1}||u||_{H^{2m+1}}||v||_\infty^{i} \right. \\ & \left. + ||u||_\infty^{\rho-1}||u||_{H^{2m+1}} + \sum_{i=1}^{\rho} ||u||_\infty^{\rho-i}||v||_\infty^{i-1}||v||_{H^{2m+1}} \right)(\tau),\end{aligned}$$

and the inequality (5.52) gives

$$\begin{aligned}\mathrm{II}(\tau) \lesssim\ & ||u-v||_{L^q}^{3/4}||u-v||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4} \times \\ & \left[\left(||v||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4} \right)^{\rho-1} ||v||_{H^{2m+1}} + \left(||u||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4} \right)^{\rho-1} ||u||_{H^{2m+1}} \right. \\ & + \sum_{i=0}^{\rho-1} \left(||u||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4} \right)^{\rho-i-1} ||u||_{H^{2m+1}} \left(||v||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4} \right)^{i} \\ & \left. + \sum_{i=1}^{\rho} \left(||u||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4} \right)^{\rho-i} \left(||v||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4} \right)^{i-1} ||v||_{H^{2m+1}} \right](\tau) \\ \lesssim\ & \left(\sum_{i=0}^{\rho} N_T(u)^{\rho-i} N_T(v)^i \right) (1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}} N_T(u-v).\end{aligned}$$

In the same manner,

$$\begin{aligned}||u^\rho u_x - v^\rho v_x||_{L^p}(\tau) \lesssim\ & ||(u-v)_x||_{L^p} \sum_{i=0}^{\rho} ||u||_\infty^{\rho-i}||v||_\infty^i(\tau) \\ +\ & ||u-v||_{L^p} \left(\sum_{i=0}^{\rho-1} ||u||_\infty^{\rho-i-1}||u_x||_\infty||v||_\infty^i + \sum_{i=1}^{\rho} ||u||_\infty^{\rho-i}||v||_\infty^{i-1}||v_x||_\infty \right)(\tau).\end{aligned}$$

According to the inequality (5.52), $||u_x||_\infty \leq ||u_x||_{L^q}^{3/4}||u_x||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4} = ||u_x||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{7-\frac{4}{p},p}}^{1/4}$, we deduce

$$\begin{aligned}||u^\rho u_x - v^\rho v_x||_{L^p}(\tau) \lesssim\ & ||u-v||_{W^{1,p}} \sum_{i=0}^{\rho} \left(||u||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4} \right)^{\rho-i} \left(||v||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4} \right)^{i}(\tau) \\ +||u-v||_{L^p} & \left[\sum_{i=0}^{\rho-1} \left(||u||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4} \right)^{\rho-i-1} \left(||u_x||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{7-\frac{4}{p},p}}^{1/4} \right) \left(||v||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4} \right)^{i} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{\rho} \left(||u||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4} \right)^{\rho-i} \left(||v||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4} \right)^{i-1} \left(||v_x||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{7-\frac{4}{p},p}}^{1/4} \right) \right](\tau),\end{aligned}$$

and since $7 - \dfrac{4}{p} > 1$, we have

$$||u^\rho u_x - v^\rho v_x||_{L^p}(\tau) \lesssim \left(\sum_{i=0}^{\rho} N_T(u)^{\rho-i} N_T(v)^i \right) (1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}} N_T(u-v).$$

Thus we find

$$||(\Phi u-\Phi v)_x||_{L^q}(t)\leq C_{m,p}\left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+t)^{-\theta}N_T(u-v).$$

□

Lemma 5.23
There exists a constant $C_{m,p}>0$ such that for all u and v in $X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}(\mathbb{R}^2)$, we have

$$||\Phi u-\Phi v||_{X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}}(t)\leq C_{m,p}\left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)N_T(u-v). \tag{5.53}$$

Proof. We now majorize the norm $||(\Phi u-\Phi v)_x||_{X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}}(t)$,

$$||\Phi u-\Phi v||_{X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}}(t)\leq\frac{1}{\rho+1}\int_0^t\left|\left|S_{t-\tau}\left(\frac{D_x}{1+|D_x|}(u^{\rho+1}-v^{\rho+1})\right)\right|\right|_{X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}}(\tau)\,d\tau,$$

the inequalities (5.47) and (5.48) imply

$$||\Phi u-\Phi v||_{X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}}(t)\ \leq\ \frac{1}{\rho+1}\int_0^t\left|\left|u^{\rho+1}-v^{\rho+1}\right|\right|_{X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}}(\tau)\,d\tau.$$

Since $X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}(\mathbb{R}^2)=H^{2m+1}(\mathbb{R}^2)\cap W^{7-\frac{4}{p},p}(\mathbb{R}^2)$ and $u^{\rho+1}-v^{\rho+1}=(u-v)\sum_{i=0}^{\rho}u^{\rho-i}v^i$, we have

$$||u^{\rho+1}-v^{\rho+1}||_{X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}}(\tau)=||u^{\rho+1}-v^{\rho+1}||_{H^{2m+1}}(\tau)+||u^{\rho+1}-v^{\rho+1}||_{W^{7-\frac{4}{p},p}}(\tau),$$

and as previously,

$$||u^{\rho+1}-v^{\rho+1}||_{H^{2m+1}}(\tau)\ \lesssim\left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)N_T(u-v)(1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}}.$$

Since $7-\dfrac{4}{p}\geq 0$, the fractional Leibniz theorem 5.9 gives

$$\begin{aligned}||u^{\rho+1}-v^{\rho+1}||_{W^{7-\frac{4}{p},p}}(\tau)&\lesssim||u-v||_{W^{7-\frac{4}{p},p}}\sum_{i=0}^{\rho}||u^{\rho-i}v^i||_\infty(\tau)+||u-v||_\infty\sum_{i=0}^{\rho}||u^{\rho-i}v^i||_{W^{7-\frac{4}{p},p}}(\tau)\\&=\mathrm{I}(\tau)+\mathrm{II}(\tau).\end{aligned}$$

We deduce from the inequality (5.52)

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\tau)\ &\lesssim\ ||u-v||_{W^{7-\frac{4}{p},p}}\sum_{i=0}^{\rho}\left(||u||_{L^q}^{3/4}||u||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4}\right)^{\rho-i}\left(||v||_{L^q}^{3/4}||v||_{W^{6-\frac{4}{p},p}}^{1/4}\right)^i(\tau)\\&\lesssim\ \left(\sum_{i=0}^{\rho}N_T(u)^{\rho-i}N_T(v)^i\right)(1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}}N_T(u-v).\end{aligned}$$

For $\mathrm{II}\,(\tau)$, the theorem 5.9 is again applied and we have

$$\mathrm{II}\,(\tau) \lesssim ||u-v||_\infty \left(||v||_\infty^{\rho-1} ||v||_{W^{7-\frac{4}{p},p}} + \sum_{i=0}^{\rho-1} ||u||_\infty^{\rho-i-1} ||u||_{W^{7-\frac{4}{p},p}} ||v||_\infty^i \right.$$
$$\left. + ||u||_\infty^{\rho-1} ||u||_{W^{7-\frac{4}{p},p}} + \sum_{i=1}^{\rho} ||u||_\infty^{\rho-i} ||v||_\infty^{i-1} ||v||_{W^{7-\frac{4}{p},p}} \right)(\tau),$$

and the inequality (5.52) gives

$$\mathrm{II}\,(\tau) \lesssim \left(\sum_{i=0}^{\rho} N_T(u)^{\rho-i} N_T(v)^i \right) (1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}} N_T(u-v).$$

Finally we find

$$||u^{\rho+1} - v^{\rho+1}||_{X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}}(\tau) \lesssim \left(\sum_{i=0}^{\rho} N_T(u)^{\rho-i} N_T(v)^i \right) N_T(u-v)(1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}},$$

thus

$$||\Phi u - \Phi v||_{X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}}(t) \lesssim \left(\sum_{i=0}^{\rho} N_T(u)^{\rho-i} N_T(v)^i \right) N_T(u-v) \int_0^t (1+\tau)^{-\frac{3\theta\rho}{4}}\, d\tau,$$

and thanks to the inequality (5.45),

$$||\Phi u - \Phi v||_{X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}}(t) \leq C_{m,p} \left(\sum_{i=0}^{\rho} N_T(u)^{\rho-i} N_T(v)^i \right) N_T(u-v).$$

□

Lemma 5.24
There exists a constant $C_{m,p} > 0$ such that for all u and v in $X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}(\mathbb{R}^2)$, we have

$$N_T(\Phi u - \Phi v) \leq C_{m,p} \left(\sum_{i=0}^{\rho} N_T(u)^{\rho-i} N_T(v)^i \right) N_T(u-v), \tag{5.54}$$

and

$$N_T(\Phi u) \leq C_{m,p} \left(||f||_{X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}} + N_T(u)^{\rho+1} \right). \tag{5.55}$$

Proof. The inequalities (5.50), (5.51) and (5.53) give the inequality (5.54). For the second inequality, it is enough to take $v = 0$. □

Let $M > 0$, we consider the closed ball

$$\overline{B}_{T,M} := \left\{ u \in \mathcal{C}([-T,T]; X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}(\mathbb{R}^2));\ N_T(u) \leq M \right\}.$$

We would like to show that there exists an unique solution u of the equation (5.46) in this ball by using the fixed point theorem.
First, there exists $\varepsilon > 0$ sufficiently small such that if $||f||_{X^{m+1,4-\frac{2}{p},p}} \leq \varepsilon$, even if we take $C_{m,p}M$ instead of M, it is enough to take $M > 0$ satisfying $\varepsilon + M^{\rho+1} \leq M$ so that the inequality (5.55) implies that the image of the closed ball $\overline{B}_{T,M}$ by the map Φ is include in itself. Here, the crucial point is that ε is independent of T. Secondly, we prove that the map Φ is a contraction on this ball for M sufficiently small. Let u and v two elements of the closed ball $\overline{B}_{T,M}$. The inequality (5.54) gives

$$N_T(\Phi u - \Phi v) \leq C_{m,p}\, M^{\rho} N_T(u - v),$$

and it is enough to take $M > 0$ sufficiently small so that the quantity $C_{m,p}\, M^{\rho} < 1$. Then, the fixed point theorem is applied and there exists an unique solution of the equation (5.46) in the closed ball $\overline{B}_{T,M}$.
It remains to prove that this unique solution can be prolonged in time with all $[0, +\infty[$. By uniqueness of the solution, the inequality (5.55) is written

$$N_T(u) \leq C_{m,p} \left(||f||_{X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}} + N_T(u)^{\rho+1} \right). \tag{5.56}$$

Since there exists $\varepsilon > 0$ sufficiently small such that $||f||_{X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}} \leq \varepsilon$, we can find $M > 0$ such that

$$\begin{array}{rcl} N_0(u) & < & M \\ C_{m,p}\left(\varepsilon + M^{\rho+1}\right) & \leq & M. \end{array}$$

Then for all $T > 0$, we have $N_T(u) < M$. Indeed, if not by continuity, there exists a time $T > 0$ such that

$$\begin{array}{rcl} N_T(u) & = & M \\ & > & C_{m,p}\left(\varepsilon + M^{\rho+1}\right) \\ & > & C_{m,p}\left(\varepsilon + N_T(u)^{\rho+1}\right), \end{array}$$

what contradicts the inequality (5.56). Finally, there exists a constant $M > 0$ such that for all $T > 0$, $N_T(u) < M$. In particular, we have for all time $t \geq 0$

$$\begin{array}{rcl} ||u(t)||_{L^q} + ||u_x(t)||_{L^q} & \leq & C_{m,p} \left(||f||_{X^{2m+1,7-\frac{4}{p},p}} + N_T(u)^{\rho+1} \right) (1+t)^{-\theta} \\ & \leq & C_{m,p}\left(\varepsilon + M^{\rho+1}\right)(1+t)^{-\theta}. \end{array} \tag{5.57}$$

We reason in a similar manner for negative times. □

Remark 5.25 *If we compare the generalized Korteweg-de Vries equation and his BBM version, we remark that the decay rate in time is of the same order. In dimension* 2, *Haysahi, Naumkin and Saut [HNS99] found, for the generalized KP equation, a decay rate in time of order* 1. *However, nothing says that our result is optimal and we wonder if we can find a decay rate in time better than* $1/2$, *and approach* 1 *for the BBM version. We plan to study this issue in a future work.*

Troisième partie

Etude Numérique 3D

Chapitre 6

Comportement en temps long des solutions des équations de Kadomtsev- Petviashvili généralisées

Ce chapitre est issu d'un article en préparation fait en collaboration avec F. Hamidouche et S.M. Mefire.

The propagation of long, dispersive and weakly nonlinear waves, essentially in the $x-$direction with weak transverse effects in the $y-$direction, is modelled by the Kadomtsev-Petviashvili (KP) equation [KP70],

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} + a\partial_x^{-1}u_{yy} = 0, \tag{6.1}$$

called KP-I if $a = -1$ and KP-II if $a = 1$, according to whether the surface tension is neglected or not. The approach in [KP70] for introducing (6.1) from the Korteweg de Vries (KdV) equation,

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0,$$

can be extended to the context of two transverse variables. As explained by L. Molinet, J.-C. Saut & N. Tzvetkov [MST07b], in this context, if we aim at preserving the finite propagation speed properties of the transport operator $\partial_t + \partial_x$ for waves localized in the frequency regions $\frac{|\xi_2|}{|\xi_1|} \ll 1$ and $\frac{|\xi_3|}{|\xi_1|} \ll 1$, where ξ_1, ξ_2 and ξ_3 are the Fourier modes corresponding respectively to the space variables x, y and z, we are led to consider the generalized operator

$$\partial_t + \partial_x + \frac{1}{2}\left(\partial_x^{-1}\partial_{yy} + \partial_x^{-1}\partial_{zz}\right),$$

where ∂_x^{-1} denotes the anti-derivative, also defined such that $\widehat{\partial_x^{-1}u}\,(\xi_1,\xi_2,\xi_3) := \dfrac{\widehat{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\mathrm{i}\,\xi_1}$, and $\widehat{u}$ represents the Fourier transform of u.

In this paper, we are concerned with the generalized Kadomtsev-Petviashvili equations in three-dimensional space :

$$u_t + u^p u_x + u_{xxx} + a\partial_x^{-1}u_{yy} + b\partial_x^{-1}u_{zz} = 0\,, \tag{6.2}$$

where $p \geq 1$, and the constants a, b are normalized to ± 1. The separate term u_x does not of course appear in (6.2) since a change of functions has now been applied ($u(x,y,z,t) := \widetilde{u}(x+t,y,z,t)$). The mass

$$\int_{\mathbb{R}^3} u^2(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz\,,$$

and the energy

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)} - \frac{1}{2}\,u_x^2 + \frac{a}{2}\,(\partial_x^{-1}u_y)^2 + \frac{b}{2}\,(\partial_x^{-1}u_z)^2\right](x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz$$

are conserved by the flow associated with (6.2). Although the literature proposes an extensive list of (theoretical and numerical) works related with the KP equations in dimension two, namely with the Cauchy problem based on (6.1), see *e.g.* [Bou93c, Fam92, FS92, Ham01, IMS95, KM86, Sau93, Uka89, Zho90], we do not find the same range of references in the three-dimensional case. Some theoretical results concerning the behavior of solutions of (6.2) have been recently given in [dBS97a, dBS97b, Liu02, Sau95]. In particular, the existence as well as the non-existence of solitary waves are proved by A. De Bouard & J.-C. Saut [dBS97a, dBS97b], and J.-C. Saut establishes in [Sau95] a result of blow-up in finite time for $a = b = -1$ and $p \geq 2$. In [Liu02], Y. Liu continues this investigation and proves that, when a solution of (6.2), for $a = b = -1$ and $1 \leq p < 4/3$, is initially close to an unstable solitary wave, then this solution blows up in finite time. Since no result has yet been proved for blow-up in finite time, with $a = b = 1$ and $ab = -1$, there is considerable interest in performing numerical simulations aimed at studying the solutions of (6.2) in various situations.

The aim of this paper consists not only of inspecting numerically certain theoretical properties already stated, but above all of investigating, in diverse contexts, aspects not yet established, such as the blow-up in finite time, the dispersion, the solitonic behavior and the transverse instabilities.

This paper is subdivided into five sections. In Section 2, we discretize the Cauchy problem associated with (6.2), by combining a spectral method for the space discretization and a predictor-corrector scheme for the time discretization. The other sections deal systematically with numerical simulations. Due to extensive numerical experiments performed throughout these sections, the paper is organized in such a way that each of these sections contains its own conclusions.

We study in Section 3 the propagation, based on (6.2), of localized initial data. The numerical observations show here that the effect of two negative transverse directions ($a = b = -1$) is much less regularizing than the effect of two positive or "opposite" transverse directions. Indeed, in the context where $a = b = -1$, the discrete solution of the Cauchy problem blows up in finite time when for instance $p = 2$, whereas the discrete solution in the context where $a = b = 1$, or $ab = -1$, blows up in finite time when $p = 3$.

In Section 4, our investigations concern the numerical study of the transverse instabilities in the y and $z-$directions. Improperly, we talk about the solution stability instead of the orbital stability of the solitary wave close to this solution, namely a solitary wave for which the profile remains close to that solution (see e.g. [Ben72]). By considering the

line-soliton

$$\Phi_c(x,t) = \left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}\, c\right)^{1/p} \operatorname{sech}^{2/p}\left(\frac{p\sqrt{c}}{2}\,(x-ct)\right),$$

for $p=1$, J.C. Alexander, R.L. Pego & R.L. Sachs [APS97] characterize the unstable mode for (6.1), i.e. the solution of the linearized equation around Φ_c, of the form $u(x,y,t) = \mathrm{e}^{\sigma t + \frac{2\mathrm{i}\pi y}{\lambda_y}}\widetilde{u}(x)$ with $\lambda_y > 0$ a wavelength, $\mathrm{Re}(\sigma) > 0$, and $\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R})$. They prove that KP-II does not admit unstable modes, and that KP-I admits unstable modes if and only if $\lambda_y > \dfrac{8\pi}{c\sqrt{3}}$. A similar result of instability regarding KP-I is obtained in a nonlinear context by F. Rousset & N. Tzvetkov [RT08]. In this section, we extend, to the 3D case, the approach considered by F. Hamidouche for studying numerically in [Ham01] the transverse instabilities of solutions of 2D-KP equations. We observe a stronger form of instability in the sense that solutions of (6.2), initially close to solitary waves, blow up in finite time — even for $p=1$. This study of instabilities is done here in the transverse directions, by associating with (6.2) the initial datum :

$$u_0(x,y,z) := \Phi_{c(y,z)}(x,0),$$

where $c(y,z) := c(1+\varepsilon\cos(\dfrac{2\pi y}{\lambda_y} + \dfrac{2\pi z}{\lambda_z}))$ is a perturbation of the velocity of the line-soliton, in an infinitesimal way in the y and $z-$directions, $\lambda_y, \lambda_z > 0$, and $\varepsilon > 0$ is a fixed small value. When $p = 1, 2$ and $a = b = -1$, respectively when $p = 2$ and $ab = -1$, we observe numerically that there exist two critical transverse wavelengths $0 < \lambda_c^1 \ll \lambda_c^2$, depending only on c, such that the discrete solution of (6.2) with such an initial datum u_0 blows up in finite time (in particular, the line-soliton is unstable under the flow of (6.2)) if $\lambda_c^1 < \lambda_y < \lambda_c^2$ or $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$. The existence of the critical value λ_c^2 translates the fact that the formal limit of the perturbed line-soliton, when the wavelengths λ_y and λ_z tend to infinity, is the KdV one of velocity $c(1+\varepsilon)$ which is stable [Ben72]. These observations were foreseeable from the ones concerning KP-I. Another interesting observation is made when $p = 1$ and $a = 1, b = -1$. We notice that the discrete solution of (6.2) with this initial datum blows up if $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$ and if the wavelength in the positive transverse direction is either small ($\lambda_y < \lambda_c^1$) or very large ($\lambda_y > \lambda_c^2$). It results then, namely when (6.2) is formed from KP-II with the addition of a negative transverse direction, that the solution of (6.2) can blow up, although the solution corresponding to KP-II is stable. In a symmetrical way, the same effects are noticed in the context where $p = 1$ and $a = -1, b = 1$. When (6.2) is formed from KP-I with the addition of a positive transverse direction, it follows that the solution of (6.2) can no longer blow up.

Finally, in Section 5, we deal with the study of the transverse instability in the $z-$direction by associating now with (6.2) the Zaitsev soliton [Zai83] for initial datum :

$$u_0(x,y,z) := \psi_{c(z)}(x,y,0),$$

where, for $\beta = \sqrt{\dfrac{\delta^2 - 3\alpha^4}{\delta^2}}$, $\omega = \dfrac{\delta^2+\alpha^4}{\alpha}$, $3\alpha^4 < \delta^2$ and $c = \dfrac{\omega}{\alpha}$,

$$\psi_c(x,y,t) = 12\alpha^2 \frac{1-\beta\cosh(\alpha x - \omega t)\cos(\delta y)}{(\cosh(\alpha x - \omega t) - \beta\cos(\delta y))^2}.$$

The velocity is here slightly perturbed in the $z-$direction; $c(z) := c(1+\varepsilon\cos(\frac{2\pi z}{\lambda_z}))$, $\lambda_z > 0$, and $\varepsilon > 0$ is a fixed small value. Our numerical experiments are performed in the special context $p = 1$, with $a = -1$. It follows that the wavelength λ_z characterizes the instability of the Zaitsev soliton by transverse perturbations. More precisely, when $b = -1$, there exist two critical transverse wavelengths $0 < \lambda_c^1 \ll \lambda_c^2$, depending only on c, such that the solution of (6.2) with u_0 as initial datum blows up (and is hence unstable) if $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$.

6.1 Numerical discretizations

By combining a spectral approach with a predictor-corrector scheme, we discretize here the Cauchy problem based on (6.2).

6.1.1 Spectral approach

Spectral methods are very suitable to the discretization of equations such as (6.2). In fact, the non-linearity and the anti-derivative appearing in (6.2) are easily treated with such methods, contrary to finite element methods or finite volume methods. Finite difference discretizations of (6.2) can be an alternative, but the spectral methods are again more suited when we are looking for solutions of (6.2) in periodised domains.

