



HAL
open science

Quelques méthodes d'étude locale d'ensembles de Julia et applications

Nourredine Akroune

► **To cite this version:**

Nourredine Akroune. Quelques méthodes d'étude locale d'ensembles de Julia et applications. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1987. Français. NNT: . tel-00324081

HAL Id: tel-00324081

<https://theses.hal.science/tel-00324081>

Submitted on 24 Sep 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

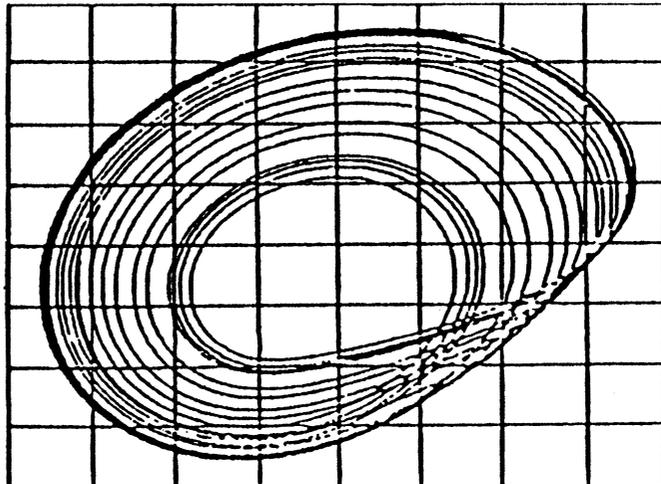
l'Université Scientifique Technologique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE 3^e CYCLE
«Informatique et Mathématiques Appliquées»**

par

Nourredine AKROUNE



**QUELQUES METHODES D'ETUDE LOCALE
D'ENSEMBLES DE JULIA ET APPLICATIONS.**

Thèse soutenue le 12 juin 1987 devant la commission d'examen.

F. ROBERT

Président

M. COSNARD

J. DEMONGEOT

B. LACOLLE

J. VANNIMENUS

Examineurs



UNIVERSITE SCIENTIFIQUE TECHNOLOGIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Président de l'Université :
M. TANCHE

Année Universitaire 1986 - 1987

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE SCIENCES ET DE GEOGRAPHIE

PROFESSEURS DE 1ère Classe

ARNAUD Paul	Chimie Organique
ARVIEU ROBERT	Physique Nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S
AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
AYANT Yves	Physique Approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique Expérimentale CNRS
BARJON Robert	Physique Nucléaire ISN
BARNOUD Fernand	Bochimie Macromoléculaire Végétale
BARRA Jean-René	Statistiques-Mathématiques Appliquées
BELORISKY Elie	Physique C.E.N.G- D.R.F.
BENZAKEN Claude	Mathématiques Pures
BERNARD Alain	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Pures
BILLET Jean	Géographie
BOELHER Jean-Paul	Mécanique
BONNIER Jane Marie	Chimie Générale
BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire ISN
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie Végétale
CAUQUIS Georges	Chimie Organique
CHIBON Pierre	Biologie Animale
COHEN ADDAD Jean-Pierre	Physique
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques Pures
CYROT Michel	Physique du Solide
DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude	Mathématiques Appliquées
DEPORTES Charles	Chimie Minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
DOUCE Rolland	Physiologie Végétale
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques Pures
GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique,
GIRAUD Pierre	Géologie
HICTER Pierre	Chimie
IDELMAN Simon	Physiologie Animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
KAHANE André, détaché	Physique
KAHANE Josette	Physique
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques Appliquées
KUPKA Yvon	Mathématiques Pures
LAJZEROWICZ Jeanine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
DE LEIRIS Joel	Biologie

LLIBOUTRY Louis
 LOISEAUX Jean-Marie
 MACHE Régis
 MAYNARD Roger
 MICHEL Robert
 OMONT Alain
 OZENDA Paul
 PAYAN Jean-Jacques
 PEBAY-PEYROULA Jean-Claude
 PERRIAUX Jacques
 PERRIER Guy
 PIERRARD Jean-Marie
 PIERRE Jean-Louis
 RASSAT André
 RENARD Michel
 RINAUDO Marguerite
 ROSSI André
 SAKAROVITCH Michel
 SAXOD Raimard
 SENGEL Philippe
 SERGERAERT Francis
 SOUCHIER Bernard
 SOUTIF Michel
 STUTZ Pierre
 VALENTIN Jacques
 VAN CUTSEM Bernard
 VIALON Pierre

Géophysique
 Sciences Nucléaires I.S.N.
 Physiologie Végétale
 Physique du Solide
 Minéralogie et Pétrographie (Géologie)
 Astrophysique
 Botanique (Biologie Végétale)
 Mathématiques Pures
 Physique
 Géologie
 Géophysique
 Mécanique
 Chimie Organique
 Chimie Systématique
 Thermodynamique
 Chimie CERMAV
 Biologie
 Mathématiques Appliquées
 Biologie Animale
 Biologie Animale
 Mathématiques Pures
 Biologie
 Physique
 Mécanique
 Physique Nucléaire I.S.N.
 Mathématiques Appliquées
 Géologie

PROFESSEURS de 2^{ème} Classe

ADIBA Michel
 ANTOINE Pierre
 ARMAND Gilbert
 BARET Paul
 BECKER Pierre
 BEGUIN Claude
 BLANCHI J.Pierre
 BOITET Christian
 BORNAREL Jean
 BRUANDET J.François
 BRUN Gilbert
 CASTAING Bernard
 CERFF Rudiger
 CHARDON Michel
 CHIARAMELLA Yves
 COURT Jean
 DEMAILLY Jean-Pierre
 DENEUVILLE Alain
 DEPASSEL Roger
 DERRIEN Jacques
 DUFREYNOY Alain
 GASPARD François
 GAUTRON René
 GENIES Eugène
 GIDON Maurice
 GIGNOUX Claude
 GILLARD Roland
 GIORNI Alain
 GUIGO Maryse
 GUMUCHAIN Hervé
 GUITTON Jacques
 HACQUES Gérard

Mathématiques Pures
 Géologie
 Géographie
 Chimie
 Physique
 Chimie Organique
 STAPS
 Mathématiques Appliquées
 Physique
 Physique
 Biologie
 Physique
 Biologie
 Géographie
 Mathématiques Appliquées
 Chimie
 Mathématiques Pures
 Physique
 Mécanique des Fluides
 Physique
 Mathématiques Pures
 Physique
 Chimie
 Chimie
 Géologie
 Sciences Nucléaires
 Mathématiques Pures
 Sciences Nucléaires
 Géographie
 Géographie
 Chimie
 Mathématiques Appliquées

HERBIN Jacky
HERAULT Jeanny
JARDON Pierre
JOSELEAU Jean-Paul
KERCKHOVE Claude
LEBRETON Alain
LONGEQUEUE Nicole
LUCAS Robert
LUNA Domingo
MANDARON Paul
MARTINEZ Francis
MASCLE Georges
NEMOZ Alain
OUDET Bruno
PELMONT Jean
PERRIN Claude
PFISTER Jean-Claude
PIBOULE Michel
RAYNAUD Hervé
RIEDIMANN Christine
ROBERT Gilles
ROBERT Jean-Bernard
SARROT-REYNAULD Jean
SAYETAT Françoise
SERVE Denis
STOECKEL Frédéric
SOUTIF Jeanne
SCHOLL Pierre-Claude
SUBRA Robert
VALLADE Marcel
VIDAL Michel
VIVIAN Robert
VOTTERO Philippe

Géographie
Physique
Chimie
Biochimie
Géologie
Mathématiques Appliquées
Sciences Nucléaires I.S.N.
Physique
Mathématiques Pures
Biologie
Mathématiques Appliquées
Géologie
Thermodynamique CNRS - CRTBT
Mathématiques Appliquées
Biochimie
Sciences Nucléaires I.S.N.
Physique du Solide
Géologie
Mathématiques Appliquées
Mathématiques Pures
Mathématiques Pures
Chimie Physique
Géologie
Physique
Chimie
Physique
Physique
Mathématiques Appliquées
Chimie
Physique
Chimie Organique
Géographie
Chimie

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L' IUT 1

PROFESSEURS de 1^{ère} Classe

BUISSON Roger
DODU Jacques
NEGRE Robert

Physique IUT 1
Mécanique Appliquée IUT 1
Génie Civil IUT 1

PROFESSEURS de 2^{ème} classe

BOUTHINON Michel
CHAMBON René
CHEHIKIAN Alain
CHENAVAS Jean
CHOUTEAU Gérard
CONTE René
GOSSE Jean-Pierre
GROS Yves
KUHNS Gérard, (Détaché)
MAZUER Jean
MICHOULIER Jean
MONLLOR Christian
NOUGARET Marcel
PEFFEN René
PERARD Jacques
PERRAUD Robert
TERRIEZ Jean-Michel
TOUZAIN Philippe
VINCENDON Marc

EEA. IUT 1
Génie Mécanique IUT 1
EEA. IUT 1
Physique IUT 1
Physique IUT 1
Physique IUT 1
EEA. IUT 1
Physique IUT 1
Physique IUT 1
Physique IUT 1
EEA. IUT 1
Automatique IUT 1
Métallurgie IUT 1
EEA. IUT 1
Chimie IUT 1
Génie Mécanique IUT 1
Chimie IUT 1
Chimie IUT 1

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE MEDECINE

PROFESSEURS CLASSE EXEPTIONNELLE ET 1ère CLASSE

AMBLARD Pierre	Dermatologie	C.H.R.G.
AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie	C.H.R.G.
BEAUDOING André	Pédiatrie-Puericulture	C.H.R.G.
BEZES Henri	Orthopédie-Traumatologie	Hopital SUD
BONNET Jean-Louis	Ophthalmologie	C.H.R.G.
BOUCHET Yves	Anatomie	Faculté La Merci
	Chirurgie Générale et Digestive	C.H.R.G.
BUTEL Jean	Orthopédie-Traumatologie	C.H.R.G.
CHAMPETIER Jean	Anatomie-Topographique et Appliquée	C.H.R.G.
	O.R.L.	C.H.R.G.
CHARACHON Robert	Anatomie-Pathologique	C.H.R.G.
COUDERC Pierre	Pneumophtisiologique	C.H.R.G.
DELORMAS Pierre	Cardiologie	C.H.R.G.
DENIS Bernard	Pharmacologie	Faculté La Merci
GAVEND Michel	Hématologie	C.H.R.G.
HOLLARD Daniel	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
LATREILLE René	Bactériologie-Virologie	C.H.R.G.
	Gynécologie et Qbstétrique	C.H.R.G.
LE NOC Pierre	Médecine du Travail	C.H.R.G.
MALINAS Yves	Clinique Médicale et Maladies Infectieuses	C.H.R.G.
MALLION Jean-Michel	Histologie	Faculté La Merci
MICOUD Max	Pneumologie	C.H.R.G.
	Neurologie	C.H.R.G.
MOURIQUAND Claude	Hépto-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
PARAMELLE Bernard	Neurochirurgie	C.H.R.G.
PERRET Jean	Clinique Chirurgicale	C.H.R.G.
RACHAIL Michel	Anestésiologie	C.H.R.G.
DE ROUGEMONT Jacques	Physiologie	Faculté La Merci
SARRAZIN Roger	Biophysique	Faculté La Merci
STIEGLITZ Paul	Biochimie	Faculté La Merci
TANCHE Maurice		
VERAIN André		
VIGNAIS Pierre		

PROFESSEURS 2ème CLASSE

BACHELOT Yvan	Endocrinologie	C.H.R.G.
BARGE Michel	Neurochirurgie	C.H.R.G.
BENABID Alim Louis	Biophysique	Faculté La Merci
BENSA Jean-Claude	Immunologie	Hopital Sud
BERNARD Pierre	Gynécologie-Obstétrique	C.H.R.G.
BESSARD Germain	Pharmacologie	ABIDJAN
BOLLA Michel	Radiothérapie	C.H.R.G.
BOST Michel	Pédiatrie	C.H.R.G.
BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie Adultes	Hopital Sud
BRAMBILLA Christian	Pneumologie	C.H.R.G.
CHAMBAZ Edmond	Biochimie	C.H.R.G.
CHIROUSSEL Jean-Paul	Anatomie-Neurochirurgie	C.H.R.G.
COLOMB Maurice	Immunologie	Hopital Sud
COMET Michel	Biophysique	Faculté La Merci
CONTAMIN Charles	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
	Néphrologie	C.H.R.G.
CORDONNIER Daniel	Radiologie	C.H.R.G.
COULOMB Max	Radiologie	C.H.R.G.
CROUZET Guy	Médecine Interne et Toxicologie	C.H.R.G.
DEBRU Jean-Luc	Biostatistiques et Informatique Médicale	Faculté La Merci
DEMONGEOT Jacques		

DUPRE Alain	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
DYON Jean-François	Chirurgie Infantile	C.H.R.G.
ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie	Faculté La Merci
FAURE Claude	Anatomie et Organogénèse	C.H.R.G.
FAURE Gilbert	Urologie	C.H.R.G.
FOURNET Jacques	Hépatogastro-Entérologie	C.H.R.G.
FRANCO Alain	Médecine Interne	C.H.R.G.
GIRARDET Pierre	Anesthésiologie	C.H.R.G.
GUIDICELLI Henri	Chirurgie Générale et Vasculaire	C.H.R.G.
GUIGNIER Michel	Thérapeutique et Réanimation Médicale	C.H.R.G.
HADJIAN Arthur	Biochimie	Faculté La Merci
HALIMI Serge	Endocrinologie et Maladies Métaboliques	C.H.R.G.
HOSTEIN Jean	Hépatogastro-Entérologie	C.H.R.G.
HUGONOT Robert	Médecine Interne	C.H.R.G.
JALBERT Pierre	Histologie-Cytogénétique	C.H.R.G.
JUNIEN-LAVILLAULOY Claude	O.R.L.	C.H.R.G.
KOLODIE Lucien	Hématologie Biologique	C.H.R.G.
LETOUBLON Christian	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
MACHECOURT Jacques	Cardiologie et Maladies Vasculaires	C.H.R.G.
MAGNIN Robert	Hygiène	C.H.R.G.
MASSOT Christian	Médecine Interne	C.H.R.G.
MOUILLON Michel	Ophthalmologie	C.H.R.G.
PELLAT Jacques	Neurologie	C.H.R.G.
PHELIP Xavier	Rhumatologie	C.H.R.G.
RACINET Claude	Gynécologie	C.H.R.G.
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie	C.H.R.G.
RAPHAEL Bernard	Stomatologie	C.H.R.G.
SCHAERER René	Cancérologie	C.H.R.G.
SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-Virologie	Faculté La Merci
SELE Bernard	Cytogénétique	Faculté La Merci
SOTTO Jean-Jacques	Hématologie	C.H.R.G.
STOEBNER Pierre	Anatomie Pathologique	C.H.R.G.
VROUSOS Constantin	Radiothérapie	C.H.R.G.

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT PHARMACIE

AGNIUS-DELDORD Claudine	Physique	Faculté La Tronche
ALARY Josette	Chimie Analytique	Faculté La Tronche
BERIEL Hélène	Physiologie et Pharmacologie	Faculté La Tronche
BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie	Faculté Meylan
CUSSAC Max	Chimie Thérapeutique	Faculté La Tronche
DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie	Faculté La Tronche
JEANNIN Charles	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan
LATURAZE Jean	Biochimie	Faculté La Tronche
LUU DUC Cuong	Chimie Générale	Faculté La Tronche
MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognosie	Faculté La Tronche
MARZIN Daniel	Toxicologie	Faculté Meylan
RENAUDET Jacqueline	Bactériologie	Faculté La Tronche
ROCHAT Jacques	Hygiène et Hydrologie	Faculté La Tronche
SEIGLE-MURANDI Françoise	Botanique et Cryptogamie	Faculté Meylan
VERAIN Alice	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan



Je remercie Monsieur F.ROBERT, Professeur à l'INPG d'avoir accepté de présider ce jury.

Pour m'avoir proposé ce sujet, j'exprime ma profonde gratitude à Monsieur B.LACOLLE, Maître de conférences à l'USTMG. Sous sa direction, j'ai pu hautement apprécier sa disponibilité ainsi que ses qualités scientifiques et humaines.

Je suis très sensible à l'honneur que me font Messieurs M.COSNARD, Chargé de recherches au CNRS, et J.DEMONGEOT, Professeur à l'USTMG, en participant à ce jury.

Pour l'intérêt qu'il porte à ce travail, que Monsieur J. VANNIMENUS, Maître de recherches au CNRS, trouve ici toute ma reconnaissance.

Mademoiselle C.DICRESCENZO et Monsieur A.EBERHARD m'ont prodigué de nombreux et précieux conseils concernant la programmation : je leur adresse mes vifs remerciements.

Je remercie aussi Monsieur G.KUNTZ pour l'aide constante qu'il m'a apportée dans l'élaboration des parties graphiques de mon travail.

Je ne terminerai pas sans dire merci

- . à tous mes Amis qui, de près ou de loin, m'ont encouragé tout le long de ce travail

- . au Service de Reprographie pour le tirage de cette thèse.



TABLE DES MATIERES

. INTRODUCTION

PARTIE A: Mesure locale et méthodes numériques

. Introduction

Chapitre I : Itérations de fractions rationnelles et ensemble de Julia.

Mesure locale:méthodes d'ajustement et méthodes basées sur la convergence vague

I-0. Itérations de fractions rationnelles et ensemble de Julia

. Introduction

I-0-1:Définitions et rappels

I-0-2:Ensemble de Julia $J(R)$ d'une fraction rationnelle R

I-0-3:Principales propriétés de $J(R)$ - exemples et dessins

I-0-4:Obtention des points de $J(R)$

I-1. Mesure locale

. Introduction

I-1-0:Notions de la théorie du potentiel

I-1-1:Correspondances des distributions d'équilibre

- Application à l'intervalle $[-1,+1]$

I-1-2:Convergence faible - Convergence vague

I-1-3:Ensemble de Julia et distributions de masse unité

I-1-4:Densité locale autour d'un point x d'un compact

- Définition de la mesure locale $M(x,r)$

- Position du problème de la détermination de $M(x,r)$

I-1-5:Etude d'un exemple

- rappel

- Distribution d'équilibre (D.E) sur $[-2,+2]$

- Expression explicite de la mesure locale $M(x,r)=r^\alpha \psi(r)$ associée à la (D.E) μ sur $[-2,+2]$

- Exemple de valeurs théoriques des coefficients de $M(x,r)$

I-2. Détermination numérique de $M(x,r)$:Méthodes d'ajustement

. Introduction

I-2-1:Présentation des méthodes numériques

- Méthode 1

- Méthode 2

I-2-2:Application numérique - exemple de $J(z^2-2)$

I-2-3:Commentaires et comparaison des deux méthodes

I-2-4:Conclusion

I-3. Détermination numérique de $M(x,r)$:Méthodes basées sur la convergence vague

. Introduction

- I-3-1:Description de la méthode
 - Variante de cette méthode
- I-3-2:Résultats numériques et comparaison des deux méthodes
 - Performances et commentaires
- I-3-3:Conclusion sur les méthodes du (I-2) et (I-3)

Chapitre II : Mesure locale et procédé d'extrapolation.

