



Les mystères de l'expansion accélérée de l'univers

Radouane , Gannouji

► To cite this version:

Radouane , Gannouji. Les mystères de l'expansion accélérée de l'univers. Cosmologie et astrophysique extra-galactique [astro-ph.CO]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2008. Français. NNT : . tel-00329563

HAL Id: tel-00329563

<https://theses.hal.science/tel-00329563>

Submitted on 13 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L' UNIVERSITE MONTPELLIER II

Discipline : **Constituants élémentaires de la matière**

Ecole Doctorale : **Information Structures Systèmes**

présentée et soutenue publiquement par

Radouane GANNOUJI

le 08 juillet 2008

LES MYSTERES DE L'EXPANSION ACCELEREE DE L'UNIVERS

JURY

M. Luca AMENDOLA,	INAF, Osservatorio Astronomico di Roma	Rapporteur
M. Michael JOYCE,	LPNHE, Laboratoire de Physique Nucléaire et de Hautes Energies	Rapporteur
M. Reynald PAIN,	LPNHE, Laboratoire de Physique Nucléaire et de Hautes Energies	Membre du jury
M. David POLARSKI,	LPTA, Laboratoire de Physique Théorique & Astroparticules	Directeur de thèse
M. Philippe ROCHE,	LPTA, Laboratoire de Physique Théorique & Astroparticules	Président du Jury

⌘ II·⌘II· X·II:II⌘

Remerciements

Pour commencer la lecture d'une thèse, rien de mieux que ce qui la cloture : la page de remerciements. Exercice obligé et périlleux, pour ne pas ressentir la foudre de ses ami(e)s. Peut-être même plus complexe que la thèse. En effet tout oubli, ne sera pas considéré comme une simple faute d'inattention, mais sera la conséquence d'une haine sur plusieurs générations. Les descendants se haïront, des crimes seront perpétrés. La raison de la querelle sera vite effacée mais le Shinigami écrira de plus en plus de noms qu'Anubis conduira au royaume de Nergal.

Bon ok je m'emballe un petit peu. Je reviens sur terre afin d'écrire enfin cette page.

Une thèse ne serait rien sans un directeur de thèse, un guide : David Polarski. Il m'a permis de découvrir une science que je ne connaissais pas. Il m'a ouvert les yeux sur l'invisible : l'énergie noire.

Je tiens également à remercier les rapporteurs qui ont eu la tâche "ingrate" de lire et de corriger ma thèse : Luca Amendola et Michael Joyce, ainsi que les membres du jury : Reynald Pain et Philippe Roche. De plus la thèse est ponctuée par des articles dont les collaborations ont été très enrichissantes. Je remercie donc en plus de David Polarski et Luca Amendola, André Ranquet, Alexei Starobinsky et Shinji Tsujikawa.

Je remercie également le directeur du LPTA, Alain Falvard ainsi que tous les membres du labo. pour leur accueil chaleureux durant ces trois années.

Une thèse ne peut exister seule. En effet de nombreuses personnes ont été présentes tout au long de ma vie. A commencer par ma famille, présente, avant, pendant et après ma thèse, leur importance s'exprimera par une page **speciale** et **personnelle** en berbère.

Je tiens également à remercier les amis, tout d'abord ceux qui m'accompagnent depuis mon enfance à Corte, qui ont tous rapidement abandonné leur scolarité en me passant le flambeau. La liste serait trop longue et j'en oublierais certainement. De toute façon ils ne m'en tiendraient pas rigueur puisqu'ils ne savent pas lire ! Je citerai donc ceux qui pourraient lire ce texte : Azzedine (oh Baul), Nabil (certainement le premier ami), Youssef (notre Usain Bolt) et tous les autres : Bouich, Brahim, Farid, bip hachée, Mounir, Philippe, Ruggieri, Tcherf, ... J'ai souvent entendu cette phrase dans leur bouche : "Réussi pour nous". Pour toute l'énergie que vous m'avez transmise, merci.

Mais aussi les rencontres et amitiés durant ma scolarité aixoise, parisienne et montpelliéraine. En effet ces 3 villes post-baccalauréat ont donné lieu à de nombreuses amitiés. Je les remercierai par ordre alphabétique pour ne facher personne.

Après donc l'enfance cortenaise vint l'"adolescence" aixoise où j'ai pu faire de très belles rencontres : David, Destin (mais qu'est-il devenu ?), Emmanuelle, Guenaël, Loïc et Trad.

Suit alors l'âge adulte à Orsay et Paris avec Céline, Freddy, Jean et bien sûr Mamadou.

Et enfin, la maturité montpelliéraine qui clos cette page de remerciements et ma thèse. Ce sont les souvenirs les plus récents, ceux de trois belles années en compagnie des premiers collègues de bureau : Lionel (tu nous as "quitté" trop tôt, snif), Mohamed (promis je ne te contredirai plus, sinon je vais en prendre une), Sean (le seul irlandais sobre, dommage un alcool au labo aurait été marrant, oops il y en a déjà ...). Allons voir dans les bureaux voisins : Armand (9"69 sûrement dopé !), Christian (tu me diras un jour comment avoir une nouvelle voiture tous les jours !), Federico (je n'ai toujours

rien compris aux fibras les bananas ...), Romain avec Nadia (pas d'espace de Sobolev, please), Sylvain (Superman est à Montpellier et non à Metropolis). Il y a même des gens de labo voisins : Olivier (dans la jet-set des ministres marocains), Andrea (l'Italie et le foot vaste programme ...), et tous les thésards du GRAAL.

Mais aussi l'arrivée massive et bruyante des M2 : Amine (voisin de bureau et de pays "ami"), Bruno (le plus sudiste des nordistes), Petruța (jamais personne n'est monté autant dans les aigües, "michant", tu gagnes même une virgule) et dans leur sillage Bruno (le brasilou et mon "digne" héritier) et Véronique (le seul pilote du labo, vrou vrou ...).

Et enfin les stagiaires qui ont donné un petit coup de jeune à ce labo : Myriam (double boucle piquée lutz axel !!!) et enfin Angélique ("ma" stagiaire, grande cuisinière et spécialiste de la forêt noire !).

Et tous ceux que j'oublie mais auxquels je pense !!!

4 II 4IIW 4I :

XO·E4: :: II=·II4 4I:, 4 E·Σ4 4M4I E4 =:II C4, IIΘΛ· 4 =4E4.

XC⇒·II: Θ·Θ·, 4 E·Σ4 MII EI · ΘO4Λ I4C·I, IOII· =·II E·C· M II E4CE 4IWM.
4 ::ΛE =:II IE·II, ·E T4II E ·E :Ж4II. E·EЖ4·I 4 O·... :: E EEE I 4 O·E4I, ...·E· ·I :4C
EII4...

4MME· II ...4X 4IWM E4 II ::EIX, ·E HEE ·E II ...Λ X·E·O· :: ·O·II 4IM.

XC⇒·II: ΣEE·, 4 E·Σ4 O·Θ·I, XO·E4: :: M :: E...I 4IWM.
E EIIWC X·EЖ4·IX, =:... ·E4 E O·Θ· IO M=:II C.

Ξ_·: X·E·II· 4X4I ...·E· I :·II, ·Θ·Θ· ·ΣEE·, ·Ξ_·:E E4 :II 4I:

XO·E4: :: 4MME· E ·CEE·, IOII· I4ΞI4 :IE4Λ = X4II4: IC. 4C: 4 =4Λ MI, ·E II
IEII...E ·E 4EI:·I.

I_4E·, IE·X4E·, M_4Λ, EO4MM, ...IE4Λ, _Ж:Ж E Ж:Θ4Λ·. M=:XC 4E=:E ·Ξ_·:E E4
:II 4I:. EO·E· 4E:EE =X·II.

M_4Λ 4 X4 O·...I IC _Λ E·EEЖ4·I. =· ЖEII: ·C X:.

_Ж:Ж 4X4 EOI·I 4= 4 EI:, =· XX: IE·O 4 M_4Λ 4 II..., =:... C⇒ E·E·Ж4·I
MM4XX°IΛ ·I: Ж4 4E·XX·=·I.

4 Ξ4E Ж:Θ4Λ·, I E:·II E·O·. E4 C·IAO X· E...E4 E4 C·IAO E· EIO4. EM...IE·Λ ·Σ4,
E EII4Λ ·Σ4 "·ΘO4Λ". ·E GE ·E ΣEE·.

XO·E4: :: ·Σ·=·I 4I: 4 X4 ME:II·I II 4IIW =4IA II IEO...E IMI E: MMIEOT.

E·=· I IE·X4E·: ::MM4II·, I·Θ4II, _Λ4II E :·II4Λ.

E·=· I EO4MM: EO·Λ, M·E4·, 4II...E, =4Λ·Λ.

E·=· I ...IE4Λ: Σ·I4M, II4I·.

E4M I I_4E·: ::MM4E.

M Ξ: 4 E=:E E ME:II·E ·4.

:IE4Λ =· X4O4: E· IOII· Ξ_I4=.

Table des matières

Table des matières

i

I	Modèle standard de la cosmologie	1
1	Eléments de relativité générale	3
1.1	Limites de la relativité restreinte	3
1.2	Principe d'équivalence	4
1.3	Equations de la théorie	5
1.4	Application à la cosmologie	6
1.4.1	Principe cosmologique	6
1.4.2	Contenu de l'univers	6
1.4.3	Equations de Friedmann	7
1.4.4	Paramètres cosmologiques	7
2	Supernovae	9
2.1	Classification	9
2.1.1	Supernovae à effondrement de cœur	10
2.1.2	Supernovae de type Ia	10
2.2	Conséquences cosmologiques	11
2.2.1	Distance luminosité	11
2.3	Standardisation des SNIa	13
2.4	Différentes expériences à travers le monde	16
2.4.1	ESSENCE	16
2.4.2	SNLS	16
2.4.3	HST	16
2.4.4	CSP	16
2.4.5	SNfactory	16
2.4.6	SDSS	17
3	Contraintes observationnelles	19
3.1	Extraction des paramètres cosmologiques	19
3.2	Anisotropies du CMB	22
3.3	BAO	26

II	Modification de la relativité générale - Energie noire	29
4	Modèle ΛCDM	33
4.1	Age de l'univers	34
4.2	Contraintes sur le modèle	35
4.3	Problèmes de la constante cosmologique	35
5	Quintessence	37
6	Champ scalaire en gravitation	39
6.1	Origine du champ scalaire	39
6.2	Modèle de Brans-Dicke	40
6.2.1	Equations du modèle	41
6.2.2	Approximation de champ faible	42
6.3	Théories scalaire-tenseur	43
6.3.1	Représentation d'Einstein	44
6.3.2	Modification de la constante gravitationnelle	45
7	Scalar-Tensor Models of Normal and Phantom Dark Energy	47
7.1	Introduction	48
7.2	Background evolution	51
7.3	The master equation for F	55
7.4	Scaling solutions	56
7.5	Small z expansion and Solar System gravity tests	58
7.6	General reconstruction of $F(z)$	62
7.7	Reconstruction for a constant potential U	63
7.7.1	Constant nonvanishing potential U	67
7.8	Asymptotic stability	68
7.9	Conclusions	69
8	Théories $f(R)$	73
8.1	Genèse du modèle	73
8.2	Equations du modèle	74
8.3	Equivalence du modèle	75
8.4	Contraintes observationnelles	76
8.4.1	Exemple	76
9	Conditions for the cosmological viability of $f(R)$ dark energy models	83
9.1	Introduction	84
9.2	$f(R)$ dark energy models	86
9.2.1	Definitions and equations	86
9.2.2	Autonomous equations	88
9.3	Cosmological dynamics of $f(R)$ gravity models	89
9.3.1	Critical points and stability for a general $f(R)$	89
9.4	Four classes of Models	94
9.4.1	Transition from the matter point P_5 to an accelerated point P_6 or P_1	94
9.4.2	Classification of $f(R)$ models	96
9.5	Specific models : analytical results	98
9.5.1	$f(R) = \alpha R^{-n}$	98
9.5.2	$f(R) = R + \alpha R^{-n}$	100

9.5.3	$f(R) = R^p \exp(qR)$	101
9.5.4	$f(R) = R^p (\log \alpha R)^q$	102
9.5.5	$f(R) = R^p \exp(q/R)$	102
9.5.6	$f(R) = R + \alpha R^2 - \Lambda$	103
9.5.7	$f(R) = R - \mu_1^4/R + \mu_2^{-2} R^2$	103
9.5.8	$m(r) = -0.2(1+r)(3.2 + 0.8r + r^2)$	104
9.5.9	Summary	104
9.6	Specific cases : Numerical results	104
9.6.1	$f(R) = \alpha R^{-n}$	105
9.6.2	$f(R) = R + \alpha R^{-n}$	105
9.6.3	$f(R) = R(\log \alpha R)^q$	107
9.6.4	$f(R) = R \exp(q/R)$	108
9.6.5	$m(r) = -0.2(1+r)(3.2 + 0.8r + r^2)$	110
9.7	Conclusions	110
III	Croissance des perturbations linéaires	113
10	Théorie des perturbations	115
10.1	Origine des perturbations	115
10.1.1	Les défauts topologiques	115
10.1.2	L'inflation	116
10.2	Métrique de fond et perturbations	119
10.3	Variables invariantes de jauge	121
10.4	Perturbations du tenseur énergie-impulsion	122
10.5	Equations des perturbations	123
10.6	Equations de conservation	124
10.7	Evolution	125
11	On the growth of linear perturbations	127
11.1	Introduction	128
11.2	Linear growth of perturbations	128
11.3	Some specific models	131
11.3.1	Λ CDM	131
11.3.2	Constant equation of state	132
11.3.3	Variable equation of state	132
11.4	Summary and conclusions	133
12	The growth of matter perturbations in some scalar-tensor DE models	135
12.1	Introduction	136
12.2	An asymptotically stable scalar-tensor model	137
12.3	Some observational constraints	139
12.4	Linear growth of perturbations	141
	Bibliographie	148
	Annexes	168
A	Transformations conforme	169

B	Systèmes dynamiques	171
B.1	Racines réelles distinctes	173
B.2	Racine réelle double	173
B.3	Racines complexes	174
C	Formulaire en théorie des perturbations	175

Introduction

Les mystères de l'expansion accélérée de l'univers, vaste programme . . . Cette thèse n'a évidemment pas pour ambition de lever le voile sur ce mystère, mais seulement d'apporter une modeste contribution à la compréhension de notre univers dont l'aventure scientifique remonte à près de cent ans. L'histoire pourrait commencer par une observation, celle des galaxies. Celles-ci s'éloignent les unes des autres dans un mouvement qui ne leur est pas propre. En effet, c'est l'espace lui-même qui se dilate. Ce fait observationnel dû à Hubble est un écho exceptionnel à la théorie de la relativité générale d'Einstein. L'homme par qui tout commence, ou presque. Il a en effet permis de concevoir différemment notre espace et notre temps sous une forme unique et nouvelle. L'univers n'est plus une entité absolue, héritage de la pensée grecque, notamment celle d'Aristote, mais une quantité dynamique reliée à la quantité de matière et d'énergie qui la constitue. L'univers n'est plus l'apanage des philosophes, mais devient une composante des sciences modernes. Il devient donc une science que l'on peut soumettre à l'expérience et à l'observation. C'est ainsi que le modèle standard de la cosmologie a pu se construire : un savant mélange de théorie et d'observations. Celles-ci ont d'ailleurs été d'une importance capitale afin de "baliser" le chemin vers la théorie expliquant l'univers. Ainsi, grâce à la cosmologie moderne et à l'observation du premier pic acoustique dans le spectre des anisotropies du rayonnement du fond cosmologique, nous avons acquis la certitude que la densité de l'univers est proche de sa densité critique. De plus, les observations ont montré que la plus grande partie de la matière nous est invisible : la matière noire. Mais quelle est donc l'origine de cette matière ? Et comment interagit-elle avec le reste de la matière ? C'est l'une des deux grandes interrogations en cosmologie. Un spectre infini de questions et de réponses sont débattues parmi les cosmologistes. Mais il y a peut-être une interrogation encore plus révolutionnaire émanant de l'observation de la luminosité de certaines étoiles en fin de vie : les supernovae. En effet ces astres nous conduisent à penser que l'univers est en expansion accélérée. Dans le cadre de notre théorie standard de la cosmologie cela implique que l'univers est dominé par une forme inconnue d'énergie, l'énergie noire. Cette dernière peut se concevoir sous diverses formes dont seul l'expérience permettra de distinguer le bon du mauvais modèle. Ainsi cette thèse a, entre autre, pour but d'étudier différentes contraintes observationnelles concernant les modèles d'énergie noire. Ceux-ci sont très nombreux et leurs origines peuvent remonter à des âges antérieures au problème de l'énergie noire. En effet, très tôt c'est posé le problème de la quantification de la relativité générale, ce qui a conduit au développement de modèles de gravitation modifiée. De plus d'autres motivations, dans le but de modifier la théorie, émanèrent des travaux de Carl Henry Brans et Robert Henry Dicke afin de rendre la théorie compatible avec le principe de Mach où le concept d'inertie est revue. Cette théorie et ses extensions, comme les théories scalaire-tenseur, sont devenues des candidats privilégiés des théories alternatives à la gravitation. De plus de nombreuses théories sont nées dont des modèles dits de gravitation non linéaire, i.e. l'addition de termes d'ordres supérieurs R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ dans le lagrangien de la théorie. Ce type de

termes apparaissent dans le lagrangien effectif des théories de cordes et de Kaluza-Klein lorsque le mécanisme de réduction dimensionnelle est utilisé. On constate donc différentes positions théoriques mais également des observations telles que celles des supernovae, des anisotropies du fond diffus cosmologique, ainsi que les BAO. Toutes ces conclusions renforcent l'idée d'un modèle où la gravitation pourrait ne pas être simplement décrite par un lagrangien avec une fonction scalaire de la courbure R . Les observations nous permettront donc de comparer les modèles voire d'en éliminer certains.

Première partie

Modèle standard de la cosmologie

Eléments de relativité générale

Sommaire

1.1	Limites de la relativité restreinte	3
1.2	Principe d'équivalence	4
1.3	Equations de la théorie	5
1.4	Application à la cosmologie	6

La théorie de la relativité générale est une théorie qui permet de décrire la gravitation en termes purement géométriques. Ainsi Einstein apporte en 1915 une véritable révolution de notre conception de l'espace et du temps. Tandis que l'espace-temps était perçu comme un "fond" avec lequel on n'interagissait pas, i.e. un cadre absolu, Einstein l'imagina comme une "matière" malléable, qui peut se déformer selon son contenu. L'espace-temps devient alors un champ comme un autre, avec une dynamique.

1.1 Limites de la relativité restreinte

La relativité restreinte élaborée par Einstein en 1905 a eu pour but d'introduire le principe de relativité :

toutes les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels galiléens,
y compris la constance de la vitesse de la lumière.

Ce principe va se traduire mathématiquement par une invariance des équations sous les transformations de Lorentz, qui nous permettent de déterminer les intervalles de temps et d'espace dans une transformation passant d'un référentiel à un autre.

Puisque ces référentiels sont identiques il est impossible de déceler un mouvement rectiligne et uniforme d'un système par une expérience embarquée quelconque. Il s'agit du principe de relativité. Cependant, celui-ci ne s'étend pas aux systèmes accélérés puisque le mouvement de tels systèmes peut être mis en évidence par une expérience.

On est alors en présence de repère absolu puisque ces mouvements accélérés nous donnent la possibilité de détecter des mouvements absolus. Cette conclusion ne pouvant être acceptée en relativité restreinte, Einstein en apportera la solution.

1.2 Principe d'équivalence

Tout corps possède une masse dite inertielle m_i , c'est-à-dire celle que lui procure une accélération sous l'action d'une force extérieure et une masse gravitationnelle m_g , qui est la constante de couplage dans la force gravitationnelle. Elle permet donc de déterminer l'intensité de cette force.

La chute d'un corps va dépendre du rapport m_i/m_g . Pourtant, dès les premières mesures de Galilée aux plus récentes, en passant par celles de Eötvös (1908) et Dicke (1964), aucune différence ne fut décelée. Aujourd'hui ce résultat reste vrai à une précision de 10^{-12} . Einstein va prendre en compte ce lien entre inertie et gravité et en faire une équivalence.

La chute libre des corps est donc indépendante de ces derniers, elle est universelle. Les corps chutent simultanément lorsqu'ils sont lâchés simultanément. Il s'agit du principe d'équivalence faible.

Il en conclut alors que tout champ de gravitation statique et uniforme est équivalent à un référentiel accéléré dans le vide. C'est le principe d'équivalence d'Einstein. Il existe un référentiel dans lequel le mouvement libre d'un corps sera rectiligne et uniforme, c'est un référentiel localement inertiel. Ce corps doit être cependant assez faible pour que les inhomogénéités du champ gravitationnel soient négligeables.

Puisque l'on peut définir un repère dans lequel le mouvement d'une particule test est rectiligne et uniforme, alors son accélération propre est nulle. Ceci se traduit par

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad \text{où } \tau \text{ est le temps propre} \quad (1.1)$$

Maintenant si l'on se place dans un autre référentiel, la transformation générale $x'^\mu(x^\nu)$ donne alors

$$\frac{d^2 x'^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{dx'^\alpha}{d\tau} \frac{dx'^\beta}{d\tau} = 0 \quad (1.2)$$

On définit

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \quad (1.3)$$

L'équation (1.2) se réécrit alors

$$\frac{d^2 x'^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{dx'^\alpha}{d\tau} \frac{dx'^\beta}{d\tau} = 0 \quad (1.4)$$

De plus la métrique qui était plate auparavant devient

$$g_{\mu\nu}(x'^\alpha) = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \quad (1.5)$$

Ces équations ne représentent pas grand-chose pour les physiciens de l'époque, mais un œil averti (de mathématicien) reconnaît en ces équations une géométrisation de la théorie. Une structure géométrique apparaît naturellement. $g_{\mu\nu}$ est la métrique d'une variété différentiable à 4 dimensions diffeomorphe à un espace de Minkowski et où Γ est la connexion.

Tout un ensemble de connaissances en mathématiques doit alors être assimilé par Einstein, qui le fera avec l'aide d'un de ses anciens camarades : Marcel Grossmann. Une lettre d'Einstein rappelle à cette époque son intérêt grandissant pour les mathématiques.

Je m'occupe exclusivement du problème de la gravitation et je crois maintenant que je surmonterai toutes les difficultés avec l'aide d'un ami mathématicien d'ici. Il y a au moins une chose certaine, c'est que je n'avais jamais travaillé aussi dur de ma vie et j'ai acquis un grand respect des mathématiques, dont j'avais jusqu'à présent, dans mon innocence,

*considéré les aspects subtils comme un luxe superflu ! A côté de ce problème, la première théorie de la relativité est un jeu d'enfant.*¹

Un long travail amènera à la théorie de la relativité générale. C'est alors le 25 novembre 1915 qu'Einstein publie ses équations du champ de la théorie formalisé par Hilbert sous la forme d'une action.

Un an plus tard, Karl Schwarzschild trouve une solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein.

En 1919, Arthur Stanley Eddington et Frank Watson Dyson vérifient la déviation des rayons lumineux lors de l'éclipse total du Soleil.

Naissait alors l'une des plus grandes théories de la physique.

1.3 Equations de la théorie

Les équations établies par Einstein peuvent être établies par la dérivation de l'action d'Einstein-Hilbert

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x + S_m \quad (1.6)$$

où g est le déterminant de la métrique de notre espace-temps, R la courbure scalaire de ce même espace, S_m est l'action des champs de matière et c la vitesse de la lumière, celle-ci sera omise par la suite ($c = 1$).

La variation de cette action donne la fameuse équation de la relativité générale.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.7)$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci défini à partir de la connexion (les symboles de Christoffel) et R la courbure scalaire

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) \quad (1.8)$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \quad (1.9)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.10)$$

$T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie impulsion défini par

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (1.11)$$

D'après les identités de Bianchi, on en déduit la conservation de ce dernier tenseur

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.12)$$

L'équation de la relativité générale (1.7) indique alors clairement l'égalité entre l'énergie, par l'intermédiaire du tenseur énergie-impulsion et la géométrie de cet espace. Selon l'interprétation classique, le terme de droite de l'équation, i.e. le contenu de l'univers apporte une modification de la métrique soit de la géométrie de l'univers. Mais on pourrait aussi avoir une interprétation "miroir". En effet rien ne nous empêche à partir de cette équation de voir un univers déformé, i.e. une dynamique de l'espace qui engendrerait le terme de droite, soit la matière. On voit bien les difficultés à

¹Lettre à A. Sommerfeld du 29 octobre 1912, citée in A. Hermann, "Einstein/Sommerfeld Briefwechsel"

interpréter ces équations, mais les solutions de celles-ci seront encore plus difficiles à trouver. On ne connaît que très peu de solutions exactes de la relativité générale. Cependant, son formalisme et son apparente simplicité ont permis d'apporter de très grandes réponses à la physique.

Malgré cela, cette équation de la relativité générale "déplaçait" à Einstein. En effet l'univers n'est plus statique. Il décide en 1917 de rajouter une constante afin de pallier ce problème

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.13)$$

Cette constante pourrait s'opposer à la gravitation et définir un univers statique. Mais cette solution est très instable, une légère perturbation conduirait l'univers vers une expansion ou bien un effondrement. De plus Edwin Hubble observe en 1929 un déplacement vers le rouge (redshift) des longueurs d'onde, ce qu'il interprète comme un éloignement des galaxies, soit une expansion de l'univers. Ceci mit fin à la vie de la constante cosmologique. Cependant, son histoire ne s'arrête pas là, elle réapparaît plus tard pour expliquer l'expansion accélérée de l'univers.

1.4 Application à la cosmologie

1.4.1 Principe cosmologique

En opposition avec la position géocentrique, le principe cosmologique stipule que l'homme n'occupe pas une place privilégiée. Ainsi l'univers doit être spatialement homogène et isotrope. Ce qui conduit à la forme de la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right) \quad (1.14)$$

où $a(t)$ est le facteur d'échelle et k le terme de courbure.

$$k = \begin{cases} 1 & \text{pour un univers fermé} \\ -1 & \text{pour un univers ouvert} \\ 0 & \text{pour un univers plat} \end{cases} \quad (1.15)$$

1.4.2 Contenu de l'univers

Le tenseur énergie-impulsion permet de représenter la répartition de masse et d'énergie dans l'espace-temps. Ainsi sous l'hypothèse d'un fluide parfait, ce tenseur prend la forme suivante

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (1.16)$$

où P , ρ et u sont respectivement la pression, la densité et la vitesse de ce fluide.

Les différents types de fluide seront alors différenciés selon le rapport

$$w = \frac{P}{\rho} \begin{cases} = 0 & \text{pour des particules non-relativistes} \\ = 1/3 & \text{pour des particules relativistes} \\ < -1/3 & \text{pour un fluide qui provoquerait une accélération de l'univers} \\ = -1 & \text{pour une constante cosmologique} \end{cases} \quad (1.17)$$

1.4.3 Equations de Friedmann

Si l'on considère les équations de la relativité générale (1.7), la métrique (1.14) ainsi que la forme du tenseur énergie impulsion (1.16) alors nous avons deux équations dites de Friedmann

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{k}{a^2} \quad (1.18)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i (\rho_i + 3P_i) \quad (1.19)$$

où la somme se fait sur tous les éléments matériels de l'univers et H est la fonction de Hubble.

Cette première équation va déterminer la "vitesse" d'expansion de l'univers alors que la seconde va nous informer si l'univers est en accélération ou en décélération selon le signe de $\ddot{a}$. Pour cela on considère le paramètre de décélération $q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$.

Nous savons depuis 1998, que ce paramètre est aujourd'hui négatif, i.e. que l'univers accélère.

1.4.4 Paramètres cosmologiques

On définit la densité critique ρ_c comme la densité qu'aurait un univers homogène et isotrope en expansion pour que sa courbure spatiale k soit nulle. Soit

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.20)$$

Ainsi on va pouvoir définir des quantités adimensionnées, qui représentent la proportion (par rapport à la densité critique) de chaque élément dans l'univers.

$$\Omega_i = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_i \quad (1.21)$$

$$\Omega_k = -\frac{k^2}{a^2 H^2} \quad (1.22)$$

La première équation de Friedmann se réécrit

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_k = 1 \quad (1.23)$$

Elle apparaît comme une équation de contrainte.

De plus l'équation (1.12) nous donne une équation de conservation

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (1.24)$$

En définissant le redshift z à partir du rapport de la longueur d'onde de la lumière au moment de son émission (λ) et de sa réception (λ_0).

$$1 + z = \frac{a_0}{a} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \quad (1.25)$$

On trouve alors après intégration en fonction de z

$$\rho = \rho_0 e^{3 \int_0^z \frac{1+w(z')}{1+z'} dz'} \quad (1.26)$$

Soit pour l'équation (1.18)

$$h^2(z) = \frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{rad,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \sum_i \Omega_{i,0} e^{3 \int_0^z \frac{1+w_i(z')}{1+z'} dz'} \quad (1.27)$$

où i est un fluide quelconque solution de l'équation (1.24) avec comme équation d'état $P = w\rho$.

Il s'agit de la fonction de Hubble en fonction du redshift. Cette expression est très intéressante puisqu'elle nous permet de contraindre les paramètres du modèle comme nous le verrons par la suite.

Supernovae

Sommaire

2.1	Classification	9
2.2	Conséquences cosmologiques	11
2.3	Standardisation des SNIa	13
2.4	Différentes expériences à travers le monde	16

L'apparition de nouvelles étoiles "stellae novae" intriguait déjà dans l'antiquité. Les plus anciennes références se retrouvent en Asie et notamment chez les Chinois. C'est seulement au XVI^e siècle que le monde occidental réalise leur existence. Ensuite Lundmark (1889-1958) est le premier à établir une classification et permet ainsi de distinguer les "super-novae" dont il propose le nom. Minkowski (1895-1976) et par la suite Zwicky (1898-1974) rajouteront différentes sous-classes.

Avant de voir cette classification, il est temps de définir ces objets.

Il s'agit de l'apparition d'une "nouvelle" étoile dans le ciel. C'est ainsi le moment où celle-ci éjecte une grande partie de sa matière lors d'une violente explosion et cesse ainsi d'exister comme étoile. Cela marque la fin de son existence en tant qu'entité.

2.1 Classification

Leur intérêt aujourd'hui en cosmologie est très important. Elles sont considérées comme des chandelles cosmologiques. Elles permettent ainsi la mesure des distances. Elles sont un sujet de recherche en tant que telles par l'étude des différents processus physiques très complexes qui se déroulent lors de la formation de tels cataclysmes. Tous ces processus très intéressants sont hors de mon champ d'investigation pour l'instant. J'introduirai les différents types de supernovae et leur classification.

Cette classification est basée sur la spectroscopie lorsque la luminosité est maximale. On distingue alors deux classes selon la présence ou l'absence de raies d'hydrogène au voisinage du maximum de luminosité. On définit les supernovae de Type II en présence d'hydrogène et celle de Type I en son absence. Par la suite une distinction plus riche apparaîtra dans les années 80. La présence (ou absence) de silicium donne les supernovae de type Ia (respectivement de type Ib ou Ic). Toutes ces distinctions peuvent être résumées dans la figure (2.1).

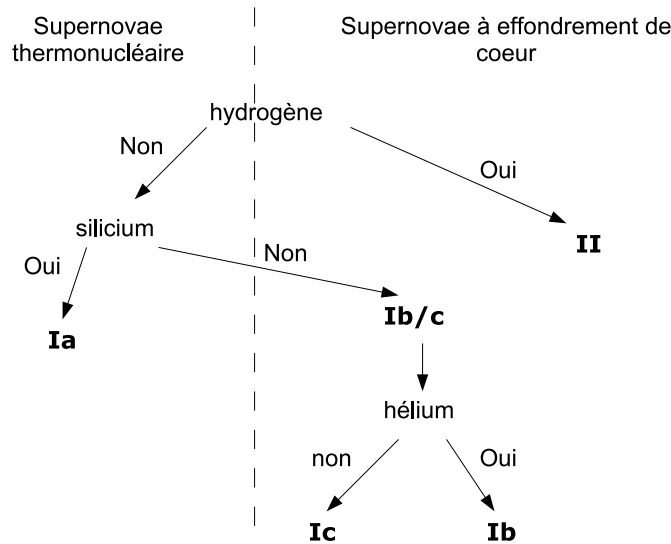


FIG. 2.1 – Classification des supernovae

2.1.1 Supernovae à effondrement de cœur

L'effondrement de cœur est le mécanisme (ou plutôt les mécanismes) conduisant à l'implosion de l'étoile en soufflant les couches externes de celle-ci. C'est le destin des étoiles les plus massives ($M > 8M_{\odot}$). Ces "monstres" énergétiques ont une vie beaucoup plus courtes que notre soleil et sont très lumineuses. Je vais rappeler brièvement les différentes étapes de leur vie.

Formées majoritairement d'hydrogène à leur naissance, les étoiles vont brûler ce combustible en hélium. Il y a alors un équilibre entre la pression interne et la gravitation. Lorsque ce carburant vient à manquer, l'équilibre est rompu et la gravitation reprend tous ses droits. L'étoile s'effondre sur elle-même, provoquant alors un réchauffement et une nouvelle combustion, celle de l'hélium. Tout comme le mythe de Sisyphe, ce processus va se reproduire, mais à la différence que ça ne l'est pas éternellement. En effet après la formation du fer, notre étoile ne pourra plus le fusionner, cette réaction serait endothermique puisque le fer est l'élément ayant l'énergie de liaison la plus importante. L'étoile a alors une structure en pelures d'oignon, i.e. une structure en couches de plus en plus légère à mesure que l'on s'éloigne du cœur.

En se synthétisant, le fer va alourdir le cœur. Lorsque celui-ci aura atteint une masse proche de celle de Chandrasekhar, la pression des électrons dégénérés ne peut plus s'opposer à la gravitation. Le cœur s'effondre entraînant une augmentation de température. La désintégration β inverse est favorisée ($e^- + p \rightarrow n + \nu$). Les neutrinos s'échappent de l'étoile dont le noyau est alors principalement composé de neutrons. Les couches externes continuent à s'effondrer sur un cœur très dense et incompressible. Une onde de choc en retour (rebond) se propage alors du noyau vers l'extérieur. Ce qui entraîne une dislocation de l'astre qui laisse derrière lui une étoile à neutrons voire un trou noir.

Ces étoiles sont peu utilisées pour l'instant dans la mesure des distances cosmologiques. Cependant, le plateau de décroissance de la luminosité pour les SNI permettrait de les utiliser comme "chandelle cosmologique" [Hamuy 02] quand la physique expliquant ce plateau sera mieux connue.

2.1.2 Supernovae de type Ia

Dans l'étude qui me concerne, i.e. celle de l'énergie noire, seules les SNIa sont utilisées comme chandelles cosmologiques. Le processus conduisant à l'existence d'une SNIa peut être celui d'une

naine blanche et d'un compagnon qui peut être également une autre naine blanche.

Tout commence avec une étoile peu massive qui va brûler son hydrogène. Lorsque ce combustible devient rare, cette réaction s'éteint et l'étoile se contracte en se réchauffant. Ainsi lorsque le cœur de l'étoile atteint $10^8 K$, l'hélium se met à fusionner à son tour en carbone et oxygène, tandis que l'enveloppe d'hydrogène non brûlée se dilate et refroidit, c'est une géante rouge. Au final le centre de l'étoile, formé de carbone et d'oxygène se contracte (sans jamais atteindre une température suffisante pour déclencher les autres réactions) jusqu'à ce que la pression de Fermi des électrons dégénérés vient s'opposer à la gravitation, ce qui donne une naine blanche. Ces objets ont une caractéristique étrange, plus leur masse augmente plus leur rayon diminue. C'est Chandrasekhar qui calcula alors la masse, qui porte désormais son nom, que doit atteindre cet astre afin que son rayon soit nul. Il s'agit donc d'une limite supérieure à la masse des naines blanches.

On se retrouve alors avec un système binaire formé d'au moins une naine blanche. Celle-ci absorbe de la matière de son compagnon qui va conduire l'astre à atteindre la masse de Chandrasekhar et ainsi imploser, ne laissant qu'un nuage de gaz chaud en expansion. Un même processus est à l'origine des SNIa (absorption de matière par une naine blanche puis implosion lorsque celle-ci atteint la masse de Chandrasekhar) qui leur confère alors une grande similitude, d'où une très forte ressemblance des courbes de luminosité.

Celle-ci est générée par les réactions radioactives [Kuchner 94] successives



La masse de nickel nous servira par la suite afin de modifier la relation entre la magnitude et la distance de luminosité dans des théories où la constante gravitationnelle n'est plus constante.

Ainsi les SNIa nous permettent de déterminer la distance de galaxie lointaine et donc de prolonger le diagramme de Hubble. Ces indicateurs de distances doivent cependant être standardisés malgré de très grandes similitudes. Les Céphéides permettent quant à elles ce travail. Ces astres qui sont des supergéantes jaunes ont une relation entre leur période de pulsation et leur luminosité. Ceci fut mesuré pour la première fois en 1912 par H. Leavitt qui a ainsi déterminé des distances interstellaires et parfois intergalactiques. Les supernovae ont l'avantage de mesurer des distances beaucoup plus grandes. Cependant, malgré des propriétés très semblables il peut y avoir des différences de luminosité au sein des SNIa. Elles ont donc besoin d'être standardisées. Cette calibration de la luminosité intrinsèque des SNIa a été réalisée avec les plus proches d'entre-elles, qui ont explosées dans des galaxies où des Céphéides avaient permis de connaître les distances.

Aujourd'hui de nombreux projets sont à la recherche de SNIa dont le SNLS (SuperNova Legacy Survey) qui a pour but de découvrir plusieurs centaines de SNIa à des redshifts entre 0.2 et 1 afin de contraindre w .

2.2 Conséquences cosmologiques

2.2.1 Distance luminosité

Nous savons, d'après les équations de la relativité générale, que la géométrie de l'univers est reliée à son contenu énergétique. En connaissant les distances, on peut ainsi contraindre les différents paramètres cosmologiques. Ce sera le rôle de la distance de luminosité. Celle-ci permet un lien entre la magnitude absolue (M) et la magnitude apparente (m).

En géométrie euclidienne, pour un objet ayant une luminosité intrinsèque L , le flux (luminosité par unité de surface) est alors défini par

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (2.1)$$

où d_L est la distance de luminosité qui est égale à la distance classique dans un espace Minkowskien statique.

Imaginons un objet avec une luminosité intrinsèque L qui se trouve à une distance comobile r par rapport à un observateur en 0. L'énergie lumineuse émise par cet objet pendant un temps Δt sera notée ΔE alors que ces grandeurs vues par l'observateur en 0 seront notées Δt_o et ΔE_o . Ainsi les luminosités observées et intrinsèques sont définies respectivement par

$$L_o = \frac{\Delta E_o}{\Delta t_o}, \quad L = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Or nous savons (1.25) que

$$1 + z = \frac{\lambda_o}{\lambda} = \frac{\nu}{\nu_o} = \frac{\Delta t_o}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta E_o}$$

Ainsi

$$L = L_o(1 + z)^2 \quad (2.2)$$

De plus pour la métrique de Robertson-Walker l'élément de surface spatial est défini par

$$dS^2 = a(t)^2 S_k^2(r) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi) \quad (2.3)$$

où

$$S_k(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{univers fermé} \\ \sinh(x) & \text{univers ouvert} \\ x & \text{univers plat} \end{cases} \quad (2.4)$$

Soit une surface totale atteinte par la lumière de cet astre aujourd'hui

$$S = 4\pi a_0^2 S_k^2(r) \quad (2.5)$$

Nous savons que le flux peut être défini de façon intrinsèque comme $F = \frac{L}{4\pi d_L^2}$ mais on peut également le définir par rapport à l'observateur comme $F = \frac{L_o}{S}$. Soit

$$d_L = a_0 S_k(r)(1 + z)$$

Alors, dans le cas d'un univers plat (modèle que j'utiliserai par la suite)

$$d_L = (1 + z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (2.6)$$

Cette distance de luminosité est reliée à la magnitude par

$$\mu = m(z) - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{Mpc} \right) + 25 \quad (2.7)$$

Cette dernière relation est incomplète pour des modèles de gravitation modifiée où la constante gravitationnelle G varie dans le temps.

En effet le modèle de [Arnett 82] explique que le maximum de la courbe de luminosité est proportionnelle à la masse de nickel synthétisée qui est elle-même proportionnelle à la masse de Chandrasekhar. Or $M_{Ch} \simeq G_{\text{eff}}^{-3/2}$. Ainsi l'énergie émise est proportionnelle à $G_{\text{eff}}^{-3/2}$. Cet effet aura pour conséquence de modifier la luminosité donc la magnitude. Ainsi nous n'aurons plus la même relation entre la distance de luminosité et le module de distance μ . Les premiers auteurs [Garcia-Berro 99, Amendola 99b] pensaient que cela pourrait expliquer l'apparent éloignement des étoiles par seulement une modification de G , mais les calculs montrent que cette modification est trop importante. G ne peut

que très légèrement dévier de sa valeur actuelle. Ainsi la relation magnitude distance de luminosité devient

$$m(z) = M + 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{1 \text{ Mpc}} \right) + 25 + \frac{15}{4} \log_{10} \left(\frac{G_{\text{eff}}}{G_{\text{eff},0}} \right) \quad (2.8)$$

où G_{eff} est la vraie valeur de la "constante" gravitationnelle, i.e. l'intensité gravitationnelle mesurée dans une expérience de type Cavendish.

2.3 Standardisation des SNIa

Comme on l'a vu précédemment les supernovae de type Ia peuvent être utilisées comme indicateurs de distance puisqu'elles sont considérées comme des chandelles cosmologiques. De plus leur très forte luminosité permet d'observer de tels objets à de très grandes distances. Ainsi ce sont des candidats essentiels pour l'analyse de l'énergie noire et de sa possible dynamique.

Malgré leur très grande ressemblance, on observe des différences. Les différentes équipes d'observations doivent alors entamer une procédure de standardisation. Pour cela [Pskovskii 77] a constaté une relation dite "brighter-slower" entre la luminosité maximale et la décroissance de cette luminosité. Plus la supernova est intense au maximum plus la décroissance de sa luminosité sera lente. Ainsi [Phillips 93] introduisit un paramètre caractérisant le taux de décroissance de la courbe de lumière. Celui-ci est défini comme la différence entre la magnitude quinze jours après son maximum et sa magnitude au maximum de luminosité¹.

$$\Delta m_{15} = m(t_{\text{max}} + 15 \text{ jours}) - m(t_{\text{max}}) \quad (2.9)$$

Cette grandeur est fortement corrélée à la magnitude absolue à son maximum (Fig. 2.2).

Ainsi une correction de la magnitude absolue peut être effectuée en suivant cette corrélation basée sur l'observation.

De plus il y a d'autres paramètres d'uniformisation des courbes. Ainsi, certaines équipes dont le *Supernova Cosmology Project* utilisent un facteur d'étirement, le *stretch factor* (voir Fig. 2.3). Dans la bande B, ces deux paramètres sont reliés par l'équation suivante.

$$\Delta m_{15} - 1.1 \approx 1.7(1 - s_B) \quad (2.10)$$

où s_B est le stretch factor dans la bande B.

Différentes corrections sont apportées et sont notamment liées aux filtres utilisés, mais également à l'absorption due aux poussières rencontrées qui entraînent un rougissement de la lumière, aux effets de lentilles gravitationnelles qui peuvent amplifier ou atténuer la luminosité, etc . . .

On voit donc que l'observation de nombreuses supernovae de type Ia a permis de définir des corrélations. Celles-ci sont alors utilisées afin de corriger les courbes de luminosité qui sont altérées par différents processus décrits plus haut. Les SNIa peuvent alors être considérées comme de très bons estimateurs de distance.

¹La luminosité est considérée comme maximale pour la bande B. Les observations sont faites en utilisant un filtre parmi cinq bandes spectrales standard nommée U,B,V,R,I définis par Bessell [Bessell 90]

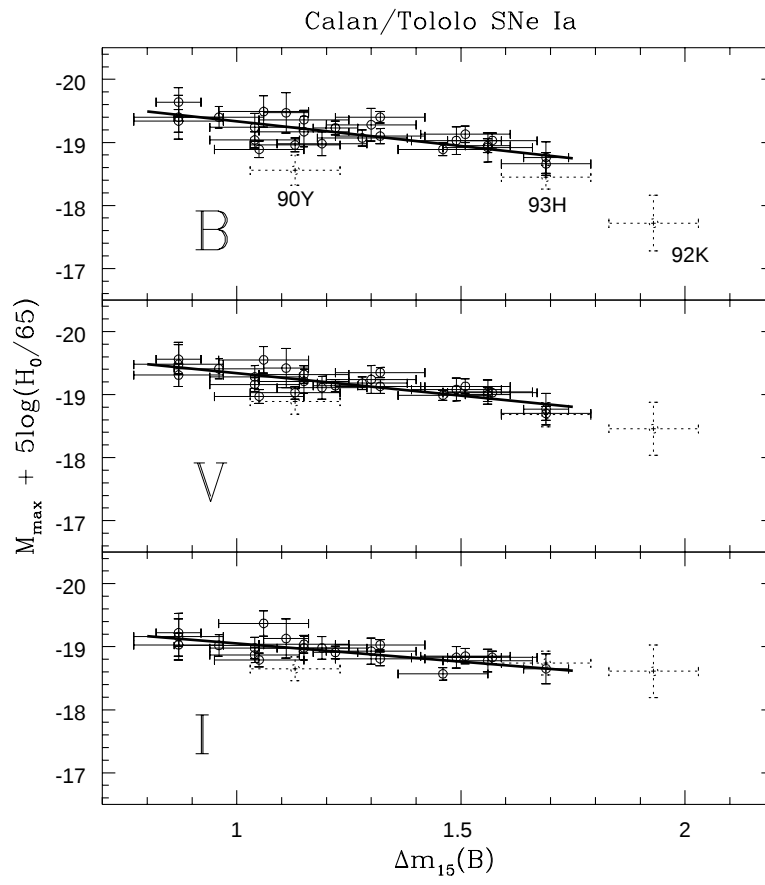


FIG. 2.2 – On voit clairement une corrélation entre la magnitude absolue à son maximum et ce paramètre pour trois bandes spectrales différentes. La courbe est tirée de l'article [Hamuy 96]

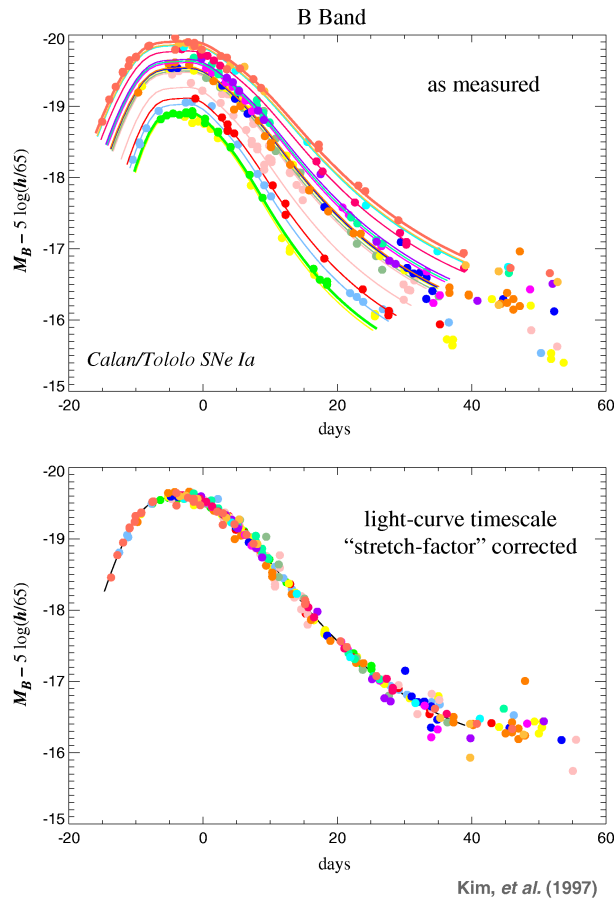


FIG. 2.3 – Effet du *stretch factor* sur les courbes de luminosité. On constate notamment que plus la luminosité maximale de la supernovae est grande plus sa décroissance est faible. Remarque que nous avons déjà faite et qui permet les corrections. Partant d’une mesure où la dispersion au maximum est assez importante on arrive à des courbes standardisées, i.e. avec une faible dispersion. Tiré de [Perlmutter 99a]

2.4 Différentes expériences à travers le monde

L'étude des supernovae dans le but de déterminer les paramètres cosmologiques est relativement récente. Cette histoire commence dans les années 90 au sein de deux équipes : le *High-z team* (Riess) [Riess 98] et le *Supernova Cosmology Project* (Perlmutter) [Perlmutter 99b]. Elles vont révolutionner la cosmologie récente par l'observation de l'accélération de l'univers, ce que l'on appellera l'énergie noire. Il faut également citer l'équipe de Hamuy au *Catán-Tololo Survey* qui a été un "fournisseur" de supernovae à faible redshift pour les deux équipes. Cependant, afin de déterminer maintenant la possible dynamique de l'énergie noire, il faut avoir un plus grand nombre de supernovae et plus particulièrement un plus grand nombre à grand redshift. C'est de cette manière que sont nées les expériences de deuxième génération.

Voici une liste des grands projets de recherche de supernovae à travers le monde.

2.4.1 ESSENCE

ESSENCE (*Equation of State : SuperNova trace Cosmic Expansion*) aussi appelé "*the w project*" est un observatoire basé au Chili. Il découle du projet "*High-z team*". Ce projet a pour ambition de trouver 200 SNIa dans un intervalle de redshift $[0.15, 0.75]$ afin de contraindre w à ± 0.1 (1 sigma).

2.4.2 SNLS

SNLS (SuperNova Legacy Survey) utilise les données collectées par le CFHT (Canada France Hawaii Telescope) à Hawaii. Ce projet est prévu pour un fonctionnement de cinq ans entre 2003 et 2008 pour des redshift compris entre 0.2 et 1, dont le but est de découvrir plusieurs centaines de supernovae afin de contraindre l'équation d'état de l'énergie noire.

2.4.3 HST

Le HST (Hubble Space Telescope) est un télescope en orbite à environ 600 kilomètres d'altitude. Son lancement date du 24 avril 1990. Cependant, ce télescope n'ayant pas pour but la recherche de supernovae a donc une statistique mauvaise. Il a permis néanmoins de découvrir une dizaine de supernovae à des redshift supérieurs à 1.2. Ces données sont utilisées par le projet *ESSENCE*.

2.4.4 CSP

CSP (Carnegie Supernova Project) est un projet situé au Chili et prévu pour 5 ans (2004-2009). Son but est de recueillir différentes supernovae dont des SNIa à très faibles redshift. Cela permet notamment les normalisations des distances.

2.4.5 SNfactory

SNfactory (The Nearby Supernova Factory) est une expérience dont le but est l'étude de 300 supernovae à faible redshift afin de trouver la nature de l'énergie noire. Il s'agit d'une collaboration entre les Etats-Unis (Lawrence Berkeley Lab) et la France (IN2P3/CNRS) basé au Mont Palomar (en Californie) et à Hawaii.

2.4.6 SDSS

SDSS (Sloan Digital Sky Survey) a une composante recherche de supernovae "SDSS Supernova Survey" depuis 2004 dont le but est de connaître 200 supernovae dans un intervalle de redshift $z = 0.1 - 0.3$.

On peut donc constater l'intérêt de la recherche de supernovae par le nombre des équipes. Mais l'inconvénient majeur reste la statistique et les systématiques. Plus on observera de supernovae plus notre connaissance de l'énergie noire sera précise. Ainsi de nombreux projets sont à l'étude. Des missions spatiales :

- SNAP (SuperNova Acceleration Probe) qui est un projet américain très coûteux et dont le lancement, si le projet est retenu, est prévu avant 2020.
- DUNE (Dark UNiverse Explorer) est un projet français concurrent de SNAP (mais moins ambitieux) né de l'attente infinie de chercheurs du projet SNAP.

Ces missions ont du mal à démarrer notamment par leur coût exorbitant, c'est pour cela que des projets au sol sont développés dont le LSST (Large Synoptic Survey Telescope) basé au Chili et dont l'ambition est de découvrir plusieurs dizaines de milliers de supernovae.

Contraintes observationnelles

Sommaire

3.1	Extraction des paramètres cosmologiques	19
3.2	Anisotropies du CMB	22
3.3	BAO	26

3.1 Extraction des paramètres cosmologiques

Dans un univers de type Friedmann, la magnitude apparente des objets astrophysiques peut être exprimée en fonction de la distance de luminosité.

$$m(z) = M - 5\log_{10}(H_0) + 25 + 5\log_{10}(D_L) = \tilde{M} + 5\log_{10}(D_L) \quad (3.1)$$

où H_0 est la constante de Hubble, M est la magnitude absolue des SN1a, $\tilde{M}$ peut être considéré comme un facteur de normalisation pour les différentes luminosités et D_L est la distance de luminosité indépendante de la constante de Hubble H_0 .

$$D_L = \frac{1+z}{\sqrt{|\Omega_k|}} \mathcal{S}_k \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{h(z')} \right) \quad (3.2)$$

où $\mathcal{S}_k(x) = \sinh(x)$, x , $\sin(x)$ selon que l'univers est ouvert, plat ou fermé.

Comme la courbure spatiale est très faible, on pourra la négliger par la suite. D'après [Komatsu 08]

$$-0.0175 < \Omega_{k,0} < 0.0085 \quad (3.3)$$

Ainsi

$$D_L = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{h(z')} \quad (3.4)$$

La fonction de Hubble H est définie (1.27) comme suit

$$h^2(z) = \frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{rad,0}(1+z)^4 + \Omega_{DE}(z) \quad (3.5)$$

où

$$\Omega_{DE}(z) = \Omega_{DE,0} e^{3 \int_0^z \frac{1+w(z')}{1+z'} dz'} \quad (3.6)$$

avec

$$w(z) = \frac{P_{DE}}{\rho_{DE}} = \frac{\frac{2}{3}(1+z) \frac{d \ln H(z)}{dz} - 1}{1 - \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \Omega_{m,0} (1+z)^3}, \quad \text{si la radiation est faible} \quad (3.7)$$

où P_{DE} et ρ_{DE} sont respectivement la pression et la densité de l'énergie noire.

Afin de contraindre les paramètres du modèle, j'utiliserai les données fournies par deux expériences, ESSENCE et SNLS [Riess 06, Wood-Vasey 07]. Il s'agit donc d'une liste hybride où ils ont normalisés le module de distance μ en regardant les supernovae qu'ils avaient en commun [Davis 07].

Les différents paramètres de notre modèle théorique sont alors calculés en minimisant le χ^2

$$\chi^2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_{th}(z_i) - \mu_{obs}(z_i))^2}{\sigma_i^2} \quad (3.8)$$

où $\{\theta_i\}$ sont les paramètres de notre modèle, σ_i est l'erreur sur le module de distance défini comme suit

$$\mu_{th}(z_i) = m_{th}(z_i) - M = 5 \log_{10} \left((1+z_i) \int_0^{z_i} \frac{dz'}{h(z')} \right) + \mu_0 \quad (3.9)$$

où $\mu_0 = 25 - 5 \log_{10}(H_0)$ est simplement une constante. Celle-ci est alors considérée comme nuisible puisqu'il faut l'imposer. Il existe deux méthodes afin de marginaliser le χ^2 , i.e. éliminer cette constante. On peut se donner la densité de probabilité

$$P \propto e^{-\chi^2/2} \quad (3.10)$$

ainsi une intégrale de P par rapport à toutes les valeurs de μ_0 (ou bien de H_0) permet de redéfinir une densité de probabilité P' indépendante de cette constante.

$$P' \propto \int P e^{\frac{(H_0 - \tilde{H}_0)^2}{2\sigma^2}} dH_0 \quad (3.11)$$

où $\tilde{H}_0$ est la constante de Hubble mesurée par une autre expérience dont on suppose la distribution gaussienne.

La deuxième méthode, utilisé par [Di Pietro 03, Nesseris 04, Lazkoz 05], n'est pas une méthode de marginalisation. Elle consiste à choisir une valeur de μ_0 analytiquement. Ces auteurs ont montré que cette méthode donne les mêmes résultats que la marginalisation à 0.1% près.

Ainsi en définissant $\mu = \tilde{\mu} + \mu_0$ avec

$$\tilde{\mu} = 5 \log_{10} \left((1+z) \int_0^z \frac{dz'}{h(z')} \right) \quad (3.12)$$

on remarque que χ^2 peut se développer sous la forme

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(\tilde{\mu}_{\text{th}}(z_i) + \mu_0 - \mu_{\text{obs}}(z_i))^2}{\sigma_i^2} \quad (3.13)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{(\tilde{\mu}_{\text{th}}(z_i) - \mu_{\text{obs}}(z_i))^2}{\sigma_i^2} + 2\mu_0 \sum_{i=1}^N \frac{(\tilde{\mu}_{\text{th}}(z_i) - \mu_{\text{obs}}(z_i))}{\sigma_i^2} + \mu_0^2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (3.14)$$

$$= A + 2B\mu_0 + C\mu_0^2 \quad (3.15)$$

avec les définitions évidentes pour A , B et C .

Il s'agit donc d'un polynôme du second ordre en μ_0 . Cette fonction est alors simple à minimiser. Le minimum est atteint pour

$$\mu_0 = -\frac{B}{C} \quad (3.16)$$

Soit pour cette valeur

$$\chi^2 = A - \frac{B^2}{C} \quad (3.17)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{(\tilde{\mu}_{\text{th}}(z_i) - \mu_{\text{obs}}(z_i))^2}{\sigma_i^2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\mu}_{\text{th}}(z_i) - \mu_{\text{obs}}(z_i)}{\sigma_i^2}\right)^2}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (3.18)$$

La minimisation de cette équation (3.18) permet de trouver les meilleures valeurs pour les différents paramètres du modèle $\{\theta_i\}$.

Pour un modèle d'énergie noire avec w constant

$$h^2(z) = \Omega_{m,0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{m,0})(1+z)^{3(1+w)} \quad (3.19)$$

on trouve à 2 sigma (voir Fig. 3.1)

$$\Omega_{m,0} = 0.31 \pm 0.06 \quad w = -1.15 \pm 0.23 \quad (3.20)$$

Il est aussi intéressant de se poser la question de la reconstruction de l'équation d'état à partir des observations [Alam 04a]. Nous connaissons le lien entre w et H à partir de l'équation (3.7). Ainsi la connaissance de la fonction de Hubble permet de connaître la dynamique de l'énergie noire.

Pour cela on se donne un ansatz [Alam 04a]

$$h^2(z) = \Omega_{m,0}(1+z)^3 + A_0 + A_1(1+z) + A_2(1+z)^2 \quad (3.21)$$

Cet ansatz est exact pour la constante cosmologique $w = -1$ ($A_1 = A_2 = 0$) ainsi que pour des modèles d'énergie noire où $w = -2/3$ ($A_0 = A_2 = 0$) et $w = -1/3$ ($A_0 = A_1 = 0$). Il n'est pas réellement à considérer comme un développement limité, mais comme une équation mimant l'énergie noire à faible et grand redshift. Par la suite il suffit de se donner une valeur de $\Omega_{m,0}$, les trois paramètres A_0 , A_1 , A_2 sont déterminés par la minimisation du χ^2 . Ce qui détermine totalement la fonction de Hubble et donc $w(z)$ via l'équation (3.7) (voir Fig. 3.2)

$$w(z) = -1 + \frac{1+z}{3} \frac{A_1 + 2A_2(1+z)}{A_0 + A_1(1+z) + A_2(1+z)^2} \quad (3.22)$$

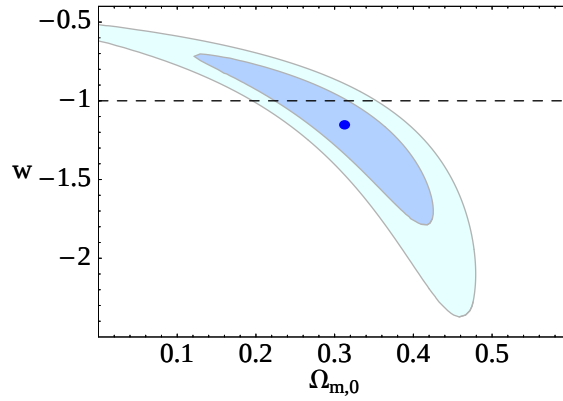


FIG. 3.1 – Contrainte des supernovae sur un modèle d'énergie noire avec w constant et sans courbure. Le point bleu représente les meilleures valeurs des paramètres, les deux contours sont les erreurs à 1σ et 2σ et les tirets représente le modèle Λ CDM. On voit que l'on peut imaginer des modèles d'énergie noire avec $w < -1$. Cependant, on se rend compte des grandes barres d'erreur. Les supernovae ne peuvent à elles seules apporter des réponses satisfaisantes sur les paramètres du modèle. Il faut avoir recours à d'autres observations. Celles-ci sont introduites au chapitre suivant.

Les auteurs ont fait de très faibles hypothèses, ainsi le résultat reste assez robuste. Celui-ci nous indique que l'énergie noire semble avoir une équation d'état variable i.e. que ce n'est pas une constante cosmologique. De plus, nous voyons que la condition d'énergie faible (WEC) peut être violée ($w < -1$).

Ce dernier résultat fut le fruit du travail de [Caldwell 02] qui remarqua qu'une valeur importante de $\Omega_{m,0}$ ($\Omega_{m,0} > 0.2$) implique une valeur de w de plus en plus faible et même inférieure à -1 . Il l'appela l'énergie fantôme. Ce résultat fût confirmé par [Knop 03]. Il faut tout de même indiquer que dans ces deux cas les auteurs ont fait l'hypothèse de w constant.

Nous voyons bien que sous certaines conditions la condition d'énergie faible peut être violée, il est donc très intéressant de regarder des modèles où w est inférieur à -1 . C'est par exemple le cas des théories dites scalaire-tenseur dont je parlerai par la suite.

3.2 Anisotropies du CMB

La théorie perturbative de la métrique que je développerai au chapitre dix, traite des fluctuations de la température des photons. Nous avons un "transfert" de l'information contenue dans la métrique vers les photons.

Nous avons à l'époque du CMB un univers composé de photons, baryons et électrons dont le libre parcours moyen est alors très faible. A l'époque du découplage (qui suit la recombinaison, i.e. la période pendant laquelle les électrons et les noyaux se recombinent) les photons acquièrent un libre parcours moyen infini. Cette époque devient la surface de dernière diffusion (des électrons), l'univers devient transparent. Ce spectre est proche de celui d'un corps noir à la température de $2,725K$. Cependant, ce rayonnement n'est pas tout à fait isotrope puisque l'univers n'est pas tout à fait homogène et isotrope [Sachs 67].