Let us consider the Cauchy problem based on (6.2), where u_0 denotes the initial datum :

$$u(x,y,z,0) := u_0(x,y,z).$$

As in [Tom96, WAS94], where (6.1) is considered, we will be concerned with solutions of (6.2) such that u, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz} vanish at infinity and furthermore $\partial_x^{-1}u_y$, $\partial_x^{-1}u_z \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\partial_x^{-2}u_{yy}, \partial_x^{-2}u_{zz} \in L^2(\mathbb{R}^3)$. For $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3$, and $t \geq 0$, we use the notation :

$$\widehat{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t) := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y,z,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi_1 x+\xi_2 y+\xi_3 z)}\,dxdydz\,.$$

By applying this Fourier transform to the equations of the considered Cauchy problem, it follows that :

$$\begin{cases} \widehat{u}_t(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t) + \mathrm{i}\xi_1\widehat{(\frac{u^{p+1}}{p+1})}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t) + \left(-\mathrm{i}\xi_1^3\right) + \mathrm{i}a\frac{\xi_2^2}{\xi_1} + \mathrm{i}b\frac{\xi_3^2}{\xi_1}\Big)\,\widehat{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t) \;=\; 0\,, \\ \widehat{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,0) \;=\; \widehat{u_0}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,, \\ \forall\ \xi_1,\xi_2,\xi_3 \in \mathbb{R},\ \forall\ t > 0\,. \end{cases} \tag{6.3}$$

Looking moreover for solutions of (6.2) such that u, u^{p+1} and $u_t \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)$, we notice from (6.3) in particular that : $\forall\ \xi_2,\xi_3 \in \mathbb{R}$, $\forall\ t > 0$,

$$\lim_{\xi_1 \longrightarrow 0} \widehat{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t) \;=\; 0\,, \quad \lim_{\xi_1 \longrightarrow 0} \frac{\widehat{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t)}{\xi_1} \;=\; 0\,,$$

provided that

$$\widehat{u_0}(0,\xi_2,\xi_3) \;=\; 0\,, \quad \lim_{\xi_1\longrightarrow 0}\frac{\widehat{u_0}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\xi_1} \;=\; 0\,. \tag{6.4}$$

By giving in this way a sense to $\lim\limits_{\xi_1\longrightarrow 0}\widehat{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t)$ and $\lim\limits_{\xi_1\longrightarrow 0}\dfrac{\widehat{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t)}{\xi_1}$, the singularities for $\xi_1 = 0$ in (6.3) are overcome. Relations (6.4) enforce restrictions on the choice of $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)\cap L^2(\mathbb{R}^3)$; we will be concerned with such an initial datum.

In view of numerical computations in a bounded and periodised domain Ω, we now consider (6.2) in $[-K,K]\times[-L,L]\times[-M,M] =: \Omega$, where K, L, $M > 0$ must be fixed values allowing us to express the relations (6.4) as below :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{-M}^{M}\int_{-L}^{L} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi_2 y+\xi_3 z)}\left(\int_{-K}^{K} u_0(x,y,z)\,dx\right)dy\,dz &=& 0\,,\\ \displaystyle\int_{-M}^{M}\int_{-L}^{L} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi_2 y+\xi_3 z)}\left(\int_{-K}^{K}\int_{-K}^{x} u_0(x_1,y,z)\,dx_1 dx\right)dy\,dz &=& 0\,. \end{array}\right. \tag{6.5}$$

Let us consider now the discrete Fourier basis consisting of trigonometric polynomial functions :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{\pi}{K}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\frac{\pi}{L}y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\frac{\pi}{M}z}\;;\;\mathrm{i}^2=-1\,,\;-\frac{N_x}{2}\le k\le\frac{N_x}{2}-1\,,\;-\frac{N_y}{2}\le l\le\frac{N_y}{2}-1\,,\;-\frac{N_z}{2}\le m\le\frac{N_z}{2}-1\,,$$

where N_x, N_y, $N_z \in 2\mathbb{N}^\star$ represent the numbers of modes. Let us set $N_x = \dfrac{2K}{\Delta x}$, $N_y = \dfrac{2L}{\Delta y}$ and $N_z = \dfrac{2M}{\Delta z}$, where Δx, Δy, $\Delta z > 0$. For any non periodic scalar function f, locally summable, we denote by $f_{K,L,M}$ the function equal to f in Ω and extended outside of Ω as a periodic function of period equal to $2K$ in the $x-$direction, $2L$ in the $y-$direction, $2M$ in the $z-$direction. The expression of $f_{K,L,M}$ in the considered discrete basis is as follows,

$$f_{K,L,M}(x,y,z) \;=\; \sum_{k=-\frac{N_x}{2},l=-\frac{N_y}{2},m=-\frac{N_z}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1,\frac{N_y}{2}-1,\frac{N_z}{2}-1} \widehat{f}(k\tfrac{\pi}{K},l\tfrac{\pi}{L},m\tfrac{\pi}{M})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{\pi}{K}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\frac{\pi}{L}y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\frac{\pi}{M}z}\,,$$

with

$$\widehat{f}(k\tfrac{\pi}{K},l\tfrac{\pi}{L},m\tfrac{\pi}{M}) \;=\; \frac{1}{(2K)(2L)(2M)}\int_{-K}^{K}\int_{-L}^{L}\int_{-M}^{M} f(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{\pi}{K}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\frac{\pi}{L}y}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\frac{\pi}{M}z}\,dxdydz\,.$$

We are then concerned with a system of $N_x\times N_y\times N_z$ ordinary differential equations and $N_x\times N_y\times N_z$ unknowns, by reconsidering (6.3) and (6.4) with these notations, and hence projecting (6.3) in the Fourier basis. For each triplet (ξ_1,ξ_2,ξ_3), find $\widehat{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t)$ satisfying

$$\left\{\begin{array}{l} \widehat{u}_t(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t) + \mathrm{i}\xi_1\widehat{(\frac{u^{p+1}}{p+1})}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t) + (-\mathrm{i}\xi_1^3 + \mathrm{i}a\frac{\xi_2^2}{\xi_1} + \mathrm{i}b\frac{\xi_3^2}{\xi_1})\widehat{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t) \;=\; 0\,,\;\forall\, t>0,\\ \widehat{u}(0,\xi_2,\xi_3,t) \;=\; \widehat{u_0}(0,\xi_2,\xi_3) \;=\; 0\,,\quad \forall\, t>0,\\ \widehat{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,0) \;=\; \widehat{u_0}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,, \end{array}\right. \tag{6.6}$$

where

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = k\frac{\pi}{K}\,,\ \xi_2 = l\frac{\pi}{L}\,,\ \xi_3 = m\frac{\pi}{M}\,, \\ -\frac{N_x}{2} \leq k \leq \frac{N_x}{2} - 1\,,\ \ -\frac{N_y}{2} \leq l \leq \frac{N_y}{2} - 1\,,\ \ -\frac{N_z}{2} \leq m \leq \frac{N_z}{2} - 1\,, \end{array} \right. \tag{6.7}$$

and the datum u_0 is subject to (6.5). In the numerical simulations, a Fast Fourier Transform will be computed.

6.1.2 Time discretization

Many numerical methods can be applied for the time discretization of (6.6). In view of efficient numerical computations on long time intervals, we consider implicit methods such as Adams-Moulton methods (see e.g. [QSS00]). Also, in view of flexible numerical implementations, we will restrict ourselves to one-step schemes.

Let $\Delta t > 0$ be the step of the time discretization, and set $t_n = n\Delta t$. For $n \in \mathbb{N}$, we denote by $\widehat{u}_n$ an approximation of $\widehat{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t_n)$ and by u_n an approximation of $u(x, y, z, t_n)$, where $(x, y, z) \in \Omega$.

A possible way for numerically discretizing the partial differential equation in (6.6) consists of directly applying the Crank-Nicolson scheme, or a variant of this scheme as in the case of computations based on 2D-KP equations (see [Ham01]). The following relations are then obtained : $\forall\, n \geq 0$,

$$\widehat{u}_{n+1} = \widehat{u}_n + \frac{\Delta t}{2}\left(-\mathrm{i}\xi_1[(\widehat{\frac{u_{n+1}^{p+1}}{p+1}}) + (\widehat{\frac{u_n^{p+1}}{p+1}})] + \mathrm{i}(\xi_1^3 - \frac{\xi_2^2}{\xi_1}a - \frac{\xi_3^2}{\xi_1}b)[\widehat{u}_n + \widehat{u}_{n+1}] \right)\,, \tag{6.8}$$

with of course $\xi_1 \neq 0, \xi_2$ and ξ_3 defined as in (6.7). A nonlinear system of $N_x \times N_x \times N_z$ equations and $N_x \times N_x \times N_z$ unknowns can thus be associated with (6.6) - (6.7) and solved with a fixed point iteration method, by considering from (6.8) a subsequence $(\widehat{u}_{n+1,r})_r$ where we define, for each $n \geq 0$, $\widehat{u}_{n+1,0} := \widehat{u}_n$, and also set $\widehat{u}_{n+1} := \widehat{u}_{n+1,r+1}$ when the convergence of the subsequence is reached at the $(r+1)$th iteration. However, this approach can be costly in CPU time, since such an initialization of fixed point iterations is not necessarily suitable for fast convergence (see e.g. [QSS00]).

The method we consider for solving (6.6) - (6.7) consists of combining an Adams-Moulton scheme, for defining the fixed point iterations, with an Adams-Bashforth scheme for the initialization of these iterations. More precisely, restricting ourselves here to one-step schemes, we use the explicit Euler method for the predictor and the Crank-Nicolson method for the corrector. The resulting scheme is a predictor-corrector method and is of order two with respect to the time step (see e.g. [QSS00]) under suitable regularities of the solution of (6.6) - (6.7).

By denoting by $m \geq 1$ a maximal number of iterations, the algorithm then considered for solving (6.6) - (6.7) is described as follows :

- Set $\widehat{u}_{0,m} := \ldots := \widehat{u}_{0,1} := \widehat{u}_{0,0} := \widehat{u}_0$.
- For $n = 0, 1, \ldots,$ compute :

$$\widehat{u}_{n+1,0} := \widehat{u}_{n,m} + \Delta t\left(-\mathrm{i}\xi_1(\widehat{\frac{u_{n,m}^{p+1}}{p+1}}) + \mathrm{i}(\xi_1^3 - \frac{\xi_2^2}{\xi_1}a - \frac{\xi_3^2}{\xi_1}b)\widehat{u}_{n,m} \right)\,,$$

- For $r = 0, 1, ..., m-1$,

$$\widehat{u}_{n+1,r+1} := \widehat{u}_{n,m} + \frac{\Delta t}{2}\left(-\mathrm{i}\xi_1(\widehat{\frac{u_{n+1,r}^{p+1}}{p+1}}) + \mathrm{i}(\xi_1^3 - \frac{\xi_2^2}{\xi_1}a - \frac{\xi_3^2}{\xi_1}b)\widehat{u}_{n+1,r} - \mathrm{i}\xi_1(\widehat{\frac{u_{n,m}^{p+1}}{p+1}}) + \mathrm{i}(\xi_1^3 - \frac{\xi_2^2}{\xi_1}a - \frac{\xi_3^2}{\xi_1}b)\widehat{u}_{n,m}\right). \tag{6.9}$$

The iterations are stopped in one of the two following cases :

- when $\frac{\|u_{n+1,r+1} - u_{n+1,r}\|_{l^2(\Omega)}}{\|u_{n+1,0}\|_{l^2(\Omega)}} \leq \tau$, with $\tau > 0$ a fixed tolerance. We then set $u_{n+1} := u_{n+1,r+1}$;
- or when $r = m-1$. Here, we set $u_{n+1} := u_{n+1,m}$. We mention that the step Δt can be reduced in this case, in order to improve the previous relative error.

This algorithm provides the solution $\widehat{u}_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, where $\xi_1 \neq 0$, ξ_2, ξ_3 are defined as in (6.7), and where we consider :

- For $n = 1, 2, ...$,
  $\widehat{u}_n(0, \xi_2, \xi_3) := \widehat{u}_0(0, \xi_2, \xi_3)$.

Remark 6.1 *A practical way to choose a suitable (initial) step Δt in the previous algorithm is the one involving the parameters Δx, Δy, Δz as follows :*

$$\Delta t < \frac{2\Delta x}{\pi(\frac{\pi^2}{(\Delta x)^2} + \frac{\Delta x K}{(\Delta y)^2} + \frac{\Delta x K}{(\Delta z)^2} + \|u_n\|^p_{L^\infty(\Omega)})}. \tag{6.10}$$

Of course, since from (6.9),

$$\widehat{u}_{n+1,r+1} - \widehat{u}_{n+1} = (\widehat{u}_{n+1,r} - \widehat{u}_{n+1})\left(\mathrm{i}\frac{\Delta t}{2}(\xi_1^3 - \frac{\xi_2^2}{\xi_1}a - \frac{\xi_3^2}{\xi_1}b)\right) - \mathrm{i}\xi_1\frac{\Delta t}{2}\left((\widehat{\frac{u_{n+1,r}^{p+1}}{p+1}}) - (\widehat{\frac{u_{n+1}^{p+1}}{p+1}})\right),$$

it follows in the case where $p \in \mathbb{N}^*$ that,

$$\widehat{u}_{n+1,r+1} - \widehat{u}_{n+1} = (\widehat{u}_{n+1,r} - \widehat{u}_{n+1})\left(\mathrm{i}\frac{\Delta t}{2}(\xi_1^3 - \frac{\xi_2^2}{\xi_1}a - \frac{\xi_3^2}{\xi_1}b)\right) - \mathrm{i}\xi_1\frac{\Delta t}{2(p+1)}\sum_{j=0}^{p}(u_{n+1,r} - \widehat{u_{n+1}})u_{n+1,r}^j u_{n+1}^{p-j},$$

and approximating $u_{n+1,r}$ by u_n in the right-hand side of this relation leads to :

$$\widehat{u}_{n+1,r+1} - \widehat{u}_{n+1} \approx (\widehat{u}_{n+1,r} - \widehat{u}_{n+1})\left(\mathrm{i}\frac{\Delta t}{2}(\xi_1^3 - \frac{\xi_2^2}{\xi_1}a - \frac{\xi_3^2}{\xi_1}b)\right) - \mathrm{i}\xi_1\frac{\Delta t}{2}(\widehat{u_{n+1,r} - u_{n+1}})u_n^p.$$

Then, since $\xi_1 = k\frac{\pi}{K}$, with $-\frac{N_x}{2} \leq k \leq \frac{N_x}{2} - 1$, and $N_x = \frac{2K}{\Delta x}$, it follows from similar considerations regarding ξ_2, ξ_3 that for $k \neq 0$, and making use of the Parseval formula,

$$\|u_{n+1,r+1} - u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|u_{n+1,r} - u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \times \frac{\Delta t}{2}\frac{\pi}{\Delta x}\left(\frac{\pi^2}{(\Delta x)^2} + \frac{\Delta x K}{(\Delta y)^2} + \frac{\Delta x K}{(\Delta z)^2} + \|u_n\|^p_{L^\infty(\Omega)}\right).$$

6.2 Long time behavior for localized initial data

We are interested here in numerical simulations concerning the Cauchy problem reformulated in (6.6) - (6.7). In a general way, two sets of parameters will be considered for these simulations based on the algorithm described previously. The first set is made up of the parameters $a, b = \pm 1$, $p \geq 1$, that intervene in (6.6), and the second one concerns the parameters K, L, M, Δt, N_x, N_y, N_z used in the algorithm. Typically, after fixing K, L and M, we affect values to the parameters N_x, N_y, N_z, and choose Δt according to (6.10).

For studying the behavior in long time of the discrete solution of (6.2), associated with a localized initial datum, three phenomena will systematically be inspected : the dispersion (context where the $l^\infty-$norm of the solution decreases), the blow-up in finite time (situation where the $l^\infty-$norm of the solution tends to infinity), and the solitonic behavior (phenomenon where the $l^\infty-$norm of the solution is constant).

Our numerical inspections will be based on the choice :

$$u_0(x, y, z) \; = \; \alpha(1 - 2sx^2) \; \mathrm{e}^{-s(x^2+y^2+z^2)} \, , \tag{6.11}$$

and on various considerations of parameters mentioned above, including also the context ($a = b = -1$, $p \geq 2$) related to the known theoretical result (see J.-C. Saut [Sau95]) of the blow-up in finite time. Let us indicate already that $\alpha, s \in \mathbb{R}_+^\star$, and that the choices of values of K will be such that u_0 satisfies (6.5) numerically.

In the presentation of our results, we distinguish the case $p = 1$ and the generalized case where $p > 1$.

6.2.1 Non-generalized case : $p = 1$

In this subsection, we describe the results obtained from numerical simulations by fixing $p = 1$.

6.2.1.1 Evolution in long time

In each of the contexts where $a = \pm 1$ with $b = \pm 1$, we perform experiments by setting here : $s = 1$, $K = 50$, $L = M = 4$, $N_y = N_z = 16$.

We already mention that for all our experiments, here and in the next sections, the step Δt will always be chosen in accordance with (6.10).

The results represented in Figures 6.1 and 6.2 concern the evolutions (with respect to time) of the l^∞ and l^2-norms of the discrete solution and of the associated energy, obtained by considering $N_x = 256$, $\Delta t = 10^{-3}$, $\alpha = 2$.

In particular, we observe the same evolutions of these norms and of the energy when $a = -1$, $b = 1$ as well when $a = 1$, $b = -1$. This was foreseeable according to the symmetry of u_0 and to the one of (6.2) related to the y and $z-$directions. In this order of ideas, we restrict in this section the presentation of our results to the contexts where $ab = 1$, and $a = -1$, $b = 1$.

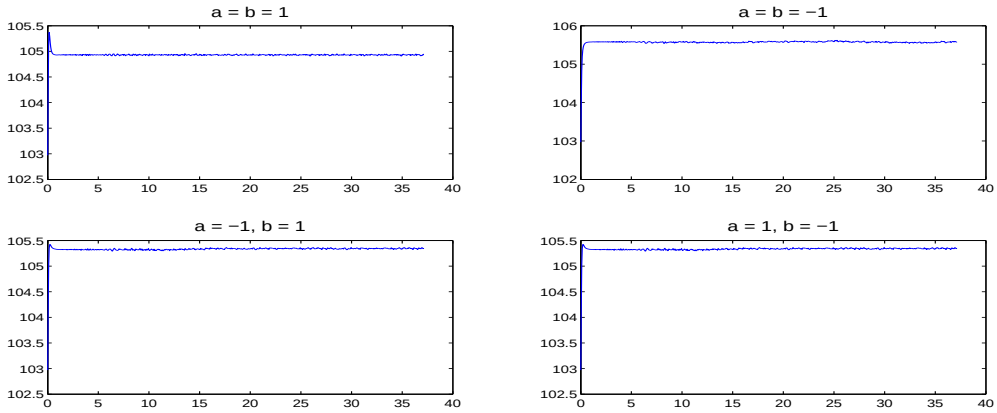


Fig. 6.1 – Evolutions of the energy with respect to time, for $p = 1, \alpha = 2, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$.

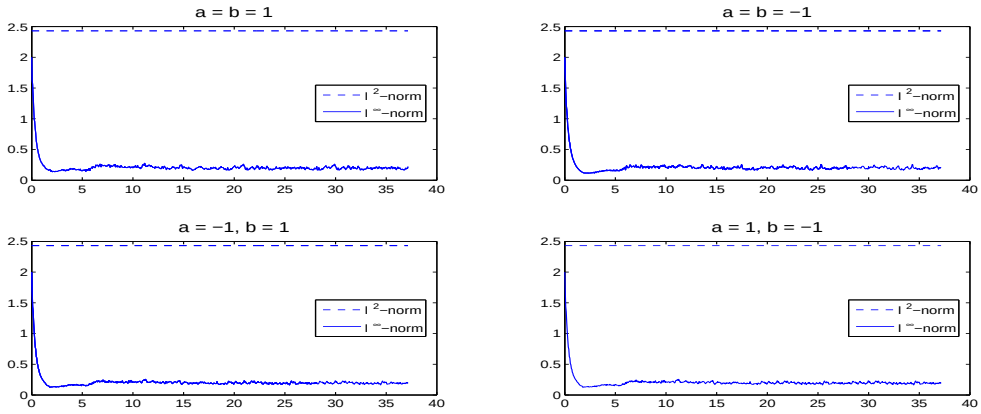


Fig. 6.2 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, \alpha = 2, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$.

Figures 6.3 and 6.4 show also the evolutions of the l^∞ and l^2-norms as well as of the energy, for the same values of the parameters, but now for $\alpha = 5$. These evolutions are respectively similar to those observed when $\alpha = 2$.

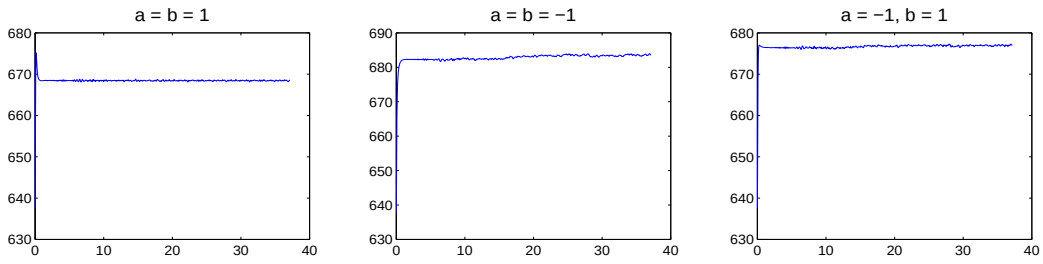


Fig. 6.3 – Evolutions of the energy with respect to time, for $p = 1, \alpha = 5, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$.

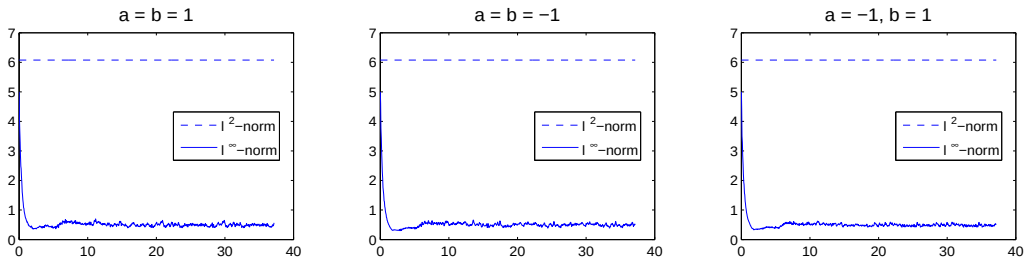


Fig. 6.4 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, \alpha = 5, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$.

Let us notice that for these choices of α, the results obtained from simulations with other values of parameters, namely with $K = 32$, $L = M = 6, 12$, $N_x = 128$, $N_y = N_z = 32, 64$, do not qualitatively differ from those represented in Figures 6.1 - 6.4. We observe that the dispersive effect prevails over the non-linearity. The evolutions of the norms in the different contexts where $ab = \pm 1$ look similar.

Figure 6.5 presents the evolutions of the l^∞ and l^2-norms of the discrete solution when a larger amplitude of the initial datum is considered. Here $\alpha = 50$, $N_x = 512$ and $\Delta t = 10^{-4}$.