. Introduction

II-1. Relation entre l'exposant α et le rayon h

. Introduction

II-2. Expression de $\hat{\alpha}(h)$ en fonction de $\hat{\alpha}$

II-3. Algorithme d'approche par extrapolation

II-4. Application du procédé d'extrapolation à quelques ensembles de Julia J

- Exemple 1 : $J(z^2-2)$

- Exemple 2 : $J(z^2)$

II-5. Etude d'un exemple tiré de la Physique Statistique

II-5-1:Présentation de la famille de fractions $(R_q) \quad q \in \mathbb{N}^*$

II-5-2:Etude du cas $q=2$

- Approche de l'exposant α par extrapolation

- Traitement des oscillations

II-5-3:Etude du cas $q=3/2$

II-6. Conclusion (Partie A)

PARTIE B: Outils algorithmiques pour l'étude locale d'un ensemble de points.

. Introduction

Chapitre I :Problème du "Range-Searching"-Algorithme du Pavage Régulier

1. Problème du "Range-Searching": contexte et définitions

1-1:Généralités

1-2:exemple

1-3:Position du problème du "Range-Searching" (R.S)

2. Trois algorithmes de résolution du R.S

2-1:Méthode 1 - Balayage séquentiel

2-2:Méthode 2 - Méthode de la projection

2-3:Méthode 3 - Méthode basée sur la structure "Range-tree"

3. Résolution du problème du R.S : Méthode des cellules

3-1:Principe de la méthode

3-2:Historique de la méthode

3-3:Description et analyse de l'Algorithme du Pavage Régulier

1- Rappel du problème du "Range-Searching" en dimension 2

- Notations

2- Algorithme du Pavage Régulier (A.P.R)

3- Complexité de l'algorithme

4- Expérimentations numériques sur le temps de réponse

a) Introduction et choix des exemples

b) Description des expériences

- c) Coordonnées des régions \mathcal{R} sélectionnées
- d) Résultats numériques et graphiques
- e) Analyse et commentaires

Chapitre II : Applications de l'Algorithme du Pavage Régulier

. Introduction

a) "Variable Disk Retrieval Problem" (V.D.R)

a-1: Formulation (\mathcal{P}_1) du V.D.R

a-2: Algorithme du Pavage Régulier - Rappels et transformation de (\mathcal{P}_1) en une formulation (\mathcal{P}_2)

a-3: Une méthode de résolution de (\mathcal{P}_2) : Technique de codage

a-4: Complexité de l'algorithme

a-5: Présentation des 4 sous-algorithmes de la technique de codage

b) Application de l'Algorithme du Pavage Régulier (A.P.R) au calcul de quelques dimensions fractales de compacts du plan

b-0: Introduction

b-1: Théorie des Systèmes Dynamiques:rappels

(i) Définition d'un système dynamique - notion d'attracteur

(ii) Systèmes dynamiques holomorphes

b-2: Contexte et définitions

- Dimension de Capacité (d_c) et dimension d'Information (d_i)

b-3: Adaptation de l'A.P.R au calcul de (d_c) et de (d_i)

- Présentation de l'algorithme de calcul

b-4: Estimation des dimensions d_c et d_i de quelques compacts du plan

- Résultats numériques et graphiques

PARTIE C: *ELSEP* - un logiciel d'Etude Locale d'un Sous-Ensemble du Plan

I- Introduction

II- Présentation et description d'*ELSEP*

- Principales étapes de l'algorithme général

III- Description des expérimentations numériques

IV- Premier exemple d'application d'*ELSEP*

V- Deuxième exemple

VI- Troisième exemple

VII- Conclusion (Partie C).

CONCLUSION & BIBLIOGRAPHIE

ANNEXE : Quelques aspects de la Physique Statistique.



INTRODUCTION



L'étude des systèmes dynamiques holomorphes engendrés par des itérations de polynômes et de fractions rationnelles a vu le jour au début du siècle (1918/1920) grâce aux importants travaux de G. Julia ([22]) et P. Fatou ([17]).

L'adhérence de l'ensemble de tous les points fixes (et cycles) répulsifs d'une fraction rationnelle complexe R a été au centre de leurs investigations. Cet ensemble, appelé ensemble de Julia de R et noté $J(R)$ (ou J), est complètement invariant par R i.e. $R(J) = R^{-1}(J) = J$, et de plus, il sépare les domaines d'attractions des points fixes (et des cycles) attractifs de l'application R .

L'étude du comportement itératif d'une fraction rationnelle complexe R fait partie intégrante de la théorie des Systèmes Dynamiques ([20],[6]).

Soit S un système (physique, biologique, chimique...etc) dont on a modélisé la variation dans le temps par une loi d'évolution f (application de $X \rightarrow X$ où $X \subseteq \mathbb{R}^p$). Pour un point de départ x_0 pris dans X , l'objet de cette théorie consiste en l'étude du comportement de ce système ainsi que des phénomènes qui se produisent au bout d'un temps assez long (analyse asymptotique); ceci revient à considérer la suite des itérés successifs : $x_{n+1} = f(x_n) = f^n(x_0)$ ($n \in \mathbb{N}$) (cf. Collet et Eckmann [8]).

Des systèmes dynamiques non holomorphes donnant lieu à des ensembles invariants compacts ayant la seconde propriété (ci-dessus mentionnée) de l'ensemble de Julia sont traités en détails dans l'article de Mc Donald et al ([28]). D'autres invariants compacts, les attracteurs étranges, sont liés à une classe particulière de systèmes dynamiques, appelés Systèmes Dynamiques Chaotiques. Ceux-ci sont caractérisés par une grande sensibilité aux conditions initiales ([20]); leur étude a connu (et connaît encore) de grands développements ces dernières années (voir [15] et références incluses).

La plupart des ensembles invariants précédemment cités présentent à la fois une structure de self-similarité et un aspect irrégulier et ininterrompu. Ces particularités ont été déjà soulevées par Hausdorff (1919) (cf. [16]) dans son travail sur les ensembles de mesure (de Lebesgue) nulle. L'étude de ce type d'ensembles a été relancée, il y a une dizaine d'années, par le mathématicien français B. Mandelbrot ([29]). Il leur donna l'appellation de fractals et a introduit, pour quantifier leur degré d'irrégularité, la notion de dimension fractale. Notons au passage que celle-ci est une caractéristique géométrique globale de l'ensemble considéré. Pour estimer cette dimension, non entière en général, plusieurs algorithmes existent dans la littérature ([16],[18],[19],[15]).

Les principaux axes de cette thèse, que l'on rassemble sous la dénomination d'étude locale, sont :

- L'étude de la distribution locale des points (mesure de densité) sur un ensemble invariant compact \mathcal{X} (ensemble de Julia, attracteur étrange...etc). Derrida et al ([12],[11]) ont montré l'existence d'une liaison entre la théorie de la renormalisation en Physique Statistique (étude des modèles hiérarchiques de réseaux de verres de spins) et la théorie des systèmes dynamiques holomorphes (Blanchard [6]). Nous exploitons cette liaison comme une application de notre étude.

• Numériquement, on approche le compact \mathcal{E} ($\mathcal{E} \subset (\mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{C})$) que nous considérons par un ensemble fini E formé d'un grand nombre de points. La compréhension (par effet de zoom) de la structure locale de E nécessite l'utilisation de méthodes d'accès rapide à ses différentes régions; pour cela on fait appel aux techniques de la géométrie algorithmique (Preparata et Shamos [36]). Celles-ci nous permettent en même temps de donner une estimation de la dimension fractale du compact initial \mathcal{E} .

En ce qui concerne l'organisation de ce travail, celui-ci est réparti suivant trois parties A, B et C. Le thème de la partie A est l'étude mathématique et le calcul numérique de la densité locale. La partie B est consacrée à l'étude algorithmique du problème de l'accès rapide. Quant à la partie C, elle consiste en la combinaison des différentes méthodes des parties A et B sous la forme d'un logiciel destiné à l'Etude Locale d'un Sous-Ensemble du Plan (en abrégé, ELSEP).

Dans le cadre du chapitre 1 de la partie A (que nous noterons A-I), après un rappel des principales propriétés de l'ensemble de Julia J d'une fraction rationnelle complexe ([6]), on s'appuie sur des notions de la théorie du potentiel (cf. Tsuji [38]) pour définir une mesure locale $M(x,r)$ (où r désigne un rayon) autour de chaque point x de J borné. Dans le cas de l'ensemble de Julia d'un polynôme, la mesure $M(x,r)$ est associée à la distribution d'équilibre du potentiel logarithmique de J ([9]). Plus précisément, il s'agit de trouver un exposant positif α et une fonction analytique Ψ tels que $(r^\alpha \Psi(r))$ approche au mieux la mesure locale $M(x,r)$ autour d'un point x du compact considéré. Dans ce but, on décrit deux méthodes numériques de détermination de α et des premiers coefficients de l'application Ψ . L'ajustement aux moindres carrés est utilisé dans la première méthode tandis que la seconde se sert de la convergence vague d'une suite de mesures bornées. Des tests menés sur des exemples caractéristiques de polynômes nous permettent d'évaluer les performances de chacun des deux algorithmes.

A travers le chapitre (A-II), on propose un algorithme, appelé procédé d'extrapolation, qui nous fournit la possibilité d'affiner les résultats de la seconde méthode du (A-I). Parmi les nombreuses expérimentations effectuées à l'aide de ce procédé, une application importante sur des exemples ayant trait à l'étude de certains modèles discrets (modèles hiérarchiques de réseaux de verres de spins) de la Physique Statistique ([33],[24],[2],[10]) est présentée; elle a donné lieu à des résultats cohérents avec la théorie existante dans ce domaine précis de la physique (cf. [11],[34]).

Lorsque l'ensemble E (qui approche ici un ensemble de Julia, un attracteur étrange...) comporte un très grand nombre de points (de l'ordre de 10^5), il est nécessaire, afin de mener efficacement une étude locale sur E , de faire appel à des méthodes d'accès rapide aux différentes régions de cet ensemble. Ces méthodes s'appliquent aux problèmes issus de la géométrie algorithmique ([27],[36]) et y sont

regroupées sous la catégorie nommée "Range-searching problem". Parmi les domaines d'application de ce problème, citons notamment le traitement de bases de données géographiques, l'économie (gestion du personnel), la statistique (probabilité empirique d'un hyper-rectangle) ...etc (voir aussi Yuval [41] et [42]). La résolution de cet important problème dans le cas bidimensionnel est le thème du chapitre (B-I).

Après un survol des principaux algorithmes existants dans ce domaine ([3]) et tenant compte de leur difficile exploitation (la place mémoire requise est souvent considérable), nous décrivons en détail un algorithme de résolution, appelé algorithme du pavage régulier (noté A.P.R), réellement implémentable en rapport avec le nombre élevé de points de E et ayant une efficacité suffisante. Maintes expérimentations numériques nous ont permis de tester et de vérifier ses performances (stockage, préconditionnement, temps de réponse) (cf. [27]).

L'aptitude du précédent algorithme, quant à résoudre des problèmes différents rentrant directement dans notre étude, est illustrée dans le chapitre (B-II).

Outre le moyen qu'il nous offre d'effectuer des zooms numériques sur une région arbitraire d'un sous-ensemble quelconque du plan, l'A.P.R nous permet de faire une jonction avec le problème du calcul de la densité locale, sujet de la partie A. En effet, un arrangement de cet algorithme (via une technique de codage) résout le problème du "Variable disk retrieval" ([27]); on montre que la solution de ce dernier conduit, sans changements notables des performances de l'A.P.R, à un traitement rapide du problème de la densité.

Toujours dans ce chapitre (B-II), l'utilisation de l'algorithme du pavage régulier quant au calcul de la dimension d'un ensemble fractal est décrite à travers un algorithme de "box-counting" ie basé sur le comptage des boîtes non vides d'une grille contenant cet ensemble (cf. [16]). Appliqué à certains exemples du type déjà signalé, notre méthode donne des estimations concordantes avec celles fournies par d'autres algorithmes ([26],[18],[37]).

Dans la partie C, l'exploitation de toutes les méthodes élaborées au long des quatre chapitres nous a amené à mettre sur pied un logiciel, nommé **ELSEP**, destiné à l'Étude Locale d'un Sous-Ensemble du Plan. Ce logiciel, écrit en langage PASCAL sur le D.P.S 8 (système Multics) du C.I.C.G est désormais disponible.

Dans cette même partie, on présente des résultats numériques et graphiques issus de l'utilisation de notre logiciel (**ELSEP**) sur des ensembles invariants compacts de systèmes dynamiques (ensembles de Julia en particulier).



PARTIE A

MESURE LOCALE ET METHODES NUMERIQUES

CHAPITRE I : ITERATIONS DE FRACTIONS RATIONNELLES
ET ENSEMBLE DE JULIA .
MESURE LOCALE : METHODES D'AJUSTEMENT
ET METHODES BASEES SUR LA CONVERGENCE
VAGUE

CHAPITRE II : MESURE LOCALE ET PROCEDE
D'EXTRAPOLATION



INTRODUCTION DE LA PARTIE A

A travers les deux chapitres de cette partie, on s'intéresse à l'étude locale de certains ensembles invariants et compacts E du plan. Ces compacts sont, soit des attracteurs étranges de systèmes dynamiques ([20]), soit, si ces systèmes sont holomorphes, des ensembles de Julia de fractions rationnelles complexes (cf. [6]). Notons que ces ensembles ont généralement une structure fractale ([29]).

Etant donné un ensemble E du type ci-dessus, notre intérêt porte sur la distribution des points sur E . Dans la plupart des cas, on observe en effet une différence dans la fréquence de visite du système dynamique entre les régions de l'ensemble.

Pour étudier localement cette distribution, on suppose d'abord que les points de E se répartissent selon une mesure μ , mesure qui n'existe d'ailleurs pas toujours ([15]). On définit ensuite, autour de chaque point x de E , une mesure locale (notée $M(x,r)$ où r désigne un rayon), liée à μ , qu'on s'efforcera de déterminer numériquement et cela en l'approchant par la forme $(r^\alpha \Psi(r))$ où α est un réel positif et Ψ une fonction analytique ne s'annulant pas à l'origine.

Parmi les différentes définitions de la dimension fractale de l'ensemble E (cf. [16]), celle appelée la dimension ponctuelle $d_p(x)_{x \in E}$ autour de x est définie par:

$$\lim_{(r \rightarrow 0)} \ln(\mu[B(x,r)]) / \ln(r) \text{ où } B(x,r) \text{ est la boule centrée en } x \text{ et de rayon } r.$$

Il semble donc que $d_p(x)$ n'est autre que l'exposant α de $M(x,r)$ où $M(x,r) \sim r^\alpha$.

Mise à part cette liaison, le problème, thème de cette partie, de la détermination numérique de $M(x,r)$ par la forme précédente $(r^\alpha \Psi(r))$ n'a pas été étudié.

On aborde le premier chapitre par des rappels sur les systèmes dynamiques holomorphes engendrés par des itérations de fractions rationnelles. On insiste particulièrement sur les principales propriétés de l'ensemble invariant et compact séparant les domaines d'attraction des cycles (et points fixes) attractifs de la fraction du système. Cet ensemble, appelé ensemble de Julia noté J ([22]), sera, dans le cas où il est borné, l'objet de nos expérimentations en vue de traiter et de résoudre notre problème ci-dessus cité.

Partant de notions de la théorie du potentiel ([38]) (potentiel logarithmique, distribution d'équilibre...etc), on définit, sous certaines hypothèses, une mesure locale $M(x,r)$ autour de x de E (ici, $E=J$). Cette définition prend en considération le fait que si J est borné, il existe une suite de mesures de masse unité qui admet une limite vague μ sur J (voir [7]).

Après cela, on décrit 2 méthodes d'approche numérique de $M(x,r)$ par l'expression $(r^\alpha \Psi(r))$.

Dans la première, on ajuste aux moindres carrés un nuage expérimental $(\epsilon, M(x,\epsilon))$

où ε est proche de 0; on utilise le concept de la convergence vague de mesures pour en extraire une méthode qui est, diverses expériences présentées l'attestent, plus performante que la première dans l'approximation de l'exposant α et des premiers coefficients du développement de la fonction Ψ .

Toujours dans l'optique de notre problème, le deuxième chapitre de cette partie est consacré à la présentation d'un algorithme appelé, procédé d'extrapolation, qui dérive de la seconde méthode du chapitre I et qui sert essentiellement à déterminer, toujours numériquement, l'exposant α de $M(x,r)$. Testé sur divers exemples d'ensembles de Julia J , dont certains sont étroitement liés à l'étude des transitions de phase en physique statistique ([33],[34]), ce procédé nous donne des résultats satisfaisants.

I-0 Itérations de fractions rationnelles et ensemble de JULIA.

Soit Σ la sphère de Riemann, ie $\Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$; dans toute cette partie, R désigne une fraction rationnelle (P/Q) , de degré $k = \sup(d^\circ(P), d^\circ(Q)) \geq 2$, application de $\Sigma \rightarrow \Sigma$. Si l'on pose $R_0(z) = z$ et $R_n(z) = R(R_{n-1}(z))$ avec $n \geq 1$, le point $Z_n = R_n(z)$ s'appelle le conséquent (ou l'itéré) d'ordre n du point z .

Dans la théorie des systèmes dynamiques holomorphes ([13]), l'étude du comportement itératif de la fraction R permet de déterminer les ensembles invariants par celle-ci. A travers le premier paragraphe de ce chapitre, on rappelle brièvement les principales notions liées à cette théorie. Pour plus de détails, on renvoie aux références qui y sont indiquées.

I-0-1 Définitions et Rappels:

i) Point fixe et cycle (Attraction - Répulsion) (cf. [32],[7])

$T'(z)$ désigne dans ce qui suit la dérivée, prise en z , de l'application T . Soit z^* (resp. $C = \{z_i\}_{i=1..n}$) un point fixe (resp. un cycle d'ordre n) de la fraction R .

Le point z^* est attractif (resp. répulsif) si $|R'(z^*)| < 1$ (resp. $|R'(z^*)| > 1$). De même, le cycle C est attractif (resp. répulsif) si $|R_n'(t)| < 1$ (resp. $|R_n'(t)| > 1$) pour tout point t du cycle.

ii) Domaine total et immédiat d'attraction. ([32],[6],[7])

a) Cas d'un point fixe attractif:

(Notation : $\lim_p \Leftrightarrow$ limite quand p tend vers l'infini)

Le domaine total d'attraction d'un point fixe attractif z^* , noté $DT(z^*)$, est l'ensemble $DT(z^*) = \{z / \lim_p (R_p(z)) = z^*\}$ (convergence uniforme).