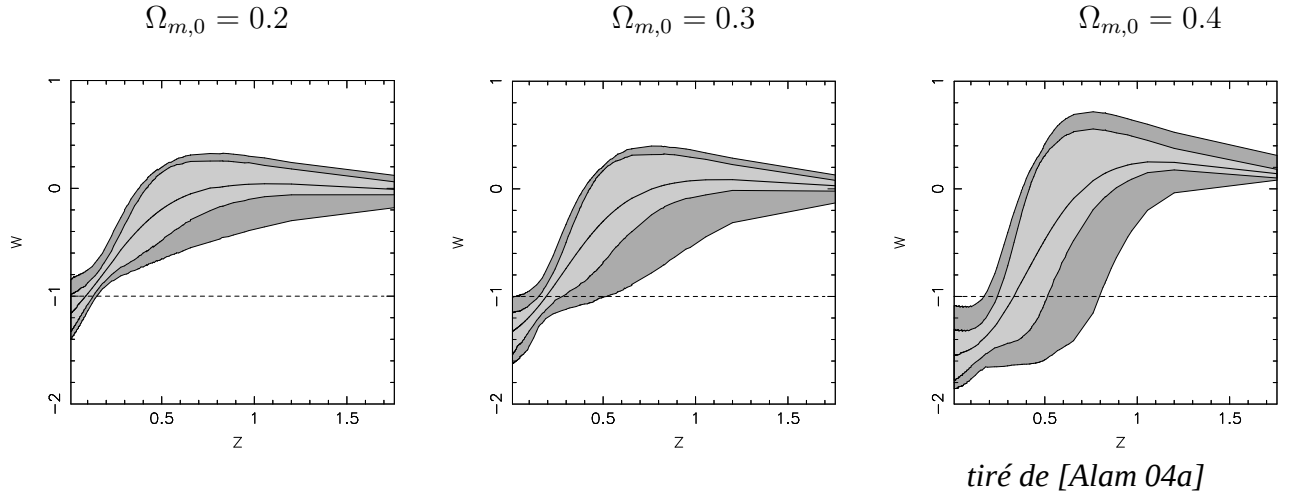


FIG. 3.2 – L'évolution de $w(z)$ selon le redshift pour différentes valeurs de $\Omega_{m,0}$. Sur chaque graphe la ligne en pointillée représente le modèle Λ CDM, le trait plein la fonction $w(z)$ pour les meilleurs paramètres du modèle. Le contour en gris clair représente le niveau de confiance à 1σ et le contour foncé l'erreur à 2σ

Je vais développer très brièvement comment calculer les anisotropies en température du CMB.

Soit un gaz de photons et λ l'abscisse curviligne le long de leur trajectoire, alors l'équation sur le 4-vecteur énergie-impulsion p^μ est

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu p^\rho p^\sigma = 0 \quad (3.23)$$

avec

$$p^\mu = \frac{E}{a}(1, \mathbf{n}) \quad \text{où} \quad n^i n^j \gamma_{ij} = 1, \quad \gamma_{ij} \text{ est la métrique spatiale, } E \text{ l'énergie et } n^i \text{ la ligne de visée} \quad (3.24)$$

qui se réduit dans un univers de Friedmann à

$$\dot{E} + \mathcal{H}E = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{H} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} \quad \text{où } \eta \text{ est le temps conforme} \quad (3.25)$$

Après la recombinaison la fonction de distribution des photons, qui suivent la statistique de Bose-Einstein est

$$f^{(0)}(\eta, E) = \frac{1}{\exp(E/T) - 1} \quad (3.26)$$

Celle-ci évolue suivant l'équation de Boltzmann sans collision (équation de Liouville), i.e. que la dérivée totale de f par rapport à λ est nulle.

$$\frac{df^{(0)}}{d\lambda} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \eta} + \dot{E} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial E} = 0 \quad (3.27)$$

Soit en utilisant (3.25)

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \eta} = \mathcal{H}E \frac{\partial f^{(0)}}{\partial E} \quad (3.28)$$

ainsi on peut voir que $f^{(0)} = f^{(0)}(aE)$. On en conclue qu'après le découplage l'énergie des photons est "redshiftée" par l'expansion de l'univers comme $E \propto a^{-1}$. Soit une évolution de la température d'après l'équation (3.26) comme $T \propto a^{-1}$.

Maintenant que nous avons résolu l'équation pour la partie homogène et isotrope, regardons la partie anisotrope, i.e. que nous avons décomposé la fonction de distribution comme

$$f(\eta, x^i, E, n^i) = f^{(0)}(\eta, E) + \delta f^{(1)}(\eta, x^i, E, n^i) \quad (3.29)$$

Les deux parties de la décomposition appartiennent à deux espaces des phases différents (cet aspect des perturbations sera abordé dans le chapitre dix). Il faut alors construire une fonction dite invariante de jauge

On peut montrer [Durrer 94] que sous une certaine transformation de jauge, $\delta f^{(1)}$ se transforme selon

$$\delta f^{(1)} \Rightarrow \delta f^{(1)} + E \frac{\partial \delta f^{(0)}}{\partial E} (\mathcal{H}T + n^i T_i) \quad (3.30)$$

ce qui permet de construire une autre fonction $\mathcal{F}$ invariante de jauge solution de l'équation de Liouville suivante

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^i} n^i - E \mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial E} - {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i n^j n^k \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial n^i} = E \frac{\partial f^{(0)}}{\partial E} [n^i \partial_i (\Phi + \Psi)] \quad (3.31)$$

où les ${}^{(3)}\Gamma_{jk}^i$ sont les Christoffel de la partie spatiale (qui seront dans notre cas nuls), Φ et Ψ sont les potentiels de Bardeen, ils apparaissent sous cette forme comme des termes de source pour la perturbation de la fonction de distribution.

Pour la suite il est plus intéressant d'intégrer cette dernière équation par rapport à E afin de définir la *brillance* du fluide de photons, i.e. l'énergie par unité d'angle solide mesurée par un observateur à la position x^i .

$$I = I^{(0)}(\eta) + I^{(1)}(\eta, x^i, n^i) \equiv 4\pi \int_0^\infty f^{(0)} E^3 dE + 4\pi \int_0^\infty \delta f^{(1)} E^3 dE \quad (3.32)$$

Ainsi la densité de photons est simplement le monopôle de la brillance

$$\rho_\gamma = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{4\pi} I \quad \text{soit} \quad \rho_\gamma^{(0)} = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{4\pi} I^{(0)} \quad (3.33)$$

La brillance permet alors de définir le contraste de température (puisque la densité d'énergie varie comme la température à la puissance quatre)

$$\theta(\eta, x^i, n^i) = \frac{\delta T}{T} = \frac{1}{4} \frac{I^{(1)}}{I^{(0)}} \quad (3.34)$$

L'équation (3.31) s'écrit alors pour le contraste de température.

$$\dot{\theta} + \left(n^i \partial_i - {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i n^j n^k \frac{\partial}{\partial n^i} \right) \theta = -n^i \partial_i (\Phi + \Psi) \quad (3.35)$$

Il s'agit de l'équation de Boltzmann pour des particules relativistes sans collisions, qui exprime comment les perturbations gravitationnelles apparaissent dans les fluctuations de température. Afin

d'avoir une équation plus réaliste il faut rajouter différents termes d'interactions dont notamment la diffusion Thomson et la polarisation de la radiation.

$$\dot{\theta} + n^i \partial_i \theta + n^i \partial_i (\Phi + \Psi) = \text{interactions} \quad (3.36)$$

Cependant, comme le principe reste le même, je ne vais pas plus compliquer ces équations.

En supposant que l'espace est plat $^{(3)}\Gamma_{jk}^i = 0$, on va pouvoir faire une décomposition en mode de Fourier¹

$$\theta(\eta_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \theta(\eta_0, \mathbf{k}, \mathbf{n}) e^{i\mathbf{x}_0 \mathbf{k}} \quad (3.37)$$

Chaque mode de Fourier peut être développé en harmonique sphérique sur la 2-sphère suivante

$$\theta(\eta_0, \mathbf{k}, \mathbf{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(\mathbf{k}, \eta_0) Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (3.38)$$

où les coefficients $a_{lm}(\mathbf{k})$ sont donnés par

$$a_{lm}(\mathbf{k}) = \int d\Omega_{\mathbf{n}} \theta(\mathbf{k}, \mathbf{n}) Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (3.39)$$

$$= 4\pi \theta_l(\mathbf{k}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (3.40)$$

Ce développement peut également se faire dans l'espace réel

$$a_{lm} = a_{lm}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} a_{lm}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{x}_0 \mathbf{k}} \quad (3.41)$$

Ce qui permet de définir le spectre de puissance angulaire du CMB

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l \quad (3.42)$$

Pour un modèle donné on peut calculer les coefficients C_l et ainsi les comparer aux observations. Les anisotropies du fond diffus cosmologique ont été mesurées pour la première fois par le satellite COBE (COsmic Background Explorer). À partir de 1998 les expériences BOOMERanG et MAXIMA ont permis de mettre en évidence les premiers pics acoustiques. Et enfin depuis 2003 le satellite WMAP nous apporte des mesures précises jusqu'à $l \sim 1000$ (voir Fig. 3.3)

Les positions des pics acoustiques dépendent du modèle donc des paramètres choisis, ce qui permet de fixer des contraintes sur ces derniers. Cependant, il existe une dégénérescence [Efstathiou 99] sur ces paramètres. Nous devons avoir recourt à d'autres expériences afin de les lever. Ainsi, afin d'illustrer cette dégénérescence il a été introduit le *paramètre de shift* R défini comme la variation du premier pic acoustique pour un mode adiabatique par rapport à un modèle de référence plat et dont $\Omega_m = 1$.

$$R' = \frac{l_{\text{ref}}^{(1)}}{l^{(1)}} \quad (3.43)$$

or pour les modes adiabatiques

$$l^{(m)} = m\pi \frac{d_A}{ar_s}(\eta_{\text{ref}}) \quad \text{avec} \quad d_A : \text{la distance angulaire et,} \quad r_s : \text{l'horizon du son}$$

¹Si l'espace n'est pas plat, la décomposition est un peu plus compliquée [Vilenkin 64, Kodama 84]

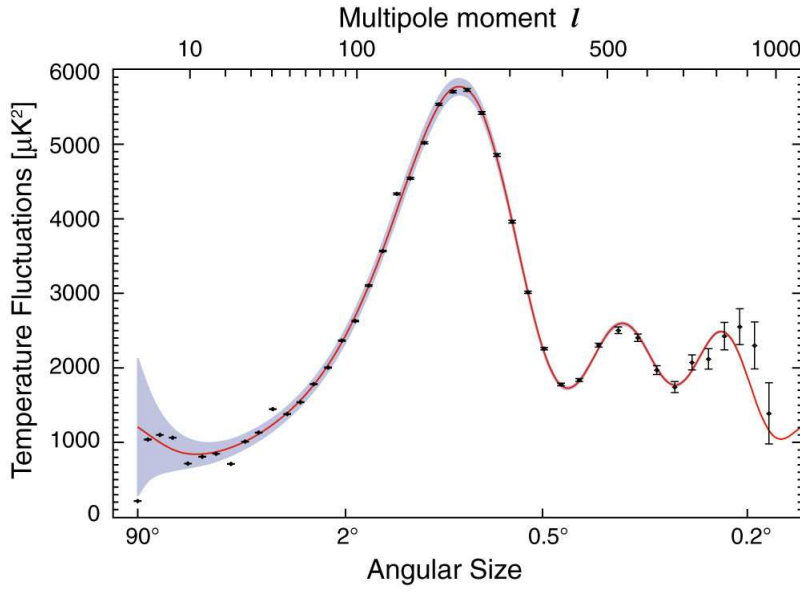


FIG. 3.3 – Spectre angulaire des fluctuations de température, tiré du site de la NASA

ce qui après quelques calculs que l'on peut retrouver dans [Efstathiou 99]

$$R' = \frac{2}{S_k \left(H_0 |\Omega_k| \int_0^{z_{\text{rec}}} \frac{dz'}{h(z')} \right)} \sqrt{\frac{|\Omega_k|}{\Omega_m}} \quad z_{\text{rec}} = 1089 \quad (3.44)$$

Cependant on retrouve dans la littérature la définition d'un autre paramètre de shift que l'on utilisera par la suite

$$R = \frac{2}{R'} = \sqrt{\Omega_m} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} S_k \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^{z_{\text{rec}}} \frac{dz'}{h(z')} \right) \quad (3.45)$$

soit dans un espace plat

$$R = \sqrt{\Omega_m} \int_0^{z_{\text{rec}}} \frac{dz'}{h(z')} \quad (3.46)$$

Le paramètre de shift R a été contraint [Wang 06] par les trois années de données de WMAP

$$R = 1.70 \pm 0.03 \quad (3.47)$$

3.3 BAO

Puisque l'univers a une fraction importante de baryons, la théorie prédit que les oscillations acoustiques dans le plasma primordial seront également "imprimées" dans le spectre de puissance de la matière non-relativiste [Peebles 70, Bond 84, Holtzman 89, Hu 96, Eisenstein 98]. Il s'agit des BAO (Baryon Acoustic Oscillations). Leur détection dans le spectre de puissance des galaxies au faible redshift apporte la possibilité de contraindre l'expansion de l'univers et donc les paramètres de l'énergie noire. En particulier, on peut mesurer la quantité suivante

$$D_v(z) = \left((1+z)^2 \frac{z}{H(z)} d_A^2(z) \right)^3 \quad (3.48)$$

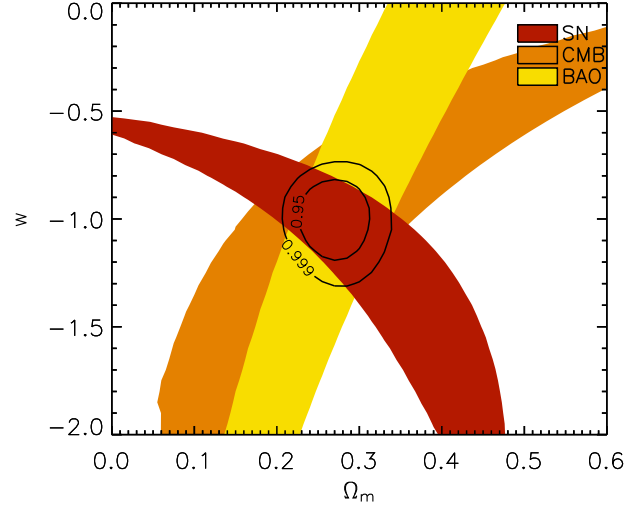


FIG. 3.4 – Les différentes couleurs correspondent aux contraintes sur le modèle à partir des données des supernovae, des BAO et des anisotropies du CMB (via le paramètre R (voir 12.1)), en ayant supposé un modèle d'énergie noire sans courbure avec w constant. Tiré de [Davis 07]

où d_A est la distance angulaire.

$$d_A(z) = \frac{1}{H_0(1+z)} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} S_k \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{h(z')} \right) \quad (3.49)$$

soit

$$D_v(z) = \frac{1}{H_0} \left[\frac{z}{|\Omega_k| h(z)} S_k^2 \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{h(z')} \right) \right]^{1/3} \quad (3.50)$$

Ce qui permet de définir le paramètre A

$$A(z) = H_0 D_v(z) \frac{\sqrt{\Omega_m}}{z} \quad (3.51)$$

contraint par [Eisenstein 05]

$$A(0.35) = 0.469 \pm 0.017 \quad (3.52)$$

Ainsi les observations des supernovae, des anisotropies du CMB ainsi que des BAO permettent de contraindre l'énergie noire. Pour cela on définit la fonction χ^2 qu'il suffit de minimiser.

$$\chi^2(\{\theta_i\}) = \chi_{\text{SN1a}}^2 + \chi_A^2 + \chi_R^2 \quad (3.53)$$

avec χ_{SN1a}^2 défini en (3.18) et $\{\theta_i\}$ les différents paramètres de notre modèle.

$$\chi_A^2 = \frac{(A(z=0.35, \{\theta_i\}) - 0.469)^2}{0.017^2}, \quad \chi_R^2 = \frac{(R(\{\theta_i\}) - 1.7)^2}{0.03^2} \quad (3.54)$$

Sous l'hypothèse de w constant, on a un modèle cohérent avec le modèle Λ CDM ($w = -1$) (voir Fig. 3.4). Mais on constate également qu'une déviation de cette forme d'énergie noire est possible. Ce résultat est renforcé dans le cas où w n'est plus constant.

Deuxième partie

Modification de la relativité générale - Energie noire

La relativité générale est l'une des théories les mieux vérifiées. Elle a notamment permis de calculer avec précision l'avance du périhélie de Mercure, la courbure des rayons lumineux dans un champ de gravitation, une explication élégante du déplacement vers le rouge des raies spectrales, ainsi que de nombreuses prédictions cosmologiques. On l'a bien compris, l'infiniment grand, donc l'univers, est le terrain de jeu de la relativité générale. Cependant, il a fallu compléter par différents modèles la cosmologie afin de lever certains paradoxes. Il s'agit notamment de l'inflation, c'est-à-dire une expansion accélérée de l'univers. De nouveau, il semble que nous vivions une phase d'expansion accélérée. Ainsi tout comme pour l'inflation, il nous faut compléter notre théorie afin d'être en accord avec les faits.

La première observation et confirmation de cette expansion accélérée fut établie par l'observation des SNIa et donc de leur luminosité par deux équipes, celles du *High-Z SN search* et le *SuperNovae Cosmology Project* [Riess 98, Perlmutter 99b]. Ce fait expérimental fut confirmé par l'observation des anisotropies du CMB, des BAO. Celui-ci est ainsi devenu une vérité "indiscutable".

Cependant, jusqu'en 1998 le modèle théorique était celui d'un univers en expansion décéléré. La grande question était de savoir si celle-ci serait ou pas éternelle. Assisterons-nous à un *Big-Crunch* ?

Depuis ces observations notre regard a changé. Le big-crunch a été "enterré" et il faut aujourd'hui avoir une théorie qui prédit cette accélération de notre espace.

Différents modèles sont possibles. On peut soit rajouter un élément (énergie du vide, champ scalaire ...) dans l'univers ou bien modifier la gravitation par son action à quatre dimensions ou bien par l'ajout de dimensions supplémentaires. J'exposerai quelques modèles par la suite.

Modèle Λ CDM

Sommaire

4.1	Age de l'univers	34
4.2	Contraintes sur le modèle	35
4.3	Problèmes de la constante cosmologique	35

Einstein introduisit en 1917 une constante cosmologique Λ dans ses équations parce qu'il pensait trouver ainsi un univers fermé statique qui serait en accord avec le principe de Mach, l'inertie n'a pas de sens dans un univers vide. Cependant, la découverte de solutions d'un univers en expansion sans constante cosmologique par Friedmann en 1922 et enfin l'observation de la fuite des galaxies par Hubble en 1929 finissent par achever l'existence d'une constante cosmologique. Ce qui en donne l'un des regrets les plus célèbres de l'histoire de la science. Le modèle d'un univers statique venait de s'effondrer et la constante cosmologique n'avait donc plus d'utilité. Elle fut "ranger au placard" pour un petit moment, avant de renaître.

Cependant, durant toutes ces années elle ne fut pas totalement oubliée. En effet, pour remédier au problème de la singularité primordiale dans la solution de Friedmann, Lemaître avait développé en 1927 un modèle d'un univers d'origine statique dans lequel le facteur d'échelle est constant avant de commencer à croître. C'est seulement en 1968 que Yakov Borisovich Zel'dovich [Zel'dovich 68] considéra l'importance de la constante cosmologique en faisant le lien avec l'énergie du vide. En effet son calcul à une boucle de la fluctuation du vide après renormalisation donne un tenseur énergie-impulsion de l'énergie du vide sous la même forme que celle de la constante cosmologique.

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{vide}} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

Ainsi venait de naître le lien entre la constante cosmologique et l'énergie du vide, ce qui va poser certains problèmes dont je parlerai par la suite. Pour l'instant concentrons-nous sur les solutions des équations en présence du terme Λ .

L'introduction de la constante cosmologique apporte dans les équations une modification sous la forme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (4.2)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \right) \quad (4.3)$$

Ainsi le terme supplémentaire peut être vu comme un terme "géométrique" (partie gauche) donc une modification de l'action d'Einstein-Hilbert ou bien comme un terme de "source" (partie droite), i.e. un fluide supplémentaire.

Dans les conditions d'un univers homogène et isotrope, i.e. la métrique FLRW, on a

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (4.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i (\rho_i + 3P_i) + \frac{\Lambda}{3} \quad (4.5)$$

Ainsi si l'on définit le paramètre de décélération

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (4.6)$$

L'équation (4.5) s'écrit alors

$$q = \sum_i \frac{\Omega_i}{2} (1 + 3w_i) \quad (4.7)$$

où

$$\Omega_i = 8\pi G \frac{\rho_i}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad (4.8)$$

On voit que la présence uniquement de matière conduit à un univers en expansion décélérée

$$q = \frac{\Omega_m}{2} (> 0) \quad (4.9)$$

Alors que la présence d'une constante cosmologique positive conduit à une accélération de l'univers

$$q = -\Omega_\Lambda (< 0) \quad (4.10)$$

Dans un univers composé de matière et d'énergie noire sous la forme d'une constante cosmologique

$$q = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda \quad (4.11)$$

On voit alors que la présence d'une constante cosmologique peut entraîner une accélération de l'univers.

4.1 Age de l'univers

L'âge de l'univers sera calculé par

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^1 \frac{da}{aH(a)} = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)H(z)} \quad (4.12)$$

où H est donné par (4.4).

Pour un univers dominé par la matière et la constante cosmologique, on a

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}}} \quad (4.13)$$

avec $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$.

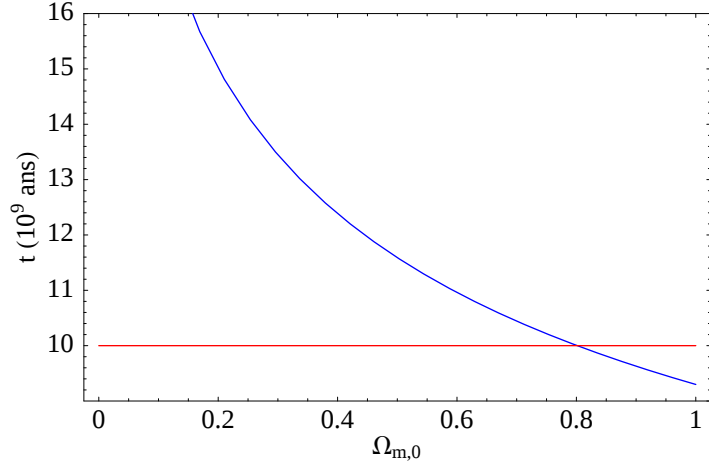


FIG. 4.1 – En bleue l’âge de l’univers en milliards d’années en fonction de $\Omega_{m,0}$ dans le modèle Λ CDM. En rouge j’ai représenté l’âge des objets les plus vieux de l’univers. Cette courbe a été faite pour $h = \frac{H_0}{100} = 0.701$

Ainsi on remarque que l’univers est plus vieux si $\Omega_{m,0}$ décroît ou/et lorsque Ω_Λ croît. Si l’on a plus d’énergie noire l’univers est plus âgé.

Par l’observation de certaines étoiles pauvres en métal, on peut donner une borne inférieure à l’âge de l’univers. En effet certains objets dans la voie lactée permettent de conclure que l’univers a un âge supérieur à 10 milliards d’années.

Ainsi on déduit de (Fig. 4.1), que pour avoir un univers au moins aussi vieux que les objets qui le composent, une composante d’énergie noire ($\Omega_{m,0} < 0.8$ soit $\Omega_{\Lambda,0} > 0.2$) est nécessaire.

4.2 Contraintes sur le modèle

Les tests observationnels sur ce modèle sont nombreux. On regardera les contraintes apportées par les supernovae, les anisotropies du CMB et les BAO.

Comme nous l’avons vu précédemment, les supernovae permettent de contraindre la distance de luminosité donc les paramètres du modèle via

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{1 Mpc} \right) + 25 \quad (4.14)$$

On voit clairement l’influence d’une constante cosmologique sur la distance de luminosité (Fig. 4.2). En effet pour une même mesure de redshift, plus la constante cosmologique est importante et plus la distance de luminosité croît. Ainsi l’objet est plus éloigné.

En utilisant la même définition du χ^2 (3.53), on trouve

$$\Omega_{m,0} = 0.27 \pm 0.04 \quad (4.15)$$

Soit 73% d’énergie noire. Ainsi toutes les observations conduisent à la présence d’énergie noire, qui dans ce modèle est sous forme d’une constante cosmologique.

4.3 Problèmes de la constante cosmologique

Nous avons vu que Zel’dovich avait réussi à montrer le lien entre constante cosmologique et énergie du vide.

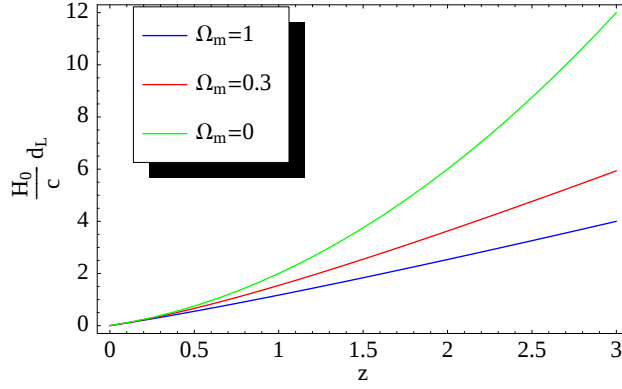


FIG. 4.2 – Distance de luminosité dans un univers plat pour trois modèles différents.

En mécanique quantique, le spectre d'énergie E_n pour un oscillateur harmonique de pulsation w est

$$E_n = \hbar w \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (4.16)$$

L'état de plus basse énergie n'est pas zéro contrairement à la mécanique classique. Il s'agit de l'énergie de point zéro, ce qui peut être interprétée grâce au principe d'incertitude, une particule ne peut jamais être totalement "arrêtée".

Un champ quantique libre est vu comme une série infinie d'oscillateurs harmoniques libres. Ainsi la densité d'énergie du vide pour un champ scalaire reçoit une contribution infinie des énergies de point zéro des différents modes d'excitation.

$$\langle T_{00} \rangle_{\text{vide}} = \langle \rho \rangle = \int_0^\infty \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + m^2} \quad (4.17)$$

Cette fluctuation du vide apporte dans un premier temps des divergences en k^4

Cependant on peut imaginer que l'échelle de Planck apporte un "cut-off" ultraviolet naturelle

Soit

$$\langle T_{00} \rangle_{\text{vide}} \simeq \frac{c^5}{G^2 \hbar} \simeq 10^{76} \text{ GeV}^4 \quad (4.18)$$

Alors que la mesure de la densité d'énergie associée à la constante cosmologique est

$$\rho_\Lambda \simeq 10^{-47} \text{ GeV}^4 \quad (4.19)$$

Soit une différence de 123 ordres de grandeur ! Il s'agit du problème majeure de la constante cosmologique. Il n'y a pas pour l'instant de modèles réussissant à résoudre ce problème.

Le second problème est celui de la coïncidence. En effet durant l'expansion de l'univers, la densité d'énergie de la matière décroît comme a^{-3} , la densité d'énergie de la radiation décroît comme a^{-4} alors que la densité d'énergie associée à la constante cosmologique reste constante. Ainsi il est très étonnant d'avoir les densités de matière et d'énergie noire du même ordre de grandeur à des temps récents.

Ce second problème est résolu en considérant une constante cosmologique variable, soit un champ scalaire.

Quintessence

Nous avons vu que la constante cosmologique était le modèle le plus simple pour expliquer l'accélération récente de l'univers. C'est-à-dire qu'elle devient la forme de l'énergie noire. Cependant, ce modèle possède deux problèmes majeurs. Le problème de "fine-tuning", i.e. comment cette constante cosmologique (ou plutôt sa densité d'énergie) peut-elle être aussi éloignée de l'échelle naturelle, celle de Planck. Le second problème est celui de la coïncidence : pourquoi cette accélération est-elle si récente ? Le facteur d'échelle n'est multipliée que par deux entre le moment où l'univers accélère et aujourd'hui. Alors que ce rapport est de 10^{28} entre l'époque de l'inflation et aujourd'hui. Ainsi ces problèmes semblent indiquer qu'une dynamique de l'énergie noire permettrait de résoudre les problèmes de "fine-tuning" et de coïncidence.

En 1998, nous avons les premiers articles [Ratra 88, Wetterich 88] qui décrivent en détail les conséquences cosmologiques de la présence d'un champ de quintessence. Il s'agit d'un seul champ scalaire, décrit par son terme cinétique et un potentiel.

Pour décrire la quintessence on a recours à un champ scalaire minimalement couplé à la gravitation.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) \quad (5.1)$$

où V est le potentiel du champ.

On peut aussi comme en relativité générale définir un tenseur énergie-impulsion

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (5.2)$$

Le champ ϕ sera considéré par la suite comme seulement dépendant du temps, dans un univers homogène et isotrope. Ainsi l'identification du tenseur énergie-impulsion avec celui d'un fluide parfait permet de définir une densité d'énergie et une pression associées à ce champ.

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (5.3)$$

$$P_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (5.4)$$

Ce qui permet de définir

$$w_\phi = \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (5.5)$$

On voit que le champ de quintessence ne peut décrire le secteur fantôme i.e. $w < -1$ (si $V(\phi) > 0$). Cependant, il peut très bien décrire une phase accélérée i.e. $w < -1/3$ lorsque

$$\dot{\phi}^2 < V(\phi) \quad (5.6)$$

Afin d'avoir un champ dont le comportement reste proche de celui d'une constante cosmologique i.e. $w = -1$, il suffit de se placer dans les conditions où

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad (5.7)$$

Nous sommes alors en présence d'un potentiel plat. Ceci peut être décrit par des paramètres introduit dans le contexte de l'inflation

$$\epsilon = \frac{m_{pl}^2}{16\pi} \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi} \right)^2 \quad (5.8)$$

$$\eta = \frac{m_{pl}^2}{8\pi} \frac{1}{V} \frac{d^2V}{d\phi^2} \quad (5.9)$$

Il faut alors que l'on se place dans les conditions de "slow-roll".

$$\epsilon \ll 1, \quad |\eta| \ll 1 \quad (5.10)$$

De plus ce champ scalaire a une dynamique décrite par une équation de Klein-Gordon

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V'(\phi) \equiv -\frac{dV}{d\phi} \quad (5.11)$$

Ainsi il évolue vers le minimum de V sans avoir encore atteint cet état, sinon on serait dans le cas d'une constante cosmologique. Différents modèles ont été construits afin d'avoir un modèle en accord avec les observations.

Nous avons notamment un potentiel qui permet d'avoir une solution avec une équation d'état constante.

$$V_1(\phi) = M^4 e^{-\lambda\phi} \quad (5.12)$$

Cette solution est très importante, car elle est un *attracteur*. Cela signifie que pour une grande plage de conditions initiales, le champ finira par avoir un comportement avec une équation d'état constante. Mais cette évolution ne signifie pas que l'on n'aura pas de problèmes de "fine-tuning". En effet pour avoir une proportion d'énergie noire proche de la valeur $\Omega_{DE,0} \simeq 0.7$ il faudra un ajustement fin sur les paramètres du potentiel.

De plus ce modèle simple et agréable à manipuler dispose d'un problème majeur, celui de ne pas engendrer d'énergie fantôme. En effet les observations [Komatsu 08] nous permettent de penser que w peut être inférieur à -1 [Caldwell 02] comme nous l'avons déjà signalé. C'est un domaine qu'il ne faut donc pas écarter.

Champ scalaire en gravitation

Sommaire

6.1	Origine du champ scalaire	39
6.2	Modèle de Brans-Dicke	40
6.3	Théories scalaire-tenseur	43

La théorie de la relativité générale d'Einstein est une théorie géométrique de l'espace-temps, dont la notion fondamentale est la métrique. Ce qui lui vaut la dénomination de théorie tensorielle. Nordström avait avant Einstein essayé de développer une théorie de la gravitation basée sur un champ scalaire (le potentiel Newtonien) sans succès. Par la suite Jordan sera le premier à réunir ces deux notions, dans une seule et même théorie dite "scalaire-tenseur". Ce modèle sera amélioré par Brans et Dicke [Brans 61] afin qu'il vérifie le principe d'équivalence faible (WEP). Le lagrangien proposé alors est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} \sqrt{-g} \left(\phi R - \frac{\omega}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) \quad (6.1)$$

En comparant ce modèle avec l'action de la relativité générale définit par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} R \quad (6.2)$$

On voit que ϕ joue le rôle de G^{-1} , ω est le seul paramètre constant du modèle ainsi que la présence d'un terme cinétique.

6.1 Origine du champ scalaire

Un champ scalaire peut être généré par différents mécanismes.

Historiquement le premier modèle est celui de Kaluza, qui imagina un modèle de la gravitation à cinq dimensions afin de l'unifier à l'électromagnétisme, soit une théorie "Einstein-Maxwell". Ainsi il conçoit une 5^{ème} dimension compactifiée en un cercle de très faible rayon. Seule une physique de haute énergie permettrait de "voir" cette extra-dimension. Si l'on regarde la théorie à quatre dimensions, alors l'information sur celle-ci est codée par seulement le rayon de cette dimension supplémentaire, i.e. un scalaire.

Dans les théories de cordes, une corde fermée possède un mode zéro qui est décrit par un tenseur symétrique de rang deux, i.e. la métrique. Mais l'interaction entre les cordes donne un champ scalaire qui accompagne le graviton, il s'agit du dilaton.

Et enfin, de ces théories de cordes découlent les modèles branaires. C'est-à-dire que nous vivons sur une surface à trois dimensions (où sont confinés les particules du modèle standard) dans un univers plus grand (dans lequel peut se déplacer le graviton). Différents modèles sont proposés dont celui de Randall et Sundrum [Randall 99a, Randall 99b], où un champ scalaire apparaît et que l'on peut interpréter comme la distance entre les branes.

Ainsi, d'un point de vue phénoménologique on peut travailler à quatre dimensions avec un champ scalaire dont l'origine pourrait être l'un de ces modèles.

6.2 Modèle de Brans-Dicke

Je suivrai en grande partie les notations de [Fujii 03]

Cette théorie née de la réflexion de Robert Henry Dicke et Carl Henry Brans en 1961 à la suite des travaux de Pascual Jordan, a consisté en l'introduction d'un champ scalaire couplé au graviton. L'une des conséquences importantes, est la variation de la constante de gravitation G .

Ainsi ils proposèrent un lagrangien sous la forme

$$\mathcal{L}_{BD} = \frac{1}{16\pi} \sqrt{-g} \left(\phi R - \frac{\omega}{\phi} (\partial\phi)^2 + L_{\text{matière}}(\psi) \right) \quad (6.3)$$

Il faut remarquer que le terme de matière ne dépend pas du champ scalaire ϕ mais uniquement des champs de matière, ce qui permet de conserver le principe d'équivalence, i.e. la chute universelle des corps.

Afin d'avoir un terme cinétique plus conforme à ce que l'on pourrait avoir l'habitude de voir, on effectue une transformation

$$\phi = \frac{1}{2} \xi \Phi^2 = \frac{\epsilon}{8\omega} \Phi^2 \quad (6.4)$$

Soit un lagrangien sous la forme

$$\mathcal{L}_{BD} = \frac{1}{16\pi} \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \xi \Phi^2 R - \frac{1}{2} \epsilon (\partial\Phi)^2 + L_{\text{matière}}(\psi) \right) \quad (6.5)$$

où

$$\epsilon = \text{signe}(\omega) \quad (6.6)$$

Ces définitions imposent à ϕ d'être positif, puisque ϵ/ω est positif. Ce choix est physiquement réaliste puisque $G_{\text{eff}} \simeq 1/\phi$, ainsi la constante gravitationnelle demeure positive et la gravité reste seulement attractive et non répulsive.

Dans le cas où $\epsilon = +1$, nous avons un champ scalaire avec un terme cinétique "normal", i.e. une énergie positive. On peut remarquer que dans la limite d'un espace plat $g_{00} \simeq \eta_{00} = -1$, on retrouve alors l'expression classique $\dot{\Phi}^2/2$. Cependant le choix $\epsilon = -1$ semble être inacceptable puisqu'il apporte une énergie négative. Ceci n'est pas une contradiction mais c'est simplement lié à l'espace dans lequel on définit nos variables. Il faut faire une transformation conforme vers une autre variété afin de lever l'ambiguïté. Je parlerai de cet aspect au prochain chapitre.

De plus on remarque que ce qui pouvait paraître comme une singularité du champ dans le terme cinétique ω/ϕ disparaît si l'on redéfinit le champ. Il ne s'agit que d'un artefact dû à l'écriture employée.

La différence majeure avec les théories de quintessence est le couplage non-minimal pour la théorie de Brans-Dicke. En effet on parle de couplage minimal lorsque l'on peut construire le lagrangien à partir de celui-ci défini sur un espace de Minkowski par les substitutions suivantes

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \quad \partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu \quad (6.7)$$

Ainsi si cette substitution peut se faire pour le terme cinétique

$$-\frac{1}{2}\epsilon\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi \longrightarrow -\frac{1}{2}\epsilon g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi \quad (6.8)$$

Le couplage n'est alors présent que par le terme $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$. On parle alors de couplage minimal.

Cependant nous ne pouvons pas reconstruire le premier terme (R) par cette méthode. En effet dans un espace de Minkowski la courbure scalaire est nulle.

Cette substitution (construction) est alors impossible

$$0 \not\rightarrow \frac{1}{2}\xi\Phi^2 R \quad (6.9)$$

C'est pour cela que l'on parle de couplage non-minimal.

6.2.1 Equations du modèle

Si l'on considère la variation de l'action (6.5) par rapport à la métrique, on a

$$2\phi G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^\Phi - 2(g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)\phi \quad (6.10)$$

où $G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (6.11)$$

Le tenseur énergie-impulsion est défini par

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta L_{\text{matière}}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (6.12)$$

Le tenseur énergie-impulsion du champ scalaire est

$$T_{\mu\nu}^\Phi = \epsilon\left(\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial\Phi)^2\right) \quad (6.13)$$

et enfin $\square$ est l'opérateur d'Alembertien

$$\square\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi) \quad (6.14)$$

la variation de l'action (6.5), par rapport au champ scalaire donne une équation de type Klein-Gordon

$$\square\phi = \frac{8\pi}{3+2\omega}T \quad (6.15)$$

On constate donc que le terme de source du champ scalaire est la trace du tenseur énergie-impulsion. De plus cette équation indique bien un couplage entre matière et champ alors que celui-ci est absent du lagrangien.

Ce couplage disparaît dans la limite $\omega \rightarrow \infty$, le champ scalaire n'étant plus couplé, on se retrouve avec une théorie qui est la relativité générale plus un champ scalaire qui pourra jouer le rôle de matière noire.

Pour finir, nous avons une troisième équation, la conservation du tenseur énergie-impulsion.

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (6.16)$$

Cette équation dérive de l'identité de Bianchi $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ et elle assure la chute universelle des corps, c'est-à-dire le principe d'équivalence faible.

6.2.2 Approximation de champ faible

De la même manière qu'en relativité générale, l'approximation de champ faible se fait en considérant une perturbation de la physique dans un espace Minkowskien.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (6.17)$$

$$\phi = \phi_0 + \zeta \quad (6.18)$$

où ϕ_0 est une constante.

L'équation (6.15) donne dans cette approximation

$$\square\phi = \square\zeta = -\partial_t^2\phi + \nabla^2\phi = \frac{8\pi}{3+2\omega}T \quad (6.19)$$

dont la solution en temps-retardé est

$$\zeta = -\frac{2}{3+2\omega} \int \frac{T}{r} d^3x \quad (6.20)$$

Concernant l'équation (6.10), il faut effectuer différents changements de variables afin d'arriver à la solution. Ceux-ci sont les suivants

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (6.21)$$

$$\sigma_\mu = \partial^\nu \gamma_{\mu\nu} \quad (6.22)$$

$$\alpha_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{\phi_0}\eta_{\mu\nu}\zeta \quad (6.23)$$

Il faut de plus imposer la condition de jauge

$$\sigma_\mu = \frac{\partial_\mu \zeta}{\phi_0} \quad (6.24)$$

Ce qui permet de déterminer la solution en temps-retardé

$$h_{\mu\nu} = \frac{4}{\phi_0} \int \frac{T_{\mu\nu}}{r} d^3x - \frac{4}{\phi_0} \eta_{\mu\nu} \frac{1+\omega}{3+2\omega} \int \frac{T}{r} d^3x \quad (6.25)$$

Ainsi si l'on considère une particule ponctuelle de masse M , les solutions sont

$$\phi = \phi_0 + \frac{2M}{3+2\omega} \frac{1}{r} \quad (6.26)$$

$$g_{00} = -1 + \frac{4+2\omega}{\phi_0(3+2\omega)} \frac{2M}{r} \quad (6.27)$$

$$g_{ii} = 1 + \frac{2+2\omega}{\phi_0(3+2\omega)} \frac{2M}{r} \quad (6.28)$$

$$g_{ij} = 0, \quad i \neq j \quad (6.29)$$

Ce qui donne une constante gravitationnelle

$$G_{\text{eff}} = \frac{4+2\omega}{3+2\omega} G \quad (6.30)$$

où G est la constante qui intervient dans l'action d'Einstein-Hilbert

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} R \quad (6.31)$$

Ainsi dans une expérience de type Cavendish, on mesurera G_{eff} et non G . On retrouve bien la limite de la relativité générale en prenant $\omega \rightarrow \infty$ soit $G_{\text{eff}} \rightarrow G$. De plus on voit que la condition pour avoir une gravitation attractive est

$$-3/2 < \omega \quad (6.32)$$

Ce modèle de Brans-Dicke peut être généralisé en une forme que je vais présenter par la suite.

6.3 Théories scalaire-tenseur

On considère une action sous la forme

$$S = \frac{1}{16\pi G^*} \int d^4x \sqrt{-g} (F(\Phi)R - Z(\Phi)g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - 2U(\Phi)) + S_m[\psi_m; g_{\mu\nu}] \quad (6.33)$$

où G^* est la constante de gravitation nue, elle ne correspond donc pas au couplage mesuré dans une expérience.

S_m est l'action des champs de matière, cette fonctionnelle ne dépend que de la métrique $g_{\mu\nu}$ et des autres champs de matière ψ_m . Cependant, elle ne dépend pas du champ scalaire Φ couplé au graviton. Ainsi le principe d'équivalence faible, i.e. la chute universelle des corps, reste valable.

$F(\Phi)$ est une fonction positive du champ scalaire, ce qui permet d'avoir une énergie du graviton positive. En effet cette densité d'énergie est

$$F(\Phi)G_0^0, \quad \text{où } G_0^0 \text{ est le tenseur d'Einstein} \quad (6.34)$$

Ce qui dans un univers de Friedmann donne $3F(\Phi)H^2$, où H est la fonction de Hubble.

Le lagrangien dépend de trois inconnues F , Z et U (le potentiel). Cependant, on peut toujours redéfinir le champ afin d'avoir deux fonctions. Différentes paramétrisations sont alors possibles dont deux sont particulièrement utilisées.

– Paramétrisation de Brans-Dicke

$$F(\Phi) = \Phi, \quad Z(\Phi) = \frac{\omega(\Phi)}{\Phi} \quad (6.35)$$

Si ω est constant on retrouve le modèle de Brans-Dicke avec un potentiel.

– Paramétrisation simple

$$F(\Phi) \text{ arbitraire,} \quad Z(\Phi) = 1 \quad (6.36)$$

La variation de cette action par rapport à la métrique $g_{\mu\nu}$ donne l'équation

$$\begin{aligned} F(\Phi) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) &= 8\pi G^* T_{\mu\nu} + Z(\Phi) \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\alpha \Phi)^2 \right) \\ &+ \nabla_\mu \partial_\nu F(\Phi) - g_{\mu\nu} \square F(\Phi) - g_{\mu\nu} U(\Phi) \end{aligned} \quad (6.37)$$

On a une équation de type Klein-Gordon en faisant la variation de cette même action par rapport au champ scalaire Φ

$$2Z(\Phi) \square \Phi = -\frac{dF}{d\Phi} R - \frac{dZ}{d\Phi} (\partial_\alpha \Phi)^2 + 2\frac{dU}{d\Phi} \quad (6.38)$$

On a toujours la conservation du tenseur énergie-impulsion. Comme S_m ne dépend pas de Φ cette équation reste vraie.

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0 \quad (6.39)$$

Ces équations sont écrites dans la représentation de Jordan, il s'agit de la représentation dans laquelle le principe d'équivalence faible est vraie. Il s'agit de la représentation où on aura les opérateurs physiques, i.e. les "vraies" grandeurs mesurées. En effet dans cette représentation la masse des fermions sera la même, puisqu'il n'y a pas ce couplage avec le champ scalaire Φ . Ainsi toutes les mesures de temps et de distance qui dépendent d'instruments constitués de matière ne seront pas affectés par la valeur locale du champ scalaire.

Cependant il est parfois plus commode de travailler dans d'autres représentations, les calculs sont alors plus faciles. Pour avoir accès à une autre représentation, il suffit d'effectuer une transformation conforme sur la métrique (Voir Annexe A).

6.3.1 Représentation d'Einstein

Une infinité de représentation sont possibles (Voir Annexe A), mais une seule permet de diagonaliser le terme cinétique du graviton et celui du champ scalaire, i.e. que les degrés de liberté de spin 0 et de spin 2 sont séparés et peuvent être calculés plus facilement. Cette représentation, permet donc de simplifier les calculs et l'interprétation de certains termes.

On effectue la transformation suivante

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = F(\Phi) g_{\mu\nu} \quad (6.40)$$

L'action (6.33) se réécrit

$$S = \frac{1}{4\pi G^*} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\frac{\tilde{R}}{4} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) + S_m [\psi_m; A^2(\phi) \tilde{g}_{\mu\nu}] \quad (6.41)$$

où a été introduit un autre champ scalaire ϕ

$$\left(\frac{d\phi}{d\Phi} \right)^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{d \ln F(\Phi)}{d\Phi} \right)^2 + \frac{Z(\Phi)}{2F(\Phi)} \quad (6.42)$$

Le nouveau potentiel V est défini comme suit

$$V(\phi) = \frac{U(\Phi)}{2F^2(\Phi)} \quad (6.43)$$

Dans cette nouvelle représentation les champs de matière, Ψ_m , sont explicitement couplés au champ scalaire, ϕ , via la fonction A

$$A(\phi) = \frac{1}{\sqrt{F(\Phi)}} \quad (6.44)$$

Les équations précédentes (6.37), (6.38), (6.39) s'écrivent maintenant

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{R}\tilde{g}_{\mu\nu} = 8\pi G^*\tilde{T}_{\mu\nu} + 2\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi) - 2V(\phi)\tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (6.45)$$

$$\tilde{\square}\phi = -4\pi G^*\alpha(\phi)\tilde{T} + \frac{dV(\phi)}{d\phi}, \quad (6.46)$$

$$\tilde{\nabla}_\mu\tilde{T}^\mu_\nu = \alpha(\phi)\tilde{T}\partial_\nu\phi, \quad (6.47)$$

où

$$\alpha(\phi) = \frac{d\ln A}{d\phi} \quad (6.48)$$

Les opérateurs surmontés d'un tilde sont définis par rapport à la métrique $\tilde{g}_{\mu\nu}$.

On remarque clairement pourquoi cette représentation est nommée *représentation d'Einstein*, puisqu'on a une séparation du terme R et du champ scalaire dans l'équation (6.45)

En particulier le terme du champ cinétique a un signe négatif, ce qui permet d'avoir une densité d'énergie positive (signature $-+++$ soit $-\tilde{g}^{00}\partial_0\phi\partial_0\phi \rightarrow \dot{\phi}^2$). De plus l'équation (6.42) permet de réellement imposer le caractère positif de l'énergie. En effet dans la représentation d'Einstein, on a diagonalisé les degrés de spin différents, ainsi si on exprime cette équation en fonction du temps (ou du *redshift*)

$$\phi'(z)^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right)^2 + Z(\Phi)\frac{\Phi'(z)^2}{2F(z)} \quad (6.49)$$

Comme ϕ décrit le degré de liberté de la théorie de spin zéro, ce champ ne doit avoir que des excitations énergétiques positives, ainsi

$$\phi'(z)^2 > 0 \quad (6.50)$$

Cependant, dans la représentation de Jordan, les degrés de spin sont mélangés. Cela n'a donc pas de sens d'imposer $Z\Phi'^2 > 0$. On peut très bien avoir $Z\Phi'(z)^2 < 0$ sans avoir de problème physique tant que $\phi'^2 > 0$.

On remarque également que lorsque l'on utilise la paramétrisation de Brans-Dicke, cette condition

$$\phi'^2(z) = \frac{3}{4}\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right)^2 + Z(\Phi)\frac{\Phi'(z)^2}{2F(z)} \quad (6.51)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)^2 > 0 \quad (6.52)$$

permet de retrouver la condition (6.32), $\omega > -3/2$.

6.3.2 Modification de la constante gravitationnelle

Comme nous l'avons vu pour le modèle de Brans-Dicke (éq. 6.30), la "constante" gravitationnelle qui intervient dans une expérience entre deux corps massifs n'est plus une constante. Ainsi de façon plus général, nous avons également une variation de la constante gravitationnelle dans les théories scalaire-tenseur. Ce qui permet d'apporter des contraintes sur les modèles comme nous avons pu le montrer avec *David Polarski, André Ranquet et Alexei Starobinsky* [Gannouji 06]. Il s'agit principalement de contraintes locales, i.e. dans le système solaire. De plus nous avons également vu avec *David Polarski* [Polarski 08] que nous avons également une contrainte de ces modèles via la croissance des perturbations et par l'observation de la luminosité des supernovae.

Ainsi la détermination de cette "vraie" constante gravitationnelle est fondamentale. Cela a été fait [Damour 92] en 1992. Il suffit de faire l'approximation de champ faible afin de pouvoir en déduire la constante gravitationnelle. Les auteurs l'ont fait en se plaçant dans la représentation d'Einstein afin d'avoir un découplage des degrés de liberté de spin 0 et 2.

$$G_{\text{eff}} = G^* A^2 (1 + \alpha^2) = \frac{G^*}{F} \frac{2ZF + 4 \left(\frac{dF}{d\Phi} \right)^2}{2ZF + 3 \left(\frac{dF}{d\Phi} \right)^2} \quad (6.53)$$

Dans cette expression, on peut interpréter le premier terme $G^* A^2$ comme étant l'échange d'un graviton, alors que le second $G^* A^2 \alpha^2$ est l'échange d'un scalaire.

La contrainte la plus importante sur la variation de G est [Pitjeva 05b, Pitjeva 05a]

$$\frac{\dot{G}_{\text{eff},0}}{G_{\text{eff},0}} = (-0.2 \pm 0.5) \cdot 10^{-13} \text{ année}^{-1} \quad (6.54)$$

où 0 correspond à aujourd'hui.

De plus on peut avoir d'autres contraintes du système solaire, à partir des paramètres post-newtoniens définis en théorie scalaire-tenseur [Damour 92] par

$$\gamma_{\text{PPN}} = 1 - \frac{(dF/d\Phi)^2}{F + 2(dF/d\Phi)^2} \quad (6.55)$$

$$\beta_{\text{PPN}} = 1 + \frac{1}{4} \frac{F (dF/d\Phi)}{2F + 3(dF/d\Phi)^2} \frac{d\gamma_{\text{PPN}}}{d\Phi} \quad (6.56)$$

Les contraintes dues à la mission Cassini et à l'étude des éphémérides des planètes [Bertotti 03, Pitjeva 05b, Pitjeva 05a, Williams 05] permettent de contraindre ces paramètres

$$\gamma_{\text{PPN}} - 1 = (2.1 \pm 2.3) \cdot 10^{-5} \quad (6.57)$$

$$\beta_{\text{PPN}} - 1 = (0 \pm 1) \cdot 10^{-4} \quad (6.58)$$

On voit donc des paramètres très proches de ceux en relativité générale

$$\frac{\dot{G}_{\text{eff},0}}{G_{\text{eff},0}} = 0, \quad \gamma_{\text{PPN}} = 1, \quad \beta_{\text{PPN}} = 1 \quad (6.59)$$

Cependant, une extension de la relativité générale à des champs scalaire n'est pas rejetée par les observations. Dans ce cadre les contraintes (6.54,6.58) deviennent des outils très intéressants, afin d'étudier les théories scalaire-tenseur et notamment la possibilité d'avoir de l'énergie fantôme. Ceci est fait dans l'article suivant.

Scalar-Tensor Models of Normal and Phantom Dark Energy

R. Gannouji, D. Polarski, A. Ranquet, A. A. Starobinsky

Sommaire

7.1	Introduction	48
7.2	Background evolution	51
7.3	The master equation for F	55
7.4	Scaling solutions	56
7.5	Small z expansion and Solar System gravity tests	58
7.6	General reconstruction of $F(z)$	62
7.7	Reconstruction for a constant potential U	63
7.8	Asymptotic stability	68
7.9	Conclusions	69

We consider the viability of dark energy (DE) models in the framework of the scalar-tensor theory of gravity, including the possibility to have a phantom DE at small redshifts z as admitted by supernova luminosity-distance data. For small z , the generic solution for these models is constructed in the form of a power series in z without any approximation. Necessary constraints for DE to be phantom today and to cross the phantom divide line $p = -\rho$ at small z are presented. Considering the Solar System constraints, we find for the post-Newtonian parameters that $\gamma_{PN} < 1$ and $\gamma_{PN,0} \approx 1$ for the model to be viable, and $\beta_{PN,0} > 1$ (but very close to 1) if the model has a significantly phantom DE today. However, prospects to establish the phantom behaviour of DE are much better with cosmological data than with Solar System experiments. Earlier obtained results for a Λ -dominated universe with the vanishing scalar field potential are extended to a more general DE equation of state confirming that the cosmological evolution of these models rule them out. Models of currently phantom DE which are viable for small z can be easily constructed with a constant potential; however, they generically become singular at some higher z . With a growing potential, viable models exist up to an arbitrary high redshift.

Publié dans JCAP 0609 (2006) 016

7.1 Introduction

A major turning point in cosmology has been reached with the *observational* discovery that our Universe is accelerating now (and has been accelerating for several billion years in the past) [Riess 98, Perlmutter 99b]. If interpreted in terms of the Einstein equations for the evolution of a Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) cosmological models with the (practically) zero spatial curvature (the latter follows from other arguments), this means that approximately two thirds of the total present energy density of matter in our Universe is due to some gravitationally unclustered component called Dark Energy (DE).

Observations of high redshift supernova, fluctuations of the cosmic microwave background (CMB) temperature and other effects tell us that the effective energy density ρ_{DE} of DE is very close to minus its effective pressure p_{DE} (see Eqs. (7.16,7.17) below for the exact, though conventional, definition of these quantities) and that they are both very weakly changing (if at all) with time and with the expansion of the Universe. The physical nature of DE is unknown at present, and three main logical possibilities exist (see [Sahni 00, Peebles 03, Padmanabhan 03, Sahni 05, Copeland 06] for reviews).

1. DE is a cosmological constant, as originally suggested by Einstein, with $\rho_{DE} = -p_{DE} = \Lambda/8\pi G = \text{const}$ exactly.¹
2. Physical DE : DE is the energy density of some new, very weakly interacting physical field (e.g., a quintessence – a scalar field ϕ with some potential $V(\phi)$ minimally coupled to gravity).
3. Geometric DE : the Einstein general relativity (GR) equations are *not* the correct ones for gravity, but we write them in the Einsteinian form by convention, putting all arising additional terms into the r.h.s. of the equations and calling them the effective energy-momentum tensor of DE.

Of course, this classification is not absolute. In some cases, the difference between physical and geometric DE can, in turn, become conventional. E.g., for a non-minimally coupled scalar field (which constitutes a specific case of scalar-tensor gravity considered in this paper), equations of the model have the same form irrespective of the origin (physical or geometric) of this field. Another way of classifying DE models which is more invariant and, therefore, more important from the point of view of the observational determination of the type of DE is to divide these models into dynamical, if the DE description requires a new field degree of freedom ($\equiv$ a new particle from the quantum point of view), and non-dynamical in the opposite case. Then all physical DE models and many of the geometric ones belong to the first class, while the cosmological constant itself and some geometric models fall into the second category, i.e., the $F(R)$ model with the Palatini variation of its action where R is the scalar curvature.

At present, all existing observational data are in agreement with the simplest, first possibility (inside $\sim 2\sigma$ error bars in the worst case). The case of a cosmological constant is internally self-consistent and non-contradictive. The extreme smallness of the cosmological constant expressed in the either Planck, or even atomic units means only that its origin is *not* related to strong, electromagnetic and weak interactions (in particular, to the problem of the energy density of their vacuum fluctuations) at all. However, in this case we remain with one dimensionless constant only and can not say anything more (at least, at present). That is why the two other possibilities admitting a (slightly) variable dark energy have been also actively studied and compared with observational data recently. Moreover, properties of the present DE are remarkably *qualitatively* similar to those of an "early DE" that supported an inflationary stage in the early Universe. But in the latter case, we are sure that this early DE was unstable. So, it is natural to conjecture by analogy that the present DE is not stable, too.

On purely phenomenological grounds, one can consider DE models with a constant equation of state parameter $w_{DE} \equiv p_{DE}/\rho_{DE}$ different from -1 . However, the latest observational data have already severely restricted this simplest alternative possibility to $|1 + w_{DE}| \lesssim 0.1$ (1σ error bars) [Sel-

¹ $\hbar = c = 1$ is used throughout the paper.

jak 05, Astier 06, Spergel 07]. Therefore, a viable alternative to the cosmological constant has to be looked for among more complicated models with $w_{DE} \neq \text{const.}$ Such models include quintessence ones with different potentials $V(\phi)$ (see [Sahni 00, Peebles 03, Padmanabhan 03, Sahni 05] for numerous references), models with several minimally coupled scalar fields (see, e.g., [Blais 04]), those with direct non-gravitational coupling between DE and dark matter (DM) ([Amendola 00] and following papers), unified models of DE and DM (the Chaplygin gas model [Kamenshchik 01] and others), etc. Then, however, it becomes very important to investigate if there exist models of DE for which a variable w_{DE} may cross the "phantom divide" line $w_{DE} = -1$ (we call DE "phantom" if it has $w_{DE}(z) < -1$ for a given z and "normal" in the opposite case). Note that the weak energy condition (WEC) is violated for phantom DE. This is not possible at all for quintessence models with the standard kinetic term and hardly possible, i.e., it requires non-generic initial conditions, for scalar field models having a non-standard kinetic term (" k -essence") [Vikman 05] (see also [Andrianov 05]).

Indeed, analysis of the recent SNe data with redshifts up to $z = 1.7$ (the "Gold dataset" [Riess 04]) using fits containing at least 2 free parameters, e.g., the linear fit (7.78) for w_{DE} in terms of the scale factor a [Chevallier 01, Linder 03] or the quadratic polynomial fit (7.79) for ρ_{DE} in terms of the redshift z [Sahni 03a], or with model independent methods, results in best fits to these data having a variable w_{DE} that steadily increases for redshifts $0 < z < 1$ and crosses the "phantom divide" somewhere between 0 and 0.5 [Alam 04b, Huterer 05, Gong 05, Dicus 04, Hannestad 04, Rapetti 05, Upadhye 05, Lazkoz 05, Espana-Bonet 05, Xia 06, Zhao 07] (see, however, [Wang 04, Wang 05, Seljak 05, Jassal 06, Dick 06] for a more conservative view – in the sense of returning back to a cosmological constant). This statement does not mean that an exact cosmological constant is excluded – it is still inside 1 or 2σ error bars, as was stated above. Moreover, one should be cautious with this result : it may be a consequence of trying to obtain a too fine-grained graph of $w_{DE}(z)$ from the luminosity distance $d_L(z)$ as has been already emphasized in [Maor 02]. In this respect, results for $w_{DE}(z)$ averaged over a range of redshifts > 0.3 (dubbed the " w -probe" in [Shafieloo 06]) are more statistically reliable, e.g., the result that $\bar{w}_{DE} \approx -1.05_{-0.07}^{+0.09}$ obtained for the same Gold SNe dataset in [Alam 04b] for $\Omega_{m,0} = 0.3$ and the averaging redshift interval (0, 0.414). However, a remarkable possibility of crossing the phantom divide at recent redshifts, when DE has become the dominant component of the Universe by its effective energy density, still remains viable. The latest Supernovae data with $z \sim 0.5$ [Clocchiatti 06] also admit $w_{DE}(z) < -1$ for $z < 0.5$, but not for larger redshifts, as a possible interpretation. Finally, the recent data on acoustic baryon oscillations in the present matter power spectrum (the Sakharov oscillations) [Eisenstein 05, Cole 05], while strongly restricting one direction in the plane of parameters for the two-parametric fits (7.78, 7.79), leave the orthogonal direction practically unconstrained, therefore, permitting the recent phantom divide crossing (see Sec. 7.6).

So, if this striking behaviour of DE will be confirmed by future data, what is the best way to describe it? One possibility, a *ghost* phantom DE, i.e. a scalar field with the negative sign of its kinetic term, was first proposed in [Caldwell 02] and triggered a very large wave of publications (see, e.g., the recent papers [Nojiri 05, Sami 05] for a list of references on this topic). However, it has been long known that theories of this type are plagued by quantum instabilities, the most dangerous of those being the process of creation of two particle+antiparticle pairs : one of the ghost field and another of any usual (non-ghost) field (see [Cline 04] for a recent investigation). Moreover, a ghost model of DE is unsatisfactory even at the classical level : it does not explain the observed large-scale isotropy and homogeneity of the Universe ! Just the opposite, e.g., for the given Hubble constant H_0 averaged over angular directions in the sky, we would expect a universe to be very strongly anisotropic with the anisotropy energy density (i.e., the positive energy density of long-wavelength gravitational waves) being compensated by a large negative energy density of the ghost DE, or of a ghost component of DE in more complicated multi-component models of this type (e.g., in the two-field realization of the "quintom" model introduced in [Feng 05, Wei 05]). It is just a classical analogue of the quantum

instability mentioned above, with the "usual" field being the gravitational one and with the dynamical quantum instability transformed into the problem of classical initial conditions. For this reason, we are sceptical regarding this approach as a whole.

Fortunately, there is no necessity to introduce a ghost field to explain possible phantom behaviour of DE including its phantom divide crossing. As was first emphasized in [Boisseau 00], scalar-tensor theories of gravity allow for this phenomenon. Scalar-tensor models of DE belong to the third class (geometric DE) according to the classification given above. This class of models is very rich and interesting. It contains Einstein gravity plus a non-minimally coupled scalar field, as well as the higher-derivative $f(R)$ gravity, where R is the scalar curvature, as particular cases, besides allowing for DE phantom behaviour and transition to a normal DE. In this paper, we will concentrate on scalar-tensor DE models with the latter properties because of tentative observational evidence described above.² Note that a possible phantom behaviour of DE in scalar-tensor gravity has a conventional character. The reason is that the effective gravitational constants G_N and G_{eff} (see Sec. 7.2 below) are generically time-dependent while the definitions (7.16,7.17) of the DE effective energy density and pressure assume some constant G when writing the left-hand side of equations and splitting their right-hand side into energy-momentum tensors of non-relativistic matter (mainly non-baryonic cold dark matter) and dark energy. As a result, a part of the Einstein tensor $G_{\mu\nu}$ and the energy-momentum tensor of dark matter multiplied by a change in G_N is conventionally attributed to DE. In other words, phantom behaviour of scalar-tensor DE is always 'curvature-induced', in contrast to the ghost DE models or other models like those considered in [Aref'eva 05, Rubakov 06] where it may occur in the flat space-time already.

The possibility to get both a phantom DE and the phantom divide crossing in scalar-tensor gravity is related to the fact that this theory has two arbitrary and independent functions $F(\Phi)$ and $U(\Phi)$ (see the Lagrangian (7.1) below). Throughout this work we assume spatial flatness though this prior while well motivated theoretically can be challenged [Polarski 05]. As has been shown in [Boisseau 00], two different types of observations, e.g., determination of the luminosity distance and the inhomogeneity growth factor in the non-relativistic component as functions of redshift, are necessary and sufficient for the total reconstruction of the microscopic Lagrangian (7.1) of scalar-tensor gravity. However, as shown in [Esposito-Farese 01], a partial reconstruction using the luminosity distance data only could yield interesting information, too. In that case some assumption about one of the functions $F(\Phi)$ and $U(\Phi)$ has to be made, so that only one unknown function in the microscopic Lagrangian (7.1) remains to be found. Clearly, many different partial reconstruction strategies are possible and we explore some of them here with the aim to investigate which DE models in scalar-tensor gravity are viable.