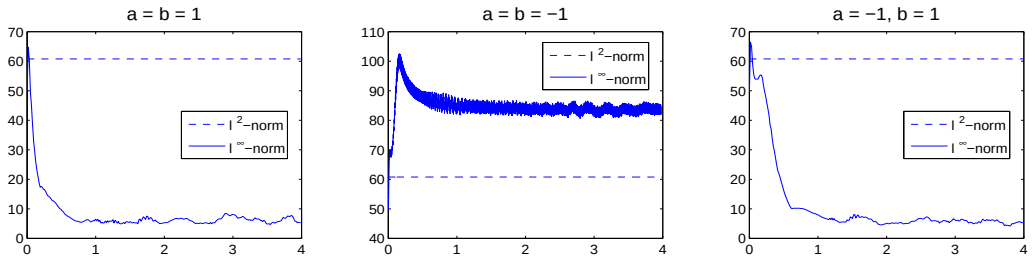


Fig. 6.5 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, \alpha = 50, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 512, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-4}$.

In each of the contexts where $a = b = 1$, $ab = -1$, we observe, as with the amplitudes $\alpha = 2, 5$, that the dispersive effect prevails over the non-linearity. But for $a = b = -1$, the discrete solution, associated with the initial datum of large amplitude, has a tendency to blow up at the beginning of the evolution and after that, the dispersive effect prevents the solution from blowing up. The fact that the non-linearity and the dispersive effect are neutralized, and that the $l^\infty-$norm is stabilized, is called the solitonic behavior. We mention that even with a time step, e.g. $\Delta t = 10^{-3}$, slightly bigger than the limiting value provided by (6.10) when we take larger values of L, M, N_y, N_z (e.g. $L = M = 6$, $N_y = N_z = 32$), we do not obtain, from the simulations, results that are qualitatively different from those presented here.

6.2.1.2 With a datum of larger L^2-norm

We now perform some experiments based on the initial datum (6.11) with a larger L^2-norm and a fixed amplitude. Thus, we consider $s = 0.5$. Figures 6.6 and 6.7 present the evolutions of the l^∞ and l^2-norms of the discrete solution as well as of the associated energy, obtained by using the same values of the parameters α, K, L, M, N_x, N_y, N_z and Δt as in the experiments associated with Figures 6.3 and 6.4, but with this new choice of s.

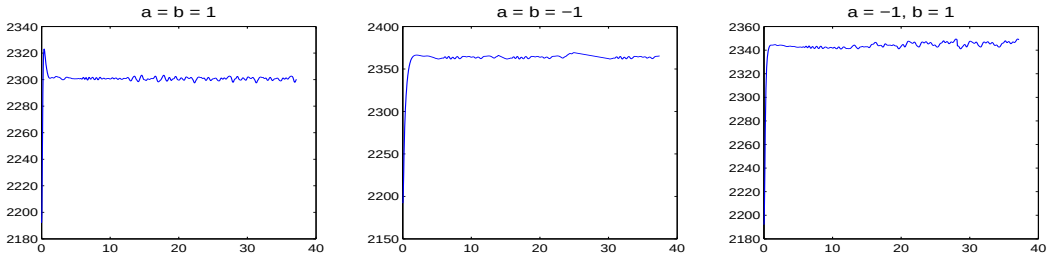


Fig. 6.6 – Evolutions of the energy with respect to time, for $p = 1, \alpha = 5, s = 0.5, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$.

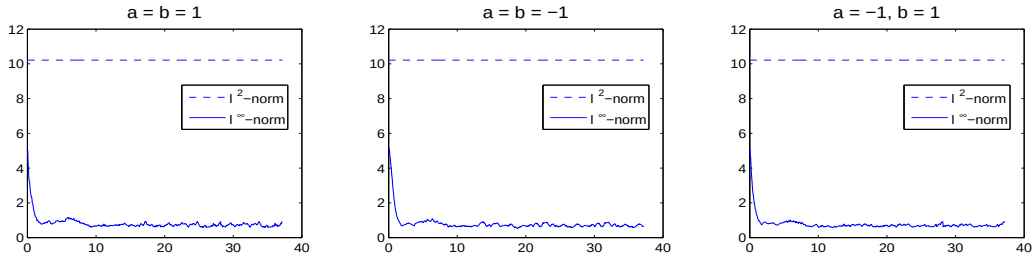


Fig. 6.7 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, \alpha = 5, s = 0.5, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$.

These results do not differ qualitatively from those that were represented in Figures 6.3 and 6.4, namely when $s = 1$; there does not appear a qualitative influence of the l^2-norm of the initial datum on the evolution of the solution. Similar experiments have been performed, in this case where $s = 0.5$, by considering $K = 32$, $L = M = 6$, $N_x = 512$, $N_y = N_z = 32$, $\Delta t = 10^{-4}$ and a larger amplitude : $\alpha = 50$. We notice the same observations as before ; namely, the behavior of the solution is again governed by the dispersion in each of the contexts where $ab = \pm 1$, and a solitonic behavior is also observed in the context where $a = b = -1$.

6.2.2 Generalized case : $p > 1$

In this subsection, we are concerned with numerical experiments when $p = 2, 3$. As mentioned before, a particular attention will be addressed to the contexts ($a = b = 1$, $ab = -1$) where no theoretical result has been established.

6.2.2.1 The case $p = 2$

Let us fix in this part $p = 2$. The experiments associated with Figures 6.8 - 6.10 are performed by setting : $s = 1$, $K = 50$, $L = M = 4$, $N_x = 256$, $N_y = N_z = 16$ and $\Delta t = 10^{-3}$. In Figures 6.8 and 6.9, we represent the evolutions (with respect to time) of the l^∞ and l^2-norms of the discrete solution and of the associated energy, obtained by considering $\alpha = 2$.

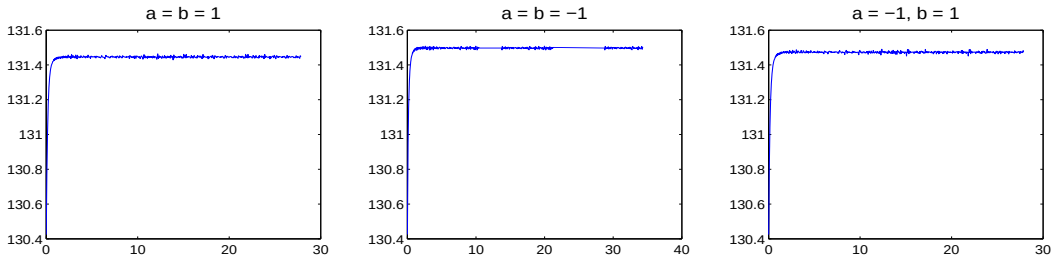


Fig. 6.8 – Evolutions of the energy with respect to time, for $p = 2, \alpha = 2, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$.

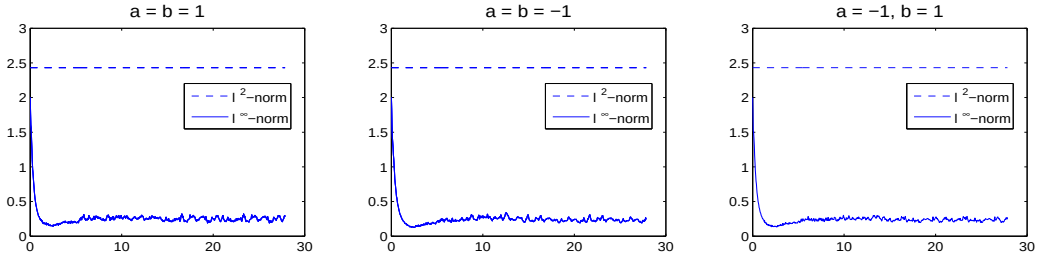


Fig. 6.9 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, \alpha = 2, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$.

As for the case $p = 1$, we observe that the dispersive effect prevails over the non-linearity. The evolutions of the norms in each of the contexts where $ab = \pm 1$ look similar. For this choice of α, the same observations derive from simulations when we consider $K = 32$, $L = M = 6$, $N_x = 128$, and $N_y = N_z = 32$.

Figure 6.10 presents the results of the experiments performed by setting now $\alpha = 5$.

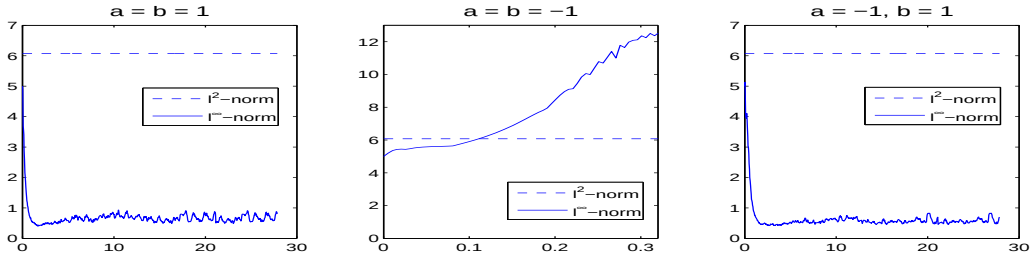


Fig. 6.10 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, \alpha = 5, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$.

In each of the contexts where $a = b = 1$ and $ab = -1$, we observe as previously that the dispersive effect prevails over the non-linearity. But in the context where $a = b = -1$, the behavior of the discrete solution looks different ; the solution has a tendency to blow up at the beginning of the evolution. Let us refine these results by using a reduced time step as well as larger values for the parameters N_x, N_y and N_z. In the experiments associated with Figure 6.11, we thus consider : $\Delta t = 10^{-4}$, $N_x = 512, N_y = N_z = 32$, and $L = M = 6$. It appears that the $l^\infty-$norm blows up in finite time and that the l^2-norm is consequently deteriorated from the blow-up instant.

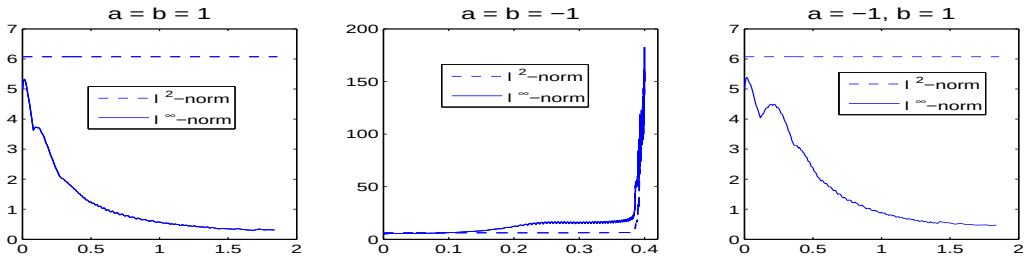


Fig. 6.11 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, \alpha = 5, s = 1, K = 50, L = M = 6, N_x = 512, N_y = N_z = 32, \Delta t = 10^{-4}$.

The theoretical result known from [Sau95], for $p = 2$, in the context where $a = b = -1$, is now exhibited numerically : the non-linearity is stronger than the dispersive effect and the solution blows up. The behavior of the solution is here completely different from the case where $p = 1$. In the other contexts, the non-linearity tries to prevail over the dispersive effect at the beginning of the evolution but after that, the solution disperses completely.

In order to study the influence of an initial datum of larger l^2-norm on the evolution of the solution, we use in the experiments associated with Figure 6.12 the same values of parameters as above, but set now $s = 0.5$.

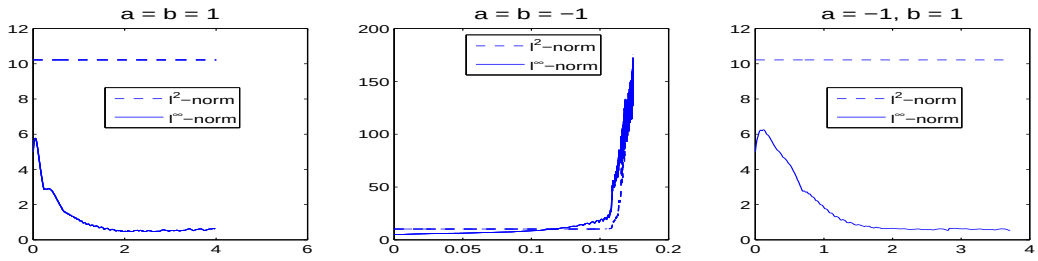


Fig. 6.12 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, \alpha = 5, s = 0.5, K = 50, L = M = 6, N_x = 512, N_y = N_z = 32, \Delta t = 10^{-4}$.

In the context where $a = b = -1$, the blow-up takes place earlier ; the l^2-norm is consequently deteriorated from the blow-up instant. In the other contexts, there is no evidence of a qualitative influence of the l^2-norm of the initial datum on the evolution of the solution. In these contexts ($a = b = 1$, $ab = -1$), where the dispersion seems to prevail against the non-linearity, let us inspect the effect of an initial datum of larger amplitude ; we set now $\alpha = 10$, $s = 1$. In the experiments associated with Figure 6.13, we also consider $K = 32$, $L = M = 4$, $N_x = 512$, $N_y = N_z = 16$, $\Delta t = 10^{-4}$.

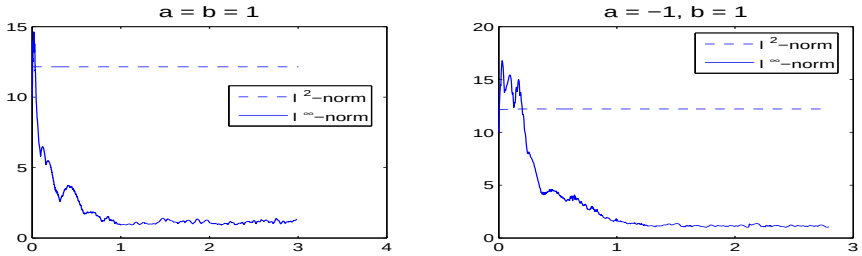


Fig. 6.13 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, \alpha = 10, s = 1, K = 32, L = M = 4, N_x = 512, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-4}$.

The observations are the same as above, and are also confirmed when we use larger values of N_x, N_y, N_z (*e.g.* with $N_x = 1024$, $N_y = N_z = 32$). Namely, in each of these three contexts, the solution has a tendency to blow up at the beginning of the evolution, but then disperses completely.

We also notice, in each of the contexts where $ab = \pm 1$, that the solution is subject to a more persistent non-linearity than when $p = 1$.

6.2.2.2 The case $p = 3$

We can already predict that, since the non-linearity was persistent with $p = 2$, the blow-up in finite time will be observed in the case $p = 3$ because of a stronger non-linearity.

Let us now fix $p = 3$. In our first experiments, associated with Figures 6.14 - 6.16, we have considered $s = 1$, $L = M = 4$, $N_x = 256$, $N_y = N_z = 16$ and $\Delta t = 10^{-3}$. Figures 6.14 and 6.15 show the evolutions (with respect to time) of the l^∞ and l^2-norms of the discrete solution, and of the associated energy, obtained when $K = 50$, $\alpha = 2$.

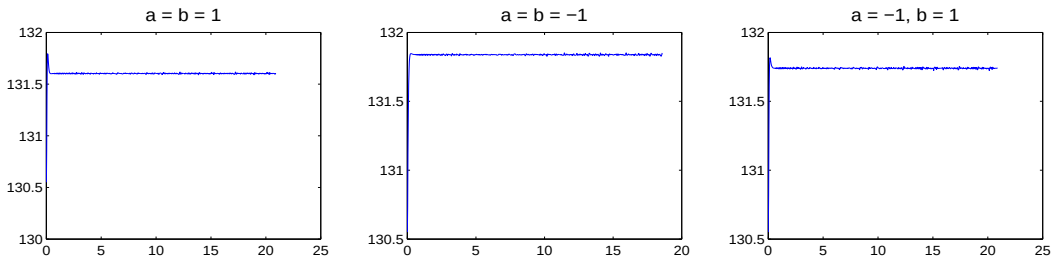


Fig. 6.14 – Evolutions of the energy with respect to time, for $p = 3, \alpha = 2, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$.

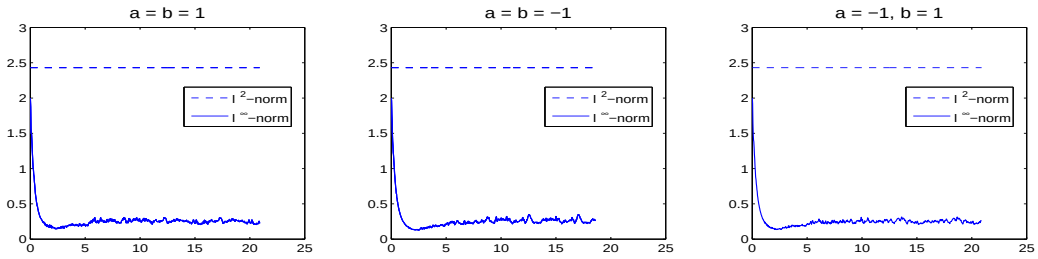


Fig. 6.15 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 3, \alpha = 2, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$.

The evolutions of the norms, in each of the contexts where $ab = \pm 1$, look similar, and as for $p = 1, 2$, the dispersive effect prevails over the non-linearity. Similar observations derive from simulations when using other values of parameters, namely with $\Delta t = 10^{-4}$, $K = 32$, $L = M = 6, 8$, $N_x = 512$, $N_y = N_z = 32, 64$.

Figure 6.16 shows the results obtained by considering now a slightly larger amplitude : $\alpha = 3$.

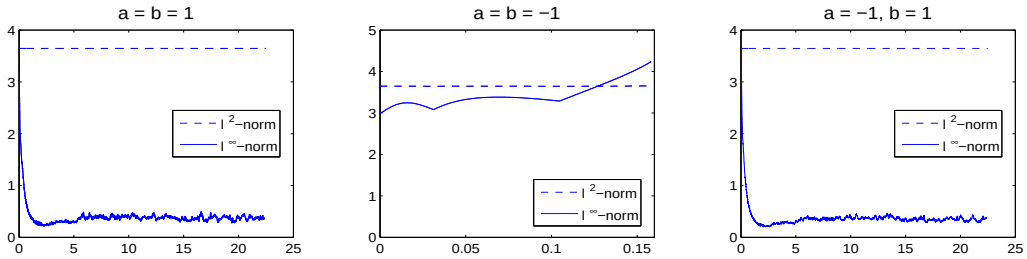


Fig. 6.16 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 3, \alpha = 3, s = 1, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$.

The observations remain the same as above, in each of the contexts where $a = b = 1$, and $ab = -1$. However, in the context where $a = b = -1$, the solution has a tendency to blow up. Let us refine the results by using larger values for L, M, N_x, N_y, N_z and reducing Δt. We take $L = M = 6$, $N_x = 512, N_y = N_z = 32$, $\Delta t = 10^{-4}$, and keep the same values for K, α, s as in the experiments associated with Figure 6.16.

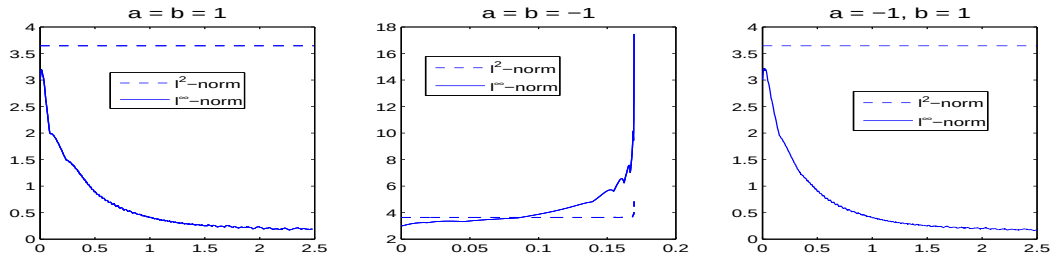


Fig. 6.17 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 3, \alpha = 3, s = 1, K = 32, L = M = 6, N_x = 512, N_y = N_z = 32, \Delta t = 10^{-4}$.

These experiments confirm, in the context where $a = b = -1$, that the non-linearity is effectively stronger than the dispersive effect. In the other contexts, where the dispersive effect seems to prevail over the non-linearity, let us inspect the influence of a slightly larger amplitude ; we thus consider $\alpha = 4$ in the experiments associated with Figure 6.18.

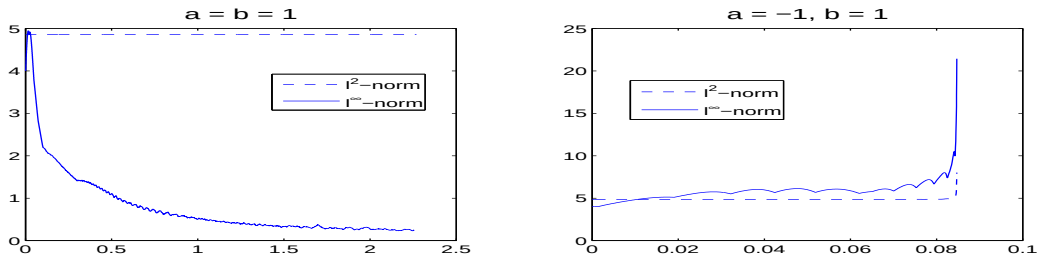


Fig. 6.18 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 3, \alpha = 4, s = 1, K = 32, L = M = 6, N_x = 512, N_y = N_z = 32, \Delta t = 10^{-4}$.

The results now show that the non-linearity is stronger than the dispersive effect in each of the contexts where $ab = -1$; the solution blows up in these contexts. Of course, the l^2-norm is consequently deteriorated from the blow-up instant.

When we inspect nearer the context where $a = b = 1$, by considering again a more large amplitude, $\alpha = 5$, we obtain the results represented in Figure 6.19 that allow us to notice that the solution blows up also in this context. The energy as well as the l^2-norm are consequently deteriorated from the blow-up instant. This blow-up of the solution, for positive transverse directions, reminds us of the numerical result presented by F. Hamidouche [Ham01] in the context of the generalized KP-II equation for which, when $p = 3$, the solution blows up for an initial datum of large amplitude.

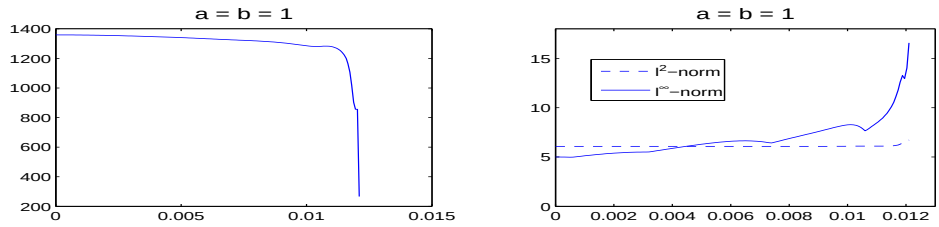


Fig. 6.19 – Evolutions of the energy at left, of the l^2-norm (- -) and of the $l^\infty-$norm (—) at right, with respect to time. Here, $p = 3, \alpha = 5, s = 1, K = 32, L = M = 6, N_x = 512, N_y = N_z = 32, \Delta t = 10^{-4}$.

The experiments associated with Figure 6.20, and performed by setting $s = 0.5$, allow us to study the influence of an initial datum of larger l^2-norm.