Il est formé, en général, d'une infinité dénombrable de domaines ouverts; le plus grand connexe ($\subseteq DT(z^*)$) contenant z^* est appelé le bassin immédiat d'attraction du point z^* , on le notera $DI(z^*)$.

b) Cas d'un cycle attractif :

Soit maintenant $C = \{z_i\}_{i=1..n}$, un cycle attractif de R . Les points z_i de C étant des points fixes attractifs de l'application R_n , on définira de même, d'après ce qui précède, leur domaine total et immédiat d'attraction respectif : $DT(z_i)$ et $DI(z_i)$.

Le domaine total (resp. immédiat) d'attraction du cycle C est alors défini par: $DT(C) = \bigcup_{i=1..n} \{DT(z_i)\}$ (resp. $DI(C) = \bigcup_{i=1..n} \{DI(z_i)\}$).

iii) Point critique - définition et propriétés:([17],[7])

On note par R_{-1} la fonction (multiforme) inverse de R .

a) Le point α de \mathbb{C} est appelé point critique de (R_{-1}) si l'équation $R(z) - \alpha = 0$ admet une racine multiple. Les points critiques sont donc les points de l'ensemble $R(A)$ où $A = \{z / R'(z) = 0\}$.

b) Conséquence: Le nombre de points critiques ne peut dépasser la quantité $2(k-1)$, où $k=d^\circ(R)$.

c) Théorème de Fatou.

Dans le domaine immédiat d'un point fixe (ou cycle) attractif de R se trouve au moins un point critique de (R_{-1}) .

d) corollaire.

Sachant qu'il existe des cycles d'ordre aussi élevé que l'on veut et que, d'après (b & c), le nombre de points fixes (et cycles) attractifs est limité, on en déduit que celui des cycles répulsifs est infini.

I-0-2 Ensemble de JULIA d'une fraction rationnelle: définitions.

(i) L'ensemble de Julia de la fraction rationnelle R , noté $J(R)$ ou J , est l'ensemble des points τ du plan autour desquels la suite des itérés $(R_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$, avec z dans le voisinage de τ , n'est pas normale au sens de Montel ([32]).

(ii) C'est aussi l'adhérence de l'ensemble des points fixes (et des cycles) répulsifs de R ([22],[7]).

I-0-3 Principales propriétés de l'ensemble de Julia J ([32], [22], [17], [7]).

a) J est fermé et est non vide.

b) L'ensemble J est complètement invariant par R , ie que : $R(J) = R_{-1}(J) = J$.

c) Soit z un point quelconque du plan, à deux exceptions près appelées points exceptionnels. Alors, un point $z^* \in J$ si et seulement si z^* est point d'accumulation des antécédents, par R , de z .

d) Structure d'homogénéité: A partir d'un sous-ensemble de J , on retrouve, en itérant par R , l'ensemble J entier, ie: si D est un domaine tel que $J \cap D = J_1 \neq \{\emptyset\}$, alors $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $R_p(J_1) = J$.

e) Aspects de l'ensemble J .

Quelques structures de J avec exemples correspondants

S_1) Ensemble continu :

citons-en quelques cas

1) Courbe de Jordan simple : $z^2, z^2+z, z^3+(z/2)$.

On présente, en figure 1, (10^4) points de l'ensemble J du dernier polynôme.

2) J est formé d'une infinité de courbes de Jordan.

exemples : z^2-1, z^3-i (où $i^2=-1$), $(3z-z^3)/2$. L'ensemble J de ce dernier exemple est dessiné en figure 2 et est formé de (10^4) points.

3) Convexe: $J(z^2-2)=[-2,+2], J(z^3+3z)=[-2i,+2i], J(R)$ où R est la transformée de Newton d'un polynôme de degré 2 (voir [31])

S_2) Ensemble partout discontinu : z^2-5, z^3-1 .

S_3) Ensemble dense dans Σ : Si l'ensemble J contient des points intérieurs , alors il est identique au plan complexe (cas relevé par Lattes [25]) .

$R(z)=(z^2+1)^2/[4z(z^2-1)]$ (fraction de Lattes) , $R(z)=(i/2)[z+(1/z)]$.

f) Distributions des domaines d'attractions :

J sépare les domaines d'attraction des points fixes (et des cycles) attractifs de la fraction R . Autrement dit, J est l'ensemble des points du plan qui n'appartiennent à aucun domaine d'attraction .

Important : D'autres ensembles invariants compacts (de systèmes dynamiques non holomorphes ([8],[20])) qui forment les frontières des domaines d'attraction des points fixes (et des cycles) attractifs de ces systèmes ont été étudiés assez récemment par Mc Donald et al ([28]). Ils ont mis en évidence leur structure généralement fractale ([29]), calculé leur dimension (cf. [16] et [19]) et présenté divers résultats numériques en relation avec les caractéristiques géométriques de ces compacts.

I-0-4 Obtention des points de J .

Approcher numériquement l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle $J(R)$ par un ensemble fini est un problème relativement difficile.

S'appuyant sur la définition (ii) de la section 2 et sur la méthode de Newton (transposée au cas complexe), l'algorithme utilisé, pour obtenir les points de tous les ensembles $J(R)$ étudiés et présentés dans ce travail, est largement détaillé dans ([1]).

FIGURE 1:

(10000) points de l'ensemble de JULIA du polynôme $z^3+z/2$

$$(X,Y) \in ([-1.30,+1.30])^2$$

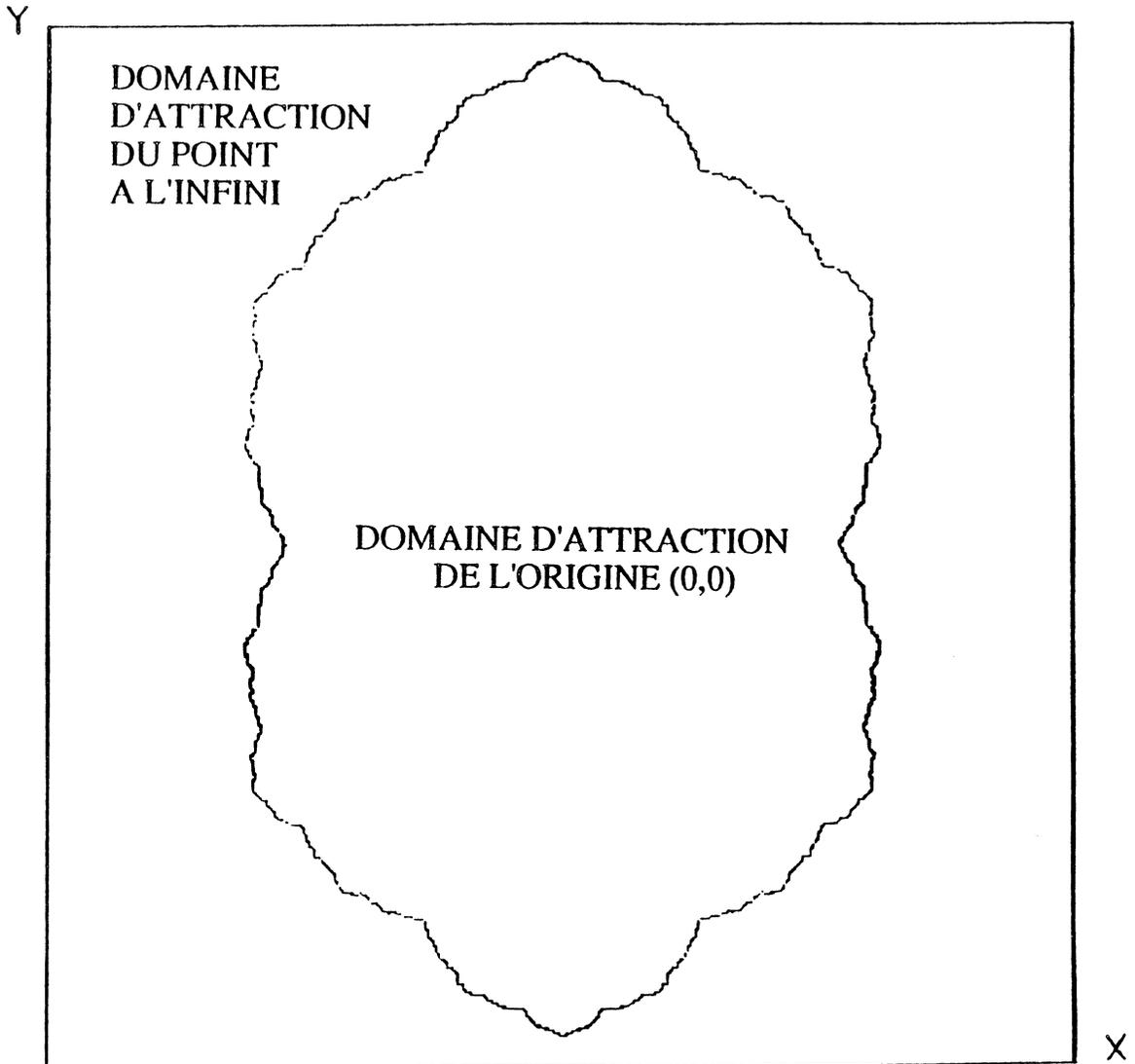
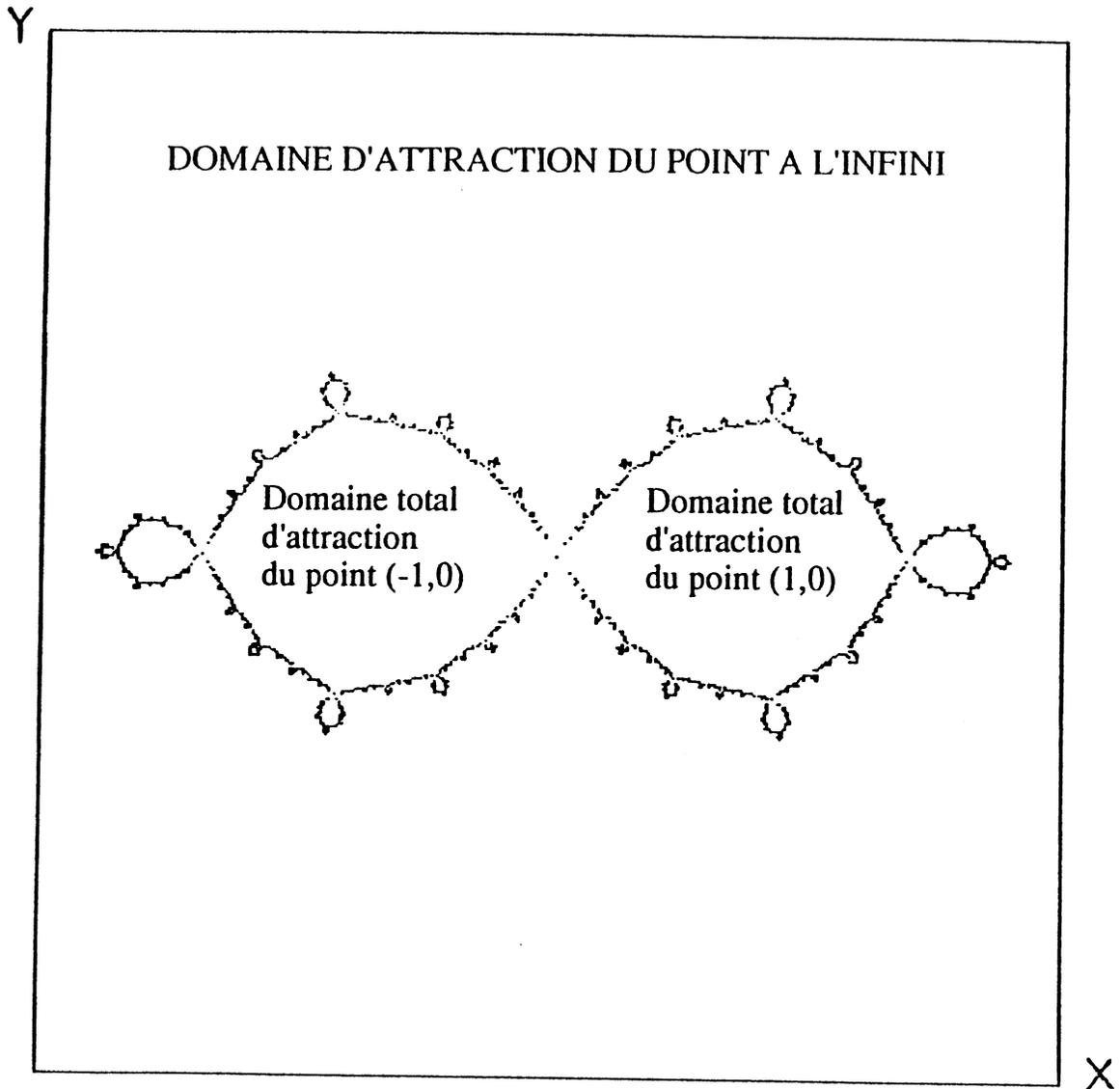


FIGURE 2:

(10000) points de l'ensemble de JULIA du polynôme $(3z-z^3)/2$

$$(X,Y) \in ([-2.5,+2.5])^2$$



I-1 Mesure locale.

Introduction

E désigne dans ce qui suit un sous-ensemble compact de \mathbb{C} (ou de \mathbb{R}^2). Une distribution μ (sur E) de masse positive est une fonction d'ensemble, additive et positive sur les boréliens. Dans toutes les définitions ci-après, on ne considère que des distributions μ de masse totale finie ie qu'elles vérifient : $\mu(E) < \infty$ (cf. [38]). On définit, à travers ce paragraphe, une mesure locale autour de chaque point de E ; ici E est pris égal à l'ensemble de Julia J d'une fraction rationnelle complexe R . Dans le cas où R est un polynôme, cette mesure est reliée à la distribution d'équilibre du potentiel logarithmique de J .

I-1-0 Notions de la théorie du potentiel.

On énonce, dans le cadre de cette théorie (cf. [8],[38],[14]), des définitions et des propriétés qui nous seront utiles pour la suite de notre étude.

a) Le potentiel logarithmique de E en un point y du plan, relativement à μ , est donné par : $U_\mu(y) = \int_E \text{Log}(1/|x-y|) d\mu(x)$.

b) Energie mutuelle de deux distributions τ et γ sur E :

Si elle existe, elle est définie par $\int_E U_\tau(y) d\gamma(y)$ et on la note $\langle \tau, \gamma \rangle$.

En appliquant le théorème de Fubini, il est clair que $\langle \tau, \gamma \rangle = \langle \gamma, \tau \rangle$.

c) Energie d'une distribution μ sur E : Si $\tau = \gamma (= \mu)$ dans la définition précédente, l'énergie $\langle \mu, \mu \rangle$ de μ est alors $\iint_{(E \times E)} \text{Log}(1/|x-y|) d\mu(x) d\mu(y)$.

Cette quantité peut être infinie, on posera $C = \{ \nu \text{ distribution sur } E / \langle \nu, \nu \rangle < \infty \}$.

d) Distribution d'équilibre : La distribution d'équilibre sur E est l'unique distribution μ^* qui vérifie : $\langle \mu^*, \mu^* \rangle = \inf_{\{\mu \in C / \mu(E)=1\}} \langle \mu, \mu \rangle (=V)$.

Le potentiel (U_{μ^*}) associé à μ^* est appelé potentiel d'équilibre et la quantité e^{-V} est la capacité de l'ensemble E .

I-1-1 Correspondance des distributions d'équilibre.

Soit Ω_1 un domaine ouvert, connexe de $(\Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ et Ω_2 sa représentation conforme par une transformation T . Deux distributions μ_1 et μ_2 sur leur frontière respective $F_1 = \text{Fr}(\Omega_1)$ et $F_2 = \text{Fr}(\Omega_2)$ sont dites correspondantes si deux sous-ensembles $E_1 \subset F_1$, $E_2 \subset F_2$ correspondants par T soutiennent des masses égales. En particulier, les distributions d'équilibre sur Ω_1 et Ω_2 se correspondent par T (cf. [9]).

Application:

- Correspondance des charges de la frontière bornée d'un domaine simplement connexe et celles du cercle unité .

S'il existe une représentation conforme T , sur l'intérieur du cercle unité, d'un domaine A contenant le point à l'infini, alors les arcs, correspondants par T , de $F=F_r(A)$ et de la circonférence soutiennent les mêmes charges (ou masses).

exemple: Distribution d'équilibre sur $[-1,+1]$

Si l'on considère la transformation de Joukowski : $L(z)=(1/2)(z+1/z)$, la branche (de module <1) de son inverse $T(z)=L^{-1}(z)=z\pm\sqrt{z^2-1}$ transforme, de façon univalente, l'extérieur de $[-1,+1]$ en l'intérieur du cercle unité $C(0,1)$.

La distribution d'équilibre (D.E) sur $C(0,1)$ étant la distribution uniforme, on peut donc, avec la correspondance ci-dessus, déterminer la D.E sur l'intervalle $[-1,+1]$.

I-1-2 Convergence faible - convergence vague.

Considérons $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et μ des distributions de \mathbb{C} , (voir section I-1-0). La suite (μ_n) converge faiblement vers une mesure limite μ si

$$\lim_n \langle \mu_n, \lambda \rangle = \langle \mu, \lambda \rangle, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ et on écrit } (\mu_n) \xrightarrow{w} (\mu).$$

Pour $f \in \mathcal{E}_0(\mathbb{C})$, qui est l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, continues et à support compact dans \mathbb{C} , et $\gamma \in \mathbb{C}$, on pose $\gamma(f)$ l'intégrale finie : $\int_{\mathbb{C}} f(x) d\gamma(x)$.

Alors la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vaguement vers μ si

$$\lim_n \mu_n(f) = \mu(f), \quad \forall f \in \mathcal{E}_0(\mathbb{C}), \text{ on le notera } (\mu_n) \xrightarrow{v} (\mu).$$

Ces 2 types de convergence sont reliés par le théorème important suivant

Théorème 1: ([7],[14]) $[(\mu_n) \xrightarrow{w} (\mu)] \Rightarrow [(\mu_n) \xrightarrow{v} (\mu)]$.

I-1-3 Ensemble de JULIA et distributions de masse unité .

Soit R une fraction rationnelle de degré $k \geq 2$, on choisit un point z^* différent des points exceptionnels de R signalés en section (I-0-3) et on construit une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mesures de masse unité telle que :

μ_n place la masse $(1/k^n)$ en chacun des (k^n) antécédents (par R_n) de z^* .

On rappelle alors le théorème

Théorème 2 : (cf. [38])

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures bornées, ie $\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq p_n(e) \leq c$ pour tout borélien e ; alors \exists une sous-suite $(p_i)_{i \in \mathbb{I} \subset \mathbb{N}}$ extraite de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui admet une limite (vague) p .

Cette mesure est aussi de masse unité sur l'ensemble limite des antécédents par R de z^* , et cet ensemble n'est autre que $J(R)$ ([6]) .

Si R est un polynôme normalisé P , donc de la forme $P(z)=z^k+\sum_{i=1..k} (c_{k-i} z^{k-i})$, le théorème 2 devient plus précis, en effet on a

Théorème 3 : ([7])

Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des mesures de masse unité ci-dessus construite. Si μ^* désigne la distribution d'équilibre (D.E) sur $J(P)$ alors $(\mu_n) \xrightarrow{w} (\mu^*)$.