It has been found in [Esposito-Farese 01] that Λ -dominated universes with a vanishing potential U are ruled out as they lead to singular universes already at very low redshifts $z \sim 0.7$ (see also the recent paper [Perivolaropoulos 05]). Of course, completely regular but non-accelerating solutions do exist in this case. Among models with a non-zero potential U , one concrete example of a model with the phantom divide crossing was constructed in [Perivolaropoulos 05] where the functions $F(\Phi)$ and $U(\Phi)$ were given in the parametric form as functions of z up to $z \approx 3$. More examples for a non-minimally coupled scalar field ($F(\Phi) = F_0 - \xi\Phi^2$) with a non-zero potential U were investigated in [Luo 05], also for $z < 2$. In the present paper, we make a next step and extend these results in two directions : first, by constructing a generic solution for scalar-tensor DE models for $z < 1$ in the form of a power series in z ; second, by investigating and numerically integrating some of these solutions up to large $z \gg 1$. The latter task appears to be necessary since, though DE is subdominant for $z \gg 1$ as compared to non-relativistic non-baryonic dark matter and baryons, its model itself may become intrinsically contradictory for large z , namely, F or $\dot{\Phi}^2$ may become negative for an unfortunate choice

²The third possibility to get a phantom DE including the phantom divide crossing which is based on braneworld models [Sahni 03b] (see also the recent paper [Chimento 06]) will not be discussed here.

of $U(\Phi)$. It is also crucial to check that any DE model has the correct power-law behaviour for large z [Amendola 07b].

Finally, for the scalar-tensor theory of gravity, it is well known that the present value of $\frac{dF}{d\Phi}(z=0)$ is severely restricted from Solar System tests of post-Newtonian gravity (i.e. by the measured values of the post-Newtonian parameters). For this reason, there have been stated that the present phantom behaviour in scalar-tensor models of DE requires large amount of fine tuning and, thus, is unnatural [Torres 02, Carroll 05a]. Therefore, it is important to investigate this problem in more detail to quantify what amount of fine tuning (and of what kind) is necessary for a significantly phantom behaviour of DE, and to determine the relation between this behaviour and results of Solar System tests of gravity.

The paper is organized as follows. In Sec. 7.2 we define all quantities related to our scalar-tensor DE model and present the background evolution equations.

In Sec. 7.3 we derive the general integral solution for the quantity $F(z)$. In Sec. 7.4 we consider solutions in which DE scales as some power of the FLRW scale factor $a(t)$ and show their existence for DE of the phantom type (the latter requires a non-zero $U(\Phi)$).

In Sec. 7.5 we consider the small z behaviour of our model and find conditions for the violation of the WEC by DE today and for the phantom boundary crossing at small z . In Sec. 7.6 the general reconstruction of a microscopic model is considered and the observational constraint from the acoustic oscillations in the matter power spectrum is discussed. In Sec. 7.7 we consider the reconstruction for a constant potential more specifically and show that the model becomes singular at some redshift that cannot be arbitrarily high once we have chosen a specific equation of state w_{DE} . In Sec. 7.8 non-constant potentials are considered and a model which is asymptotically stable for large z is presented. Sec. 7.9 contains conclusions and discussion.

7.2 Background evolution

In this section we review the background evolution equations in a spatially flat FLRW universe. We consider a model where gravity is described by a scalar-tensor theory and we start with the following microscopic Lagrangian density in the Jordan frame

$$L = \frac{1}{2} \left(F(\Phi) R - Z(\Phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \right) - U(\Phi) + L_m(g_{\mu\nu}). \quad (7.1)$$

Since L_m is not coupled to Φ , the Jordan frame is the physical one. In particular, fermion masses are constant and atomic clocks measure the proper time t in it. The quantity $Z(\Phi)$ can be set to either 1 or -1 by a redefinition of the field Φ , apart from the exceptional case $Z(\Phi) \equiv 0$ when the scalar-tensor theory (7.1) reduces to the higher-derivative gravity theory $R + f(R)$. In the following, we will write all equations and quantities for the case $Z = 1$. For our purposes, L_m describes non-relativistic dust-like matter (baryons and cold dark matter) as we are interested in low redshift ($z \ll z_{eq}$) behaviour only. Here, z_{eq} denotes the equality redshift when the energy densities of non-relativistic matter and radiation are equal. In such a model, the effective Newton gravitational constant for homogeneous cosmological models is given by

$$G_N = (8\pi F)^{-1}. \quad (7.2)$$

As could be expected, G_N does not have the same physical meaning as in General Relativity, the effective gravitational constant G_{eff} for the attraction between two test masses is given by

$$G_{\text{eff}} = G_N \frac{F + 2(dF/d\Phi)^2}{F + \frac{3}{2}(dF/d\Phi)^2}. \quad (7.3)$$

on all scales for which the field Φ is effectively massless [Boisseau 00] and $F > 0$. The condition $G_{\text{eff}} > 0$ is one of the stability conditions of the scalar-tensor theory (7.1), it means that the graviton

is not a ghost. In fact, even at the purely classical level, it has been shown in [Starobinsky 81] that a generic solution of (7.1) may not smoothly cross the boundary $G_{\text{eff}} = 0$. Instead, a curvature singularity forms at this boundary which generic structure has been also constructed in [Starobinsky 81]. This condition combined with another stability condition (see Eq. (7.10) below) results in $F > 0$, so $G_N > 0$, too.

We will write all equations in the Jordan frame using (7.1). Specializing to a spatially flat FLRW universe

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\mathbf{x}^2, \quad (7.4)$$

the background equations are as follows :

$$3FH^2 = \rho_m + \frac{\dot{\Phi}^2}{2} + U - 3H\dot{F}, \quad (7.5)$$

$$-2F\dot{H} = \rho_m + \dot{\Phi}^2 + \ddot{F} - H\dot{F}. \quad (7.6)$$

The evolution equation of the scalar field Φ can be obtained from the two equations (7.5,7.6). Eliminating the quantity $\dot{\Phi}^2$ by combining these equations, we obtain a master equation for the quantity F which takes the following form when all quantities are expressed as functions of redshift z :

$$\begin{aligned} F'' + \left[(\ln h)' - \frac{4}{1+z} \right] F' + \left[\frac{6}{(1+z)^2} - \frac{2(\ln h)'}{1+z} \right] F \\ = \frac{6u}{(1+z)^2 h^2} F_0 \Omega_{U,0} + 3(1+z) h^{-2} F_0 \Omega_{m,0}, \end{aligned} \quad (7.7)$$

where a prime denotes the derivative with respect to z and we have introduced the quantities $h \equiv \frac{H}{H_0}$, $\Omega_{U,0} \equiv \frac{U_0}{3F_0 H_0^2}$ and $u \equiv \frac{U}{U_0}$. The index 0 denotes the present moment here and below. The (dimensionless) relative energy density $\Omega_{m,0}$ is defined through $\Omega_{m,0} \equiv \frac{\rho_{m,0}}{3F_0 H_0^2}$. Once the master equation (7.7) is solved for F , we get the algebraic equation for $\Phi'(z)$:

$$\frac{\Phi'^2}{6} = -\frac{F'}{1+z} + \frac{F}{(1+z)^2} - \frac{F_0 u}{(1+z)^2 h^2} \Omega_{U,0} - \frac{F_0 (1+z)}{h^2} \Omega_{m,0}. \quad (7.8)$$

The second stability condition of the scalar-tensor gravity (7.1) is

$$\omega_{BD} = \frac{F\Phi'^2}{F'^2} > -\frac{3}{2}, \quad (7.9)$$

where Φ'^2 is found from (7.8). Inequality (7.9) just expresses the positivity of the energy of the (helicity zero) scalar partner of the graviton, i.e. the positivity of the kinetic energy of the scalar field in the Einstein frame (see e.g. [Esposito-Farese 01] for more details)

$$\phi'^2 \equiv \frac{3}{4} \left(\frac{F'}{F} \right)^2 + \frac{\Phi'^2}{2F} > 0 \quad (7.10)$$

with Φ'^2 taken from (7.8). With the $Z = 1$ parametrization, we cannot reconstruct the function $F(\Phi)$ when $-\frac{3}{2} < \omega_{BD} < 0$ since Φ'^2 becomes negative in this case. Indeed, these allowed negative values of ω_{BD} correspond to the parametrization choice $Z = -1$ in Eq.(7.1). The $Z = 1$ parametrization allows us to consider consistently only cases for which $\Phi'^2 \geq 0$, or equivalently $\omega_{BD} \geq 0$. However, the condition (7.9) with Φ'^2 given by (7.8) is the true condition that the theory is well behaved and it remains valid even for $\Phi'^2 < 0$. This is best understood in the Brans-Dicke parametrization $F = \Phi$, $Z = \frac{\omega_{BD}}{\Phi}$, where one can reconstruct the two functions $F > 0$ and $\omega_{BD} > -\frac{3}{2}$ from (7.7), (7.8), (7.9). For $\Phi'^2 \geq 0$ and $F \geq 0$, the inequality (7.9) is satisfied automatically. The inclusion of the

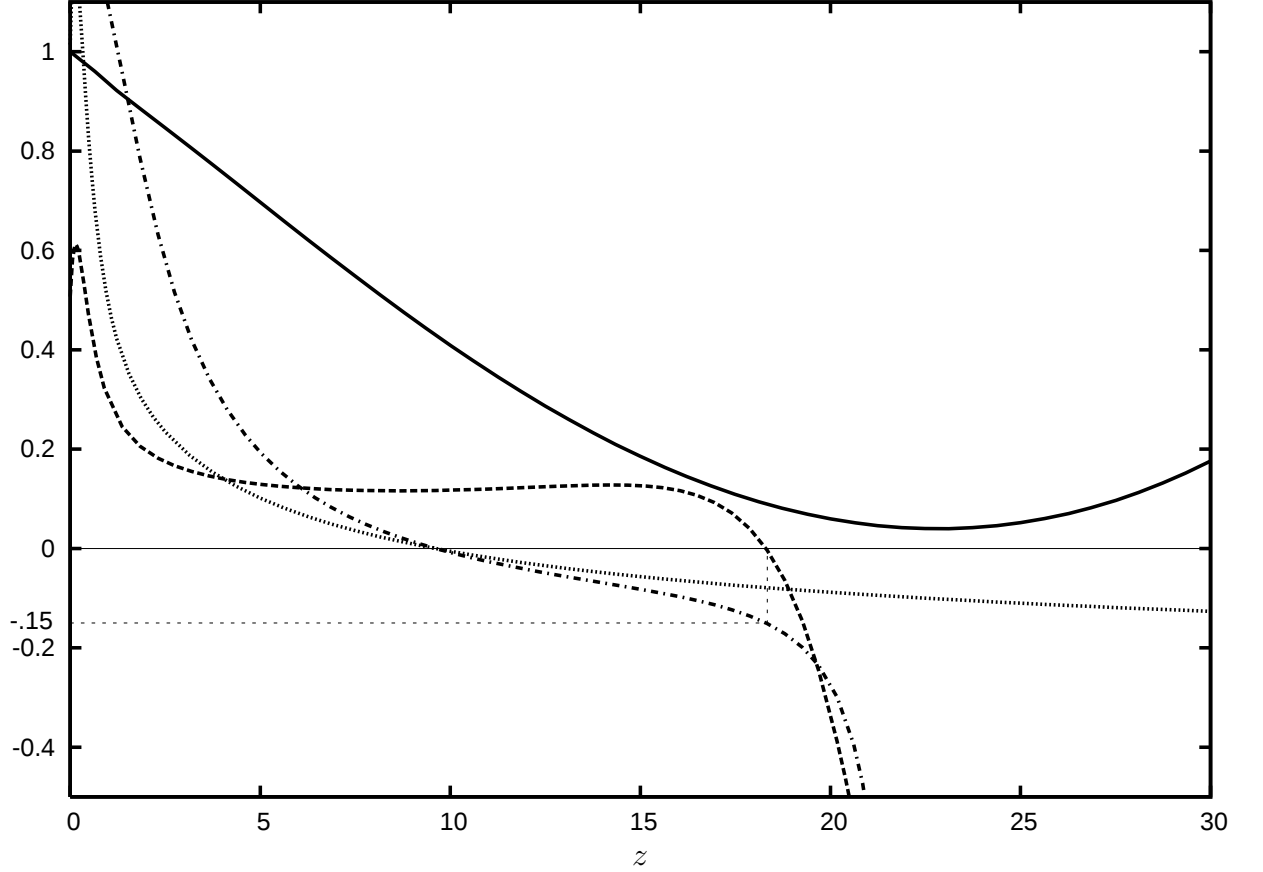


FIG. 7.1 – Several quantities are displayed for the model with parametrization (7.78) with $\alpha \equiv 1 + w_0 = -0.2$ and $\beta \equiv w_1 = 0.4$, while $F_1 = 0$ and $\frac{\Omega_{U,0}}{\Omega_{DE,0}} = \frac{\Omega_{U,0}}{0.7} = 0.97585$. The curves shown represent the following (rescaled) quantities in function of redshift z : $\frac{F}{F_0}$ (solid), $10 \times \Phi'^2$ (dotted), $10 \times \phi'^2$ (dashed) and $0.1 \times \omega_{BD}$ (dot-dashed). It is seen that ω_{BD} and Φ'^2 become negative at $z \approx 10$. The model remains valid beyond $z \approx 10$ until $z \approx 18$ as long as $\omega_{BD} > -\frac{3}{2}$ or equivalently $\phi'^2 > 0$. So, we see that the model remains valid for a large interval where $\Phi'^2 < 0$. Of course, it is impossible to reconstruct Φ in this interval using the $Z = 1$ parametrization. Note that ϕ'^2 becomes negative before $z_m \approx 22$ where $F'(z_m) = 0$, in accordance with (7.77).

range $-\frac{3}{2} < \omega_{BD} < 0$ is not of purely academic interest and can be important when one considers the reconstruction of DE models far in the past. We illustrate this with a specific example in Fig. 7.1.

Solar System experiments constrain the post-Newtonian parameters γ_{PN} and β_{PN} *today* (for these quantities, we drop here the subscript 0)

$$\gamma_{PN} = 1 - \frac{(dF/d\Phi)^2}{F + 2(dF/d\Phi)^2}, \quad (7.11)$$

$$\beta_{PN} = 1 + \frac{1}{4} \frac{F (dF/d\Phi)}{2F + 3(dF/d\Phi)^2} \frac{d\gamma}{d\Phi}, \quad (7.12)$$

as well as the quantity $\frac{\dot{G}_{\text{eff},0}}{G_{\text{eff},0}}$. The best present bounds are :

$$\begin{aligned} \gamma_{PN} - 1 &= (2.1 \pm 2.3) \cdot 10^{-5} \\ \beta_{PN} - 1 &= (0 \pm 1) \cdot 10^{-4} \\ \frac{\dot{G}_{\text{eff},0}}{G_{\text{eff},0}} &= (-0.2 \pm 0.5) \cdot 10^{-13} \text{ y}^{-1}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

where the first bound was obtained from the Cassini mission [Bertotti 03] and the other two from high precision ephemerides of planets [Pitjeva 05b, Pitjeva 05a] (the second bound has been recently confirmed by the Lunar Laser ranging [Williams 05] – their value is $\beta_{PN} - 1 = (1.2 \pm 1.1) \cdot 10^{-4}$).

As a consequence of the smallness of $\gamma_{PN} - 1$, the Brans-Dicke parameter ω_{BD} satisfies *today* the inequality

$$\omega_{BD,0} > 4 \times 10^4. \quad (7.14)$$

The resulting bound on $F'(0)$ is very stringent

$$\frac{F'(0)}{\sqrt{F_0}} = \pm \frac{\Phi'(0)}{\sqrt{\omega_{BD,0}}}. \quad (7.15)$$

However, as was discussed in [Boisseau 00], the quantity ω_{BD} need not be so large as (7.14) in the past, though one can deduce a looser inequality applying up to redshift $z \lesssim 1$ with fairly reasonable assumptions. From (7.8, 7.15) we can derive the allowed range of initial values $F'(0)$ and we find $|F'(0)| \sim \omega_{BD,0}^{-\frac{1}{2}}$ and $\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0} > 0$, the result that we will recover in Sec. 7.5 when performing the small z expansion of all quantities. The peculiar case $F'(0) = 0$ together with $\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0} > 0$ corresponds to pure General Relativity today ($\omega_{BD} = \infty$).

As noted above, supernova observations permit DE to be of the phantom type, with the equation of state parameter $w_{DE} < -1$ at small redshifts. This is a strong motivation for considering DE models in the framework of the scalar-tensor theory of gravity. More generally, at present there is much interest in models with modified gravity of which the scalar-tensor theory is a well known representative. In scalar-tensor DE models, a meaningful definition of energy density and pressure of the DE sector requires some care (see also [Torres 02] for a detailed explanation). Let us *define* the energy density ρ_{DE} and the pressure p_{DE} in the following way :

$$3F_0 H^2 = \rho_m + \rho_{DE} \quad (7.16)$$

$$-2F_0 \dot{H} = \rho_m + \rho_{DE} + p_{DE}. \quad (7.17)$$

This just corresponds to the (conventional) representation of the true equation for scalar-tensor gravity interacting with matter in the *Einsteinian* form with the constant $G_0 = G_N(t_0)$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G_0 (T_{\mu\nu,m} + T_{\mu\nu,DE}). \quad (7.18)$$

With these definitions, the usual conservation equation applies :

$$\dot{\rho}_{DE} = -3H(\rho_{DE} + p_{DE}) . \quad (7.19)$$

If we define the equation of state parameter w_{DE} through

$$w_{DE} \equiv \frac{p_{DE}}{\rho_{DE}} , \quad (7.20)$$

the time evolution of the DE sector is given by

$$\frac{\rho_{DE}(z)}{\rho_{DE,0}} \equiv \epsilon(z) = \exp \left[3 \int_0^z dz' \frac{1 + w(z')}{1 + z'} \right] . \quad (7.21)$$

Using (7.16,7.17), one gets

$$w_{DE} = \frac{\frac{2}{3}(1+z)\frac{d \ln H}{dz} - 1}{1 - \frac{H_0^2}{H^2} \Omega_{m,0}(1+z)^3} , \quad (7.22)$$

where

$$\Omega_m \equiv \frac{\rho_m}{3H^2 F_0} . \quad (7.23)$$

Then Eq.(7.16) can be rewritten as

$$h^2(z) = \Omega_{m,0} (1+z)^3 + \Omega_{DE,0} \epsilon(z) \quad (7.24)$$

where $\Omega_{DE,0} = 1 - \Omega_{m,0}$ by definition. The condition for DE to be of the phantom type, $w_{DE} < -1$, can be obtained from (7.22). It reads [Sahni 00, Boisseau 00]

$$\frac{dh^2}{dz} < 3 \Omega_m (1+z)^2 . \quad (7.25)$$

This inequality is modified in the presence of spatial curvature [Polarski 05]. As was first emphasized in [Boisseau 00], the scalar-tensor gravity allow for phantom DE. Indeed, for these models

$$\rho_{DE} + p_{DE} = \dot{\Phi}^2 + \ddot{F} - H\dot{F} + 2(F - F_0) \dot{H} , \quad (7.26)$$

hence the weak energy condition for DE can be violated (see also [Torres 02]). Moreover, as it will be shown below, the weak energy condition may be violated even for the sum of DE and non-relativistic matter, i.e. for the whole right-hand side of Eqs. (7.18), leading to $dh/dz < 0$. However, such a strong violation corresponding to $w_0 \equiv w_{DE}(0) < (1 - \Omega_{m,0})^{-1} \approx -1.4$ is not supported by the existing data (though not completely excluded either).

The relation between the Hubble parameter and the luminosity distance in scalar-tensor gravity is the same as in GR ³ :

$$h^{-1}(z) = \left(\frac{d_L(z)}{1+z} \right)' , \quad d_L(z) = H_0 D_L(z) . \quad (7.27)$$

However, as discussed in [Amendola 99b, Garcia-Berro 99, Gaztanaga 02, Riazuelo 02], when using supernova data to obtain $D_L(z)$, one has to take into account the dependence of the Chandrasekhar mass on G_{eff} , so that the SnIa peak luminosity appears to be $\propto (G_{\text{eff}}(z)/G_{\text{eff},0})^{-3/2}$. As shown in [Boisseau 00], the full reconstruction of the functions $F(\Phi)$, $U(\Phi)$ requires two independent types of observations : $d_L(z)$ or another function of z that probes the background evolution, and the growth factor of matter perturbations $\delta\rho_m(z)/\rho_m(z)$ at some comoving scale much less than the Hubble scale, too. On the other hand, as emphasized in [Esposito-Farese 01], one can already obtain powerful constraints from a partial reconstruction using $D_L(z)$ only. Such a partial reconstruction is possible when some additional condition is imposed on either F or U . This is the way we adopt in Sec. 7.7 : we reconstruct the function F for a given Hubble parameter $H(z)$ and a constant potential U and investigate whether the resulting model is viable. Before embarking on such partial reconstructions, we derive first an integral form of the general solution of Eq. (7.7).

³Note that the definitions of $d_L(z)$ and $D_L(z)$ are interchanged in [Chevallier 01] and [Polarski 05].

7.3 The master equation for F

Let us now consider the master equation (7.7) and present its general solution in an integral form. This will allow us to understand general properties of solutions, in particular, their dependence on initial conditions. The first step is to note that one solution of the homogeneous equation (7.7) (without source term) is given by

$$F \propto (1+z)^2. \quad (7.28)$$

This suggests us, following [Esposito-Farese 01], to introduce the function f defined as follows

$$\frac{F(z)}{F_0} \equiv (1+z)^2 f(1+z), \quad (7.29)$$

in terms of which Eq.(7.7) becomes

$$f'' + (\ln h)' f' = \frac{6u}{x^4 h^2} \Omega_{U,0} + \frac{3}{x h^2} \Omega_{m,0}, \quad (7.30)$$

where we have introduced the variable $x \equiv 1+z$. Due to the absence of any term proportional to f , in accordance with (7.28,7.29), Eq. (7.30) is easily integrated formally, and its general solution has the integral form

$$\begin{aligned} f(x) = 1 + \left[-2 + \frac{F'(x=1)}{F_0} \right] \frac{d_L}{x} &+ 6 \Omega_{U,0} \int_1^x \frac{dx'}{h(x')} \int_1^{x'} \frac{u(x'') dx''}{x''^4 h(x'')} \\ &+ 3 \Omega_{m,0} \int_1^x \frac{dx'}{h(x')} \int_1^{x'} \frac{dx''}{x'' h(x'')}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

A nontrivial dependence on initial conditions is through the second term only. We see that for a given initial value $F'(z=0)$, this term is proportional to the dimensionless luminosity distance d_L . Due to Eq. (7.15), we have $f'(x=1) = -2 \pm \frac{|\Phi'(z=0)|}{\sqrt{F_0} \omega_{BD,0}} \approx -2$, indicating that we must start today, on observational grounds, very close to GR. Hence, the second term of the general solution is bound to be negative and it is this term that will possibly push the quantity $f(z)$ downwards for increasing z . Finally, the corresponding quantity F is trivially obtained using (7.29). If we choose U to be constant, we can implement the reconstruction of the microscopic Lagrangian. By inspection of (7.7) for constant U , we find the asymptotic solution

$$F(x) = C_1 x^2 + C_2 x^{\frac{3}{2}} + F_0, \quad (7.32)$$

in complete agreement with (7.31) setting $u = 1$. We can now proceed with the general reconstruction scheme [Boisseau 00, Esposito-Farese 01] and find $\Phi(z)$, and hence $z(\Phi)$, by integration of (7.8). This would finally give us $F(\Phi)$.

Let us come back to the solution (7.28). It corresponds to the parametrization $Z = -1$ with

$$F(\Phi) = \frac{1}{6} \Phi^2, \quad \omega_{BD} = -\frac{3}{2}, \quad (7.33)$$

where Φ is defined up to some constant. From (7.33) it is seen that this solution is unphysical in view of (7.9), see [Esposito-Farese 01]. It is interesting that (7.33) corresponds to a conformally coupled scalar field in the Jordan frame satisfying

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + \frac{R}{6}\Phi = 0. \quad (7.34)$$

7.4 Scaling solutions

Let us now consider the so-called scaling solutions for which DE scales as some power of a ,

$$\rho_{DE} \propto a^{-3\gamma}, \quad (7.35)$$

which attracted a lot of interest previously.⁴ Clearly, for these solutions DE has an effective barotropic (constant) equation of state, viz.

$$w_{DE} = -1 + \gamma, \quad (7.36)$$

and we can readily write formally the general scaling solution by substituting

$$h^2 = \Omega_{m,0} (1+z)^3 + \Omega_{DE,0} (1+z)^{3\gamma}, \quad (7.37)$$

into the integral expression (7.31). We emphasize that this gives the general scaling solution irrespective of any limiting case and for an arbitrary potential, the only assumption is that of the spatial flatness. Using (7.31) and (7.37), general analytic expressions for $F(z)$ can be obtained only for the cases $\gamma = 1, 4/3$ (see Appendix).

In analogy with a minimally coupled scalar field (quintessence), a scaling solution satisfies

$$\frac{\rho_{DE} + p_{DE}}{\rho_{DE}} = 1 + w_{DE} = \gamma. \quad (7.38)$$

However, in contrast to the minimally coupled scalar field case with a positive potential, (7.38) does not imply $0 \leq \gamma \leq 2$, in particular γ can be negative which corresponds to phantom DE.

To get insight into the ability of scalar-tensor DE models to produce various equation of state parameters w_{DE} , it is instructive to study first scaling solutions in the absence of dust-like matter ($\rho_m = 0$). In this way, a lower limit on w_{DE} for realistic solutions with $\rho_m \neq 0$ can be obtained. These scaling solutions can also be considered as describing the asymptotic future of our universe when $\Omega_m \rightarrow 0$ and $\Omega_{DE} \rightarrow 1$. Then $a(t) \propto |t|^q$ with $q = \frac{2}{3\gamma}$. For phantom (or, super-inflationary) solutions, $q < 0$ and then the moment $t = 0$ corresponds to the 'Big Rip' singularity [Caldwell 02, Starobinsky 00].

It is straightforward to check that such scaling solutions can exist only when $F = \alpha\Phi^2$ with $\alpha = \text{const}$. This form of F corresponds to a constant Brans-Dicke parameter $\omega_{BD} = \frac{1}{4\alpha}$ for $Z(\Phi) = 1$. Further on, we assume that $\alpha > 0$ for stability of the theory. The two scaling solutions in the vanishing potential case (the pure Brans-Dicke theory) are [O' Hanlon 72]

$$|\Phi| \propto |t|^r, \quad r = \frac{1 \pm 3\sqrt{1 + \frac{1}{6\alpha}}}{8(1 + \frac{3}{16\alpha})}, \quad q = \frac{1 + \frac{1}{4\alpha} \mp \sqrt{1 + \frac{1}{6\alpha}}}{4(1 + \frac{3}{16\alpha})} > 0. \quad (7.39)$$

Hence it is not possible to get a scaling solution with $w_{DE} < -1$ with vanishing (or negligible) potential $U(\Phi)$. We note that the above solution reduces to (7.28,7.33) obtained for $Z = -1$ when we formally put $\alpha = -\frac{1}{6}$ in (7.39). Indeed we get $q = 1$, $r = -1$, hence $F \propto a^{-2}$ which is exactly the solution (7.28).

However, scaling solutions supported by both the kinetic and the potential energy of Φ can exist in the presence of a polynomial potential $U(\Phi) = U_0|\Phi|^n$ (we assume that the potential is positive, so $U_0 > 0$). We have for these solutions

$$r = \frac{2}{2-n}, \quad q = \frac{2(n+2+\frac{1}{\alpha})}{(n-2)(n-4)} \quad (7.40)$$

⁴Our definition for ρ_{DE} , Eq.(7.16), differs from that used in [Pettorino 05], and this explains why our results differ from theirs.

while the inequality $q^2 + 2qr > \frac{r^2}{6\alpha}$ has to be satisfied (this is always the case if $\alpha \ll 1$ and $n = \mathcal{O}(1)$). They were first found in [Barrow 90, Amendola 90] (see also the analysis of their stability in [Amendola 99a, Holden 00]) but they have not been discussed yet in connection with phantom DE. Note that there is no phantom behaviour for usually considered quadratic and quartic potentials.

So, we see that it is possible to get scaling solutions with $q < 0$, $w_{DE} < -1$ if $2 < n < 4$. For these solutions, $r < 0$, too, so that $a(t)$ diverges in the "Big Rip" singularity at some finite moment of time in future. It is clear that, relaxing the requirement of scaling behaviour, it is possible to add some amount of dust-like matter to these solutions while still keeping the phantom behaviour of DE. However, the amount of 'phantomness' exhibited by them, i.e. the modulus of the minimal possible value of $w_{DE} + 1 = 2/3q$, is very small for small values of α (equivalently large ω_{BD}), viz.

$$w_{DE} + 1 \geq -\frac{\alpha}{3}, \quad (7.41)$$

where the equality is achieved for $n = 3$. Thus, the conclusion is that polynomial potentials and scaling solutions in viable scalar-tensor DE models can lead to violation of the WEC, however, by the small amount $\sim \omega_{BD}^{-1}$ only.

7.5 Small z expansion and Solar System gravity tests

Of course, scaling solutions considered in the previous section are very specific ones. Let us now study generic solutions describing DE in the scalar-tensor gravity. Since, as was explained in the Introduction, if DE crosses the phantom boundary at all, it has done it in a very recent epoch, at small z , it is natural to study the expansion of a generic solution in powers of redshift z . For each solution $H(z)$, $\Phi(z)$, the basic microscopic functions $F(\Phi)$ and $U(\Phi)$ can be expressed as functions of z and expanded into Taylor series in z :

$$\frac{F(z)}{F_0} = 1 + F_1 z + F_2 z^2 + \dots > 0, \quad (7.42)$$

$$\frac{U(z)}{3F_0 H_0^2} \equiv \Omega_{U,0} u = \Omega_{U,0} + u_1 z + u_2 z^2 + \dots. \quad (7.43)$$

Note that this expansion produces two parameters in each order of z which are independent of initial conditions and can be expressed through derivatives of $F(\Phi)$ and $U(\Phi)$ with respect to Φ . The corresponding expansion for $\Phi'(z)$ is:

$$\begin{aligned} (F_0)^{-\frac{1}{2}} \Phi'(z) &= \Phi'_0 + \Phi'_1 z + \Phi'_2 z^2 + \dots \\ &= \Delta + \frac{1}{\Delta} \left[6(F_1 - F_2 + \Omega_{U,0} - 1) - 3(\Omega_{m,0} + u_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(\Omega_{m,0} + \Omega_{U,0})}{\frac{F_1}{2} - 1} (4F_1 - 2F_2 + 6\Omega_{U,0} + 3\Omega_{m,0} - 6) \right] \cdot z + \dots \end{aligned} \quad (7.44)$$

with $\Delta^2 \equiv 6(\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0} - F_1)$. As we will see below, $\Delta^2 > 0$. In principle, the expansion (7.44) can be inverted to get $z(\Phi)$. From (7.42,7.43), all other expansions can be derived:

$$h^2(z) = 1 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots, \quad (7.45)$$

$$\epsilon(z) = 1 + \epsilon_1 z + \epsilon_2 z^2 + \dots > 0, \quad (7.46)$$

$$w_{DE}(z) = w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + \dots, \quad (7.47)$$

$$H_0^{-1} \frac{\dot{G}_{\text{eff}}}{G_{\text{eff}}} = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \dots, \quad (7.48)$$

which can be used in order to constrain parameters of our model.

There are two types of observational constraints at small redshifts. The first of them includes those ones that follow from Solar System and other tests of possible deviations of the scalar-tensor gravity from GR at the present moment ($z = 0$); in particular, $|g_0| \lesssim 10^{-3}$ at the 2σ confidence level from the last of Eqs. (7.13). Other constraints follow from cosmological tests and refer to the whole range of redshifts up to $z \sim 1$ and higher redshifts, depending on the nature of the test. In particular, if we assume that the present supernova data admit (or even favour) $w_{DE}(z) < -1$ for $z \lesssim 0.3$ as was argued in the Introduction, then $\frac{dw}{dz} = \epsilon_1 + 2\epsilon_2 z + 3\epsilon_3 z^2 + \dots < 0$ for $z \lesssim 0.3$. In particular, we must have $\epsilon_1 < 0$ that is equivalent to Eq. (7.25) taken at $z = 0$.

It follows from the substitution of these expansions into Eqs. (7.7,7.8) that

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{1 - \frac{F_1}{2}} (6 - 3\Omega_{m,0} - 6\Omega_{U,0} - 4F_1 + 2F_2), \\ h_2 &= \frac{3}{(\frac{F_1}{2} - 1)^2} \left[F_1 \left(\frac{5}{2}F_1 - 3F_2 - \frac{F_3}{2} + 4\Omega_{U,0} + \frac{u_1}{2} + \frac{11}{4}\Omega_{m,0} - 7 \right) \right. \\ &\quad \left. + F_2^2 - 3F_2\Omega_{U,0} - \frac{3}{2}F_2\Omega_{m,0} + 4F_2 + F_3 - 5\Omega_{U,0} - u_1 - 4\Omega_{m,0} + 5 \right], \end{aligned} \quad (7.49)$$

$$1 + w_0 = \frac{\frac{5}{2}F_1 - 2F_2 - 6(\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0}) + \frac{3}{2}F_1 \Omega_{DE,0}}{3\Omega_{DE,0}(\frac{F_1}{2} - 1)}, \quad (7.50)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{3\Omega_{DE,0}} \left[\frac{1 + 6\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{DE,0}}}{\frac{F_1}{2} - 1} \left(4F_1 - 2F_2 + 6\Omega_{U,0} - 3\Omega_{DE,0} - 3 \right) - 9\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{DE,0}} \right. \\ &\quad + \frac{6}{(\frac{F_1}{2} - 1)^2} \left(\frac{5}{2}F_1^2 - 3F_1F_2 - \frac{F_1F_3}{2} + 4F_1\Omega_{U,0} + \frac{F_1u_1}{2} + \frac{11}{4}F_1\Omega_{m0} - 7F_1 \right. \\ &\quad \left. \left. + F_2^2 - 3F_2\Omega_{U,0} - \frac{3}{2}F_2\Omega_{m0} + 4F_2 + F_3 - 5\Omega_{U,0} - u_1 + 4\Omega_{DE,0} + 1 \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{3\Omega_{DE,0}^2(\frac{F_1}{2} - 1)^2} \left(4F_1 - 2F_2 + 6\Omega_{U,0} - 3\Omega_{DE,0} - 3 \right)^2. \end{aligned} \quad (7.51)$$

The quantities F_1 , F_2 , $\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0}$ satisfy important constraints. For $\omega_{BD,0}$, we have the expression

$$\omega_{BD,0} = \frac{6(\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0} - F_1)}{F_1^2} = \frac{\Delta^2}{F_1^2} \quad (7.52)$$

which should be very large and positive, see (7.14). Therefore, we must have $|F_1| \ll 1$ and $\Delta^2 \approx 6(\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0}) > 0$.⁵ Moreover, since $\Delta^2 < 6\Omega_{DE,0} < 5$ for positive U ,

$$|F_1| < \left(\frac{5}{\omega_{BD,0}} \right)^{1/2} \lesssim 10^{-2}. \quad (7.53)$$

Thus, two cases are possible. In the first case, the further coefficients F_2 , F_3 , etc. in the expansion (7.42) are all of the order of F_1 , i.e. they satisfy the inequality (7.53), too. In this case, the first derivative of F with respect to z or Φ at the present moment is not atypical compared to other derivatives.

⁵Note that this condition is not satisfied in the recent paper [Nesseris 06] that results in unphysical nature of its best-fit solution for $z < 0.2$.

Then, however, a possible amount of phantomness (the quantity defined in the end of the previous section) is also of the order of $|F_1|$, i.e. less than 1%. Such DE will be practically indistinguishable from a cosmological constant.

Another possibility which admits 'significant phantomness', namely, $\min(1 + w_{DE}(z)) < -0.01$, takes place if $|F_2|$, $|F_3|$, $(\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0})$ and so on are significantly larger than $|F_1|$. It is a matter of taste if one considers the second possibility as 'fine tuned' with respect to the first one; observations should finally tell us if significant phantomness does exist or not. In any case, it is clear that if we are interested in any prediction for a significant deviation from the cosmological constant variant of DE, we may neglect F_1 as compared to F_2 and other parameters (but not in those expressions where it enters as a multiplier).

For $|F_1| \ll 1$, all the expansions above simplify significantly, and we have, in particular,

$$1 + w_0 \simeq \frac{2F_2 + 6(\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0})}{3\Omega_{DE,0}}. \quad (7.54)$$

From (7.54), the necessary condition to have phantom DE *today* reads

$$\left(\frac{d^2 F}{d\Phi^2}\right)_0 = \frac{F_2}{3(\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0})} < -1. \quad (7.55)$$

In particular, $F_2 < 0$, because $\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0} > 0$ as discussed above.⁶ More specifically, to have $1 + w_0 \leq \alpha_m < 0$ will require

$$F_2 < -3(\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0}) - \frac{3}{2}|\alpha_m| \Omega_{DE,0} \quad (7.56)$$

and hence $|F_2| \gtrsim \Omega_{DE,0}$ for $\alpha_m \lesssim -0.6$. To summarize, the following conditions must be satisfied to have a viable model with $1 + w_{DE,0} \leq \alpha_m < 0$

$$|F_1| \ll 1 \quad \Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0} - F_1 > 0 \quad F_2 < -\frac{3}{2}|\alpha_m| \Omega_{DE,0}. \quad (7.57)$$

In the same limit, $h_1 < 0$, i.e. the WEC is violated for the total effective energy-momentum tensor for matter + DE (for the whole right-hand side of Eq. (7.18)), if the stronger inequality is fulfilled :

$$F_2 < -\frac{3}{2}(1 + \Omega_{DE,0} - 2\Omega_{U,0}). \quad (7.58)$$

The expression for w_1 becomes in the limit $|F_1| \ll 1$

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{3\Omega_{DE,0}} \left[\left(1 + 6\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{DE,0}}\right) (2F_2 + 3 + 3\Omega_{DE,0} - 6\Omega_{U,0}) - 9\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{DE,0}} \right] \\ &+ \frac{2}{\Omega_{DE,0}} \left[F^2 \left(F_2 - 3\Omega_{U,0} - \frac{3}{2}\Omega_{m,0} + 4 \right) - 5\Omega_{U,0} + 4\Omega_{DE,0} + 1 + F_3 - u_1 \right] \\ &- \frac{1}{3\Omega_{DE,0}^2} (2F_2 + 3\Omega_{DE,0} + 3 - 6\Omega_{U,0})^2 \end{aligned} \quad (7.59)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{9(w_0 - 1)^2 \Omega_{DE,0} - 8 - 6w_0^2 + 9\Omega_{m,0} - 18\Omega_{U,0} + w_0(26 - 9\Omega_{m,0} + 18\Omega_{U,0})}{2} \\ &+ \frac{(-6w_0 + 14\Omega_{U,0} + 3\Omega_{m,0}(-3\Omega_{U,0} + 2w_0))}{\Omega_{DE,0}} + \frac{2}{\Omega_{DE,0}} (F_3 - u_1), \end{aligned} \quad (7.60)$$

⁶In this place our considerations intersect with those of the recent paper [Martin 06]. The condition (7.55) corresponds to $\beta_0 > 1$ in the notation of that paper. The other case mentioned there, $\beta_0 \sim -1$, does not lead to significant phantomness of DE with our definition of the DE energy-momentum tensor.

where the last equality (7.60) is obtained using (7.54). Since F_3 and u_1 are free parameters determined by a concrete choice of $F(\Phi)$ and $U(\Phi)$, it is well possible to have $w_1 > 0$ for $w_0 < -1$ in order to realize a smooth phantom divide crossing at small z for DE in the scalar-tensor gravity.

We obtain further

$$g_0 \equiv H_0^{-1} \frac{\dot{G}_{\text{eff},0}}{G_{\text{eff},0}} = F_1 \left\{ 1 - \frac{1}{\left(\frac{F_1}{2} - 1\right)(F_1^2 - 3F_1 - 3\Omega_{U,0} + 3\Omega_{DE,0})(F_1^2 - 4F_1 - 4\Omega_{U,0} + 4\Omega_{DE,0})} \right. \\ \times \left[\left((F_1^2 - 4F_2)\left(\frac{F_1}{2} - 1\right) - (5F_1 - 2F_2 + 6\Omega_{U,0} - 3\Omega_{DE,0} - 5)F_1 \right) \right. \\ \times (F_1 + \Omega_{U,0} - \Omega_{DE,0}) + (4F_1 - 2F_2 + 6\Omega_{U,0} - 3\Omega_{DE,0} - 3)F_1^2 \\ \left. \left. + (F_1F_2 - \frac{5}{2}F_1 + \frac{F_1u_1}{2} - \frac{3}{2}F_1\Omega_{DE,0} - 6\Omega_{U,0} - u_1 + 6\Omega_{DE,0})F_1 \right] \right\} \quad (7.61)$$

Expression (7.61) simplifies considerably for $|F_1| \ll 1$:

$$g_0 \simeq F_1 \left(1 - \frac{F_2}{3(\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0})} \right) = F_1 \left(1 - \left(\frac{d^2F}{d\Phi^2} \right)_0 \right). \quad (7.62)$$

Note that g_0 and F_1 have the same sign for the case of (significantly) phantom DE. Finally, for the post-Newtonian parameter β_{PN} and γ_{PN} we have

$$\beta_{PN} = 1 + \frac{\omega'_{BD}}{4(2\omega_{BD} + 3)(\omega_{BD} + 2)^2} \frac{F}{F'} \quad (7.63)$$

$$\gamma_{PN} = 1 - \frac{1}{\omega_{BD} + 2}. \quad (7.64)$$

Taking the zeroth order in z , we obtain :

$$\beta_{PN,0} = 1 + \frac{\omega_{BD,1}}{4(2\omega_{BD,0} + 3)(\omega_{BD,0} + 2)^2} \frac{1}{F_1}. \quad (7.65)$$

$$\gamma_{PN,0} = 1 - \frac{1}{\omega_{BD,0} + 2}. \quad (7.66)$$

For $|F_1| \ll 1$ and $|F_1u_1/\Delta^2| \ll 1$, we have :

$$\omega_{BD,0} \simeq 6(\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0}) \frac{1}{F_1^2} \quad (7.67)$$

$$\omega_{BD,1} \simeq 24(\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0}) \frac{F_2}{F_1^3}, \quad (7.68)$$

which finally yields

$$\gamma_{PN,0} = 1 - \frac{F_1^2}{6(\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0})}, \quad \beta_{PN,0} = 1 - \frac{F_1^2 F_2}{72(\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0})^2}. \quad (7.69)$$

Now we can use (7.50,7.52,7.62,7.69) to extract information from the Solar System constraints. First we note that all the Solar System constraints (7.14),(7.13) are satisfied for a sufficiently small $|F_1|$ (less than the upper bound (7.53)) independently of any requirement concerning the present DE equation of state, in particular, whether one has today DE of the phantom type or not. From (7.64), it

is seen that $\gamma_{PN,0} \approx 1$ and $\gamma_{PN} < 1$ for any viable scalar-tensor model of DE having $\omega_{BD,0}$ positive and large. For significantly phantom DE, other constraints follow from (7.69) :

$$\beta_{PN,0} > 1, \quad (7.70)$$

$$\frac{\gamma_{PN,0} - 1}{\beta_{PN,0} - 1} = \frac{12 (\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0})}{F_2} = 6 \Omega_{DE,0} \frac{1 + w_0}{F_2} - 4. \quad (7.71)$$

Therefore, for significantly phantom DE

$$-4 < \frac{\gamma_{PN,0} - 1}{\beta_{PN,0} - 1} < 0. \quad (7.72)$$

It is possible to invert formulas (7.62,7.69) and express F_1 , F_2 and $\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0}$ through the Solar System observables $\gamma_{PN,0}$, $\beta_{PN,0}$ and g_0 :

$$F_1 = g_0 \frac{\gamma - 1}{\gamma - 1 - 4(\beta - 1)} \quad (7.73)$$

$$F_2 = -2 g_0^2 \frac{\beta - 1}{[\gamma - 1 - 4(\beta - 1)]^2} \quad (7.74)$$

$$\Omega_{DE,0} - \Omega_{U,0} = -\frac{1}{6} g_0^2 \frac{\gamma - 1}{[\gamma - 1 - 4(\beta - 1)]^2} \quad (7.75)$$

$$1 + w_0 = -\frac{1}{3} g_0^2 \frac{4(\beta - 1) + \gamma - 1}{\Omega_{DE,0} [\gamma - 1 - 4(\beta - 1)]^2} \quad (7.76)$$

Thus, in principle, it is possible to test $w_0 < -1$ in the Solar System as was recently discussed in [Martin 06]. However, this may be very difficult to perform in practice since the small parameter F_1 enters quadratically into $\gamma_{PN,0} - 1$ and $\beta_{PN,0} - 1$ while not appearing (in some limit) in $1 + w_0$. So, a rather significant phantomness of DE is typically accompanied by very small deviations of the post-Newtonian parameters from their GR values. E.g., let us take $\Omega_{DE,0} = 0.7$, $\Omega_{U,0} = 0.6$, $\gamma_{PN,0} - 1 = -2 \cdot 10^{-5}$ (the latter being marginally possible at the 2σ level) and $w_0 = -1.2$. Then, from Eqs. (7.69,7.54), we get $|F_1| = 3.5 \cdot 10^{-3}$, $F_2 = -0.51$ and $\beta_{PN,0} - 1 = 0.85 \cdot 10^{-5}$ – an order of magnitude below the present upper limit.⁷ Further, $w_1 = 2.9 (F_3 - u_1) - 0.70$. Finally, in this case $|g_0| = 0.95 \cdot 10^{-2}$ that is an order of magnitude larger than the 2σ upper limit following from the last of Eqs. (7.13)! So, if this upper bound will be confirmed, $|F_1|$ has to be decreased by an order of magnitude which results in $\beta_{PN,0} - 1$ and $\gamma_{PN,0} - 1$ being on the level of 10^{-7} . For comparison, in the extreme opposite case $\Omega_{U,0} = 0$ with the same values of $\Omega_{DE,0}$, $\gamma_{PN,0}$ and w_0 , we get $|F_1| = 9.2 \cdot 10^{-3}$, $F_2 = -2.3$, $\beta_{PN,0} - 1 = 0.55 \cdot 10^{-5}$, $w_1 = 2.9 (F_3 - u_1) + 1.5$ and even larger $|g_0| = 1.9 \cdot 10^{-2}$.

This shows also that the measurement of $\dot{G}_{\text{eff},0}/G_{\text{eff},0}$ is the most critical among Solar System tests of scalar-tensor DE since this quantity is proportional to the first power of the small parameter $|F_1|$ (apart from the exceptional case $(d^2 F/d\Phi^2)_0 = 1$ which does not lead to the present phantom behaviour of DE). Also, to determine w_1 which is necessary in order to consider the possibility of phantom boundary crossing, the determination of $(d^2 \ln G_{\text{eff}}/dt^2)_0$ is required, something that is hardly possible. Thus, testing the phantom behaviour of scalar-tensor DE in the Solar System may be much more difficult than in cosmology.

⁷Let us emphasize once more that the formulas (7.62,7.69) were obtained under the assumption $|F_2| \gg |F_1|$. For this reason, they are not applicable, e.g., to the scaling solution (7.40) for which $F_2 = -F_1/2 > 0$, $\gamma_{PN} = 1 - 4\alpha$ in the limit $\alpha \ll 1$, and $\beta_{PN} \equiv 1$.

7.6 General reconstruction of $F(z)$

We consider now the reconstruction of $F(z)$ for given Hubble parameter $H(z)$ and potential U . As can be seen from (7.24,7.21), $H(z)$ is a functional of $w(z)$. We will consider several cases corresponding to phantom divide crossing at very small redshifts as favoured by the latest observations. It is desirable to derive some general properties of the behaviour of our system before embarking on the study of specific models.

It is easy to derive the following general property shared by a large class of models : if we require that $\phi'^2 > 0$ and also $U \geq 0$, then the following inequality must be satisfied

$$\frac{F'}{F_0} \left(\frac{(1+z)^2}{4} \frac{F'}{F} - (1+z) \right) + \frac{F}{F_0} > (1+z)^3 h^{-2}(z) \Omega_{m,0} . \quad (7.77)$$

Note that the r.h.s. of (7.77) tends to one in any model for which $w_{DE} < 0$ and it will tend to this asymptotic value quickly for $w_{DE} < -0.5$. We can consider several particular cases :

- It is seen from (7.77) that models which at some redshift $z_m \gg 1$ satisfy $F'(z_m) = 0$ and $0 < F(z_m) < 1$ sufficiently small, must also have $\phi'^2(z_m) < 0$, such an example is actually illustrated in Figure 7.1.
- When $F \rightarrow 0$ for $z \rightarrow z_m$ while at the same time $F'(z_m) \neq 0$, it follows from the expression (7.10) for ϕ'^2 and using (7.8) that $\phi'^2 \rightarrow \infty$.
- Finally, an interesting case is provided when $F(z_m) = F'(z_m) = 0$ for some z_m . We see first from (7.8) that $\Phi'^2 \rightarrow \Phi'^2(z_m)$, where $\Phi'^2(z_m)$ is a (small) negative number. Let us assume that $\frac{F'}{F}$ is bounded when $z \rightarrow z_m$. In that case the inequality (7.77) cannot be satisfied, hence $\phi'^2(z_m) < 0$ (always assuming $U > 0$) and actually we have $\phi'^2 \rightarrow -\infty$ for $z \rightarrow z_m$ as can be checked directly with the definition of ϕ'^2 . As a consequence, if $\phi'^2 > 0$ as $z \rightarrow z_m$ then we must have $|\frac{F'}{F}| \rightarrow \infty$ and if in addition $\frac{F'^2}{F}$ is bounded, then $\phi'^2 \rightarrow \infty$.

Some of these properties are illustrated with Figures 7.1,7.2,7.3.

Let us consider now the space-time background evolution encoded in the quantity $h(z)$. From a theoretical point of view, as is seen from (7.24), a given function $w(z)$ implies a corresponding functional form $h(z)$, and conversely using (7.22). Future data are expected to measure $D_L(z) = H_0^{-1} d_L(z)$, and therefore $h(z) = H_0^{-1} H(z)$, with high precision. In the meantime, we can try some particular expressions $w(z)$, or $h(z)$, parametrized with the help of a limited number of free parameters, an attitude which turns out to be very fruitful. We will consider both constant and variable equation of state parameter w . Observations suggest that w can be varying and we will model this variation using the following two-dimensional parametrization of the equation of state parameter suggested in [Chevallier 01], [Linder 03])

$$w(z) = (-1 + \alpha) + \beta (1 - x) \equiv w_0 + w_1 \frac{z}{1+z} . \quad (7.78)$$

where $x \equiv \frac{a}{a_0}$. We will sometimes compare our results with the parametrization suggested in [Sahni 03a]

$$\epsilon(z) = A_0 + A_1 (1+z) + A_2 (1+z)^2 . \quad (7.79)$$

By definition, $\epsilon(0) = 1$, hence $A_0 + A_1 + A_2 = 1$. Note that we have for (7.78)

$$\epsilon(z) = (1+z)^{3(\alpha+\beta)} e^{-3\beta \frac{z}{1+z}} . \quad (7.80)$$

Actually, rather than delimiting some restricted bounded domain in the parameter space, some observations on small redshifts $z \lesssim 0.35$ single out a preferred direction. Variations along this direction

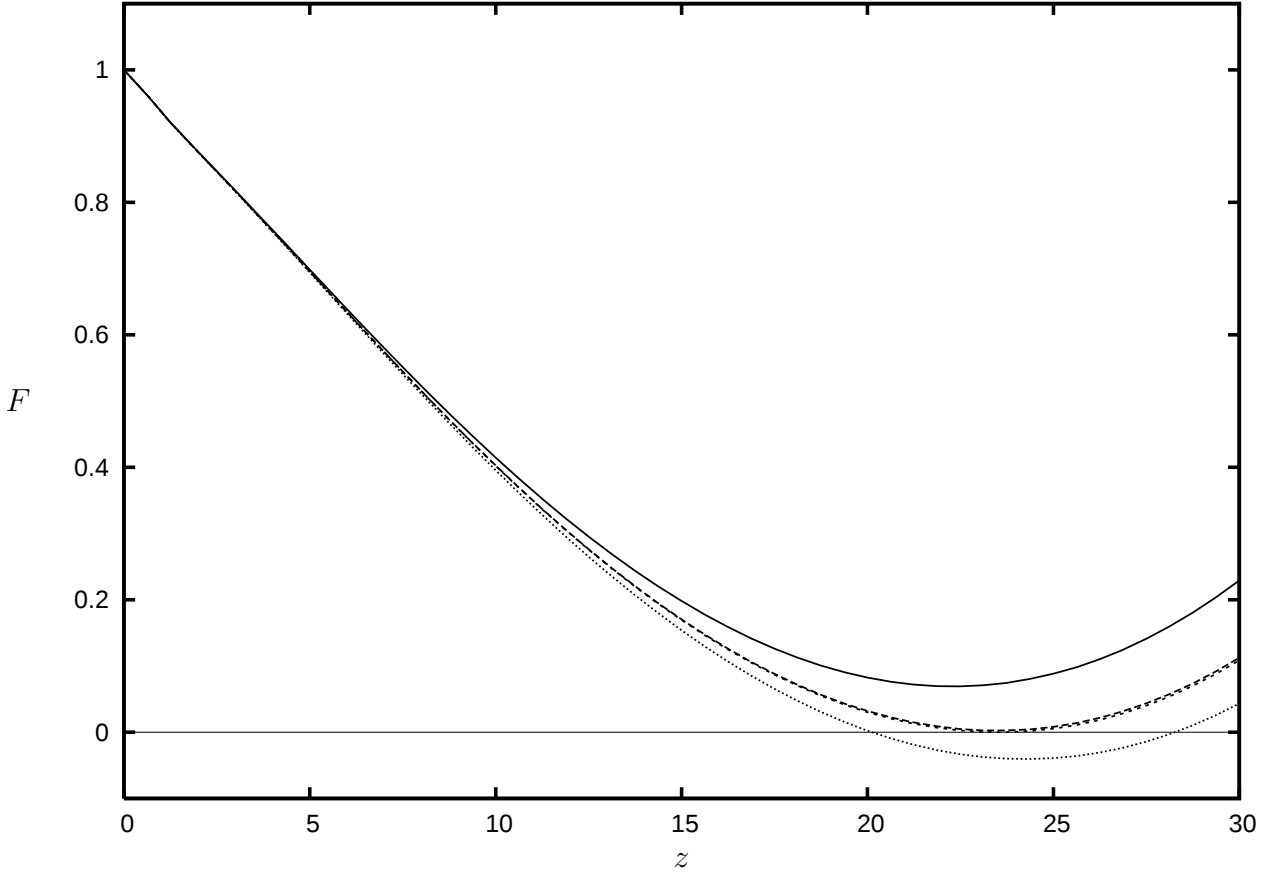


FIG. 7.2 – The quantity $\frac{F(z)}{F_0}$ is displayed for the parametrization (7.78) with $\alpha \equiv 1 + w_0 = -0.2$ and $\beta \equiv w_1 = 0.4$ and $F_1 = 0$. We have the following values for $\frac{\Omega_{U,0}}{\Omega_{DE,0}} = \frac{\Omega_{U,0}}{0.7}$ from bottom to top : 0.9758, 0.975824492, 0.975826, 0.97587. The second curve has its minimum at $F = 0$ and is superimposed on the third curve which has its minimum at $F = 2.4 \times 10^{-3}$.

are essentially unconstrained while variations normal to it are most efficiently constrained. This is the case for baryon oscillations data which constrain $h(z)$ and therefore $w(z)$ as follows

$$\Omega_{m,0}^{1/2} h(z_1)^{-1/3} \left[\frac{1}{z_1} \int_0^{z_1} \frac{dz}{h(z)} \right]^{2/3} \leq 0.469 \pm 0.017, \quad (7.81)$$

with $z_1 = 0.35$, $\Omega_{m,0} = 0.3$.

When we use the parametrization (7.78), eq.(7.81) translates into the constraint at the 1- σ level in the parameter plane α, β (equivalently w_0, w_1),

$$\alpha + 0.112 \beta = 1 + w_{DE,0} + 0.112 w_1 = 0.23 \pm 0.20. \quad (7.82)$$

As said in the Introduction, we see that these constraints allow for a w_0 close to (and possibly slightly lower than) -1 if we take a constant equation of state, while a w_0 significantly lower than -1 is allowed but it requires a steeply increasing w near $z = 0$ in agreement with recent analysis of the data. It is natural to use the constraint (7.82) when we consider the small z expansion of our scalar-tensor model quantities and of our fit (7.78).

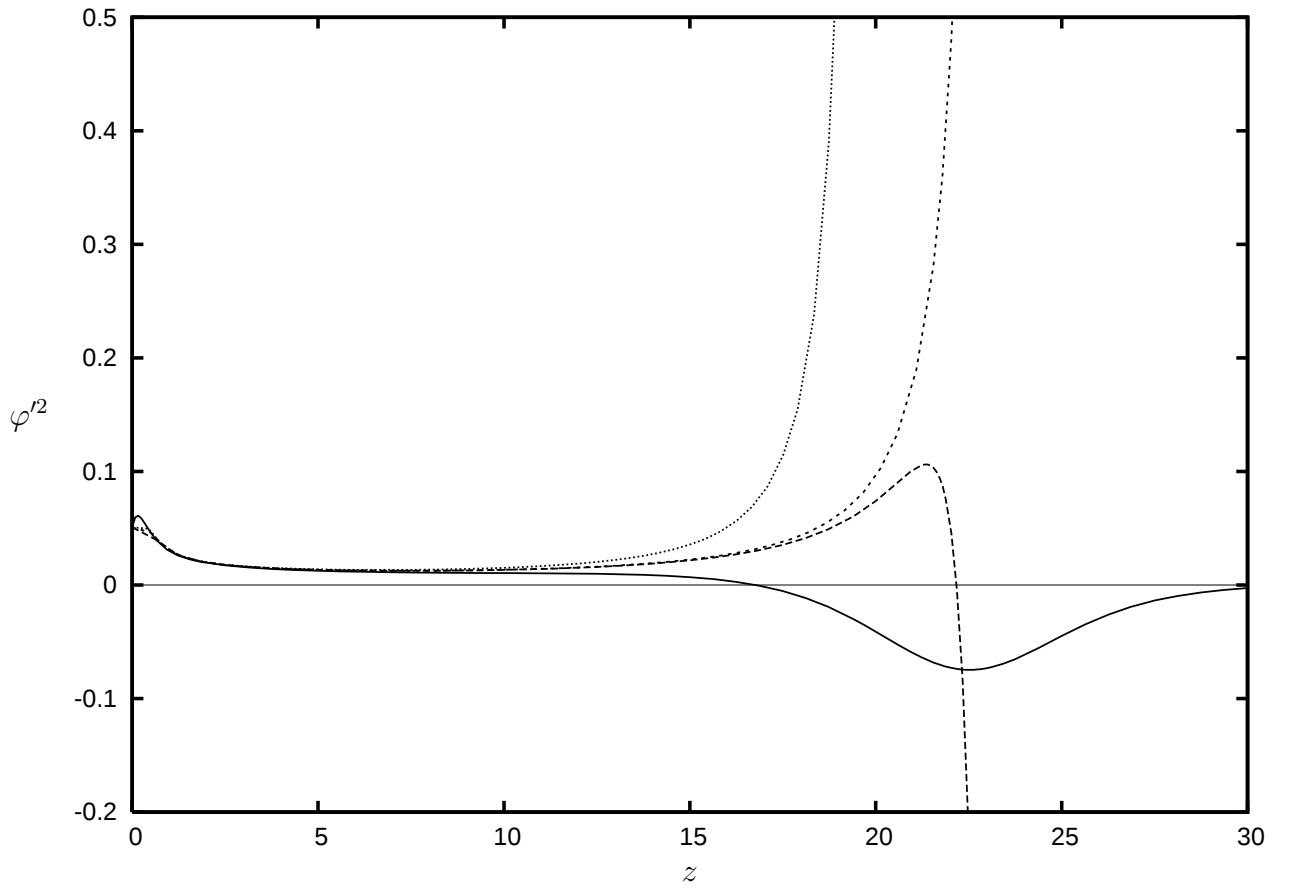


FIG. 7.3 – The quantity ϕ'^2 is shown for the same models as Figure 7.2. The short, resp. long, dashed curve corresponds to $\frac{\Omega_{U,0}}{\Omega_{DE,0}} = \frac{\Omega_{U,0}}{0.7} = 0.975824492$, resp 0.975826 .

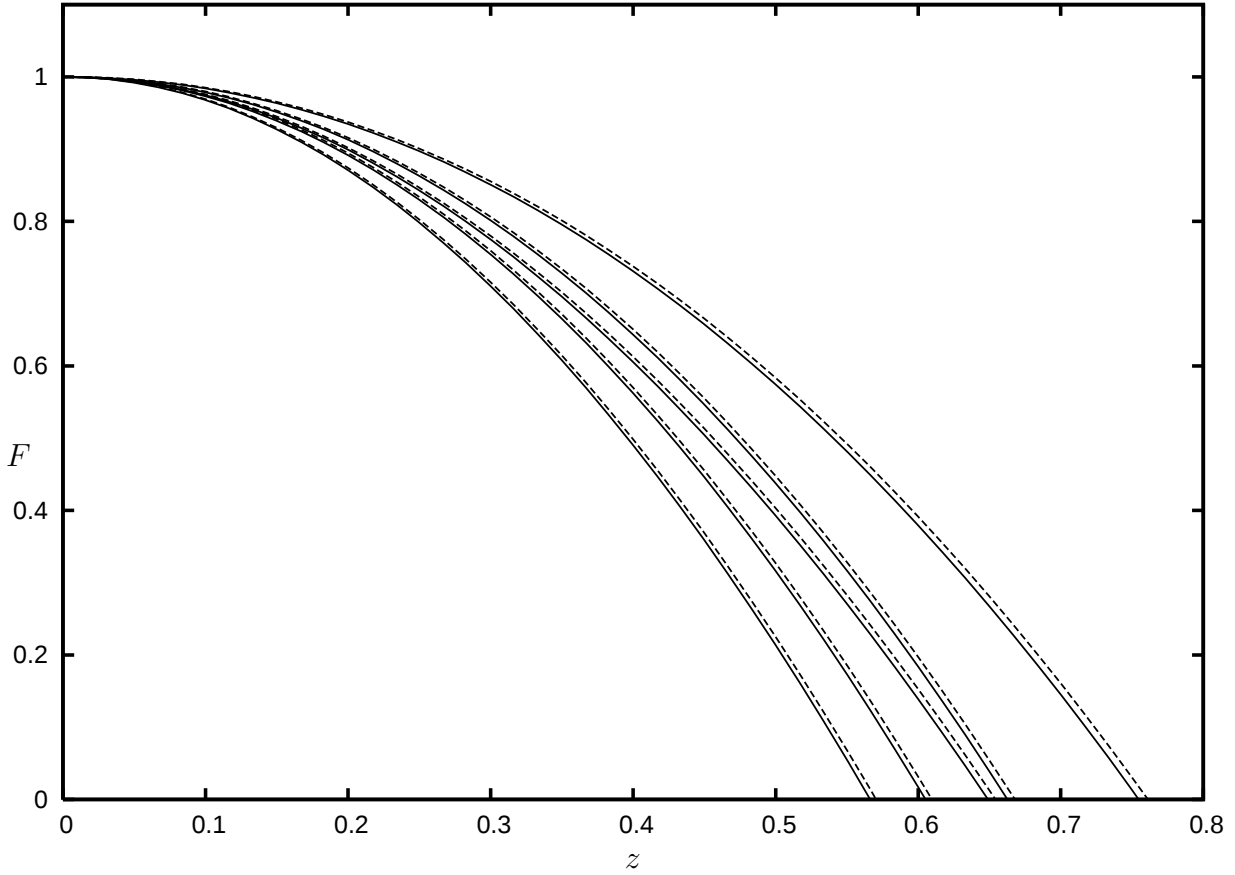


FIG. 7.4 – The function $\frac{F}{F_0}$ is shown for several models with vanishing potential $U = 0$. The solid lines correspond to the initial conditions $F'_0 = 0$ while the dashed lines correspond to the maximal values allowed by the solar system constraint $\omega_{BD,0} > 4 \times 10^4$. We have from left to right the following equation of state parameter w : $-2, -1.5$, polynomial expression (7.83), $-1, -0.5$. It is seen that the limit of regularity of these models corresponds to very low redshifts, $0.566 \leq z \leq 0.663$ for $-2 \leq w \leq -1$. Note that the polynomial expression (7.83) represents crossing of the phantom divide.