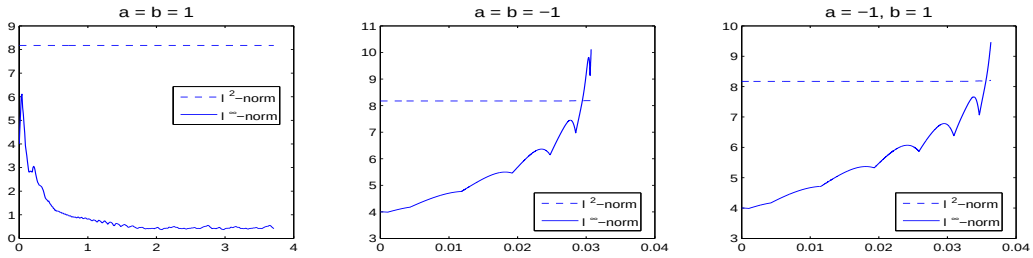


Fig. 6.20 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 3, \alpha = 4, s = 0.5, K = 32, L = M = 6, N_x = 512, N_y = N_z = 32, \Delta t = 10^{-4}$.

The evolution of the solution, in the context where $a = b = 1$, seems to not be influenced in a qualitative way by such an initial datum. However, in each of the contexts where $a = b = -1$, and $ab = -1$, the blow-up takes place earlier.

Let us now summarize our results. The effect of two negative transverse directions is much less regularizing than the effect of two positive or "opposite" transverse directions. Indeed, the discrete solution, in the context where $a = b = -1$, blows up in finite time when $p = 2$, whereas the one involved in each of the contexts where $a = b = 1$, and $ab = -1$, blows up in finite time when $p = 3$.

The results obtained in the case where $p = 3$ lead us to formulate the following conjecture.

Conjecture 6.2
Let $p \geq 3$. If $a = b = 1$ or $ab = -1$, then the solution of (6.2) with localized initial datum blows up in finite time.

6.3 Transverse instabilities in the y and $z-$directions

The generalized equation (6.2) admits as solution the line-soliton

$$\Phi_c(x,t) = \left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}\,c\right)^{1/p} \operatorname{sech}^{2/p}\left(\frac{p\sqrt{c}}{2}\,(x-ct)\right),$$

which is a solution of the generalized KdV equation. This represents a solitary wave, moving from left to right in the $x-$direction, at velocity c, without deformation. In this section, we study the evolution in time of this line-soliton perturbed in an infinitesimal way in the two transverse y and $z-$directions. We consider then the Cauchy problem reformulated in (6.3), by defining the initial datum u_0 as follows,

$$u_0(x,y,z) := \Phi_{c(y,z)}(x,0),$$

where $c(y,z) := c\left(1 + \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda_y} + \frac{2\pi z}{\lambda_z}\right)\right)$, with $\varepsilon > 0$ a fixed small value; this perturbed velocity is not uniform in the transverse directions, λ_y and λ_z are the wavelengths.

6.3.1 Non-generalized case : $p = 1$

We fix $p = 1$ in this subsection. In addition to the two previous sets of parameters, our numerical experiments will be performed with respect to diverse considerations of c, λ_y and λ_z.

In each of the contexts where $ab = \pm 1$, we perform simulations by fixing $K = 32$, $L = M = 4$, $N_x = 256$, $N_y = N_z = 16$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Also, we start by considering $\varepsilon = 10^{-2}$ and the context where $a = b = -1$.

In Figure 6.21, we represent the evolutions of the l^2 and $l^\infty-$norms of the discrete solution obtained respectively with $\lambda_y = \lambda_z = 0.01$, 2, 2.1 and 50, for $c = 2$.

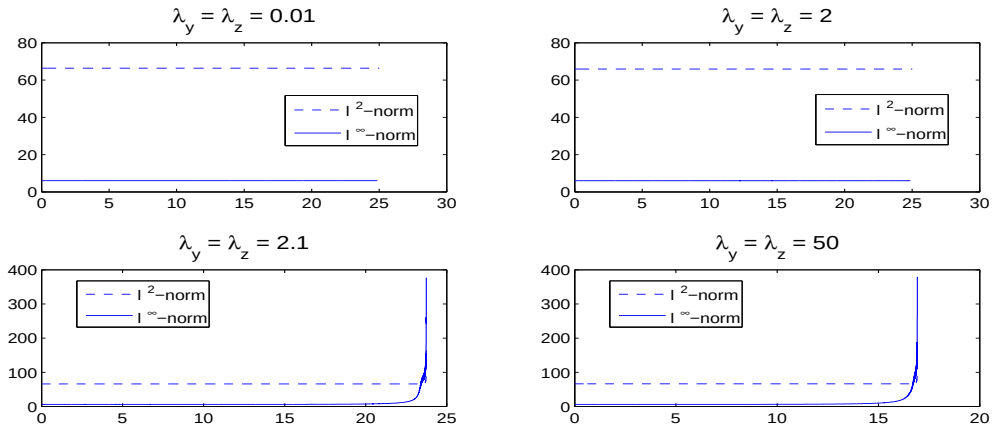


Fig. 6.21 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = b = -1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5\times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 2, 2.1, 50$, and $\varepsilon = 10^{-2}$.

It seems that for λ_y and λ_z bigger than λ^1, where $\lambda^1 \simeq 2.1$, the perturbed line-soliton blows up. For such wavelengths, the $l^\infty-$norm blows up in finite time, and the l^2-norm is consequently deteriorated from the blow-up instant. We notice that the larger the wavelengths are, the earlier the blow-up occurs. Similar results derive also from simulations by using larger values for K, L, M, N_x, N_y, N_z (*e.g.* with $K = 50, L = M = 6, N_x = 512, N_y = N_z = 32$) even with a slightly bigger time step, *e.g.* $\Delta t = 10^{-3}$.

In a general way and about the results of this section, let us mention that in presence of the blow-up of the $l^\infty-$norm, a deterioration of the l^2-norm, from the blow-up instant, will consequently be observed.

Other experiments are performed by considering now distinct values for λ_y and λ_z. Figure 6.22 presents the results obtained with $\lambda_y = 0.01, 2$ and $\lambda_z = 2.1, 50$.

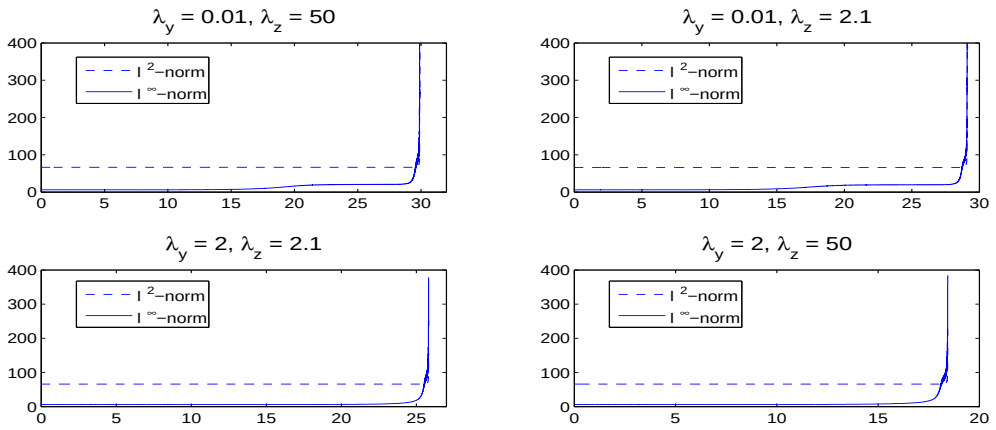


Fig. 6.22 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p=1, a=b=-1, c=2, K=32, L=M=4, N_x=256, N_y=N_z=16, \Delta t=5\times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y=0.01, 2$, $\lambda_z=2.1, 50$ and $\varepsilon=10^{-2}$.

There exists a critical transverse wavelength $\lambda_2^1\simeq 2.1$ such that if λ_y or λ_z is larger than λ_2^1, the perturbed line-soliton blows up.

We want now to inspect the influence of the velocity as regards this observation. The change of functions

$$\widetilde{u}(x,y,z,t):=\frac{1}{c}\,u(\frac{x}{\sqrt{c}},\frac{y}{c},\frac{z}{c},\frac{t}{c\sqrt{c}}),$$

applied to (6.2), for $p=1$, gives

$$\widetilde{u}_t+\widetilde{u}\widetilde{u}_x+\widetilde{u}_{xxx}+a\partial_x^{-1}\widetilde{u}_{yy}+b\partial_x^{-1}\widetilde{u}_{zz}\;=\;0\,.$$

The initial datum becomes

$$\widetilde{u}_0(x,y,z)=3\left(1+\varepsilon\cos\left(\frac{2\pi y}{c\lambda_y}+\frac{2\pi z}{c\lambda_z}\right)\right)\operatorname{sech}\left(\frac{x}{2}\sqrt{1+\varepsilon\cos\left(\frac{2\pi y}{c\lambda_y}+\frac{2\pi z}{c\lambda_z}\right)}\right).$$

We then notice that propagating a line-soliton of velocity c perturbed in the two transverse directions by the wavelengths λ_y and λ_z is equivalent to propagating a line-soliton of velocity equal to 1 perturbed in the two transverse directions by the wavelengths $c\lambda_y$ and $c\lambda_z$.

The experiments with $c=2$ show that there exists a critical value λ_2^1 ($\simeq 2.1$) that indicates an "instability condition". Of course, from the previous change of functions, if λ_y or λ_z is larger than $\lambda_c^1:=\frac{4.2}{c}$, then the perturbed line-soliton blows up and is hence unstable.

Let us now confirm this indication by taking $c=4$. Figure 6.23 presents the results obtained by considering then identical wavelengths : $\lambda_y=\lambda_z=0.01$, 1, 1.1, 50.

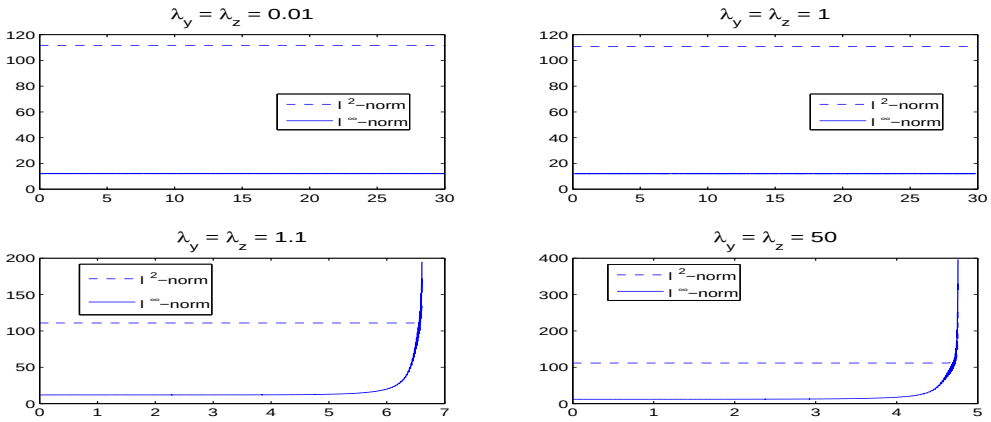


Fig. 6.23 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = b = -1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5\times10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 1, 1.1, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

By contrast, the experiments associated with Figure 6.24 consider distinct wavelengths : $\lambda_y = 0.01, 1$ and $\lambda_z = 1.1, 50$.

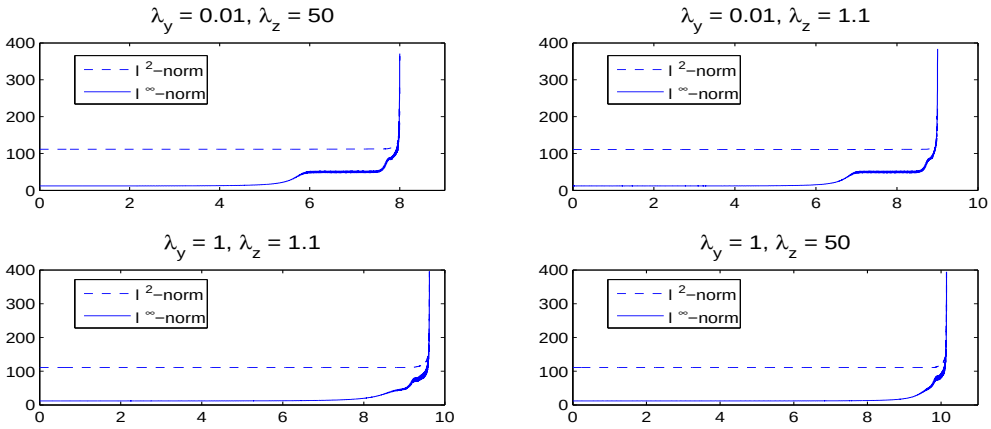


Fig. 6.24 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = b = -1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5\times10^{-4}$. Here, $\lambda_y = 0.01, 1$, $\lambda_z = 1.1, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

The results represented in Figures 6.23 and 6.24 lead us to the observations that were also reported for $c = 2$.

We propose to extend our experiments to the case of very large wavelengths in order to inspect numerically the following aspect : when λ_y and λ_z tend to infinity, the formal limit of the perturbed line-soliton gives $\Phi_{c(1+\varepsilon)}$, which does not depend on the transverse variables. In particular, the solution of (6.2) with $\Phi_{c(1+\varepsilon)}$ as initial datum is stable [Ben72].

Figure 6.25 presents the results obtained by considering then $\lambda_y = 1, 1.1, 10^8, 10^9$ and $\lambda_z = 10^8, 10^9$.

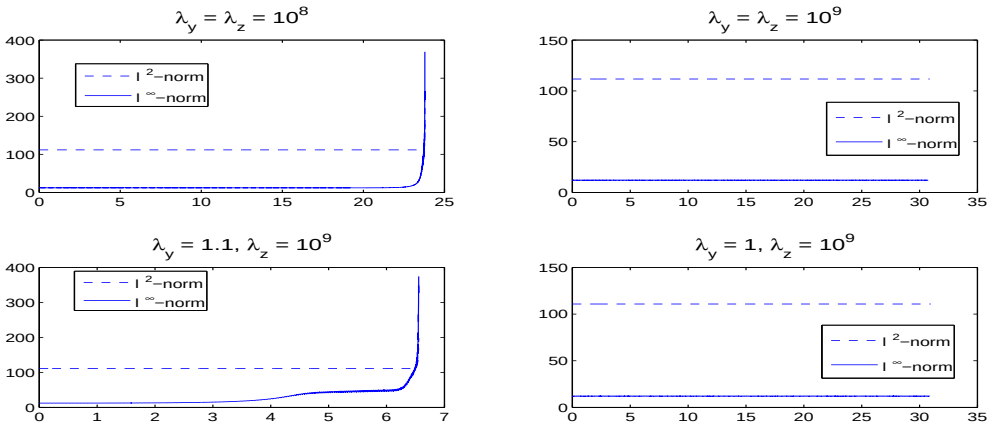


Fig. 6.25 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = b = -1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5\times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = 1, 1.1, 10^8, 10^9$, $\lambda_z = 10^8, 10^9$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

We thus deduce, in the context where $a = b = -1$, that there exists another critical transverse wavelength λ_c^2 such that if $\lambda_y, \lambda_z > \lambda_c^2$, the perturbed line-soliton no longer blows up.

Let us now consider the contexts where $ab = -1$, by using again $c = 4$ in the experiments. Figures 6.26 and 6.27 show the results obtained respectively for $a = 1, b = -1$ and $a = -1, b = 1$, when $\lambda_y = \lambda_z = 0.01$, 1.1, 50 and $\lambda_y = 0.01$ with $\lambda_z = 50$.

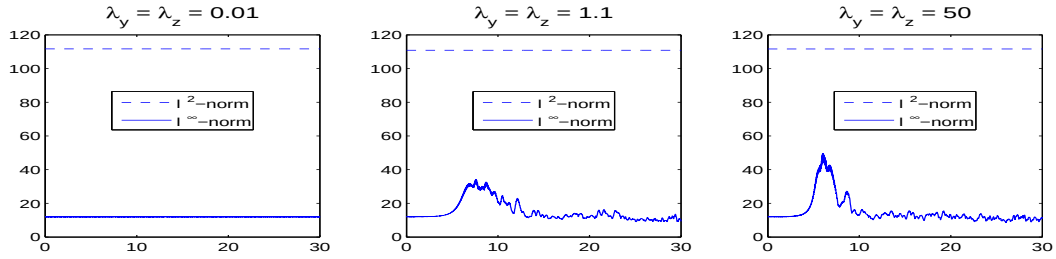


Fig. 6.26 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = 1, b = -1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 1.1, 50$, $\lambda_y = 0.01, \lambda_z = 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

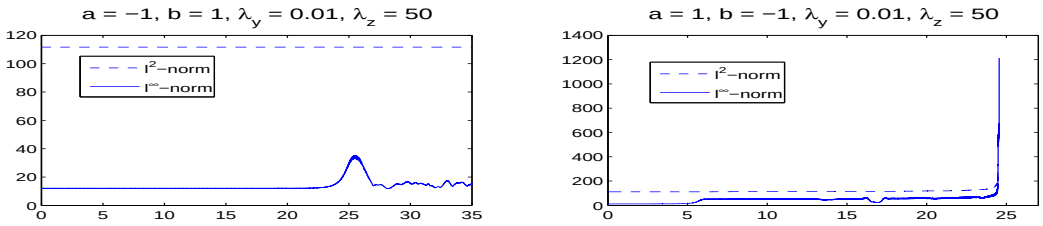


Fig. 6.27 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = -1, b = 1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 1.1, 50$, $\lambda_y = 0.01, \lambda_z = 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

We observe the same evolutions of the norms in the contexts where $ab = -1$, and when $\lambda_y = \lambda_z$. This was foreseeable due to the symmetry of u_0 (in that case) and to the one of (6.2) related to the y and $z-$directions.

The experiments associated with Figure 6.28 are performed in the context of very large values of wavelengths, and for $ab = -1$; here also, the same evolutions of the norms are observed when $\lambda_y = \lambda_z$. This is not the case when $\lambda_y \neq \lambda_z$ as, in particular, indicate Figures 6.26 - 6.28.

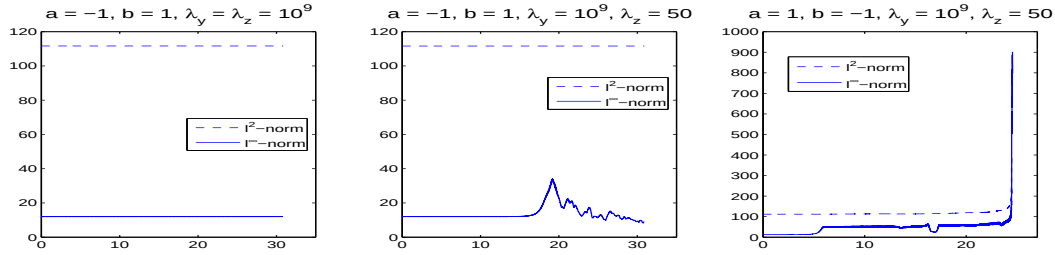


Fig. 6.28 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, ab = -1$, $c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here $\lambda_y = 10^9$, $\lambda_z = 50, 10^9$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

We notice in the context where $a = 1$, $b = -1$, respectively $a = -1$, $b = 1$, a tendency of blow-up when $\lambda_c^1 < \lambda_y < \lambda_c^2$, respectively $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$ (see Figures 6.26 - 6.28). It seems that another form of stability has appeared (see *e.g.* the cases $\lambda_y = \lambda_z = 1.1, 50$ in Figures 6.26 and 6.27). On the other hand, when $\lambda_y < \lambda_c^1$, or $\lambda_y > \lambda_c^2$, and $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$ (respectively $\lambda_z < \lambda_c^1$, or $\lambda_z > \lambda_c^2$, and $\lambda_c^1 < \lambda_y < \lambda_c^2$), where $0 < \lambda_c^1 \ll \lambda_c^2$ are critical values depending only on c, the corresponding solution blows up. These observations can also be explained partly by the fact that the solution of KP-I with a line-soliton uniquely perturbed in the $y-$direction, as initial datum, is unstable for a sufficiently large wavelength. We indicate that even for a larger velocity, *e.g.* with $c = 5$, the same observations derive from the simulations.

The experiments associated with Figure 6.29 consider the last situation, $a = b = 1$, and are also performed for $c = 4$. Here, the perturbed line-soliton seems to never blow up.

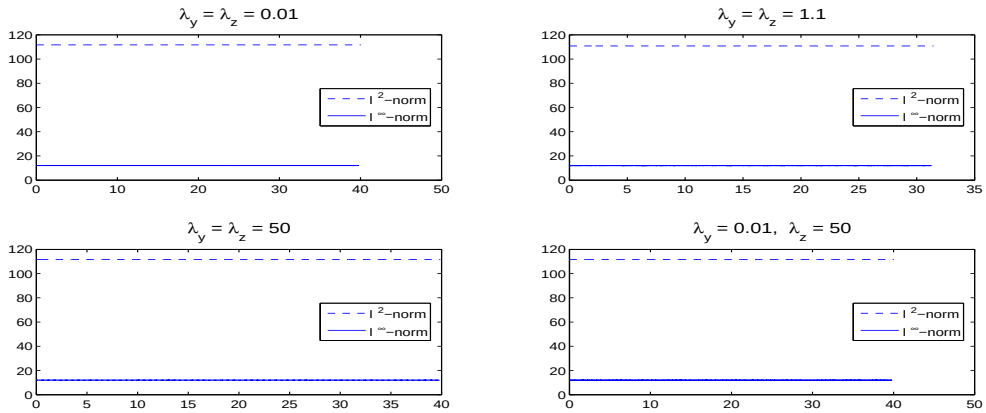


Fig. 6.29 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = b = 1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 1.1, 50$, $\lambda_y = 0.01, \lambda_z = 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

We want now to study the possible influence of a smaller value of ε on the observations noticed previously. We thus set : $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$. In order to compare the results represented in Figures 6.23, 6.26 and 6.27 with those that will be obtained here, we use in the present experiments the new value of ε, and the same values that were affected to the other parameters for providing these previous results. Figures 6.30 and 6.31 present the results obtained in the context where $a = b = -1$. Contrary to the experiments associated with Figure 6.30, those associated with Figure 6.31 consider very large wavelengths.

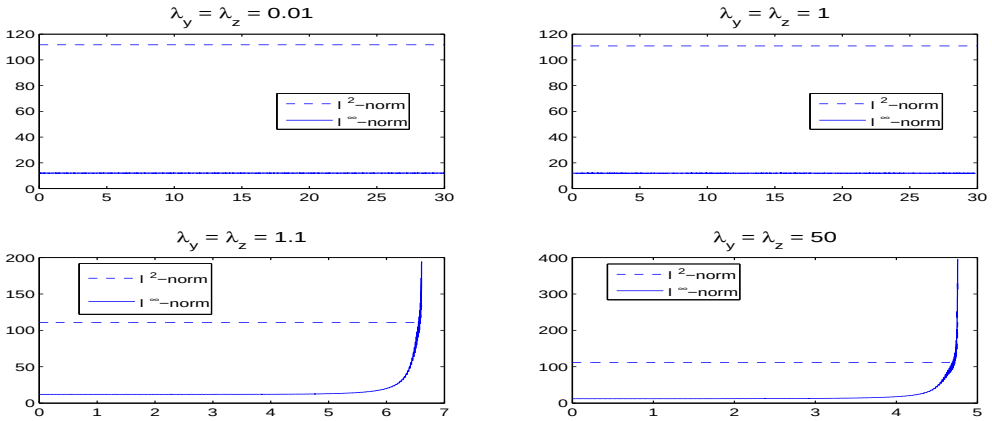


Fig. 6.30 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = b = -1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 1, 1.1, 50$ and $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$.