I-1-4 Densité locale autour d'un point d'un compact (ici, ensemble de Julia).

Définition de la mesure locale.

Pour $x \in J$ et $r > 0$, notons par $B=B(x,r)$ la boule fermée centrée en x et de rayon r . Si l'on pose $M_n(x,r)=\mu_n[B(x,r)]$, $M_n(x,r)$ est donc le nombre d'antécédents contenus dans B , à l'étape n (voir section ci-dessus), divisé par le nombre total d'antécédents (ie k^n).

Position du problème: Sachant que la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ précédente tend vers une limite μ , on suppose qu'on ait les égalités

$\lim_n M_n(x,r)=\lim_n (\mu_n[B(x,r)])=\mu[B(x,r)]=M(x,r)$ et que $M(x,r)$ est de la forme $(r^\alpha \Psi(r))$ où $\alpha > 0$ et $\Psi(0) \neq 0$.

Le reste de la présente partie A est consacré à la détermination numérique, sur l'ensemble de Julia d'un polynôme (ou d'une fraction rationnelle), de l'exposant α et éventuellement des $(d+1)$ premiers coefficients (a_0, a_1, \dots, a_d) de la fonction Ψ si celle-ci est analytique ie $\Psi(r)=\sum_{i \geq 0} (a_i r^i)$.

I-1-5 Etude d'un exemple.

On détermine, à travers cette section, la distribution d'équilibre sur l'ensemble de Julia du polynôme (z^2-2) qui est l'intervalle $J = [-2,+2]$.

a) Rappel

Considérons l'ensemble de Julia d'un polynôme complexe P de degré $k \geq 2$. On sait que, dans ce cas, le point à l'infini est un point fixe attractif, et de ce fait n'appartient pas à J . Plus précisément on a

Théorème 4 (cf. [6] et [7]) : L'ensemble de Julia $J=J(P)$ est borné, et n'est, par conséquent, pas égal à tout le plan.

Avec ce théorème, l'hypothèse de compacité de l'ensemble E (ici $E=J$, voir l'introduction de ce paragraphe) est vérifiée. Du théorème 3, (section I-1-3), on peut donc parler de distribution d'équilibre (D.E) sur J , notée μ .

b) Distribution d'équilibre sur $[-2,+2]$.

D'après ce qui précède (section I-1-1) et en utilisant la transformation conforme $L(z)=(z+1/z)$, les distributions d'équilibre (D.E) sur $\mathfrak{D}_1=\{z \in \mathbb{C} / |z|=1\}$ et $\mathfrak{D}_2=\{z \in \mathbb{C} / \Im(z)=0 \text{ et } \Re(z) \in [-2,+2]\}$ se correspondent. Connaissant la (D.E) sur le cercle unité \mathfrak{D}_1 (cf.[9]), on peut donc, à l'aide de cette correspondance, déterminer celle (notée μ) sur l'intervalle \mathfrak{D}_2 .

c) Expression explicite de la densité locale $M(x,r)$ associée à la (D.E) μ sur \mathcal{D}_2 :

Pour $x \in [-2,+2]$ et en cherchant $M(x,r)$ sous la forme $(r^\alpha \Psi(r)) = (r^\alpha \sum_{i \geq 0} (a_i r^i))$, on obtient, après simplifications, les expressions suivantes:

i) cas où $x = \pm 2$

$$M(x,r) = r^{(1/2)} [(1/\pi)(1+(1/24)r + (3/640)r^2 + (15/21504)r^3) + \dots].$$

ii) cas où $|x| \neq 2$

$$M(x,r) = r [2k_0 + (k_0 k_1/3) r^2 + (k_0 k_2/5) r^4 + \dots] \text{ avec :}$$

$$k_0 = k_0(x) = 1/(\pi (4-x^2)^{(1/2)}), \quad k_1 = k_1(x) = 2(x^2+2)/[(4-x^2)^2]$$

$$k_2 = k_2(x) = 2(x^4+12x^2+6)/[(4-x^2)^4].$$

d) Exemple de valeurs théoriques des coefficients:

*) Autour du point $x=1$: $\alpha=1$, $a_0=0.367552\dots$, $a_1=a_3=0$, $a_2=0.040839\dots$.

*) Autour des points $x = \pm 2$: $\alpha=0.5$, $a_0=(1/\pi)=0.318309\dots$, $a_1=0.013262\dots$

$$a_2=0.001492\dots, \quad a_3=0.000222\dots$$

Remarques importantes : 1) Cas où $|x| \neq 2$: la fonction $\Psi(r)$, figurant dans l'expression de $M(x,r)$, est paire, les coefficients $a_{(2s-1)}$ avec $(s=1,2,\dots)$ sont nuls. En effet, on constate que $k_0(x)=k_0(-x)$, $k_1(x)=k_1(-x)$ et $k_2(x)=k_2(-x)$, la distribution d'équilibre μ sur $[-2,+2]$ est donc symétrique par rapport à l'origine.

2) Cas où $x = \pm 2$: cette distribution est identique autour des points du bord, autrement dit on a $M(2,r)=M(-2,r)$.

I-2- Détermination numérique de $M(x,r)$: Méthodes d'ajustement.

Introduction

Pour déterminer numériquement la mesure locale $M(x,r)$ autour d'un point x d'un compact E , on décrit deux méthodes numériques basées sur l'ajustement aux moindres carrés puis on compare leurs performances.

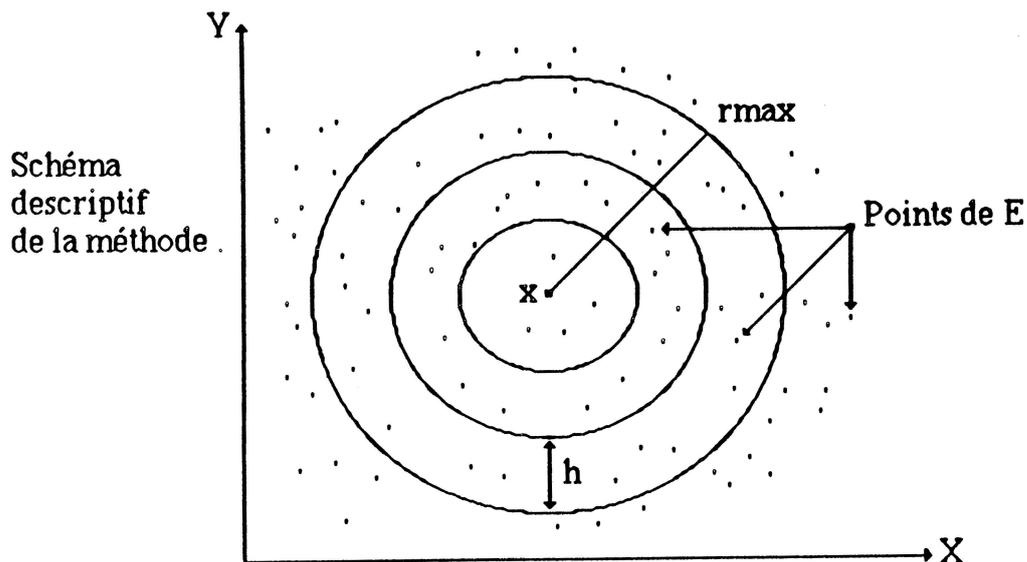
Toutes les expériences ne pouvant figurer ici, on illustre les méthodes précédentes sur l'exemple caractéristique de $E=J(z^2-2)=[-2,+2]$.

Comme indiqué dans le paragraphe précédent, on veut approcher la mesure locale $M(x,r)$ par la forme $(r^\alpha \mathcal{P}(r))$ où \mathcal{P} est un polynôme réel de degré d .

I-2-1 Présentation des méthodes numériques.

a) **Méthode 1:** (notée M_1 dans tout ce paragraphe (I-2)).

On se donne un rayon r_{\max} et un pas h tels que $(s=\lceil r_{\max}/h \rceil) \geq (d+2)$ où $d=d^\circ(\mathcal{P})$. Pour chaque rayon $r_i=r_{\max}-(i-1)h$ avec $i=1..s$, on calcule, moyennant un tri, par module décroissant, des points de E ($=J$) contenus dans la boule $B(x,r_{\max})$, la quantité $M(x,r_i)$ (voir la section I-1-3 et le dessin ci-dessous).



La méthode M_1 consiste alors à ajuster aux moindres carrés le nuage $(r_i, M(x, r_i))_{i \in [1, s]}$ par la fonction $F(r) = r^\alpha e[\mathcal{P}_1(r)]$. Cette forme est substituée à la forme initiale $(r^\alpha \mathcal{P}(r))$ afin de linéariser le problème.

On est amené à résoudre le système suivant à ($s = \lceil r_{\max}/h \rceil$) équations et ($d+2$) inconnues (α et les ($d+1$) coefficients de \mathcal{P}_1) :

$$\alpha \ln(r_i) + \mathcal{P}_1(r_i) = \ln(M(x, r_i)) \quad \text{pour } i=1..s.$$

par la méthode des moindres carrés.

b) **Méthode 2** : (notée M_2).

Cette méthode n'est, en fait, qu'une variante de (M_1); utilisant les mêmes données (r_{\max} et h) que celle-ci, elle comporte les deux étapes :

) Pour $d^\circ(\mathcal{P}_1)=0$, on détermine à l'aide de (M_1) la valeur numérique (α^) de l'exposant α .

**) cette valeur (α^*) est ensuite "injectée" dans l'expression ($r^\alpha \mathcal{P}(r)$) de $M(x, r)$.

Il nous reste donc à chercher uniquement les coefficients $(a_i)_{i=0..d}$, du polynôme \mathcal{P} . Pour cela, on forme les équations suivantes :

$$\sum_{i=0..d} (a_i (r_j)^i) = M(x, r_j) / [(r_j)^{\alpha^*}] \quad \text{avec}$$

$$r_j = r_{\max} - (j-1)h, \quad j=1..(s = \lceil r_{\max}/h \rceil), \quad s \geq (d+1) \quad \text{et} \quad d = d^\circ(\mathcal{P}).$$

Comme dans (M_1), ce système est résolu avec la méthode des moindres carrés, mais cette fois, sans passage au logarithme.

I-2-2 Application numérique : exemple $J(z^2-2)=[-2,+2]$

Avant de présenter les résultats numériques, signalons que dans le cadre de la méthode M_1 les coefficients théoriques de \mathcal{P}_1 se déduisent de ceux de \mathcal{P} (voir pour cela la section (I-1-5)). Autour des 2 points de J qui y sont indiqués, ils deviennent

i) $x=1$: $a_0 = -1.000888\dots$, $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = 1/9$.

ii) $x=2$: $a_0 = -1.14477\dots$, $a_1 = 0.041666\dots$, $a_2 = 0.00382\dots$, $a_3 = 0.000526\dots$.

Les 2 méthodes (M_1) & (M_2) ont été testées autour de ($x=1$) et ($x=2$) avec les valeurs de (r_{\max} et h) suivantes:

1) $r_{\max}=0.10$: $h=10^{-2}$, $(1/2) 10^{-2}$, $(1/8) 10^{-2}$.

2) $r_{\max}=0.20$: $h=2 10^{-2}$, 10^{-2} , $(5/8) 10^{-2}$.

Dans les tableaux ci-après, figurent les valeurs numériques les plus proches des valeurs théoriques; la colonne (d°) contient le degré des polynômes \mathcal{P} et \mathcal{P}_1 .

L'erreur absolue est indiquée pour chacune d'elles, elle est remplacée par un tiret (-) dès qu'elle paraît erronée. Les valeurs numériques de α étant les mêmes pour les 2 méthodes, cette valeur est remplacé par une astérisque (*) dans le cas de (M_2).

Signalons que, lors de ces expériences, $J(z^2-2)$ contient 2^{10} (=1024) points et que celles-ci ont été menées sur un micro-ordinateur (*MICRAL 9050*).

Nota : Le nuage de points $(r, M(x,r))$ obtenu autour de $x=2$ avec $r_{\max}=0.20$ et $h=5 \cdot 10^{-3}$ formé donc de $(s=40)$ points) est dessiné à la fin de ce paragraphe.

d°	coeff.	M_1	erreur	M_2	erreur
0	α	1.020283	0.0203	*	*
	a_0	-0.952870	0.0480	0.344955	0.0226
1	α	0.978009	0.0220	*	*
	a_0	-1.043251	0.0424	0.349593	0.0180
	a_1	-0.055211	0.0552	-0.00300	0.0030
2	α	0.977651	0.0223	*	*
	a_0	-1.045172	0.0443	0.387408	0.0200
	a_1	-0.157574	0.1575	0.082085	0.0820
	a_2	-0.157428	0.2685	-0.698233	0.74
3	α	0.943016	0.057	*	*
	a_0	-1.244434	0.2435	0.374295	0.0067
	a_1	4.662945	-	-0.053563	0.0535
	a_2	36.3911	-	-0.928790	0.97
	a_3	-61.900	-	6.381243	-

** **Tableau 1 :** Valeurs numériques des paramètres de $M(x,r)$ autour de $x=1$.

d°	coeff.	M ₁	erreur	M ₂	erreur
0	α	0.498219	0.0018	*	*
	a ₀	-1.146637	0.0019	0.317475	0.0008
1	α	0.500756	0.0007	*	*
	a ₀	-1.141810	0.0029	0.318697	0.0004
	a ₁	0.0417	0.0047	0.04275	0.0090
2	α	0.494273	0.0057	*	*
	a ₀	-1.165274	0.0206	0.317555	0.0007
	a ₁	0.125736	0.0841	0.005279	0.0080
	a ₂	-0.258701	0.2625	0.092332	0.0908
3	α	0.504029	0.0040	*	*
	a ₀	-1.120583	0.0242	0.319615	0.0013
	a ₁	0.405283	0.3636	0.092394	0.0791
	a ₂	-2.22234	-	0.096812	0.0953
	a ₃	4.945610	-	0.064472	0.0644

**** Tableau 2 :** Valeurs numériques des paramètres de M(x,r) autour de x=2 .

I-2-3 Comparaison des deux méthodes et commentaires.

L'ensemble des informations permettant les remarques suivantes ne figurent pas entièrement dans les 2 tableaux précédents.

a) Performances de M₁ :(se référer à la section I-1-5 et à celle ci-dessus pour les valeurs théoriques des paramètres de M(x,r)).

i) Autour de x=1:

On relève, pour (h) fixé et (rmax) quelconque, que la valeur numérique de α

se détériore quand le degré d de (\mathcal{P}_1) augmente de 0 à 3. A titre d'exemple, l'erreur dépasse (30%) pour $d=3$ et $h=(1/8) 10^{-2}$.

Par contre, si l'on fixe d à 0 et qu'on fasse diminuer le pas (h), les valeurs numériques de l'exposant vont en s'améliorant.

Les valeurs de a_0 sont relativement mauvaises, des quantités positives sont mêmes enregistrées ($r_{\max}=0.20$ et $d=3$). Quant aux valeurs trouvées pour $(a_i)_{i=1..3}$, elles sont médiocres et même complètement erronées; exemple, dans le cas du triplet $(d,r_{\max},h)=(3,0.1,0.5 10^{-2})$ on obtient $a_2=280$ et $a_3=-1411$.

ii) Autour de $x=2$:

Les remarques ci-dessus sont encore valables. Il faut quand même noter que le couple (α, a_0) est mieux approché que dans le cas $x=1$.

Pour terminer l'analyse de cette méthode, on peut dire que, mis à part l'exposant α que l'on arrive à approcher d'assez près (à (2%) en $x=1$ et jusqu'à (0.07%) en $x=2$), cette méthode est inadaptée au calcul des coefficients $(a_i)_{i=0..d}$, du polynôme

\mathcal{P}_1 de $M(x,r)$.

b) Performances de M_2 .

Pour une valeur du triplet (d,r_{\max},h) , on ajuste le nuage $(r, M(x,r))$ par la fonction $(r^{\alpha^*} \mathcal{P}(r))$ avec α^* connu, tiré de M_1 et correspondant à la même valeur du triplet.

Que ce soit en $x=1$ ou en $x=2$, on constate que les valeurs numériques (notées: v.n) de a_0 sont, en général, meilleures que celles trouvées avec M_1 . Les (v.n) de $(a_i)_{i=1,2,3}$, restent par contre encore mauvaises. D'autres expériences, non présentées ici, ont montré que des perturbations de l'ordre de $(\pm 10^{-2})$ sur une valeur exacte α' engendrent des erreurs de 8%, (resp. 19%) si (α') est entier (resp. rationnel), sur la valeur exacte de a_1 . Par contre, l'influence de ces perturbations est moins significative sur celle de a_0 (4% d'erreur).

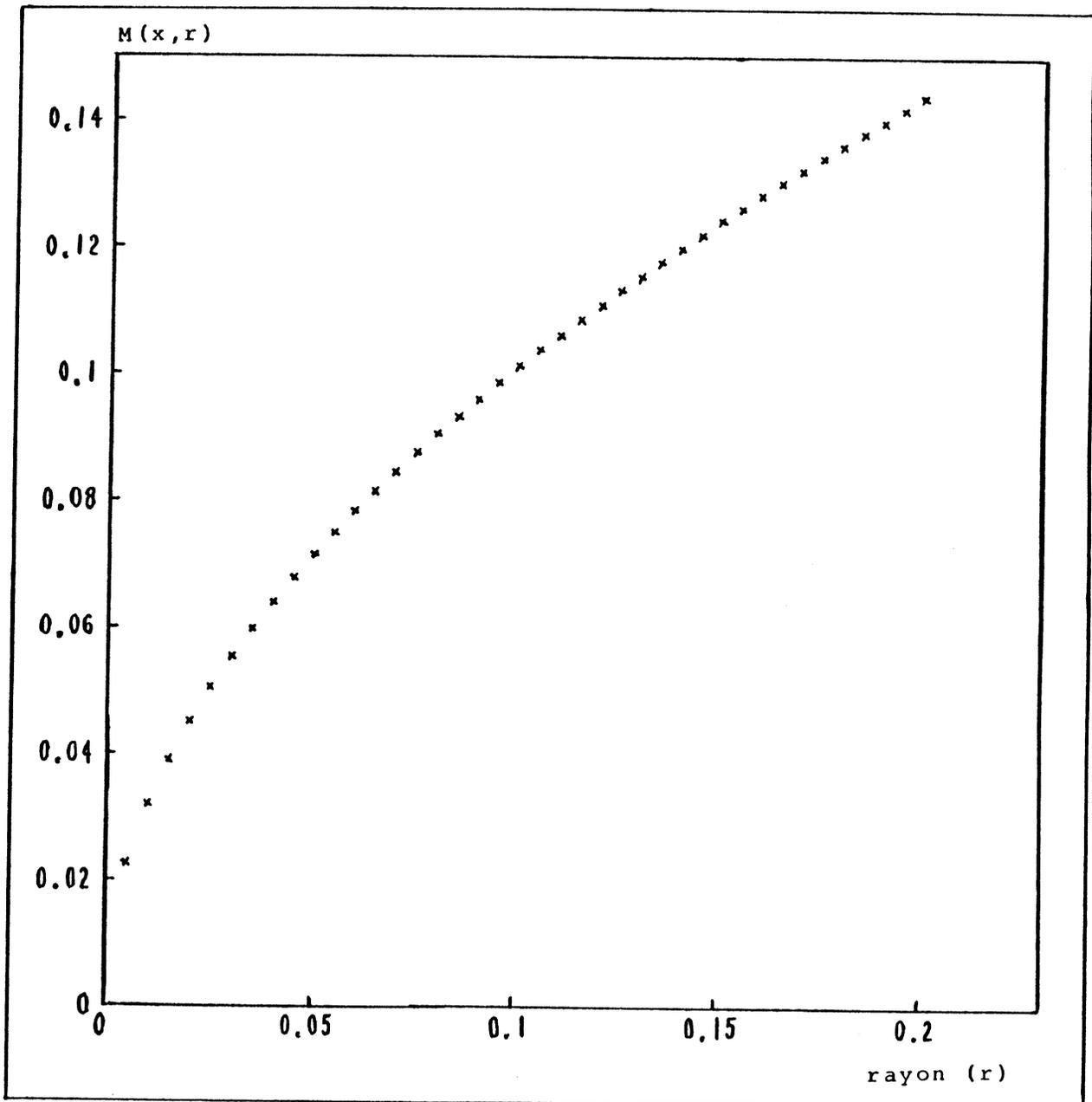
Remarques importantes

*) On rappelle que les valeurs portées sur les tableaux précédents sont les meilleures, parmi celles trouvées, pour chaque degré d fixé et pour (r_{\max} et h) quelconques.