7.7 Reconstruction for a constant potential U

Setting $U = 0$, we consider either $w_{DE} < 0$ constant, or else $w_{DE}(z)$ of the form (7.78) or (7.79), whose variation is parameterized by two parameters. This extends the investigations in [Esposito-Farese 01], where only the case $w_{DE} = -1$ was considered. The interesting result obtained there was that F vanishes, and hence the theory is singular, at very low redshifts $z \approx 0.66$ for $F'(0) = 0$ and at only slightly higher redshift $z \approx 0.68$ if one fully exploits the possible initial conditions allowed by the solar system constraints. It is therefore interesting to investigate how this result is affected when we take different equations of state. In particular we will also consider here equations of state with $w_{DE} < -1$. As SNIa observations point to a varying equation of state which is of the phantom type on very low redshifts $z \lesssim 0.3$, this case is considered too. For the polynomial expression (7.79), for definiteness we will use the best fit to the “Gold data set” consisting of 156 supernova which was proposed in [Lazkoz 05] (with the priors $\Omega_{m,0} = 0.3$ and $\Omega_{k,0} = 0$) :

$$A_1 = -5.94 \pm 3.61 \quad A_2 = 2.39 \pm 1.47 . \quad (7.83)$$

These values are similar to those earlier obtained in [Alam 04b] for the same dataset. As we can see, (7.83) has large uncertainties. The corresponding equation of state is today of the phantom type but rapidly increases to a positive value $w_{DE} \simeq 0.1$ at $z \simeq 0.8$ and then decreases to its asymptotic value $w_{DE} = -\frac{1}{3}$ but it is still slightly positive at $z = 2$. We first note from (7.54) that F_2 satisfies

$$F_2 = \frac{3}{2} (w_{DE,0} - 1) \Omega_{DE,0} + 3 \Omega_{U,0} . \quad (7.84)$$

Therefore $F_2 < 0$ for $U = 0$ as long as $w_{DE,0} < 1$ while F_2 decreases with decreasing $w_{DE,0}$. The results obtained numerically are shown in Figure 7.4. It is seen that we keep essentially the same picture, in particular F vanishes more rapidly when w_{DE} decreases, hence the problem is even more severe for phantom DE with constant w_{DE} . Even the fit (7.83) where w_{DE} varies substantially at low redshifts yields essentially the same behaviour. The same result as for (7.83) is obtained using the parametrization (7.78) with $\alpha = -0.377$ and $\beta = 2$. This is similar to earlier results showing that a large variation of the equation of state around $w_{DE} = -1$ on low redshifts can result in essentially the same $d_L(z)$ [Chevallier 01, Maor 02] for $z \lesssim 1$ and one can understand from the general expression eq.(7.31) why all cases displayed in Figure 7.1. will have basically the same behaviour regarding the evolution of $F(z)$. The initial condition $F'_0 = F_1 = 0$ and $\Phi'(0) \neq 0$ means physically that the theory corresponds strictly to General Relativity today, $\omega_{BD,0}^{-1} = 0$. The solar system constraints allow for a very small nonvanishing F_1 , see eq.(7.15), and the corresponding change in z_{max} is very marginal as can be seen on Figure 7.4. To summarize, looking only at $z = 0$ one could think that models with $w_{DE,0} = -1$ and $U = 0$ are allowed, however we see that the cosmological evolution of such models leads to a singularity at very low redshifts generalizing the results obtained earlier [Esposito-Farese 01]. It is clear from these results that a scalar-tensor theory of gravity with vanishing potential U is definitely excluded by the Supernovae data.

7.7.1 Constant nonvanishing potential U

The next natural step is to consider constant (nonvanishing) potentials U . Of course, one does not expect such a behaviour to be relevant up to very large redshifts, but it is certainly a sensible approximation to start with on small redshifts $z \lesssim 1.5$. We note from (7.84) that $F_2 < 0$ for $w_{DE,0} < -1$. By taking $\Omega_{U,0} \approx \Omega_{DE,0}$ one has the smallest possible F_2 for given $w_{DE,0}$ and these are the cases which are found to have the largest range of validity. We find that many models are allowed which are perfectly viable on small redshifts $z \lesssim 1.5$. Typically, these models become singular at some

higher redshift well beyond $z = 2$. There are several possibilities : either it is the quantity F that is vanishing first or it is the quantity ϕ'^2 that vanishes first. As discussed in Section 7.6, when $F = 0$ and $F' \neq 0$, the quantity ϕ'^2 diverges, $\phi'^2 \rightarrow \infty$. Models for which both F and F' vanish together can be considered as a limiting case which gives the largest possible redshift. If we change very slightly the potential U so that when $F' = 0$, $F > 0$, one gets $\phi'^2 = 0$ earlier. These different possibilities are displayed in Figures 7.2, 7.3. We have checked the behaviour of such models with w_{DE} starting below -1 as favoured by SNIa data and with w_{DE} quickly becoming larger than -1 . To summarize, we find that models with $\Omega_{U,0} \rightarrow 0.7$ and an equation of state with $w_{DE} \rightarrow -1$ will become singular at arbitrarily high redshifts. We should remember that $\Omega_{U,0} = 0.7$ together with $w_{DE} = -1$ gives back General Relativity ($F = 1$). In all other cases some maximal redshift is found where the model becomes singular.

In all our numerical calculations, we neglected radiation since its energy density is very small at redshifts of interest. However, even in principle its presence cannot prevent the occurrence of the singularity at the moment when G_{eff} changes sign ($\phi'^2 = 0$ in our case) whose generic (anisotropic) structure is independent of the matter equation of state (see [55] in this respect).

7.8 Asymptotic stability

The next step is to consider nonconstant potentials. As we have shown very generally in Section 7.5, such models are consistent with DE of the phantom type today and phantom divide crossing at small redshifts. An example of the reconstruction of a model with phantom DE today and phantom divide crossing at $z \approx 0.3$ was presented in [Perivolaropoulos 05]. However, in this paper the reconstruction was implemented only for small redshifts $z \lesssim 2$. As was shown in the previous section, one has to consider the large- z behaviour of a model, too, to prove its viability.

In contrast to the case with constant or vanishing potential $U(\Phi)$, a growing potential $U(\Phi)$ allows for the construction of scalar-tensor DE models which are viable for all redshifts and evolves according to the fit (7.78)

$$w(z) = \text{const} = w_0 + w_1 = -1 + (\alpha + \beta) > -1 \quad z \gg 1. \quad (7.85)$$

As a particular example of such a model, let us assume that the scalar-tensor gravity approaches GR sufficiently fast at the matter-dominated stage and that DE 'tracks' matter :

$$F \rightarrow F_\infty = \text{const}, \quad |\dot{F}| \ll HF_\infty, \quad |\ddot{F}| \ll H^2 F_\infty, \quad (7.86)$$

$$H^2 \propto (1+z)^3 \quad 1 \ll z \ll z_{eq}, \quad (7.87)$$

where z_{eq} is the redshift at the matter-radiation equality. In this way we recover in the past the usual behaviour $a \propto t^{\frac{2}{3}}$. However, the constant value $F_\infty < F_0$ may not be too small compared to F_0 . In order to satisfy the BBN constraints [Copi 04, Umez 05], the following inequality is required

$$(F_0 - F_\infty)/F_0 < 0.1, \quad (7.88)$$

which can be easily satisfied. Indeed, as can be seen from (7.77), we have for constant F and $U > 0$, $\phi'^2 > 0$

$$F_0 - F_\infty < \frac{\rho_{DE}}{\rho_m + \rho_{DE}} F_0. \quad (7.89)$$

On the other hand, the assumption $F_0 > F_\infty$ provides a good matching to the small- z expansion derived in Sec. 7.5 with $F_2 < 0$ and a very small F_1 . In view of (7.88), this matching should occur at a sufficiently small z , too.

This scaling behaviour of DE corresponds to the asymptotic solution (7.87) with $w_0 = -w_1$, equivalently $\alpha + \beta = 1$. As is well known, it can be obtained by taking an exponential potential $U(\Phi)$ at $\Phi \rightarrow \infty$, i.e. at large redshifts :

$$U \propto e^{\sqrt{\frac{3}{2F_0\Omega_{U,\infty}}}\Phi}, \quad (7.90)$$

where $\Omega_{U,\infty}$ is the constant asymptotic value of Ω_U at $z \gg 1$ which is a free parameter formally. However, actually it should be small (less than a few percents) to obtain the correct value of the growth factor of density perturbations during the total matter-dominated stage. The total DE energy density in terms of the critical one $3F_0H^2$ is

$$\Omega_{DE,\infty} = 2\Omega_{U,\infty} + \frac{F_0 - F_\infty}{F_0} < 1. \quad (7.91)$$

Note that the term $\frac{F_0 - F_\infty}{F_0}$ in (7.91) always has the same equation of state as the main background matter. Thus, to obtain behaviour different from $w_0 = -w_1$ at large z during the matter dominated stage is possible if $F_0 = F_\infty$ only which requires additional fine tuning and is not natural.

7.9 Conclusions

In this work we have considered the viability of scalar-tensor models of Dark Energy. We have used different types of observations : Solar System constraints which constrain the model *today*, and other data like the supernova data which constrain its cosmological evolution, in particular the time evolution of the DE equation of state parameter w_{DE} . We were interested specifically in models which violate the weak energy condition on small redshifts $z \lesssim 0.3$ and in any case today. We have found the formal general integral solution for $F(z)$ when we reconstruct it for given $H(z)$, which can be obtained from the $d_L(z)$ data, and for given $U(z)$. This general solution allows immediately for an integral representation of scaling solutions. We have constructed scaling solutions and shown that they exist in models with $F = \alpha\Phi^2$ with $\alpha = \text{constant}$, in these models the Brans-Dicke parameter ω_{BD} is constant. Only for nonzero potentials can these models have scaling solutions with constant $w_{DE} < -1$. However, it is shown that for these models $|w_{DE} + 1|$ is very small with $|1 + w_{DE}| \sim \omega_{BD}^{-1}$. We have further performed systematically the small z expansion of the theory and used it to extract various observational constraints. We recover that a large positive $\omega_{BD,0}$ requires $|F_1| \ll 1$ where F_1 is the first derivative today of $\frac{F}{F_0}$. We find that a significantly phantom DE today ($w_0 < -1.01$) implies that F_2 , the second derivative today of $\frac{F}{F_0}$, must be negative and not small, thus, significantly larger than F_1 by modulus. However, while necessary this is not a sufficient condition for phantom DE today, for example for vanishing potential $F_2 < 0$ whenever $w_{DE,0} < 1$.

The condition $|F_2| \sim 1$ while the Solar System data require $|F_1| < 10^{-2}$ (i.e. anomalously small) is the only 'fine tuning' required to get a significantly phantom DE at the present time in scalar-tensor gravity. Note that, since the derivatives $F_i(z)$ are not parameters of the effective microscopic Lagrangian (1) but depend on initial conditions in the early Universe too, it could be even better to call this a "cosmic coincidence". Our point of view is that the condition $|F_2| \sim 1$ cannot be excluded by pure thought, only observations will possibly do it : in the absence of this condition when all F_i are of the same order as F_1 , the general prediction is that the amount of possible phantomness in scalar-tensor DE models is very small, less than 1%.

As for the solar system constraints, we have shown that the Post-Newtonian parameter $\gamma_{PN,0}$ must satisfy $\gamma_{PN,0} - 1 \simeq -\omega_{BD,0}^{-1} < 0$, this is a general requirement for the viability of our model. On the other hand, a significantly phantom DE today implies $\beta_{PN,0} > 1$. Combining those results, we find that the negative quantity $\frac{\gamma_{PN,0}-1}{\beta_{PN,0}-1}$ does not depend on F_1 and can be expressed in function of F_2 and $1 + w_{DE,0}$. This would enable us to find F_2 from the Solar System constraints provided we know

$1 + w_{DE,0}$ from other cosmological data. Still for phantom DE today, we find that $\dot{G}_{\text{eff},0}$ has the same sign as F_1 . So, a measurement of the sign of $\dot{G}_{\text{eff},0}$ would give us the sign of F_1 if we know we have $1 + w_{DE,0} < 0$. On the other hand, a measurement of both quantities with opposite signs would rule out phantom DE today though measuring the sign of F_1

would require to go, for example, to the first order in the expansion of ω_{BD} and hence

can be hard to determine observationally. However, due to the already confirmed smallness of F_1 , connection between cosmological and Solar System tests of dark energy is rather one-way since it requires much greater accuracy from the latter ones for the determination whether DE is phantom at present or not. While a positive detection of $\beta_{PN,0} > 1$ is a strong argument for the phantom DE at present, a negative result (no measurable deviation of $\beta_{PN,0}$ from unity) tells us nothing regarding DE properties. Also, the Solar System tests are clearly unable to provide w_1 in any reasonable future, so no information about the possibility of the phantom divide crossing may be expected from them.

We have also considered numerically the reconstruction of F for various w_{DE} , including constant as well as varying equations of state of the phantom type. Generalizing results obtained in [Esposito-Farese 01] for a pure cosmological constant, we find that models with a vanishing potential (see Figure 7.3) are ruled out and lead to a singular behaviour for $z < 0.66$. While it is clearly possible to have phantom DE today with $U = 0$ without conflicting with the data, the cosmological evolution of these models rules them out. For models with constant nonvanishing potentials, which can be considered as a good approximation on small redshifts for more general models with varying potentials, we find that it is easy to have models in agreement with observations on small redshifts $z \lesssim 2$. However, it is interesting that these models generically have a maximal redshift where they become singular. So, to construct a scalar-tensor DE model having a sufficiently long matter-dominated stage, a non-constant potential $U(\Phi)$ is required, and we have presented an example of such a model where DE tracks matter at large redshifts.

Therefore, the final conclusion is that the generic scalar-tensor gravity (7.1) with the two functions $F(\Phi)$ and $U(\Phi)$, derived from some underlying theory (e.g., from brane cosmology) or taken from observational data, has enough power to provide internally consistent cosmological models with a temporarily phantom DE (at present, in particular) and with a regular phantom divide crossing in the course of the evolution of the Universe.

APPENDIX

We summarize in the table below, the integrability of scaling solutions using (31) for several exponents $n \equiv 3\gamma$. We use the following abbreviations :

a.n.i. : analytically non integrable

Elliptic, log, Hypergeo : solutions expressed in terms of resp., elliptic, log (or $\arg \tanh$) and hypergeometric functions

$P^{(n)}(x)$: polynomial in x of degree n

n	< 0	0	1	2	3	4	5	6	7, 8, 9
w	< -1	-1	$-2/3$	$-1/3$	0	$1/3$	$2/3$	1	$2/3, 5/3, 2$
A_0	a.n.i.	Elliptic	Elliptic	log	$-\frac{2}{\sqrt{(1+k)x}}$	$\frac{P^{(1)}(x)}{x\sqrt{k+1/x}}$	Elliptic	Elliptic	Hypergeo
A_1	a.n.i.	log	Elliptic	log	$-\frac{2}{3\sqrt{(1+k)x^3}}$	$\frac{P^{(2)}(x)}{x^2\sqrt{k+1/x}}$	Elliptic	$-\frac{2}{3}\frac{1+kx^3}{\sqrt{x^3+kx^6}}$	Hypergeo
A_4	a.n.i.	log	Elliptic	log	$-\frac{2}{9\sqrt{(1+)x^9}}$	$\frac{P^{(5)}(x)}{x^5\sqrt{k+1/x}}$	Elliptic	$\frac{2}{9}\frac{(1+kx^3)(-1+2kx^3)}{x^3\sqrt{x^3+kx^6}}$	Hypergeo
β_1	a.n.i.	a.n.i.	a.n.i.	a.n.i.	$\frac{1}{3(1+k)x^2}$	$\frac{1}{3x^2} - \frac{4k}{3x}$	a.n.i.	a.n.i.	a.n.i.
β_2	a.n.i.	a.n.i.	a.n.i.	a.n.i.	$\frac{2}{45(1+k)x^5}$	$\frac{2}{45x^5} - \dots + \frac{256k^4}{314x}$	a.n.i.	a.n.i.	a.n.i.

where $A_n \propto \int \frac{dx}{x^n h(x)}$ $\beta_1 \propto \int \frac{dx}{h(x)} \int^x \frac{d\eta}{\eta h(\eta)}$ $\beta_2 \propto \int \frac{dx}{h(x)} \int^x \frac{d\eta}{\eta^4 h(\eta)}$

Théories $f(R)$

Sommaire

8.1	Genèse du modèle	73
8.2	Equations du modèle	74
8.3	Equivalence du modèle	75
8.4	Contraintes observationnelles	76

Nous venons de revoir certaines conséquences de la théorie liée à l'apport d'un champ scalaire couplé au graviton.

Il existe bien d'autres modèles de gravitation modifiée, notamment l'addition de termes de courbure scalaire R dans l'action.

8.1 Genèse du modèle

L'idée originale était de savoir comment ces nouvelles théories pouvaient différer de la relativité générale. Ces modèles ne sont pas récents, déjà en 1919 Weyl [Weyl 19] s'y intéressait. Pour cela il faut abandonner l'idée que la gravitation soit décrite par une équation du second ordre, comme nous le verrons plus loin. Les premières préoccupations n'étaient évidemment pas celle de l'énergie noire, mais des problèmes de quantification de la relativité générale. En effet comme il a été montré notamment par Utiyama et DeWitt [Utiyama 62] puis par 't Hooft et Veltman ['t Hooft 74] la relativité générale apporte différentes divergences dans la tentative de quantification de cette théorie. Ainsi, comme toute théorie des champs, l'ajout de contres termes pourraient éliminer ces divergences. C'est ce qui a été montré à une boucle par l'utilisation en plus dans l'action de termes du second ordre en R , i.e. du quatrième ordre dans la métrique. Sakharov [Sakharov 68] pensait notamment que ces théories pouvaient être perçues comme l'approximation à basse énergie d'une théorie plus fondamentale. Ce sont les mêmes idées que l'on retrouve en théories des cordes où l'on voit apparaître des termes du second ordre à basse énergie [Fradkin 85]. Ainsi de nombreux physiciens en sont arrivés à regarder des termes d'ordre supérieurs. Tout d'abord, ce sont les termes d'ordre deux qui ont été les plus utilisés, cela est dû aux problèmes de renormalisabilité de la théorie évoquée plus haut. La question est alors de savoir quels sont tous les scalaires d'ordre deux non triviaux que l'on peut construire sur une variété riemannienne. La réponse est simple, il s'agit de la courbure scalaire R^2 , de la contraction par lui-même du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ et de la contraction du tenseur de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. Tous les autres scalaires construits à partir de la métrique sont des combinaisons de ces trois termes. On peut alors écrire la nouvelle équation sous la forme

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int \sqrt{-g} [R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}] d^4x + S_{\text{mat}} \quad (8.1)$$

où α, β, γ sont des constantes du modèle.

On retrouve bien dans l'action le premier terme qui correspond à l'action de la relativité générale, ce qui assure la cohérence de la théorie dans la limite Newtonnienne, ainsi que des termes supplémentaires qui peuvent être vus comme des corrections.

Nous savons de plus que pour un espace-temps à quatre dimensions le terme de Gauss est une dérivée totale exacte, i.e.

$$\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} G = \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} [R^2 - 4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}] = 0 \quad (8.2)$$

Ainsi nous pouvons considérer une nouvelle action qui donnera exactement les mêmes équations

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int \sqrt{-g} [R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}] d^4x + S_{\text{mat}} \quad (8.3)$$

Par la suite, en cosmologie un autre problème est apparu, celui de l'inflation. Tout naturellement s'est reposé la question de la modification de la gravitation. De nouveau on a utilisé cette action mais encore simplifiée, en effet les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie de l'univers permettent d'exprimer $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ comme R^2 . L'action se simplifiant pour

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int \sqrt{-g} [R + \alpha R^2] d^4x + S_{\text{mat}} \quad (8.4)$$

Ce modèle a été très étudié puisqu'il permet une phase d'inflation sans le recours d'un champ extérieur : l'inflaton. On trouvera différents travaux de A. Starobinsky [Starobinsky 80] précurseur dans l'étude de ce modèle en cosmologie ainsi qu'une étude très détaillée sur la réussite de cette phase d'inflation [Mijic 86].

On voit donc la richesse de ces modèles qui ont été à de nombreuses reprises utilisés afin de résoudre les problèmes de relativité générale et de cosmologie. Ils sont devenus très fortement à la mode depuis le problème de l'énergie noire. En effet une telle solution de l'origine de l'énergie noire permettrait d'avoir une réponse élégante et sans l'intervention de champs extérieurs dont l'observation pourrait être un problème.

8.2 Equations du modèle

On peut alors généraliser à une fonction quelconque de la courbure scalaire, l'action précédente

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int \sqrt{-g} f(R) d^4x + S_{\text{mat}} \quad (8.5)$$

Une action sous cette forme peut donc être considérée

$$f(R) = \dots + \frac{\alpha_1}{R} - 2\Lambda + R + \frac{R^2}{\alpha_2} + \dots \quad (8.6)$$

et ainsi la relativité générale avec ou sans constante cosmologique ne serait que un cas particulier de tels modèles.

Les équations ont été dérivées pour la première fois par Buchdahl [Buchdahl 70].

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu} \square f'(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (8.7)$$

où

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} S_{\text{mat}} \quad (8.8)$$

Il est à remarquer que la contraction de l'équation (8.7)

$$f'(R) R - 2 f(R) + 3 \square f'(R) = \kappa^2 T \quad (8.9)$$

apporte une relation différentielle entre le tenseur énergie-impulsion et la courbure scalaire contrairement à la relation algébrique que l'on avait dans le cadre de la relativité générale

$$R = -\kappa^2 T \quad (8.10)$$

Ceci peut donc nous faire penser que ces équations apporteront un nombre plus important de solutions. Il est à noter également que le théorème de Birkhoff, qui indique que la solution de Schwarzschild est l'unique solution à symétrie sphérique dans le vide, n'est plus vérifiée. En effet $T = 0$ n'implique plus forcément $R = 0$.

Si l'on regarde les solutions maximales symétriques, i.e. pour R constant et dans le vide, on a

$$f'(R) R = 2 f(R) \quad (8.11)$$

qui est une équation algébrique en R . Ainsi la solution de cette équation nous indiquera si $R = 0$ comme en relativité générale, un espace de de Sitter $R > 0$ ou anti de Sitter $R < 0$, comme un univers en présence d'une constante cosmologique de même signe. Contrairement à la relativité générale sans constante cosmologique, un espace sans matière ne conduit plus à un espace Ricci plat.

Enfin on peut remarquer que le tenseur énergie-impulsion reste conservé comme en relativité générale, en effet on a

$$\nabla^\mu \left[f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu} \square f'(R) \right] = 0 \quad (8.12)$$

ainsi d'après l'équation (8.7)

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (8.13)$$

8.3 Equivalence du modèle

Nous avons étudié dans les chapitres précédents les théories scalaire-tenseur. Les théories $f(R)$ peuvent être vues comme équivalentes à une classe de ces modèles, la théorie de Brans-Dicke. Ceci a souvent été indiqué dans les articles et est l'œuvre de Teyssandier et Tournenc [Teyssandier 83]. Ils ont montré qu'une théorie $f(R)$ peut être vue comme l'addition d'un champ scalaire couplé au graviton. Je ferai la démonstration à partir de l'action :

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int \sqrt{-g} f(R) d^4x + S_{\text{mat}}(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (8.14)$$

Si on définit l'action suivante

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int \sqrt{-g} [f'(\Phi) R + V(\Phi)] d^4x + S_{\text{mat}}(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (8.15)$$

où $V(\Phi) = f(\Phi) - \Phi f'(\Phi)$

La variation de cette action par rapport à la métrique donne

$$f'(\Phi) (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(\Phi) - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(\Phi) + g_{\mu\nu} \square f'(\Phi) = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (8.16)$$

et la variation par rapport à Φ

$$f''(\Phi) (R - \Phi) = 0 \quad (8.17)$$

Cette dernière équation nous indique que si f'' est différent de zéro, i.e. que l'on n'est pas dans le cadre de la relativité générale, alors $R = \Phi$ et l'équation (8.16) redonne l'équation (8.7)

Ainsi la formulation de la théorie par une action définit seulement par une action en R est mathématiquement équivalente à une théorie de Brans-Dicke où $\omega_{BD} = 0$ et le potentiel est imposé par le lagrangien.

Cette équivalence n'est pas à voir comme une équivalence physique, en effet l'interprétation reste différente, mais comme l'existence d'un champ scalaire face à une théorie purement géométrique. Ainsi ces modèles ne sont pas rejetés même si l'on sait que pour une théorie de Brans-Dicke soit valable il faut que $\omega_{BD} > 4 \times 10^4$ alors qu'on a $\omega_{BD} = 0$ pour les théories $f(R)$.

8.4 Contraintes observationnelles

Comme nous l'avons vu plus haut, l'un des modèles étudiés dans les années 80 fut celui proposé par Starobinsky [Starobinsky 80] où l'on définit $f(R) = R + \alpha R^2$. Celui-ci permet d'avoir une phase d'accélération dans l'univers primordial, mais le second terme (αR^2) devient trop petit aujourd'hui, il est alors négligeable et ne contribue plus. En effet la courbure scalaire est en général une fonction décroissante dans le temps. Aujourd'hui nous avons donc $f(R) \simeq R$, soit un univers en expansion décélérée. Ainsi le modèle ne permet pas de décrire l'énergie noire.

Pour cette raison un nouveau modèle a été étudié $f(R) = R - \frac{\mu^{2(n+1)}}{R^n}$ avec $n > 0$. Dans ce cas le second terme ($\frac{\mu^{2(n+1)}}{R^n}$) croît avec le temps et on peut jouer sur le paramètre μ afin que ce terme domine aujourd'hui, ce qui donnerait une phase accélérée.

Il a été montré [Capozziello 93] que pour ce modèle

$$w_{\text{eff}} = -1 + \frac{2(n+2)}{3(2n+1)(n+1)} \quad (8.18)$$

Ainsi pour $n > 1$ $w_{\text{eff}} < -1/3$, on a alors une phase accélérée

On peut également regarder de nombreuses contraintes hormis celles imposées par l'énergie noire.

- Il faut que le modèle puisse reproduire l'évolution de l'univers, avec une ère d'inflation suivie d'une ère de radiation (contraint par la baryogénèse et la nucléosynthèse primordiale), une phase de matière (importante pour la formation des structures) et enfin une accélération récente (contraint par les anisotropies du CMB, les supernovae et les BAO)
- La limite Newtonienne doit pouvoir apporter également des contraintes locales, notamment celles du système solaire

8.4.1 Exemple

Afin d'illustrer l'étude de ce genre de problème, je vais considérer le modèle

$$f(R) = R^n, \quad \text{où } n \text{ est un réel à déterminer} \quad (8.19)$$

Si $n = 1$ on retrouve l'action classique de la relativité générale, sinon on a une déviation de la théorie d'Einstein qu'il faut alors regarder. Les différentes contraintes liées aux observations vont

nous permettre de voir si une simple modification de l'action sans l'ajout d'aucun autre champ extérieur est possible.

Ce modèle n'est pas nécessairement pertinent d'un point de vue physique comme nous allons le voir. Je l'utiliserai seulement afin d'explicitier les différentes contraintes auxquelles on a recourt.

Vitesse de rotation des galaxies

Dans un premier temps, je vais regarder les contraintes apportées par l'observation des vitesses des étoiles dans notre galaxie afin "d'expliquer" la matière noire.

Ainsi on considère une métrique sous la forme

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (8.20)$$

Très classiquement, on choisit

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = 1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2} \quad (8.21)$$

où Φ est le potentiel gravitationnel généré par une masse ponctuelle à une distance r .

On peut écrire ce potentiel comme une déformation du potentiel Newtonien, soit

$$\Phi(r) = -\frac{Gm}{2r} \left(1 + \left(\frac{r}{r_c} \right)^\beta \right) \quad (8.22)$$

Le cas $\beta = 0$ permet de retrouver la solution en relativité générale, i.e. $n = 1$.

Pour les autres solutions, il suffit d'injecter les équations (8.19,8.20,8.21,8.22) dans les équations du champ de la théorie (8.7). On a alors [Capozziello 07a] pour $n \neq 1$

$$\beta = \frac{12n^2 - 7n - 1 - \sqrt{36n^4 + 12n^3 - 83n^2 + 50n + 1}}{6n^2 - 4n + 2} \quad (8.23)$$

Nous n'avons pour l'instant considéré aucune contrainte sur β .

Il suffit d'imposer que le potentiel ne diverge pas à l'infini

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi(r) = 0 \Leftrightarrow \beta < 1 \quad (8.24)$$

De plus on peut imposer que cette variation du potentiel par rapport au potentiel Newtonien soit faible à l'échelle du système solaire. Ce qui impose que $\beta > 0$.

Ainsi on peut regarder la vitesse circulaire v_c d'une particule test soumise à ce champ gravitationnel

$$v_c^2(r) = r \frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm}{2r} \left[1 + (1 - \beta) \left(\frac{r}{r_c} \right)^\beta \right] \quad (8.25)$$

La présence du second terme apporte une déviation par rapport à la relativité générale de la vitesse circulaire d'une particule test. Ainsi dans cette vision, l'observation des vitesses de rotation des galaxies ne seraient pas la preuve de l'existence de halo de matière noire mais simplement d'une

modification de la relativité générale. Ce résultat (8.25) est vraie pour le cas d'une masse ponctuelle. Il fut généralisé [Capozziello 07a] pour une distribution de masse quelconque. Ce qui permet de contraindre alors β et donc n par l'observation des vitesses des galaxies.

Evolution dynamique

Le calcul du potentiel gravitationnel permet de contraindre les paramètres du problème (n dans ce cas) à l'aide des observations locales, notamment celles du système solaire.

On peut regarder également les contraintes à grande échelle, existence de l'énergie noire ainsi que l'évolution de l'univers, i.e. sa dynamique.

Cette étude a été faite par [Amendola 07a], je vais développer un exemple d'étude. Supposons $n = 2$, soit $f(R) = R^2$.

Soit un espace-temps plat de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\mathbf{x}^2 \quad (8.26)$$

Ainsi les équations de Friedmann s'écrivent

$$6H^2 R = \kappa^2 (\rho_m + \rho_{\text{rad}}) + \frac{1}{2} R^2 - 6H\dot{R} \quad (8.27)$$

$$-4\dot{H}R = \kappa^2 \left(\rho_m + \frac{4}{3}\rho_{\text{rad}} \right) - 2H\dot{R} + 2\ddot{R} \quad (8.28)$$

où $\dot{}$ correspond à une dérivation par rapport au temps.

De plus nous avons l'équation de conservation (8.13) qui implique

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0 \quad (8.29)$$

$$\dot{\rho}_{\text{rad}} + 4H\rho_{\text{rad}} = 0 \quad (8.30)$$

Il est intéressant de travailler avec de nouvelles variables sans dimension [Amendola 07a].

$$x_1 = -\frac{1}{H} \frac{\dot{R}}{R} \quad (8.31)$$

$$x_2 = -\frac{R}{12H^2} \quad (8.32)$$

$$x_3 = \kappa^2 \frac{\rho_{\text{rad}}}{6H^2 R} \quad (8.33)$$

Ainsi à l'aide de l'équation (8.27) on a

$$\Omega_m \equiv \kappa^2 \frac{\rho_m}{6H^2 R} = 1 - x_1 + x_2 - x_3 \quad (8.34)$$

Nous avons les équations différentielles suivantes pour les variables $\{x_1, x_2, x_3\}$

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dN} &= -1 + x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2 + x_3 \\
\frac{dx_2}{dN} &= -x_1x_2 + 4x_2(1 + x_2) \\
\frac{dx_3}{dN} &= x_3(x_1 + 4x_2)
\end{aligned} \tag{8.35}$$

avec $N = \ln a$

Il s'agit d'un système différentiel de trois équations à trois inconnues. Pour le résoudre, il faut se placer dans l'espace des phases construit par les coordonnées $\{x_1, x_2, x_3\}$. On recherche les points stationnaires de ce système, i.e. les points pour lesquels $dx_i/dN = 0$. Soit $\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\}$ les coordonnées de ces points.

$$P_1 : (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (-1, 0, 0), \quad \Omega_m = 2, \quad w_{\text{eff}} = 1/3 \tag{8.36}$$

$$P_2 : (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (1, 0, 0), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = 1/3 \tag{8.37}$$

$$P_3 : (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0, 0, 1), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = 1/3 \tag{8.38}$$

$$P_4 : (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0, -1, 0), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = -1 \tag{8.39}$$

$$P_5 : (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{8}, 0\right), \quad \Omega_m = -\frac{9}{8}, \quad w_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \tag{8.40}$$

$$P_6 : (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = \left(2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = -\frac{1}{3} \tag{8.41}$$

Chacun de ces points représentent un univers dans cet espace des phases. Ainsi le point P_3 représente un univers dominé par de la radiation puisque $x_3 = \Omega_{\text{rad}} = 1$ et $w_{\text{eff}} = 1/3$, le point P_4 est un univers de de Sitter, etc ...

La solution de notre système (8.35) est une courbe dans cet espace des phases. Cette courbe représente alors les différentes étapes de l'évolution de notre univers. Pour que l'univers ait une phase de radiation il faut que la trajectoire passe près du point P_3 . On peut alors facilement suivre les différentes ères de notre univers.

Il nous faut maintenant regarder le comportement au voisinage de ces différents points. En effet il est important de savoir si ce sont des attracteurs, des nœuds instables ou des points selles afin de connaître l'évolution de notre univers.

Pour cela il suffit de se placer au voisinage de ces points

$$x_i = x_i^{(0)} + x_i^{(1)} \tag{8.42}$$

et de linéariser notre système (8.35).

$$\frac{d}{dN} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1^{(0)} + 2x_2^{(0)} & 2x_1^{(0)} - 1 & 1 \\ -x_2^{(0)} & 4 - x_1^{(0)} + 8x_2^{(0)} & 0 \\ x_3^{(0)} & 4x_3^{(0)} & x_1^{(0)} + 4x_2^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} \tag{8.43}$$

Les calculs ont été fait dans [Amendola 07a], afin de simplifier les calculs je vais considérer l'univers après l'ère de radiation. Ainsi $x_3 = \Omega_{\text{rad}}$ est négligeable. On se situe alors dans le sous-espace $\{x_1, x_2\}$ définie par $x_3 = 0$. Il ne nous reste plus que quatre points

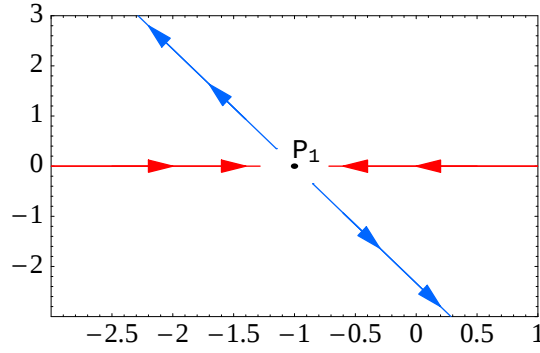


FIG. 8.1 – On voit deux directions privilégiées autour de P_1 dans le plan $\{x_1, x_2\}$. En bleue, la direction instable et en rouge, la direction stable

$$P_1 : (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (-1, 0), \quad \Omega_m = 2, \quad w_{\text{eff}} = 1/3 \quad (8.44)$$

$$P_2 : (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (1, 0), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = 1/3 \quad (8.45)$$

$$P_4 : (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (0, -1), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = -1 \quad (8.46)$$

$$P_5 : (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{8}\right), \quad \Omega_m = -\frac{9}{8}, \quad w_{\text{eff}} = -1/2 \quad (8.47)$$

Le système (8.43) doit-être résolu pour chaque point P_i . A titre d'exemple je vais exposer les résultats pour le point $P_1 : (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (-1, 0)$ (Pour plus d'informations se reporter à l'annexe B)

Ainsi on a

$$\frac{d}{dN} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (8.48)$$

Deux directions apparaissent naturellement, elles correspondent aux vecteurs propres de notre système.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (8.49)$$

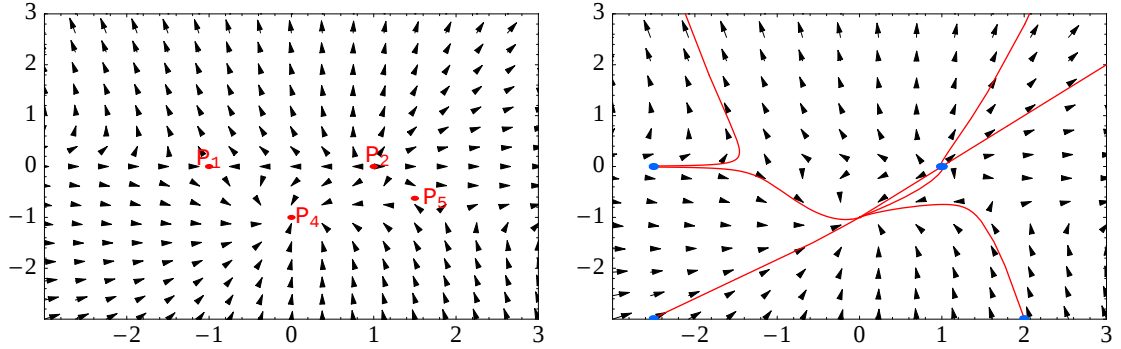
Elles sont respectivement associées aux valeurs propres -2 (nœud stable) et $+5$ (nœud instable). Ainsi le point P_1 est un col puisqu'il possède une direction stable et une autre instable. Ceci peut être résumé par le schéma suivant (voir Fig. 8.1).

Ce travail doit-être fait pour les autres points (voir Tab. 8.1).

On voit (Fig. 8.2) que selon les conditions initiales de notre univers, i.e. les valeurs de $\{x_1, x_2\}$, on est soit attiré vers le point P_4 , un univers de Sitter, soit le système est dans une zone où le point instable "pousse" la solution vers l'infini, on a alors des divergences. Dans ce cas le système n'est pas physique.

Notre espace des phases $\{x_1, x_2\}$ peut être séparé en deux parties (Fig. 8.3). L'une d'elle contient un attracteur soit une évolution de l'univers vers une phase accélérée (de Sitter), alors que l'autre est instable. Ce partage est particulièrement important puisqu'il conditionne le destin à long terme des trajectoires issues de conditions initiales quelconques. L'extrapolation de ces trajectoires en régime non-linéaire, i.e. loin du point fixe, conduit à la définition de *variétés stables* et *instables*. Ces variétés

Point	Valeurs propres	Vecteurs propres	Genre
P_1	$\{-2, +5\}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$	Col
P_2	$\{+3, +2\}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	Nœud instable
P_4	$\{-3, -3\}$	Toutes directions	Etoile stable
P_5	$\{-\frac{3}{8}(1 + \sqrt{41}), -\frac{3}{8}(1 - \sqrt{41})\}$	$\begin{pmatrix} 17 - 3\sqrt{41} \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 + 3\sqrt{41} \\ 5 \end{pmatrix}$	Col

TAB. 8.1 – Caractéristiques des différents points dans le sous espace $x_3 = 0$ FIG. 8.2 – Il y a pour ce système un nœud instable, deux points col et une étoile stable. A gauche on retrouve en rouge les quatre points de notre système. A droite quelques solutions du système (8.35) dans le sous-espace $x_3 = 0$, les points bleus représentent les conditions initiales.

sont formées des ensembles de trajectoires tangentes aux sous-espaces propres stables (v.p. négatives) et instables (v.p. positives).

Pour ce système, la détermination du bassin d'attraction était trivial, mais le principe reste toujours le même. On voit clairement que pour un grand nombre de conditions initiales (dans le bassin stable), l'univers va évoluer vers un espace de de Sitter. Soit une phase d'expansion accélérée avec $w = -1$ (c'est le point P_4).

Pour finir on voit que ce système possède un point correspondant à une ère de radiation P_3 , une ère d'énergie noire P_4 mais il n'y a pas de phase de matière. Le point P_1 aurait pu correspondre à un univers dominé par de la poussière $\Omega_m \neq 0$ mais il a une évolution non standard $a(t) \propto t^{1/2}$. Il s'agit de la ϕ MDE [Amendola 07b].

Il s'agit d'un modèle où l'univers a une ère de radiation suivie d'une phase dominée par la ϕ MDE et enfin une phase d'expansion accélérée. La non-présence de la phase de matière en fait un modèle non physique.

Si le modèle avait été viable on pourrait alors encore rajouter toutes les contraintes classiques liés aux supernovae, aux BAO et aux anisotropies du CMB. Ce que je ne ferai pas ici puisque l'on connaît la méthode (voir premier chapitre).

Nous avons ainsi développé dans l'article qui suit la méthode générale afin d'étudier les modèles $f(R)$ et notamment l'existence ou non d'une phase de matière. Ceci nous a permis de rejeter de très nombreux modèles jusque là étudiés par de très nombreux chercheurs.

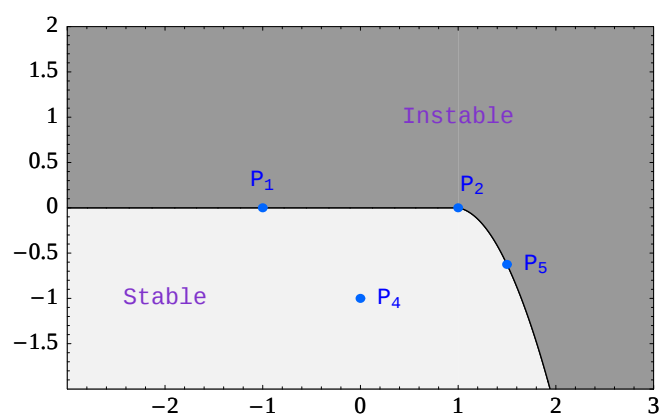


FIG. 8.3 – Portrait de phase du système. On voit les variétés stables et instables des différents points fixes. En gris clair, le bassin d'attraction du nœud stable P_4 et en gris foncé la variété instable.

Conditions for the cosmological viability of $f(R)$ dark energy models

L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski, S. Tsujikawa

Sommaire

9.1	Introduction	84
9.2	$f(R)$ dark energy models	86
9.3	Cosmological dynamics of $f(R)$ gravity models	89
9.4	Four classes of Models	94
9.5	Specific models : analytical results	98
9.6	Specific cases : Numerical results	104
9.7	Conclusions	110

We derive the conditions under which dark energy models whose Lagrangian densities f are written in terms of the Ricci scalar R are cosmologically viable. We show that the cosmological behavior of $f(R)$ models can be understood by a geometrical approach consisting in studying the $m(r)$ curve on the (r, m) plane, where $m \equiv Rf_{,RR}/f_{,R}$ and $r \equiv -Rf_{,R}/f$ with $f_{,R} \equiv df/dR$. This allows us to classify the $f(R)$ models into four general classes, depending on the existence of a standard matter epoch and on the final accelerated stage. The existence of a viable matter dominated epoch prior to a late-time acceleration requires that the variable m satisfies the conditions $m(r) \approx +0$ and $dm/dr > -1$ at $r \approx -1$. For the existence of a viable late-time acceleration we require instead either (i) $m = -r - 1$, $(\sqrt{3} - 1)/2 < m \leq 1$ and $dm/dr < -1$ or (ii) $0 \leq m \leq 1$ at $r = -2$. These conditions identify two regions in the (r, m) space, one for the matter era and the other for the acceleration. Only models with a $m(r)$ curve that connects these regions and satisfy the requirements above lead to an acceptable cosmology. The models of the type $f(R) = \alpha R^{-n}$ and $f = R + \alpha R^{-n}$ do not satisfy these conditions for any $n > 0$ and $n < -1$ and are thus cosmologically unacceptable. Similar conclusions can be reached for many other examples discussed in the text. In most cases the standard matter era is replaced by a cosmic expansion with scale factor $a \propto t^{1/2}$. We also find that $f(R)$ models can have a strongly phantom attractor but in this case there is no acceptable matter era.

Publié dans Phys.Rev. D75 (2007) 083504

9.1 Introduction

The late-time accelerated expansion of the universe is a major challenge to present-day cosmology (see Refs. [Sahni 00, Carroll 01, Padmanabhan 03, Peebles 03, Sahni 04, Copeland 06] for review). A consistent picture, the concordance model, seems to emerge from the bulk of observations probing the background evolution of the universe as well as its inhomogeneities : Supernovae Ia [Perlmutter 99b, Riess 98, Riess 99, Tonry 03, Knop 03], Cosmic Microwave Background anisotropies (CMB) [Spergel 03, Spergel 07], Large Scale Structure formation (LSS) [Tegmark 04, Seljak 05], baryon oscillations [Eisenstein 05, Blake 06], weak lensing [Jain 03], etc. If one assumes today a flat universe with a cosmological constant Λ and with pressureless matter, observations suggest the following cosmological parameters $\Omega_{\Lambda,0} \approx 0.7$, $\Omega_{m,0} \approx 0.3$ where $\Omega_{X,0} = \rho_{X,0}/\rho_{cr,0}$ for any component X , where the subscript 0 stands for present-day values and ρ_{cr} is the critical density of the universe.

A cosmological constant term is the simplest possibility to explain the observational data. In fact the recent data analysis [Seljak 06] combining the SNLS data [Astier 06] with CMB, LSS and the Lyman- α forest shows that, *assuming* w_{DE} is constant the equation of state parameter of Dark Energy (DE) is found to be $w_{DE} = -1.04 \pm 0.06$ and therefore consistent with a cosmological constant. However a cosmological constant suffers from an extreme fine-tuning problem of its energy scale if it originates from vacuum energy. For this reason several works have explored alternative explanations, i.e., dynamical forms of dark energy. In the absence of any compelling dynamical dark energy model, further insight can be gained by considering general models with constant equation of state or some fiducial parametrization, see e.g. [Chevallier 01], and [Sahni 06] for a recent review.

The first alternative possibility to a cosmological constant is a minimally coupled scalar field ϕ , usually called quintessence [Fujii 82, Ford 87, Wetterich 88, Ratra 88, Fujii 90, Wands 93, Wetterich 95, Ferreira 97, Ferreira 98, Caldwell 98, Zlatev 99, Steinhardt 99]. In analogy with inflationary scenarios, this scalar field would be responsible for a stage of accelerated expansion while in contrast to inflation this stage occurs in the late-time evolution of the universe. The energy density of the scalar field should therefore come to dominate over other components in the universe only recently. This is the so called cosmic coincidence problem faced by most dark energy models. In order to alleviate this problem various generalizations have been considered, like coupled quintessence models [Amendola 00, Amendola 01, Amendola 03] in which matter and dark energy scale in the same way with time during some epochs. It is however still a challenging task to construct viable scaling models which give rise to a matter-dominated era followed by an accelerated scaling attractor [Amendola 06].

An important limitation of standard quintessence models is that they do not allow for a phantom regime with $w_{DE} < -1$. A phantom regime is allowed by observations and even favored by some analysis of the data [Melchiorri 03, Alam 04a, Bassett 04]. To achieve $w_{DE} < -1$, the scalar field should be endowed with a generalized kinetic term, for instance one with a sign opposite to the canonical one [Caldwell 02, Caldwell 03, Carroll 03, Singh 03]. This intriguing possibility is however plagued by quantum instabilities [Cline 04, Arkani-Hamed 04, Piazza 04]. A further interesting possibility is provided by non-minimally coupled scalar fields [Uzan 99, Amendola 99a, Chiba 99] and scalar-tensor cosmology [Fujii 00, Bartolo 00, Riazuelo 02, Perrotta 00, Esposito-Farese 01]. Scalar-tensor DE models can have a consistent phantom regime and a modified growth rate of structure [Boisseau 00], see also [Gannouji 06] for a systematic study of the low redshift structure of such theories including a detailed analysis of the possibility to have a phantom regime and the constraints from local gravity tests, and [Perivolaropoulos 05, Nesseris 07] for some concrete examples of this scenario. In scalar-tensor DE models gravity is modified by an additional dynamical degree of freedom, the scalar partner of the graviton.

Recently there has been a burst of activity dealing with so-called modified gravity DE models (see Ref. [Copeland 06] for recent review and references therein). In these theories one modifies the laws of gravity whereby a late-time accelerated expansion is produced without recourse to a DE component,

a fact which renders these models very attractive. In some models one can have in addition a phantom regime, which might constitute an interesting feature.

The simplest family of modified gravity DE models is obtained by replacing the Ricci scalar R in the usual Hilbert-Einstein Lagrangian density for some function $f(R)$. In the first models proposed in DE literature, where a term $1/R$ is added to R [Capozziello 03, Carroll 04], one typically expects that as the universe expands the inverse curvature term will dominate and produce the desired late-time accelerated expansion (see Ref. [Capozziello 93] for a pioneering work in the context of inflation). However it was quickly realized that local gravity constraints would make these models non viable [Chiba 03] (see also Ref. [Dolgov 03]). Indeed, it was shown that $f(R)$ models are formally equivalent to scalar-tensor models with a vanishing Brans-Dicke parameter $\omega_{\text{BD}} = 0$. Clearly such models do not pass local gravity (solar system) constraints, in particular the post Newtonian parameter γ_{PPN} satisfies $\gamma_{\text{PPN}} = 1/2$ instead of being very close to 1 as required by observations.

However, the question of whether local gravity constraints rule out or not $f(R)$ models does not seem to be completely settled in the literature [Faraoni 06b]. Several papers pointed out that local gravity constraints cannot yet rule out all possible forms of $f(R)$ theories. For instance, a model containing a particular combination of $1/R$ and R^2 terms was suggested [Nojiri 03] and claimed by their authors to pass successfully the solar system constraints, due to a large (infinite) effective mass needed to satisfy solar system constraints, and *also* to produce a late-time accelerated expansion (though this latter property does not seem to have been demonstrated in a satisfactory way). Another original approach with negative and positive power terms was suggested recently where the positive power term would dominate on small scales while the negative power term dominates on large cosmic scales thereby producing the accelerated expansion [Brookfield 06] (see however [Navarro 07]). See Refs. [Perrotta 02, Nojiri 04, Soussa 04, Allemandi 04, Easson 04, Carroll 05b, Carloni 05, Capozziello 05, Cognola 05, Nojiri 05, Nojiri 07, Woodard 07, Das 06, Capozziello 06a, Srivastava 06, Sotiriou 06b, Sotiriou 07a, Sotiriou 06a, Sotiriou 07b, De Felice 06, Nojiri 06, de la Cruz-Dombriz 06, Bludman 06, Carroll 06, Huterer 07, Jin 06, Poplawski 06, Poplawski 07, Zakharov 06, Faraoni 06a, Chiba 07a, Kahya 07, Fay 07b, Fairbairn 07, Cognola 07, Li 07, Rador 07, Sawicki 07, Fay 07a, Faraoni 07] for a list of recent research in $f(R)$ dark energy models. If $f(R)$ models are not ruled out by local gravity constraints it is important to understand their cosmological properties.

Recently three of the present authors [Amendola 07b] have shown that the large redshift behavior of $f(R) = R + \alpha R^{-n}$ models generically lead to the “wrong” expansion law : indeed, the usual matter era preceding the late-time accelerated stage does not have the usual $a \propto t^{2/3}$ behavior but rather $a \propto t^{1/2}$ which would obviously make these models cosmologically unacceptable. This intriguing and quite unexpected property of these $f(R)$ models was overlooked in the literature. The absence of the standard matter epoch is associated with the fact that in the Einstein frame non-relativistic matter is strongly coupled to gravity except for the $f(R)$ theories which have a linear dependence of R (including the Λ CDM model : $f(R) = R - \Lambda$) [Amendola 07b].

In the Einstein frame the power-law models $f(R) \propto R^{-n}$ ($n \neq -1$) correspond to a coupled quintessence scenario with an exponential potential of a dynamical scalar field. In this case the standard matter era is replaced by a “ ϕ matter-dominated epoch” (ϕ MDE) in which the scale factor in the Einstein frame evolves as $a_E \propto t_E^{3/5}$ [Amendola 07b]. Transforming back to the Jordan frame, this corresponds to a non-standard evolution $a \propto t^{1/2}$. We wish to stress here that cosmological dynamics obtained in the Jordan frame exhibits no difference from the one which is transformed to the Einstein frame and transformed back to the original frame. Hence in this paper we shall focus on the analysis in the Jordan frame without referring to the Einstein frame.

This paper is devoted to explaining in detail our previous result and, more importantly, to extend it to all well-behaved $f(R)$ Lagrangians. Despite almost thirty years of work on the cosmology of $f(R)$ models, there are in fact no general criteria in literature to gauge their validity as alternative cosmological models (see Ref. [Barrow 83] for one of the earliest attempt in this direction). We find the general

conditions for a $f(R)$ theory to contain a standard matter era followed by an accelerated attractor in a spatially flat, homogeneous and isotropic background. The only conditions we assume throughout this paper, beside obviously a well-behaved function $f(R)$ continuous with all its derivatives, is that $df/dR > 0$, to maintain a positive effective gravitational constant in the limit of vanishing higher-order term. In some cases however we consider $f(R)$ models which violate this condition in some range of R , but not on the actual cosmological trajectories. The main result of this paper is that we are able to show analytically and numerically that all $f(R)$ models with an accelerated global attractor belong to one of four classes :

- Class I : Models of this class possess a peculiar scale factor behavior ($a \propto t^{1/2}$) just before the acceleration.
- Class II : Models of this class have a matter epoch and are asymptotically equivalent to (and hardly distinguishable from) the Λ CDM model ($w_{\text{eff}} = -1$).
- Class III : Models of this class can possess an approximate matter era but this is a transient state which is rapidly followed by the final attractor. Technically, the eigenvalues of the matter saddle point diverge and is very difficult to find initial conditions that display the approximated matter epoch.
- Class IV : Models of this class behave in an acceptable way. They possess an approximate standard matter epoch followed by a non-phantom acceleration ($w_{\text{eff}} > -1$).

We can then summarize our findings by saying that $f(R)$ dark energy models are either wrong (Class I), or asymptotically de-Sitter (Class II), or strongly phantom (Class III) or, finally, standard DE (Class IV). The second and fourth classes have some chance to be cosmologically acceptable, but even for these cases it is not an easy task to identify the basin of attraction of the acceptable trajectories. We fully specify the conditions under which any given $f(R)$ model belongs to one of the classes above and discuss analytically and numerically several examples belonging to all classes.

An important clarification is here in order. It is clear that $f(R)$ gravity models can be perfectly viable in different contexts. The most famous example is provided by Starobinsky's model, $f(R) = R + \alpha R^2$ [Starobinsky 80], which has been the first internally consistent inflationary model. In this model, the R^2 term produces an accelerated stage in the early universe *preceding* the usual radiation and matter stages. A late-time acceleration in this model (after the matter dominated stage) requires a positive cosmological constant (or some other form of dark energy) in which case the R^2 term is no longer responsible for the late-time acceleration.

Our paper is organized in the following way. Section 9.2 contains the basic equations in the Jordan frame and introduces autonomous equations which are applicable to any forms of $f(R)$. In Sec. 9.3 we derive fixed points together with their stabilities and present the conditions for viable $f(R)$ DE models. In Sec. 9.6 we classify $f(R)$ DE models into four classes depending upon the cosmological evolution which gives the late-time acceleration. In Sec. 9.5 we shall analytically show the cosmological viability for some of the $f(R)$ models by using the conditions found in Sec. 9.3. Section 9.6 is devoted to a numerical analysis for a number of $f(R)$ models to confirm the analytical results presented in the previous section. Finally we summarize our results in Section 9.7. We will always work in the Jordan frame, in order to show the properties of $f(R)$ models in the most direct way, without the need to convert back from the Einstein frame.

9.2 $f(R)$ dark energy models

9.2.1 Definitions and equations

In this section we derive all basic equations in the Jordan frame (JF), the frame in which observations are performed. We will further define all fundamental quantities characterizing our system, in

particular the equation of state of our system. Actually, as we will see below this is a subtle issue and we have to *define* what is meant by the Dark Energy (DE) equation of state.

We concentrate on spatially flat Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) universes with a time-dependent scale factor $a(t)$ and a metric

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\mathbf{x}^2. \quad (9.1)$$

For this metric the Ricci scalar R is given by

$$R = 6 \left(2H^2 + \dot{H} \right), \quad (9.2)$$

where $H \equiv \dot{a}/a$ is the Hubble rate and a dot stands for a derivative with respect to t .

We start with the following action in the JF

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} f(R) + \mathcal{L}_{\text{rad}} + \mathcal{L}_{\text{m}} \right], \quad (9.3)$$

where $\kappa^2 = 8\pi G$ while G is a bare gravitational constant, $f(R)$ is some arbitrary function of the Ricci scalar R , and $\mathcal{L}_{\text{m}}$ and $\mathcal{L}_{\text{rad}}$ are the Lagrangian densities of dust-like matter and radiation respectively. Note that G is typically *not* Newton's gravitational constant measured in the attraction between two test masses in Cavendish-type experiments (see e.g. [Esposito-Farese 01]). Then the following equations are obtained [Hwang 91]

$$3FH^2 = \kappa^2 (\rho_{\text{m}} + \rho_{\text{rad}}) + \frac{1}{2}(FR - f) - 3H\dot{F}, \quad (9.4)$$

$$-2F\dot{H} = \kappa^2 \left(\rho_{\text{m}} + \frac{4}{3}\rho_{\text{rad}} \right) + \ddot{F} - H\dot{F}, \quad (9.5)$$

where

$$F \equiv \frac{df}{dR}. \quad (9.6)$$

In standard Einstein gravity ($f = R$) one has $F = 1$. In what follows we shall consider the positive-definite forms of F to avoid a singularity at $F = 0$. The densities ρ_{m} and ρ_{rad} satisfy the usual conservation equations

$$\dot{\rho}_{\text{m}} + 3H\rho_{\text{m}} = 0, \quad (9.7)$$

$$\dot{\rho}_{\text{rad}} + 4H\rho_{\text{rad}} = 0. \quad (9.8)$$

We note that Eqs. (9.4) and (9.5) are similar to those obtained for scalar-tensor gravity [Boisseau 00] with a vanishing Brans-Dicke parameter $\omega_{\text{BD}} = 0$ and a specific potential $U = (FR - f)/2$. Note that in scalar-tensor gravity we have $FR = L$ so that this term vanishes, while Eq. (9.5) is similar except for the fact that a kinematic term of the scalar field is absent. Hence we can define the DE equation of state in a way similar to that in scalar-tensor theories of gravity (see e.g., [Gannouji 06, Torres 02]). With a straightforward redefinition of the quantities, we rewrite Eqs. (9.4) and (9.5) as follows

$$3F_0 H^2 = \kappa^2 (\rho_{\text{DE}} + \rho_{\text{m}} + \rho_{\text{rad}}), \quad (9.9)$$

$$-2F_0 \dot{H} = \kappa^2 \left(\rho_{\text{m}} + \frac{4}{3}\rho_{\text{rad}} + \rho_{\text{DE}} + p_{\text{DE}} \right). \quad (9.10)$$

We then have the following equalities

$$\kappa^2 \rho_{\text{DE}} = \frac{1}{2}(FR - f) - 3H\dot{F} + 3H^2(F_0 - F), \quad (9.11)$$

$$\kappa^2 p_{\text{DE}} = \ddot{F} + 2H\dot{F} - \frac{1}{2}(FR - f) - (2\dot{H} + 3H^2)(F_0 - F). \quad (9.12)$$

The energy density ρ_{DE} and the pressure density p_{DE} of DE defined in this way satisfy the usual conservation equation

$$\dot{\rho}_{\text{DE}} = -3H(\rho_{\text{DE}} + p_{\text{DE}}). \quad (9.13)$$

Hence the equation of state parameter w_{DE} defined through

$$w_{\text{DE}} \equiv \frac{p_{\text{DE}}}{\rho_{\text{DE}}} = -1 + \frac{2\ddot{F} - 2H\dot{F} - 4\dot{H}(F_0 - F)}{(FR - f) - 6H\dot{F} + 6H^2(F_0 - F)}, \quad (9.14)$$

acquires its usual physical meaning, in particular the time evolution of the DE sector is given by

$$\frac{\rho_{\text{DE}}(z)}{\rho_{\text{DE},0}} = \exp \left[3 \int_0^z dz' \frac{1 + w_{\text{DE}}(z')}{1 + z'} \right], \quad (9.15)$$

where $z \equiv a_0/a - 1$. Note that the subscript “0” stands for present values. It is ρ_{DE} , as defined in Eq. (9.11) which is the quantity extracted from the observations and w_{DE} the corresponding DE equation of state parameter for which specific parametrizations are used.

Looking at Eqs. (9.9), one could introduce the cosmological parameters $\tilde{\Omega}_X = \kappa^2 \rho_X / (3F_0 H^2)$ [Gannouji 06, Torres 02]. However here it turns out to be more convenient to work with the density parameters

$$\Omega_X \equiv \frac{\kappa^2 \rho_X}{3FH^2}, \quad (9.16)$$

where $X = \text{m, rad or DE}$. The quantity w_{DE} can further be obtained directly from the observations

$$w_{\text{DE}} = \frac{(1+z) dh^2/dz - 3h^2 - \Omega_{\text{rad},0}(1+z)^4}{3[h^2 - \Omega_{\text{m},0}(1+z)^3 - \Omega_{\text{rad},0}(1+z)^4]}, \quad (9.17)$$

where $h \equiv H/H_0$. In the low-redshift region where the contribution of the radiation is negligible, we have

$$w_{\text{DE}} = \frac{(1+z) dh^2/dz - 3h^2}{3[h^2 - \Omega_{\text{m},0}(1+z)^3]}, \quad z \ll z_{\text{eq}}, \quad (9.18)$$

where z_{eq} is the redshift at which dust and radiation have equal energy densities. Equation (9.17) can be extended for spatially non-flat universes [Polarski 05] but we restrict ourselves to spatially flat universes. We also define the effective equation of state

$$w_{\text{eff}} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}. \quad (9.19)$$

Note that the following equality holds

$$w_{\text{eff}} = \tilde{\Omega}_{\text{DE}} w_{\text{DE}} + \frac{1}{3} \tilde{\Omega}_{\text{rad}}, \quad (9.20)$$

if we define $\tilde{\Omega}_X = \kappa^2 \rho_X / (3F_0 H^2)$.

9.2.2 Autonomous equations

For a general $f(R)$ model it will be convenient to introduce the following (dimensionless) variables

$$x_1 = -\frac{\dot{F}}{HF}, \quad (9.21)$$

$$x_2 = -\frac{f}{6FH^2}, \quad (9.22)$$

$$x_3 = \frac{R}{6H^2} = \frac{\dot{H}}{H^2} + 2, \quad (9.23)$$

$$x_4 = \frac{\kappa^2 \rho_{\text{rad}}}{3FH^2}. \quad (9.24)$$

From Eq. (9.4) we have the algebraic identity

$$\Omega_m \equiv \frac{\kappa^2 \rho_m}{3FH^2} = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4. \quad (9.25)$$

It is then straightforward to obtain the following equations of motion

$$\frac{dx_1}{dN} = -1 - x_3 - 3x_2 + x_1^2 - x_1x_3 + x_4, \quad (9.26)$$

$$\frac{dx_2}{dN} = \frac{x_1x_3}{m} - x_2(2x_3 - 4 - x_1), \quad (9.27)$$

$$\frac{dx_3}{dN} = -\frac{x_1x_3}{m} - 2x_3(x_3 - 2), \quad (9.28)$$

$$\frac{dx_4}{dN} = -2x_3x_4 + x_1x_4, \quad (9.29)$$

where N stands for $\ln a$ and

$$m \equiv \frac{d \log F}{d \log R} = \frac{Rf_{,RR}}{f_{,R}}, \quad (9.30)$$

$$r \equiv -\frac{d \log f}{d \log R} = -\frac{Rf_{,R}}{f} = \frac{x_3}{x_2}, \quad (9.31)$$

where $f_{,R} \equiv df/dR$ and $f_{,RR} \equiv d^2f/dR^2$. Deriving R as a function of x_3/x_2 from Eq. (9.31), one can express m as a function of x_3/x_2 and obtain the function $m(r)$. For the power-law model with $f(R) = \alpha R^{-n}$ the variable m is a constant ($m = -n - 1$) with $r = n = x_3/x_2$. In this case the system reduces to a 3-dimensional one with variables x_1 , x_2 and x_4 . However for general $f(R)$ gravity models the variable m depends upon r .