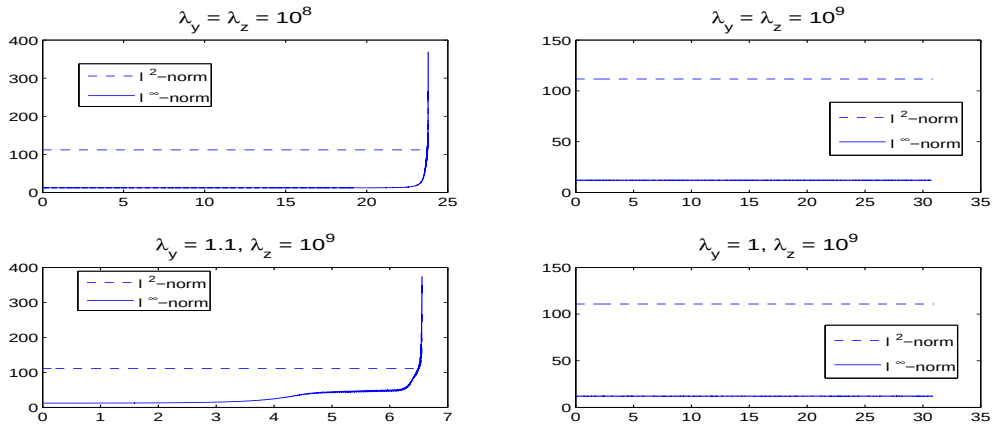


FIG. 6.31 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = b = -1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5\times 10^{-4}$. Here $\lambda_y = 10^9$, $\lambda_z = 50, 10^9$ and $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$.

Figures 6.32 - 6.34 show the results obtained in the contexts where $ab = -1$, with both small and large values of wavelengths. Let us mention that the same results as in Figure 6.32 are obtained from simulations when $a = 1$, $b = -1$. The behaviors of the norms differ when $\lambda_y \neq \lambda_z$ and in the contexts where $ab = -1$.

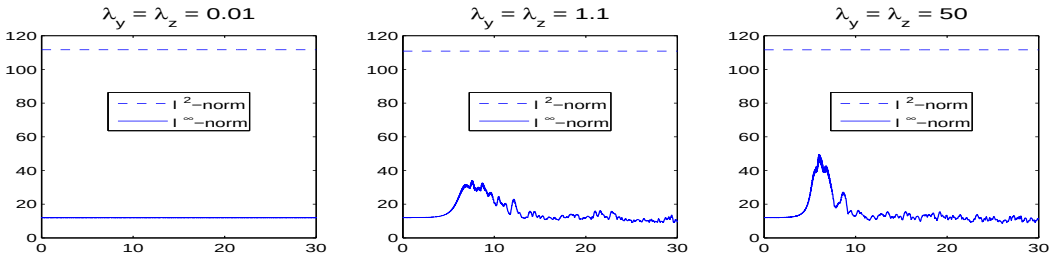


FIG. 6.32 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = 1, b = -1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 1, 1.1, 50$ and $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$.

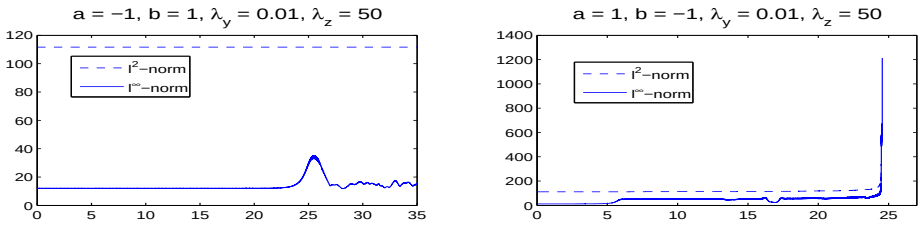


FIG. 6.33 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = -1, b = 1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 1, 1.1, 50$ and $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$.

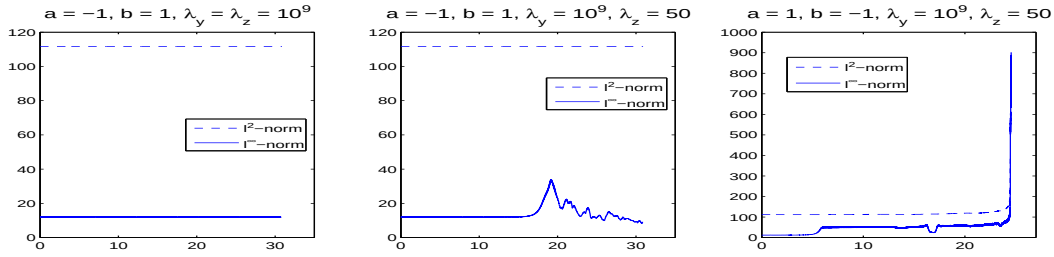


FIG. 6.34 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, ab = -1$, $c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here $\lambda_y = 10^9$, $\lambda_z = 50, 10^9$ and $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$.

For this smaller value of ε, we report in fact the same observations as before. In particular, for $a = b = -1$, there exist two critical transverse wavelengths $\lambda_4^1 \simeq 1.1$ and $\lambda_4^2 \gg \lambda_4^1$, such that if $\lambda_4^1 < \lambda_y < \lambda_4^2$ or $\lambda_4^1 < \lambda_z < \lambda_4^2$, the perturbed line-soliton blows up.

6.3.2 Generalized case : $p = 2$

We want here to study the transverse instabilities in the case where $p = 2$.

Our experiments are performed in each of the contexts where $ab = \pm 1$, by fixing $K = 32$, $L = M = 4$, $N_x = 256$, $N_y = N_z = 16$ and $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$. We start by considering $\varepsilon = 10^{-2}$, and the context where $a = b = -1$. Figure 6.35 presents, for $c = 1$, the evolutions of the l^2 and $l^\infty-$norms of the discrete solution obtained respectively with $\lambda_y = \lambda_z = 0.01$, 0.5, 0.6 and 50.

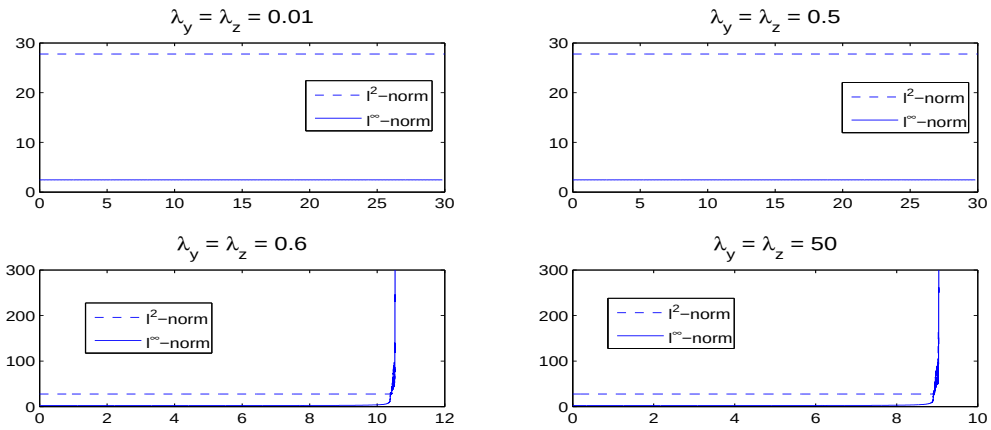


FIG. 6.35 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = b = -1, c = 1, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5\times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 0.5, 0.6, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

As Figure 6.36 shows, similar results derive from simulations with a smaller value of ε, namely with $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$.

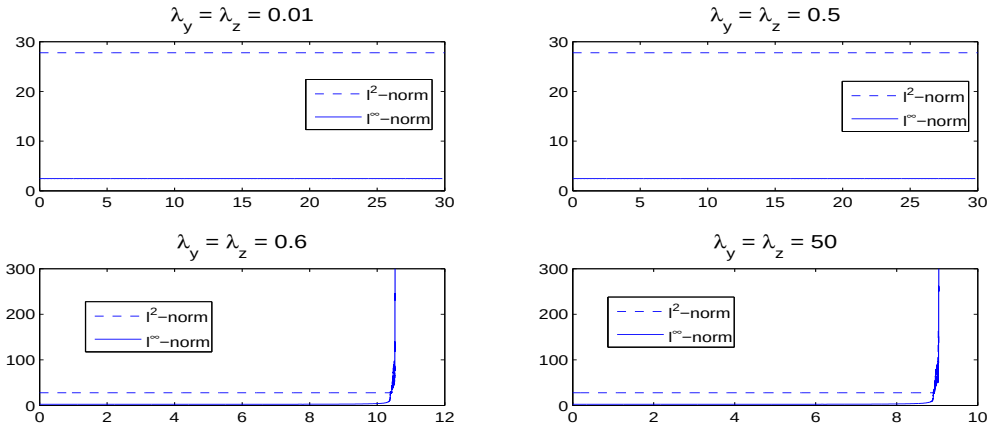


FIG. 6.36 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = b = -1, c = 1, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5\times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 0.5, 0.6, 50$ and $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$.

Independently of these small values of ε, we notice that there exists once again a critical transverse wavelength $\lambda_1^1 \simeq 0.6$ such that if λ_y and λ_z are larger than λ_1^1, the perturbed line-soliton blows up.

Figure 6.37 shows the results obtained, again for $\varepsilon = 10^{-2}$ and $c = 1$, but now from distinct wavelengths ; $\lambda_y = 0.01, 0.5$, and $\lambda_z = 0.6, 50$.

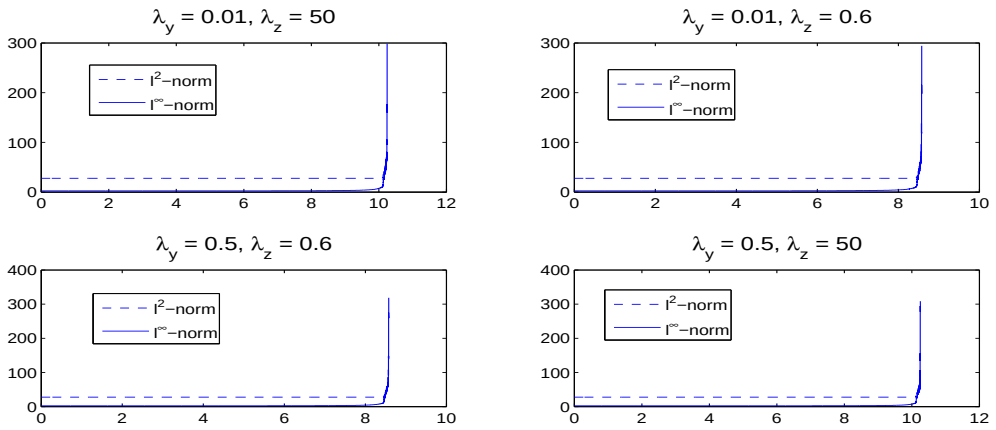


Fig. 6.37 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p=2, a=b=-1, c=1, K=32, L=M=4, N_x=256, N_y=N_z=16, \Delta t=5\times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y=0.01, 0.5$, $\lambda_z=0.6, 50$ and $\varepsilon=10^{-2}$.

As it was the case for $p=1$, there exists a critical transverse wavelength $\lambda_1^1\simeq 0.6$ such that if λ_y or λ_z is larger than λ_1^1, the perturbed line-soliton blows up.

Let us now inspect the influence of the velocity as regards these observations. The change of functions

$$\widetilde{u}(x,y,z,t):=\frac{1}{c^{1/p}}\,u(\frac{x}{\sqrt{c}},\frac{y}{c},\frac{z}{c},\frac{t}{c\sqrt{c}}),$$

applied to (6.2), gives

$$\widetilde{u}_t+\widetilde{u}^p\widetilde{u}_x+\widetilde{u}_{xxx}+a\partial_x^{-1}\widetilde{u}_{yy}+b\partial_x^{-1}\widetilde{u}_{zz}\;=\;0\,.$$

The initial datum becomes then

$$\widetilde{u}_0(x,y,z)=\left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}\right)^{1/p}\left(1+\varepsilon\cos\left(\frac{2\pi y}{c\lambda_y}+\frac{2\pi z}{c\lambda_z}\right)\right)^{1/p}$$
$$\times\,\mathrm{sech}\left(\frac{p\,x}{2}\sqrt{1+\varepsilon\cos\left(\frac{2\pi y}{c\lambda_y}+\frac{2\pi z}{c\lambda_z}\right)}\right).$$

We notice that propagating a line-soliton of velocity c, perturbed in the two transverse directions, is equivalent to propagating a line-soliton of velocity equal to 1 perturbed in the same directions by the wavelengths $c\lambda_y$ and $c\lambda_z$.

The experiments, with $c=1$, show that there exists a critical transverse wavelength $\lambda_1^1\simeq 0.6$. The previous change of functions indicates that if $c\lambda_y$ or $c\lambda_z$ is larger than λ_1^1, then the perturbed line-soliton is unstable.

Let us confirm this indication by taking $c=2$. The results represented in Figure 6.38 are obtained for equal wavelengths : $\lambda_y=\lambda_z=0.01, 0.2, 0.3$ and 50.

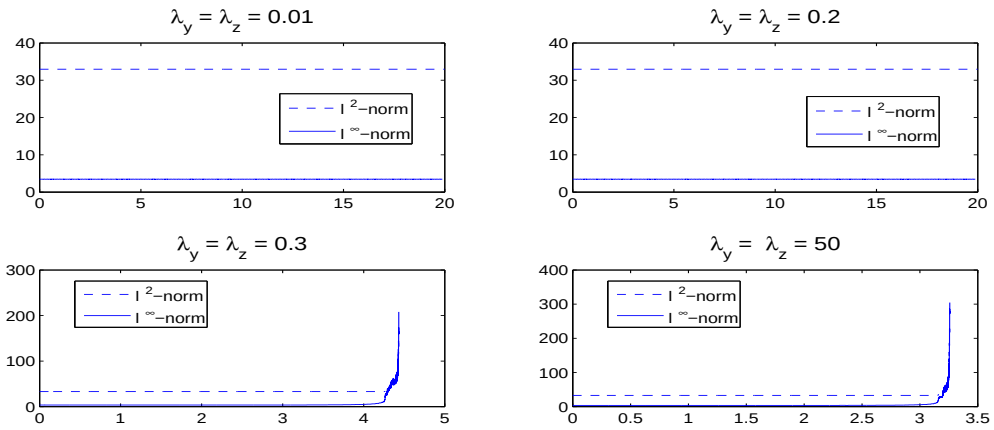


Fig. 6.38 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = b = -1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5\times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 0.2, 0.3, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

By reproducing the previous experiments but with distinct wavelengths, $\lambda_y = 0.01, 0.2$, $\lambda_z = 0.3, 50$, we obtain the results represented in Figure 6.39.

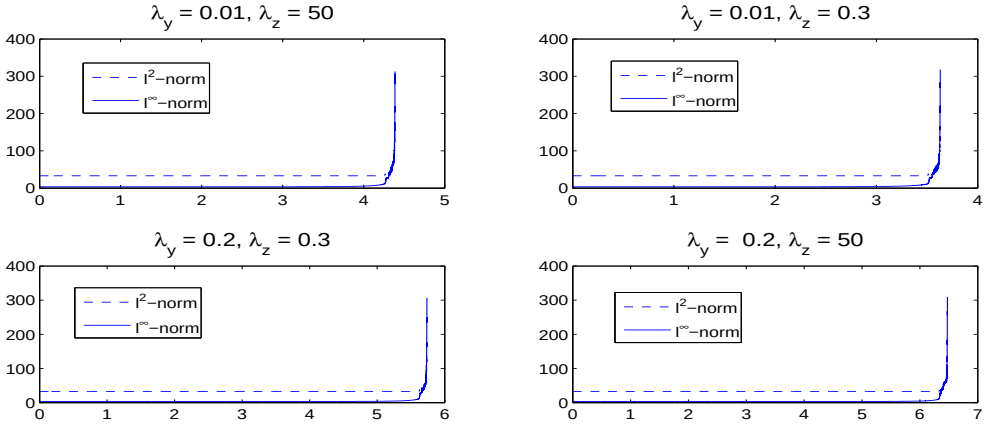


Fig. 6.39 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = b = -1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5\times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = 0.01, 0.2$, $\lambda_z = 0.3, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

In what follows, we perform experiments in the contexts where $ab = -1$, and choose to display the results only for a velocity $c = 2$; the observations for $c = 1$ being similar. Figure 6.40 presents in the situation where $a = -1$, $b = 1$, the evolutions of the l^2- and $l^\infty-$norms of the discrete solution obtained respectively for $\lambda_y = \lambda_z = 0.01$, 0.2, 0.3 and 50.

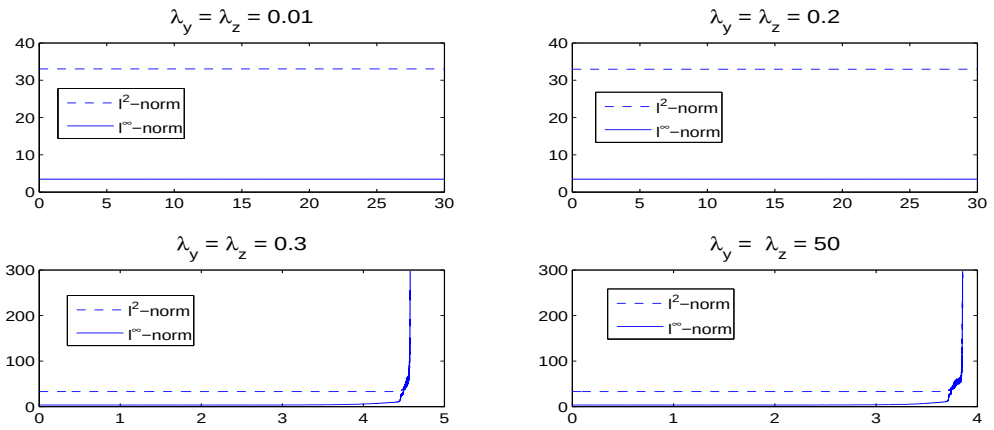


Fig. 6.40 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = 1, b = -1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 0.2, 0.3, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

The same evolutions of the norms derive from the simulations when we consider $a = 1$, $b = -1$; this is justified from the argument previously mentioned in the context where $\lambda_y = \lambda_z$.

Figure 6.41 presents the results obtained by reproducing the experiments in the context where $a = 1$, $b = -1$, but for distinct wavelengths; $\lambda_y = 0.01, 0.2$ and $\lambda_z = 0.3, 50$.

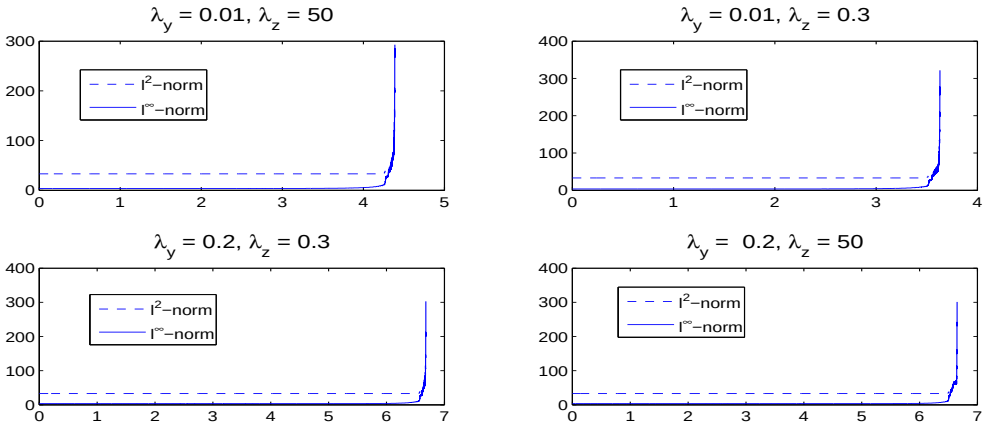


Fig. 6.41 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = 1, b = -1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = 0.01, 0.2$, $\lambda_z = 0.3, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

By considering now the context where $a = -1$, $b = 1$, with the previous distinct wavelengths, we obtain the results represented in Figure 6.42.

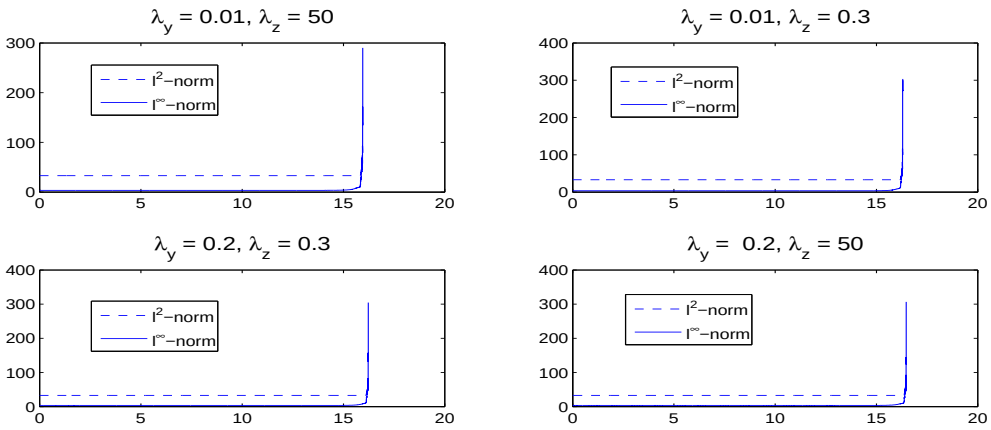


FIG. 6.42 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = -1, b = 1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = 0.01, 0.2$, $\lambda_z = 0.3, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

As in the situation where $a = b = -1$, there exists also here a critical transverse wavelength, $\lambda_2^1 \simeq 0.3$, such that if λ_y or λ_z is larger than λ_2^1, then the perturbed line-soliton is unstable.

Let us now inspect numerically the following phenomenon studied in [Ben72]. Of course, when λ_y and λ_z tend to infinity, the formal limit of the perturbed line-soliton gives $\Phi_{c(1+\varepsilon)}$, which is independent of the transverse variables ; the solution of (6.2) with $\Phi_{c(1+\varepsilon)}$ as initial datum is stable as long as $p < 4$ (see [Ben72]). In the experiments associated with Figure 6.43, we have considered $a = b = -1$ and used very large wavelengths ; $\lambda_y = 0.2, 50, 10^8, 10^9$ and $\lambda_z = 10^8, 10^9$.