**) Plusieurs ensembles, autres que $J(z^2-2)$, ont été pris comme exemples d'application de M_1 et M_2 , mais les expériences s'y rapportant ne figurent pas ici. Cependant, la conclusion qui suit tient compte des résultats de celles-ci.

I-2-4 Conclusion.

En conclusion de ce paragraphe, on pourra relever, bien que M_2 est globalement plus performante comparée à M_1 , (en effet le coefficient (a_0) y est mieux déterminé), que ces 2 méthodes d'ajustement ne fournissent pas une bonne approche de la mesure locale $M(x,r)$.



VARIATIONS DE LA MESURE LIMITE \underline{M} EN FONCTION DU RAYON (r)
AUTOUR DU POINT $X=(2,0)$ AVEC $R_{MAX}=0.20$ ET LE PAS $H=0.005$

I-3 Détermination numérique de $M(x,r)$: Convergence vague

I-3-0 Introduction

A travers ce paragraphe, on décrit une méthode numérique basée sur la notion de convergence vague pour déterminer la mesure locale autour d'un point d'un compact E de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{C}). On se restreindra, sans perte de généralité, au cas où E est l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle R .

Pour illustrer cette méthode, on reprendra l'exemple caractéristique de l'intervalle $J=[-2,+2]$. Signalons que les notations du paragraphe (I-1) sont conservées.

D'après le (th 3) de (§ I-1), la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers une limite μ , d'où :

$$\lim_n \langle \mu_n, \lambda \rangle = \langle \mu, \lambda \rangle, \quad \forall \lambda \in C \text{ (ie } \lambda \text{ est une distribution d'énergie finie)}$$

Mais, numériquement, ce résultat sera difficilement utilisable pour déterminer μ : Présence des distributions λ , calcul d'intégrales doubles.

D'autre part, le (th.1) nous assure la convergence vague de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers μ , convergence qui fait, elle, intervenir des fonctions à support compact.

Cette notion de convergence est, du point de vue numérique, plus maniable car on pourra alors envisager l'utilisation de fonctions à support compact et ayant certaines symétries pour se ramener à des intégrales simples.

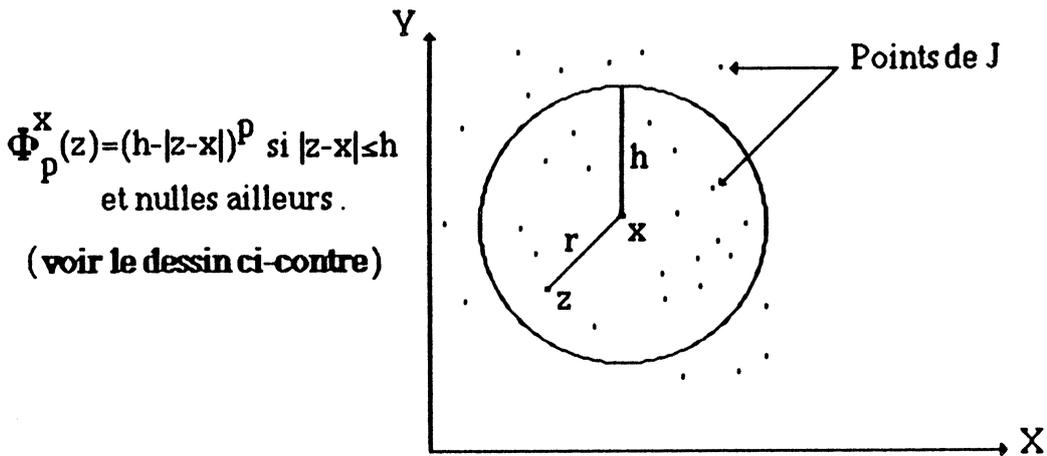
Dans la section qui suit, on décrit une méthode de détermination de la mesure locale-limite $M(x,r)$, associée à μ , autour d'un point x de $E=J=J(\mathbb{R})$, basée sur ce concept de convergence.

I-3-1 Description de la méthode (notée M_1 dans ce paragraphe (I-3)).

Par définition de la convergence vague de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers une distribution limite μ sur J , on a :

$$\int_{\mathbb{C}} f(z) d\mu_n(z) \mapsto \int_{\mathbb{C}} f(z) d\mu(z), \quad (\text{quand } n \mapsto \infty), \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{C}) \quad \dots\dots(1)$$

Considérons, pour x fixé dans J et un rayon donné h , les fonctions $(\Phi_p^x)_{p \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}^+$, à support dans $B(x,h)$, telles que :



l'égalité (1) devient alors:

$$\int_{B(x,h)} \Phi_p^x(z) d\mu_n(z) \mapsto \int_{B(x,h)} \Phi_p^x(z) d\mu(z) \dots\dots\dots(1')$$

Pour ramener ces intégrales dans le plan à des intégrales simples, posons $|z-x|=r$ où $z \in (J \cap B(x,h))$; $\Phi_p^x(z)$ est donc une fonction f_p de $|z-x|=r$ $f_p(r) = (h-r)^p$, et (1') prend la forme:

$$\int_{[0,h]} f_p(r) d[M_n(x,r)] \mapsto \int_{[0,h]} f_p(r) d[M(x,r)] \dots\dots\dots(2)$$

Comme indiqué précédemment, on suppose que $M(x,r) = (r^\alpha \Psi(r))$ où Ψ est analytique et non nulle à l'origine, que nous approchons par la forme $(r^\alpha \mathcal{P}(r)) = (r^\alpha \sum_{i=0..d} (a_i r^i))$ avec $a_0 \neq 0$.

Pour n à l'infini, $M_n(x,r)$ peut être estimée en utilisant les valeurs numériques $z \in (J \cap B(x,h))$ et ce de la façon suivante:

$$\int_{[0,h]} f_p(r) d[M_n(x,r)] = (1/N) \sum_{0 \leq r(z) \leq h} (h-r(z))^p$$

où $r=r(z)=|z-x|$ et N le nombre total de points z dans J .

Dans les applications, N sera pris assez grand et égale à une puissance de $(k=d^\circ(R))$, ceci d'après la construction de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (voir la section I-1-3). On peut, à partir de là, approximer les $(d+2)$ paramètres $(\alpha, (a_i)_{i=0..d})$ de $M(x,r)$ en transformant le système (2) en ce qui suit :

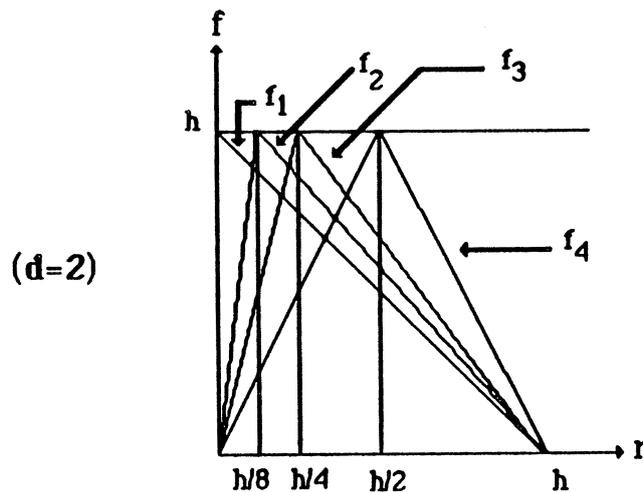
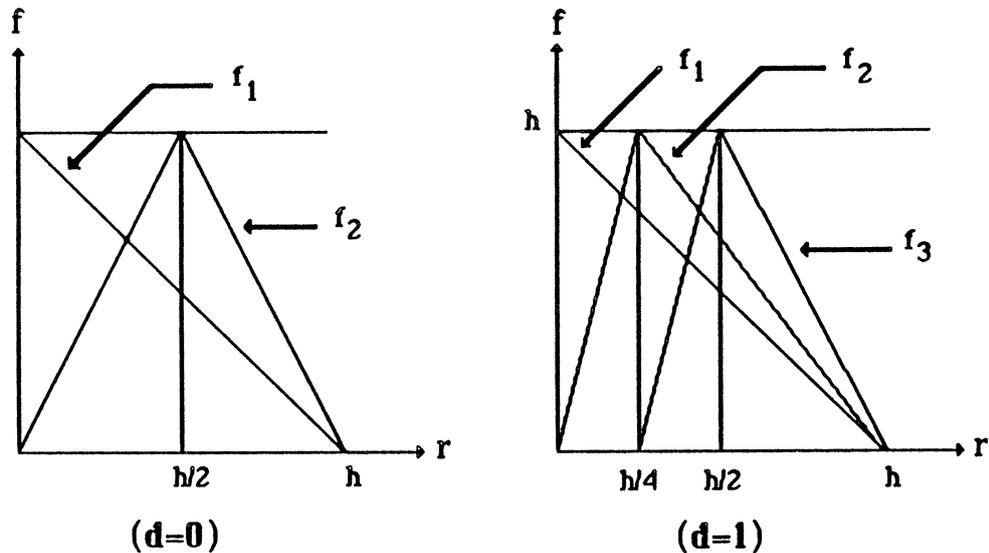
$$\int_{[0,h]} (h-r)^p d[r^\alpha \mathcal{P}(r)] = (1/N) \sum_{0 \leq r \leq h} (h-r)^p \dots\dots\dots(2')$$

système que l'on résoud pour $p=1..(d+2)$ où $d=d^\circ(\mathcal{P})$.

Remarque: la résolution de (2') conduit à une équation polynômiale de degré $(d+1)$ en l'exposant α .

** Variante de la méthode M_1 : (notée M_2 dans le reste de ce paragraphe I-3).

Le principe est le même que pour (M_1), mais les fonctions (f_p), qui, rappelons-le, doivent être à support compact dans $[0,h]$, sont dans le cadre de (M_2) des fonctions-chapeau. Pour chaque degré (d) du polynôme \mathcal{P} figurant dans l'expression de $M(x,r)$, il nous faudra utiliser ($d+2$) fonctions f_p . Ci-dessous sont tracées, suivant ce degré, les fonctions choisies .



Remarque : Pour $p=1..(d+2)$, la résolution du système (2') avec les fonctions-test ci-dessus, aboutit à une équation polynomiale de degré ($d+1$) en $u=2^{\alpha}$.

I-3-2 Résultats numériques et comparaison de ces deux méthodes .

A l'instar des 2 méthodes d'ajustement (paragraphe I-2), on présente uniquement les résultats issus de l'application de celles ci-dessus sur l'exemple caractéristique de $E=J=J(z^2-2)=[-2,+2]$.

Ce dernier est formé du même nombre total de points ($N=2^{10}=1024$) et les points x de J , autour desquels on veut approcher la mesure locale $M(x,r)$, sont aussi $x=1$ et $x=2$. Pour les deux méthodes et dans le cas des deux points précédents, on a pris le rayon h égal successivement aux 4 valeurs suivantes : 0.50 , 0.35 , 0.20 et 0.10 .

Les tableaux ci-après contiennent les valeurs numériques (v.n) les plus proches des valeurs théoriques (celles-ci sont indiquées en section I-1-5). Pour chaque degré d (allant de 0 à 2) du polynôme \mathcal{P} de $M(x,r)$, le rayon h parcourt les 4 valeurs précédentes; l'erreur (absolue) est indiquée pour la (v.n) correspondante.

$d^\circ(\mathcal{P})$	coeff.	M_1	erreur	M_2	erreur
0	α	1.001169	0.00116	1.002985	0.00298
	a_0	0.368345	0.00080	0.370225	0.00267
1	α	0.996312	0.00370	1.001663	0.00166
	a_0	0.361938	0.00561	0.368186	0.00063
	a_1	-0.014072	0.01407	0.010105	0.01010
2	α	1.004699	0.0047	0.999109	0.00089
	a_0	0.373460	0.0060	0.366414	0.00113
	a_1	-0.018863	0.0188	0.002420	0.00242
	a_2	0.064670	0.02383	0.043483	0.00264

**** VALEURS NUMERIQUES DES COEFFICIENTS AUTOUR DE X=1.**

$d^\circ(\mathcal{P})$	coeff.	M_1	erreur	M_2	erreur
0	α	0.501828	0.00182	0.501702	0.00170
	a_0	0.320852	0.00254	0.320732	0.00242
1	α	0.499916	0.000084	0.499807	0.00020
	a_0	0.318182	0.00013	0.318090	0.00022
	a_1	0.014040	0.00077	0.014177	0.00090
2	α	0.50000953	0.0000095	0.499804	0.00020
	a_0	0.318323	0.000013	0.318036	0.00027
	a_1	0.013182	0.00008	0.014606	0.00134
	a_2	0.001726	0.00023	0.007027	0.00553

**** VALEURS NUMERIQUES DES COEFFICIENTS AUTOUR DE $X=2$.**

***** Performances et commentaires.**

a) Méthode M_1

Cette méthode donne les meilleures valeurs de l'exposant α (comparée aux méthodes d'ajustements du paragraphe I-2).

En effet , $\forall d=0,1$ ou 2 , l'erreur se situe entre (0.02 et 0.01) en ($x=1$) , et entre (0.009 et 0.0000095) en ($x=2$) ; on constate au passage qu'elle est plus performante autour du second point .

Dans le cas de (a_0), on observe, d'une part, pour ($x=1$), des *fluctuations* autour de la valeur théorique, ($2/(\pi\sqrt{3})=0.367552\dots$):par exemple, en (h, d)=(0.10, 2) , la (v.n) trouvée est (0.432090...); et d'autre part une plus grande stabilité (des (v.n)) autour de ($x=2$). Les remarques sur les (v.n) de (a_0) s'appliquent aussi à celles de (a_1) avec toutefois des précisions moindres pour ces dernières. Sur les valeurs approchées de (a_2), on relève une nette amélioration par rapport aux 2 méthodes du (§ I-2) .

Pour conclure, on peut donc dire qu'elle est plus performante que celles-ci dans l'approche de la mesure locale par la forme $M(x,r)=r^\alpha(a_0+a_1r+a_2r^2)$. Les résultats sont plus significatifs dans le cas où $M(x,r)=a_0 r^\alpha$, ie que (α, a_0) sont les coefficients les mieux approximés.

b) Méthode M_2 .

Autour de ($x=1$ et $x=2$), on relève la détérioration des (v.n) de α pour $d=0$ et h croissant. Dans le cas où l'on fixe h et qu'on fasse varier d de 0 à 2, on constate que les (v.n) de α et a_0 sont caractérisées par une grande instabilité (fluctuations). Les (v.n) de (a_1 et a_2) sont, en général, moins bonnes que celles de (M_1) dans le cas ($x=2$), alors qu'autour de ($x=1$), leurs (v.t) sont mieux approchées par (M_2) que par (M_1).

Remarque importante

** Pour chacune des 4 méthodes, on a signalé que les valeurs numériques des coefficients $(\alpha, (a_i)_{i=0..d})$ sont sensiblement meilleures autour de ($x=2$) qu'en ($x=1$). Le fait que la forme $(r^\alpha \mathcal{P}(r))$ n'est pas unique si $\mathcal{P}(0)$ peut être nul (ex : autour de $x=1$, on a $\alpha=1$ et $a_0 \neq 0$, mais on pouvait aussi écrire $\alpha=0$, $a_0=0$, et a_1 prendra alors la première valeur de a_0), semble jouer un rôle dans la différence des performances des méthodes au voisinage de ces 2 points.

I-3-3 Conclusion (§ I-2 et § I-3) sur les approches de la mesure locale.

Au vu des (v.n) trouvées, aussi bien sur l'exemple $J=J(z^2-2)$ que sur d'autres non présentés ici, par chacune des 4 méthodes exposées, on peut **globalement** dégager les deux points suivants:

i) Les méthodes utilisant la notion de convergence vague (ie: celles du présent paragraphe) donnent de meilleurs résultats que celles utilisant l'ajustement aux moindres carrés (paragraphe précédent).

ii) Les (v.n) des $(a_i)_{i=1..d}$, ($d=d^\circ \mathcal{P}$), sont caractérisées par une instabilité numérique (fluctuations, valeurs erronées...etc), alors que le couple (α, a_0) est celui qui est le mieux approché.

D'une façon générale, pour déterminer numériquement, la **mesure limite** (ou la **distribution d'équilibre**) autour d'un point x d'un compact de \mathbb{C} (ou de \mathbb{R}^2) généré par une application (ensemble de Julia borné d'une fraction rationnelle complexe, attracteur étrange de système dynamique...), il est préférable d'utiliser les méthodes exposées dans ce paragraphe et de chercher à approcher cette mesure par la forme particulière $M(x,r)=a_0 r^\alpha$ ($a_0 \neq 0$).

II- Détermination numérique de $M(x,r)=r^\alpha \Psi(r)$: -- Approche de l'exposant α par extrapolation.

II-0 Introduction

Nous situant dans le même contexte que le chapitre I, on étudie, à travers ce deuxième chapitre, et pour une classe de fonctions-test, l'influence du rayon h (cf. la méthode décrite au § I-3) sur l'exposant α de la mesure locale $M(x,r)$ autour d'un point quelconque x d'un compact E du plan. E désigne généralement l'ensemble de Julia (borné) $J=J(R)$ d'une fraction rationnelle complexe R .

Une approche de α par un procédé d'extrapolation est d'abord décrite puis appliquée à quelques exemples d'ensembles $E (=J)$ de polynômes et de fractions.