We also make use of these expressions :

$$w_{\text{eff}} = -\frac{1}{3}(2x_3 - 1), \quad (9.32)$$

$$w_{\text{DE}} = \frac{1}{3} \frac{1 - x_4y - 2x_3}{1 - y(1 - x_1 - x_2 - x_3)}, \quad (9.33)$$

where $y = F/F_0$.

9.3 Cosmological dynamics of $f(R)$ gravity models

In this section we derive the analytical properties of the phase space.

9.3.1 Critical points and stability for a general $f(R)$

In the absence of radiation ($x_4 = 0$) the critical points for the system (9.26)-(9.28) for any $m(r)$ are

$$\begin{aligned} P_1 : (x_1, x_2, x_3) &= (0, -1, 2), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = -1, \\ P_2 : (x_1, x_2, x_3) &= (-1, 0, 0), \quad \Omega_m = 2, \quad w_{\text{eff}} = 1/3, \\ P_3 : (x_1, x_2, x_3) &= (1, 0, 0), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = 1/3, \\ P_4 : (x_1, x_2, x_3) &= (-4, 5, 0), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = 1/3, \\ P_5 : (x_1, x_2, x_3) &= \left(\frac{3m}{1+m}, -\frac{1+4m}{2(1+m)^2}, \frac{1+4m}{2(1+m)} \right), \quad \Omega_m = 1 - \frac{m(7+10m)}{2(1+m)^2}, \quad w_{\text{eff}} = -\frac{m}{1+m}, \\ P_6 : (x_1, x_2, x_3) &= \left(\frac{2(1-m)}{1+2m}, \frac{1-4m}{m(1+2m)}, -\frac{(1-4m)(1+m)}{m(1+2m)} \right), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = \frac{2-5m-6m^2}{3m(1+2m)}, \end{aligned}$$

where here $\Omega_m = 1 - x_1 - x_2 - x_3$.

The points P_5 and P_6 satisfy the equation $x_3 = -(m(r) + 1)x_2$, i.e.,

$$m(r) = -r - 1. \quad (9.34)$$

When $m(r)$ is not a constant, one must solve this equation. For each root r_i one gets a point of type P_5 or P_6 with $m = m(r_i)$. For instance, the $f(R) = R + \alpha R^{-n}$ model corresponds to $m(r) = -n(1+r)/r$ as we will see later, which then gives $r_{1,2} = -1, n$ and $m_{1,2} = 0, -1-n$. If we assume that $m = \text{constant}$ then the condition $x_3 = -(m+1)x_2$ must hold from Eqs. (9.30) and (9.31). Hence for $m = \text{constant}$ the points $P_{2,3,5,6}$ always exist, while P_1 and P_4 are present for $m = 1$ and $m = -1$ respectively. The solutions which give the exact equation of state of a matter era ($w_{\text{eff}} = 0$, i.e., $a \propto t^{2/3}$ or $x_3 = 1/2$) exist only for $m = 0$ (P_5) or for $m = -(5 \pm \sqrt{73})/12$ (P_6) [Capozziello 06b]. However the latter case corresponds to $\Omega_m = 0$, so this does not give a standard matter era dominated by a non-relativistic fluid [Amendola 07c].

If $m(r)$ is not constant then there can be any number of distinct solutions, although only P_1 and those originating from $P_{5,6}$ can be accelerated and only P_2 and P_5 might give rise to matter eras. However P_2 corresponds to $w_{\text{eff}} = 1/3$ and therefore is ruled out as a correct matter era : this is in fact the $a \propto t^{1/2}$ behavior discussed in Ref. [Amendola 07b] (and denoted as ϕ MDE since it is in fact a field-matter dominated epoch in the Einstein frame). On the contrary, P_5 resembles a standard matter era, but only for m close to 0. Hence a “good” cosmology would be given by any trajectory passing near P_5 with m close to 0 and landing on an accelerated attractor. Any other behavior would not be consistent with observations.

It is important to realize that the surface x_2, x_3 for which $m(r) = -r - 1$ is a subspace of the system (9.26-9.29) and therefore it cannot be crossed. This can be seen by using the definition of r and m to derive the following equation for r :

$$\frac{dr}{dN} = r(1+m+r) \frac{\dot{R}}{HR}, \quad (9.35)$$

which shows explicitly that $m = -r - 1$ implies $dr/dN = 0$ as long as $\dot{R}/HR$ does not diverge. This means that the evolution of the system along the $m(r)$ line stops at the roots of the equation $m = -r - 1$ so that every cosmological trajectory is trapped between successive roots.

In what follows we shall consider the properties of each fixed point in turn. We define $m_i \equiv m(P_i)$ and will always assume a general $m = m(r)$.

– (1) P_1 : de-Sitter point

Since $w_{\text{eff}} = -1$ the point P_1 corresponds to de-Sitter solutions ($\dot{H} = 0$) and has eigenvalues

$$-3, \quad -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{25 - 16/m_1}}{2}, \quad (9.36)$$

where $m_1 = m(r = -2)$. Hence P_1 is stable when $0 < m_1 \leq 1$ and a saddle point otherwise. Then the condition for the stability of the de-Sitter point is given by

$$0 \leq m(r = -2) \leq 1. \quad (9.37)$$

– (2) P_2 : ϕ MDE

Point P_2 is characterized by a “kinetic” epoch in which matter and field co-exist with constant energy fractions. We denote it as a ϕ -matter dominated epoch (ϕ MDE) following Ref. [Amendola 00, Amendola 01, Amendola 03]. The eigenvalues are given by

$$-2, \frac{1}{2} \left[7 + \frac{1}{m_2} - \frac{m'_2}{m_2^2} r(1+r) \pm \sqrt{\left\{ 7 + \frac{1}{m_2} - \frac{m'_2}{m_2^2} r(1+r) \right\}^2 - 4 \left\{ 12 + \frac{3}{m_2} - \frac{m'_2}{m_2^2} r(3+4r) \right\}} \right],$$

where a prime represents a derivative with respect to r . Hence P_2 is either a saddle or a stable node. If $m(r)$ is a constant the eigenvalues reduce to $-2, 3, 4 + 1/m_2$, in which case P_2 is a saddle point. Note that it is stable on the subspace $x_3 = rx_2$ for $-1/4 < m < 0$. However, from Eqs. (9.27) and (9.28), one must ensure that the term x_3/m_2 vanishes. Then the necessary and sufficient condition for the existence of the point P_2 is expressed simply by

$$\lim_{x_{2,3} \rightarrow 0} \frac{x_3}{m_2} = 0, \quad (9.38)$$

which amounts to

$$\frac{f_{,R}}{H^2 f_{,RR}} \rightarrow 0, \quad (9.39)$$

for $R/H^2 \rightarrow 0$ and $f/f_{,R}H^2 \rightarrow 0$. This applies immediately to several models, like e.g., $f = \log R, R^n, R + \alpha R^n$ and in general for any well-behaved $f(R)$, i.e., for all the functions that satisfy the condition of application of de l'Hopital rule. This shows that the “wrong” matter era is indeed generic to the $f(R)$ models.

– (3) P_3 : Purely kinetic point

This also corresponds to a “kinetic” epoch, but it is different from the point P_2 in the sense that the energy fraction of the matter vanishes. Point P_3 can be regarded as the special case of the point P_6 by setting $m = 1/4$. The eigenvalues are given by

$$2, \frac{1}{2} \left[9 - \frac{1}{m_3} + \frac{m'_3}{m_3^2} r(1+r) \pm \sqrt{\left\{ 9 - \frac{1}{m_3} + \frac{m'_3}{m_3^2} r(1+r) \right\}^2 - 4 \left\{ 20 - \frac{5}{m_3} + \frac{m'_3}{m_3^2} r(5+4r) \right\}} \right],$$

which means that P_3 is either a saddle or an unstable node. If $m(r)$ is a constant the eigenvalues reduce to $2, 5, 4 - 1/m_3$. In this case P_3 is unstable for $m_3 < 0$ and $m_3 > 1/4$ and a saddle otherwise.

– (4) P_4

This point has a similar property to P_3 because both Ω_m and w_{eff} are the same as those of P_3 . It is regarded as the special case of the point P_6 by setting $m = -1$. Point P_4 has eigenvalues

$$-5, -3, 4(1 + 1/m_4). \quad (9.40)$$

Hence it is stable for $-1 < m_4 < 0$ and a saddle otherwise. Neither of P_3 and P_4 can be used for the matter-dominated epoch nor for the accelerated epoch.

– (5) P_5 : Scaling solutions

Point P_5 corresponds to scaling solutions which give the constant ratio $\Omega_m/\Omega_{\text{DE}}$. In the limit $m_5 \rightarrow 0$, it actually represents a standard matter era with $a \propto t^{2/3}$ and $\Omega_m = 1$. Hence the necessary condition for P_5 to exist as an exact standard matter era is given by

$$m(r = -1) = 0. \quad (9.41)$$

The eigenvalues of P_5 are given by

$$3(1 + m'_5), \quad \frac{-3m_5 \pm \sqrt{m_5(256m_5^3 + 160m_5^2 - 31m_5 - 16)}}{4m_5(m_5 + 1)}. \quad (9.42)$$

In the limit $|m_5| \ll 1$ the eigenvalues approximately reduce to

$$3(1 + m'_5), \quad -\frac{3}{4} \pm \sqrt{-\frac{1}{m_5}}. \quad (9.43)$$

The models with $m_5 = Rf_{,RR}/f_{,R} < 0$ exhibit the divergence of the eigenvalues as $m_5 \rightarrow -0$, in which case the system cannot remain for a long time around the point P_5 . For example the models $f(R) = R - \alpha/R^n$ with $n > 0$ and $\alpha > 0$ [Capozziello 03, Carroll 04] fall into this category. An approximate matter era exists also if instead m_5 is negative and non-zero but then the eigenvalues are large and it is difficult to find initial conditions that remain close to it for a long time. We shall present such an example in a later section. Therefore generally speaking models with $m_5 < 0$ are not acceptable, except at most for a very narrow range of initial conditions. On the other hand, if $0 < m_5 < 0.327$ the latter two eigenvalues in Eq. (9.42) are complex with negative real parts. Then, provided that $m'_5 > -1$, the point P_5 can be a saddle point with a damped oscillation. Hence in principle the universe can evolve toward the point P_5 and then leave for the late-time acceleration. Note that the point P_2 is also generally a saddle point except for some specific cases in which it is stable. Which trajectory (P_2 or P_5) is chosen depends upon initial conditions, so a numerical analysis is necessary.

Note that from the relation (9.34) the condition $m(r) > 0$ is equivalent to $r < -1$. Hence the criterion for the existence of a saddle matter epoch with a damped oscillation is given by

$$m(r \leq -1) > 0, \quad m'(r \leq -1) > -1. \quad (9.44)$$

Note that we also require the condition (9.41). In order to realize an accelerated stage after the matter era, additional conditions are necessary as we will discuss below. Finally, we remark that a special case occurs if $m = \text{const}$. This corresponds to $f(R) = -\Lambda + \alpha R^{-n}$. In this case the system contains a two-dimensional subspace $x_3 = -(m+1)x_2 = nx_2$ and on this subspace the stability of the latter two eigenvalues in Eq. (9.42) is sufficient to ensure the stability. Working with the (x_1, x_2, x_3) phase space the trajectories that start with $x_3 = nx_2$, which implies $\Lambda = 0$, remain on the subspace. Then the point is stable in the range $0 < m_5 < 0.327$. For $\Lambda \neq 0$, the trajectories start off the subspace and follow the same criteria of stability as for the $m \neq \text{const}$ case. So there exists a standard saddle matter era for $f(R) = -\Lambda + \alpha R^{1+\epsilon}$ with ϵ small and positive.

– (6) P_6 : Curvature-dominated point

This corresponds to the curvature-dominated point whose effective equation of state depends upon the value m . It satisfies the condition for acceleration ($w_{\text{eff}} < -1/3$) when $m_6 < -(1 + \sqrt{3})/2$, $-1/2 < m_6 < 0$ and $m_6 > (\sqrt{3} - 1)/2$. In Fig. 9.1 we show the behavior of w_{eff} as a function of m . The eigenvalues are given by

$$-4 + \frac{1}{m_6}, \quad \frac{2 - 3m_6 - 8m_6^2}{m_6(1 + 2m_6)}, \quad -\frac{2(m_6^2 - 1)(1 + m'_6)}{m_6(1 + 2m_6)}. \quad (9.45)$$

Hence the stability of P_6 depends on both m_6 and m'_6 . In the limit $m_6 \rightarrow \pm\infty$ we have $P_6 \rightarrow (-1, 0, 2)$ with a de-Sitter equation of state ($w_{\text{eff}} \rightarrow -1$). This point is stable provided that $m'_6 > -1$. P_6 is also a de-Sitter point for $m_6 = 1$, which coincides with P_1 and is marginally stable. Since $r = -2$ in this case, this point is characterized by

$$m(r = -2) \rightarrow 1. \quad (9.46)$$

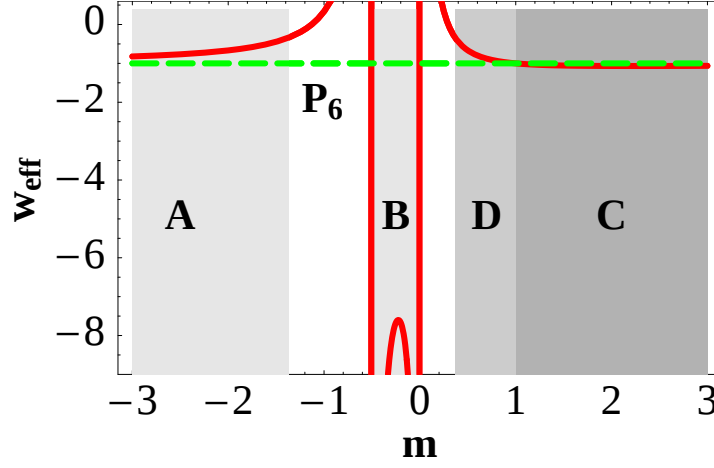


FIG. 9.1 – The effective equation of state w_{eff} for P_6 as a function of m . The point is stable and accelerated in the grayed regions. In the region (A) $m < -(\sqrt{3} + 1)/2$ the point is always a non-phantom ($w_{\text{eff}} > -1$); in the region (B) $-1/2 < m < 0$ it is strongly a phantom ($w_{\text{eff}} < -7.6$); in the region (C) $m \geq 1$ it is slightly phantom ($-1.07 < w_{\text{eff}} \leq -1$) and in the region (D) is a non-phantom ($w_{\text{eff}} > -1$). In all the other regions P_6 is either decelerated or unstable. Notice the gap between $w_{\text{eff}} = -1.07$ and -7.6 .

It is instructive to see this property in the Einstein frame, i.e. performing a conformal transformation of the system [Amendola 07b]. Then one obtains a scalar field with a potential $V = (FR - f)/|F|^2$. This shows that the condition $m(r = -2) = 1$ corresponds to $V_{,R} = 0$, i.e., the condition for the existence of a potential minimum.

The point P_6 is both stable and accelerated in four distinct ranges.

[I] $m'_6 > -1$

When $m'_6 > -1$, P_6 is stable and accelerated in the following three regions :

- (A) $m_6 < -(1 + \sqrt{3})/2$: P_6 is accelerated but not a phantom, i.e., $w_{\text{eff}} > -1$. One has $w_{\text{eff}} \rightarrow -1$ in the limit $m_6 \rightarrow -\infty$.
- (B) $-1/2 < m_6 < 0$: P_6 is strongly phantom with $w_{\text{eff}} < -7.6$.
- (C) $m_6 \geq 1$: P_6 is slightly phantom with $-1.07 < w_{\text{eff}} \leq -1$. One has $w_{\text{eff}} \rightarrow -1$ in the limit $m_6 \rightarrow +\infty$ and $m_6 \rightarrow 1$.

[II] $m'_6 < -1$

When $m'_6 < -1$, the point P_6 is stable and accelerated in the region

- (D) $(\sqrt{3} - 1)/2 < m_6 < 1$: here P_6 is a non-phantom, $w_{\text{eff}} > -1$.

Therefore from this we derive the first general conclusion concerning $f(R)$ models : the asymptotic acceleration cannot have an equation of state in the range $-7.6 < w_{\text{eff}} < -1.07$.

If one considers radiation in addition to $x_{1,2,3}$, then all the points P_{1-6} remain the same (with $x_4 = 0$) and one obtains two additional points

- (7) $P_7 : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1)$, $\Omega_m = 0$, $w_{\text{eff}} = 1/3$,
- (8) $P_8 : (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{4m}{1+m}, -\frac{2m}{(1+m)^2}, \frac{2m}{1+m}, \frac{1-2m-5m^2}{(1+m)^2} \right)$, $\Omega_m = 0$, $w_{\text{eff}} = \frac{1-3m}{3+3m}$.

We see that P_7 is a standard radiation point. When $m(r)$ is a constant the eigenvalues of P_7 are given by 1, 4, 4, -1 , which means that P_7 is a saddle in this case. The point P_8 is a new radiation era (we call it “ ϕ -radiation dominated epoch”) which contains non-zero dark energy. Since the effective

equation of state is constrained by nucleosynthesis to be close to $1/3$, P_8 is acceptable as a radiation epoch only for m_8 close to 0.

The eigenvalues of P_8 are given by

$$1, \quad 4(1 + m'_8), \quad \frac{m_8 - 1 \pm \sqrt{81m_8^2 + 30m_8 - 15}}{2(m_8 + 1)}. \quad (9.47)$$

In the limit $m_8 \rightarrow 0$ the last two are complex with negative real parts, which then shows that P_8 is a saddle around the radiation point. Hence the solutions eventually repel away from the radiation era and are followed by one of the fixed points given above. Unlike the matter point P_5 there are no singularities for the eigenvalues of P_8 in the limit $m_8 \rightarrow 0$. We also note that P_8 is on the line $m = -r - 1$ as in the case of the matter point P_5 . If the condition for the existence of the matter point P_5 is satisfied (i.e., $m \approx 0$ and $r \approx -1$), there exists a radiation point P_8 in the same region. Then a viable cosmological trajectory starts around the radiation point P_8 with $m \approx 0$ and then connects to the matter point P_5 with $m \approx 0$. Finally the solutions approach either of the accelerated points mentioned above.

9.4 Four classes of Models

For a cosmological model to work, it has to possess a matter dominated epoch followed by an accelerated expansion. In our scenarios this would be a stable acceleration (late-time attractor). We require that the matter era is long enough to allow for structure formation and that an effective equation of state is close to $w_{\text{eff}} = 0$ in order to match the observations of the diameter distance of acoustic peaks of CMB anisotropies, i.e., it has to expand as $a \sim t^{2/3}$. Now we study the conditions under which these requirements are met.

Let us recall again that P_2 exists as a saddle or a stable node. Then the ϕ MDE is always present provided that the condition (9.38) is satisfied and only by a choice of initial conditions one can escape it. Hence below we examine the cases in which initial conditions exist such that the standard matter era P_5 for $|m| \ll 1$ is also a saddle. When this is possible, a numerical analysis is necessary to ascertain the basin of attraction of P_2 and P_5 . In particular, it is necessary to see whether initial conditions that allow for a radiation epoch lead to P_2 or P_5 . Then, if P_5 exists and is a saddle, we examine the conditions for a late-time accelerated attractor.

9.4.1 Transition from the matter point P_5 to an accelerated point P_6 or P_1

The only point which allows for a standard matter era is P_5 when $m(-1) \rightarrow 0$, so this is the first condition for a theory to be acceptable. If $m(-1)$ is non-vanishing the matter epoch can be characterized by $a \sim t^{2(1+m)/3}$, which is still acceptable if $|m| \ll 1$. So from now on when we write $m(-1) \rightarrow 0$ we always mean $|m(-1)| \ll 1$. The corresponding point P_5 with $|m_5| \ll 1$ will be denoted as $P_5^{(0)}$. In the general case, Eq. (9.34) has several roots $r_{a,b..}$ and therefore $m_{a,b..}$ and correspondingly there will be several points $P_{5(a,b,..)}, P_{6(a,b,..)}$. Let us call the line $m = -r - 1$ on the (r, m) plane the *critical line*, since the points P_5 and P_6 lie on this line. From the matter epoch $P_5^{(0)}$ at $(r, m) = (-1, 0)$, the trajectories can reach an acceleration point at either P_1 or one of the points P_5 (beside $P_5^{(0)}$) or P_6 , the only points that can be accelerated. The point P_1 is stable and accelerated only for $0 < m_1 \leq 1$. The point P_5 corresponds to an accelerated solution for $m_5 > 1/2$ and $m_5 < -1$; however, it can be shown that it is not stable (saddle or unstable node) in both regions. Therefore we only need to study the transition from the matter point $P_5^{(0)}$ to the accelerated point P_6 . Generally speaking, a $f(R)$ model is cosmologically viable if one of the transition $P_5^{(0)} \rightarrow P_6$ or $P_5^{(0)} \rightarrow P_1$ is possible.

The point $P_5^{(0)} : (r, m) = (-1, 0)$ can be approached from the positive m side or from the negative one. In the first case, two eigenvalues are complex while the real part of the eigenvalues remains finite and negative. Then the trajectory exhibits a damped oscillation around the matter point, before leaving for the acceleration. In the second case, the eigenvalues are real and diverge for $m \rightarrow -0$. Then the matter era is very short and it is very difficult to find initial conditions that lead to a successful cosmology. The pure power-law model $f(R) = \alpha R^{-n}$ is a special case because then $P_5^{(0)}$ is actually stable for $m = -1 - n$ small and positive, so it is not possible to reach the acceleration at P_6 [note that in this case the system is two-dimensional with the latter two eigenvalues in Eq. (9.43)]. For the model $f(R) = -\Lambda + \alpha R^{1+\epsilon}$ with ϵ small and positive, the transition from $P_5^{(0)}$ to P_6 is instead possible and these models are cosmologically acceptable. This shows that a Λ CDM cosmology is recovered for this model in the limit $\epsilon \rightarrow +0$ but not $\epsilon \rightarrow -0$.

As we have seen in the previous section, the point P_6 is stable and accelerated in four distinct regions : (A) $m_6 < -(1 + \sqrt{3})/2$, (B) $-1/2 < m_6 < 0$, (C) $m_6 \geq 1$ (all these are stable if $m'_6 > -1$); and finally, if $m'_6 < -1$, (D) $(\sqrt{3} - 1)/2 < m_6 < 1$. In the regions (A) and (D) the point P_6 leads to a non-phantom acceleration with $w_{\text{eff}} > -1$, whereas the region (B) corresponds to a strongly phantom ($w_{\text{eff}} < -7.6$) and the region (C) to a slightly phantom ($-1.07 < w_{\text{eff}} \leq -1$). In what follows we shall discuss each case separately.

From P_5 ($m'_5 > -1, m > 0$) to P_1 or to P_6 ($m'_6 > -1$) in the regions (A), (B), (C)

In the positive m region the matter point $P_5^{(0)}$ is a saddle for $m'_5 > -1$. We require the condition $m'_6 > -1$ for the stability of the point P_6 in the regions (A), (B) and (C). Let us then assume that beside the root at $m \approx +0$ there are three roots which exist in the regions (A), (B), (C), i.e. m_{6a} , m_{6b} , m_{6c} , respectively. A good cosmology goes from a saddle $P_5^{(0)}$ to a stable acceleration, either P_{6a} , P_{6b} , P_{6c} or P_1 . Now $P_5^{(0)}$ is a saddle if $m'_5 > -1$, while P_6 is stable if $m'_6 > -1$. This shows that the curve $m(r)$ must intersect the critical point line $m = -r - 1$ with a derivative $m'_{5,6} > -1$. If the intersection occurs with a derivative $m'_{5,6} < -1$, the cosmological model is unacceptable, either because the matter era is stable or because the accelerated epoch is not stable.

We can therefore draw on the (r, m) plane the “forbidden direction regions” around the critical points, i.e. the direction for a curve $m(r)$ intersecting the line $m = -r - 1$ that must not be realized (see Fig. 9.2 where we plot several possible $m(r)$ that belongs to four general classes as detailed below). So, for any given $m(r)$ model, one has simply to look at the intersections of $m(r)$ with $m = -r - 1$ to decide if that model passes the conditions for a standard matter-acceleration sequence. Generally speaking, if the $m(r)$ line connects the standard matter era $(r, m) = (-1, 0)$ with an accelerated point P_6 or P_1 without entering the forbidden direction region, then that model is cosmologically viable. Otherwise, either because there is no connection at all or because the connection has the wrong direction, then the model is to be rejected.

In general, of course, any $m(r)$ line is possible. However, assuming $F > 0$, one sees that $r(R)$ is a monotonic function, and therefore $m(r)$ is single-valued and non-singular (remember we are assuming a regular f with all its derivatives). This simple property is what we need to demonstrate our claims. In fact, it is then simple to realize by an inspection of Fig. 9.2 that indeed it is impossible to connect points near $m = +0$ with points in (A), (B) or (C). To do so it would require in fact either entering the forbidden direction regions or a turn-around of $m(r)$, i.e. a multi-valued function, or a singularity of m at finite r , or finally a crossing of the critical line. This simple argument shows that the matter era with $m \approx +0$ cannot connect to P_6 in the region (A), (B) or (C). Hence the only accelerated point left is P_1 (which is stable only for $0 \leq m(r = -2) \leq 1$). Notice that this argument applies for any number of roots in (A), (B) or (C).

A connection to P_6 is however possible at $r \rightarrow \pm\infty$, with slope $m'_6 = -1$, i.e. when the curve $m(r)$ is asymptotically convergent on the $m = -r - 1$ line. Even in this case, the final acceleration

is de-Sitter, although with $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 2)$ instead of $P_1 : (x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 2)$. To complete this demonstration we need also to ensure that although the $m(r)$ line can have any number of intersection with the critical line, no cosmological trajectory can actually cross it. This property is indeed guaranteed by Eq. (9.35) : trajectories stop at the intersections of $m(r)$ with the critical line and remain trapped between successive roots.

From P_5 ($m < 0$) to P_6 ($m'_6 > -1$) in the region (B)

There is then a further option : $P_5^{(0)}$ in the (B) region, i.e. $m_5 < 0$. When m is close to -0 , one of the last two eigenvalues in Eq. (9.43) is positive whereas another is negative. This shows that in this case the point $P_5^{(0)}$ is a saddle independently of m'_5 . Note that the accelerated point P_6 in the region (B) is stable for $m'_6 > -1$.

Let us first consider the case $m'_5 > -1$. Then the same argument applies for the positive m case discussed above. The $m(r)$ curves can not satisfy both the conditions $m'_5 > -1$ and $m'_6 > -1$ required for the existence of the stable accelerated point P_6 in the regions (A), (B) and (C). However there is one exception. If the matter root m is small and strictly negative and $m'_5 > -1$, then P_6 for the *same* root lies in the (B) region and is a valid acceleration point. In other words, P_5 and P_6 coincide in the (r, m) plane and are both acceptable since $m'_{5,6} > -1$. The simplest possibility is $m = \text{const} \in (-1/2, 0)$. For instance, for the power-law models $f(R) = \alpha R^{0.9}$ (i.e. $m = -0.1$), the transition from an approximately matter epoch $P_5^{(0)}$ to an accelerated era P_6 is possible. However the matter period is short because of real eigenvalues which diverge in the limit $m \rightarrow -0$. Another possibility is $m = a + br$, i.e. a straight line intersecting the critical line at some point with abscissa $(a - b)/(1 + b) \in (-1/2, 0)$ and a slope $b > -1$.

When $m'_5 < -1$ it is possible to reach the stable accelerated point P_6 in either of the regions (A), (B), (C) with $m'_6 > -1$. However the matter epoch does not last long in this case as well because we have seen an eigenvalue is very large. Moreover, by construction there will always be the final attractor P_6 in the region (B) for the same m , whose effective equation of state corresponds to a strongly phantom ($w_{\text{eff}} < -7.6$).

Thus if the matter point $P_5^{(0)}$ exists in the region $m < 0$, the models are hardly compatible with observations because the matter era is practically absent and because most trajectories will fall in a unacceptable strongly phantom era.

From P_5 ($m'_5 > -1, m > 0$) to P_6 ($m'_6 < -1$) in the region (D)

We come to the fourth range, i.e. the region (D). Now the situation is different for the point P_6 , since m'_6 has to be *less* than -1 in order to be stable. Then it is possible to leave the matter epoch $P_5^{(0)}$ (which satisfies $m'_5 > -1, m > 0$) and to enter the accelerated epoch P_6 ($m'_6 < -1$) as we illustrate in Fig. 9.2 (Class IV panel). Therefore these models are compatible with standard cosmology : they have a matter era followed by a non-phantom acceleration with $w_{\text{eff}} > -1$. Note that the saddle matter epoch needs to be sufficiently long for structure formation to occur. Later we shall provide an example of such models.

Finally, we must mention an exception to this general argument. If the $m(r)$ line has a derivative exactly $m' = -1$ at the critical point, then that point is marginally stable and our linearized analysis breaks down. In this case, one has to go to a second-order analysis or to a numerical study. We will encounter such a situation for the model $f(R) = R \log(\alpha R)^q$ we study later. The same applies if $m' \rightarrow \pm\infty$, i.e. for trajectories that lie on the borders of the forbidden regions.

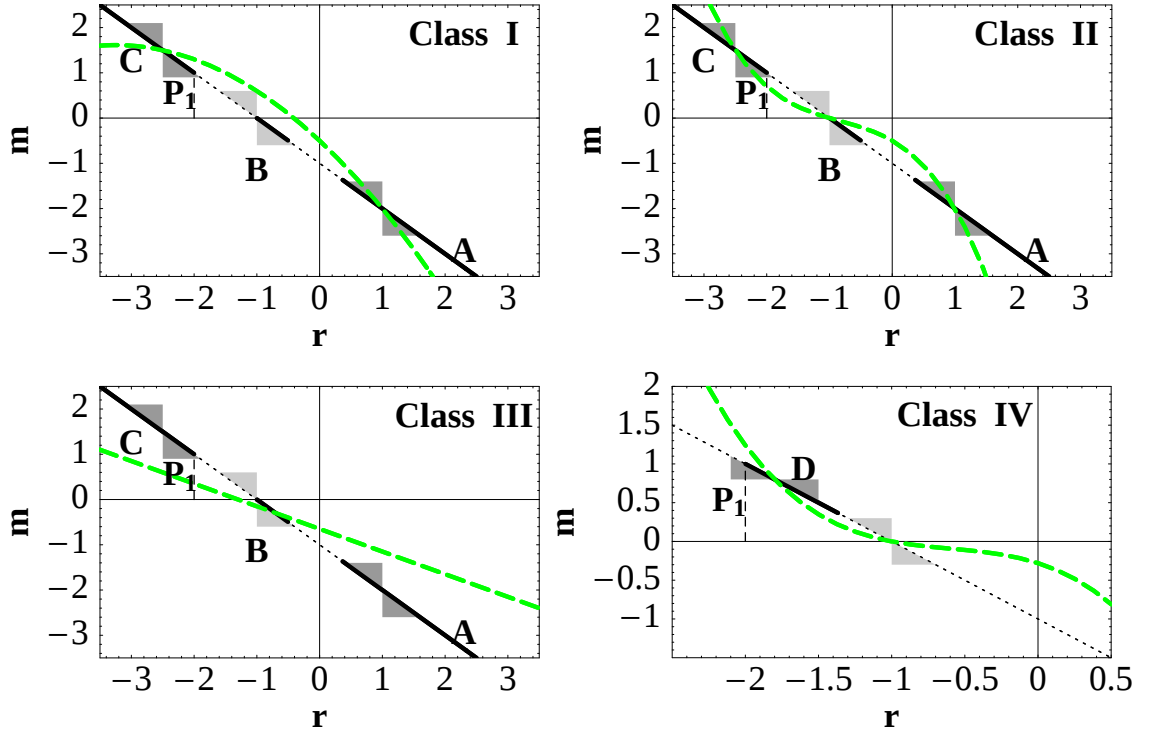


FIG. 9.2 – The (r, m) plane for the four classes of $f(R)$ models. In all panels, the straight diagonal line is the critical line $m = -r - 1$. In the dotted ranges P_6 is not accelerated or is unstable, if we assume $m'_6 > -1$. In the thick ranges labelled by A, B and C, P_6 is accelerated and stable, again assuming $m'_6 > -1$ (we omit the region D for clarity except for the Class IV panel). The gray triangles represent the forbidden directions near the critical points. The dashed green lines are hypothetical $m(r)$ curves, intersecting the critical line in the critical points P_5 and P_6 . The intersection at $(r, m) = (-1, 0)$ (light gray triangles) corresponds to the standard matter epoch $P_5^{(0)}$. In Class I models, the $m(r)$ curve does not intersect $(r, m) = (-1, 0)$ and therefore there is no standard matter era. In Class II models, the point $(r, m) = (-1, 0)$ is connected to the P_1 de-Sitter point (along the segment $0 < m \leq 1$ at $r = -2$) and therefore represents a viable cosmological solution. The two additional critical points in the regions A and C are unstable since the curve enters the forbidden triangles and are therefore not acceptable as final accelerated stages. In Class III models the $m(r)$ line with a slope $m' > -1$ intersects the critical line at a negative m in the strongly phantom range (B). Note that the curves with $m'_5 < -1$ which are attracted by P_6 in the region (A), (B), (C) are possible, but such cases are not viable because of the absence of a prolonged matter era for $m < 0$. In Class IV models, the $m(r)$ curve connects the matter era with $m'_5 > -1$ to the region (D) with a derivative $m'_6 < -1$ and therefore represents a viable cosmology with a matter era followed by a stable acceleration ($w_{\text{eff}} > -1$). No single trajectory can cross the critical line $m = -r - 1$: each solution is trapped between two successive roots on the critical line.

9.4.2 Classification of $f(R)$ models

These discussions show that we can classify the $f(R)$ models into four classes, as anticipated in Introduction. The classification can be based entirely upon the geometrical properties of the $m(r)$ curve and applies to all the cases in which an accelerated attractor exists (see Fig. 9.2).

- Class I : This class of models covers all cases for which the curve $m(r)$ does not connect the accelerated attractor with the standard matter point $(r, m) = (-1, 0)$, either because $m(r)$ does not pass near the matter point, i.e. $m(r \rightarrow -1) \neq 0$, or because the branch of $m(r)$ that accelerates is not connected to $(r, m) = (-1, 0)$. Instead of having a standard matter phase, the solutions reach the ϕ MDE fixed point P_2 with a “wrong” evolution of the scale factor ($a \propto t^{1/2}$) or bypass it altogether by falling on the final attractor without a matter epoch at all. The final accelerated fixed points, if they exist, can be in any of the three ranges of P_6 .
- Class II : For these models the $m(r)$ curve connects the upper vicinity of the point $(r, m) = (-1, 0)$ (with $m > 0$ and $m'_5 > -1$) to the point P_1 located on the segment $0 \leq m \leq 1$ at $r = -2$, or asymptotically to $P_6(r \rightarrow \pm\infty)$. Since the approach to P_5 is on the positive side of m , the trajectory exhibits a damped oscillation around the matter point [see Eq. (9.43)], which is followed by the de-Sitter point P_1 or $P_6(r \rightarrow \pm\infty)$. Models of the Class II are observationally acceptable and the final acceleration corresponds to a de-Sitter expansion.
- Class III : For these models the $m(r)$ curve intersects the critical line at $-1/2 < m < 0$ (i.e. region B). In all these cases the approximated matter era is a very fast transient and only a narrow range of initial conditions may allow it. Generically, the matter era is followed by a strongly phantom acceleration, although one could design models with the other ranges of the critical line. The closer to a standard matter epoch, the more phantom the final acceleration is ($w_{\text{eff}} \rightarrow -\infty$ as $m \rightarrow -0$). Since the matter era is practically unstable and the highest effective equation of state is $-w_{\text{eff}} = 7.6$ (which implies $w_{\text{DE}} \simeq w_{\text{eff},0}/\Omega_{\text{DE},0}$ even smaller), these models are generally ruled out by observations (although a more careful numerical analysis is required).
- Class IV : For these models the $m(r)$ curve connects the upper vicinity of the point $(r, m) = (-1, 0)$ (with $m'_5 > -1$, $m > 0$) to the region (D) located on the critical line $m = -r - 1$ (with $m'_6 < -1$). These models are observationally acceptable and the final acceleration corresponds to a non-phantom effective equation of state ($w_{\text{eff}} > -1$).

In Fig. 9.3 we show a gallery of $m(r)$ curves for various $f(R)$ models. The above discussions clarify the conditions for which $f(R)$ dark energy models are acceptable. Only the Class II or Class IV models are in principle cosmologically viable. However we need to keep in mind that what we have discussed so far corresponds to the behavior only around critical points. One cannot exclude the possibility that single trajectories with some special initial conditions happen to reproduce an acceptable cosmology. It is therefore necessary to confirm our general analysis with a thorough numerical check ; by its nature, this check can only be done on a case-by-case basis, and to this we turn our attention in the next sections.

9.5 Specific models : analytical results

In this section we shall consider a number of $f(R)$ models in which m can be explicitly written in terms of the function of r and study the possibility to realize the matter era followed by a late-time acceleration. Most of the relevant properties of these models can be understood by looking at the $m(r)$ curves of Fig. 9.3.

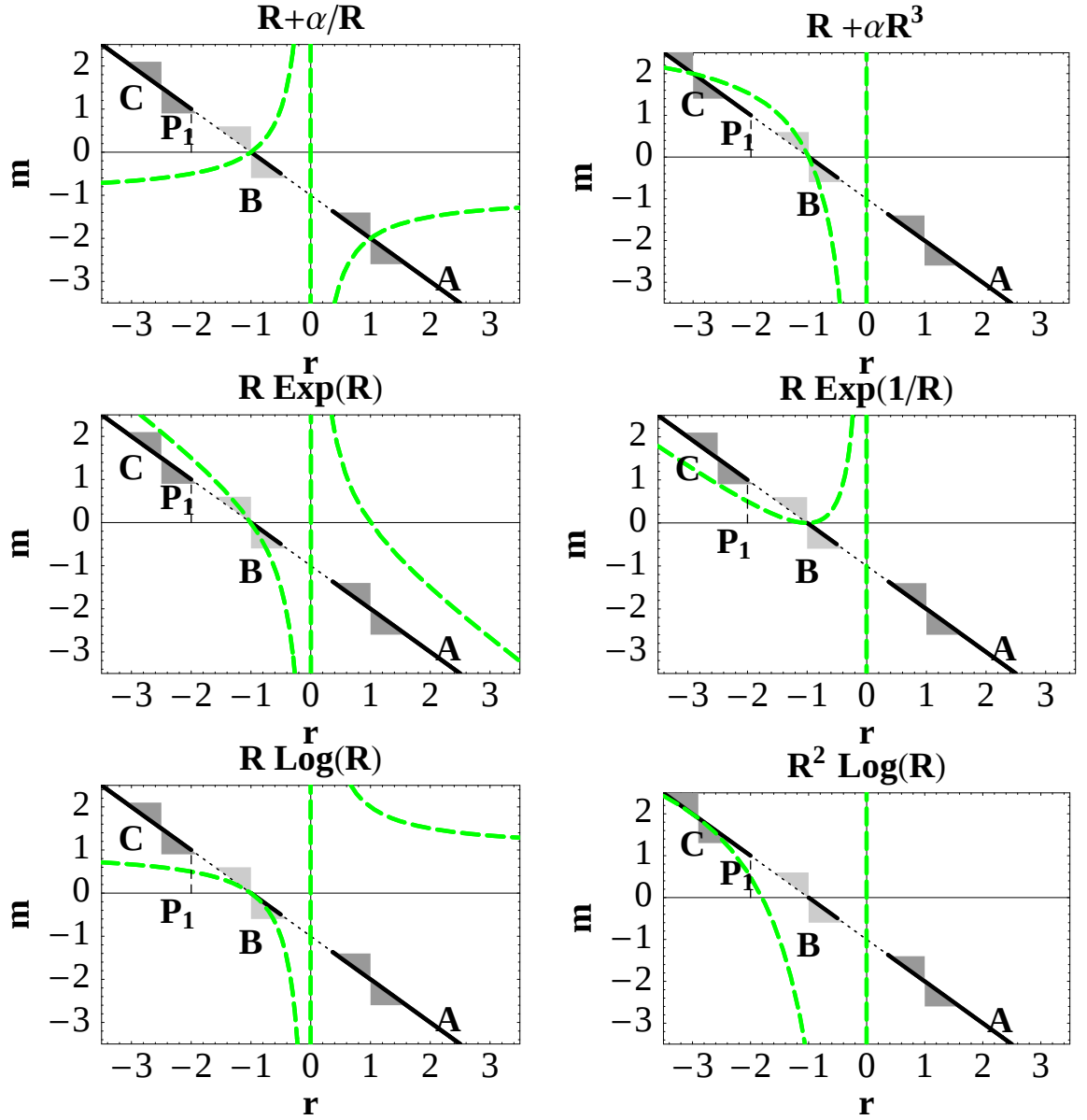


FIG. 9.3 – This figure illustrates several possible $m(r)$ curves (thick dashed green line). Only the $f = R \log R$ and the $f = R \exp(1/R)$ models show an acceptable connection between the matter point $(r, m) = (-1, 0)$ and the de-Sitter point P_1 along the dashed segment at $r = -2$. In all other cases, there is either no intersection of the $m(r)$ curves with the critical line $m = -r - 1$ near $(r, m) = (-1, 0)$ or the $m(r)$ curve enters the forbidden direction regions (the gray triangles). In all panels we show the forbidden regions for three points in the (A,B,C) ranges of P_6 , even when there are no critical points in one of those regions. For clarity we omit the range (D).

9.5.1 $f(R) = \alpha R^{-n}$

This power-law model gives a constant m from Eq. (9.30), namely

$$m = -n - 1, \quad (9.48)$$

where $r = n$. The curve $m(r)$ degenerates therefore to a single point and this case reduces to a two-dimensional system in the absence of radiation because of the relation $x_3 = nx_2$. Hence the condition $m(r = -1) = 0$ is satisfied only for $n = -1$, i.e. Einstein gravity. Since the initial conditions around the end of the radiation era are given for positive R , the positivity of the term $f_{,R} = -n\alpha R^{-n-1}$ requires that $\alpha < 0$ for $n > 0$ and $\alpha > 0$ for $n < 0$. From Eq. (9.48) one has $m > 0$ for $n < -1$ and $m < 0$ for $n > -1$. Since the eigenvalues of P_5 for this model are given by the latter two in Eq. (9.42) [Amendola 07c], the matter point P_5 is a stable spiral for $n < -1$ (around $m \rightarrow +0$). Then the solutions do not leave the matter era for the late-time acceleration.

On the other hand, P_5 is a saddle point for $-1 < n < -0.713$ while the ϕ MDE point P_2 is stable in the overlapping range $-1 < n < -3/4$. However one of the eigenvalues of P_5 exhibits a positive divergence in the limit $m \rightarrow -0$, which means that the matter point becomes repulsive if m is very close to -0 . As we anticipated, in the region around $m = -0$ the effective equation of state for P_6 corresponds to the strongly phantom type ($w_{\text{eff}} < -7.6$), i.e., to our Class III models. [Amendola 07c]. The above discussion shows that the saddle point P_5 is connected to either the ϕ MDE point P_2 or the strongly phantom point P_6 . The more one tries to get a standard matter era for $n \rightarrow -1$, the more phantom becomes the final acceleration and the more divergent becomes the eigenvalues. Moreover if we take into account radiation, the solutions tend to stay away from the point P_5 .

So the models of this type are always in Class I except for (i) $-1 < n < -0.713$ (Class III) and for (ii) $-1.327 < n < -1$ (they are asymptotically not accelerated). Similar conclusions were found in Ref. [Clifton 05].

The pure power-law models correspond to points $(r = -n, m = -1 - n)$ in the (r, m) plane. We can notice that the Λ CDM model $f = R - \Lambda$ corresponds to the horizontal line $m = 0$, which connects the matter era at $(r, m) = (-1, 0)$ with the de-Sitter acceleration P_1 at $(r, m) = (-2, 0)$ and is therefore a valid Class II model. A possible generalization of Λ CDM is given by the models

$$f(R) = (R^b - \Lambda)^c, \quad (9.49)$$

which generate a tilted straight line $m(r) = r(1 - c)/c + b - 1$. If the intersection $m = -1 + bc$ with the critical line is at $0 < m \ll 1$ and the slope is given by $-1 < (1 - c)/c < 0$, then the matter era is connected with P_1 and the model is acceptable (Class II).

9.5.2 $f(R) = R + \alpha R^{-n}$

This model was proposed in Refs. [Capozziello 03, Carroll 04] to give rise to a late-time acceleration. From Eqs. (9.30) and (9.31) we obtain

$$m(r) = -\frac{n(1+r)}{r}. \quad (9.50)$$

Notice that $m(r)$ is independent of α . Since $m(r = -1) = 0$ the models satisfy the necessary condition for the existence of the matter point P_5 .

Let us analytically study the attractor behavior of the model in more details. Substituting Eq. (9.34) for Eq. (9.50), we find the solutions $m_a = 0$ or $m_b = -(n+1)$, which holds for the points P_5 and P_6 .

In this case the points P_5 and P_6 are characterized by

$$P_{5a} : \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad \Omega_m = 1, \quad w_{\text{eff}} = 0, \quad (9.51)$$

$$P_{5b} : \left(-\frac{3(n+1)}{n}, \frac{4n+3}{2n^2}, \frac{4n+3}{2n} \right), \quad \Omega_m = -\frac{8n^2+13n+3}{2n^2}, \quad w_{\text{eff}} = -1 - \frac{1}{n}, \quad (9.52)$$

$$P_{6b} : \left(-\frac{2(n+2)}{2n+1}, \frac{4n+5}{(n+1)(2n+1)}, \frac{n(4n+5)}{(n+1)(2n+1)} \right), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = -\frac{6n^2+7n-1}{3(n+1)(2n+1)}. \quad (9.53)$$

Note that for $m_a = 0$, P_{6a} goes to infinity. We are interested in the case where a (quasi) matter era is realized around $m_5 \approx 0$.

This family of models splits into three cases : 1) $n < -1$, 2) $-1 < n < 0$, and 3) $n > 0$. The intermediate cases $n = 0, 1$ are of course trivial.

– Case 1 ($n < -1$).

Since $m' = n/r^2$ we see that $m'(-1) < -1$ and therefore the matter epoch around $m \approx +0$ is stable and no acceleration is found asymptotically (P_1 is stable as well for $-2 < n < 0$). The case $n = -2$ corresponds to Starobinsky's inflation model and the accelerated phase exists in the asymptotic past rather than in the future. This case does not belong to one of our main classes since there is no future acceleration.

– Case 2 ($-1 < n < 0$).

Then the condition at $r = -1$ is fulfilled for $R \rightarrow \infty$, and we see that $m = n(n+1)\alpha R^{-n-1}/(1 - n\alpha R^{-n-1})$ approaches zero from the positive side if $\alpha < 0$. In this case, there are damped oscillations around the standard matter era and the final stable de-Sitter point P_1 can be reached (P_6 is unstable) : this is the Class II model. Notice that $F < 0$ for small R , but $F > 0$ along the cosmologically acceptable trajectory. When $\alpha > 0$, two of the eigenvalues diverge as $m \rightarrow -0$ and the matter era becomes unstable.

– Case 3 ($n > 0$).

In this case the stable accelerated point P_6 exists in the non-phantom region (A) because of the condition $m = -n - 1 < -1$. If $\alpha > 0$, m approaches zero from the positive side. Then there are oscillations around the matter era but the accelerated point P_1 is unstable (since $m_1 = -n/2 < 0$). Since $m'_5 = n > 0$, the matter era corresponds to a saddle. However P_5 with $m'_5 > -1$ cannot be connected to P_6 in the region (A), as we showed in the previous section. Hence we do not have a stable accelerated attractor after the matter epoch. When $\alpha < 0$, m approaches zero on the negative side and here again the matter point becomes effectively unstable since one of the eigenvalues exhibits a positive divergence. Then this case does not possess a prolonged matter epoch and belongs to the Class I. The first panel of Fig. 9.3 shows graphically why models like $f(R) = R + \alpha/R$ cannot work as a viable cosmological model : the accelerated point is disconnected from the matter point.

In the next section we shall numerically confirm that the matter phase is in fact absent prior to the accelerated expansion except for models $f(R) = R + \alpha R^{-n}$ with $\alpha < 0$ and $-1 < n < 0$. In any case, all these power-law cases are cosmologically unacceptable. These results fully confirm the conclusions of Ref. [Amendola 07b] reached by studying the Einstein frame. The single exception pointed out above for $-1 < n < 0$ was not a part of the cases considered in Ref. [Amendola 07b], since $F < 0$ for small R .

9.5.3 $f(R) = R^p \exp(qR)$

In this model m is given by

$$m(r) = -r + \frac{p}{r}. \quad (9.54)$$

Notice that for the pure exponential case ($p = 0$) we have $m = -r$ and $x_3/m \rightarrow x_2 \rightarrow 0$ so that P_2 exists while P_5 does not. Otherwise the function m vanishes for $r \rightarrow \pm\sqrt{p}$, which means that the

condition (9.41) for the existence of the matter era holds only for $p = 1$. However, since in this case $m'(r = -1) = -2 < -1$, the point P_5 is a stable spiral for $m > 0$. So the entire family of models is in fact ruled out.

In the limit $m \rightarrow +0$, P_6 can not be used for the late-time acceleration in addition to the fact that P_5 is stable. Moreover since $m(r = -2) = 3/2$ for $p = 1$, the de-Sitter point P_1 is not stable. We note that Eqs. (9.54) and (9.34) are satisfied in the limit $m \rightarrow +\infty$ and $r \rightarrow -\infty$, see Fig. 9.3. Since the eigenvalues in Eq. (9.45) are $-4, -4, 0$ in this case, the point $P_6 : (x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 2)$ with $m \rightarrow +\infty$ is marginally stable with an effective equation of state $w_{\text{eff}} \rightarrow -1$. In fact, when $m > 0$, we have numerically checked that the final attractor is either the matter point P_5 or $P_6 : (x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 2)$ (but then without a preceding matter phase), depending upon initial conditions.

Thus models of this type do not have the sequence of matter and acceleration for $p = 1$, whereas the models with $p \neq 1$ belong to Class I.

9.5.4 $f(R) = R^p(\log \alpha R)^q$

In this model we obtain the relation

$$m(r) = \frac{p^2 + 2pr - r(q - r + qr)}{qr}. \quad (9.55)$$

Since $m(r = -1) = -(p - 1)^2/q$, the matter epoch exists only for $p = 1$. When $p = 1$ one has $m(r = -2) = 1 - 1/(2q)$, which means that P_1 is stable for $q > 0$ whereas it is not for $q < 0$. The derivative term $m'(r)$ is given by

$$m'(r) = -1 + \frac{r^2 - 1}{qr^2}. \quad (9.56)$$

Since $m'(r = -1) = -1$ the point P_5 is marginally stable. However we have to caution that m does not exactly become zero. In fact when $r < -1$ we have $m'(r) > -1$ and $m(r) > 0$ for $q > 0$, which means that the quasi matter era with positive m is a saddle point. Similarly the accelerated point P_6 in the region (C) is stable for $q > 0$ whereas it is not for $q < 0$. Hence both P_1 and P_6 are stable for positive q . However one can show that the function $m(r)$ given in Eq. (9.55) satisfies $m(r) < -r - 1$ in the region $r < -1$ for $p = 1$ and $q > 0$. Hence the curve (9.55) does not cross the point P_6 in the region (C). Then the only possibility is the case in which the trajectories move from the quasi matter era P_5 to the de-Sitter point P_1 . In the next section we shall numerically show that the sequence from P_5 to P_1 is in fact realized.

Thus when $p = 1$ and $q > 0$ the above model corresponds to the Class II, whereas the models with $p \neq 1$ are categorized as the Class I.

9.5.5 $f(R) = R^p \exp(q/R)$

This model gives the relation

$$m(r) = -\frac{p + r(2 + r)}{r}, \quad (9.57)$$

which is independent of q . Here we have $m(r = -1) = p - 1$, so a matter era exists for $p = 1$. In this case one has $m(r) = -(r + 1)^2/r > 0$ for $r < 0$. Since $m(r = -2) = 1/2$ for $p = 1$, the point P_1 is a stable spiral. The derivative term $m'(r)$ is given by $m'(r) = -1 + 1/r^2$, which then implies $m'(r = -1) = 0$ and $m'(r < -1) > -1$. This shows that P_5 is a saddle whereas P_6 in the region (C) is stable. The curve (9.57) satisfies the relation $m(r) < -r - 1$ in the region $r < -1$ for $p = 1$ and also has an asymptotic behavior $m(r) \rightarrow -r$ in the limit $r \rightarrow -\infty$. Then in principle it is possible to have the sequence $P_5 \rightarrow P_6(r \rightarrow -\infty)$, but the trajectory from the point P_5 is trapped by the stable

de-Sitter point P_1 which exists at $(r, m) = (-2, 1/2)$. We note that one of the eigenvalues for the point P_5 is large ($3(1 + m'_5) = 3$) compared to the model $f(R) = R(\log \alpha R)^q$ whose eigenvalue is close to 0 (but positive) around $m = 0$. In such a case the system does not stay around the matter point P_5 for a long time as we will see later.

Thus the model with $p = 1$ belongs to the Class II, whereas the models with $p \neq 1$ correspond to the Class I.

9.5.6 $f(R) = R + \alpha R^2 - \Lambda$

In this case the function $m(r)$ is given by

$$m(r) = \frac{-1 - r + A(r)}{1 + A(r)}, \quad (9.58)$$

where

$$A(r) \equiv \sqrt{(1 + r)^2 + 4\tilde{\alpha}r(2 + r)}, \quad \tilde{\alpha} \equiv \alpha\Lambda. \quad (9.59)$$

Here we assume that $\alpha, \Lambda > 0$. The equation, $m(r) = -1 - r$, gives three solutions

$$r_{1,2} = -\frac{1 + 4\tilde{\alpha} \pm 2B}{1 + 4\tilde{\alpha}}, \quad r_3 = -2, \quad (9.60)$$

where $B \equiv \sqrt{\tilde{\alpha}(1 + 4\tilde{\alpha})}$. Then we obtain three points P_5 and three P_6 . For P_5 we have

$$P_{5a,b} : (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{6\tilde{\alpha}}{2\tilde{\alpha} \pm B}, -\frac{B(B \pm 8\tilde{\alpha})}{2(B \pm 2\tilde{\alpha})^2}, \frac{8\tilde{\alpha} \pm B}{4\tilde{\alpha} \pm 2B} \right), \quad (9.61)$$

$$P_{5,c} : (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{8}, \frac{5}{4} \right). \quad (9.62)$$

The point $P_{5,c}$ is unphysical since $\Omega_m < 0$. The points $P_{5a,b}$ reduce to a matter point in the limit $\tilde{\alpha} \ll 1$. At the lowest order one has $w_{\text{eff}} \approx \mp 4\sqrt{\tilde{\alpha}}/3$. This shows that a standard matter era can exist either for $\alpha \rightarrow 0$, i.e., for the Λ CDM model, or for $\Lambda \rightarrow 0$, i.e., for the Starobinsky's model $f(R) = R + \alpha R^2$. In the limit $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$ the only accelerated point is the de-Sitter point P_1 . Since the condition $m(-2) = 1$ is satisfied for any $\tilde{\alpha}$, we see that this $f(R)$ model is always attracted by the de-Sitter acceleration.

Models of this type belong to Class II.

9.5.7 $f(R) = R - \mu_1^4/R + \mu_2^{-2}R^2$

This model was proposed in Ref. [Nojiri 03]. In this case Eq. (9.34) reads :

$$R^3 \frac{2+r}{\mu_2^2} + R^2(1+r) + \mu_1^4(1-r) = 0, \quad (9.63)$$

where R needs to be real solutions. Since the solutions for this equation are quite complicated, we will not write them down here. The necessary condition for the existence of the matter phase is as usual $m(-1) = 0$. We have here

$$m(-1) = \frac{6}{3 - (2\mu_2/\mu_1)^{4/3}}. \quad (9.64)$$

Hence we see that $m(-1)$ tends to zero for $\mu_1 \rightarrow 0$ but since it stays on the negative side, the matter era is unstable (one of the eigenvalues exhibits a positive divergence). So we can draw from Eq. (9.64)

an important conclusion that the matter phase can only be obtained for $\mu_1 = 0$, i.e., the Starobinsky's (inflation) model previously discussed.

In order to satisfy solar system constraints a particular version of this model was suggested with [Nojiri 03]

$$\mu_2 = 3^{3/4}\mu_1, \quad \text{and} \quad R = \sqrt{3}\mu_1^2. \quad (9.65)$$

In that case, (9.64) yields $m(-1) \approx 3.40$ hence this case does not have a standard matter phase either.

The model has two accelerated attractors :

$$\begin{cases} P_6 : (x_1, x_2, x_3) = (-2, 3/2, 3/2), & w_{\text{eff}} = -2/3, \\ P_1 : (x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 2), & w_{\text{eff}} = -1. \end{cases} \quad (9.66)$$

Thus depending upon the initial conditions the trajectories lie in the basin of attraction of either of these two points.

This model corresponds to Class I.

9.5.8 $m(r) = -0.2(1+r)(3.2+0.8r+r^2)$

This model has been designed by hand to meet the condition for the Class IV. Note that this corresponds to the $m(r)$ curve in the Class IV case shown in Fig. 9.2. The corresponding $f(R)$ Lagrangians are the solutions of the differential equation

$$\frac{Rf_{,RR}}{f_{,R}} = m \left(-\frac{Rf_{,R}}{f} \right), \quad (9.67)$$

which can be obtained numerically. This model obeys the conditions $m(-1) = 0$ and $m'_5 > -1$ required for a saddle matter era P_5 as well as the conditions $(\sqrt{3}-1)/2 < m_6 = 0.8 < 1$ and $m'_6 < -1$ required for a stable accelerated point P_6 in the region (D). The final accelerated attractor corresponds to the effective equation of state $w_{\text{eff}} \approx -0.935$.

A model with similar properties but an analytical Lagrangian is $f(R) = R^{\frac{p}{p-1}}(R+C)^{\frac{1}{1-p}}$ ($C \neq 0$, $p \neq 1$) for which $m(r) = -p(r+1)^2/r$, whose P_6 intersection lies in the region (D) for $2 < p < 3.73$ with $w_{\text{eff}} = \frac{1-9p+2p^2}{3(1+p)}$. Here however the matter era has large eigenvalues so in fact is of very little duration and hardly realistic. A generalization to $m(r) = -p(r+r_0)^2/r$ with r_0 slightly less than 1 works much better but then the Lagrangian is very complicated.

9.5.9 Summary

In Table 9.1 we summarize the classification of most $f(R)$ dark energy models presented in this section. No model belongs to the Class IV except for the purposely designed cases given in the previous subsection, so we omit the Class IV column. The models which are classified in Class II at least satisfy the conditions to have a saddle matter era followed by a de-Sitter attractor. This includes models of the type $f = R + \alpha R^{-n}$ ($-1 < n < 0$, $\alpha < 0$), $f = R(\log \alpha R)^q$ ($q > 0$) and $f = R + \alpha R^2 - \Lambda$. However this does not necessarily mean that these models are cosmologically viable, since it can happen that the matter era is too short or too long to be compatible with observations. In the next section we shall numerically study the cosmological viability of the above models.

9.6 Specific cases : Numerical results

We will now use the equations derived in Section 9.2 in order to recover the cosmic history of given $f(R)$ DE models and confirm and extend our analytical results. In all cases, we include radiation

$f(R)$ models	$m(r)$	Class I	Class II	Class III
αR^{-n}	$-1 - n$	$n > -0.713$	–	$-1 < n < -0.713$
$R + \alpha R^{-n}$	$-n \frac{(1+r)}{r}$	$n > 0$	$-1 < n < 0, \quad \alpha < 0$	–
$R^p (\log \alpha R)^q$	$\frac{p^2 + 2pr - r(q - r + qr)}{qr}$	$p \neq 1$	$p = 1, \quad q > 0$	–
$R^p \exp qR$	$-r + \frac{p}{r}$	$p \neq 1$	–	–
$R^p \exp(q/R)$	$-\frac{p+r(2+r)}{r}$	$p \neq 1$	$p = 1$	–
$R + \alpha R^2 - \Lambda$	Eq. (9.58)	–	$\alpha \Lambda \ll 1$	–
$R - \mu_1^2/R + R^2/\mu_2^2$	Eq. (9.63)	always	–	–

TAB. 9.1 – Classification of $f(R)$ dark energy models.

and give initial conditions at an epoch deep into the radiation epoch. As our aim is to check their cosmological viability, we tune the initial conditions in order to produce observationally acceptable values, namely

$$\Omega_{m,0} \approx 0.3, \quad \Omega_{\text{rad},0} \approx 10^{-4}. \quad (9.68)$$

In some cases we plot a 2-dimensional projection of the 3-dimensional phase space (x_1, x_2, x_3) (no radiation) in Poincaré coordinates, obtained by the transformation $x_i^{(P)} = x_i/(1+d)$ where $d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

9.6.1 $f(R) = \alpha R^{-n}$

Since $m = -n - 1$ in this case, the matter era is possible only when n is close to -1 . So let us consider the cosmological evolution around $n = -1$. As we already showed, the matter point P_5 is stable for $n < -1$. When $n > -1$, P_5 is a saddle and both P_2 and P_6 are stable. In Fig. 9.4 we show a 2-dimensional phase space plot for the model $n = -0.9$ in the *absence* of radiation. In fact the final attractors are either the ϕ MDE point P_2 with $w_{\text{eff}} = 1/3$ or the phantom point P_6 with $w_{\text{eff}} = -10.17$. The point P_5 with $w_{\text{eff}} = 1/9$ is in fact a saddle point. However, if we start from realistic initial conditions around $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1)$ with the inclusion of radiation, we have numerically found that the trajectories directly approach final attractors (P_2 or P_6) without reaching the vicinity of P_5 . Moreover as we choose the values of n closer to -1 , the point P_5 becomes repulsive because of the positive divergence of an eigenvalue. These results show that the power-law models with $n > -1$ do not provide a prolonged matter era sandwiched by radiation and accelerated epochs in spite of the fact that the point P_5 can be a saddle.

9.6.2 $f(R) = R + \alpha R^{-n}$

When $n > 0$ one has $m = -n - 1 < -1$ and $m'(r) = n/r^2 > 0$ for P_5 and P_6 . In this case P_6 is a stable attractor whereas P_5 is a saddle. In the previous section we showed that the matter point P_5 is disconnected to the accelerated point P_6 since P_6 exists in the region (A). According to the results in Ref. [Amendola 07b] we have only the following two cases : either (i) the matter era is replaced by the ϕ MDE fixed point P_2 which is followed by the accelerated attractor P_6 , or (ii) a rapid transition from the radiation era to the accelerated attractor P_6 without the ϕ MDE. Which trajectories are chosen depend upon the model parameters and initial conditions. In Fig. 9.5 we depict a 2-dimensional phase space plot for the model $n = 1$. This shows that the final attractor is in fact P_6 and that whether the solutions temporally approach the saddle point P_2 or not depends on initial conditions.