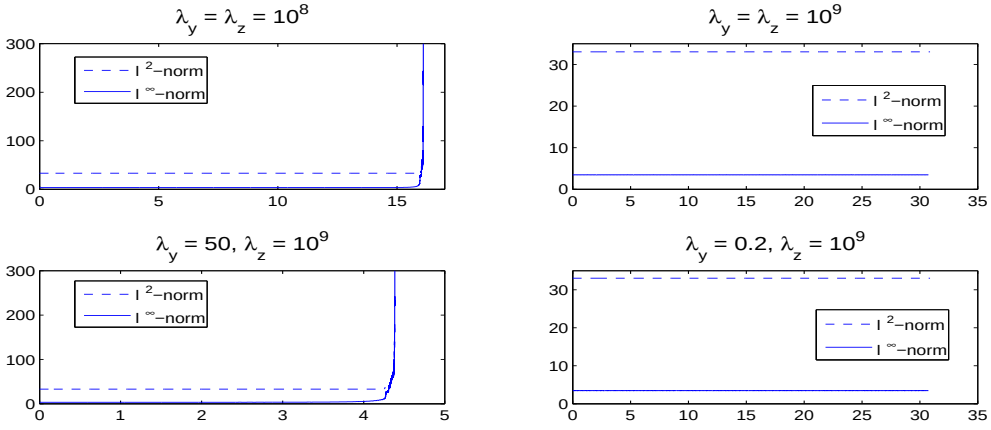


FIG. 6.43 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = b = -1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = 0.2, 50, 10^8, 10^9$, $\lambda_z = 10^8, 10^9$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

There exists another critical transverse wavelength λ_c^2 such that if $\lambda_y, \lambda_z > \lambda_c^2$, the perturbed line-soliton no longer blows up. The same observation derives from simulations when $ab = -1$.

In the last context where $a = b = 1$, Figure 6.44 shows the results obtained with both equal and distinct wavelengths.

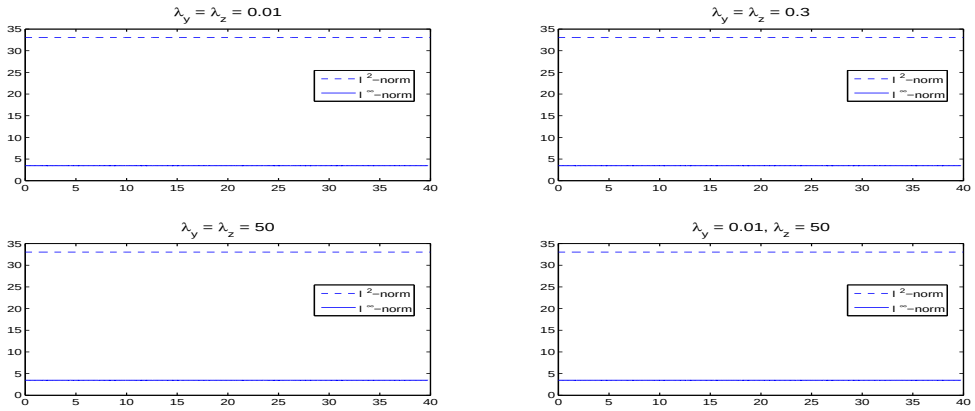


Fig. 6.44 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time for $p = 2, a = b = 1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 0.3, 50$, $\lambda_y = 0.01, \lambda_z = 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

The perturbed line-soliton seems to never blow up ; this observation also results from simulations when we consider $c = 1$, or use larger values for K, L, M, N_x, N_y, N_z (*e.g.* with $K = 50, L = M = 6, N_x = 512, N_y = N_z = 32$).

Let us now summarize the numerical observations of this section. The experiments for $p = 1, 2$ show that when the line-soliton is perturbed in the two transverse directions by neither very small nor very large wavelengths, the associated discrete solution blows up. More precisely, when $p = 1, 2$ and $a = b = -1$, respectively when $p = 2$ and $ab = -1$, we observe that there exist two critical transverse wavelengths $0 < \lambda_c^1 \ll \lambda_c^2$, depending only on c, such that the discrete solution, with the perturbed line-soliton as initial datum, blows up (and is hence unstable) if $\lambda_c^1 < \lambda_y < \lambda_c^2$ or $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$. Typically, $\lambda_c^1 \simeq \dfrac{4.2}{c}$ when $p = 1$, and $\lambda_c^1 \simeq \dfrac{0.6}{c}$ when $p = 2$. Let us mention that, in the (2D–) context of the generalized KP-I equation (with $p = 2$), a similar numerical study achieved in [Ham01] provides a critical wavelength approximately equal to $\dfrac{5.559}{c}$.

Another interesting observation is the one reported when $p = 1$ and $a = 1, b = -1$, respectively $a = -1, b = 1$. We notice that the discrete solution, with the perturbed line-soliton as initial datum, blows up if $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$, respectively $\lambda_c^1 < \lambda_y < \lambda_c^2$, and if the wavelength in the positive transverse direction is either small ($\lambda_y < \lambda_c^1$, respectively $\lambda_z < \lambda_c^1$) or very large ($\lambda_y > \lambda_c^2$, respectively $\lambda_z > \lambda_c^2$).

These observations lead us to formulate the following conjecture.

Conjecture 6.3
For $\varepsilon > 0$ sufficiently small, let u_0 be the perturbed line-soliton of velocity $c(y,z) := c(1+\varepsilon\cos(\frac{2\pi y}{\lambda_y}+\frac{2\pi z}{\lambda_z}))$, where $\lambda_y, \lambda_z > 0$.

Let $p \geq 1$, and $a = b = -1$. There exist two critical transverse wavelengths $0 < \lambda_c^1 \ll \lambda_c^2$, depending only on c, such that the solution of the generalized 3D-KP equation (6.2), with u_0 as initial datum, blows up in finite time (in particular the line-soliton is unstable under the flow of (6.2)) if $\lambda_c^1 < \lambda_y < \lambda_c^2$ or $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$.

Let $p \geq 2$, and $a = 1$, $b = -1$, respectively $a = -1$, $b = 1$. There exist two critical transverse wavelengths $0 < \lambda_c^1 \ll \lambda_c^2$, depending only on c, such that the solution of the generalized 3D-KP equation (6.2), with u_0 as initial datum, blows up in finite time if $\lambda_c^1 < \lambda_y < \lambda_c^2$ or $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$.

Let $p = 1$, and $a = 1$, $b = -1$, respectively $a = -1$, $b = 1$. There exist two critical transverse wavelengths $0 < \lambda_c^1 \ll \lambda_c^2$, depending only on c, such that the solution of the generalized 3D-KP equation (6.2), with u_0 as initial datum, blows up in finite time if $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$, $\lambda_y < \lambda_c^1$ or $\lambda_y > \lambda_c^2$, respectively $\lambda_c^1 < \lambda_y < \lambda_c^2$, $\lambda_z < \lambda_c^1$ or $\lambda_z > \lambda_c^2$.

6.4 Transverse instability in the $z-$direction

As mentioned earlier, we consider the Zaitsev soliton

$$\psi_c(x,y,t) = 12\alpha^2 \frac{1-\beta\cosh(\alpha x-\omega t)\cos(\delta y)}{(\cosh(\alpha x-\omega t)-\beta\cos(\delta y))^2},$$

where

$$\beta = \sqrt{\frac{\delta^2-3\alpha^4}{\delta^2}}\ ,\ \omega = \frac{\delta^2+\alpha^4}{\alpha}\ ,\ c = \frac{\omega}{\alpha}\ ,\ 3\alpha^4 < \delta^2\,.$$

We want to study the evolution, subject to (6.2), of the Zaitsev soliton when it is perturbed in the second transverse direction. We then consider now

$$u_0(x,y,z) := \psi_{c(z)}(x,y,0),$$

as the initial datum associated with (6.2). The velocity is here slightly perturbed in the $z-$direction ; namely, $c(z) := c\left(1+\varepsilon\cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda_z}\right)\right)$, with $\varepsilon > 0$ sufficiently small and $\lambda_z > 0$ a wavelength.

We fix in this section $p = 1$, and $a = -1$. Our numerical simulations will be performed in each of the contexts where $b = \pm 1$.

In what follows, we set $\delta = \dfrac{\pi}{L}$ and fix $K = 32$, $L = 12$, $M = 4$, $N_x = 256$, $N_y = 32$, $N_z = 16$, $\Delta t = 5\times 10^{-4}$. The value of L is larger than in the previous sections in such a way that the present initial datum u_0 also satisfies (6.5) numerically. Moreover, this value allows us to consider δ in such a way that we can affect to α values that are not very small. Let us set on the other hand $\varepsilon = 10^{-2}$. The results represented in Figure 6.45 concern the context where $b = -1$, and show for $c = 1$ the evolutions of the l^2 and $l^\infty-$norms of the discrete solution obtained respectively with $\lambda_z = 0.01$, 0.5, 0.6 and 50. Similar results

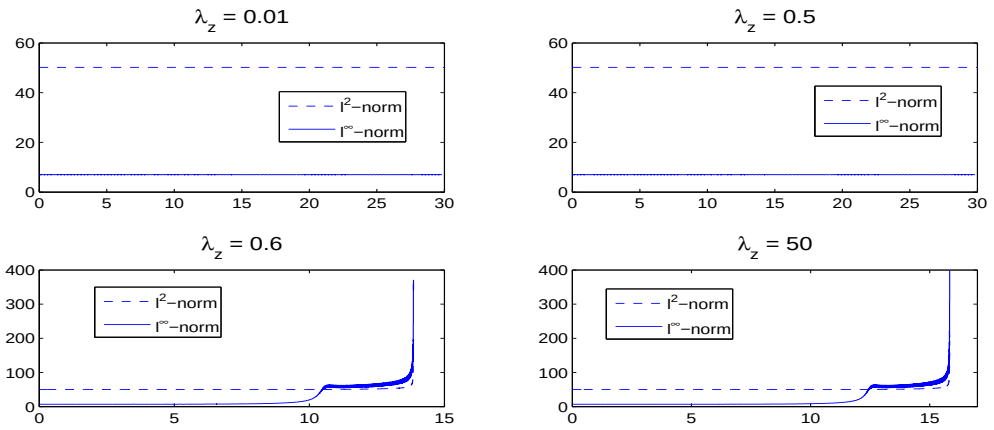


Fig. 6.45 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $b=-1, c=1, K=32, L=12, M=4, N_x=256, N_y=32, N_z=16, \Delta t=5\times 10^{-4}$. Here, $\lambda_z=0.01, 0.5, 0.6, 50$ and $\varepsilon=10^{-2}$.

derive from simulations, even by using a slightly bigger time step, *e.g.* $\Delta t=10^{-3}$, with larger values of K, L, N_x, N_y (*e.g.* with $K=50, L=24, N_x=512, N_y=64$).
We notice that there exists a critical transverse wavelength $\lambda_1^1\simeq 0.6$ such that if $\lambda_z>\lambda_1^1$, the solution blows up. About the results of this section also, let us already mention that in presence of the blow-up of the $l^\infty-$norm, a deterioration of the l^2-norm, from the blow-up instant, will consequently be observed.

Let us inspect now the influence of the velocity as regards this observation. The change of functions

$$\widetilde{u}(x,y,z,t):=\frac{1}{c}\,u(\frac{x}{\sqrt{c}},\frac{y}{c},\frac{z}{c},\frac{t}{c\sqrt{c}}),$$

applied to (6.2), for $p=1$, gives

$$\widetilde{u}_t+\widetilde{u}\widetilde{u}_x+\widetilde{u}_{xxx}+a\partial_x^{-1}\widetilde{u}_{yy}+b\partial_x^{-1}\widetilde{u}_{zz}\;=\;0\,.$$

The initial datum becomes then

$$\widetilde{u}_0(x,y,z)=12\widetilde{\alpha}^2\frac{1-\beta\cosh(\widetilde{\alpha}x)\cos(\widetilde{\delta}y)}{(\cosh(\widetilde{\alpha}x)-\beta\cos(\widetilde{\delta}y))^2},$$

where

$$\beta=\sqrt{\frac{\widetilde{\delta}^2-3\widetilde{\alpha}^4}{\widetilde{\delta}^2}}\;,\;\widetilde{\omega}=\frac{\widetilde{\delta}^2+\widetilde{\alpha}^4}{\widetilde{\alpha}}\;,\;3\widetilde{\alpha}^4<\widetilde{\delta}^2\;,\;\widetilde{c}=\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\alpha}}=1\;\text{ and }\;\widetilde{c}(z)=\left(1+\varepsilon\cos\left(\frac{2\pi z}{c\lambda_z}\right)\right).$$

We thus notice that propagating a Zaitsev soliton of velocity c perturbed in the transverse $z-$direction by the wavelength λ_z is equivalent to propagating a Zaitsev soliton of velocity 1 perturbed in the same direction by the wavelength $c\lambda_z$.

The above change of functions indicates that if $\lambda_z>\lambda_c^1:=\frac{\lambda_1^1}{c}$, the solution blows up in finite time. This is confirmed by the results of Figure 6.46 obtained also in the context

where $b = -1$, but by considering now $c = 2$. This figure shows the evolutions of the l^2 and $l^\infty-$norms of the discrete solution, obtained respectively with $\lambda_z = 0.01$, 0.2, 0.3 and 50.

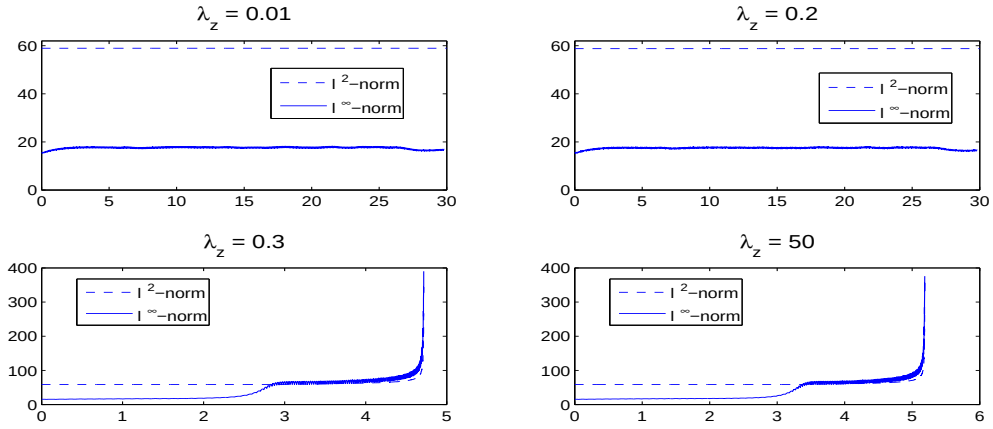


Fig. 6.46 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $b = -1, c = 2, K = 32, L = 12, M = 4, N_x = 256, N_y = 32, N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_z = 0.01, 0.2, 0.3, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

We propose now to extend our experiments to the case of very large values of the wavelength in order to inspect numerically the following aspect : when λ_z tends to infinity, the formal limit of the perturbed Zaitsev soliton provides a new profile, independent of the second transverse variable ; the solution of (6.2) with this new profile as initial datum is stable in the limit where δ tends to zero [dBS96]. Figure 6.47 presents the results obtained by considering then $\lambda_z = 10^8, 10^9$.

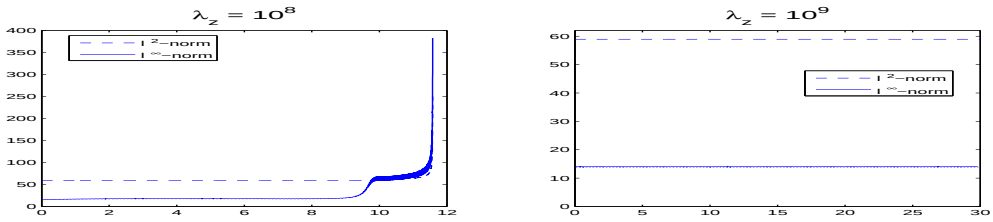


Fig. 6.47 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $b = -1, c = 2, K = 32, L = 12, M = 4, N_x = 256, N_y = 32, N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_z = 10^8, 10^9$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

We thus notice that there exists another critical transverse wavelength λ_c^2 such that if $\lambda_z > \lambda_c^2$, the perturbed Zaitsev soliton no longer blows up.

The above observations are not influenced by the choice of a smaller value of ε. Of course, as Figure 6.48 shows, the evolutions of the l^2 and $l^\infty-$norms, obtained by considering for instance $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$ in simulations, do not qualitatively differ from those presented in Figure 6.45. Similar results to those of Figures 6.46 and 6.47 derive also from simulations when $c = 2$ and $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$.

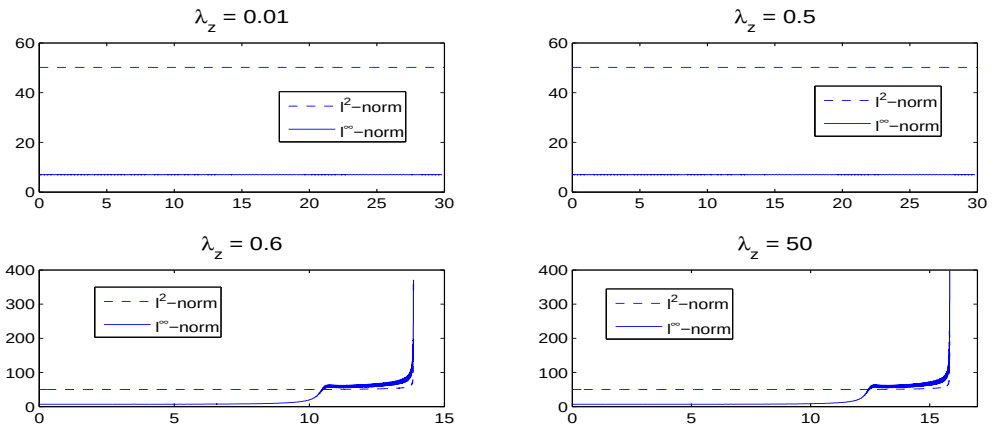


Fig. 6.48 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time for $b=-1, c=1, K=32, L=12, M=4, N_x=256, N_y=32, N_z=16, \Delta t=5\times 10^{-4}$. Here, $\lambda_z=0.01, 0.5, 0.6, 50$ and $\varepsilon=5\times 10^{-3}$.

In the last context where $b=1$, the perturbed Zaitsev soliton seems to never blow up. The results of Figures 6.49 and 6.50 are obtained from experiments performed in this context by setting $c=2$; similar results derive also from simulations when we consider $c=1$.

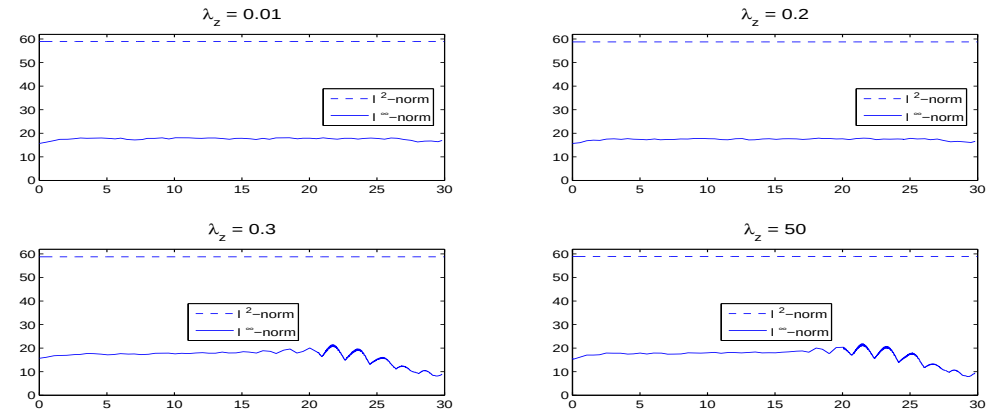


Fig. 6.49 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $b=1, c=2, K=32, L=12, M=4, N_x=256, N_y=32, N_z=16, \Delta t=5\times 10^{-4}$. Here, $\lambda_z=0.01, 0.2, 0.3, 50$ and $\varepsilon=10^{-2}$.

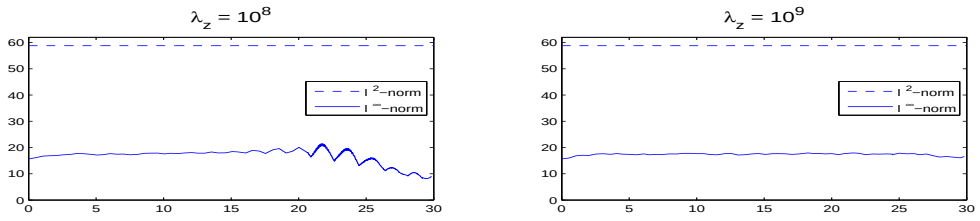


Fig. 6.50 – Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $b = 1, c = 2, K = 32, L = 12, M = 4, N_x = 256, N_y = 32, N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_z = 10^8, 10^9$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

The dispersive effect prevails over the blow-up, and it seems, when $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$, that another form of stability appears.

Let us summarize now the numerical observations of this section. It follows that the wavelength λ_z characterizes the instability of the Zaitsev soliton by transverse perturbations in the $z-$direction. More precisely, when $b = -1$, there exist two critical transverse wavelengths $0 < \lambda_c^1 \ll \lambda_c^2$, depending only on c, with $\lambda_c^1 \simeq \dfrac{0.6}{c}$, such that the corresponding discrete solution blows up in finite time if $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$. When $b = 1$, the solution of (6.2), with the perturbed Zaitsev soliton as initial datum, does not blow up.

We can then formulate the following conjecture.

Conjecture 6.4
For $\varepsilon > 0$ sufficiently small, let u_0 be the perturbed Zaitsev soliton of velocity $c(z) := c(1 + \varepsilon \cos(\frac{2\pi z}{\lambda_z}))$, where $\lambda_z > 0$. Let $p = 1$, and $a = b = -1$. There exist two critical transverse wavelengths $0 < \lambda_c^1 \ll \lambda_c^2$, depending only on c, such that the solution of the 3D-KP equation (6.2), with u_0 as initial datum, blows up in finite time (in particular the Zaitsev soliton is unstable under the flow of (6.2)) if $\lambda_c^1 < \lambda_z < \lambda_c^2$.

6.5 Adaptivity of the time step

This section is not include in the article . We ask us how to extend the physical time in comparison with the result found in the previous sections, without increasing the number of iterations, even if the CPU time is longer.

We notice that in the algorithm used for our simulations (see (6.9)), the time step Δt can be reduced when the convergence does not reach, although it may be increased also. According to this remark, our algorithm is modified in a way that the time step is reduced when the numerical scheme does not converge, and increased when the a posteriori local error estimator (defined below) is small.