On a déduit des 2 paragraphes (I-2 et I-3) que si l'on approche la mesure locale $M(x,r)$ autour d'un point x de J par la forme $(r^\alpha \mathcal{P}(r))$, \mathcal{P} étant un polynôme réel de degré d , on obtenait de meilleurs résultats, dans la détermination numérique de α et des coefficients $(a_i)_{i=0..d}$ de \mathcal{P} lorsque $d=0$.

II-1 Relation entre l'exposant α et le rayon h .

Important : on se place dans le cadre de la méthode M_1 (exposée dans le § I-3), de là l'introduction du rayon h et des fonctions-test $f_p(r)=(h-r)^p$ à support dans la boule ($B=B(x,h)$). Rappelons que $r=r(z)=|z-x|$ où le point z parcourt $(J \cap B)$.

Notre but dans cette section est de montrer ce qui suit :

Si l'on suppose que $M(x,r)$ est de la forme générale $(r^\alpha [a_0 + \theta(r)])$, avec $a_0 \neq 0$ et θ une fonction à valeurs réelles, dont la propriété principale sera précisée par la suite, alors la contribution du terme $(r^\alpha \theta(r))$ est négligeable devant $(a_0 r^\alpha)$ dans le calcul numérique de l'exposant α .

Pour cela, on va d'abord introduire quelques notations:

Appelons $\hat{\alpha}$ ($\hat{\alpha} > 0$), la valeur exacte de l'exposant formel α , $\hat{\alpha}$ ne dépend donc pas du rayon h . Approchons $M(x,r)$ par la forme particulière $M^*(x,r)=a_0 r^\alpha$ et notons par $\hat{\alpha}(h)$ la valeur numérique de α évaluée par le procédé explicité ci-dessous. Le point x étant fixé, on écrira, dans la suite, $M(r)$ (resp. $M^*(r)$) au lieu de $M(x,r)$ (resp. $M^*(x,r)$).

Le système (2) de la section (I-3-1) s'écrit dans le cas de $M(r)$, en posant, pour n à l'infini, $S_p(h)=\int_{[0,h]} f_p(r) d[M_n(r)]$ ($p=1,2$) :

$$S_p(h) = \int_{[0,h]} f_p(r) d[r^{\hat{\alpha}}(a_0 + \theta(r))] \quad (\text{système \#})$$

On peut maintenant énoncer le théorème important suivant :

Théorème 5 : si $\theta(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ alors $\hat{\alpha}(h) \rightarrow \hat{\alpha}$ quand $h \rightarrow 0$.

Démonstration :

Posons $M_\theta(h) = \max_{r \in [0,h]} |\theta(r)|$ et considérons le système d'équations ci dessus

$$S_p(h) = \int_{[0,h]} (h-r)^p d[M(r)] \quad \text{pour } p=1,2 \quad \dots\dots\dots (\#)$$

Résolution du système

équation 1 (ie p=1) : $S_1(h) = \int_{[0,h]} (h-r) d[M(r)]$

intégrons par parties le second terme, cette égalité devient :

$$S_1(h) = a_0 h^{(\hat{\alpha}+1)/(\hat{\alpha}+1)} + \int_{[0,h]} r^{\hat{\alpha}} \theta(r) dr$$

mais $|\int_{[0,h]} r^{\hat{\alpha}} \theta(r) dr| \leq M_\theta(h) (h^{(\hat{\alpha}+1)/(\hat{\alpha}+1)})$

on en tire que

$$S_1(h)/h^{(\hat{\alpha}+1)} = (a_0/(\hat{\alpha}+1)) + \epsilon_1(h) \dots\dots\dots (1)$$

avec $\epsilon_1(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Cette propriété de ϵ_1 vient du fait que la fonction $M_\theta(h)$ tend vers 0 avec h .

équation 2 (ie p=2) :

Suivant le même procédé que pour p=1, on obtient :

$$S_2(h)/h^{(\hat{\alpha}+2)} = [2a_0/((\hat{\alpha}+1)(\hat{\alpha}+2))] + \epsilon_2(h) \dots\dots\dots (2)$$

avec encore $\epsilon_2(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Des égalités (1) et (2), sachant $a_0 \neq 0$, on constate que, pour (p=1,2), les rapports $T_p = [S_p(h)/h^{(\hat{\alpha}+p)}]$ ont des limites finies et non nulles : notons les l_1 et l_2 respectivement.

La division terme à terme de (1) par (2) donne :

$$(\hat{\alpha}+2)/2 = [T_1 - \epsilon_1(h)]/[T_2 - \epsilon_2(h)] \rightarrow (l_1/l_2) \text{ quand } h \rightarrow 0 \dots\dots\dots (3).$$

Remplaçons maintenant $M(r)$ par $M^*(r) = a_0 r^{\hat{\alpha}}$ dans le système (#), celui-ci devient :

$$S_p(h) = \int_{[0,h]} (h-r)^p d[a_0 r^{\hat{\alpha}(h)}] \quad \text{où } p=1,2$$

ou encore en intégrant par parties pour p=1 et p=2 :

$$S_1(h)/h^{(\hat{\alpha}(h)+1)} = (a_0/(\hat{\alpha}(h)+1)) \dots\dots\dots (4)$$

$$S_2(h)/h^{(\hat{\alpha}(h)+2)} = [2a_0/((\hat{\alpha}(h)+1)(\hat{\alpha}(h)+2))] \dots\dots\dots (5)$$

La division terme à terme de (4) par (5) donne

$$(\hat{\alpha}(h)+2)/2 = [S_1(h)/h^{(\hat{\alpha}(h)+1)}] / [S_2(h)/h^{(\hat{\alpha}(h)+2)}]$$

mais d'après l'équation (3), le rapport de droite tend vers $(1/1/2)$ quand h diminue vers 0, d'où :

$$\hat{\alpha}(h) \mapsto \hat{\alpha} \text{ quand } h \mapsto 0 \quad \text{###}$$

II-2 Expression de $\hat{\alpha}(h)$ en fonction de $\hat{\alpha}$.

A travers cette section, on cherche l'expression de $\hat{\alpha}(h)$ en fonction de $\hat{\alpha}$ sachant que $M(r)=r^\alpha(a_0+\theta(r))$ avec $a_0 \neq 0$, $\alpha > 0$ et $\theta(r) \mapsto 0$ quand $r \mapsto 0$.

Dans ce but, on fait appel encore au système (#) ci-dessus :

$$S_p(h) = \int_{[0,h]} (h-r)^p d[M(r)] \quad \text{où } p=1,2$$

Pour $p=1$ et 2, on décompose l'intégrale (de droite) en la somme de deux autres

$$S_1(h) = \int_{[0,h]} (h-r) d[a_0 r^\alpha] + \int_{[0,h]} (h-r) d[r^\alpha \theta(r)] = S_{11}(h) + S_{12}(h) \dots\dots(*)$$

$$S_2(h) = \int_{[0,h]} (h-r)^2 d[a_0 r^\alpha] + \int_{[0,h]} (h-r)^2 d[r^\alpha \theta(r)] = S_{21}(h) + S_{22}(h) \dots(**)$$

De la démonstration du théorème 5, on sait que :

$$(\hat{\alpha}(h)+2)/2 = \lim_{(h \mapsto 0)} [S_1(h)/h^{(\hat{\alpha}(h)+1)}] / [S_2(h)/h^{(\hat{\alpha}(h)+2)}]$$

on a vu aussi que le terme de droite a une limite finie et non nulle; de là, on a :

$\hat{\alpha}(h) = 2h [S_1(h)/S_2(h)] - 2$, ou encore, en remplaçant $S_1(h)$ et $S_2(h)$ par leurs valeurs respectives tirées de (*) et (**):

$$\hat{\alpha}(h) = 2h [(S_{11}(h) + S_{12}(h)) / (S_{21}(h) + S_{22}(h))] - 2$$

les intégrales $S_{11}(h)$ et $S_{21}(h)$ peuvent être évaluées, l'exposant formel α de la mesure limite $M(r)$ prend alors la valeur exacte $\hat{\alpha}$, d'où :

$$S_{11}(h) = a_0 h^{(\hat{\alpha}+1)} / (\hat{\alpha}+1), \quad S_{21}(h) = 2 a_0 h^{(\hat{\alpha}+2)} / ((\hat{\alpha}+1)(\hat{\alpha}+2))$$

et cela en intégrant par parties, comme indiqué d'ailleurs dans la preuve du (Th.5).

Avec ces deux expressions, $\hat{\alpha}(h)$ devient :

$$\hat{\alpha}(h) = 2h [(a_0 h^{(\hat{\alpha}+1)} / (\hat{\alpha}+1) + S_{12}(h)) / ((2a_0 h^{(\hat{\alpha}+2)} / ((\hat{\alpha}+1)(\hat{\alpha}+2))) + S_{22}(h))] - 2$$

Posons dans la suite: $\gamma_1(h) = (\hat{\alpha}+1)(\hat{\alpha}+2)[h S_{12}(h) - S_{22}(h)] / (a_0 h^{(\hat{\alpha}+2)}) \dots(a)$

$$\gamma_2(h) = [(\hat{\alpha}+1)(\hat{\alpha}+2)S_{22}(h)] / (2a_0 h^{(\hat{\alpha}+2)}) \dots\dots\dots(b)$$

on rappelle qu'on a déjà montré, en utilisant la fonction $M_\theta(h) = \max_{r \in [0,h]} |\theta(r)|$

que les intégrales $S_{12}(h) = \int_{[0,h]} (h-r) d[r^{\hat{\alpha}} \theta(r)]$ et $S_{22}(h) = \int_{[0,h]} (h-r)^2 d[r^{\hat{\alpha}} \theta(r)]$

vérifiaient :

$$S_{12}(h)/h^{(\hat{\alpha}+1)} \mapsto 0 \text{ quand } h \mapsto 0, \quad S_{22}(h)/h^{(\hat{\alpha}+2)} \mapsto 0 \text{ quand } h \mapsto 0$$

On en tire donc aisément que $(\gamma_i(h))_{i=1,2} \mapsto 0$ quand $h \mapsto 0$.

Revenons à l'exposant numérique $\hat{\alpha}(h)$; on obtient après simplifications, tenant compte du fait que, par hypothèse, a_0 est non nul :

$$\hat{\alpha}(h) = (\hat{\alpha} + \gamma_1(h)) / (1 + \gamma_2(h)) .$$

La fonction $\gamma_2(h)$ tend vers 0 avec h , d'où $[1/(1+\gamma_2(h))] \simeq 1-\gamma_2(h)$, on aboutit alors à l'importante expression suivante :

$$\hat{\alpha}(h) \simeq [\hat{\alpha} + \gamma_1(h)] [1 - \gamma_2(h)] = \hat{\alpha} + \gamma_1(h) - \hat{\alpha} \gamma_2(h) \dots\dots\dots (##)$$

où les $(\gamma_i(h))_{i=1,2}$ tendent vers 0 quand h tend vers 0 et dépendent de la fonction θ (voir les égalités (a) et (b)).

Conclusion : On constate que la tendance de $\hat{\alpha}(h)$ vers $\hat{\alpha}$, pour h décroissant vers 0, est très étroitement liée aux propriétés de la fonction θ .

II-3 Algorithme d'approche par extrapolation .

II-3-0 Nature du problème dû à l'évaluation des $S_p(h)$:

Si l'on suppose que la mesure limite $M(x,r)$ est de la forme $[r^{\alpha}(a_0+\theta(r))]$ autour d'un point x de $(E=J(R)=J)$, on sait, d'après le (th.5), que les valeurs (numériques) de l'exposant α , calculées en résolvant les équations ((4) et (5)) de la précédente section (II-1), tendent vers la valeur exacte $\hat{\alpha}$ lorsque le rayon h tend vers 0.

On rappelle que, dans le cadre de la méthode (M_1) du (§ I-3), on a évalué les valeurs des $(S_p(h))_{p=1,2}$, comme étant égales à :

$$[(1/N) \sum_{0 \leq r(z) \leq h} (h-r(z))^p]_{p=1,2}$$

avec N le nombre total de points de J et $r(z)=|r(z)-x|$ où $z \in (J \cap B(x,h))$.

Mais, le nombre de points dans la boule $B(x,h)$ tend vers 0 avec h , et par retombée, les valeurs (évaluées) des $S_p(h)$; on s'attend donc à ce que la valeur numérique ($v.n$) de α , notée $\alpha(h)$ dans la suite au lieu de $\hat{\alpha}(h)$, se détériore au voisinage immédiat du point x .

conséquence :

la valeur numérique limite peut être éloignée de la valeur exacte, de là découle la nécessité de négliger certains points $(h,\alpha(h))$ avant d'ajuster et d'extrapoler afin d'approcher au mieux cette valeur.

Etant donnée la complexité du problème, l'étude mathématique de ce phénomène est très difficile. Nous proposons une **stratégie interactive** pour la détermination des points à omettre. Par la suite, nous illustrerons cette technique par de nombreuses expérimentations numériques .

II-3-1 Description de l'algorithme d'extrapolation

Tenant compte de ce qui précède, il comporte principalement les 3 étapes suivantes:

- (1) Données: RMAX= rayon maximal de la boule centrée en x.
PAS= pas de décroissance du rayon précédent.
N= nombre total de points z dans J.
- (2) $h \leftarrow$ RMAX
tant que ($h > 0$) faire
Début
 - (a) Détermination de la valeur de α correspondant au rayon h
(voir la section (I-3-1), système (2') avec $d=0$)
 - (b) $h \leftarrow h - PAS$Fin (tant que)
- (3) (i) ajustement aux moindres carrés du nuage obtenu
 $(h_i, \alpha(h_i))_{i=1..s}$ ($s \leq \lceil RMAX/PAS \rceil$) par une fonction $F=F(h)$
 adaptée à l'allure de ce nuage et de limite non nulle pour $h \rightarrow 0$.
 (ii) la valeur numérique limite de l'exposant est : $\lim_{(h \rightarrow 0)} F(h)$.

II-3-2 Choix des points à négliger (point (3-(i)) de l'algorithme) .

Parmi les points du nuage, (au nombre de $\lceil RMAX/PAS \rceil$), on ne doit prendre en compte, lors de l'ajustement, que les points $(h, \alpha(h))$ non touchés par la détérioration signalée précédemment (section II-3-0).

Autrement dit, on omet *volontairement* tous les points $(h, \alpha(h))$ n'ayant pas un comportement qui reflète une **tendance** des $\alpha(h)$ vers une valeur limite.

Remarque importante :

L'omission signalée ci-dessus peut non seulement porter sur les points $(h, \alpha(h))$ où h est très voisin de 0, mais aussi sur ceux dont l'abscisse est proche de (RMAX). Ces derniers points, du fait de l'éloignement de leur rayon du voisinage de 0, peuvent éventuellement fausser l'ajustement (cf. **th 5**). Cette remarque met l'accent sur le rôle de RMAX dans l'approche de l'exposant α par extrapolation.

II-4 Application du procédé d'extrapolation à quelques ensembles de Julia

Dans cette section, on présente, par le biais de tableaux, des résultats numériques issus de l'application du procédé d'extrapolation autour de quelques points d'ensembles de Julia (J) de polynômes et de fractions rationnelles.

II-4-1 Signification des paramètres des tableaux numériques .

A chaque exemple d'ensemble J traité, correspond un tableau de 8 colonnes $(C_i)_{i=1,8}$ dont le contenu est spécifié dans ce qui suit:

C_1 : (notée X dans le tableau)- cette colonne contient le point x de J autour lequel on veut approcher l'exposant α de la mesure locale $M(x,r)$.

C_2 : (notée RMAX)- rayon maximal pris autour du point x .

C_3 : (notée PAS)- pas de décroissance du rayon RMAX.

C_4 : (notée PN)- contient le nombre (total) de points du nuage $(h, \alpha(h))$.

On a déjà signalé que ce nombre est généralement égal à $(\lceil RMAX/PAS \rceil)$, mais il arrive, si x est entaché d'une erreur, qu'à partir d'un certain rayon (r_1) (dépendant à la fois de x , RMAX et PAS), la boule $B(x, r_1)$ ne contienne aucun point de J . Les valeurs évaluées de $(S_p(h))_{p=1,2}$ s'annulent donc dans ce cas ; en conséquence, les valeurs numériques $(v.\bar{n})$ de α correspondantes à tous les rayons ρ vérifiant $(PAS \leq \rho \leq r_1)$ sont inutilisables car nulles.

C_5 : (notée PV1)- nombre de points (du nuage $(h, \alpha(h))$) omis dont l'abscisse est proche de 0.

C_6 : (notée PV2)- comme dans C_5 , mais les points omis sont ceux dont l'abscisse h est proche de RMAX.

C_7 : (notée α -ext)- contient la valeur extrapolée de α tenant compte des éventuelles omissions.

C_8 : (notée $\Delta\alpha$) - dans le cas où la valeur théorique de α est connue, cette colonne indique l'erreur absolue commise sur cette valeur en extrapolant. L'erreur est remplacée par un tiret (-) dans le cas contraire ou si x n'est pas dans J .

II-4-2 Problème posé par la connaissance approchée du point x .

Dans le cas général, on ne connaît que la valeur approchée du point x considéré. Le résultat de l'extrapolation sera évidemment lié à l'erreur faite sur la valeur exacte de x , erreur due d'ailleurs au calcul numérique des points de J . Sur certains exemples de polynômes ($P(z)=z^2-2$, $P(z)=z^2$) dont la valeur de α est connue autour de chaque point t de $J=J(P)$, on essaiera de mettre en évidence cette liaison. Pour cela, on cherchera $M(t_1, r)$ où $t_1=t+\varepsilon$ (avec $\varepsilon \in \mathbb{C}$ où $|\varepsilon|$ petit) que l'on comparera avec $M(t, r)$, et ceci pour des points t de J exacts.

II-4-3 Présentation et analyse des résultats numériques.

En accord avec la construction de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (§ I-1 chap.I), les exemples présentés ici d'ensembles de Julia d'une fraction R (ou polynôme P) de degré $k \geq 2$, sont formés de $N=(k^m)$ points où N est assez grand.

Signalons aussi que la fonction d'ajustement choisie pour les 2 exemples de polynômes qui suivent est la parabole $F(h)=a h^2+b h + c$, (cf. § II-3-1).

*** Il est à noter que toutes les expériences de ce chapitre ont été faites sur le DPS 8 (système Multics) du C.I.C.G .

* Exemple 1: $P(z)=z^2-2$, $N=2^{13}=8192$ points .