In order to understand the evolution after the radiation era let us consider the model $n = 1$ without radiation. From Eqs. (9.4) and (9.5) we find that the evolution of the scale factor during the ϕ MDE is

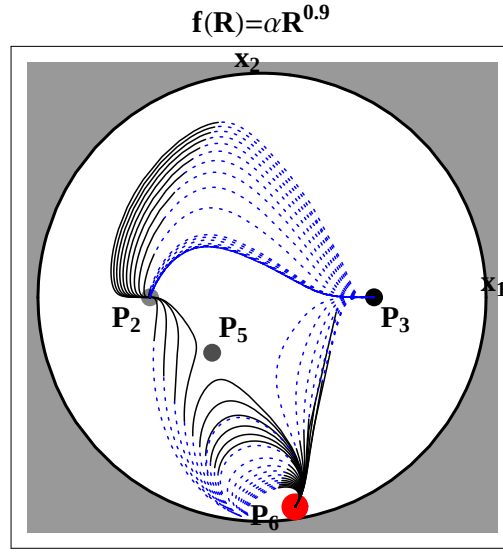


FIG. 9.4 – Phase space in the plane (x_1, x_2) in Poincaré coordinates for the model $f(R) = \alpha R^{0.9}$ in the absence of radiation. Here and in the following plot, the dotted lines correspond to trajectories at the early stage, the continuous lines to those at the final stage. The circles represent critical points. The solutions approach either the ϕ MDE point P_2 or the phantom point P_6 . The point P_5 is a saddle, but the trajectories do not approach this point if we take into account radiation. The point P_3 is an unstable node.

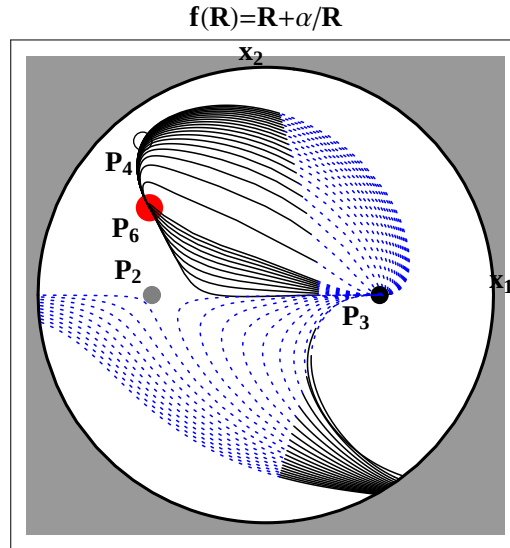


FIG. 9.5 – Phase space projected on the plane (x_1, x_2) in Poincaré coordinates for the model $f(R) = R + \alpha/R$ in the absence of radiation. For the initial conditions $x_2 > 0$ there are two solutions : either (i) the solutions directly approach the accelerated attractor P_6 or (ii) they first approach the saddle ϕ MDE point P_2 and then reach the attractor P_6 . When $x_2 < 0$ initially, the trajectories moves toward $x_2 \rightarrow -\infty$. Note that the point P_3 is unstable.

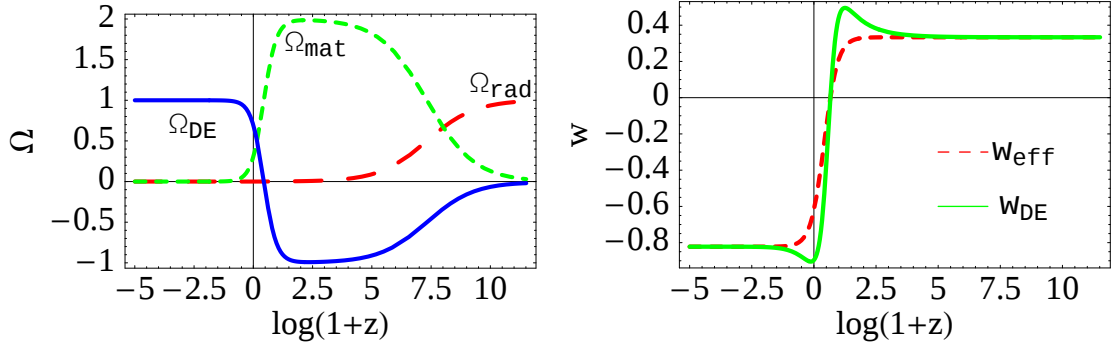


FIG. 9.6 – The cosmic evolution of various quantities is shown for the model $f(R) = R + \alpha/R^2$ with $\alpha = -\mu^6$, $\mu/H_0 = 11.04$. The standard matter era is replaced by the ϕ MDE which corresponds to $a \propto t^{1/2}$, $w_{eff} = 1/3$ and $\Omega_m = 2$. The redshift z_a at which acceleration starts is $z_a = 0.4$ and we have asymptotically in the future $\Omega_{DE} = 1$ and $w_{eff} = w_{DE} = -0.82$ [see Eq. (9.53)].

given by

$$a(t) = (t/t_i)^{1/2} + \epsilon(t)(t/t_i)^{9/4}, \quad (9.69)$$

where the subscript ‘i’ represents the value at the beginning of the ϕ MDE. At first order in $\epsilon(t)$ we have

$$\epsilon(t) = \frac{\mu^2}{144H_i^2} \frac{1}{\sqrt{\rho_m^{(i)}/3H_i^2 - (H/H_i)^{1/2}}}. \quad (9.70)$$

Notice that μ is of order H_0 to realize the present acceleration. Since $H_0 \ll H_i$ the parameter $\epsilon(t)$ is in fact much smaller than unity. The scale factor evolves as $a \propto t^{1/2}$ during the ϕ MDE, but this epoch ends when the second term in Eq. (9.69) gets larger than the zero-th order term. Hence the end of the ϕ MDE is characterized by

$$t \approx \left(\frac{144H_i^2}{\mu^2} \sqrt{\frac{\rho_m^{(i)}}{3H_i^2}} \right)^{4/7} t_i. \quad (9.71)$$

After that the solutions approach the accelerated attractor P_5 . Equation (9.71) shows that the duration of the ϕ MDE depends on μ together with the initial conditions $\rho_m^{(i)}$ and H_i . The similar argument can be applied for any $n < -1$, $n > -3/4$ with a correction growing as $t^{5/2-1/2(n+1)}$. In Fig. 9.6 we plot the evolution of various quantities for $n = 2$. In this case the radiation era is followed by the ϕ MDE saddle point P_2 with $\Omega_m = 2$ and $w_{eff} = 1/3$. The final attractor is the accelerated point P_6 with $\Omega_{DE} = 1$ and $w_{eff} = -0.82$. As is clearly seen in the right panel of Fig. 9.6 we do not have a standard matter era with $w_{eff} = 0$.

Let us consider the case in which n is close to -1 . When $n < -1$ the point P_5 is a stable spiral, so the matter era is not followed by an accelerated expansion as is similar to the power-law models. If $n > -1$, the de-Sitter point P_1 is stable whereas the phantom point P_6 is not. In Fig. 9.7 we show the phase space plot in a two-dimensional plane for $n = -0.9$. When $\alpha > 0$, although the point P_5 is a saddle, the solutions approach the attractor P_1 without staying the region around the point P_5 for a long time because m is negative. This tendency is more significant if n is chosen to be closer to -1 , i.e. $m \rightarrow -0$. Hence one can not have a prolonged matter era in these cases as well. On the other hand, for $\alpha < 0$, we have $m \rightarrow +0$ and there are oscillations around the matter era followed again by the attractor P_1 . Then this latter case, belonging to Class II, can be cosmologically viable.

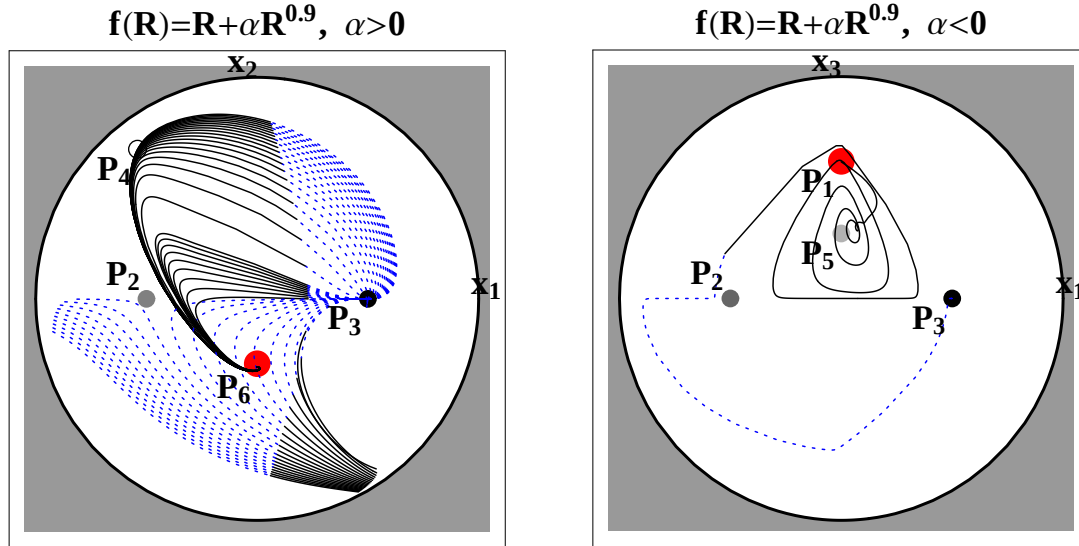


FIG. 9.7 – Projected phase space in Poincaré coordinates for the model $f(R) = R + \alpha R^{0.9}$ in the absence of radiation. The final attractor is the de-Sitter point $P_1 : (x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 2)$. Note that both P_2 and P_6 are not stable unlike the model $f(R) = \alpha R^{0.9}$. In the left panel, $\alpha > 0$: here P_5 corresponds to $m < 0$ with a large eigenvalue and therefore is unstable. In the right panel, $\alpha < 0$: now the point P_5 is a saddle with positive m , so it is possible to have a sequence of an oscillating matter phase followed by the late-time acceleration. We plot a single curve for clarity.

9.6.3 $f(R) = R(\log \alpha R)^q$

When $q > 0$, we showed that the point P_5 is a saddle for $m(r < -1) > 0$ whereas both P_1 and P_6 are stable. In the previous section we showed that the only possibility is the trajectory from P_5 to P_1 . Hence the solutions starting from the radiation era reach the saddle matter point P_5 first, which is followed by the de-Sitter point P_1 .

In order to obtain a prolonged matter period, the variables m and r need to be close to $+0$ and $r = -1$, respectively, at the end of radiation era. If we integrate the autonomous equations with initial conditions $r = x_3/x_2 \simeq -1$ (and smaller than -1) and $x_4 \simeq 1$, we find that the matter era is too long to be compatible with observations. In Fig. 9.8 we plot one example of such cosmological evolution for $q = 1$. This shows that a prolonged (quasi) matter era certainly exists prior to the late-time acceleration. The final attractor is the de-Sitter point P_1 with $w_{\text{eff}} = -1$. However in this case the beginning of the matter epoch corresponds to the redshift $z = 1.1 \times 10^{17}$, which is much larger compared to the standard value $z \sim 10^3$. The present value of the radiation energy fraction is $\Omega_{\text{rad},0} = 2.8 \times 10^{-15}$ and is much smaller than the value given in Eq. (9.68).

This unusually long period of the matter era is associated with the fact that the point P_5 is a saddle in the region $r < -1$ but it is marginally stable in the limit $r \rightarrow -1$ (i.e. $m \rightarrow +0$). Hence as we choose the initial values of r closer to -1 , the duration of the matter period gets longer. In order to recover the present value of Ω_{rad} given in Eq. (9.68), we have to make the matter period shorter by appropriately choosing initial conditions at the end of the radiation era. In Fig. 9.9 we plot the cosmological evolution in the case where the end of the radiation era corresponds to $z \sim 10^3$ with present values $\Omega_{\text{m},0} \approx 0.3$ and $\Omega_{\text{rad},0} \approx 10^{-4}$. The energy fraction of the matter is not large enough to dominate the universe after the radiation epoch. Hence this case is not compatible with observations as well.

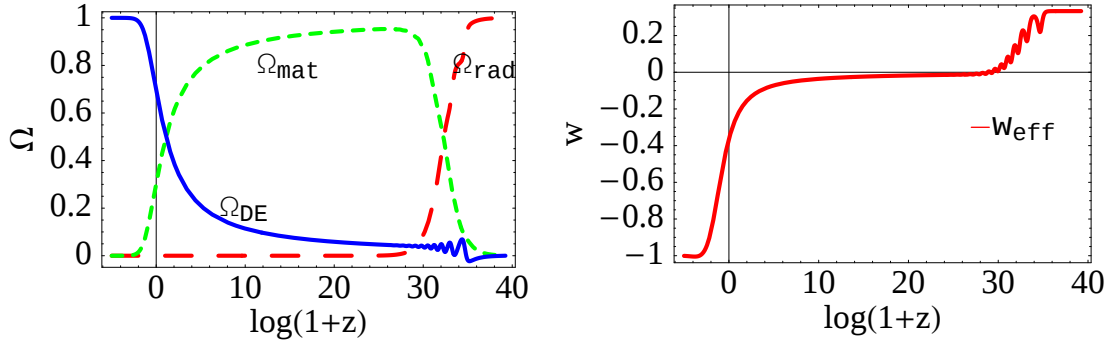


FIG. 9.8 – The cosmic evolution of various quantities for the model $f(R) = R \log \alpha R$ with initial conditions $x_1 = 10^{-5}$, $x_2 = -10^{-10}$, $x_3 = 1.01 \times 10^{-10}$ and $x_4 = 0.999$ at the redshift $z = 1.1 \times 10^{17}$, corresponding to $r = -1.01$. In this case the matter era is too long relative to the standard cosmology. In fact the energy fraction of the radiation at the present epoch is $\Omega_{rad,0} = 2.8 \times 10^{-15}$, which is much smaller than the standard value $\Omega_{rad,0} \approx 10^{-4}$.

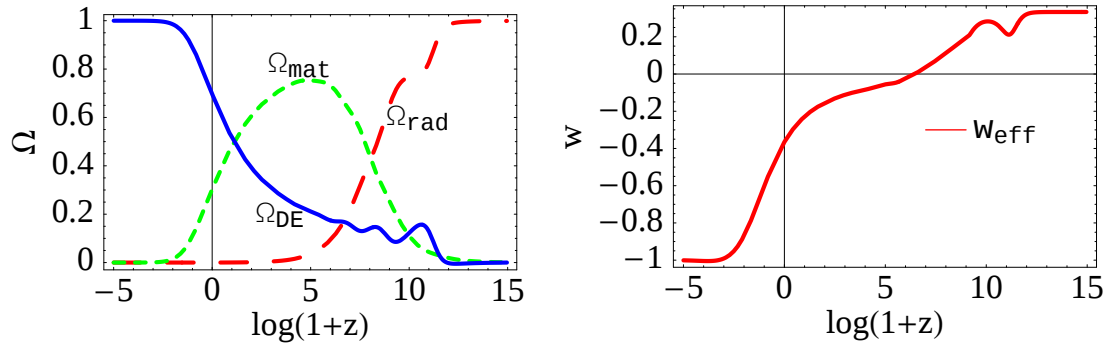


FIG. 9.9 – The cosmic evolution of various quantities for the model $f(R) = R \log \alpha R$ with initial conditions $x_1 = 10^{-10}$, $x_2 = -10^{-7}$, $x_3 = 1.019 \times 10^{-7}$ and $x_4 = 0.999$ at the redshift $z = 3.15 \times 10^6$, corresponding to $r = -1.019$. In this case we have $\Omega_{m,0} \approx 0.3$ and $\Omega_{rad,0} \approx 10^{-4}$ at the present epoch, but the matter era is practically absent.

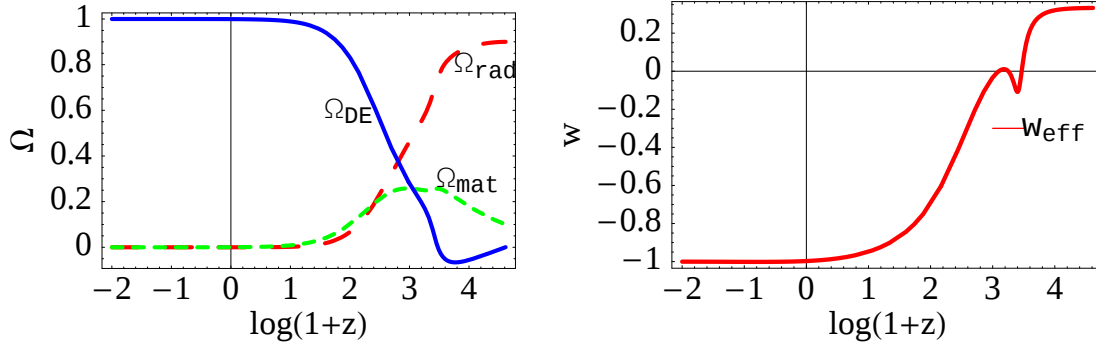


FIG. 9.10 – The cosmic evolution of various quantities for the model $f(R) = R \exp(q/R)$ with initial conditions $x_1 = 0$, $x_2 = 2.13 \times 10^{-20}$, $x_3 = 5.33 \times 10^{-21}$ and $x_4 = 0.99$ at the redshift $z = 3 \times 10^5$. We see that the matter era is absent and is replaced by the ϕ MDE.

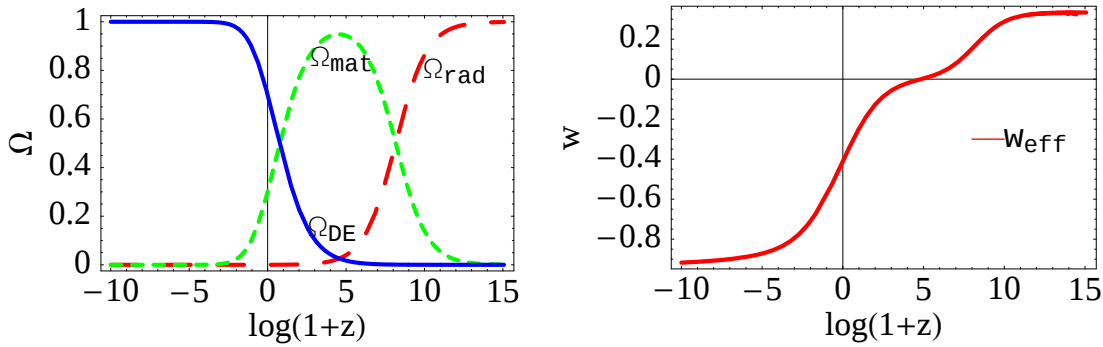


FIG. 9.11 – The cosmic evolution of various quantities for the model $m(r) = -0.2(1+r)(3.2 + 0.8r + r^2)$ with initial conditions $x_1 = 10^{-10}$, $x_2 = -10^{-7}$, $x_3 = 1.000007 \times 10^{-7}$ and $x_4 = 0.999$ at the redshift $z = 3.5 \times 10^6$. The model has an approximate matter dominated epoch followed by a non-phantom accelerated universe with $w_{\text{eff}} \approx -0.935$.

9.6.4 $f(R) = R \exp(q/R)$

In this case the matter point P_5 is a saddle, but one of the eigenvalues are 3 rather than close to 0. Numerically we find that the solutions do not reach the matter dominated epoch unlike the $f(R) = R(\log \alpha R)^q$ model with $q > 0$. In Fig. 9.10 we plot the cosmological evolution for this model corresponding to the present values $\Omega_{m,0} \approx 0.3$, $\Omega_{\text{rad},0} \approx 10^{-4}$. In this case the matter epoch is replaced by the ϕ MDE. It is possible to find a situation in which there exists a short period of the matter era, but we find that this case does not satisfy the conditions given by (9.68). Thus this model is not cosmologically viable in spite of the fact that it belongs to the Class II.

9.6.5 $m(r) = -0.2(1+r)(3.2 + 0.8r + r^2)$

This model belongs to the Class IV, so the cosmological trajectories can be acceptable. In Fig. 9.11 we find that the matter epoch is in fact followed by a stable acceleration with $w_{\text{eff}} \approx -0.935$. The transition between the various eras is not very sharp compared to the Λ CDM model, so it is of interest to investigate in more detail whether this model can be really compatible with observations. However this is beyond the scope of this paper.

9.7 Conclusions

The $f(R)$ dark energy models are interesting and quite popular attempts to explain the late-time acceleration. However it was recently found that the popular model $f(R) = R + \alpha R^{-n}$ with $n > 0$ is unable to produce a matter era prior to the accelerated epoch [Amendola 07b]. In this paper we have attempted to clarify the conditions under which $f(R)$ dark energy models are cosmologically viable. We first derived the autonomous equations (9.26)-(9.29) which are applicable to general $f(R)$ models. In Sec. 9.3 all fixed points are derived in such an autonomous system. By considering linear perturbations about the fixed points, we have studied their stabilities to understand the cosmological evolution in $f(R)$ dark energy models.

The main result of this paper is that we have identified four classes of $f(R)$ models, depending on the existence of a standard or “wrong” matter era (ϕ MDE) and on the final acceleration. In practice, we have shown that the cosmology of $f(R)$ models can be based on a study of the $m(r)$ curves in the (r, m) plane and on its intersections with the critical line $m = -r - 1$. This provides an extremely simple method to investigate the cosmological viability of such models. In particular, we find that the Class I models correspond to the type of models in which the final acceleration is preceded by a so-called ϕ MDE phase characterized by $a \propto t^{1/2}$ or in which the matter phase does not exist at all prior to the accelerated epoch. These models are clearly ruled out, e.g. by the angular diameter distance of the CMB acoustic peaks, see Ref. [Amendola 07b]. This is by far the largest class and only a few special cases belong to other three.

The general conditions for a successful $f(R)$ model can be summarized as follows :

- A $f(R)$ model has a standard matter dominated epoch only if it satisfies the conditions

$$m(r) \approx +0 \quad \text{and} \quad m'(r) > -1 \quad \text{at} \quad r \approx -1, \quad (9.72)$$

where the second condition is required to leave the matter era for the late-time acceleration.

- The matter epoch is followed by a de-Sitter acceleration ($w_{\text{eff}} = -1$) only if

$$0 \leq m(r) \leq 1 \quad \text{at} \quad r = -2 \quad \text{or} \quad m(r) = -r - 1 \rightarrow \pm\infty \quad (\text{Class II}). \quad (9.73)$$

- The matter epoch is followed by a non-phantom accelerated attractor ($w_{\text{eff}} \geq -1$) only if $m = -r - 1$ and

$$(\sqrt{3} - 1)/2 < m(r) \leq 1 \quad \text{and} \quad m'(r) < -1 \quad (\text{Class IV}). \quad (9.74)$$

Moreover, the curve $m(r)$ must connect with continuity the vicinity of the matter point $P_5 : (r, m) = (-1, 0)$ with one of the accelerated regions. The Class II and IV models are characterized by $m(r)$ curves that satisfy these requirements and lead therefore to an acceptable cosmology.

In the Class III models the curve $m(r)$ intersects the critical line at m small and negative. In this case the saddle eigenvalue takes a very large real value and the matter era is practically unstable and therefore generically very short. Moreover, most trajectories will be attracted by the strongly phantom attractor with $w_{\text{eff}} < -7.6$ which is in contrast with observations.

The cases with $m'(r) = -1$ or $m'(r) \rightarrow \pm\infty$ at the critical points are not covered in our linear approach and a higher-order or numerical analysis is necessary. Also the power-law model $f(R) = R^{-n}$ is a rather special case in a sense that it gives a transition from the quasi matter era to the strongly phantom epoch with a *constant* negative m . However we showed that this model is not cosmologically acceptable because of the absence of the prolonged matter epoch. We have also studied analytically and numerically models like $f(R) = R + \alpha R^{-n}$, $R^p (\log \alpha R)^q$, $R^p \exp(qR)$, $R^p \exp(q/R)$, $(R^a - \Lambda)^b$ and others and have confirmed the conclusions drawn from the $m(r)$ approach. See Table 9.1 for the summary of the classification of a sample of $f(R)$ dark energy models.

As we have seen, the variable $m = Rf_{,RR}/f_{,R}$ plays a central role to determine the cosmological viability of $f(R)$ dark energy models. The Λ CDM model, $f(R) = R - \Lambda$, corresponds to $m = 0$ at

all times, which thus satisfies the condition for the existence of the matter era ($m \approx 0$) followed by the de-Sitter point at $m(r = -2) = 0$. The difference from the line $m = 0$ characterises the deviation from the Λ CDM model. If the deviation from $m = 0$ is small, it is expected that such models are cosmologically viable.

We conclude with a comment concerning a possible signature of $f(R)$ cosmology. The standard matter era can be realized with $m \rightarrow \pm 0$. As we have seen, in all successful cases we analyzed in this work, the matter era is realized through damped oscillations with positive m . This raises the obvious question of whether such oscillations are observable and whether they could be taken as a signature of modified gravity. This question is left to future work. An additional interesting direction to investigate is the evolution of cosmological perturbations in $f(R)$ dark energy models in order to confront with the datasets of CMB and large scale structure along the lines of Refs. [Song 07, Bean 07, Faulkner 07].

Troisième partie

Croissance des perturbations linéaires

Théorie des perturbations

Sommaire

10.1 Origine des perturbations	115
10.2 Métrique de fond et perturbations	119
10.3 Variables invariantes de jauge	121
10.4 Perturbations du tenseur énergie-impulsion	122
10.5 Equations des perturbations	123
10.6 Equations de conservation	124
10.7 Evolution	125

10.1 Origine des perturbations

La formation des grandes structures est l'une des grandes questions cosmologiques. Toute inhomogénéité entraîne dans un univers statique la formation de structure sous l'action de la gravitation. Cependant, l'expansion de cet espace et la pression de radiation ralentissent cette croissance. Il est alors très intéressant de se poser la question des mécanismes de telles fluctuations. Différents mécanismes ont été proposés afin d'expliquer l'origine des fluctuations de la métrique. J'exposerai deux grandes théories pour expliquer les inhomogénéités observées.

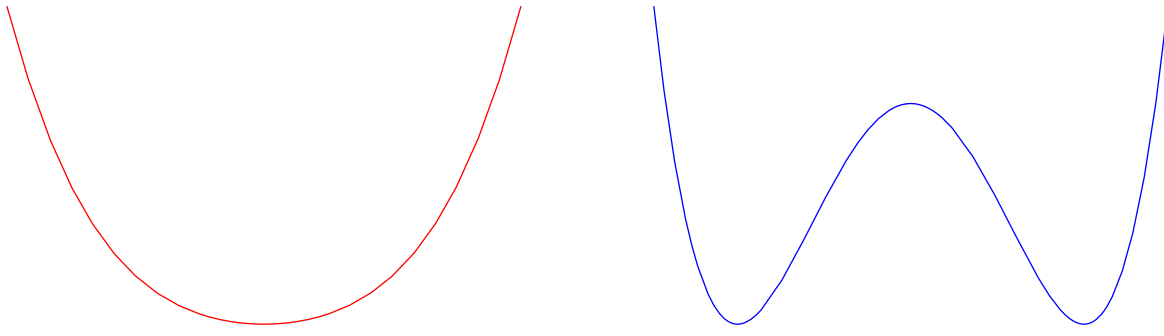
10.1.1 Les défauts topologiques

Les fluctuations primordiales peuvent être engendrées par une distribution de matière inhomogène qui ne contribue que faiblement à la densité d'énergie totale de l'univers. Cette origine serait dû à la formation de défauts topologiques à la suite de transition de phase dans l'univers primordial [Kibble 80].

Pour en donner une idée, je vais expliciter un exemple simple. Imaginons un champ scalaire réel ϕ dont la théorie est invariante sous la symétrie $\mathbb{Z}_2$ ($\phi \leftrightarrow -\phi$).

On utilise souvent un potentiel dit en "chapeau mexicain" afin de générer la brisure de symétrie. Soit

$$V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$$

FIG. 10.1 – $\mu^2 < 0$ $\hookrightarrow$ FIG. 10.2 – $\mu^2 > 0$

Ce potentiel possède deux configurations, selon le signe de μ^2 . La brisure de symétrie se produit lorsque l'on passe de l'état $\mu^2 < 0$ vers $\mu^2 > 0$. L'univers peut avoir une telle transition avec un paramètre μ dépendant de la température. Un refroidissement de l'univers entraîne la transition de phase. La valeur moyenne de ce champ dans son état fondamental devient alors non nulle.

$$\langle \phi \rangle_0 = 0 \quad \hookrightarrow \quad \langle \phi \rangle_0 = \pm \sqrt{\mu^2/\lambda} \quad (10.1)$$

Pour des régions de l'espace, suffisamment éloignées, il n'y a aucune raison que ce champ choisisse le même état fondamental. Les régions où le champ est dans l'état fondamental $+\sqrt{\mu^2/\lambda}$ sont nécessairement séparées des zones $-\sqrt{\mu^2/\lambda}$ par une 2-surface où $\langle \phi \rangle = 0$. Cette surface où le champ est dans l'état avant la brisure définit un défaut topologique.

Il s'agit du mécanisme de Kibble, qui s'écrit de façon plus général par la brisure de symétrie d'un groupe G en un de ses sous-groupes H .

Ce modèle très élégant a cependant de nombreux problèmes. En effet, l'existence de tels murs a des conséquences cosmologiques qui ne sont pas encore observées.

Ce processus a une conséquence philosophique forte, le principe cosmologique n'est pas viable dans de tels modèles. En effet ces hypersurfaces déterminent des directions privilégiées. Afin de "sauver" ce principe il faut imposer qu'il y ait une faible densité de ces murs. De plus les photons du CMB sont nécessairement en interactions avec de tels domaines, ce qui entraîne des anisotropies qui ne sont pas compatibles avec les observations.

Le deuxième grand problème est celui des monopôles. Ces particules sont inévitablement produites dans des modèles de brisure de symétrie. Or aucune observation n'en fait mention. Il est alors nécessaire d'imaginer des mécanismes afin d'éliminer ces monopôles.

Ainsi partant d'un modèle relativement simple et élégant, on est confronté à différents problèmes non résolus.

10.1.2 L'inflation

Selon le modèle inflationnaire [Starobinsky 80, Guth 81, Linde 82, Albrecht 82, Linde 83, Linde 84, La 89a, La 89b, Linde 05], les inhomogénéités de la métrique sont les conséquences quantiques [Bunch 78, Hawking 82, Starobinsky 82], [Guth 82, Fischler 85] d'un champ scalaire : l'inflaton.

Ce champ ϕ produit une accélération de l'univers, ce qui permet de résoudre différents problèmes tels que l'horizon, l'homogénéité, la platitude et l'origine des perturbations. Je vais pour cela rappeler

quelques points de cette théorie vaste et complexe.

On suppose l'existence d'un champ scalaire dans un potentiel $V(\phi)$ dont l'action est

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi) \right\} d^4x \quad (10.2)$$

Il s'agit d'une équation déjà rencontrée (5.1). Ainsi nous avons vu que w peut varier entre -1 et $+1$. Afin de résoudre différents problèmes, il convient de supposer que le champ est relativement constant au cours du temps, il s'agit de l'hypothèse de *slow-roll* ou de roulement lent. Nous avons donc une dynamique proche de celle d'une constante cosmologique soit une expansion accélérée de l'univers.

Pendant cette phase l'univers est composé principalement de champs qui fixent donc la dynamique de l'univers. A cette époque les fluctuations de ce champ sont d'origine quantique, dont l'amplitude de fluctuation est fixée par la forme du potentiel et la fonction de Hubble. Ensuite nous allons avoir une transition quantique-classique de ces champs, qui deviennent alors en fin d'inflation des champs stochastiques classiques gaussiens.

Ces champs sont liés à la métrique selon l'équation d'Einstein.

En effet si l'on écrit le champ comme une composante homogène plus des perturbations

$$\phi(\eta, \mathbf{x}) = \phi(\eta) + \epsilon \delta\phi^{(1)}(\eta, \mathbf{x}) + \epsilon^2 \delta\phi^{(2)}(\eta, \mathbf{x}) + \dots \quad (10.3)$$

alors de même, le tenseur énergie-impulsion peut se développer selon le paramètre ϵ

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} + \epsilon T_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon^2 T_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (10.4)$$

Ce qui entraîne une perturbation de la métrique sous la forme

$$g_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{x}) = g_{\mu\nu}^{(0)}(\eta) + \epsilon g_{\mu\nu}^{(1)}(\eta, \mathbf{x}) + \epsilon^2 g_{\mu\nu}^{(2)}(\eta, \mathbf{x}) + \dots \quad (10.5)$$

où $g_{\mu\nu}^{(0)}(\eta)$ est la métrique de Friedmann.

On verra par la suite que cette métrique peut se réécrire selon la décomposition dite SVT (scalaire-vecteur-tenseur)

Je vais décrire brièvement la transition quantique-classique de l'inflaton.

Nous savons que le champ évolue selon l'équation de Klein-Gordon dans un espace dynamique :

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{a^2} \partial_i \partial^i \phi + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi} \quad (10.6)$$

où $\dot{}$ est la dérivation par rapport au temps.

Ainsi si l'on réécrit le champ sous la forme d'une quantité homogène perturbée par une fluctuation quantique.

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \phi_0(t) + \delta\phi(t, \mathbf{x}), \quad \delta\phi \ll \phi_0 \quad (10.7)$$

On a à l'ordre zéro i.e. la partie homogène, les équations de Friedmann et l'équation de Klein-Gordon.

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}_0^2 + V(\phi_0) \right) \quad (10.8)$$

$$\dot{H} = -4\pi G \dot{\phi}_0 \quad (10.9)$$

$$\ddot{\phi}_0 = -3H\dot{\phi}_0 - \frac{dV}{d\phi}(\phi_0) \quad (10.10)$$

L'équation (10.6) donne au premier ordre

$$\delta\ddot{\phi} - \frac{1}{a^2} \Delta \delta\phi + 3H\delta\dot{\phi} = -\frac{d^2V}{d\phi^2}(\phi_0) \delta\phi \quad (10.11)$$

Dans l'approximation de *slow-roll* le terme de droite, qui est identifié à la masse, est négligeable. Ainsi on est ramené à une théorie libre (sans terme potentiel) que l'on peut décomposer à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation.

$$\delta\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ a_k f_k(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a_k^\dagger f_k^*(t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right\} \quad (10.12)$$

Ce champ est quantifié par les relations de commutation imposées suivantes

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta^3(k - k'), \quad [a_k, a_{k'}] = 0, \quad [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \quad (10.13)$$

Puisque les modes sont indépendants, l'équation pour f_k donne alors

$$\ddot{f}_k(t) + 3H\dot{f}_k(t) + \left(\frac{k}{a}\right)^2 f_k(t) = 0 \quad (10.14)$$

Cette équation peut être résolue dans l'approximation d'un espace de de Sitter, i.e. que l'on peut considérer la fonction de Hubble H comme constante. Ainsi le facteur d'échelle varie comme suit

$$a(t) = a_0 e^{Ht} \quad (10.15)$$

Ce qui permet de calculer la solution de cette équation (10.14)

$$f_k(t) = A(k) \left(\frac{k}{aH} + i \right) e^{i\frac{k}{aH}} + B(k) \left(\frac{k}{aH} - i \right) e^{-i\frac{k}{aH}} \quad (10.16)$$

Afin de déterminer les conditions initiales, on regarde la solution pour des modes plus petits que le rayon de Hubble ($k \gg aH$). L'équation (10.14) se réduit à celle d'un champ scalaire libre dans un espace de Minkowski, la courbure devient imperceptible :

$$\ddot{f}_k(t) + \left(\frac{k}{a}\right)^2 f_k(t) = 0 \quad (10.17)$$

dont les solutions fixent les conditions sur $A(k)$ et $B(k)$.

Ainsi si l'on conserve que les fréquences positives

$$f_k(t) = \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(i + \frac{k}{aH} \right) e^{i\frac{k}{aH}} \quad (10.18)$$

On voit que ce champ oscille pour un mode initialement sub-Hubble ($k \gg aH$) puis il devient constant (il gèle) lorsque sa longueur d'onde devient super-Hubble ($k \ll aH$)

Partant d'un champ quantique qui oscille, celui-ci va geler pendant l'inflation lorsque sa longueur d'onde devient super-Hubble. Alors, la fluctuation quantique du champ prend la forme suivante

$$\delta\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{iH}{4\pi^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{k^{3/2}} \left\{ a_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} - a_k^\dagger e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right\} \quad (10.19)$$

où l'on a supposé que la fonction de Hubble était indépendante du mode k . Ceci est relativement vraie puisque pendant la phase d'inflation H varie peu, il est constant dans un espace purement de Sitter.

On voit alors que la moyenne de ce champ est nulle :

$$\langle \delta\phi(x, t) \rangle = \langle 0 | \delta\phi(x, t) | 0 \rangle = 0 \quad (10.20)$$

La fonction de corrélation à deux points

$$\langle \delta\phi(x, t) \delta\phi(x', t) \rangle \propto \frac{H^2}{4\pi^2} \quad (10.21)$$

Et enfin les moments suivants non nuls sont ceux pour lesquels on a un nombre pair de fonctions $\delta\phi$. Cette moyenne étant le produit des fonctions de corrélation à deux points.

$$\left\langle \prod_{i=1}^{2q} \delta\phi(x_i, t) \right\rangle = \sum_{(i,j)} \prod \langle \delta\phi(x_i, t) \delta\phi(x_j, t) \rangle \quad (10.22)$$

$$\left\langle \prod_{i=1}^{2q+1} \delta\phi(x_i, t) \right\rangle = 0 \quad (10.23)$$

Ces propriétés sont caractéristiques d'un champ stochastique gaussien.

Ainsi l'inflation génère de façon naturelle des fluctuations qui se retrouvent dans les fluctuations de la métrique. Comme les fluctuations sont faibles on peut alors considérer notre espace de fond comme celui de Friedmann que l'on perturbe. La théorie sera développée au paragraphe suivant.

Il faut cependant préciser que ce raisonnement n'est pas totalement réaliste, la phase d'inflation n'est pas exactement de Sitter mais quasi-de-Sitter. Cependant les résultats sont identiques.

10.2 Métrique de fond et perturbations

Dans cette partie, on suppose que l'espace-temps dévie d'un espace-temps idéal homogène et isotrope d'une quantité infime. Ainsi la métrique peut être séparée en deux parties, la première qui décrira le background et la seconde l'espace réel. Cette approche est raisonnable puisque l'univers est perçu comme homogène et isotrope à grande échelle.

La métrique de fond peut être considérée comme celle de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(0)} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right) \quad (10.24)$$

$$= -dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (10.25)$$

$$= a^2(\eta) \left(-d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right) \quad (10.26)$$

où k est la courbure spatiale, η le temps conforme et γ_{ij} est la partie spatiale de la métrique (si $k = 0$ $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$)

Nous devons maintenant rajouter à cette métrique de fond une perturbation afin de décrire l'univers réel :

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu} \quad (10.27)$$

Cette perturbation de la métrique est en général décomposée en trois catégories. Les perturbations seront scalaires, vectorielles ou tensorielles.

– Perturbations scalaires (fluctuations de la densité)

On peut introduire un champ ϕ pour la composante g_{00} , le terme g_{i0} ne peut contenir un champ scalaire que par une dérivation (pour que ce soit indicé) $\nabla_i B$. Enfin il y a deux manières d'introduire un champ scalaire dans la partie spatiale, soit en multipliant le terme γ_{ij} par ψ , soit par la dérivation d'un champ $\nabla_i \nabla_j E$. Ainsi la métrique, pour les perturbations scalaires, sera représentée par 4 champs scalaire (ϕ, ψ, B, E) qui sont des fonctions de l'espace et du temps.

$$\delta g_{\mu\nu}^{(s)} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -2\phi & \nabla_i B \\ \nabla_i B & -2(\psi\gamma_{ij} - \nabla_i \nabla_j E) \end{pmatrix} \quad (10.28)$$

– Perturbations vectorielles (vorticité de la matière)

Celles-ci sont construites par 2 vecteurs S_i et F_i à 3 composantes de divergence nulle.

$$\nabla_i S^i = \nabla_i F^i = 0 \quad (10.29)$$

Si ces contraintes n'étaient pas satisfaites, alors le vecteur pourrait se décomposer en un gradient d'un champ scalaire et d'un vecteur de divergence nul. C'est l'analogue de la décomposition transverse et normale d'un vecteur. Ainsi on est ramené au cas d'un champ scalaire que l'on introduit dans les perturbations scalaires et d'un terme vectoriel de divergence nulle.

La métrique s'écrit alors sous la forme

$$\delta g_{\mu\nu}^{(v)} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & -S_i \\ -S_i & \nabla_i F_j + \nabla_j F_i \end{pmatrix} \quad (10.30)$$

– Perturbations tensorielles (ondes gravitationnelles)

Le tenseur des perturbations est construit à l'aide d'un tenseur 3×3 symétrique de divergence nulle et sans trace. Ce tenseur ne contient alors pas de termes scalaires ou vectoriels.

$$\delta g_{\mu\nu}^{(t)} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix} \quad (10.31)$$

On a dix fonctions indépendantes dans la métrique, puisque c'est une matrice 4×4 symétrique. Ces degrés de liberté se retrouvent dans la métrique perturbée. En effet on a 4 champs scalaires, 4 composantes pour les vecteurs et 2 composantes libres pour le tenseur.

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}^{(s)} + \delta g_{\mu\nu}^{(v)} + \delta g_{\mu\nu}^{(t)}) dx^\mu dx^\nu \\
&= a^2(\eta) \{ -(1 + 2\phi) d\eta^2 + 2(\nabla_i B - S_i) dx^i d\eta \\
&\quad + [(1 - 2\psi)\gamma_{ij} + 2\nabla_i \nabla_j E + \nabla_i F_j + \nabla_j F_i + h_{ij}] dx^i dx^j \}
\end{aligned} \tag{10.32}$$

10.3 Variables invariantes de jauge

Afin d'avoir des quantités physiques il faut définir des quantités invariantes de jauge, i.e. qui ne dépendent pas de la forme choisie des coordonnées. Pour appréhender ce problème, deux approches sont possibles. La forme passive et la forme active.

Dans l'approche passive on considère une variété M ainsi qu'un système de coordonnées x^α . On définit une sorte de valeur moyenne par la fonction $Q^{(0)}(x^\alpha)$, celle-ci n'est pas une quantité géométrique. Ainsi si l'on définit un autre système de coordonnées $\tilde{x}^\alpha$, la forme de la fonction ne changera pas.

Définissons maintenant, la perturbation de Q en un point p de la variété

$$\delta Q(p) = Q(x^\alpha(p)) - Q^{(0)}(x^\alpha(p)) \tag{10.33}$$

Dans un autre système de coordonnée $\tilde{x}^\alpha$

$$\widetilde{\delta Q}(p) = \tilde{Q}(\tilde{x}^\alpha(p)) - Q^{(0)}(\tilde{x}^\alpha(p)) \tag{10.34}$$

Je rappelle que $\tilde{Q}^{(0)}(\tilde{x}^\alpha(p)) = Q^{(0)}(\tilde{x}^\alpha(p))$

Ainsi dans le changement de variable $x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha$, la transformation

$$\delta Q(p) \rightarrow \widetilde{\delta Q}(p) \tag{10.35}$$

est appelée une transformation de jauge.

Dans la seconde approche dite active, il faut considérer deux variétés. Une variété N qui correspond à l'espace de fond et une variété M qui est l'espace réel (donc une perturbation de N). On définit un système de coordonnées sur N par x_N^α . Ainsi tout difféomorphisme D induit un système de coordonnées sur M par

$$D : N \rightarrow M \tag{10.36}$$

$$x_N^\alpha \rightarrow x_M^\alpha \tag{10.37}$$

Si l'on définit une fonction Q sur M . Alors, on peut définir la perturbation de Q associée à un difféomorphisme D i.e. au système de coordonné induit $D : x_N^\alpha \rightarrow x_M^\alpha$ par

$$\delta Q(p) = Q(p) - Q^{(0)}(D^{-1}(p)) \tag{10.38}$$

où D^{-1} est l'application réciproque de D , Q est la fonction évaluée en x_M^α .

Maintenant si l'on définit un autre difféomorphisme $\tilde{D}$

$$\tilde{D} : N \rightarrow M \quad (10.39)$$

$$: x_N^\alpha \rightarrow \tilde{x}_M^\alpha \quad (10.40)$$

alors cela définit une autre perturbation

$$\widetilde{\delta Q}(p) = \tilde{Q}(p) - Q^{(0)}(\tilde{D}^{-1}(p)) \quad (10.41)$$

où $\tilde{Q}$ est la fonction Q dans les coordonnées $\tilde{x}_M^\alpha$

Ainsi dans cette approche la transformation de jauge est générée par le changement de difféomorphisme $D \rightarrow \tilde{D}$, cela est associé au changement de coordonnées dans $M : x_M^\alpha \rightarrow \tilde{x}_M^\alpha$

Les deux approches sont alors totalement équivalentes.

A la suite d'un changement de coordonnées

$$x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha \quad (10.42)$$

On a une variation de la perturbation

$$\Delta Q = \widetilde{\delta Q} - \delta Q = \mathcal{L}_\xi Q \quad (10.43)$$

où $\mathcal{L}_\xi$ est la dérivée de Lie dans la direction ξ .

Dans de telles transformations la métrique n'est pas invariante, ainsi si l'on s'intéresse aux perturbations scalaires (éq. 10.28), les quatre fonctions $\{\phi, \psi, B, E\}$ sont transformées. Cependant, la physique ne doit pas dépendre de la jauge, d'un choix particulier de coordonnées. Nous devons construire des variables invariantes de jauge, i.e. qui restent identiques sous une telle transformation (10.42). Il existe une infinité de jauge et évidemment toute combinaison de variables invariantes de jauge reste des variables invariantes de jauge. Ce choix est alors dictée par la "simplicité" des calculs et par l'interprétation physique de ces grandeurs.

Si l'on impose une jauge cela revient dans un espace-temps à quatre dimensions à définir quatre contraintes. Ainsi les dix degrés de liberté initiaux ne sont plus que six ($10 - 4$), soit deux scalaires, un 3-vecteur de divergence nulle et un tenseur 3×3 symétrique, sans trace et transverse.

L'une des jauges les plus utilisées et que j'utiliserai par la suite, est la jauge longitudinale où la métrique s'écrit pour la partie scalaire sous la forme

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2(\eta) \{ -(1 + 2\Phi)d\eta^2 + (1 - 2\Psi) \gamma_{ij} dx^i dx^j \} \\ &= -(1 + 2\Phi)dt^2 + a^2(t) (1 - 2\Psi) \gamma_{ij} dx^i dx^j \end{aligned} \quad (10.44)$$

10.4 Perturbations du tenseur énergie-impulsion

On définit le tenseur énergie-impulsion pour un fluide parfait de densité ρ et de pression P comme suit

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (10.45)$$

De la même façon il faut définir des variables invariantes de jauge. Ce qui permet de définir les quantités perturbées.

$$T_0^0 = -(\rho_0 + \delta\rho^{\text{inv}}) \quad (10.46)$$

$$T_i^0 = -(\rho_0 + P_0)\delta v_i^{\text{inv}} \quad (10.47)$$

$$T_j^i = (P_0 + \delta P^{\text{inv}})\delta_j^i \quad (10.48)$$

Où les quantités indicées par *inv* sont les nouvelles quantités invariantes de jauge. Par la suite cet indice sera omis. De plus v_i , le terme de vitesse, est un vecteur. Il est donc décomposable en une partie qui aura une contribution aux perturbations scalaires ainsi qu'une partie nécessaire aux perturbations vectorielles. En effet

$$v_i = v_i^{\parallel} + v_i^{\perp}, \quad \text{où } \nabla^i v_i^{\perp} = 0 \quad (10.49)$$

Ainsi la composante responsable des perturbations scalaire sera la partie longitudinale.

10.5 Equations des perturbations

Après avoir défini les différentes quantités perturbées, l'équation d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (10.50)$$

donne une équation de fond

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{(0)} \quad (10.51)$$

ainsi que la perturbation de cette équation

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu} \quad (10.52)$$

L'équation (10.51) donne les équations de Friedmann

$$3\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right) = 8\pi G \rho_0 \quad (10.53)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G P_0 \quad (10.54)$$

où $\dot{}$ est une dérivation par rapport au temps t

Les perturbations (10.52, voir Annexe C) vont décrire l'écart à ces équations.

$$\frac{2}{a^2} (3\mathcal{H}^2 \phi + 3\mathcal{H}\psi' - \Delta\psi) = -8\pi G \delta\rho \quad (10.55)$$

$$\frac{2}{a^2} \nabla_i (\mathcal{H}\phi + \psi') = \frac{8\pi G}{a} (\rho_0 + P_0) \delta v_i \quad (10.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} [\nabla^i \nabla_j (\psi - \phi) + \delta_j^i (2\psi'' + 4\mathcal{H}\psi' + \Delta(\phi - \psi) \\ + 2\mathcal{H}\phi' + 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi)] = 8\pi G \delta P \delta_j^i \end{aligned} \quad (10.57)$$

où $\mathcal{H}$ est la fonction de Hubble en temps conforme et $'$ est une dérivation par rapport au temps conforme η .

L'équation (10.57) apporte une contrainte très forte sur les deux potentiels (ϕ, ψ) , il suffit de regarder cette équation pour $i \neq j$.

$$\forall i \neq j, \quad \nabla^i \nabla_j (\psi - \phi) = 0 \quad (10.58)$$

$$\text{Dans une décomposition en mode de Fourier, } -k^i k_j (\psi - \phi) = 0 \quad (10.59)$$

Or pour des raisons de symétrie (isotropie) $k_i = k_j = k$, l'équation (10.59) se ramène à $-k^2(\psi - \phi) = 0$, soit

$$\psi = \phi \quad (10.60)$$

Les fluctuations de pression dépendent de la densité d'énergie et de l'entropie, i.e.

$$\delta P = \left(\frac{\delta P}{\delta \rho} \right)_S \delta \rho + \left(\frac{\delta P}{\delta S} \right)_\rho \delta S \quad (10.61)$$

Ainsi dans l'hypothèse de perturbations purement adiabatique

$$\delta P = \left(\frac{\delta P}{\delta \rho} \right)_S \delta \rho \quad (10.62)$$

$$= c_s^2 \delta \rho \quad (10.63)$$

où c_s est la vitesse du son du fluide dans le milieu

Les équations (10.55,10.57) se réécrivent alors

$$3\mathcal{H}^2 \phi + 3\mathcal{H}\phi' - \Delta \phi = -4\pi G a^2 \delta \rho \quad (10.64)$$

$$\phi'' + 3\mathcal{H}\phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi = 4\pi G c_s^2 a^2 \delta \rho \quad (10.65)$$

Ce qui donne

$$\phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\phi' - c_s^2 \Delta \phi + (2\mathcal{H}' + (1 + 3c_s^2)\mathcal{H}^2)\phi = 0 \quad (10.66)$$

10.6 Equations de conservation

L'équation de conservation en relativité générale s'écrit

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\sigma}^\mu T_\nu^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma T_\sigma^\mu = 0 \quad (10.67)$$

Ce qui donne deux équations dérivant des parties temporelles ($\nabla_\mu T_0^\mu$) et spatiales ($\nabla_\mu T_i^\mu$)

$$\rho' + 3(\mathcal{H} - \phi')(\rho + P) + \partial_i [(\rho + P)v^i] = 0 \quad (10.68)$$

$$\partial_\eta [(\rho + P)v_i] + 4\mathcal{H}(\rho + P)v_i + \partial_i P + (\rho + P)\partial_i \phi = 0 \quad (10.69)$$

où $\rho = \rho_0 + \delta \rho$, $P = P_0 + \delta P$

On trouve à l'ordre zéro pour l'équation (10.68)

$$\rho'_0 + 3\mathcal{H}(\rho_0 + P_0) = 0 \quad (10.70)$$

Si l'on définit

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho_0}, \quad \delta v_i = \nabla_i v, \quad \text{et} \quad \theta = \nabla^i \delta v_i = \Delta v \quad (10.71)$$

Les équations au premier ordre donnent alors

$$\delta\rho' + 3\mathcal{H}\delta\rho(1 + c_s^2) + \rho_0(1 + w)(\theta - 3\phi') = 0 \quad (10.72)$$

$$\partial_\eta [(1 + w)v_i] + \mathcal{H}v_i(1 + w)(1 - 3w) + c_s^2 \partial_i \delta + (1 + w)\partial_i \phi = 0 \quad (10.73)$$

10.7 Evolution

Ces différentes équations de perturbations sont facilement solubles dans des cas simples. Il suffit de travailler dans l'espace de Fourier. Ainsi chaque mode devient simplement une fonction du temps. On définit des modes hors du rayon de Hubble, i.e. qui ont des longueurs d'onde plus grande que le temps conforme ($\lambda > \eta$). Dans ce cas les fonctions ont principalement une dépendance en temps. Les dérivées spatiales sont négligeables ($\frac{\partial}{\partial x} < \frac{\partial}{\partial \eta}$) dans le mode super-Hubble.

On a par exemple dans le cas d'un fluide de matière $c_s^2 = 0$ et $w = 0$.

Ainsi les équations (10.68,10.69,10.55,10.56,10.57) se réécrivent

$$\psi'' + 3\mathcal{H}\psi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi = 0 \quad (10.74)$$

$$3\mathcal{H}^2\psi + 3\mathcal{H}\psi' - \Delta\psi = -4\pi G a^2 \delta\rho_m \quad (10.75)$$

$$\nabla_i(\mathcal{H}\psi + \psi') = 4\pi G a \rho_m^{(0)} \delta v_i \quad (10.76)$$

$$\delta\rho' + 3\mathcal{H}\delta\rho + \rho_0(\theta - 3\psi') = 0 \quad (10.77)$$

$$\partial_\eta v_i + \mathcal{H}v_i + \partial_i \psi = 0 \quad (10.78)$$

Soit dans l'espace de Fourier

$$\psi'' + 3\mathcal{H}\psi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\psi = 0 \quad (10.79)$$

$$3\mathcal{H}^2\psi + 3\mathcal{H}\psi' + k^2\psi = -4\pi G a^2 \delta\rho_m \quad (10.80)$$

$$\mathcal{H}\psi + \psi' = 4\pi G a \rho_m^{(0)} v \quad (10.81)$$

$$\delta\rho' + 3\mathcal{H}\delta\rho - \rho_0(k^2 v + 3\psi') = 0 \quad (10.82)$$

$$\partial_\eta v + \mathcal{H}v + \psi = 0 \quad (10.83)$$

On définit la perturbation de la densité de matière invariante de jauge par

$$\delta_m = \frac{\delta\rho_m}{\rho_m^{(0)}} + 3\mathcal{H}v \quad (10.84)$$

Ainsi d'après (10.82,10.83)

$$\dot{\delta}_m = 3\dot{B} + k^2 v \quad (10.85)$$

avec $B = \psi + \mathcal{H}v$

soit

$$\ddot{\delta}_m + \mathcal{H}\dot{\delta}_m + k^2\psi = 3(\ddot{B} + \mathcal{H}\dot{B}) \simeq 0 \quad (10.86)$$

De plus, pour des modes sub-Hubble ($k \gg \mathcal{H}$), l'équation (10.80) donne

$$k^2\psi = -4\pi G a^2 \rho_{(0)} \delta_m \quad (10.87)$$

qui n'est rien d'autres que l'équation de Poisson.

Finalement les équations (10.86,10.87) conduisent à

$$\ddot{\delta}_m + \mathcal{H}\dot{\delta}_m = 4\pi G a^2 \rho_{(0)} \delta_m \quad (10.88)$$

Cette équation a un mode croissant pendant la phase de matière $\delta_m \propto a \propto \eta^2$ qui conduit à la formation de grandes structures.

Pour des théories de gravitation modifiée, cette équation (10.88) est différente. En effet on a une modification de l'équation de Poisson, ce qui entraîne a priori la redéfinition de la constante gravitationnelle. Ainsi en théorie scalaire-tenseur [Esposito-Farese 01] ont montré que l'équation (10.87) devient

$$k^2\phi \approx -4\pi G_{\text{eff}} a^2 \rho_m^{(0)} \delta_m \quad (10.89)$$

De même en théorie $f(R)$ une équation du même type a été trouvée [Tsujikawa 07].

Ainsi la modification de l'équation (10.88) entraîne une modification de la croissance des perturbations et donc de la formation de grandes structures. Celle-ci apporte alors des contraintes forte sur le modèle.

Nous verrons par la suite que ces perturbations permettent de distinguer une théorie de gravitation modifiée d'un modèle d'énergie noire en relativité générale.

On the growth of linear perturbations

David Polarski, Radouane Gannouji

Sommaire

11.1 Introduction	128
11.2 Linear growth of perturbations	128
11.3 Some specific models	131
11.4 Summary and conclusions	133

We consider the linear growth of matter perturbations in various dark energy (DE) models. We show the existence of a constraint valid at $z = 0$ between the background and dark energy parameters and the matter perturbations growth parameters. For Λ CDM $\gamma'_0 \equiv \frac{d\gamma}{dz}|_0$ lies in a very narrow interval $-0.0195 \leq \gamma'_0 \leq -0.0157$ for $0.2 \leq \Omega_{m,0} \leq 0.35$. Models with a constant equation of state inside General Relativity (GR) are characterized by a quasi-constant γ'_0 , for $\Omega_{m,0} = 0.3$ for example we have $\gamma'_0 \approx -0.02$ while γ_0 can have a nonnegligible variation. A smoothly varying equation of state inside GR does not produce either $|\gamma'_0| > 0.02$. A measurement of $\gamma(z)$ on small redshifts could help discriminate between various DE models even if their γ_0 is close, a possibility interesting for DE models outside GR for which a significant γ'_0 can be obtained.

Publié dans Phys. Lett. B 660, 439-443, 2008

11.1 Introduction

There is growing observational evidence for the late-time accelerated expansion of our universe [Perlmutter 97, Riess 98, Perlmutter 99b, Astier 06, Riess 06]. This radical departure from conventional decelerated expansion is certainly a major challenge to cosmology. This non standard expansion could be due to an exotic non clustered component yet to be determined with a sufficiently negative pressure called Dark Energy (DE). By analogy all models trying to explain the accelerated expansion are called DE models but many models go now well beyond this simple picture. While the usual Friedmann equations in the presence of a cosmological constant term Λ seem to be in good agreement with the data, it is clear that other models with a variable equation of state are allowed as well [Sahni 00, Padmanabhan 03, Copeland 06, Sahni 06]. While a cosmological constant universe is appealing because of its simplicity it nonetheless poses the problem of the magnitude of the cosmological constant Λ . This is the basic incentive to look for other models where DE has a variable equation of state. An additional incentive comes from the possibility to have phantom dark energy at low redshifts as this excludes the quintessence models, models with a minimally coupled scalar field inside GR [Ratra 88, Wetterich 88]. It might also be that one should change the theory of gravity, as for example in scalar-tensor models [Fujii 00, Bartolo 00, Perrotta 00, Gannouji 06, Boisseau 00], and a lot of research has focused recently on other modified gravity models and higher dimensional models. Sometimes, the background expansion going back to high redshifts is enough to rule out some models [Amendola 07b], but typically this is not the case : models of a very different kind will be able to have a viable background expansion where the low redshift expansion is in accordance with SNIa data.

Depending on the gravity theory one is considering, the growth of the perturbations, even at the linear level, will be affected. Indeed, while distance luminosity measurements probe the cosmic expansion, matter perturbations probe in a independent way (see e.g. [Bludman 07]) the gravity theory responsible for their growth (and of course also for the cosmic expansion). The growth rate of matter perturbations could be probed with three dimensional weak lensing surveys (see e.g. [Heavens 07]). Hence two DE models based on different gravitation theories can give the same late-time accelerated expansion and still differ in the matter perturbations they produce [Starobinsky 98]. This fact could provide an additional important way to discriminate between various models (see e.g. [Huterer 07, Di Porto 07, Kiakotou 07, Nesseris 08]) and it is therefore important to characterize as accurately as possible the growth of matter perturbations which is the aim of the present work.

11.2 Linear growth of perturbations

Let us consider the dynamics of the linear matter perturbations. These perturbations satisfy a modified equation of the type

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G_{\text{eff}} \rho_m \delta_m = 0, \quad (11.1)$$

The gravitational constant G_{eff} depends on the specific model under consideration and the corresponding modification of gravity. For example, as was shown in [Boisseau 00], for scalar-tensor DE models we have

$$G_{\text{eff}} = G_N \frac{F + 2(dF/d\Phi)^2}{F + \frac{3}{2}(dF/d\Phi)^2} = G_N \frac{1 + 2\omega_{BD}^{-1}}{1 + \frac{3}{2}\omega_{BD}^{-1}}. \quad (11.2)$$

An equation similar to (11.1) is also found for example in DGP models. The physics behind it is a modification of Poisson's equation (see e.g. [Esposito-Farese 01]) according to (we drop the subscript m)

$$\frac{k^2}{a^2} \phi = -4\pi G \rho \delta \rightarrow \frac{k^2}{a^2} \phi = -4\pi G_{\text{eff}} \rho \delta. \quad (11.3)$$

Of course, more drastic modifications are possible as well. In particular more elaborate DE models can be considered that could further increase the degeneracy between models inside and outside GR (see e.g. [Kunz 07]). It is convenient to introduce the quantity $f = \frac{d \ln \delta}{d \ln a}$. Then the linear perturbations obey the equation

$$\frac{df}{dx} + f^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d \ln \Omega_m}{dx} \right) f = \frac{3}{2} \frac{G_{\text{eff}}}{G_{N,0}} \Omega_m. \quad (11.4)$$

with $x \equiv \ln a$. Equation (11.4) reduces to eq.(B7) given in [Wang 98] for $\frac{G_{\text{eff}}}{G_{N,0}} = 1$. The quantity δ is easily recovered using f as follows

$$\delta(a) = \delta_i \exp \left[\int_{x_i}^x f(x') dx' \right]. \quad (11.5)$$

We see that $f = p$ when $\delta \propto a^p$, in particular $f \rightarrow 1$ in Λ CDM for large z and $f = 1$ in an Einstein-de Sitter universe.

An important issue is to characterize departures on small redshifts for different models. It is well known that for in a Λ CDM universe one can write

$$f \simeq \Omega_m^\gamma, \quad (11.6)$$

with $\gamma = \text{constant} \sim 0.6$, an approach pioneered some time ago [Peebles 84] and generalised in [Lahav 91]. The characterization of the growth of matter perturbations using a parametrization of the form (11.6) has attracted a lot of interest in the hope to discriminate between DE models based on different gravity theories.

Of course it is possible to write in full generality

$$f = \Omega_m(z)^{\gamma(z)}. \quad (11.7)$$

Let us consider the quantity $\gamma' \equiv \frac{d\gamma}{dz}$. For many models it turns out that

$$\gamma(z) \approx \gamma_0 + \gamma'_0 z \quad 0 \leq z \leq 0.5. \quad (11.8)$$

As we will see later, this could have interesting observational consequences.