To explain, in a few words, the method (see [QSS00]), let be an ordinary differential equation

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)) \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

and consider a numerical scheme of order q. Starting from an exact datum $u_n = u(t_n)$, we have

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \Phi(u_n)\Delta t + O(\Delta t^{q+1}) \\ u(t_{n+1}) &= u(t_n) + \Phi(u(t_n))\Delta t + O(\Delta t^{q+1}), \end{aligned}$$

where Φ is a function given by the chosen scheme. We deduce that, there exists a function Ψ, depending on Φ, such that

$$u(t_{n+1}) - u_{n+1} = O(\Delta t^{q+1}) = \Psi(u_n)\Delta t^{q+1} + O(\Delta t^{q+2}).$$

The same calculus with a time step of size $2\Delta t$, starting here from u_{n-1}, gives

$$u(t_{n+1}) - \widetilde{u}_{n+1} = \Psi(u_n)(2\Delta t)^{q+1} + O(\Delta t^{q+2}).$$

Finally, we find

$$u(t_{n+1}) - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \widetilde{u}_{n+1}}{2^{q+1} - 1} + O(\Delta t^{q+2}).$$

We define $\mathcal{E} := \dfrac{||u_{n+1} - \widetilde{u}_{n+1}||_{L^2(\Omega)}}{2^{q+1} - 1}$ the a posteriori local error estimator. The method consists in three stages :

- from u_{n-1}, we calculate u_n and u_{n+1} with a time step Δt,
- from u_{n-1}, we calculate $\widetilde{u}_{n+1}$ with a time step $2\Delta t$,
- we calculate the a posteriori local error estimator $\mathcal{E}$. Let $\tau > 0$ a small fixed tolerance,
  - if $\mathcal{E} < \dfrac{\tau}{2^{q+1}}$, the time step Δt is doubled,
  - if $\mathcal{E} > \tau$, the time step is divided by 2,
  - if not, the time step is kept.

Let us adapt this method to the generalized 3D-KP equations (6.2). We use again the spectral method, based on Fourier transform for the space discretization, and the prediction-correction scheme of order 2 for the time discretization, based on the Euler explicit one for the prediction and the Crank-Nicolson for the correction.

Let $m \geq 1$ a maximal number of iterations. The numerical algorithm is described as follows :

- Set $\widehat{u}_{0,0} = \widehat{u}_{0,1} = \ ... \ = \widehat{u}_{0,m} = \widehat{u_0}$.
- For $n = 0, 1, ...,$ compute :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= PC(u_n, \Delta t) \\ u_{n+2} &= PC(u_{n+1}, \Delta t) \\ \widetilde{u}_{n+2} &= PC(u_n, 2\Delta t). \end{aligned}$$

- The a posteriori local error estimator is calculated

$$\mathcal{E} = \frac{||u_{n+1} - \widetilde{u}_{n+1}||_{L^2(\Omega)}}{7}.$$

- If $\mathcal{E} < \dfrac{\tau_1}{8}$, with $\tau_1 > 0$ a fixed tolerance, we set $\Delta t = 2\Delta t$,

– if $\mathcal{E} > \tau_1$, we set $\Delta t = \dfrac{\Delta t}{2}$.

Here PC corresponds to the prediction-correction scheme defined by :

$$\widehat{u}_{n+1,0} = \widehat{u}_{n,m} + \Delta t \left(-i\xi_1 (\widehat{\frac{u_{n,m}^{p+1}}{p+1}}) + i(\xi_1^3 - \frac{\xi_2^2}{\xi_1} a - \frac{\xi_3^2}{\xi_1} b)\widehat{u}_{n,m} \right),$$

- For $r = 0, 1, ..., m-1$,
  $\widehat{u}_{n+1,r+1} = \widehat{u}_{n,m} +$
  $$\frac{\Delta t}{2} \left(-i\xi_1 (\widehat{\frac{u_{n+1,r}^{p+1}}{p+1}}) + i(\xi_1^3 - \frac{\xi_2^2}{\xi_1} a - \frac{\xi_3^2}{\xi_1} b)\widehat{u}_{n+1,r} - i\xi_1 (\widehat{\frac{u_{n,m}^{p+1}}{p+1}}) + i(\xi_1^3 - \frac{\xi_2^2}{\xi_1} a - \frac{\xi_3^2}{\xi_1} b)\widehat{u}_{n,m} \right).$$

The iterations are stopped in one of the two following cases :

- when with $\tau_2 > 0$ a fixed tolerance, we have $\dfrac{\|u_{n+1,r+1} - u_{n+1,r}\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_{n+1,0}\|_{L^2(\Omega)}} \leq \tau_2$. We then set $u_{n+1} := u_{n+1,r+1}$;
- or when we reach, without convergence, the maximal number m of iterations.

This algorithm provides the solution $\widehat{u}_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ for $\xi_1 \neq 0$, ξ_2, ξ_3 described as in (6.7). For the case $\xi_1 = 0$, we set :

- For $n = 1, 2, ...,$ do
  $\widehat{u}_n(0, \xi_2, \xi_3) = \widehat{u_0}(0, \xi_2, \xi_3)$.

Some numerical simulations are now presented in each context of the Section 6.2–6.4, in order to compare the physical time obtained with the a posteriori local error estimator and the one obtained with the algorithm used previously.

We fix $a = b = 1$. We are first concerned with the behaviour in long time for localized initial data. We display the non-generalized case $p = 1$. Setting $s = 1$, $\alpha = 2, 5$, respectively $\alpha = 50$, we consider $K = 50$, $L = M = 4$, $N_x = 256$, $N_y = N_z = 16$ and $\Delta t = 10^{-3}$, respectively $N_x = 512$, $\Delta t = 10^{-4}$. We represent in Figure 6.51. the l^2-norm and $l^\infty-$norm of the obtained discrete solution.

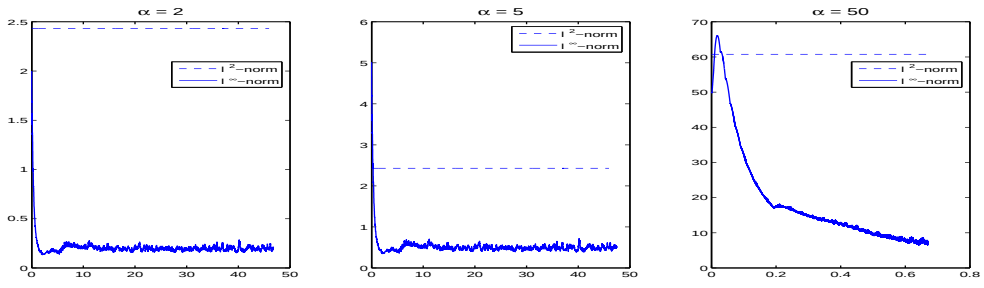


FIG. 6.51 – Representations of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = b = 1, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_y = N_z = 16$, for $\alpha = 2, 5$, $N_x = 256$, $\Delta t = 10^{-3}$ and for $\alpha = 50$, $N_x = 512$, $\Delta t = 10^{-4}$.

In comparison with the Figures 6.2.,6.4, the physical time ($T \simeq 38$) for the cases $\alpha = 2, 5$, is shorter than the one found here ($T \simeq 47$), even if the CPU time is longer.

On the other hand, for the case $\alpha = 50$, the comparison between the result obtained here and the one represented in Figure 6.5 ($T \simeq 4$), shows that for a large amplitude, the physical time is not longer by using the a posteriori local error estimator ($T \simeq 0.7$).

Some experiments are performed in the generalized cases $p = 2, 3$. Taking first $p = 2$, $\alpha = 5$, and considering $K = 50$, $L = M = 6$, $N_x = 512$, $N_y = N_z = 32$ and $\Delta t = 10^{-3}$, the obtained result is represented in Figure 6.52.

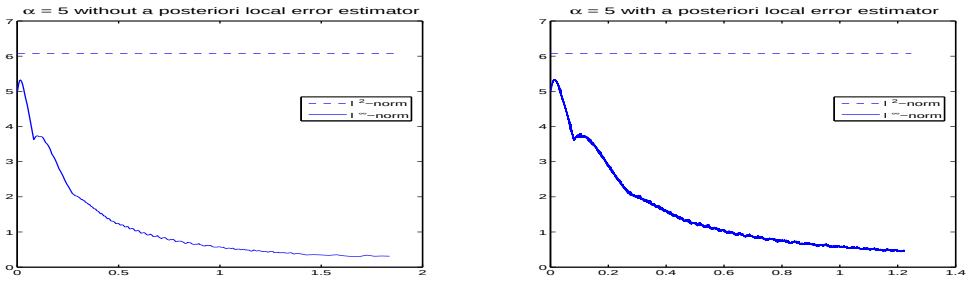


Fig. 6.52 – Representations of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = b = 1, \alpha = 5, s = 1, K = 50, L = M = 6, N_x = 512, N_y = N_z = 32$, $\Delta t = 10^{-3}$.

The physical times seem to be equal with the two algorithms used.

We consider $p = 3$, $\alpha = 2$, and $K = 50$, $L = M = 4$, $N_x = 256$, $N_y = N_z = 16$ and $\Delta t = 10^{-3}$. We represent the l^2-norm and the $l^\infty-$norm of the obtained discrete solution in Figure 6.53.

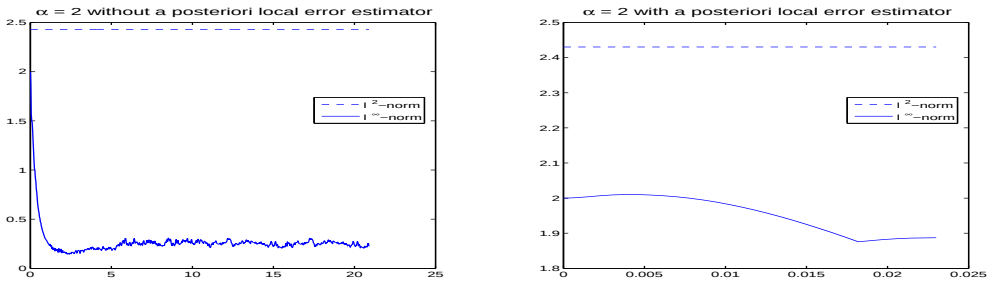


Fig. 6.53 – Representations of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 3, a = b = 1, \alpha = 2, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16$, $\Delta t = 10^{-3}$.

For a strong nonlinearity, the physical time obtained here is shorter than the one obtained by the first algorithm.

We apply now the algorithm using the a posteriori local error estimator in the context of the transverse instability in the y and $z-$directions. We study the evolution in time of the perturbed line-soliton.

We set $\varepsilon = 10^{-2}$. With $p = 1, c = 4$, we fix $K = 32$, $L = M = 4$, $N_x = 256$, $N_y = N_z = 16$, and $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$. In Figure 6.54., we represent the l^2-norm and $l^\infty-$norm of the obtained discrete solution for $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 1.1, 50$.

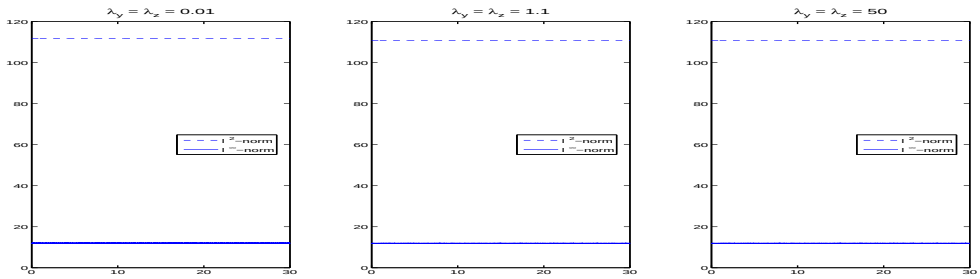


Fig. 6.54 – Representations of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = b = 1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 1.1, 50$, and $\varepsilon = 10^{-2}$.

Let us now perform some experiments with $p = 2, c = 2$. Keeping the same value of parameters for $K, L, M, N_x, N_y, N_z, \Delta t$, the obtained results are represented in Figure 6.55. for $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 0.3, 50$.

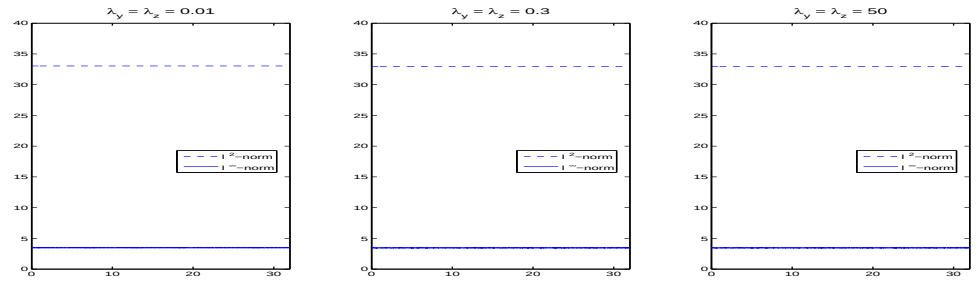


Fig. 6.55 – Representations of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = b = 1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 0.3, 50$, and $\varepsilon = 10^{-2}$.

Here again, the physical time is slighty shorter than the one described in Figures 6.29. – 6.44.

We finally consider the transverse instability in the $z-$direction, by considering the behaviour in long time of the perturbed lump-soliton.

We set $p = 1, a = -1, b = 1, \varepsilon = 10^{-2}$. We consider $c = 2$, and take $K = 32$, $L = 12$, $M = 4$, $N_x = 256$, $N_y = 32$, $N_z = 16$ and $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$. We represent in Figure 6.56. the l^2-norm and $l^\infty-$norm of the obtained discrete solution for $\lambda_z = 0.01, 0.3, 50$.

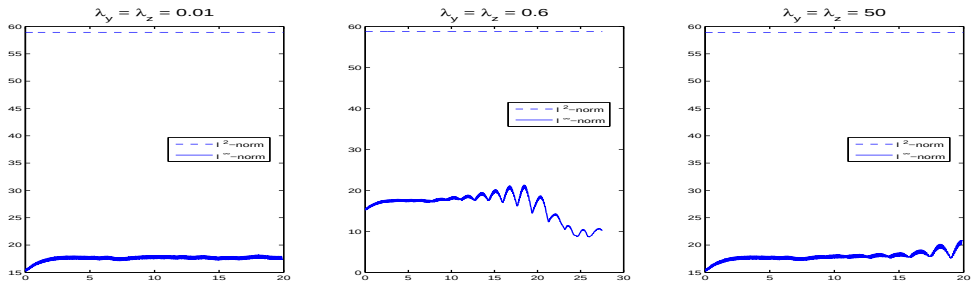


Fig. 6.56 – Representations of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = -1, b = 1, c = 2, K = 32, L = 12, M = 4, N_x = 256, N_y = 32, N_z = 16$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_z = 0.01, 0.3, 50$, and $\varepsilon = 10^{-2}$.

The same observations is done, namely comparing with the Figure 6.49., the physical time represented in this figure is slightly larger than the one obtained here.

In summary, the physical time given by the algorithm based on the a posteriori local error estimator is longer than the one of the algorithm (6.9), in the non-generalized case with small amplitude. When the amplitude is large (e.g. $\alpha = 50$), or when the nonlinearity is strong (e.g. $p = 3$), contrary to previously, the physical time using the a posteriori local error estimator is shorter. In the other cases, the results are roughly the same. On the other hand, the CPU time is in each case larger by using this algorithm.

Notations

Espaces et normes

Pour $d = 1, 2, 3$, on définit la transformée de Fourier par

$$\hat{f}(k) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ikx} f(x)\, dx,$$

de telle sorte que la transformée de Fourier inverse soit donnée par

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{ikx} \hat{f}(k)\, dk.$$

L'anti-dérivée ∂_x^{-1} est alors définie par $\widehat{\partial_x^{-1} u}\,(k) := \dfrac{\widehat{u}(k)}{\mathrm{i}\, k_1}$, où k_1 désigne la première composante de $k \in \mathbb{R}^d$. De même, la transformée de Hilbert H dans la direction Ox est définie de telle sorte que $\widehat{H(u)}\,(k) := -\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(k_1)\widehat{u}(k)$.

Pour $1 \leq p < \infty$, on note $L^p(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions de puissance p$^{\text{ème}}$ integrable muni de la norme

$$||f||_{L^p} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p},$$

et $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ l'espace de fonctions muni de la norme

$$||f||_\infty = \sup \mathrm{ess}\,(f) := \inf \left\{ c\,;\, |f(x)| \leq c \text{ presque partout dans } \mathbb{R}^d \right\}.$$

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ désigne la classe de Schwartz, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ celui des distributions tempérées, et $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact.

Pour tout réel positif m et $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ représente l'espace de Sobolev muni de la norme

$$||f||_{W^{m,p}} := \left|\left| (1 - \partial_x^2)^{m/2} f \right|\right|_{L^p}.$$

En particulier, on note $H^m(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Sobolev $W^{m,2}(\mathbb{R}^d)$. Dans ce cas, l'espace $H^m(\mathbb{R}^d)$ sera muni de la norme équivalente

$$||f||_m^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (1+k^2)^m |\hat{f}(k)|^2 \, dk.$$

On note $X^m(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions f de $H^m(\mathbb{R}^d)$ telles que $\partial_x^{-1} f$ soit dans $H^m(\mathbb{R}^d)$, muni de la norme

$$|f|_m := \left(||f||_m^2 + ||\partial_x^{-1} f||_m^2 \right)^{1/2}.$$

Si $\mathbb{T}^d$ désigne le tore, on définit alors $H_0^s(\mathbb{T}^d)$ comme étant l'espace de Sobolev des fonctions de moyenne nulle dans la direction Ox muni de la norme

$$||u(t)||_s = \left(\sum_{(k_1,\widetilde{k}) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^{d-1}} |k|^{2s} |\hat{u}(k)|^2 \right)^{1/2},$$

où la tranformée de Fourier sur le tore $\hat{u}$ est donnée par

$$\hat{u}(k) = \int_{\mathbb{T}^d} \mathrm{e}^{-ikx} \, u(x) \, d\mu(x).$$

La mesure $d\mu(x)$ est choisie proportionelle à celle de Lebesgue sur $\mathbb{T}^d$ et normalisée de telle sorte que

$$u(x) = \sum_{(k_1,\widetilde{k}) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^{d-1}} \mathrm{e}^{ikx} \hat{u}(k).$$

Si X est un espace de Banach quelconque, et $T > 0$, l'espace $\mathcal{C}([-T,T];X)$ est l'ensemble des fonctions continues de $[-T,T]$ dans X, muni de la norme $\sup_{-T \le t \le T} ||f||_X$, avec $||.||_X$ une norme sur X. L'espace $\mathcal{C}_w([-T,T];X)$ désigne l'ensemble des fonctions faiblement continues de $[-T,T]$ dans X.

Pour un opérateur D de $L^p(\mathbb{R}^d)$ vers $L^q(\mathbb{R}^d)$, avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, on définit la norme opérateur par

$$|||T|||_{L^q} := \sup_{||f||_{L^p}=1} ||Tf||_{L^q}.$$

LISTE DES ÉQUATIONS

Equation de transport

$$u_t + u_x = 0.$$

Equation de Burgers

$$u_t + u_x + u u_x = 0.$$

Equation d'Airy

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0.$$

Equation de Korteweg de Vries (KdV)

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Equation de Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0.$$

Equation de Benjamin-Ono (BO)

$$u_t + u_x + uu_x - H(u_{xx}) = 0.$$

Equation BO-BBM

$$u_t + u_x + uu_x + H(u_{xt}) = 0.$$

Equations de Kadomtsev-Petviashvili (KP-I si $s = -1$, KP-II si $s = -1$)

$$u_t + u_x + uu_x + su_{xxx} + \partial_x^{-1} u_{yy} = 0.$$

Equations KP-BBM-II

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} + \partial_x^{-1} u_{yy} = 0.$$

Equations 2D-BO

$$u_t + u_x + uu_x - H(u_{xx}) + \partial_x^{-1} u_{yy} = 0.$$

Equations 2D-BO-BBM

$$u_t + u_x + uu_x + H(u_{xt}) + \partial_x^{-1} u_{yy} = 0.$$

Equations 3D-KP avec $a = \pm 1$ et $b = \pm 1$

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} + a\partial_x^{-1} u_{yy} + b\partial_x^{-1} u_{zz} = 0.$$

Table des figures

1 Surface du fluide . . . 7
2 Interface entre deux fluides . . . 10

1.1 Surface du fluide au temps t . . . 25
1.2 Petite amplitude de surface . . . 27
1.3 Comparaison numérique des normes L^2 et L^∞ pour les problèmes linéaire et non linéaire avec $\alpha = 10^{-3}$ sur l'intervalle de temps $[0, \alpha^{-1}]$ et avec les données initiales $f(x,y) = \dfrac{\cos(x+y)}{||\cos(x+y)||}$ et $f(x,y) = \dfrac{\cos x \cos y}{||\cos x \cos y||}$ en utilisant l'échelle logarithmique sur Oy. . . . 63
1.4 Comparaison numérique des normes L^2 et L^∞ pour le problème non linéaire avec $\alpha = 10^{-3}$, 2.5×10^{-4}, 10^{-4} et $\alpha_0 = 7.14 \times 10^{-3}$, 3.84×10^{-3} respectivement pour chacune des données initiales $f(x,y) = \dfrac{\cos(x+y)}{||\cos(x+y)||}$ et $f(x,y) = \dfrac{\cos x \cos y}{||\cos x \cos y||}$. . . . 65
1.5 Evolution de δ en fonction de α pour le problème non linéaire avec les données initiales $f(x,y) = \dfrac{\cos(x+y)}{||\cos(x+y)||}$ et $f(x,y) = \dfrac{\cos x \cos y}{||\cos x \cos y||}$. . . . 66

2.1 Interface entre deux fluides . . . 71
2.2 Comparaison numérique des normes L^2 et L^∞ pour les problèmes linéaire et non linéaire avec $\alpha = 10^{-3}$ sur l'intervalle de temps $[0, \alpha^{-1}]$ avec la donnée initiale $f(x,y) = \dfrac{\cos(x+y)}{||\cos(x+y)||}$ en utilisant l'échelle logarithmique sur Oy. 83
2.3 Comparaison numérique des normes L^2 et L^∞ pour le problème non linéaire avec $\alpha_0 = 2.18 \times 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-3}$, 2.5×10^{-4} et 10^{-4} avec la donnée initiale $f(x,y) = \dfrac{\cos(x+y)}{||\cos(x+y)||}$. . . . 84

6.1 Evolutions of the energy with respect to time, for $p = 1, \alpha = 2, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$. . . . 173
6.2 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, \alpha = 2, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$. . . . 173