X	RMAX	PAS	PN	PV1	PV2	α -ext	$\Delta\alpha$
(1,0)	0.2	$4 \cdot 10^{-3}$	50	7	0	1.000425	0.000425
(2,0)	0.2	$4 \cdot 10^{-3}$	50	4	0	0.500002	0.000002
(0,0)	0.2	$4 \cdot 10^{-3}$	50	10	0	0.998330	0.00167
(0.2,0)	0.2	$4 \cdot 10^{-3}$	50	11	0	1.000656	0.00065
(1.95,0)	0.2	$4 \cdot 10^{-3}$	50	0	38	1.009170	0.00917
(1.95,0)	0.02	$4 \cdot 10^{-4}$	50	7	0	0.998313	0.00168
$(10^{-2}, 10^{-2})$	0.2	$4 \cdot 10^{-3}$	48	16	0	1.451021	-
$(10^{-4}, 10^{-4})$	0.2	$4 \cdot 10^{-3}$	50	9	0	0.997062	-

On rappelle que $J=J(P)=[-2,+2]$ et que la valeur théorique de l'exposant α est 1 (resp. 1/2) si $|x| \neq 2$ (resp. si $x = \pm 2$) et ce pour $x \in J$ (voir § I-1 du chap.I) .

Commentaires

Au vu des valeurs du tableau ci-dessus, on peut formuler les observations suivantes:

(i) Pour les points situés à l'intérieur du segment, (ex : (0,0), (0.2,0), (1,0)) ou sur les bords (ex:(2,0)), il suffit d'omettre quelques points $(h, \alpha(h))$ où $h \in V(0)$, alors que ceux dont $h \in V(RMAX)$ sont acceptables, pour obtenir une bonne approche de la valeur théorique correspondante.

En figure 1 est présenté le nuage $(h, \alpha(h))$ (formé de 50 points) autour du point $x=(1,0)$ de J .

(ii) En ce qui concerne les points situés à l'intérieur du segment, mais proches du bord , (ex: $x^*=(1.95,0)$), 2 cas peuvent se présenter:

Cas 1: la boule, (centrée en le point considéré), contient le point du bord +2 (ou -2), (ex: RMAX=0.20 autour de x^*): on remarque que les (v.n) $\alpha(h)$ sont d'abord proches de la valeur de α du point du bord (ici, $\alpha=0.5$ autour de (2,0)), puis croissent rapidement tant que les rayons h sont supérieurs à h^* tel que $B(x^*, h^*)$ ne contienne pas le point du bord. Elles s'approchent ensuite, pour $h < h^*$, de la valeur théorique du point considéré.

Dans le cas précis présenté ici, cette valeur est 1, c'est celle qui correspond d'ailleurs aux points de J autres que $(\pm 2, 0)$. Les différents comportements décrits dans ce cas sont visibles sur la figure 2 .

Cet exemple illustre l'influence, du point de vue numérique, sur la (v.n) de α autour d'un point x , d'un point voisin de x et d'exposant α -théorique différent.

Cas 2: Si la boule de rayon (RMAX) ne contient pas le point du bord (ex: RMAX=0.02 autour de $x^*=(1.95,0)$), le comportement des points $(h, \alpha(h))$ est plus régulier et la remarque (i) s'applique dans ce cas.

(iii) Les deux dernières lignes du tableau soulignent le "**poids**", sur le résultat de l'extrapolation, d'une erreur faite sur un point x autour duquel on cherche la mesure locale $M(x,r)$ (cf. § II-4-2).

Dans le cas précis présenté ici, sachant que $x=(0,0) \in J(z^2-2)$ et que $\alpha(x)=1$, on relève la différence entre les valeurs extrapolées de α lorsque x est entaché d'une erreur de (1%) (puis de 0.01%) sur ses coordonnées.

Les nuages $(h, \alpha(h))$ autour de l'origine et $(10^{-2}, 10^{-2})$ sont présentés en figure 3.

* Exemple 2: $P(z) = z^2$ avec $N=2^{13}$ points.

Pour ce polynôme, l'ensemble de Julia $J=J(P)$ est le cercle unité $C(0,1)$. La mesure locale $M(x,r)$ est connue autour de chaque point x de J , en effet on montre le

Lemme : $\forall x \in J, M(x,r) = M(r) = r/\pi$.

La mesure locale est associée à la distribution d'équilibre μ^* qui n'est autre que la distribution uniforme sur le cercle $C(0,1)$ (cf. [7]); la masse d'un arc d'angle Θ est donc $\mu^*(\Theta) = \Theta/(2\pi)$.

Remarque : On constate que la mesure locale $M(r)$ est de la forme $[r^\alpha \mathcal{P}(r)]$ avec $\alpha=1$, $\mathcal{P}(r) = \text{constante} = 1/\pi = 0.318309\dots$

En raison du lemme ci-dessus, les expérimentations numériques (dont trois sont présentées ci-après dans un tableau) ont été menées autour de l'unique point fixe répulsif du polynôme P qui n'est autre que $x=(1,0)$.

X	RMAX	PAS	PN	PV1	PV2	α -ext	$\Delta\alpha$
(1,0)	0.2	$4 \cdot 10^{-3}$	50	8	0	0.999393	0.0006
(1.01,0)	0.2	$4 \cdot 10^{-3}$	48	40	0	1.227275	-
(1.01,0)	0.5	10^{-2}	49	40	0	1.051459	-

Commentaires sur le tableau

1) L'observation (i) ci-dessus, sur les points intérieurs (et loin des bords) du segment $[-2,+2]$, s'applique ici à tous les points de $J(P)$.

2) Autour d'un point t proche de la valeur exacte de x , (ex : dans le cas traité ici, $x=(1,0)$ et $t=1.01$), les (v.n) de α (ie $\alpha(h)$) croissent très rapidement lorsque h décroît (voir figure 4) : la méthode d'approche par extrapolation risque alors d'être inefficace .

Une possibilité de diminuer les effets, sur la valeur extrapolée de α , de l'erreur commise sur x , est de procéder de la manière suivante :

(i) le rayon (RMAX) de la boule centrée en t (valeur numérique connue) doit être pris sensiblement grand afin de minimiser la perte d'informations, perte engendrée par l'erreur ci-dessus, sur la mesure locale autour de la valeur exacte x .

(ii) ne prendre ensuite en compte que des points $(h, \alpha(h))$ dont l'abscisse est dans le voisinage de RMAX .

Par exemple, dans le cas traité ici, remarquons l'amélioration de la valeur extrapolée de α lorsque RMAX passe de (0.2) à (0.5); la valeur exacte de l'exposant autour du point $x=(1,0)$ est, rappelons-le, l'unité.

La remarque (2) ci-dessus est valable aussi bien pour $J(z^2-2)$ que pour d'autres exemples non présentés ici.

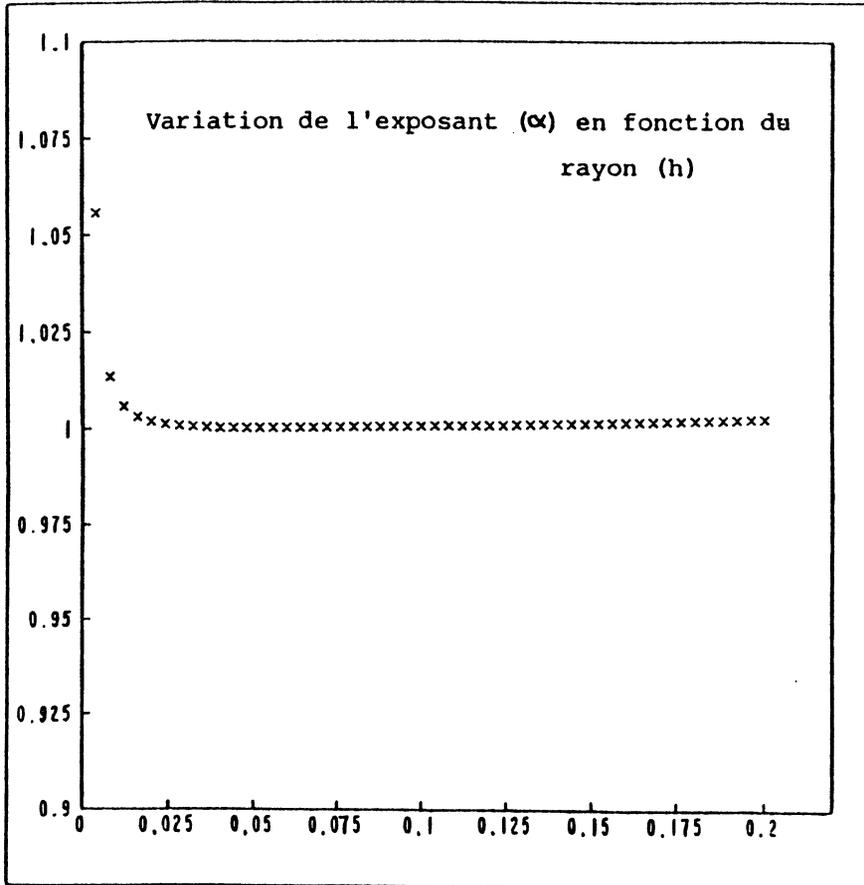


FIGURE 1 EXEMPLE 1

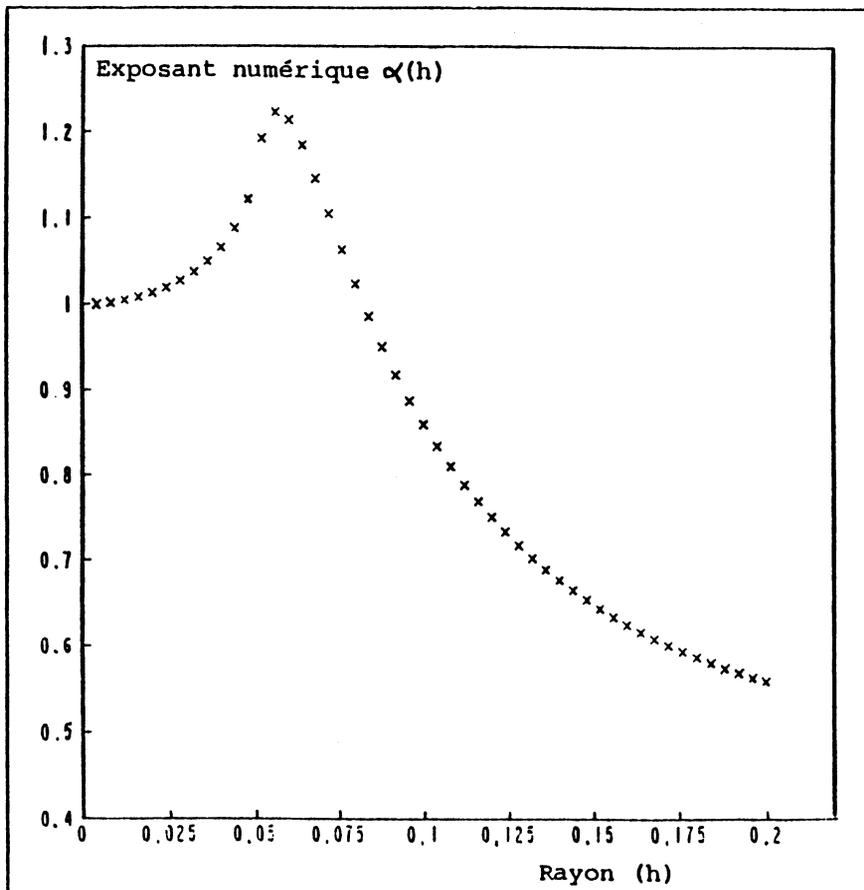


FIGURE 2 EXEMPLE 1

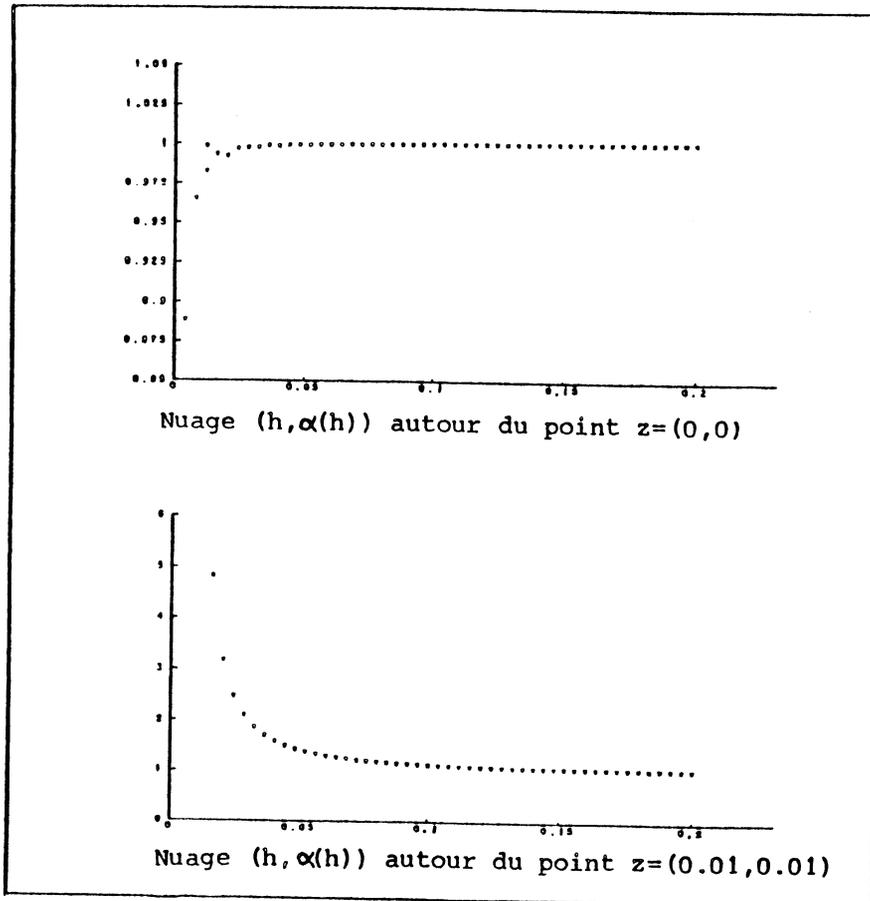


FIGURE 3 EXEMPLE 1

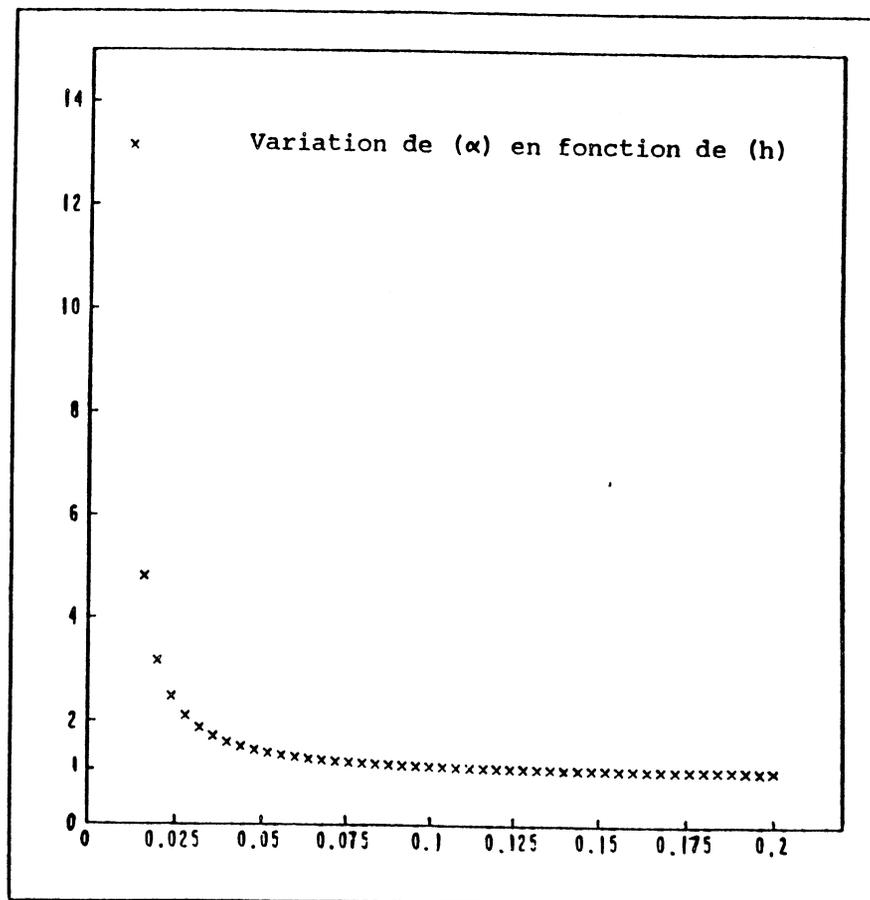


FIGURE 4 EXEMPLE 2

II-5 Etude d'un exemple tiré de la Physique Statistique .

$$* R_q(z) = (z^2 + q - 1)^2 / (2z + q - 2)^2 \quad q \in \mathbb{N}^*$$

II-5-1 Brève présentation de la famille de fractions $(R_q)_{q \in \mathbb{N}^*}$

Ces applications, appelées Transformations de Renormalisation, jouent un rôle très important dans l'étude de certains modèles discrets de la Physique Statistique (modèles hiérarchiques de réseaux de verres de spin) (cf. [33] pour plus de détails). Dans le cas présent, le modèle étudié est celui du diamant; d'autres modèles sont présentés et développés dans ([34], [35]).

Dans le plan complexe des températures, l'ensemble des points critiques de l'énergie libre (notée f) d'un modèle (étudiée dans [10]) coïncide avec l'ensemble de Julia de la Transformation de Renormalisation associée à ce modèle ([12]).

Au voisinage $V(z^*)$ d'un point critique z^* de f , et pour q fixé, l'énergie libre f varie comme : $|f(z) - f(z^*)| = |z - z^*|^\beta \phi(z - z^*)$ où $z \in V(z^*)$ et ϕ une fonction "régulière". Sans que des démonstrations mathématiques n'existent dans le cas général, l'exposant β est relié à l'exposant α de la mesure locale $M(z^*, r)$ autour de z^* . On semble même pouvoir affirmer que $\beta = \alpha$, mais cette dernière égalité n'est pas notre propos ici.

On fait remarquer que l'ensemble de Julia J_q de la fraction R_q est invariant par la transformation homographique $H_q(v) = [(2-q)v + 2(q-1)] / [2v + (q-2)]$; ceci provient du fait que, pour $v \in \mathbb{C}$, $R_q(v) = R_q[H_q(v)]$ et de la définition de l'ensemble de Julia (voir la déf. (ii) de la section I-0-2).

L'application de notre algorithme d'extrapolation, et donc de la détermination de l'exposant α de la mesure locale $M(z^*, r)$, est faite pour $q_1 = 2$ et $q_2 = 1.5$ autour du seul point fixe z^* répulsif réel et plus grand que 1 de la fraction R_q .

Remarques importantes :

a) Se référant à la précédente définition de l'ensemble de Julia, le point z^* , ainsi choisi, appartient à J_q ($q = q_1, q_2$) et est, par conséquent, un point critique de l'énergie libre f du modèle considéré.

b) Notre étude est restreinte aux points de l'axe réel car seuls ceux-ci, et plus précisément, ceux qui correspondent à une valeur entière du paramètre q , ont une signification physique (on renvoie à l'annexe pour plus de détails).

c) Il est aisé de vérifier que : $\forall q$ (même réel), le point à l'infini est un point fixe attractif de l'application R_q . Autrement dit, ce point n'est pas dans J_q ; ce dernier est donc borné et, de là, satisfait à l'hypothèse de la compacité de l'ensemble E (ici $E = J_q$) sur lequel on cherche à déterminer la mesure locale. (Voir au Chap. I, la section (I-0-3) et l'introduction du (§ I-1)).