We now derive a constraint which is valid in general for any $\gamma(z)$. It is easy to obtain the following equation

$$-(1+z) \ln \Omega_m \gamma' + \Omega_m^\gamma + \frac{1}{2} (1 + 3(2\gamma - 1) w_{\text{eff}}) = \frac{3}{2} \frac{G_{\text{eff}}(z)}{G_{N,0}} \Omega_m^{1-\gamma}, \quad (11.9)$$

where $w_{\text{eff}} \equiv w_{DE} \Omega_{DE}$. From (11.9), it is easy to derive the following equation

$$\gamma'_0 = [\ln \Omega_{m,0}^{-1}]^{-1} \left[-\Omega_{m,0}^{\gamma_0} - 3(\gamma_0 - \frac{1}{2}) w_{\text{eff},0} + \frac{3}{2} \frac{G_{\text{eff},0}}{G_{N,0}} \Omega_{m,0}^{1-\gamma_0} - \frac{1}{2} \right]. \quad (11.10)$$

Equation (11.10) is further simplified in models for which $\frac{G_{\text{eff},0}}{G_{N,0}} = 1$ to very high accuracy. An example where this is the case is provided by scalar-tensor DE models for which $0 < \frac{G_{\text{eff},0}}{G_{N,0}} - 1 < 1.25 \times 10^{-5}$. We then obtain

$$\gamma'_0 = [\ln \Omega_{m,0}^{-1}]^{-1} \left[-\Omega_{m,0}^{\gamma_0} - 3(\gamma_0 - \frac{1}{2}) w_{\text{eff},0} + \frac{3}{2} \Omega_{m,0}^{1-\gamma_0} - \frac{1}{2} \right]. \quad (11.11)$$

This does not mean that equation (11.11) cannot differentiate between different gravitation theories satisfying $\frac{G_{\text{eff},0}}{G_{N,0}} = 1$ but rather that if it does so it is through the value of γ_0 . This value is of course

affected by the function $G_{\text{eff}}(z)$. We will assume below $\frac{G_{\text{eff},0}}{G_{N,0}} = 1$ to very high accuracy. As we see from (11.11), we have $\gamma'_0 = \gamma'_0(\gamma_0, \Omega_{m,0}, w_{DE,0})$ which is clearly equivalent to a constraint of the form

$$f(\gamma_0, \gamma'_0, \Omega_{m,0}, w_{DE,0}) = 0. \quad (11.12)$$

In this connection one should note that fitting functions of $\gamma(z)$ proposed in the literature, even though they give a satisfactory fit for $f(z)$ in models satisfying some assumptions, generically will not satisfy the constraint (11.12). In contrast the constraint (11.12) does not depend on any assumption about $w(z)$. For fixed $\Omega_{m,0}, w_{DE,0}$, there will be a value $\gamma_{0,cr}$ for which $\gamma'_0 = 0$. However we will have generically $\gamma_0 \neq \gamma_{0,cr}$ and therefore $\gamma'_0 \neq 0$.

Very generally, in any model for which the parameters $\Omega_{m,0}$ and w_{DE} (and hence $w_{DE,0}$) are given, one can compute numerically the function $\gamma(z)$ from the linear growth of the matter perturbations. Using (11.12) it is then possible to obtain γ'_0 . We will do this in the next Section for various models inside GR.

Before considering specific DE models, it is possible to derive some general consequences from the constraint (11.12). Generically γ'_0 will not vanish, it needs not even be small. Let us consider γ'_0 in function of γ_0 for $\Omega_{m,0}$ and $w_{DE,0}$ fixed.

As we can see from Figure 11.1-a, the constraint (11.12) implies in excellent approximation a linear relation as follows

$$\gamma'_0 \simeq c + b(\gamma_0 - 0.5) \quad b \sim 3. \quad (11.13)$$

The coefficients c, b depend on the background parameters $b = b(w_{DE,0}, \Omega_{m,0})$ (remembering that we take $\frac{G_{\text{eff},0}}{G_{N,0}} = 1$). The coefficient b decreases while c increases when $\Omega_{m,0}$ decreases from 0.35 to 0.20 (see Figure 11.2-b). In contrast, c increases from -0.19 for $\Omega_{m,0} = 0.3$, to -0.17 for $\Omega_{m,0} = 0.2$

For $\Omega_{m,0} = 0.3$ we have $c = -0.19$. We stress that relation (11.13) will hold independently of any particular model and is a consequence of the constraint (11.12).

Depending on the specific model under consideration, for given background parameters $\Omega_{m,0}$ and $w_{DE,0}$, γ'_0 will take the value $\gamma'_0(\gamma_0)$ corresponding to the value γ_0 “realized” by the model. Generically we will have $\gamma'_0 \neq 0$.

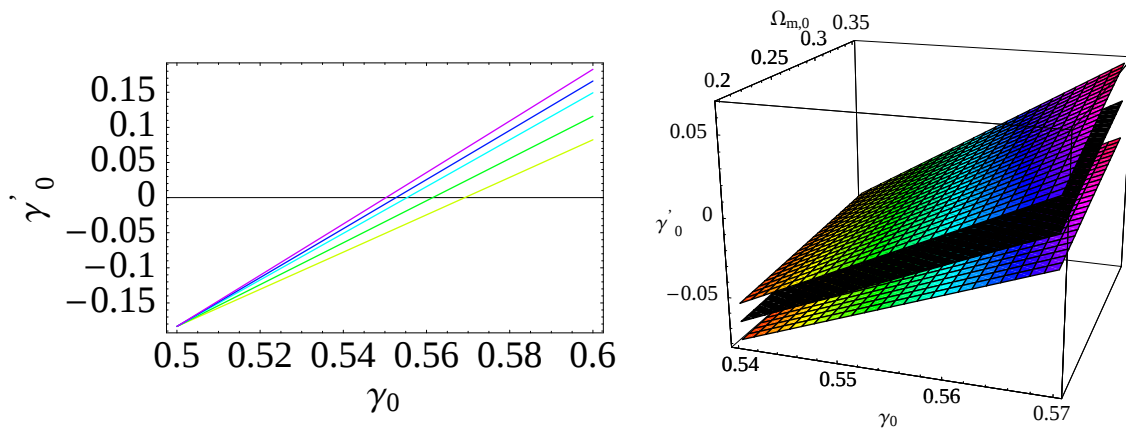


FIG. 11.1 – a) The left panel shows the constraint (11.11) for $\Omega_{m,0} = 0.3$ and various values of $w_{DE,0}$. We have from top to bottom : $w_{DE,0} = -1.4, -1.3, -1.2, -1, -0.8$. For given $\Omega_{m,0}$ and $w_{DE,0}$, the couple γ_0, γ'_0 is on the corresponding line for any model while γ'_0 will depend on the value γ_0 realized in a particular model. b) On the right panel the constraint (11.11) is shown in function of $\Omega_{m,0}$. From top to bottom we have $w_{DE,0} = -1.2, -1, -0.8$. We see that the coefficient b defined in (11.13) increases for increasing $\Omega_{m,0}$ and decreasing $w_{DE,0}$.

It is also seen from Figure 11.1-a that a small variation of γ_0 , for *fixed* parameters $w_{DE,0}$, $\Omega_{m,0}$, can induce a non negligible variation of γ'_0 in accordance with eq.(11.13). In particular the relative change in γ'_0 can be very large. We will show below that for $w_{DE} = \text{constant}$, the γ'_0 values are restricted to a very narrow range with $\gamma'_0 \approx -0.02$. Even when one consider a smoothly varying equation of state, we still have $-0.02 \lesssim \gamma'_0 \lesssim 0.005$ (see below) for $0.20 \leq \Omega_{m,0} \leq 0.35$. In other words a smooth change in the equation of state of DE is not able to produce $\gamma'_0 < -0.02$ for viable cosmological parameters. Therefore, a measurement of γ'_0 outside this range could be a characteristic signature of a DE model where gravity is modified. Moreover, a precise determination of γ'_0 could help to better discriminate between various modified gravity models.

When $\Omega_{m,0} = 0.3$ we have $b = 3.13$ for $w_{DE,0} = -1$, while b becomes smaller for $w_{DE,0} > -1$ and larger for $w_{DE,0} < -1$ (phantom DE today). Hence for $w_{DE,0} < -1$, we get a larger variation $\Delta\gamma'_0$ for a given variation $\Delta\gamma_0$. When $\Omega_{m,0}$ decreases, so does the coefficient b however this decrease is rather small for relevant cosmological values. It would be most interesting to investigate whether a precise determination of γ'_0 is observationally accessible. In view of (11.8) this means that one should measure precisely $\gamma(z)$ on $0 \leq z \leq 0.5$. Another aspect concerns the extraction of one, or both, of the parameters $\Omega_{m,0}$ or $w_{DE,0}$. If we assume erroneously that $\gamma'_0 = 0$, a large error can result in the determination of $\Omega_{m,0}$ or $w_{DE,0}$ from the knowledge of γ_0 . This is illustrated in Figure 11.2-a.

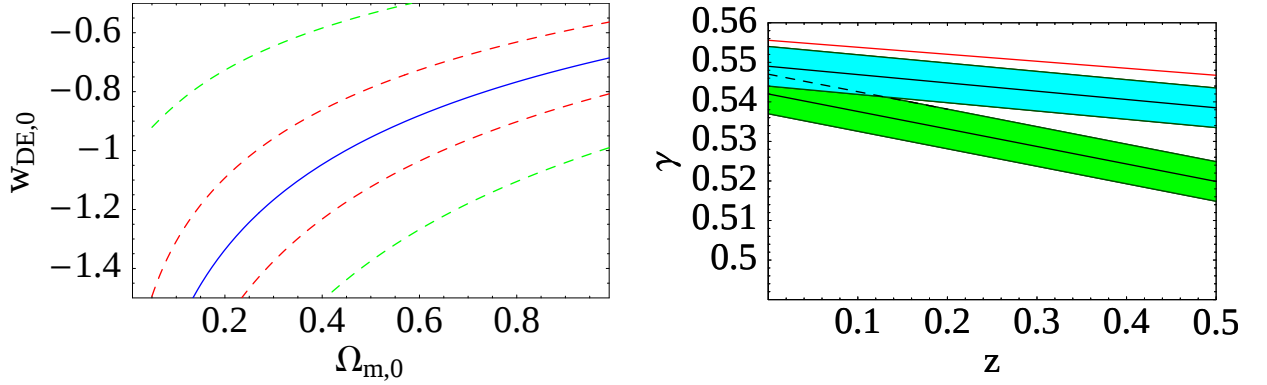


FIG. 11.2 – a) On the left panel, the blue line shows the degeneracy in the $\Omega_{m,0}$, $w_{DE,0}$ plane for $\gamma_0 = 0.555$ assuming $\gamma'_0 = 0$. The red, resp. green, dashed lines correspond to $\gamma'_0 = -0.02$ (top) and $\gamma'_0 = 0.02$ (bottom), resp. $\gamma'_0 = -0.05$ (top) and $\gamma'_0 = 0.05$ (bottom). Ignoring the true non vanishing value of γ'_0 increases significantly the uncertainty on the couples $\Omega_{m,0}$, $w_{DE,0}$. b) On the right panel it is seen that models with very close γ_0 can be discriminated if γ is measured for $0 \leq z \leq 0.5$ assuming γ is linear on small z , as often is the case. The lower the values of γ_0 , the easier it is to discriminate these models through the difference in their slope γ'_0 . For illustration, we have assumed here an error of 1%.

11.3 Some specific models

We now turn our attention to specific models *inside* General Relativity where DE has a known equation of state.

11.3.1 Λ CDM

Because of its simplicity and of the recent data that seem to imply that viable DE models should not be too far from Λ CDM (see however [Percival 07]), this model plays a central role. We find for Λ CDM $0.554 \leq \gamma_0 \leq 0.558$ (see Figure 11.3-b) and $-0.0195 \leq \gamma'_0 \leq -0.0157$ for $0.2 \leq$

$\Omega_{m,0} \leq 0.35$. Hence γ_0 varies very little in function of $\Omega_{m,0}$ while γ'_0 is negative with $|\gamma'_0| < 0.02$. An observation outside these values, in particular a positive value for γ'_0 , or a large negative γ'_0 , would signal a departure from Λ CDM.

11.3.2 Constant equation of state

We consider now a constant equation of state which includes of course the Λ CDM model. For the conservative ranges $0.2 \leq \Omega_{m,0} \leq 0.35$ and $-1.5 \leq w_{DE,0} \leq -0.5$, we find $0.542 < \gamma_0 < 0.583$ and $-0.021 < \gamma'_0 < -0.013$. However, as can be seen from Figure 11.3-a, for fixed parameter $\Omega_{m,0}$, the value of γ'_0 is practically constant with $\gamma'_0 \approx -0.02$ for different constant w_{DE} despite a non negligible variation of γ_0 . To summarize, for constant w_{DE} , γ'_0 lies in the restricted range $-0.024 < \gamma'_0 < 0.01$ while it is practically constant if $\Omega_{m,0}$ is fixed. However, as emphasized above (see Figure 11.2-a), even in that case neglecting the true (nonzero) value of γ'_0 can induce a significant error in the determination of $\Omega_{m,0}$ or $w_{DE,0}$ from γ_0 . Finally, it is interesting to note that for given $\Omega_{m,0}$ all these models have essentially the same γ'_0 while the parameter γ_0 can vary by about 4% (see Figure 11.3-a).

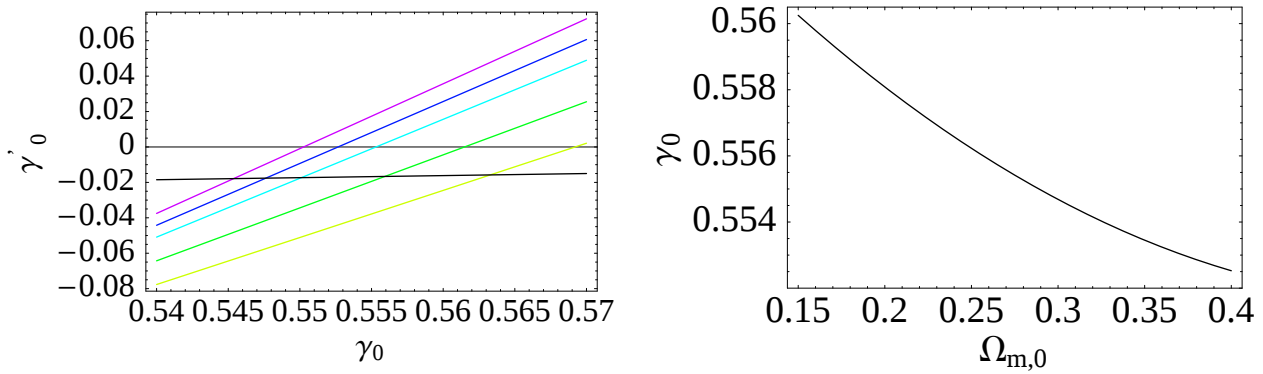


FIG. 11.3 – a) The lines in colour on the left panel are the same as in Figure 11.1. The black line gives the true value of γ_0 realised in models with $w_{DE} = w_{DE,0} = \text{constant}$ and $\Omega_{m,0} = 0.3$. It is seen that all models with $w_{DE} = \text{constant}$ shown here have practically the same non vanishing γ'_0 , $\gamma'_0 \approx -0.02$. Note that γ_0 increases when w_{DE} increases. b) On the right, γ_0 is displayed in function of $\Omega_{m,0}$ for the Λ CDM model.

11.3.3 Variable equation of state

Our analysis can be repeated for DE with a variable equation of state. To be specific, we take a smoothly varying equation of state of the type [Chevallier 01, Linder 03]

$$w_{DE}(z) = (-1 + \alpha) + \beta (1 - x) \equiv w_0 + w_1 \frac{z}{1+z}, \quad (11.14)$$

where $x \equiv \frac{a}{a_0}$. The corresponding evolution of the DE energy density can be computed analytically and yields [Chevallier 01]

$$\rho_{DE}(z) = \rho_{DE,0} (1+z)^{3(\alpha+\beta)} e^{-3\beta \frac{z}{1+z}}. \quad (11.15)$$

The results are displayed in Figure 11.4 for models with a negligible Ω_{DE} for $z \gg 1$. For example, if we fix $w_0 = -1.2$, we can compute the values of γ_0 and γ'_0 in function of $\beta \equiv w_1$ and $\Omega_{m,0}$. We find $0.55 \lesssim \gamma_0 \lesssim 0.56$ and $-0.022 \lesssim \gamma'_0 \lesssim 0.005$ for $0.20 \leq \Omega_{m,0} \leq 0.35$ and $0 \leq \beta \leq 1$.¹ To summarize, a smoothly varying equation of state does not seem able to generate $|\gamma'_0| > 0.02$.

¹Note that slightly lower values for γ'_0 can be obtained for less interesting models with substantial phantomness in the asymptotic past

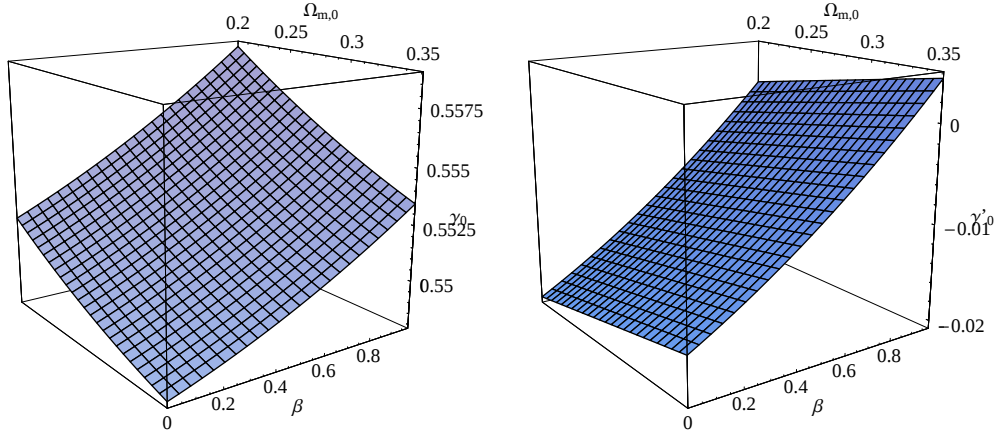


FIG. 11.4 – The parameters γ_0 (left) and γ'_0 (right) are shown in function of $\beta \equiv w_1$ and $\Omega_{m,0}$ for a model with variable equation of state parameter $w_{DE} = -1.2 + \beta \frac{z}{1+z}$. Hence all the points on the two surfaces have $w_{DE,0} = -1.2$. The results for $w_{DE} = -1.2$ are recovered for $\beta = 0$. We note for the left figure that $\gamma'_0 = 0$ is obtained for some particular combinations $\beta, \Omega_{m,0}$.

11.4 Summary and conclusions

Considering the linear growth of matter perturbations in various models, we give a constraint at $z = 0$, eq.(11.11) valid for all models, including modified gravity DE models that satisfy $\frac{G_{\text{eff},0}}{G_{N,0}} = 1$. This constraint implies that the quantity γ'_0 is completely fixed by the remaining parameters $\gamma_0, w_{DE,0}$ and $\Omega_{m,0}$. For the models considered here inside GR, $|\gamma'_0| \lesssim 0.02$. Interestingly for models inside GR with constant w_{DE} , γ'_0 is quasi-constant with $\gamma'_0 \approx -0.02$ as the variation of $w_{DE,0}$ is compensated by a simultaneous variation of γ_0 (for given $\Omega_{m,0}$).

We have generically $\gamma'_0 \neq 0$ and we emphasize that a significant γ'_0 could help discriminate between models, even if their γ_0 values are close. We have illustrated this schematically on Figure 11.2-b. This potential resolution improves as $\Omega_{m,0}$ goes up and/or $w_{DE,0}$ goes down and could be important when dealing with DE models outside General Relativity. We will give elsewhere specific models where this is the case [Gannouji 08]. Generally, this approach could be very fruitful whenever $\gamma(z)$ is close to linear on small redshifts $0 \leq z \leq 0.5$ so that the slope is essentially given by γ'_0 . So we feel it would be useful to try to measure $\gamma(z)$ on small redshifts, and not just γ_0 . Finally it is important to realize that neglecting a small but nonvanishing γ'_0 can induce a large error on the parameters $\Omega_{m,0}, w_{DE,0}$ that one could extract from the growth of matter perturbations.

The growth of matter perturbations in some scalar-tensor DE models

Radouane Gannouji, David Polarski

Sommaire

12.1 Introduction	136
12.2 An asymptotically stable scalar-tensor model	137
12.3 Some observational constraints	139
12.4 Linear growth of perturbations	141

We consider asymptotically stable scalar-tensor dark energy (DE) models for which the equation of state parameter w_{DE} tends to zero in the past. The viable models are of the phantom type today, however this phantomness is milder than in General Relativity if we take into account the varying gravitational constant when dealing with the SNIa data. We study further the growth of matter perturbations and we find a scaling behaviour on large redshifts which could provide an important constraint. In particular the growth of matter perturbations on large redshifts in our scalar-tensor models is close to the standard behaviour $\delta_m \propto a$, while it is substantially different for the best-fit model in General Relativity for the same parametrization of the background expansion. As for the growth of matter perturbations on small redshifts, we show that in these models the parameter $\gamma'_0 \equiv \gamma'(z=0)$ can take absolute values much larger than in models inside General Relativity. Assuming a constant γ when γ'_0 is large would lead to a poor fit of the growth function f . This provides another characteristic discriminative signature for these models.

Publié dans JCAP 0805 (2008) 018

12.1 Introduction

The aim of Dark Energy models is to explain the late-time accelerated expansion of the universe [Perlmutter 97, Riess 98, Perlmutter 99b, Astier 06]. Like for inflationary models producing an early stage of accelerated expansion, we have now a wide variety of DE models that can account for the late-time background evolution [Sahni 00, Padmanabhan 03, Copeland 06, Sahni 06, Ruiz-Lapuente 07]. In the same way that inflationary models are constrained by the cosmological perturbations they produce, DE models can be constrained by the background evolution and their effect on the growth of perturbations. In principle what is basically needed is a smooth component with a sufficiently negative pressure. Among DE models, Λ CDM, although it contains a cosmological constant which can be seen as “unnaturally” small, is the simplest model and this model is presently in good agreement with observations on large scales (see however e.g. [Percival 07]). Another class of appealing models are quintessence models containing a minimally coupled scalar field [Ratra 88, Wetterich 88]. A possible drawback of these models is their inability to violate the weak energy condition and to account for a phantom phase. Many more models of ever increasing sophistication have been proposed [Davis 07]. To make progress, it is important to find ways to select those classes of DE models that remain observationally viable and to find characteristic signatures that will enable us to constrain them, or even rule them out, with more accurate data at our disposal in the future.

In particular, an interesting family of DE models are those where gravity is no longer described by General Relativity (GR). Indeed there has been considerable interest recently in DE models with gravitation modified with respect to General Relativity, a feature that is quite generic in higher dimensional theories or also in the low energy effective action of more fundamental four-dimensional theories. Well-motivated models belonging to this class which can be explored thoroughly are scalar-tensor dark energy models [Bartolo 00, Perrotta 00, Faraoni 04, Fujii 03, Boisseau 00, Esposito-Farese 01, Gannouji 06, Barenboim 08, Martin 06, Demianski 07, Capozziello 07b]. Like the usual quintessence models containing a minimally coupled scalar field, scalar-tensor models have an additional physical degree of freedom, namely the scalar partner of the graviton. However, these models are more complicated as they have two free fundamental functions in their lagrangian, one more function in addition to the scalar field potential. This additional function reflects the modification of gravity encoded in the theory. A generic feature of these models, like for essentially all alternatives to the cosmological constant model, is that DE has a time-varying equation of state. The fact that Λ CDM fits well a large amount of observations should be an incentive to look for models with time-varying equation of state still able to compete with Λ CDM.

As for all DE models, scalar-tensor DE models are characterized by the accelerated expansion they produce at low redshifts but this background effect is common to all DE models. The modification of gravity with respect to General Relativity is more specific and it expresses itself in particular in the modified growth of linear cosmological matter perturbations. In this way, under quite general assumptions, it could be possible to determine from the growth of matter perturbations combined with the background expansion whether a DE model lies inside General Relativity or not [Starobinsky 98, Bludman 07, Polarski 06, Ishak 06] (see also [Knox 06, Chiba 07b, Zhang 07]). Hence it is very important to investigate how this can be extracted from the observations [Heavens 07, Huterer 07, Linder 07, Tsujikawa 07, Di Porto 07, Acquaviva 07, Kiakotou 07, Nesseris 08, Wang 07, Hui 08]. Scalar-tensor DE models are certainly good examples to investigate this issue. Aside from deeper theoretical motivations, an additional incentive to consider scalar-tensor models could come from the observations if these support DE models which have a phantom phase (see also [Feng 05, Wei 05] for other models that can produce a phantom phase).

We will consider asymptotically stable, internally consistent, scalar-tensor DE models [Gannouji 06]. For such models $F \rightarrow F_\infty = \text{constant}$ and asymptotic stability is possible for $w_{DE} \rightarrow 0$ and $\Omega_m \rightarrow \Omega_{m,\infty}$. We can consider varying equations of state $w_{DE}(z)$ provided $w_{DE} \rightarrow 0$. As we will

show these models exhibit a characteristic signature in the growth of matter perturbations on large and on small redshifts. This could potentially allow us to constrain them or even rule them out. In connection with the growth of matter perturbations on small redshifts, these models will illustrate results derived in an earlier work [Polarski 08], namely the possibility to have a parameter $\gamma'_0 \equiv \frac{d\gamma}{dz}(z=0)$ whose absolute value is much larger than in General Relativity when we write the growth factor as $f \simeq \Omega_m^\gamma$. Indeed, it was shown in [Gannouji 06] that $|\gamma'_0| \lesssim 0.02$ in models with a constant or a (smoothly) varying equation of state inside GR and hence also for Λ CDM. On the other hand, on large redshifts there can also be an important effect on the growth of perturbations. Interestingly, as we will see, we can have models for which the growth of matter perturbations on large scales is close to that in Λ CDM and for which the growth of matter perturbations deviates most from that in Λ CDM on small redshifts. Another interesting aspect of a varying gravitational constant is its effect on the interpretation of SNIa data and we will show that less phantomness is required today by the observations for our models compared to General Relativity. Indeed as we consider DE models where $w_{DE} \rightarrow 0$ in the past, a large amount of phantomness is required by the observations if we are inside GR while in our models this is much less the case.

12.2 An asymptotically stable scalar-tensor model

It is important to review here the basic aspects and definitions of our scalar-tensor models. We consider DE models where gravity is described by the Lagrangian density in the Jordan (physical) frame

$$L = \frac{1}{2} \left(F(\Phi) R - Z(\Phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \right) - U(\Phi) + L_m(g_{\mu\nu}) . \quad (12.1)$$

The Brans-Dicke parameter is given by $\omega_{BD} = \frac{F\Phi'^2}{F'^2}$ where a prime denotes a derivative with respect to redshift z , and

$$G_N = (8\pi F)^{-1} . \quad (12.2)$$

Specializing to a spatially flat universe, the DE energy density and pressure are *defined* as follows

$$3F_0 H^2 = \rho_m + \rho_{DE} \quad (12.3)$$

$$-2F_0 \dot{H} = \rho_m + \rho_{DE} + p_{DE} . \quad (12.4)$$

With these definitions, the usual conservation equation applies :

$$\dot{\rho}_{DE} = -3H(\rho_{DE} + p_{DE}) . \quad (12.5)$$

With the equation of state parameter w_{DE} defined through

$$w_{DE} \equiv \frac{p_{DE}}{\rho_{DE}} , \quad (12.6)$$

the time evolution DE obeys the usual rule

$$\frac{\rho_{DE}(z)}{\rho_{DE,0}} \equiv \epsilon(z) = \exp \left[3 \int_0^z dz' \frac{1+w(z')}{1+z'} \right] . \quad (12.7)$$

Equations (12.3) can be rewritten as

$$h^2(z) = \Omega_{m,0} (1+z)^3 + \Omega_{DE,0} \epsilon(z) , \quad (12.8)$$

where $\Omega_{DE,0} = 1 - \Omega_{m,0}$ by definition as we assume a spatially flat universe. For these models

$$\rho_{DE} + p_{DE} = \dot{\Phi}^2 + \ddot{F} - H\dot{F} + 2(F - F_0) \dot{H} , \quad (12.9)$$

hence the weak energy condition for DE can be violated ([Gannouji 06], see also [Torres 02]).

We consider viable models satisfying the following requirements :

- 1) $F \rightarrow F_\infty = \text{constant} < F_0$ for $z \rightarrow \infty$.
- 2) The DE equation of state evolves according to $w_{DE} \rightarrow 0$ for $z \rightarrow \infty$.
- 3) Consistency requires $\phi'^2 \equiv \frac{3}{4} \left(\frac{F'}{F} \right)^2 + \frac{\Phi'^2}{2F} > 0$.
- 4) We impose $\omega_{BD,0} > 4 \times 10^4$.

Condition 1) is reminiscent of the models considered in [Li 07]. For these models we have that $\frac{G_{\text{eff}}(z)}{G_{N,0}} \rightarrow \frac{G_{\text{eff},\infty}}{G_{N,0}} = \text{constant}$ from some redshift on, and different from one by a few percents only. In order to have accelerated expansion at the present time we need some dynamical DE equation of state. We consider a parametrization [Chevallier 01], [Linder 03] with a smoothly varying equation of state where DE tends to a scaling behaviour in the past

$$w_{DE}(z) = (-1 + \alpha) + \beta(1 - x) \equiv w_0 + w_1 \frac{z}{1+z}, \quad (12.10)$$

where $x \equiv \frac{a}{a_0}$. If we impose $w_{DE} \rightarrow 0$ for $z \rightarrow \infty$, this parameterization reduces to the simple form

$$w_{DE}(z) = -\frac{\beta}{1+z}. \quad (12.11)$$

The corresponding DE evolution reads [Chevallier 01]

$$\epsilon(z) = (1+z)^3 e^{-3\beta \frac{z}{1+z}} \quad (12.12)$$

For given cosmological parameters $\Omega_{DE,0}$ and $\Omega_{m,0}$ the background evolution is completely fixed by the parameter β . We have in particular

$$\Omega_m(z) = \left[e^{-3\beta \frac{z}{1+z}} \frac{\Omega_{DE,0}}{\Omega_{m,0}} + 1 \right]^{-1}. \quad (12.13)$$

Clearly, $\Omega_m \rightarrow \Omega_{m,\infty}(\beta)$

$$\Omega_{m,\infty}(\beta) = \left[e^{-3\beta} \frac{\Omega_{DE,0}}{\Omega_{m,0}} + 1 \right]^{-1}. \quad (12.14)$$

The quantity $\Omega_m(z)$ is fixed by $\Omega_{m,0}$ and β . As shown in [Gannouji 06], the requirement 1) implies the inequality (independent of the specific form of $F(z)$)

$$\frac{F_\infty}{F_0} > \Omega_{m,\infty}. \quad (12.15)$$

In particular a large amount of phantomness today implies $\Omega_{m,\infty}$ close to one and hence F_∞ close to F_0 . We use further the following ansatz

$$\frac{F}{F_0}(z) = \frac{F_\infty}{F_0} + \left(1 - \frac{F_\infty}{F_0}\right) \left(\frac{5}{(1+z)^4} - \frac{4}{(1+z)^5} \right). \quad (12.16)$$

This ansatz satisfies exactly $F_1 \equiv \frac{F'}{F_0}(z=0) = 0$ while $F_2 \equiv \frac{F''}{2F_0}(z=0) = -10(1 - \frac{F_\infty}{F_0}) < 0$. For the ansatz (12.16), we must have in addition $\frac{F_\infty}{F_0} < 1 + \frac{3}{20}\Omega_{DE,0}(1-\beta)$ which comes from the requirement $\phi'^2 > 0$ at $z = 0$. So we impose the functions $h(z)$ and $\frac{F}{F_0}(z)$ from which all other quantities can be reconstructed and we check the physical consistency for each reconstructed scalar-tensor model. As $h(z)$ is imposed, so is the background dynamics. In this way we can compare different DE models inside and outside General relativity possessing the same background evolution. Clearly, as the DE equation of state parameter w_{DE} tends to zero as z increases, it must start being phantom today if it is to pass the observational constraints. This can be seen more quantitatively using the constraint on the shift parameter. We see from Figure 12.1 that the viable models are of the phantom type today ($\beta > 1$). The possibility to have a phantom DE sector today is actually an attractive feature of scalar-tensor DE models and is not excluded by the observations.

12.3 Some observational constraints

To get some insight into the parameter window for viable models, we constrain them using Supernovae data, BAO (Baryonic acoustic oscillations) data and CMB data. We have to maximize the probability function

$$P(\Omega_{m,0}, \beta) \propto e^{-\frac{1}{2} \chi^2}. \quad (12.17)$$

where $\chi^2 = \chi_{\text{SN}}^2 + \chi_A^2 + \chi_R^2$ for a background evolving according to eqs.(12.8),(12.12). We use a sample consisting of 192 Supernovae [Davis 07, Riess 06, Wood-Vasey 07] for which

$$\chi_{\text{SN}}^2 = \sum_{i=1}^{192} \frac{(\mu_{th,i} - \mu_{exp,i})^2}{\sigma_i^2}, \quad (12.18)$$

with

$$\mu_{th,i} = 5 \log \left((1 + z_i) \int_0^{z_i} \frac{dz}{h} \right) + \mu_0 + \frac{15}{4} \log \frac{G_{\text{eff}}(z_i)}{G_{\text{eff},0}}, \quad (12.19)$$

where $\mu_0 = 25 + 5 \log \left(\frac{cH_0^{-1}}{\text{Mpc}} \right)$, the distance modulus μ is the difference between the apparent magnitude m and the absolute magnitude M . The important quantity G_{eff} is defined as

$$G_{\text{eff}} = G_N \frac{F + 2(dF/d\Phi)^2}{F + \frac{3}{2}(dF/d\Phi)^2} = G_N \frac{1 + 2\omega_{BD}^{-1}}{1 + \frac{3}{2}\omega_{BD}^{-1}}. \quad (12.20)$$

We have for $\omega_{BD} \gg 1$

$$G_{\text{eff}} \simeq G_N \left(1 + \frac{1}{2}\omega_{BD}^{-1} \right). \quad (12.21)$$

In particular $G_{\text{eff},0} \simeq G_{N,0}$ due to the well-known strong solar system gravitational constraint $\omega_{BD,0} > 4 \times 10^4$. We get rid of the nuisance parameter H_0 using the simple way suggested by [Di Pietro 03, Nesseris 04, Lazkoz 05], integrating over H_0 gives essentially the same result. Note the addition of the last term in eq.(12.19) which takes into account a varying gravitational constant [Garcia-Berro 99, Amendola 99b, Riazuelo 02]. This term allows to discriminate different scalar-tensor models using SNIa data even for similar background expansion. We will come back to this point below.

The BAO constraints can be expressed as a constraint on the quantity A

$$A(z) = \frac{\sqrt{\Omega_{m,0}}}{z} \left[\frac{z}{h(z)} \left(\int_0^z dz' \frac{1}{h(z')} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (12.22)$$

with [Eisenstein 05]

$$A = 0.469 \pm 0.017, \quad (12.23)$$

and

$$\chi_A^2 = \frac{(A(z = 0.35, \Omega_{m,0}, \beta) - 0.469)^2}{(0.017)^2}. \quad (12.24)$$

We have finally a constraint on the shift parameter extracted from the CMB data

$$R = \sqrt{\Omega_{m,0}} \int_0^{1089} \frac{dz}{h(z)}, \quad (12.25)$$

with [Wang 06]

$$R = 1.70 \pm 0.03, \quad (12.26)$$

F_∞/F_0	$\Omega_{m,0}$	β	$\Omega_{m,\infty}$	C	p_1	γ_0	γ'_0
0.93	$0.31^{+0.04}_{-0.04}$	$1.09^{+0.12}_{-0.13}$	$0.92^{+0.04}_{-0.04}$	$0.99^{+0.04}_{-0.04}$	$0.99^{+0.03}_{-0.03}$	$0.54^{+0.01}_{-0.01}$	$-0.07^{+0.03}_{-0.02}$
0.94	$0.30^{+0.04}_{-0.03}$	$1.12^{+0.12}_{-0.13}$	$0.93^{+0.04}_{-0.04}$	$0.98^{+0.04}_{-0.04}$	$0.99^{+0.02}_{-0.02}$	$0.54^{+0.01}_{-0.01}$	$-0.06^{+0.03}_{-0.02}$
0.95	$0.30^{+0.04}_{-0.03}$	$1.15^{+0.13}_{-0.13}$	$0.93^{+0.04}_{-0.04}$	$0.98^{+0.04}_{-0.04}$	$0.99^{+0.02}_{-0.02}$	$0.54^{+0.01}_{-0.01}$	$-0.04^{+0.02}_{-0.01}$
0.96	$0.29^{+0.04}_{-0.03}$	$1.18^{+0.12}_{-0.14}$	$0.93^{+0.03}_{-0.04}$	$0.97^{+0.04}_{-0.04}$	$0.98^{+0.02}_{-0.02}$	$0.55^{+0.02}_{-0.01}$	$-0.03^{+0.05}_{-0.01}$
GR	$0.27^{+0.04}_{-0.03}$	$1.28^{+0.17}_{-0.15}$	$0.95^{+0.04}_{-0.03}$	$0.95^{+0.04}_{-0.03}$	$0.97^{+0.02}_{-0.02}$	$0.56^{+0.01}_{-0.01}$	$0.01^{+0.002}_{-0.002}$

TAB. 12.1 – We summarize in this table the best-fit models for given parameter F_∞ when all data are taken into account, with 2σ errors. The last line corresponds to General Relativity (a constant gravitational constant). It is seen that a varying gravitational constant G_{eff} can have a nonnegligible effect. In particular, though the quantity $\Omega_{m,\infty}$ is higher in GR than in the scalar-tensor models, due to the value of F_∞ , C is closer to 1 in these models. Hence the growth of matter perturbations on large redshifts for these models, $\delta_m \propto a^{p_1}$, is closer to the standard one as in Λ CDM, see eqs.(12.37),(12.38),(12.39).

and

$$\chi_R^2 = \frac{(R(\Omega_{m,0}, \beta) - 1.7)^2}{(0.03)^2} . \quad (12.27)$$

As we can see from Figure 12.1, the shift parameter constrains our model to be of the phantom type today, $\beta > 1$. This is expected because in our model the equation of state of DE tends to that of dust in the past. If we remember that a cosmological constant agrees fairly with the data, our model must compensate by being phantom on small redshifts.

We would like now to look more closely at the effect of a varying (effective) gravitational constant on the measurement of luminosity distances. Let us write eq.(12.19) in the following way

$$\mu_{th,i} = [1 + \mathcal{G}(z_i)] 5 \log \left((1 + z_i) \int_0^{z_i} \frac{dz}{h} \right) + \mu_0 , \quad (12.28)$$

where we have introduced the quantity

$$\mathcal{G}(z) = \frac{3}{4} \frac{\log \frac{G_{\text{eff}}(z)}{G_{\text{eff},0}}}{\log \left[(1 + z) \int_0^z \frac{dz'}{h} \right]} . \quad (12.29)$$

We can write in full generality

$$\frac{G_{\text{eff}}(z)}{G_{\text{eff},0}} \equiv 1 + \Delta(z) . \quad (12.30)$$

In the models studied here, $\Delta(z)$ is positive definite and at most of the order of a few percents, $\Delta \lesssim 0.07$, while $\Delta(z = 0)$ vanishes by definition. For any viable scalar-tensor model we have on very small redshifts

$$\Delta(z \approx 0) \simeq \frac{1}{2} (\omega_{BD}^{-1} - \omega_{BD,0}^{-1}) + \left(\frac{F_0}{F} - 1 \right) \approx 0 . \quad (12.31)$$

We can give a more formal expression for $\Delta(z)$ but for our purposes it is not needed here. Whenever the quantity Δ is small, we obtain

$$\frac{15}{4} \log \frac{G_{\text{eff}}}{G_{\text{eff},0}} \simeq 1.63 \Delta \quad \Delta \ll 1 . \quad (12.32)$$

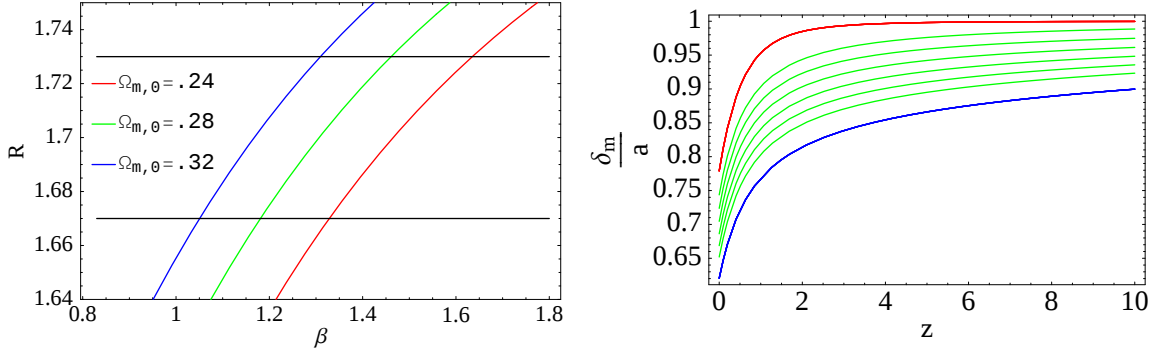


FIG. 12.1 – a) On the left, the shift parameter R (see eq.(12.25)) is shown in function of β for several values of $\Omega_{m,0}$. The interval of viable models all correspond to phantom DE, $\beta > 1$ which was expected because $w_{DE} \rightarrow 0$ in the past. b) On the right, the quantity $\frac{\delta_m}{a}$ (with arbitrary normalization, i.e. $\frac{\delta_m}{a}|_{z=100} = 1$) is shown for various cases : General Relativity (GR) (blue), Λ CDM (red) and scalar-tensor models (green) characterized by the value of F_∞ . We have from top to bottom $\frac{F_\infty}{F_0} = 0.9301, 0.94, 0.95, 0.96, 0.97, 0.98$. The first value corresponds to $C \approx 1$ and the linear growth on large redshifts is essentially similar to Λ CDM. Except for Λ CDM, all the models displayed here have the same background behaviour with $\Omega_{m,0} = 0.3$, and $\Omega_{m,\infty} = 0.93$.

and hence also

$$|\mathcal{G}(z \approx 0)| \simeq 0.33 \frac{\Delta}{|\log z|} \ll 1. \quad (12.33)$$

Hence it is seen from (12.28), (12.31), (12.33) that the effect of a varying G_{eff} for scalar-tensor dark energy models is negligible on very small redshifts. We have indeed checked it with our models using SNIa data on redshifts $z \leq 0.05$. Furthermore, it is also clear from (12.32) that this effect cannot be very large whenever $\Delta \ll 1$.

Nevertheless, as we can see from Table 12.1, a varying gravitational constant G_{eff} , characterized in our models by the parameter F_∞ , can have a nonnegligible effect. In particular it is seen that our models with $F_\infty < F_0$ can fit the data with dark energy which is less of the phantom type today than it would have to be in the corresponding DE model inside GR with a background expansion of the type (12.8), (12.12).

12.4 Linear growth of perturbations

Let us turn now to the dynamics of the linear matter perturbations. As shown in [Boisseau 00], these perturbations satisfy a modified equation of the type

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G_{\text{eff}} \rho_m \delta = 0, \quad (12.34)$$

with G_{eff} given by eq.(12.20). Equation (12.34) can be seen as a minimal modification to the growth of linear perturbations which comes from the modification of Poisson's equation

$$\frac{k^2}{a^2} \phi = -4\pi G \rho \delta \rightarrow \frac{k^2}{a^2} \phi = -4\pi G_{\text{eff}} \rho \delta. \quad (12.35)$$

This modification reflects the fact that the effective coupling constant describing the gravitational interaction of two close test masses is given by G_{eff} . This is so on all cosmic scales of interest where the dilaton field is essentially massless. It should be stressed that the modification in (12.34) is scale-independent and can appear in many modified gravity models (see e.g. [Neupane 07]), it can even

appear in DE models inside General Relativity if one is willing to consider DE with unusual properties [Kunz 07].

It is convenient to introduce the quantity $f = \frac{d \ln \delta}{d \ln a}$, the growth factor of the perturbations. In function of f , the linear perturbations obey the equation

$$\frac{df}{dx} + f^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d \ln \Omega_m}{dx} \right) f = \frac{3}{2} \frac{G_{\text{eff}}}{G_{N,0}} \Omega_m . \quad (12.36)$$

with $x \equiv \ln a$. The quantity δ is recovered from f , $\delta(a) = \delta_i \exp \left[\int_{x_i}^x f(x') dx' \right]$. We see that $f = p$ when $\delta \propto a^p$, in particular $f \rightarrow 1$ in Λ CDM for large z while $f = 1$ in an Einstein-de Sitter universe. In our model, $G_{\text{eff}} \rightarrow G_{\text{eff},\infty}$, $\Omega_m \rightarrow \Omega_{m,\infty}$, these quantities tend rather quickly to their asymptotic value for $z \gg 1$.

Introducing the quantity C with

$$0 < C \equiv \frac{G_{\text{eff},\infty}}{G_{N,0}} \Omega_{m,\infty} = \frac{F_0}{F_\infty} \Omega_{m,\infty} < 1 , \quad (12.37)$$

we see that in the asymptotic regime $G_{\text{eff}} \rightarrow G_{\text{eff},\infty} = \frac{F_0}{F_\infty}$, the perturbations obey a scaling behaviour

$$\delta = D_1 a^{p_1} + D_2 a^{p_2} , \quad (12.38)$$

with

$$p_1 = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{1 + 24C}) \quad (12.39)$$

$$p_2 = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{1 + 24C}) . \quad (12.40)$$

As $p_1 < 1$, we see that the growing mode of the perturbations always grows *slower* than in a Λ CDM universe (or in an Einstein-de Sitter universe) for $z \gg 1$. Therefore the amplitude of the linear matter perturbations on small redshifts before formation of structure starts, compared to the amplitude of perturbations derived from the CMB data, can be significantly different, and smaller, from that in Λ CDM. In particular, the perturbations will grow nonlinear on *lower* redshifts, structure formation starts later. Further, the bias b derived from σ_8 should be larger in these models than it is in Λ CDM. On the other hand, for a model for which C is very close to 1 (but still satisfying $C < 1$), both linear perturbations modes will evolve essentially like in a Λ CDM universe until low redshifts where a significant departure can appear. Another important issue is to characterize this departure on small redshifts.

It is well known that for a Λ CDM universe it is possible to write $f \simeq \Omega_m^\gamma$ where γ is assumed to be constant, an approach pioneered in the literature some time ago [Peebles 84, Lahav 91]. There has been renewed interest lately in this approach as the growth of matter perturbations could be a decisive way to discriminate between models that are either inside or outside General Relativity (GR). Clearly it is possible to write allways

$$f = \Omega_m^{\gamma(z)} . \quad (12.41)$$

For Λ CDM we have $\gamma_0 \equiv \gamma(z=0) \approx 0.55$. As was shown in [Polarski 08], for Λ CDM we have $\gamma'_0 \equiv \frac{d\gamma}{dz}|_0 \approx -0.015$. For $\Omega_{m,0} = 0.3$, $\gamma_0 = 0.555$, slightly higher than the constant $\frac{6}{11} = 0.5454$ derived in [Wang 98] for a slowly varying DE equation of state and $\Omega_m \approx 1$. There is very slight difference on small redshifts $z \lesssim 0.5$ between the true function $f_\Lambda(z)$ and $\Omega_m^{\frac{6}{11}}$, one could as well use $\gamma = 0.56$ and the agreement would be even better. As $\Omega_m \rightarrow 1$ the differences are important only on small redshifts. Note also that we find a slightly negative slope γ'_0 so that γ comes closer to $\frac{6}{11}$ as

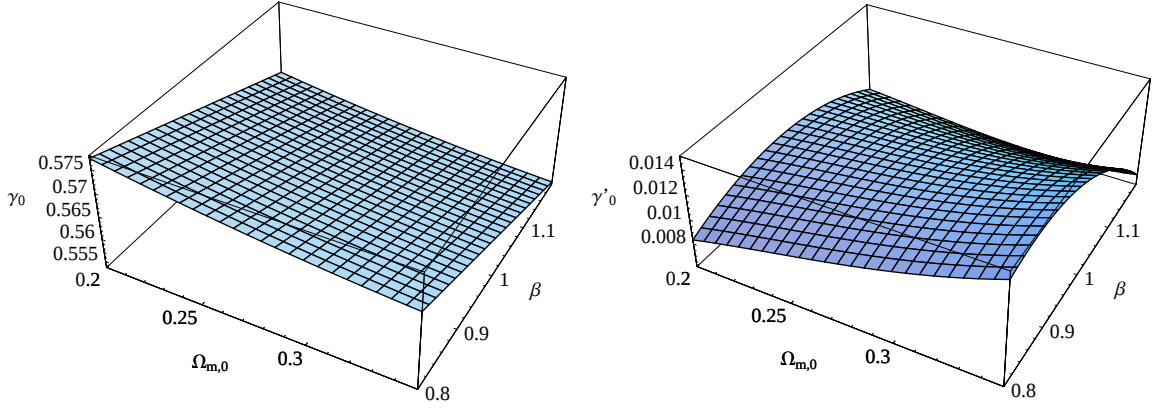


FIG. 12.2 – a) On the left, γ_0 is shown in function of the parameters $\Omega_{m,0}$ and β for the ansatz (12.11) assuming General Relativity. b) On the right, the corresponding γ'_0 is displayed and it is seen that $|\gamma'_0| \lesssim 0.015$.

z increases. A definite departure from these values could signal a departure from a Λ CDM universe. More importantly as we will see later a large value for γ'_0 could be a hint for a DE model outside GR. This aspect was already emphasized in [Polarski 08]. We illustrate in Figure 12.2 the behaviour of γ_0 and γ'_0 in function of β and $\Omega_{m,0}$ inside GR.

As emphasized in [Polarski 08], equation (12.36) yields the following identity

$$\gamma'_0 = [\ln \Omega_{m,0}^{-1}]^{-1} \left[-\Omega_{m,0}^{\gamma_0} - 3\left(\gamma_0 - \frac{1}{2}\right) w_{\text{eff},0} + \frac{3}{2} \Omega_{m,0}^{1-\gamma_0} - \frac{1}{2} \right], \quad (12.42)$$

whenever $\frac{G_{\text{eff},0}}{G_{N,0}} = 1$ to very high accuracy, which is certainly the case in scalar-tensor models as we have seen in Section 12.2. In other words we have a constraint

$$f(\gamma_0, \gamma'_0, \Omega_{m,0}, w_{DE,0}) = 0. \quad (12.43)$$

As was shown in [Polarski 08], this constraint takes the following form

$$\gamma'_0 \simeq -0.19 + d(\gamma_0 - 0.5) \quad d \approx 3. \quad (12.44)$$

The coefficient d depends on the background parameters $d = d(w_{DE,0}, \Omega_{m,0})$. For given background parameters $\Omega_{m,0}$ and $w_{DE,0}$, γ'_0 will take the corresponding value $\gamma'_0(\gamma_0)$. The value of γ_0 realized will depend on the particular model under consideration and can be obtained numerically. Typically we will have $\gamma'_0 \neq 0$. For models inside General Relativity $|\gamma'_0| \lesssim 0.02$ was obtained. For example for constant w_{DE} , γ'_0 is almost independent of $w_{DE} = w_{DE,0}$, with $\gamma'_0 \approx -0.02$ for $\Omega_{m,0} = 0.3$, while at the same time γ_0 can have a nonnegligible variation, we have $0.545 \lesssim \gamma_0 \lesssim 0.565$ for $-1.4 \lesssim w_{DE,0} \lesssim -0.8$ and $\Omega_{m,0} = 0.3$. We can compare scalar-tensor models with different values of F_∞ but identical background evolution parametrized using the parameters β and $\Omega_{m,0}$, according to eqs.(12.8), (12.11), (12.12). These models can be distinguished in all observations affected by a varying gravitational constant but they will be undistinguishable with respect to purely background constraints. In particular, they yield different perturbations growth factor f , or equivalently different γ .

All models shown in Figure 12.3 have exactly the same background expansion so that the difference in the growth of matter perturbations is solely due to the modification of gravity. As we can see from Figure 12.3, some models can be easily distinguished from each other using the growth of

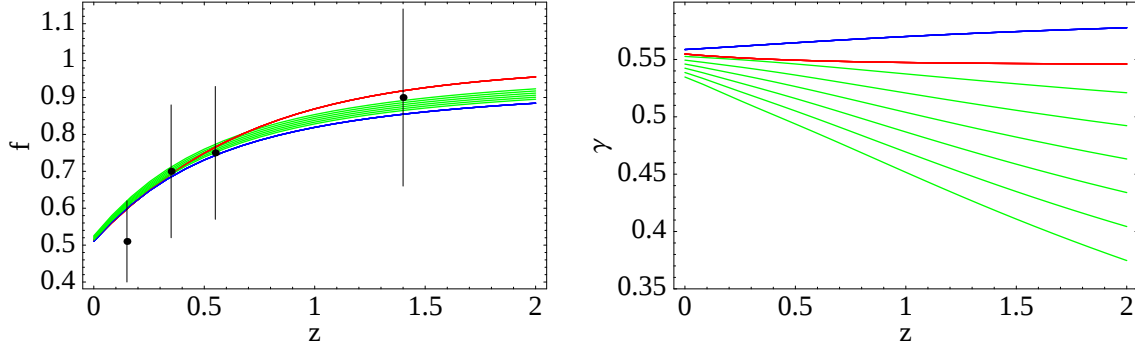


FIG. 12.3 – a) On the left, the function $f(z)$ is shown corresponding to the models of the right panel of figure 12.1. The growth factor is constrained by observations of the galaxy bias factor b and the redshift distortion parameter $\bar{\beta}$ [Verde 02, Hawkins 03, Tegmark 06, Ross 06, da Angela 06] via $f = b \bar{\beta}$. The data are given here for reference. We see that one needs to go at redshifts $z > 0.5$ in order to be able to distinguish between the different models. It is also clear that the present observations are not discriminative. Though not obvious from the behaviour of $f(z)$, the behaviour on small redshifts is very different as seen on the right panel. b) On the right, the function $\gamma(z)$ is displayed corresponding to the same models as on the left panel. But the order of the scalar-tensor models is reversed here, we have now from bottom to top $\frac{F_\infty}{F_0} = 0.9301, 0.94, 0.95, 0.96, 0.97, 0.98$. It is seen that $\gamma(z)$ has a quasi-linear behaviour on small redshifts and that large slopes can be obtained for scalar-tensor models when C is close to 1. Interestingly, this is also when the linear growth of perturbations is essentially the same as in Λ CDM for $z \gg 1$ in the matter dominated stage.

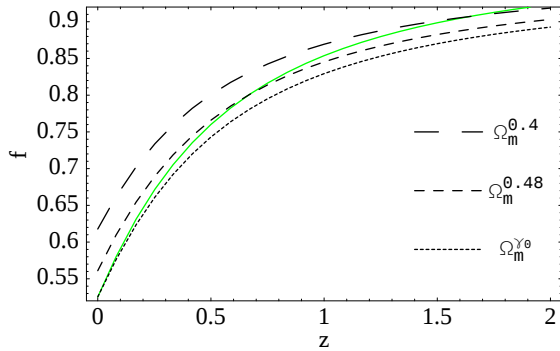


FIG. 12.4 – In green the growth function $f(z)$ is shown corresponding to the scalar-tensor model with $\frac{F_\infty}{F_0} = 0.9301$ while the background parametrised by $\Omega_{m,\infty} = 0.93$ and $\Omega_{m,0} = 0.3$. This function is compared to three fits with a constant γ : 0.4, 0.48, $\gamma_0 = 0.53$, where γ_0 is the value at $z = 0$ of the true $\gamma(z)$. For $\gamma_0 = 0.53$, the fit is very good (by definition) on very small redshifts but bad on larger redshifts. Choosing $\gamma = 0.4$ gives a good fit on large redshifts but is bad on small redshifts. Taking $\gamma = 0.48$ yields a fit that is clearly different from f .

matter perturbations through the difference in the behaviour of $\gamma(z)$ on small redshifts. We note also for the models displayed in Figure 12.3 that the model inside GR is easily distinguished from the scalar-tensor models having a large slope γ'_0 . For these ST models we have that γ'_0 is negative and it can be large, while it is (slightly) positive for the same background evolution inside GR. Actually as we can see from Figure 12.2 $\gamma'_0 > 0$ is true inside GR for the interesting range of cosmological parameters β and $\Omega_{m,0}$, while we have generically $\gamma'_0 < 0$ for the interesting scalar-tensor models. Also, as already noted in [Polarski 08], $|\gamma'_0| \lesssim 0.02$ inside GR while we see that it can be substantially larger outside GR. Obviously, when $|\gamma'_0|$ is large, assuming $\gamma = \text{constant}$ yields a poor approximation. Another interesting feature is the quasi-linear behaviour of $\gamma(z)$ on small redshifts $0 \leq z \leq 0.5$. Such a behaviour could be probed observationally and could allow to discriminate models whose parameter γ_0 are close to each other. The lower the value of γ_0 , the better this potential resolution which improves as well when $w_{DE,0}$ decreases.

This picture remains essentially the same for the best-fit models of Table 12.1. It is seen that the growth of matter perturbations on large redshifts is closer to the standard behaviour $\delta_m \propto a$ ($C = 1$) in the best-fit scalar-tensor models of Table 12.1 than it is for the model inside GR with same parametrization of the background expansion. For the latter model, though a very pronounced phantom behaviour is needed today (see Table 12.1), it is not sufficient to make $\Omega_{m,\infty}$ higher than 0.95 which has a crucial effect on the growth of matter perturbations on large redshifts.

To summarize, we have shown that our models have a characteristic signature in the growth of linear matter perturbations. On large redshifts inside the matter-dominated stage, we find a scaling behaviour for the matter perturbations which can substantially differ from Λ CDM and also from General Relativity (GR) with identical background evolution characterized, besides $\Omega_{m,0}$, by $\Omega_{m,\infty}$ or β . On small redshifts we find again a possible significant departure from Λ CDM *and* models in General Relativity (GR) with same parametrization of the background expansion. Even for those models in which the growth of matter perturbations on large redshifts is close to that in Λ CDM, we find a large (negative) slope γ'_0 , with $|\gamma'_0|$ much larger than in GR, whether Λ CDM or GR with an identical background evolution. For these models assuming a constant γ would necessarily lead to a poor fit of the growth function f (see Figure 12.4). Such a behaviour on small redshifts would constitute a characteristic signature of our DE model being outside GR. Interestingly, those models that mimic Λ CDM on large redshifts are most easily distinguished from Λ CDM on small redshifts through their slope γ'_0 . Though the results derived here are to some extent model dependent, it is clear that the growth of matter perturbations, especially when combined on small and large redshifts, can efficiently probe the nature of Dark Energy and in particular help in assessing whether we are dealing with a modified gravity DE model or not.

Conclusion et perspectives

Nous avons pu voir dans cette thèse une partie des modèles d'énergie noire. Nous nous sommes ainsi d'abord intéressés à la constante cosmologique ou fluide avec une équation d'état variable, puis aux modèles avec un champ scalaire pouvant ou non violer la condition d'énergie forte, et enfin aux modèles $f(R)$. Certains de ces modèles permettent d'expliquer l'énergie noire et on peut les confronter aux observations, alors que d'autres sont également des modèles de gravitation différents de la relativité générale. Cela produit de nouveaux tests possibles, dont les contraintes gravitationnelles au sein de notre système solaire et des galaxies. Ainsi la deuxième partie de ma thèse a permis de montrer différentes contraintes sur les modèles scalaire-tenseur, ainsi que sur les théories $f(R)$. Il est cependant souvent difficile d'éliminer des modèles. En effet, les contraintes permettent en général de simplement contraindre les paramètres du modèle. Nous avons, cependant, développé une méthode dans les théories $f(R)$ afin de rejeter de très nombreux modèles étudiés dans la littérature, et qui ne possèdent pas de phase de matière. On constate ainsi que l'on peut considérer certains modèles comme faux puis contraindre les paramètres de ceux-ci par les supernovae, les anisotropies du CMB, ainsi que les BAO.

En revanche, demeure un questionnement fondamentale : comment comparer deux modèles différents qui semblent compatibles avec les observations ? Comment choisir entre un modèle scalaire-tenseur et un modèle $f(R)$? Un début de réponse a été apporté dans la troisième partie. En effet, nous avons mis en évidence que l'observation de la croissance des perturbations et notamment de la fonction γ permet de distinguer un modèle d'énergie noire en relativité générale et en théorie scalaire-tenseur. Ce travail peut se faire pour les modèles $f(R)$ dans le but de distinguer ceux-ci de la relativité générale et peut-être des modèles scalaire-tenseur. Il s'agit d'un travail en cours et qui fera je l'espère le sujet d'un article très prochainement.

Enfin il demeure un grand type de modèles que je n'ai pas abordé durant ma thèse. Je compte bien le faire par la suite notamment les modèles de dimension supplémentaire.