6.3 Evolutions of the energy with respect to time, for $p = 1, \alpha = 5, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$. 174
6.4 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, \alpha = 5, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$. 174
6.5 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, \alpha = 50, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 512, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-4}$. 174
6.6 Evolutions of the energy with respect to time, for $p = 1, \alpha = 5, s = 0.5, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$. 175
6.7 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, \alpha = 5, s = 0.5, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$. 175
6.8 Evolutions of the energy with respect to time, for $p = 2, \alpha = 2, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$. 176
6.9 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, \alpha = 2, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$. 176
6.10 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, \alpha = 5, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$. 177
6.11 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, \alpha = 5, s = 1, K = 50, L = M = 6, N_x = 512, N_y = N_z = 32, \Delta t = 10^{-4}$. 177
6.12 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, \alpha = 5, s = 0.5, K = 50, L = M = 6, N_x = 512, N_y = N_z = 32, \Delta t = 10^{-4}$. 178
6.13 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, \alpha = 10, s = 1, K = 32, L = M = 4, N_x = 512, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-4}$. 178
6.14 Evolutions of the energy with respect to time, for $p = 3, \alpha = 2, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$. 179
6.15 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 3, \alpha = 2, s = 1, K = 50, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$. 179
6.16 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 3, \alpha = 3, s = 1, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 10^{-3}$. 180
6.17 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 3, \alpha = 3, s = 1, K = 32, L = M = 6, N_x = 512, N_y = N_z = 32, \Delta t = 10^{-4}$. 180
6.18 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 3, \alpha = 4, s = 1, K = 32, L = M = 6, N_x = 512, N_y = N_z = 32, \Delta t = 10^{-4}$. 181

6.19 Evolutions of the energy at left, of the l^2-norm (- -) and of the $l^\infty-$norm (—) at right, with respect to time. Here, $p = 3, \alpha = 5, s = 1, K = 32, L = M = 6, N_x = 512, N_y = N_z = 32, \Delta t = 10^{-4}$. 181

6.20 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 3, \alpha = 4, s = 0.5, K = 32, L = M = 6, N_x = 512, N_y = N_z = 32, \Delta t = 10^{-4}$. 182

6.21 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = b = -1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 2, 2.1, 50$, and $\varepsilon = 10^{-2}$. . . . 183

6.22 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = b = -1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = 0.01, 2$, $\lambda_z = 2.1, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. . . . 184

6.23 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = b = -1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 1, 1.1, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. . . . 185

6.24 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = b = -1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = 0.01, 1$, $\lambda_z = 1.1, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. . . 185

6.25 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = b = -1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = 1, 1.1, 10^8, 10^9$, $\lambda_z = 10^8, 10^9$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. 186

6.26 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = 1, b = -1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 1.1, 50$, $\lambda_y = 0.01, \lambda_z = 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. 186

6.27 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = -1, b = 1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 1.1, 50$, $\lambda_y = 0.01, \lambda_z = 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. 187

6.28 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, ab = -1$, $c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here $\lambda_y = 10^9$, $\lambda_z = 50, 10^9$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. 187

6.29 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = b = 1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 1.1, 50$, $\lambda_y = 0.01, \lambda_z = 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. 188

6.30 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = b = -1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 1, 1.1, 50$ and $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$. 188

6.31 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = b = -1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here $\lambda_y = 10^9$, $\lambda_z = 50, 10^9$ and $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$. . . . 189

6.32 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = 1, b = -1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 1, 1.1, 50$ and $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$. 189
6.33 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, a = -1, b = 1, c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 1, 1.1, 50$ and $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$. 190
6.34 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 1, ab = -1$, $c = 4, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here $\lambda_y = 10^9$, $\lambda_z = 50, 10^9$ and $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$. 190
6.35 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = b = -1, c = 1, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 0.5, 0.6, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. . . 191
6.36 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = b = -1, c = 1, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 0.5, 0.6, 50$ and $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$. 191
6.37 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = b = -1, c = 1, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = 0.01, 0.5$, $\lambda_z = 0.6, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. . . 192
6.38 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = b = -1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 0.2, 0.3, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. . . 193
6.39 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = b = -1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = 0.01, 0.2$, $\lambda_z = 0.3, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. . . 193
6.40 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = 1, b = -1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 0.2, 0.3, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. . . 194
6.41 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = 1, b = -1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = 0.01, 0.2$, $\lambda_z = 0.3, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. . . 194
6.42 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = -1, b = 1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = 0.01, 0.2$, $\lambda_z = 0.3, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. . . 195
6.43 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p = 2, a = b = -1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = 0.2, 50, 10^8, 10^9$, $\lambda_z = 10^8, 10^9$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. 195
6.44 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time for $p = 2, a = b = 1, c = 2, K = 32, L = M = 4, N_x = 256, N_y = N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_y = \lambda_z = 0.01, 0.3, 50$, $\lambda_y = 0.01, \lambda_z = 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. 196
6.45 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $b = -1, c = 1, K = 32, L = 12, M = 4, N_x = 256, N_y = 32, N_z = 16, \Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Here, $\lambda_z = 0.01, 0.5, 0.6, 50$ and $\varepsilon = 10^{-2}$. 198

6.46 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $b=-1, c=2, K=32, L=12, M=4, N_x=256, N_y=32, N_z=16, \Delta t=5\times10^{-4}$. Here, $\lambda_z=0.01, 0.2, 0.3, 50$ and $\varepsilon=10^{-2}$. 199
6.47 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $b=-1, c=2, K=32, L=12, M=4, N_x=256, N_y=32, N_z=16, \Delta t=5\times10^{-4}$. Here, $\lambda_z=10^8, 10^9$ and $\varepsilon=10^{-2}$. 199
6.48 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time for $b=-1, c=1, K=32, L=12, M=4, N_x=256, N_y=32, N_z=16, \Delta t=5\times10^{-4}$. Here, $\lambda_z=0.01, 0.5, 0.6, 50$ and $\varepsilon=5\times10^{-3}$. 200
6.49 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $b=1, c=2, K=32, L=12, M=4, N_x=256, N_y=32, N_z=16, \Delta t=5\times10^{-4}$. Here, $\lambda_z=0.01, 0.2, 0.3, 50$ and $\varepsilon=10^{-2}$. 200
6.50 Evolutions of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $b=1, c=2, K=32, L=12, M=4, N_x=256, N_y=32, N_z=16, \Delta t=5\times10^{-4}$. Here, $\lambda_z=10^8, 10^9$ and $\varepsilon=10^{-2}$. 201
6.51 Representations of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p=1, a=b=1, s=1, K=50, L=M=4, N_y=N_z=16$, for $\alpha=2,5$, $N_x=256$, $\Delta t=10^{-3}$ and for $\alpha=50$, $N_x=512$, $\Delta t=10^{-4}$. . . . 203
6.52 Representations of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p=2, a=b=1, \alpha=5, s=1, K=50, L=M=6, N_x=512, N_y=N_z=32$, $\Delta t=10^{-3}$. 204
6.53 Representations of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p=3, a=b=1, \alpha=2, s=1, K=50, L=M=4, N_x=256, N_y=N_z=16$, $\Delta t=10^{-3}$. 204
6.54 Representations of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p=1, a=b=1, c=4, K=32, L=M=4, N_x=256, N_y=N_z=16$, $\Delta t=5\times10^{-4}$. Here, $\lambda_y=\lambda_z=0.01, 1.1, 50$, and $\varepsilon=10^{-2}$. 205
6.55 Representations of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p=2, a=b=1, c=2, K=32, L=M=4, N_x=256, N_y=N_z=16$, $\Delta t=5\times10^{-4}$. Here, $\lambda_y=\lambda_z=0.01, 0.3, 50$, and $\varepsilon=10^{-2}$. 205
6.56 Representations of the l^2-norm (- - -) and the $l^\infty-$norm (—) with respect to time, for $p=1, a=-1, b=1, c=2, K=32, L=12, M=4, N_x=256, N_y=32, N_z=16$, $\Delta t=5\times10^{-4}$. Here, $\lambda_z=0.01, 0.3, 50$, and $\varepsilon=10^{-2}$. 206

Bibliographie

[AB91] J. P. Albert and J. L. Bona, *Comparisons between model equations for long waves*, J. Nonlinear Sci. **1** (1991), no. 3, 345–374.

[Alb86] J. Albert, *Dispersion of low-energy waves for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation*, J. Differential Equations **63** (1986), no. 1, 117–134.

[APS97] J.C. Alexander, R.L. Pego, and R.L. Sachs, *On the transverse instability of solitary waves in the Kadomtsev-Petviashvili equation*, Phys. Lett. A **A 226** (1997), 187–192.

[AS79] M. J. Ablowitz and H. Segur, *On the evolution of packets of water waves*, J. Fluid Mech. **92** (1979), no. 4, 691–715.

[Arn83] V. I. Arnold, *Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[BBM72] T. B. Benjamin, J. L. Bona, and J. J. Mahony, *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **272** (1972), no. 1220, 47–78.

[BC99] J. L. Bona and H. Chen, *Comparison of model equations for small-amplitude long waves*, Nonlinear Anal. **38** (1999), no. 5, Ser. B : Real World Appl., 625–647.

[BCS02] J. L. Bona, M. Chen, and J.-C. Saut, *Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media. I. Derivation and linear theory*, J. Nonlinear Sci. **12** (2002), no. 4, 283–318.

[BCS04] ———, *Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media. II. The nonlinear theory*, Nonlinearity **17** (2004), no. 3, 925–952.

[Ben67] T. B. Benjamin, *Internal waves of permanent form in fluids of great depth*, J. Fluid. Mech. **29** (1967), 559–592.

[Ben72] ———, *The stability of solitary waves*, Proc. Roy. Soc. (London) Ser. A **328** (1972), 153–183.

[Ben92] ———, *A new kind of solitary wave*, J. Fluid Mech. **245** (1992), 401–411.

[Bes04] C. Besse, *A relaxation scheme for the nonlinear schrödinger equation*, J. Numer. Anal. **42** (2004), 934–952.

[BG80] H. Brézis and T. Gallouet, *Nonlinear Schrödinger evolution equations*, Nonlinear Anal. **4** (1980), no. 4, 677–681.

[BLS] J. L. Bona, D. Lannes, and J.C. Saut, *Asymptotic models for internal waves*, preprint.

[BLT02] J.L. Bona, Y. Liu, and M. M. Tom, *The Cauchy problem and stability of solitary-wave solutions for RLW-KP-type equations*, J. Differential Equations **185** (2002), no. 2, 437–482.

[Bou72] M. J. Boussinesq, *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond*, J. Math. Pures Appl. **17** (1872), 55–108.

[Bou93a] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), no. 2, 107–156.

[Bou93b] ———, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), no. 3, 209–262.

[Bou93c] ———, *On the Cauchy problem for the Kadomtsev-Petviashvili equation*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), no. 4, 315–341.

[Bou97] ———, *On the compactness of the support of solutions of dispersive equations*, Internat. Math. Res. Notices (1997), no. 9, 437–447.

[BPS83] J. L. Bona, W. G. Pritchard, and L. R. Scott, *A comparison of solutions of two model equations for long waves*, Fluid dynamics in astrophysics and geophysics (Chicago, Ill., 1981), Lectures in Appl. Math., vol. 20, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983, 235–267.

[BS75] J. L. Bona and R. Smith, *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **278** (1975), no. 1287, 555–601.

[Car33] T. Carleman, *Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables.*, C. R. Acad. Sci., Paris **197** (1933), 471–474 (French).

[Cen03] International Tsunami Information Centre, *Tsunami : les grandes vagues*, Brochure du programme Tsunami de l'UNESCO, 2003.

[Con05] A. Constantin, *Finite propagation speed for the Camassa-Holm equation*, J. Math. Phys. **46** (2005), no. 2, 023506, 4.

[DA67] R.E. Davis and A. Acrivos, *Solitary internal waves in deep water*, J. Fluid. Mech. **29** (1967), 593–608.

[dBS96] A. de Bouard and J.-C. Saut, *Remarks on the stability of generalized KP solitary waves*, Mathematical problems in the theory of water waves (Luminy, 1995), Contemp. Math., vol. 200, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 75–84.

[dBS97a] ———, *Solitary waves of generalized Kadomtsev-Petviashvili equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **14** (1997), no. 2, 211–236.

[dBS97b] ———, *Symmetries and decay of the generalized Kadomtsev-Petviashvili solitary waves*, SIAM J. Math. Anal. **28** (1997), no. 5, 1064–1085.

[Fam92] A. V. Faminskiĭ, *The Cauchy problem for the generalized Kadomtsev-Petviashvili equation*, Sibirsk. Mat. Zh. **33** (1992), no. 1, 160–172.

[Fri69] A. Friedman, *Partial differential equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[FS92] A. S. Fokas and L.-Y. Sung, *On the solvability of the N-wave, Davey-Stewartson and Kadomtsev-Petviashvili equations*, Inverse Problems **8** (1992), no. 5, 673–708.

[Gin96] J. Ginibre, *Le problème de Cauchy pour des EDP semi-linéaires périodiques en variables d'espace (d'après Bourgain)*, Astérisque (1996), no. 237, Exp. No. 796, 4, 163–187.

[Ham01] F. Hamidouche, *Simulations numériques des équations de kadomtsev-petviashvili*, Thèse de doctorat, Université Paris XI, France, Jan 2001.

[HN99] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *Large time asymptotics of solutions to the generalized Benjamin-Ono equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), no. 1, 109–130.

[HNS99] N. Hayashi, P. I. Naumkin, and J.-C. Saut, *Asymptotics for large time of global solutions to the generalized Kadomtsev-Petviashvili equation*, Comm. Math. Phys. **201** (1999), no. 3, 577–590.

[Hör76] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer Verlag, New York, 1976.

[IMS95] P. Isaza, J. Mejia, and V. Stallbohm, *Local solution for the Kadomtsev-Petviashvili equation in* $\mathbf{R}^2$, J. Math. Anal. Appl. **196** (1995), no. 2, 566–587.

[IN98] R. J. Iório, Jr. and W. V. L. Nunes, *On equations of KP-type*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **128** (1998), no. 4, 725–743.

[Ió90] R. J. Iório, Jr., *KdV, BO and friends in weighted Sobolev spaces*, Functional-analytic methods for partial differential equations (Tokyo, 1989), Lecture Notes in Math., vol. 1450, Springer, Berlin, 1990, 104–121.

[Jac04] C. R. Jackson, *An atlas of internal solitary-like waves and their properties*, Global ocean associates, 2004.

[KdV95] D. J. Korteweg and G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationnary waves*, Phil. Maj. **39** (1895), 422–443.

[KM86] E. A. Kuznetsov and S. L. Musher, *Effect of collapse of sound waves on the structure of collisionless shock waves in a magnetized plasma*, Soviet Phys. JETP **65** (1986), no. 5, 947–955.

[KP70] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili, *Model equation for long waves in nonlinear dispersive systems*, Sov. Phys. Dokady. **15** (1970), 891–907.

[KP88] T. Kato and G. Ponce, *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), no. 7, 891–907.

[KPV03] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *On the unique continuation of solutions to the generalized KdV equation*, Math. Res. Lett. **10** (2003), no. 5-6, 833–846.

[Kru75] M. Kruskal, *Nonlinear wave equations*, Dynamical systems, theory and applications (Rencontres, Battelle Res. Inst., Seattle, Wash., 1974), Springer, Berlin, 1975, 310–354. Lecture Notes in Phys., Vol. 38.

[Liu02] Yue Liu, *Strong instability of solitary-wave solutions to a Kadomtsev-Petviashvili equation in three dimensions*, J. Differential Equations **180** (2002), no. 1, 153–170.

[Mam07] Y. Mammeri, *Comparaison entre modèles d'ondes de surface en dimension 2*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **41** (2007), no. 3, 513–542.

[Mam08] ———, *On the decay in time of solutions of some generalized regularized long waves equations*, CPAA Com. on Pure Appl. Ana. **7** (2008), no. 3, 513–532.

[Mat93] Y. Matsuno, *A unified theory of nonlinear wave propagation in two-layer fluid systems*, J. Phys. Soc. Jpn. **62** (1993), no. 6, 1902–1916.

[Mat98] ———, *Oblique interaction of interfacial solitary waves in a two-layer deep fluid*, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **454** (1998), no. 1971, 835–856.

[MR02] L. Molinet and F. Ribaud, *On the low regularity of the Korteweg-de Vries-Burgers equation*, Int. Math. Res. Not. (2002), no. 37, 1979–2005.

[MST02] L. Molinet, J.-C. Saut, and N. Tzvetkov, *Global well-posedness for the KP-I equation*, Math. Ann. **324** (2002), no. 2, 255–275.

[MST07b] ———, *Remarks on the mass constraint for KP-type equations*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **39** (2007), no. 2, 627–641.

[MST07a] ———, *Global well-posedness for the KP-I equation on the background of a non-localized solution*, Comm. Math. Phys. **272** (2007), no. 3, 775–810.

[MT99] A. Miranville and R. Temam, *Mathematical modelling in continuum mechanics*, Cambridge University Press, 1999.

[Ono75] H. Ono, *Algebraic solitary waves in stratified fluids*, J. Phys. Soc. Japan **39** (1975), no. 4, 1082–1091.

[Ost78] L.A. Ostrovsky, *Nonlinear internal waves in a rotating ocean*, Oceanology **18** (1978), 119–125.

[Pan04] M. Panthee, *A note on the unique continuation property for Zakharov-Kuznetsov equation*, Nonlinear Anal. **59** (2004), no. 3, 425–438.

[Pan05] ———, *Unique continuation property for the Kadomtsev-Petviashvili (KP-II) equation*, Electron. J. Differential Equations (2005), No. 59, 12 pp.

[PLS03] A.V. Porubov, I.V. Lavrenov, and D.V. Shevchenko, *Two-dimensional long wave nonlinear models for the rogue waves in ocean*, Proceedings of the International Seminar Day on Diffraction, 2003, 183–192.

[QSS00] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri, *Numerical mathematics*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[RT08] F. Rousset and N. Tzvetkov, *Transverse nonlinear instability for two-dimensional dispersive models*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire (2008), to appear.

[Sau93] J.-C. Saut, *Remarks on the generalized Kadomtsev-Petviashvili equations*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), no. 3, 1011–1026.

[Sau95] ———, *Recent results on the generalized Kadomtsev-Petviashvili equations*, Acta Appl. Math. **39** (1995), no. 1-3, 477–487, KdV '95 (Amsterdam, 1995).

[Sch66] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[SS87] J.-C. Saut and B. Scheurer, *Unique continuation for some evolution equations*, J. Differential Equations **66** (1987), no. 1, 118–139.

[ST04] J.-C. Saut and N. Tzvetkov, *Global well-posedness for the KP-BBM equations*, AMRX Appl. Math. Res. Express (2004), no. 1, 1–16.

[Ste86] E. M. Stein, *Oscillatory integrals in Fourier analysis*, Beijing lectures in harmonic analysis (Beijing, 1984), Ann. of Math. Stud., vol. 112, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1986, 307–355.

[Ste93] E. Stein, *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton University Press, 1993.

[Str74] W. A. Strauss, *Dispersion of low-energy waves for two conservative equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **55** (1974), 86–92.

[Tay96] M. E. Taylor, *Partial differential equations I : Basic theory*, Applied mathematical sciences, vol. 115, Springer, 1996.

[TO01] H. Tsuji and M. Oikawa, *Oblique interaction of internal solitary waves in a two-layer fluid of infinite depth*, Fluid Dynam. Res. **29** (2001), no. 4, 251–267.

[Tom96] M. M. Tom, *On a generalized Kadomtsev-Petviashvili equation*, Mathematical problems in the theory of water waves (Luminy, 1995), Contemp. Math., vol. 200, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 193–210.

[Tzv04] N. Tzvetkov, *Long time bounds for the periodic KP-II equation*, Int. Math. Res. Not. (2004), no. 46, 2485–2496.

[Uka89] S. Ukai, *Local solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **36** (1989), no. 2, 193–209.

[WAS94] X. P. Wang, M. J. Ablowitz, and H. Segur, *Wave collapse and instability of solitary waves of a generalized Kadomtsev-Petviashvili equation*, Phys. D **78** (1994), no. 3-4, 241–265.

[Whi74] G. B. Whitham, *Linear and nonlinear waves*, John Wiley & Sons, New York, 1974.

[Zai83] A. A. Zaitsev, *Formation of stationary waves by superposition of solitons*, Sov. Phys. Dokl. **28** (1983), no. 9, 720–722.

[Zho90] X. Zhou, *Inverse scattering transform for the time dependent Schrödinger equation with applications to the KPI equation*, Comm. Math. Phys. **128** (1990), no. 3, 551–564.

Résumé

Les équations de Kadomtsev-Petviashvili (KP) décrivent les ondes de faible amplitude et de grande longueur se déplaçant à la surface de l'eau, principalement dans la direction Ox. Elles ont pour forme

$$u_t + u_x + \alpha u u_x + s\,\beta u_{xxx} + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = O(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

et sont appelées KP-I si $s > 0$ et KP-II si $s < 0$. Ici, α désigne le quotient entre l'amplitude des ondes et la profondeur de l'eau, β le carré du quotient entre la profondeur et la longueur d'onde, γ le carré du quotient entre les longueurs d'onde dans les deux directions du plan, et ∂_x^{-1} l'anti-dérivée. Quant à l'équation de Benjamin-Ono (BO), elle décrit de telles ondes se déplaçant à l'intérieur de l'eau. Elle s'écrit

$$u_t + u_x + \alpha u u_x - \beta H(u_{xx}) + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} = O(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

où, dans ce cas, α est le quotient entre l'amplitude des ondes et la profondeur des ondes, β le quotient entre cette profondeur et la longueur d'onde, et H la transformée de Hilbert dans la direction Ox. En remarquant que $u_t + u_x = O(\alpha + \beta + \gamma)$, on trouve les équations de type Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

$$\begin{aligned} u_t + u_x + \alpha u u_x - s\,\beta u_{xxt} + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} &= O(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ u_t + u_x + \alpha u u_x + \beta H(u_{xt}) + \gamma \partial_x^{-1} u_{yy} &= O(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2). \end{aligned}$$

Notre travail se divise en trois parties. Dans la première, on rappelle la modélisation des différentes équations. On montre plus particulièrement comment les modèles asymptotiques BBM s'obtiennent à partir du principe fondamental de la dynamique. On compare alors les solutions des équations de KP, respectivement de BO, avec les solutions des équations de type BBM.
Dans la seconde partie, on s'intéresse à certaines propriétés qualitatives des équations généralisées de type BBM. Des résultats de prolongement en temps des bornes sur les normes de Sobolev, de décroissance en temps et de prolongement unique des solutions, sont établis.
Enfin, on termine avec une étude numérique des solutions des équations KP généralisées en dimension 3 d'espace. Dans cette dernière partie, en collaboration avec F. Hamidouche et S. Mefire, on inspecte numériquement les phénomènes de dispersion, d'explosion en temps fini, de comportement solitonique et d'instabilité transversale.

Mots clés : équations de KP, BO, BBM, modélisation, comparaison, bornes en grand temps, décroissance en temps, prolongement unique, méthode spectrale, méthode de relaxation, méthode d'Adams, dispersion, explosion en temps fini, instabilité transversale.

Classification Mathématique : 35B05, 35B10, 35B35, 35B40, 35B60, 35Q53, 35M70, 65M99, 76B03, 76B15, 76B55