Bibliographie

- [Acquaviva 07] Viviana Acquaviva & Licia Verde.
Observational signatures of Jordan-Brans-Dicke theories of gravity.
JCAP, vol. 0712, page 001, 2007.
- [Alam 04a] Ujjaini Alam, Varun Sahni, Tarun Deep Saini & Alexei A. Starobinsky.
Is there Supernova Evidence for Dark Energy Metamorphosis ?
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., vol. 354, page 275, 2004.
- [Alam 04b] Ujjaini Alam, Varun Sahni & Alexei A. Starobinsky.
The case for dynamical dark energy revisited.
JCAP, vol. 0406, page 008, 2004.
- [Albrecht 82] Andreas Albrecht & Paul J. Steinhardt.
Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking.
Phys. Rev. Lett., vol. 48, pages 1220–1223, 1982.
- [Allemandi 04] Gianluca Allemandi, Andrzej Borowiec & Mauro Francaviglia.
Accelerated cosmological models in Ricci squared gravity.
Phys. Rev., vol. D70, page 103503, 2004.
- [Amendola 90] Luca Amendola, Marco Litterio & Franco Occhionero.
The Phase space view of inflation. 1 : The nonminimally coupled scalar field.
Int. J. Mod. Phys., vol. A5, pages 3861–3886, 1990.
- [Amendola 99a] Luca Amendola.
Scaling solutions in general non-minimal coupling theories.
Phys. Rev., vol. D60, page 043501, 1999.
- [Amendola 99b] Luca Amendola, Pier Stefano Corasaniti & Franco Occhionero.
Time variability of the gravitational constant and type Ia supernovae. 1999.
- [Amendola 00] Luca Amendola.
Coupled quintessence.
Phys. Rev., vol. D62, page 043511, 2000.
- [Amendola 01] Luca Amendola & Domenico Tocchini-Valentini.
Stationary dark energy : The present universe as a global attractor.
Phys. Rev., vol. D64, page 043509, 2001.
-

-
- [Amendola 03] Luca Amendola & Claudia Quercellini.
Tracking and coupled dark energy as seen by WMAP.
Phys. Rev., vol. D68, page 023514, 2003.
- [Amendola 06] Luca Amendola, Miguel Quartin, Shinji Tsujikawa & Ioav Waga.
Challenges for scaling cosmologies.
Phys. Rev., vol. D74, page 023525, 2006.
- [Amendola 07a] Luca Amendola, Radouane Gannouji, David Polarski & Shinji Tsujikawa.
Conditions for the cosmological viability of $f(R)$ dark energy models.
Phys. Rev., vol. D75, page 083504, 2007.
- [Amendola 07b] Luca Amendola, David Polarski & Shinji Tsujikawa.
Are $f(R)$ dark energy models cosmologically viable ?
Phys. Rev. Lett., vol. 98, page 131302, 2007.
- [Amendola 07c] Luca Amendola, David Polarski & Shinji Tsujikawa.
Power-laws $f(R)$ theories are cosmologically unacceptable.
Int. J. Mod. Phys., vol. D16, pages 1555–1561, 2007.
- [Andrianov 05] Alexander A. Andrianov, Francesco Cannata & Alexander Y. Kamenshchik.
Smooth dynamical crossing of the phantom divide line of a scalar field in simple cosmological models.
Phys. Rev., vol. D72, page 043531, 2005.
- [Aref'eva 05] Irina Ya. Aref'eva, Alexei S. Koshelev & Sergey Yu. Vernov.
Crossing of the $w = -1$ barrier by D3-brane dark energy model.
Phys. Rev., vol. D72, page 064017, 2005.
- [Arkani-Hamed 04] Nima Arkani-Hamed, Hsin-Chia Cheng, Markus A. Luty & Shinji Mukohyama.
Ghost condensation and a consistent infrared modification of gravity.
JHEP, vol. 05, page 074, 2004.
- [Arnett 82] W. David Arnett.
Type I supernovae. I - Analytic solutions for the early part of the light curve.
Astrophys. J., vol. 253, pages 785–797, feb 1982.
- [Astier 06] Pierre Astier *et al.*
The Supernova Legacy Survey : Measurement of Ω_m , Ω_Λ and w from the First Year Data Set.
Astron. Astrophys., vol. 447, pages 31–48, 2006.
- [Barenboim 08] Gabriela Barenboim & Joseph Lykken.
Self-accelerating solutions of scalar-tensor gravity.
JCAP, vol. 0803, page 017, 2008.
- [Barrow 83] John D. Barrow & Adrian C. Ottewill.
The Stability of General Relativistic Cosmological Theory.
J. Phys., vol. A16, page 2757, 1983.
- [Barrow 90] John D. Barrow & Kei-ichi Maeda.
Extended inflationary universes.
Nucl. Phys., vol. B341, pages 294–308, 1990.
- [Bartolo 00] Nicola Bartolo & Massimo Pietroni.
Scalar tensor gravity and quintessence.
Phys. Rev., vol. D61, page 023518, 2000.
-

- [Bassett 04] Bruce A. Bassett, Pier Stefano Corasaniti & Martin Kunz.
The essence of quintessence and the cost of compression.
Astrophys. J., vol. 617, pages L1–L4, 2004.
- [Bean 07] Rachel Bean, David Bernat, Levon Pogosian, Alessandra Silvestri & Mark Trodden.
Dynamics of Linear Perturbations in $f(R)$ Gravity.
Phys. Rev., vol. D75, page 064020, 2007.
- [Bertotti 03] Bruno Bertotti, Luciano Iess & Paolo Tortora.
A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft.
Nature, vol. 425, page 374, 2003.
- [Bessell 90] Michael S. Bessell.
UBVRI passbands. vol. 102, pages 1181–1199, oct 1990.
- [Blais 04] David Blais & David Polarski.
Transient accelerated expansion and double quintessence.
Phys. Rev., vol. D70, page 084008, 2004.
- [Blake 06] Chris Blake *et al.*
Universal fitting formulae for baryon oscillation surveys.
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., vol. 365, pages 255–264, 2006.
- [Bludman 06] Sidney Bludman.
Cosmological acceleration : Dark energy or modified gravity ?
2006.
- [Bludman 07] Sidney Bludman.
What drives our accelerating universe ?
2007.
- [Boisseau 00] Bruno Boisseau, Gilles Esposito-Farese, David Polarski & Alexei A. Starobinsky.
Reconstruction of a scalar-tensor theory of gravity in an accelerating universe.
Phys. Rev. Lett., vol. 85, page 2236, 2000.
- [Bond 84] J. Richard Bond & George Efsthathiou.
Cosmic background radiation anisotropies in universes dominated by non-baryonic dark matter.
Astrophys. J., vol. 285, pages L45–L48, 1984.
- [Brans 61] Carl Brans & Robert H. Dicke.
Mach's principle and a relativistic theory of gravitation.
Phys. Rev., vol. 124, pages 925–935, 1961.
- [Brookfield 06] Anthony W. Brookfield, Carsten van de Bruck & Lisa M. H. Hall.
Viability of $f(R)$ theories with additional powers of curvature.
Phys. Rev., vol. D74, page 064028, 2006.
- [Buchdahl 70] Hans A. Buchdahl.
Non-linear Lagrangians and cosmological theory.
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., vol. 150, page 1, 1970.
- [Bunch 78] Timothy S. Bunch & Paul C. W. Davies.
Quantum Field Theory in de Sitter Space : Renormalization by Point Splitting.
Proc. Roy. Soc. Lond., vol. A360, pages 117–134, 1978.
-

-
- [Caldwell 98] Robert R. Caldwell, Rahul Dave & Paul J. Steinhardt.
Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation-of-State.
Phys. Rev. Lett., vol. 80, pages 1582–1585, 1998.
- [Caldwell 02] Robert R. Caldwell.
A Phantom Menace ?
Phys. Lett., vol. B545, pages 23–29, 2002.
- [Caldwell 03] Robert R. Caldwell, Marc Kamionkowski & Nevin N. Weinberg.
Phantom Energy and Cosmic Doomsday.
Phys. Rev. Lett., vol. 91, page 071301, 2003.
- [Capozziello 93] Salvatore Capozziello, Franco Occhionero & Luca Amendola.
The Phase space view of inflation. 2 : Fourth order models.
Int. J. Mod. Phys., vol. D1, pages 615–639, 1993.
- [Capozziello 03] Salvatore Capozziello, Vincenzo F. Cardone, Sante Carloni & Antonio Troisi.
Curvature quintessence matched with observational data.
Int. J. Mod. Phys., vol. D12, pages 1969–1982, 2003.
- [Capozziello 05] Salvatore Capozziello, Vincenzo F. Cardone & Antonio Troisi.
Reconciling dark energy models with $f(R)$ theories.
Phys. Rev., vol. D71, page 043503, 2005.
- [Capozziello 06a] Salvatore Capozziello, Vincenzo F. Cardone, Emilio Elizalde, Shin’ichi Nojiri & Sergei D. Odintsov.
Observational constraints on dark energy with inhomogeneous equations of state.
Phys. Rev., vol. D73, page 043512, 2006.
- [Capozziello 06b] Salvatore Capozziello, Shin’ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov & Antonio Troisi.
Cosmological viability of $f(R)$ -gravity as an ideal fluid and its compatibility with a matter dominated phase.
Phys. Lett., vol. B639, pages 135–143, 2006.
- [Capozziello 07a] Salvatore Capozziello, Vincenzo F. Cardone & Antonio Troisi.
Low surface brightness galaxies rotation curves in the low energy limit of R^n gravity : No need for dark matter ?
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., vol. 375, pages 1423–1440, 2007.
- [Capozziello 07b] Salvatore Capozziello, Peter K. S. Dunsby, Ester Piedipalumbo & Claudio Rubano.
Constraining scalar-tensor quintessence by cosmic clocks.
2007.
- [Carloni 05] Sante Carloni, Peter K. S. Dunsby, Salvatore Capozziello & Antonio Troisi.
Cosmological dynamics of R^n gravity.
Class. Quant. Grav., vol. 22, pages 4839–4868, 2005.
- [Carroll 01] Sean M. Carroll.
The cosmological constant.
Living Rev. Rel., vol. 4, page 1, 2001.
-

- [Carroll 03] Sean M. Carroll, Mark Hoffman & Mark Trodden.
Can the dark energy equation-of-state parameter w be less than -1 ?
Phys. Rev., vol. D68, page 023509, 2003.
- [Carroll 04] Sean M. Carroll, Vikram Duvvuri, Mark Trodden & Michael S. Turner.
Is cosmic speed-up due to new gravitational physics ?
Phys. Rev., vol. D70, page 043528, 2004.
- [Carroll 05a] Sean M. Carroll, Antonio De Felice & Mark Trodden.
Can we be tricked into thinking that w is less than -1 ?
Phys. Rev., vol. D71, page 023525, 2005.
- [Carroll 05b] Sean M. Carroll *et al.*
The cosmology of generalized modified gravity models.
Phys. Rev., vol. D71, page 063513, 2005.
- [Carroll 06] Sean M. Carroll, Ignacy Sawicki, Alessandra Silvestri & Mark Trodden.
Modified-Source Gravity and Cosmological Structure Formation.
New J. Phys., vol. 8, page 323, 2006.
- [Chevallier 01] Michel Chevallier & David Polarski.
Accelerating universes with scaling dark matter.
Int. J. Mod. Phys., vol. D10, pages 213–224, 2001.
- [Chiba 99] Takeshi Chiba.
Quintessence, the gravitational constant, and gravity.
Phys. Rev., vol. D60, page 083508, 1999.
- [Chiba 03] Takeshi Chiba.
 $1/R$ gravity and scalar-tensor gravity.
Phys. Lett., vol. B575, pages 1–3, 2003.
- [Chiba 07a] Takeshi Chiba, Tristan L. Smith & Adrienne L. Erickcek.
Solar System constraints to general $f(R)$ gravity.
Phys. Rev., vol. D75, page 124014, 2007.
- [Chiba 07b] Takeshi Chiba & Ryuichi Takahashi.
A Consistency Relation in Cosmology.
Phys. Rev., vol. D75, page 101301, 2007.
- [Chimento 06] Luis P. Chimento, Ruth Lazkoz, Roy Maartens & Israel Quiros.
Crossing the phantom divide without phantom matter.
JCAP, vol. 0609, page 004, 2006.
- [Clifton 05] Timothy Clifton & John D. Barrow.
The Power of General Relativity.
Phys. Rev., vol. D72, page 103005, 2005.
- [Cline 04] James M. Cline, Sangyong Jeon & Guy D. Moore.
The phantom menaced : Constraints on low-energy effective ghosts.
Phys. Rev., vol. D70, page 043543, 2004.
- [Clocchiatti 06] Alejandro Clocchiatti *et al.*
Hubble Space Telescope and Ground-Based Observations of Type Ia Supernovae at Redshift 0.5 : Cosmological Implications.
Astrophys. J., vol. 642, pages 1–21, 2006.
- [Cognola 05] Guido Cognola, Emilio Elizalde, Shin'ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov & Sergio Zerbini.
-

- One-loop $f(R)$ gravity in de Sitter universe.*
JCAP, vol. 0502, page 010, 2005.
- [Cognola 07] Guido Cognola, Monica Gastaldi & Sergio Zerbini.
On the Stability of a class of Modified Gravitational Models.
2007.
- [Cole 05] Shaun Cole *et al.*
The 2dF Galaxy Redshift Survey : Power-spectrum analysis of the final dataset and cosmological implications.
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., vol. 362, pages 505–534, 2005.
- [Copeland 06] Edmund J. Copeland, Mohammad Sami & Shinji Tsujikawa.
Dynamics of dark energy.
Int. J. Mod. Phys., vol. D15, pages 1753–1936, 2006.
- [Copi 04] Craig J. Copi, Adam N. Davis & Lawrence M. Krauss.
A New Nucleosynthesis Constraint on the Variation of G .
Phys. Rev. Lett., vol. 92, page 171301, 2004.
- [da Angela 06] Jose da Angela *et al.*
The 2dF-SDSS LRG and QSO Survey : QSO clustering and the L - z degeneracy.
2006.
- [Damour 92] Thibault Damour & Gilles Esposito-Farese.
Tensor multiscalar theories of gravitation.
Class. Quant. Grav., vol. 9, pages 2093–2176, 1992.
- [Das 06] Sudipta Das, Narayan Banerjee & Naresh Dadhich.
Curvature driven acceleration : an utopia or a reality ?
Class. Quant. Grav., vol. 23, pages 4159–4166, 2006.
- [Davis 07] Tamara M. Davis *et al.*
Scrutinizing exotic cosmological models using ESSENCE supernova data combined with other cosmological probes.
Astrophys. J., vol. 666, page 716, 2007.
- [De Felice 06] Antonio De Felice, Mark Hindmarsh & Mark Trodden.
Ghosts, instabilities, and superluminal propagation in modified gravity models.
JCAP, vol. 0608, page 005, 2006.
- [de la Cruz-Dombriz 06] Alvaro de la Cruz-Dombriz & Antonio Dobado.
A $f(R)$ gravity without cosmological constant.
Phys. Rev., vol. D74, page 087501, 2006.
- [Demianski 07] Marek Demianski, Ester Piedipalumbo, Claudio Rubano & Paolo Scudellaro.
Cosmological models in scalar tensor theories of gravity and observations : a class of general solutions.
2007.
- [Di Pietro 03] Elisa Di Pietro & Jean-Francois Claeskens.
Quintessence models faced with future supernovae data.
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., vol. 341, page 1299, 2003.
- [Di Porto 07] Cinzia Di Porto & Luca Amendola.
Observational constraints on the linear fluctuation growth rate.
2007.

- [Dick 06] Jason Dick, Lloyd Knox & Mike Chu.
Reduction of Cosmological Data for the Detection of Time- varying Dark Energy Density.
JCAP, vol. 0607, page 001, 2006.
- [Dicus 04] Duane A. Dicus & Wayne W. Repko.
Constraints on the dark energy equation of state from recent supernova data.
Phys. Rev., vol. D70, page 083527, 2004.
- [Dolgov 03] Alexander D. Dolgov & Masahiro Kawasaki.
Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion ?
Phys. Lett., vol. B573, pages 1–4, 2003.
- [Durrer 94] Ruth Durrer.
Gauge invariant cosmological perturbation theory : A General study and its application to the texture scenario of structure formation.
Fund. Cosmic Phys., vol. 15, page 209, 1994.
- [Easson 04] Damien A. Easson.
Cosmic Acceleration and Modified Gravitational Models.
Int. J. Mod. Phys., vol. A19, pages 5343–5350, 2004.
- [Efstathiou 99] George Efstathiou & J. Richard Bond.
Cosmic Confusion : Degeneracies among Cosmological Parameters Derived from Measurements of Microwave Background Anisotropies.
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., vol. 304, pages 75–97, 1999.
- [Eisenstein 98] Daniel J. Eisenstein & Wayne Hu.
Baryonic Features in the Matter Transfer Function.
Astrophys. J., vol. 496, page 605, 1998.
- [Eisenstein 05] Daniel J. Eisenstein *et al.*
Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies.
Astrophys. J., vol. 633, pages 560–574, 2005.
- [Espana-Bonet 05] Cristina Espana-Bonet & Pilar Ruiz-Lapuente.
Dark energy as an inverse problem.
2005.
- [Esposito-Farese 01] Gilles Esposito-Farese & D. Polarski.
Scalar-tensor gravity in an accelerating universe.
Phys. Rev., vol. D63, page 063504, 2001.
- [Fairbairn 07] Malcolm Fairbairn & Sara Rydbeck.
Expansion history and $f(R)$ modified gravity.
JCAP, vol. 0712, page 005, 2007.
- [Faraoni 04] Valerio Faraoni.
cosmology in scalar-tensor gravity.
Springer, 2004.
- [Faraoni 06a] Valerio Faraoni.
Matter instability in modified gravity.
Phys. Rev., vol. D74, page 104017, 2006.
- [Faraoni 06b] Valerio Faraoni.
Solar system experiments do not yet veto modified gravity models.
Phys. Rev., vol. D74, page 023529, 2006.
-

-
- [Faraoni 07] Valerio Faraoni & Shahn Nadeau.
The (pseudo)issue of the conformal frame revisited.
Phys. Rev., vol. D75, page 023501, 2007.
- [Faulkner 07] Thomas Faulkner, Max Tegmark, Emory F. Bunn & Yi Mao.
Constraining $f(R)$ gravity as a scalar tensor theory.
Phys. Rev., vol. D76, page 063505, 2007.
- [Fay 07a] Stephane Fay, Savas Nesseris & Leandros Perivolaropoulos.
Can $f(R)$ modified gravity theories mimic a Λ CDM cosmology ?
Phys. Rev., vol. D76, page 063504, 2007.
- [Fay 07b] Stephane Fay, Reza Tavakol & Shinji Tsujikawa.
 $f(R)$ gravity theories in Palatini formalism : cosmological dynamics and observational constraints.
Phys. Rev., vol. D75, page 063509, 2007.
- [Feng 05] Bo Feng, Xiu-Lian Wang & Xin-Min Zhang.
Dark Energy Constraints from the Cosmic Age and Supernova.
Phys. Lett., vol. B607, pages 35–41, 2005.
- [Ferreira 97] Pedro G. Ferreira & Michael Joyce.
Structure formation with a self-tuning scalar field.
Phys. Rev. Lett., vol. 79, pages 4740–4743, 1997.
- [Ferreira 98] Pedro G. Ferreira & Michael Joyce.
Cosmology with a Primordial Scaling Field.
Phys. Rev., vol. D58, page 023503, 1998.
- [Fischler 85] Willy Fischler, Bharat Ratra & Leonard Susskind.
Quantum mechanics of inflation.
Nucl. Phys., vol. B259, page 730, 1985.
- [Ford 87] Larry H. Ford.
Cosmological constant damping by unstable scalar fields.
Phys. Rev., vol. D35, page 2339, 1987.
- [Fradkin 85] Efim S. Fradkin & Arkady A. Tseytlin.
Quantum String Theory Effective Action.
Nucl. Phys., vol. B261, pages 1–27, 1985.
- [Fujii 82] Yasunori Fujii.
Origin of the gravitational constant and particle masses in scale invariant scalar - tensor theory.
Phys. Rev., vol. D26, page 2580, 1982.
- [Fujii 90] Yasunori Fujii & Tsuyoshi Nishioka.
Model of a decaying cosmological constant.
Phys. Rev., vol. D42, pages 361–370, 1990.
- [Fujii 00] Yasunori Fujii.
Quintessence, scalar-tensor theories and non-Newtonian gravity.
Phys. Rev., vol. D62, page 044011, 2000.
- [Fujii 03] Yasunori Fujii & Kei-Ichi Maeda.
the scalar-tensor theory of gravitation.
Cambridge University Press, 2003.
-

- [Gannouji 06] Radouane Gannouji, David Polarski, Andre Ranquet & Alexei A. Starobinsky.
Scalar-tensor models of normal and phantom dark energy.
JCAP, vol. 0609, page 016, 2006.
- [Gannouji 08] Radouane Gannouji & David Polarski.
The growth of matter perturbations in some scalar-tensor DE models.
JCAP, vol. 0805, page 018, 2008.
- [Garcia-Berro 99] Enrique Garcia-Berro, Enrique Gaztanaga, Jordi Isern, Omar Benvenuto & Leandro Althaus.
On the Evolution of Cosmological Type Ia Supernovae and the Gravitational Constant.
1999.
- [Gaztanaga 02] Enrique Gaztanaga, Enrique Garcia-Berro, Jordi Isern, Eduardo Bravo & Inma Dominguez.
Bounds on the possible evolution of the Gravitational Constant from Cosmological Type-Ia Supernovae.
Phys. Rev., vol. D65, page 023506, 2002.
- [Gong 05] Yun-Gui Gong.
Model independent analysis of dark energy I : Supernova fitting result.
Class. Quant. Grav., vol. 22, pages 2121–2133, 2005.
- [Guth 81] Alan H. Guth.
The Inflationary Universe : A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems.
Phys. Rev., vol. D23, pages 347–356, 1981.
- [Guth 82] Alan H. Guth & So Y. Pi.
Fluctuations in the New Inflationary Universe.
Phys. Rev. Lett., vol. 49, pages 1110–1113, 1982.
- [Hamuy 96] Mario Hamuy *et al.*
The Absolute Luminosities of the Calan/Tololo Type Ia Supernovae.
Astron. J., vol. 112, page 2391, 1996.
- [Hamuy 02] Mario Hamuy & Philip A. Pinto.
Type II Supernovae as Standardized Candles.
2002.
- [Hannestad 04] Steen Hannestad & Edvard Mortsell.
Cosmological constraints on the dark energy equation of state and its evolution.
JCAP, vol. 0409, page 001, 2004.
- [Hawking 82] Stephen W. Hawking.
The Development of Irregularities in a Single Bubble Inflationary Universe.
Phys. Lett., vol. B115, page 295, 1982.
- [Hawkins 03] Ed Hawkins *et al.*
The 2dF Galaxy Redshift Survey : correlation functions, peculiar velocities and the matter density of the Universe.
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., vol. 346, page 78, 2003.
-

- [Heavens 07] Alan F. Heavens, Thomas D. Kitching & Licia Verde.
On model selection forecasting, dark energy and modified gravity.
2007.
- [Holden 00] Damien J. Holden & David Wands.
Self-similar cosmological solutions with a non-minimally coupled scalar field.
Phys. Rev., vol. D61, page 043506, 2000.
- [Holtzman 89] Jon A. Holtzman.
Microwave background anisotropies and large scale structure in universes with cold dark matter, baryons, radiation, and massive and massless neutrinos.
Astrophys. J. Suppl., vol. 71, pages 1–24, 1989.
- [Hu 96] Wayne Hu & Naoshi Sugiyama.
Small scale cosmological perturbations : An Analytic approach.
Astrophys. J., vol. 471, pages 542–570, 1996.
- [Hui 08] Lam Hui & Kyle P. Parfrey.
The Evolution of Bias - Generalized.
Phys. Rev., vol. D77, page 043527, 2008.
- [Huterer 05] Dragan Huterer & Asantha Cooray.
Uncorrelated Estimates of Dark Energy Evolution.
Phys. Rev., vol. D71, page 023506, 2005.
- [Huterer 07] Dragan Huterer & Eric V. Linder.
Separating dark physics from physical darkness : Minimalist modified gravity vs. dark energy.
Phys. Rev., vol. D75, page 023519, 2007.
- [Hwang 91] Jai-chan Hwang.
Perturbations of the Robertson-Walker space - Multicomponent sources and generalized gravity.
Astrophys. J., vol. 375, pages 443–462, 1991.
- [Ishak 06] Mustapha Ishak, Amol Upadhye & David N. Spergel.
Probing cosmic acceleration beyond the equation of state : Distinguishing between dark energy and modified gravity models.
Phys. Rev., vol. D74, page 043513, 2006.
- [Jain 03] Bhuvnesh Jain & Andy Taylor.
Cross-correlation Tomography : Measuring Dark Energy Evolution with Weak Lensing.
Phys. Rev. Lett., vol. 91, page 141302, 2003.
- [Jassal 06] Harvinder K. Jassal, J. S. Bagla & Thanu Padmanabhan.
The vanishing phantom menace.
2006.
- [Jin 06] Xing-Hua Jin, Dao-Jun Liu & Xin-Zhou Li.
Solar System tests disfavor $f(R)$ gravities.
2006.
- [Kahya 07] Emre O. Kahya & Vakif K. Onemli.
Quantum Stability of a $w < -1$ Phase of Cosmic Acceleration.
Phys. Rev., vol. D76, page 043512, 2007.
-

- [Kamenshchik 01] Alexander Yu. Kamenshchik, Ugo Moschella & Vincent Pasquier.
An alternative to quintessence.
Phys. Lett., vol. B511, pages 265–268, 2001.
- [Kiakotou 07] Angeliki Kiakotou, Oystein Elgaroy & Ofer Lahav.
Neutrino Mass, Dark Energy, and the Linear Growth Factor.
2007.
- [Kibble 80] Tom W. B. Kibble.
Some Implications of a Cosmological Phase Transition.
Phys. Rept., vol. 67, page 183, 1980.
- [Knop 03] Robert A. Knop *et al.*
New Constraints on Ω_M , Ω_Λ , and w from an Independent Set of Eleven High-Redshift Supernovae Observed with HST.
Astrophys. J., vol. 598, page 102, 2003.
- [Knox 06] Lloyd Knox, Yong-Seon Song & J. Anthony Tyson.
Distance-redshift and growth-redshift relations as two windows on acceleration and gravitation : Dark energy or new gravity ?
Phys. Rev., vol. D74, page 023512, 2006.
- [Kodama 84] Hideo Kodama & Misao Sasaki.
Cosmological Perturbation Theory.
Prog. Theor. Phys. Suppl., vol. 78, pages 1–166, 1984.
- [Komatsu 08] Eiichiro Komatsu *et al.*
Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Cosmological Interpretation.
2008.
- [Kuchner 94] Marc J. Kuchner, Robert P. Kirshner, Philip A. Pinto & Bruno Leibundgut.
Evidence for Ni-56 yields Co-56 yields Fe-56 decay in type IA supernovae.
ApJ, 426, L89, 1994.
- [Kunz 07] Martin Kunz & Domenico Sapone.
Dark energy versus modified gravity.
Phys. Rev. Lett., vol. 98, page 121301, 2007.
- [La 89a] Daile La & Paul J. Steinhardt.
Bubble Percolation in Extended Inflationary Models.
Phys. Lett., vol. B220, page 375, 1989.
- [La 89b] Daile La & Paul J. Steinhardt.
Extended Inflationary Cosmology.
Phys. Rev. Lett., vol. 62, page 376, 1989.
- [Lahav 91] Ofer Lahav, Per B. Lilje, Joel R. Primack & Martin J. Rees.
Dynamical effects of the cosmological constant.
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., vol. 251, pages 128–136, 1991.
- [Lazkoz 05] Ruth Lazkoz, Savas Nesseris & Leandros Perivolaropoulos.
Exploring Cosmological Expansion Parametrizations with the Gold SnIa Dataset.
JCAP, vol. 0511, page 010, 2005.
- [Li 07] Baojiu Li & John D. Barrow.
The Cosmology of $f(R)$ Gravity in Metric Variational Approach.
Phys. Rev., vol. D75, page 084010, 2007.
-

-
- [Linde 82] Andrei D. Linde.
A New Inflationary Universe Scenario : A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems.
Phys. Lett., vol. B108, pages 389–393, 1982.
- [Linde 83] Andrei D. Linde.
Chaotic Inflation.
Phys. Lett., vol. B129, pages 177–181, 1983.
- [Linde 84] Andrei D. Linde.
The Inflationary Universe.
Rept. Prog. Phys., vol. 47, pages 925–986, 1984.
- [Linde 05] Andrei D. Linde.
Particle Physics and Inflationary Cosmology.
2005.
- [Linder 03] Eric V. Linder.
Exploring the expansion history of the universe.
Phys. Rev. Lett., vol. 90, page 091301, 2003.
- [Linder 07] Eric V. Linder & Robert N. Cahn.
Parameterized Beyond-Einstein Growth.
Astropart. Phys., vol. 28, pages 481–488, 2007.
- [Luo 05] Ming-Xing Luo & Qi-Ping Su.
Fitting Non-Minimally Coupled Scalar Models to Gold SnIa Dataset.
Phys. Lett., vol. B626, pages 7–14, 2005.
- [Manneville 98] Paul Manneville.
systèmes dynamiques et chaos.
LadHyX, école Polytechnique. 1998.
- [Maor 02] Irit Maor, Ram Brustein, Jeff McMahon & Paul J. Steinhardt.
Measuring the Equation-of-state of the Universe : Pitfalls and Prospects.
Phys. Rev., vol. D65, page 123003, 2002.
- [Martin 06] Jerome Martin, Carlo Schmid & Jean-Philippe Uzan.
Testing for $w < -1$ in the solar system.
Phys. Rev. Lett., vol. 96, page 061303, 2006.
- [Melchiorri 03] Alessandro Melchiorri, Laura Mersini-Houghton, Carolina J. Odman & Mark Trodden.
The State of the Dark Energy Equation of State.
Phys. Rev., vol. D68, page 043509, 2003.
- [Mijic 86] Milan B. Mijic, Michael S. Morris & Wai-Mo Suen.
The R^2 cosmology : inflation without a phase transition.
Phys. Rev., vol. D34, page 2934, 1986.
- [Navarro 07] Ignacio Navarro & Karel Van Acoleyen.
 $f(R)$ actions, cosmic acceleration and local tests of gravity.
JCAP, vol. 0702, page 022, 2007.
- [Nesseris 04] Savas Nesseris & Leandros Perivolaropoulos.
A comparison of cosmological models using recent supernova data.
Phys. Rev., vol. D70, page 043531, 2004.
-

-
- [Nesseris 06] Savas Nesseris & Leandros Perivolaropoulos.
Evolving Newton's constant, extended gravity theories and SnIa data analysis.
Phys. Rev., vol. D73, page 103511, 2006.
- [Nesseris 07] Savas Nesseris & Leandros Perivolaropoulos.
Crossing the phantom divide : Theoretical implications and observational status.
JCAP, vol. 0701, page 018, 2007.
- [Nesseris 08] Savas Nesseris & Leandros Perivolaropoulos.
Testing Λ CDM with the Growth Function $\delta(a)$: Current Constraints.
Phys. Rev., vol. D77, page 023504, 2008.
- [Neupane 07] Ishwaree P. Neupane.
Constraints on Gauss-Bonnet Cosmologies.
2007.
- [Nojiri 03] Shin'ichi Nojiri & Sergei D. Odintsov.
Modified gravity with negative and positive powers of the curvature : Unification of the inflation and of the cosmic acceleration.
Phys. Rev., vol. D68, page 123512, 2003.
- [Nojiri 04] Shin'ichi Nojiri & Sergei D. Odintsov.
Modified gravity with $\ln R$ terms and cosmic acceleration.
Gen. Rel. Grav., vol. 36, pages 1765–1780, 2004.
- [Nojiri 05] Shin'ichi Nojiri, Sergei D. Odintsov & Shinji Tsujikawa.
Properties of singularities in (phantom) dark energy universe.
Phys. Rev., vol. D71, page 063004, 2005.
- [Nojiri 06] Shin'ichi Nojiri & Sergei D. Odintsov.
Modified $f(R)$ gravity consistent with realistic cosmology : From matter dominated epoch to dark energy universe.
Phys. Rev., vol. D74, page 086005, 2006.
- [Nojiri 07] Shin'ichi Nojiri & Sergei D. Odintsov.
Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy.
Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., vol. 4, pages 115–146, 2007.
- [O' Hanlon 72] J. O' Hanlon & B. O. J. Tupper.
Vacuum-field solutions in the Brans-Dicke theory.
Nuovo Cim., vol. B7, pages 305–312, 1972.
- [Padmanabhan 03] Tahnu Padmanabhan.
Cosmological constant : The weight of the vacuum.
Phys. Rept., vol. 380, pages 235–320, 2003.
- [Peebles 70] Philip J. E. Peebles & J. T. Yu.
Primeval adiabatic perturbation in an expanding universe.
Astrophys. J., vol. 162, pages 815–836, 1970.
- [Peebles 84] Philip J. E. Peebles.
Tests of Cosmological Models Constrained by Inflation.
Astrophys. J., vol. 284, pages 439–444, 1984.
- [Peebles 03] Philip J. E. Peebles & Bharat Ratra.
The cosmological constant and dark energy.
Rev. Mod. Phys., vol. 75, pages 559–606, 2003.
-

- [Percival 07] Will J. Percival *et al.*
Measuring the Baryon Acoustic Oscillation scale using the SDSS and 2dFGRS.
 Mon. Not. Roy. Astron. Soc., vol. 381, pages 1053–1066, 2007.
- [Perivolaropoulos 05] Leandros Perivolaropoulos.
Reconstruction of extended quintessence potentials from the SnIa gold dataset.
 JCAP, vol. 0510, page 001, 2005.
- [Perlmutter 97] Saul Perlmutter *et al.*
Measurements of the Cosmological Parameters Ω and Λ from the First 7 Supernovae at $z \geq 0.35$.
 Astrophys. J., vol. 483, page 565, 1997.
- [Perlmutter 99a] Saul Perlmutter.
Supernovae, dark energy, and the accelerating universe : The status of the cosmological parameters.
 1999. Talk given at 19th International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High-Energies (LP 99), Stanford, California, 9-14 Aug 1999.
- [Perlmutter 99b] Saul Perlmutter *et al.*
Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae.
 Astrophys. J., vol. 517, pages 565–586, 1999.
- [Perrotta 00] Francesca Perrotta, Carlo Baccigalupi & Sabino Matarrese.
Extended quintessence.
 Phys. Rev., vol. D61, page 023507, 2000.
- [Perrotta 02] Francesca Perrotta & Carlo Baccigalupi.
On the dark energy clustering properties.
 Phys. Rev., vol. D65, page 123505, 2002.
- [Pettorino 05] Valeria Pettorino, Carlo Baccigalupi & Francesca Perrotta.
Scaling solutions in scalar-tensor cosmologies.
 JCAP, vol. 0512, page 003, 2005.
- [Phillips 93] Mark M. Phillips.
The absolute magnitudes of Type IA supernovae.
 Astrophys. J., vol. 413, pages L105–L108, 1993.
- [Piazza 04] Federico Piazza & Shinji Tsujikawa.
Dilatonic ghost condensate as dark energy.
 JCAP, vol. 0407, page 004, 2004.
- [Pitjeva 05a] Elena V. Pitjeva.
High-Precision Ephemerides of Planets-EPM and Determination of Some Astronomical Constants.
 Solar System Research 39, 176, 2005.
- [Pitjeva 05b] Elena V. Pitjeva.
Relativistic effects and solar oblateness from radar observations of planets and spacecraft.
 Astron. Lett. 31, 340, 2005.
- [Polarski 05] David Polarski & Andre Ranquet.
On the equation of state of dark energy.
 Phys. Lett., vol. B627, pages 1–8, 2005.

- [Polarski 06] David Polarski.
Dark energy : Beyond general relativity ?
AIP Conf. Proc., vol. 861, pages 1013–1018, 2006.
- [Polarski 08] David Polarski & Radouane Gannouji.
On the growth of linear perturbations.
Phys. Lett., vol. B660, pages 439–443, 2008.
- [Poplawski 06] Nikodem J. Poplawski.
Interacting dark energy in $f(R)$ gravity.
Phys. Rev., vol. D74, page 084032, 2006.
- [Poplawski 07] Nikodem J. Poplawski.
The cosmic snap parameter in $f(R)$ gravity.
Class. Quant. Grav., vol. 24, pages 3013–3020, 2007.
- [Pskovskii 77] I. P. Pskovskii.
Light curves, color curves, and expansion velocity of type I supernovae as functions of the rate of brightness decline.
Soviet Astronomy, vol. 21, pages 675–682, dec 1977.
- [Rador 07] Tonguc Rador.
Acceleration of the Universe via $f(R)$ Gravities and The Stability of Extra Dimensions.
Phys. Rev., vol. D75, page 064033, 2007.
- [Randall 99a] Lisa Randall & Raman Sundrum.
A large mass hierarchy from a small extra dimension.
Phys. Rev. Lett., vol. 83, pages 3370–3373, 1999.
- [Randall 99b] Lisa Randall & Raman Sundrum.
An alternative to compactification.
Phys. Rev. Lett., vol. 83, pages 4690–4693, 1999.
- [Rapetti 05] David Rapetti, Steven W. Allen & Jochen Weller.
Constraining Dark Energy with X-ray Galaxy Clusters, Supernovae and the Cosmic Microwave Background.
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., vol. 360, pages 555–564, 2005.
- [Ratra 88] Bharat Ratra & Philip J. E. Peebles.
Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field.
Phys. Rev., vol. D37, page 3406, 1988.
- [Riazuelo 02] Alain Riazuelo & Jean-Philippe Uzan.
Cosmological observations in scalar-tensor quintessence.
Phys. Rev., vol. D66, page 023525, 2002.
- [Riess 98] Adam G. Riess *et al.*
Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant.
Astron. J., vol. 116, pages 1009–1038, 1998.
- [Riess 99] Adam G. Riess *et al.*
BVRI Light Curves for 22 Type Ia Supernovae.
Astron. J., vol. 117, pages 707–724, 1999.
- [Riess 04] Adam G. Riess *et al.*
Type Ia Supernova Discoveries at $z > 1$ From the Hubble Space Telescope :
-

- Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution.*
Astrophys. J., vol. 607, pages 665–687, 2004.
- [Riess 06] Adam G. Riess *et al.*
New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at $z > 1$: Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy.
2006.
- [Ross 06] Nicholas P. Ross *et al.*
The 2dF-SDSS LRG and QSO Survey : The 2-Point Correlation Function and Redshift-Space Distortions.
2006.
- [Rubakov 06] Valery A. Rubakov.
Phantom without UV pathology.
Theor. Math. Phys., vol. 149, pages 1651–1664, 2006.
- [Ruiz-Lapiente 07] Pilar Ruiz-Lapiente.
Dark energy, gravitation and supernovae.
Class. Quant. Grav., vol. 24, page R91, 2007.
- [Sachs 67] Rainer K. Sachs & Arthur M. Wolfe.
Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background.
Astrophys. J., vol. 147, pages 73–90, 1967.
- [Sahni 00] Varun Sahni & Alexei A. Starobinsky.
The Case for a Positive Cosmological Λ -term.
Int. J. Mod. Phys., vol. D9, pages 373–444, 2000.
- [Sahni 03a] Varun Sahni, Tarun Deep Saini, Alexei A. Starobinsky & Ujjaini Alam.
Statefinder – a new geometrical diagnostic of dark energy.
JETP Lett., vol. 77, pages 201–206, 2003.
- [Sahni 03b] Varun Sahni & Yuri Shtanov.
Braneworld models of dark energy.
JCAP, vol. 0311, page 014, 2003.
- [Sahni 04] Varun Sahni.
Dark matter and dark energy.
Lect. Notes Phys., vol. 653, pages 141–180, 2004.
- [Sahni 05] Varun Sahni.
Cosmological surprises from braneworld models of dark energy.
2005.
- [Sahni 06] Varun Sahni & Alexei A. Starobinsky.
Reconstructing dark energy.
Int. J. Mod. Phys., vol. D15, pages 2105–2132, 2006.
- [Sakharov 68] Andrei D. Sakharov.
Vacuum quantum fluctuations in curved space and the theory of gravitation.
Sov. Phys. Dokl., vol. 12, pages 1040–1041, 1968.
- [Sami 05] Mohammad Sami, Alexey Toporensky, Peter V. Tretjakov & Shinji Tsujikawa.
The fate of (phantom) dark energy universe with string curvature corrections.
Phys. Lett., vol. B619, page 193, 2005.

- [Sawicki 07] Ignacy Sawicki & Wayne Hu.
Stability of Cosmological Solution in $f(R)$ Models of Gravity.
Phys. Rev., vol. D75, page 127502, 2007.
- [Seljak 05] Uros Seljak *et al.*
Cosmological parameter analysis including SDSS Ly-alpha forest and galaxy bias : Constraints on the primordial spectrum of fluctuations, neutrino mass, and dark energy.
Phys. Rev., vol. D71, page 103515, 2005.
- [Seljak 06] Uros Seljak, Anze Slosar & Patrick McDonald.
Cosmological parameters from combining the Lyman-alpha forest with CMB, galaxy clustering and SN constraints.
JCAP, vol. 0610, page 014, 2006.
- [Shafieloo 06] Arman Shafieloo, Ujjaini Alam, Varun Sahni & Alexei A. Starobinsky.
Smoothing supernova data to reconstruct the expansion history of the universe.
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., vol. 366, pages 1081–1095, 2006.
- [Singh 03] Parampreet Singh, Mohammad Sami & Naresh Dadhich.
Cosmological dynamics of phantom field.
Phys. Rev., vol. D68, page 023522, 2003.
- [Song 07] Yong-Seon Song, Wayne Hu & Ignacy Sawicki.
The large scale structure of $f(R)$ gravity.
Phys. Rev., vol. D75, page 044004, 2007.
- [Sotiriou 06a] Thomas P. Sotiriou.
The significance of matter coupling in $f(R)$ gravity.
2006.
- [Sotiriou 06b] Thomas P. Sotiriou.
 $f(R)$ gravity and scalar-tensor theory.
Class. Quant. Grav., vol. 23, pages 5117–5128, 2006.
- [Sotiriou 07a] Thomas P. Sotiriou.
Curvature scalar instability in $f(R)$ gravity.
Phys. Lett., vol. B645, pages 389–392, 2007.
- [Sotiriou 07b] Thomas P. Sotiriou & Stefano Liberati.
Metric-affine $f(R)$ theories of gravity.
Annals Phys., vol. 322, pages 935–966, 2007.
- [Soussa 04] Mark E. Soussa & Richard P. Woodard.
The Force of Gravity from a Lagrangian containing Inverse Powers of the Ricci Scalar.
Gen. Rel. Grav., vol. 36, pages 855–862, 2004.
- [Spergel 03] David N. Spergel *et al.*
First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Determination of Cosmological Parameters.
Astrophys. J. Suppl., vol. 148, page 175, 2003.
- [Spergel 07] David N. Spergel *et al.*
Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results : Implications for cosmology.
Astrophys. J. Suppl., vol. 170, page 377, 2007.

-
- [Srivastava 06] Sushil K. Srivastava.
Cosmic evolution with early and late acceleration inspired by dual nature of the Ricci scalar curvature.
2006.
- [Starobinsky 80] Alexei A. Starobinsky.
A new type of isotropic cosmological models without singularity.
Phys. Lett., vol. B91, pages 99–102, 1980.
- [Starobinsky 81] Alexei A. Starobinsky.
Can the Effective Gravitational Constant Become Negative.
Soviet Astronomy Letters, vol. 7, pages 36–+, feb 1981.
- [Starobinsky 82] Alexei A. Starobinsky.
Dynamics of Phase Transition in the New Inflationary Universe Scenario and Generation of Perturbations.
Phys. Lett., vol. B117, pages 175–178, 1982.
- [Starobinsky 98] Alexei A. Starobinsky.
How to determine an effective potential for a variable cosmological term.
JETP Lett., vol. 68, pages 757–763, 1998.
- [Starobinsky 00] Alexei A. Starobinsky.
Future and origin of our universe : Modern view.
Grav. Cosmol., vol. 6, pages 157–163, 2000.
- [Steinhardt 99] Paul J. Steinhardt, Li-Min Wang & Ivaylo Zlatev.
Cosmological tracking solutions.
Phys. Rev., vol. D59, page 123504, 1999.
- [’t Hooft 74] Gerard ’t Hooft & Martinus J. G. Veltman.
One loop divergencies in the theory of gravitation.
Annales Poincare Phys. Theor., vol. A20, pages 69–94, 1974.
- [Tegmark 04] Max Tegmark *et al.*
Cosmological parameters from SDSS and WMAP.
Phys. Rev., vol. D69, page 103501, 2004.
- [Tegmark 06] Max Tegmark *et al.*
Cosmological Constraints from the SDSS Luminous Red Galaxies.
Phys. Rev., vol. D74, page 123507, 2006.
- [Teyssandier 83] Pierre Teyssandier & Philippe Tournenc.
The Cauchy problem for the $R + R^2$ theories of gravity without torsion.
J. Math. Phys., vol. 24, page 2793, 1983.
- [Tonry 03] John L. Tonry *et al.*
Cosmological Results from High- z Supernovae.
Astrophys. J., vol. 594, pages 1–24, 2003.
- [Torres 02] Diego F. Torres.
Quintessence, super-quintessence and observable quantities in Brans-Dicke and non-minimally coupled theories.
Phys. Rev., vol. D66, page 043522, 2002.
- [Tsujikawa 07] Shinji Tsujikawa.
Matter density perturbations and effective gravitational constant in modified gravity models of dark energy.
Phys. Rev., vol. D76, page 023514, 2007.
-

- [Umezu 05] Ken-ichi Umezu, Kiyotomo Ichiki & Masanobu Yahiro.
Cosmological Constraints on Newton's Constant.
Phys. Rev., vol. D72, page 044010, 2005.
- [Upadhye 05] Amol Upadhye, Mustapha Ishak & Paul J. Steinhardt.
Dynamical dark energy : Current constraints and forecasts.
Phys. Rev., vol. D72, page 063501, 2005.
- [Utiyama 62] Ryoyu Utiyama & Bryce S. DeWitt.
Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields.
J. Math. Phys., vol. 3, pages 608–618, 1962.
- [Uzan 99] Jean-Philippe Uzan.
Cosmological scaling solutions of non-minimally coupled scalar fields.
Phys. Rev., vol. D59, page 123510, 1999.
- [Verde 02] Licia Verde *et al.*
The 2dF Galaxy Redshift Survey : The bias of galaxies and the density of the Universe.
Mon. Not. Roy. Astron. Soc., vol. 335, page 432, 2002.
- [Vikman 05] Alexander Vikman.
Can dark energy evolve to the phantom ?
Phys. Rev., vol. D71, page 023515, 2005.
- [Vilenkin 64] Naum Ya. Vilenkin & Yakov A. Smorodinsky.
Invariant expansions of relativistic amplitudes.
Sov. Phys. JETP, vol. 19, page 1209, 1964.
- [Wands 93] David Wands, Edmund J. Copeland & Andrew R. Liddle.
Exponential Potentials, Scaling Solutions, and Inflation. In C. W. Akerlof & M. A. Srednicki, *editeurs*, Texas/PASCOS '92 : Relativistic Astrophysics and Particle Cosmology, volume 688 of *New York Academy Sciences Annals*, pages 647–+, 1993.
- [Wang 98] Li-Min Wang & Paul J. Steinhardt.
Cluster Abundance Constraints on Quintessence Models.
Astrophys. J., vol. 508, pages 483–490, 1998.
- [Wang 04] Yun Wang & Max Tegmark.
New dark energy constraints from supernovae, microwave background and galaxy clustering.
Phys. Rev. Lett., vol. 92, page 241302, 2004.
- [Wang 05] Yun Wang & Max Tegmark.
Uncorrelated Measurements of the Cosmic Expansion History and Dark Energy from Supernovae.
Phys. Rev., vol. D71, page 103513, 2005.
- [Wang 06] Yun Wang & Pia Mukherjee.
Robust Dark Energy Constraints from Supernovae, Galaxy Clustering, and Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations.
Astrophys. J., vol. 650, page 1, 2006.
- [Wang 07] Yun Wang.
Differentiating dark energy and modified gravity with galaxy redshift surveys.
2007.
-

- [Wei 05] Hao Wei, Rong-Gen Cai & Ding-Fang Zeng.
Hessence : A new view of quintom dark energy.
Class. Quant. Grav., vol. 22, pages 3189–3202, 2005.
- [Wetterich 88] Christof Wetterich.
Cosmology and the Fate of Dilatation Symmetry.
Nucl. Phys., vol. B302, page 668, 1988.
- [Wetterich 95] Christof Wetterich.
The Cosmon model for an asymptotically vanishing time dependent cosmological 'constant'.
Astron. Astrophys., vol. 301, pages 321–328, 1995.
- [Weyl 19] Hermann Weyl.
A new extension of relativity theory.
Annalen Phys., vol. 59, pages 101–133, 1919.
- [Williams 05] James G. Williams, Slava G. Turyshev & Dale H. Boggs.
Lunar laser ranging tests of the equivalence principle with the earth and moon.
2005.
- [Wood-Vasey 07] W. Michael Wood-Vasey *et al.*
Observational Constraints on the Nature of the Dark Energy : First Cosmological Results from the ESSENCE Supernova Survey.
Astrophys. J., vol. 666, pages 694–715, 2007.
- [Woodard 07] Richard P. Woodard.
Avoiding dark energy with $1/R$ modifications of gravity.
Lect. Notes Phys., vol. 720, pages 403–433, 2007.
- [Xia 06] Jun-Qing Xia, Gong-Bo Zhao, Bo Feng, Hong Li & Xinmin Zhang.
Observing dark energy dynamics with supernova, microwave background and galaxy clustering.
Phys. Rev., vol. D73, page 063521, 2006.
- [Zakharov 06] A. F. Zakharov, Achille A. Nucita, Francesco De Paolis & Gabriele Ingrosso.
Solar system constraints on R^n gravity.
Phys. Rev., vol. D74, page 107101, 2006.
- [Zel'dovich 68] Yakov B. Zel'dovich.
The Cosmological constant and the theory of elementary particles.
Sov. Phys. Usp., vol. 11, pages 381–393, 1968.
- [Zhang 07] Pengjie Zhang, Michele Liguori, Rachel Bean & Scott Dodelson.
Probing Gravity at Cosmological Scales by Measurements which Test the Relationship between Gravitational Lensing and Matter Overdensity.
Phys. Rev. Lett., vol. 99, page 141302, 2007.
- [Zhao 07] Gong-Bo Zhao, Jun-Qing Xia, Bo Feng & Xinmin Zhang.
Probing dynamics of dark energy with supernova, galaxy clustering and the three-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations.
Int. J. Mod. Phys., vol. D16, pages 1229–1242, 2007.
- [Zlatev 99] Ivaylo Zlatev, Li-Min Wang & Paul J. Steinhardt.
Quintessence, Cosmic Coincidence, and the Cosmological Constant.
Phys. Rev. Lett., vol. 82, pages 896–899, 1999.
-

Transformations conforme

Si l'on définit une variété $(M, g_{\mu\nu})$ de dimension n , on peut alors effectuer une modification de la métrique

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \quad (\text{A.1})$$

$\Omega = \Omega(x)$ est une fonction régulière définie positive (afin de conserver la signature de la métrique).

Cette transformation appelée transformation conforme ou plus exactement une transformation de Weyl laisse invariant les angles. Ainsi le cône de lumière est inchangé, ce qui préserve la structure causale.

Je vais indiquer les différentes formules utiles dans de telles transformations.

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \Omega^{-2} g^{\mu\nu} \quad (\text{A.3})$$

$$\tilde{g} = \Omega^{2n} g \quad (\text{A.4})$$

Les symboles de Christoffel deviennent

$$\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Omega^{-1} (\delta_{\beta}^{\alpha} \nabla_{\gamma} \Omega + \delta_{\gamma}^{\alpha} \nabla_{\beta} \Omega - g_{\beta\gamma} \nabla^{\alpha} \Omega) \quad (\text{A.5})$$

Le tenseur de Riemann

$$\begin{aligned} \widetilde{R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}} &= R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} + 2\delta_{[\alpha}^{\delta} \nabla_{\beta]} \nabla_{\gamma} (\ln \Omega) - 2g^{\delta\sigma} g_{\gamma[\alpha} \nabla_{\beta]} \nabla_{\sigma} (\ln \Omega) + 2\nabla_{[\alpha} (\ln \Omega) \delta_{\beta]}^{\delta} \nabla_{\gamma} (\ln \Omega) \\ &\quad - 2\nabla_{[\alpha} (\ln \Omega) g_{\beta]\gamma} g^{\delta\sigma} \nabla_{\sigma} (\ln \Omega) - 2g_{\gamma[\alpha} \delta_{\beta]}^{\delta} g^{\sigma\rho} \nabla_{\sigma} (\ln \Omega) \nabla_{\rho} (\ln \Omega) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Le tenseur de Ricci

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - (n-2) \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} (\ln \Omega) - g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \nabla_{\rho} \nabla_{\sigma} (\ln \Omega) + (n-2) \nabla_{\alpha} (\ln \Omega) \nabla_{\beta} (\ln \Omega) \\ &\quad - (n-2) g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \nabla_{\rho} (\ln \Omega) \nabla_{\sigma} (\ln \Omega) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

La courbure scalaire

$$\tilde{R} \equiv \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{R}_{\alpha\beta} = \Omega^{-2} \left[R - 2(n-1) \square (\ln \Omega) - (n-1)(n-2) \frac{g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \Omega \nabla_{\beta} \Omega}{\Omega^2} \right] \quad (\text{A.8})$$

Ces transformations sont appelées des transformations de Weyl puisqu'elles laissent ce tenseur invariant

$$\widetilde{C_{\alpha\beta\gamma}}{}^\delta = C_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta \quad (\text{A.9})$$

Systèmes dynamiques¹

Soit l'équation suivante

$$\frac{d}{dt}X = F(X, t) \quad (\text{B.1})$$

Lorsque la dépendance temporelle (t) n'est pas explicitement présente, on parle alors de système autonome. L'équation (B.1) se réduit alors à

$$\frac{d}{dt}X = F(X) \quad (\text{B.2})$$

Pour la suite, on s'intéressera uniquement aux systèmes autonomes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X_1 &= F_1(X_1, \dots, X_n) \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ \frac{d}{dt}X_n &= F_n(X_1, \dots, X_n) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

L'étude consistera en la recherche d'une trajectoire particulière dans l'espace des phases $\{X_1, X_2\}$. Nous verrons que les conditions initiales sont un peu moins importantes que des cas classiques d'équations différentielles. Les trajectoires individuelles importent peu, seul le régime permanent sera important. On suppose donc l'extinction du *transitoire* soit l'existence d'une *dissipation* entre le régime transitoire et le régime permanent, i.e. une perte de mémoire des conditions initiales, ce qui exclue les systèmes conservatifs. Ces derniers obéissent à une équation de contrainte

$$\nabla^i F_i = \sum_{i=1}^n \partial_{X_i} F_i(X_1, \dots, X_n) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Ainsi on travaillera avec des systèmes autonomes non-conservatifs.

Dans un premier temps, il suffit de rechercher les points *stationnaires* $\frac{dX_i}{dt} = 0$, soit la résolution du système suivant

$$\begin{cases} F_1(X_1^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}) = 0 \\ \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ F_n(X_1^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

¹Voir [Manneville 98]

L'étude des trajectoires au voisinage de ces points va nous permettre d'avoir l'évolution du système. Il suffit donc de linéariser les équations autour des points d'équilibre du champ de vecteur.

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
 F_i(X_1, \dots, X_n) &= F_i(X_1^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(X_1^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}) \cdot (X_j - X_j^{(0)}) \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(X_1^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}) \cdot X_j^{(1)} \\
 &= \sum_{j=1}^n M_{ij} \cdot X_j^{(1)}
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Alors le système (B.3) se réécrit

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = M \cdot \mathbf{X} \tag{B.7}$$

avec

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ \vdots \\ X_n^{(1)} \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(X_1^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}) & \dots & \partial_n F_1(X_1^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_n(X_1^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}) & \dots & \partial_n F_n(X_1^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}) \end{pmatrix} \tag{B.8}$$

Afin de simplifier les calculs, je vais exposer le cas $n = 2$. Les résultats sont évidemment facilement généralisables.

Ainsi les équations (B.7) se récrivent

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} X_1^{(1)} &= M_{11} X_1^{(1)} + M_{12} X_2^{(1)} \\
 \frac{d}{dt} X_2^{(1)} &= M_{21} X_1^{(1)} + M_{22} X_2^{(1)}
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

En recherchant des solutions sous la forme $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}} e^{\omega t}$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \omega \tilde{X}_1 &= M_{11} \tilde{X}_1 + M_{12} \tilde{X}_2 \\
 \omega \tilde{X}_2 &= M_{21} \tilde{X}_1 + M_{22} \tilde{X}_2
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Soit

$$\begin{aligned}
 (M_{11} - \omega) \tilde{X}_1 + M_{12} \tilde{X}_2 &= 0 \\
 M_{21} \tilde{X}_1 + (M_{22} - \omega) \tilde{X}_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Nous avons donc des solutions non triviales si et seulement si ω est valeur propre de l'opérateur linéaire M . Ainsi ces valeurs propres seront soit réelles distinctes ou confondues, soit complexes conjuguées.

B.1 Racines réelles distinctes

On se place dans la base propre $\{\hat{X}_1, \hat{X}_2\}$, où les valeurs propres sont $\{\omega_1, \omega_2\}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{X}_1 &= \omega_1\hat{X}_1 \\ \frac{d}{dt}\hat{X}_2 &= \omega_2\hat{X}_2\end{aligned}\tag{B.12}$$

dont les solutions sont $\hat{X}_i(t) = \hat{X}_i(0) e^{\omega_i t}$

Ainsi on peut trouver l'expression des *orbites* en éliminant le temps dans la base propre, soit $(\hat{X}_1/\hat{X}_1(0))^{1/\omega_1} = (\hat{X}_2/\hat{X}_2(0))^{1/\omega_2}$ et donc

$$\hat{X}_2 \propto \hat{X}_1^{\omega_2/\omega_1}\tag{B.13}$$

- Lorsque ω_1 et ω_2 sont de même signe, il s'agit d'un point fixe de type *nœud*. Si elles sont toutes les deux négatives le nœud est stable sinon il est instable. La trajectoire est une parabole s'ouvrant dans la direction de la valeur propre la plus grande en valeur absolue.
- Lorsque ω_1 et ω_2 sont de signes opposés, le point fixe est un *col*. La trajectoire est une hyperbole s'approchant du point fixe dans la direction du vecteur propre associé à la valeur propre négative puis s'écartant le long de l'autre direction.

B.2 Racine réelle double

On a dans ce cas une seule racine nommée ω .

Si on est dans le cas trivial $M_{11} = M_{22}$ et $M_{12} = M_{21} = 0$ alors l'opérateur linéaire M est proportionnel à l'identité. Toutes les directions du plan sont directions propres. Le point fixe est alors stable ou instable selon le signe de ω . Ce point est une étoile.

Dans le cas non trivial, on a un vecteur propre $\bar{X}_1 = (M_{12}, \frac{1}{2}(M_{22} - M_{11}))$ associé à la valeur propre ω . On peut alors compléter la base par un autre vecteur $\bar{X}_2$ non colinéaire. Comme nous ne sommes plus dans les conditions $M_{11} = M_{22}$ et $M_{12} = M_{21} = 0$ on peut choisir $\bar{X}_2 = (0, 1)$.

Il suffit de regarder l'action de M sur cette base.

$$M \cdot \bar{X}_2 = \bar{X}_1 + \omega \bar{X}_2\tag{B.14}$$

Ainsi le système est sous forme *normale de Jordan*.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bar{X}_1 &= \omega\bar{X}_1 + \bar{X}_2 \\ \frac{d}{dt}\bar{X}_2 &= \omega\bar{X}_2\end{aligned}\tag{B.15}$$

dont les solutions sont

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1(t) &= \tilde{X}_1(0)e^{\omega t} + \tilde{X}_2(0)te^{\omega t} \\ \tilde{X}_2(t) &= \tilde{X}_2(0)e^{\omega t}\end{aligned}\tag{B.16}$$

Soit en terme d'orbite

$$\tilde{X}_1 \propto \tilde{X}_2 \left(\ln(\tilde{X}_2) + C^{\text{ste}} \right) \quad (\text{B.17})$$

Il s'agit d'un point fixe dit *nœud impropre*.

B.3 Racines complexes

Soient les valeurs propres $\omega_1 = a + ib$ et $\omega_2 = a - ib$. Dans ce cas l'opérateur est diagonalisable dans l'espace complexe.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{X}_1 &= (a + ib) \tilde{X}_1 \\ \frac{d}{dt} \tilde{X}_2 &= (a - ib) \tilde{X}_2 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Ce qui peut se réécrire dans l'espace réel sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{X}_1 &= a \tilde{X}_1 + b \tilde{X}_2 \\ \frac{d}{dt} \tilde{X}_2 &= -b \tilde{X}_1 + a \tilde{X}_2 \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Soit une solution sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(t) &= e^{at} \left(\tilde{X}_1(0) \cos(bt) + \tilde{X}_2(0) \sin(bt) \right) \\ \tilde{X}_2(t) &= e^{at} \left(\tilde{X}_1(0) \sin(bt) - \tilde{X}_2(0) \cos(bt) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

On a alors un point spirale stable ou pas selon le signe de a , i.e. de la partie réelle de la valeur propre. Dans le cas particulier de $a = 0$ on a un *centre*.

Formulaire en théorie des perturbations

Je présenterai dans cette annexe les différents résultats calculatoires de la théorie des perturbations. Si l'on définit la métrique suivante en temps conforme

$$ds^2 = a^2(\eta) \left\{ -(1 + 2\phi)d\eta^2 + 2(\nabla_i B - S_i) dx^i d\eta + [(1 - 2\psi)\gamma_{ij} + 2\nabla_i \nabla_j E + \nabla_i F_j + \nabla_j F_i + h_{ij}] dx^i dx^j \right\} \quad (C.1)$$

que l'on peut décomposer comme :

une métrique non perturbée

$$\left\| \begin{array}{l} g_{00} = -a^2 \\ g_{0i} = 0 \\ g_{ij} = a^2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} g^{00} = -\frac{1}{a^2} \\ g^{0i} = 0 \\ g^{ij} = \frac{\gamma^{ij}}{a^2} \end{array} \right\|$$

et une métrique perturbée

$$\left\| \begin{array}{l} \delta g_{00} = -2a^2 \phi \\ \delta g_{0i} = 2a^2 (\nabla_i B - S_i) \\ \delta g_{ij} = a^2 (-2\psi \gamma_{ij} + 2\nabla_i \nabla_j E + \nabla_i F_j + \nabla_j F_i + h_{ij}) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} \delta g^{00} = \frac{2}{a^2} \phi \\ \delta g^{0i} = \frac{2}{a^2} (\nabla^i B - S^i) \\ \delta g^{ij} = -\frac{1}{a^2} (-2\psi \gamma^{ij} + 2\nabla^i \nabla^j E + \nabla^i F^j + \nabla^j F^i + h^{ij}) \end{array} \right\|$$

Les composantes non nulles du tenseur d'Einstein sont dans le cas d'un espace à courbure spatiale nulle

$$G_{00} = 3\mathcal{H}^2 \quad (C.2)$$

$$G_{ij} = -(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\gamma_{ij} \quad (C.3)$$

$$\delta G_0^0 = \frac{2}{a^2} [3\mathcal{H}^2\phi + 3\mathcal{H}\psi' - \Delta\psi + \Delta(2\mathcal{H}B - \mathcal{H}E')] \quad (\text{C.4})$$

$$\delta G_i^0 = \frac{1}{a^2} \left[2\nabla_i (\mathcal{H}\phi + \psi') + \frac{\Delta}{2} (F'_i + 2S_i) \right] \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned} \delta G_j^i &= \frac{1}{a^2} [\nabla^i \nabla_j [E'' - 2B' + 2\mathcal{H}(E' - 2B) + \psi - \phi] \\ &+ \delta_j^i [-\Delta(E'' - 2B') - 2\mathcal{H}\Delta(E' - 2B) + 2\psi'' + 4\mathcal{H}\psi' + \Delta(\phi - \psi) + 2\mathcal{H}\phi' + 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi] \\ &+ \gamma^{ik} \nabla_{(k} [F'_{j)} + 2S'_{j)} + 2\mathcal{H}(F'_{j)} + 2S_{j)})] \\ &+ \left[\frac{h_j^{i''}}{2} + \mathcal{H}h_j^{i'} - \frac{1}{2}\Delta h_j^i \right] \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

où $\mathcal{H}$ est la fonction de Hubble en temps conforme.

Les mystères de l'expansion accélérée de l'univers

Plusieurs étapes furent nécessaires à la construction du modèle standard de la cosmologie, de la vision de notre Univers, de la représentation de l'infiniment grand. De l'année 1915 avec l'élaboration de la relativité générale aux différentes observations de l'Univers, celles-ci ont permis d'imaginer un univers en expansion décélérée. Cependant, en 1998, deux équipes américaines mirent en lumière son accélération. Ce fait fût largement confirmé depuis lors. Ce pose alors une question simple, quelle en est la raison ? Pour cela de très nombreux modèles d'énergie noire furent élaborés. J'aborde ainsi dans cette thèse deux grands modèles. D'une part les théories scalaire-tenseur où l'on a pu construire différentes contraintes sur la viabilité du modèle ; et d'autres part les théories dites $f(R)$, où une modification de l'action par des termes géométriques entraîne une accélération de l'univers. La construction dans ces modèles de la fonction $m(r)$ nous a permis par une méthode simple et élégante de rendre compte de l'évolution cosmologique de l'univers décrit par de tels lagrangiens. Ainsi de nombreux modèles jusqu'alors étudié furent rejeté, car ils ne possèdent pas de phase de matière. Enfin nous avons étudié la croissance des perturbations. En effet les perturbations à l'origine des grandes structures vont croître différemment selon les modèles, selon l'Univers considéré. Nous avons ainsi mis en évidence une importante distinction entre les modèles d'énergie noire en relativité générale et les théories scalaire-tenseur. Des observations plus précises permettront alors de distinguer les théories de gravitation modifiée et les modèles d'énergie noire en relativité générale.

Mots-clefs : cosmologie, énergie noire, gravitation, gravitation modifiée, théorie scalaire-tenseur, théories $f(R)$, croissance linéaire des perturbations.

The mysteries of the accelerated expansion of the universe

Several steps were necessary for the construction of the standard model of cosmology, the vision of our universe, the representation of the infinity. Since 1915, with Einstein's formulation of general relativity, several observations of the Universe have led to imagine an expanding decelerated universe. However, in 1998, two U.S. research teams pointed out an acceleration. This fact was largely confirmed since then. This raises a simple question : what is the reason for this recent acceleration of the universe ? Many models of dark energy were developed in order to answer this question. I address in this thesis two major models. The first model is scalar-tensor theories where a scalar field is coupled to the graviton. Several constraints were built on the local viability of this model. Similarly, we have studied the $f(R)$ theories. The construction of the function $m(r)$ in these models gives us a simple and elegant method to describe the cosmological evolution of the universe implied by such lagrangians. Many models previously studied were rejected because they do not have a matter phase. Finally we study the growth of matter perturbations. Indeed the perturbations at the origin of large scale structures will grow differently according to the model and the universe considered. We have thus shown a very important distinction between models of dark energy in general relativity and scalar-tensor theories. More precise observations will enable to distinguish models of dark energy in general relativity and modified gravity.

Key-words : cosmology, dark energy, gravitation, modified gravity, scalar-tensor theory, $f(R)$ theories, growth of linear perturbations.

Discipline : Cosmologie

Laboratoire de Physique Théorique et Astroparticules
UMR 5207 CNRS-UM2, Université Montpellier II
Case Courrier 070, Bât. 13, place Eugène Bataillon
34095 Montpellier Cedex 5 FRANCE