II-5-2 Etude du cas $q=2$

Le modèle correspondant à cette valeur de q est appelé "modèle d'ISING" (se reporter à [33] et à la riche bibliographie qui y est incluse); le point fixe, qui nous intéresse, de la fraction $R_2(z)=[z+(1/z)]^2/4$ est le réel $z^*=3.3829\dots$.

Comme approche de l'exposant critique β (ou encore, de α) de l'énergie libre f au voisinage de ce point, plusieurs auteurs (Derrida et al [12],[11]) ont proposé la valeur $[\ln(4)/\ln(|R'_2(z^*)|)]=2.6765\dots$ cela après linéarisation de R_2 autour de z^* .

Notons que $(|R'_2(z^*)|)$ désigne le module de la dérivée de R_2 en z^* .

En figure 5 est présenté l'ensemble $J_2=J(R_2)$ formé de $(N=4^8=65536)$ points. On constate, sur ce dessin, le peu de points de l'approximant de J_2 autour de z^* et ceci malgré le nombre élevé du total de points N . A titre d'exemple, la boule fermée $B(z^*,0.4)$ en contient (17) seulement !.

Conséquence : Difficulté d'évaluer efficacement les quantités $(S_p(h))_{p=1,2}$ nécessaires au calcul de l'exposant numérique $\alpha(h)$ correspondant (cf. le § II-3-0).

Pour pallier cet inconvénient dû aux contraintes numériques, on fait appel à la propriété d'invariance, signalée précédemment, de $R_2(z)$ par la transformation $H_q(z)=1/z$. Il revient donc au même de chercher la mesure locale autour du point $t^*=(1/z^*)=0.2955\dots$.

Ces deux points (z^* et t^*) sont indiqués par des flèches sur le dessin de la figure 5.

(i) Approche de l'exposant α par le procédé d'extrapolation.

On dessine, en figure 6, 100 points $(h,\alpha(h))$ obtenus autour du point t^* . Dans un premier temps, ce nuage est caractérisé par une série d'oscillations d'amplitude décroissante, puis, dans un second temps par une brusque rupture (comme prévu d'ailleurs dans le § II-3-0). Au delà de cette coupure, la valeur numérique $\alpha(h)$ tend vers 0 très rapidement.

Devant ce genre de comportement, signalé dans un autre contexte par Derrida et al (voir [11]), nous procédons de la manière suivante :

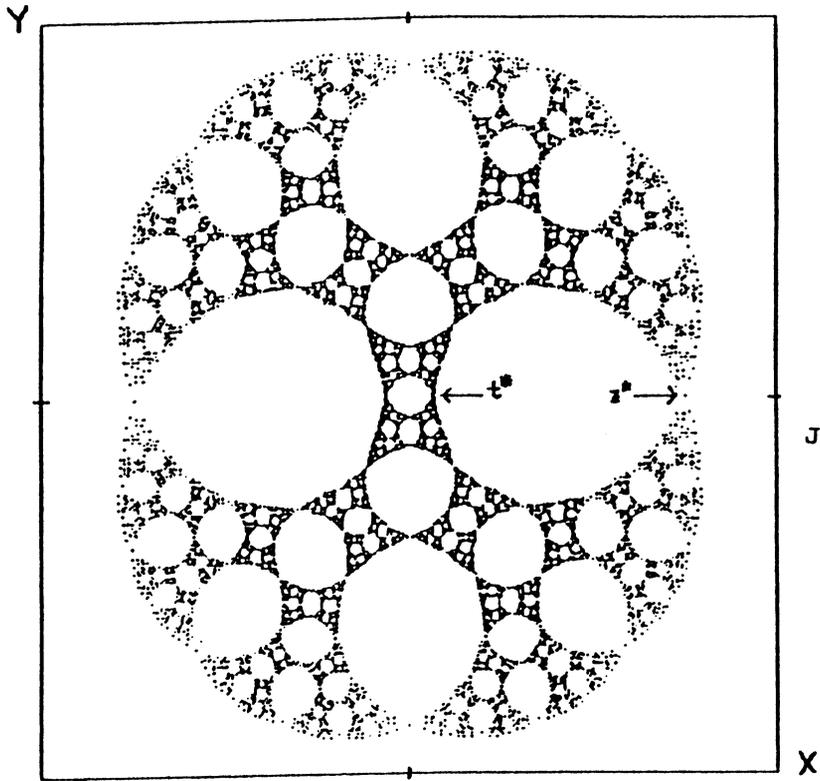


FIGURE 5
JULIA SET OF R_2

$(x, y) \in [-4.5, 4.5] \times [-4.5, 4.5]$

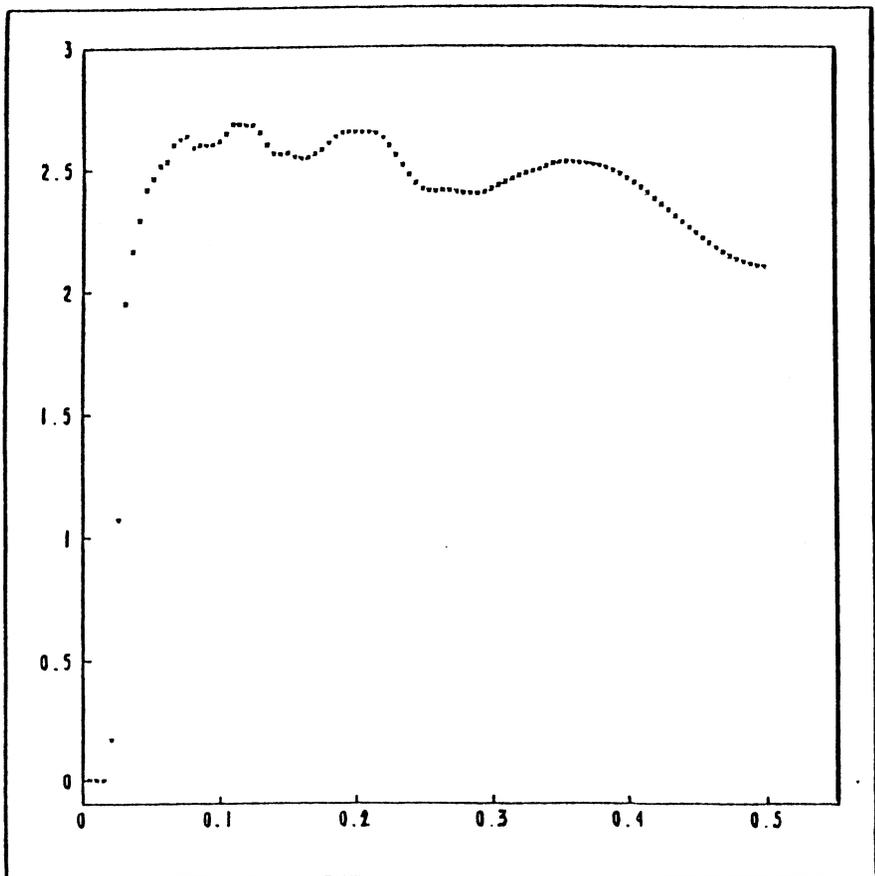


FIGURE 6 : (100) POINTS $(h, \alpha(h))$ AROUND $t^* = 0.2955$

- 1) Négliger tous les points $(h, \alpha(h))$ après la rupture, ie dans la direction des abscisses proches de 0 .
- 2) Ajuster le reste du nuage par
 - i) la droite $L_1(h) = a h + b$
 - ii) la parabole $L_2(h) = a h^2 + b h + c$

Résultats numériques :

On pose dans tout ce qui suit : ν = nombre de points omis , ϵ = erreur d'ajustement .
 Dans le cas des 2 fonctions (i) et (ii), on a pris $\nu = 18$; avec cela on obtient :

Ajustement (i) : b = valeur extrapolée de $\alpha = 2.78$, la pente $a = -1.10$.

Ajustement (ii) : c = valeur extrapolée de $\alpha = 2.78$, $b = -1.10$, $a = -9 \cdot 10^{-6}$.

Erreur d'ajustement : les fonctions d'ajustement étant pratiquement les mêmes, on trouve $\epsilon = 8.5 \cdot 10^{-2}$.

(ii) Traitement des oscillations .

L'inconvénient majeur des 2 fonctions d'ajustements ci-dessus réside dans le fait qu'elles ne tiennent pas compte des **oscillations** observées dans l'allure du nuage $(h, \alpha(h))$; en conséquence, elles paraissent inadaptées à ce genre de comportement .

Pour clarifier ce dernier, on trace en figures 7 et 8 , les nuages $M(t^*, h)$ et $(\ln(h), \alpha(h))$. Ces 2 schémas nous permettent de supposer que la fonction $\theta = \theta(h)$ apparaissant dans l'expression générale $[h^\alpha (a_0 + \theta(h))]$ de la mesure locale M (sections II-1 et II-2) est périodique (de période T) par rapport à la variable $(\ln(h))$. De la figure 8, la distance entre deux sommets successifs du nuage est approximativement $T^* = 0.56 \dots$.

FIGURE 7

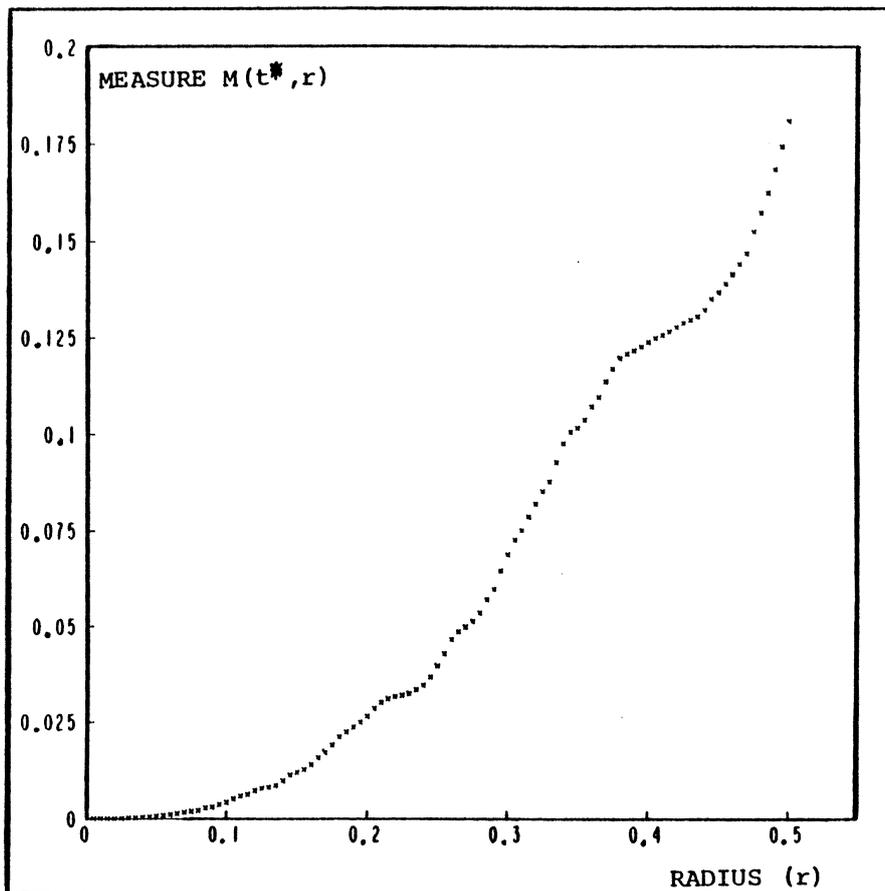
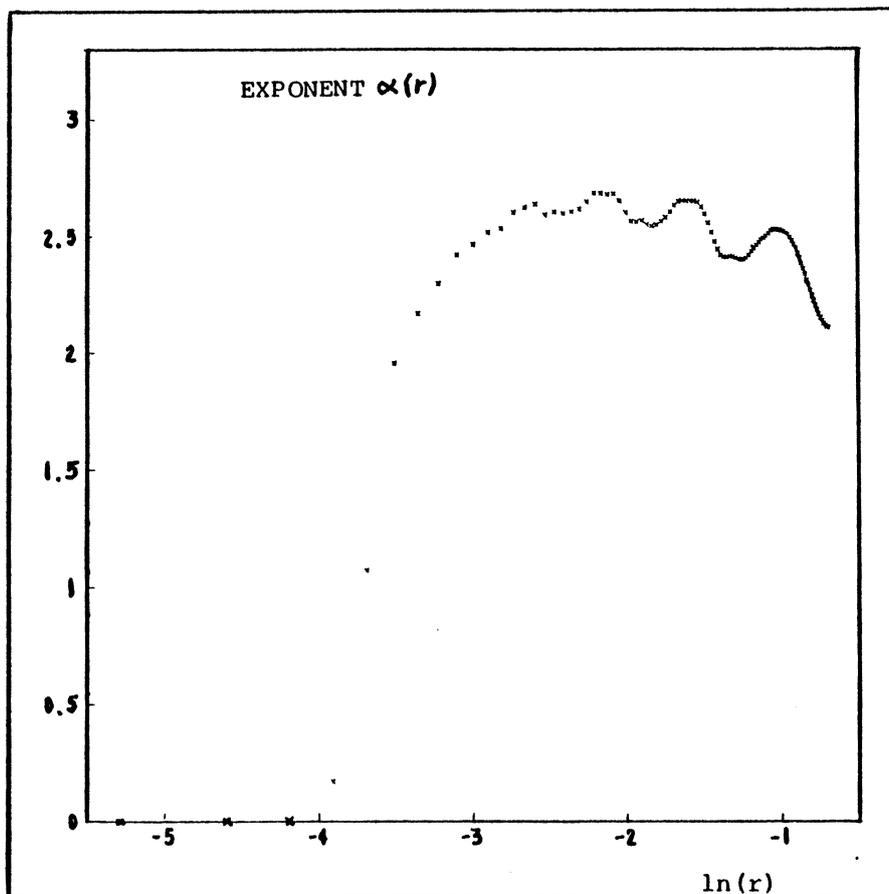


FIGURE 8



Rappelons l'expression de la valeur numérique $\alpha(h)$ en terme de α :

$$\alpha(h) \simeq \alpha + \gamma_1(h) - \alpha \gamma_2(h) \dots\dots\dots (*)$$

où les fonctions γ_1 et γ_2 dépendent de θ et tendent vers 0 avec h (cf. section II-2) .

Tenant compte du phénomène oscillatoire observé (fig. 6 et 8) et de l'hypothèse du théorème 5 , la fonction θ peut être prise périodique (de période T) et sous la forme d'un produit scalaire $\theta(h)=(c.V(h))$ avec les vecteurs (à 3 composantes)

$$c=(k_0,k_1,k_2) \text{ et } V(h)=(h, h \sin(\omega \ln(h)), h \cos(\omega \ln(h))) \text{ où } \omega=2\pi/T \text{ et } (k_i)_{i=0..2}$$

des constantes. Signalons au passage que $V(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

En reportant cette forme de $\theta(h)$ dans $\gamma_1(h)$ et $\gamma_2(h)$ (voir les égalités (a) et (b) de la section II-2), l'expression (*) ci-dessus devient après simplifications :

$$\alpha(h) \simeq \alpha + (C.V(h))\dots\dots\dots (**)$$

avec le vecteur $C=(K_0,K_1,K_2)$ où $(K_i)_{i=0..2}$ des constantes s'exprimant en fonction de a_0 , ω , α et du vecteur $c=(k_0,k_1,k_2)$.

Résultats numériques :

Après avoir négliger ($\nu=18$) points $(h,\alpha(h))$, avec h dans le voisinage de 0, dans le nuage initial (fig. 6), on ajuste, aux moindres carrés, les points restants par la fonction à droite de (**) que nous noterons $F_1(h)=\alpha+(C.V(h))$ dans toute la suite.

En extrapolant, on trouve les valeurs suivantes de α ($=\lim_{h \rightarrow 0}(F_1(h))$) ainsi que du vecteur C , en prenant $\omega=2\pi/T^*=11.1$ (avec $T^*=0.56$) :

$$\alpha = 2.73 , C = (K_0,K_1,K_2) = (-9 \cdot 10^{-1}, 3.4 \cdot 10^{-1}, 1.2 \cdot 10^{-1})$$

l'erreur d'ajustement correspondante est $\epsilon=2 \cdot 10^{-2}$.

Une autre expression de la fonction θ :

Si cette fonction est prise égale au produit scalaire $(u.W(h))$ avec

- $u=(u_0,u_1,u_2,u_3,u_4)$
- $W(h)=(h, \sin(\omega \ln(h)), \cos(\omega \ln(h)), h \sin(\omega \ln(h)), h \cos(\omega \ln(h)))$

on obtient, après avoir omis ($\nu=16$) points du nuage initial puis ajuster (aux moindres carrés) par la fonction $F_2(h)=\alpha+(U.W(h))$, avec U un vecteur du même type que u , les valeurs suivantes : $\alpha = 2.73$, erreur d'ajustement $\epsilon = 1.6 \cdot 10^{-2}$

$$W = (U_0, U_1, U_2, U_3, U_4)=(-9 \cdot 10^{-1}, 7.7 \cdot 10^{-3}, 5.2 \cdot 10^{-2}, 3.2 \cdot 10^{-1}, -4.2 \cdot 10^{-2}).$$

Commentaires sur les différents résultats d'ajustements .

Contrairement au cas où la fonction d'ajustement est une droite ou une parabole, les fonctions $F_1(h)$ et $F_2(h)$ ci-dessus tiennent compte des oscillations présentes dans le nuage numérique $(h, \alpha(h))$. Leur erreur (respective) d'ajustement est d'ailleurs bien meilleure .

Ceci est bien illustré par la figure 9 où l'on a superposé le nuage initial (qui est constitué de (100) points) et la fonction $F_1(h)$ (resp. $F_2(h)$) qui correspond à la 1^{ère} (resp. 2^{ème}) forme de la fonction θ . Les valeurs des constantes sont celles indiquées ci-dessus . Bien que l'erreur d'ajustement est meilleure en ajustant par F_2 que par F_1 , il faut quand même signaler que la fonction θ ne vérifie pas l'hypothèse du (Th.5) dans le cas associé à $F_2(h)$; en effet la forme $\theta(h)=(u.W(h))$ n'admet pas de limite quand h tend vers 0 .

Plusieurs autres expériences qui consistent en la variation du nombre (ν) des points à négliger et en l'ajustement par $(F_i(h))_{i=1,2}$ ne sont pas toutes présentées ici. Elles nous permettent d'avancer la valeur (2.72 ± 0.01) pour l'exposant α de la mesure locale $M(z^*,h)$ autour de $z^*=3.3829\dots$.

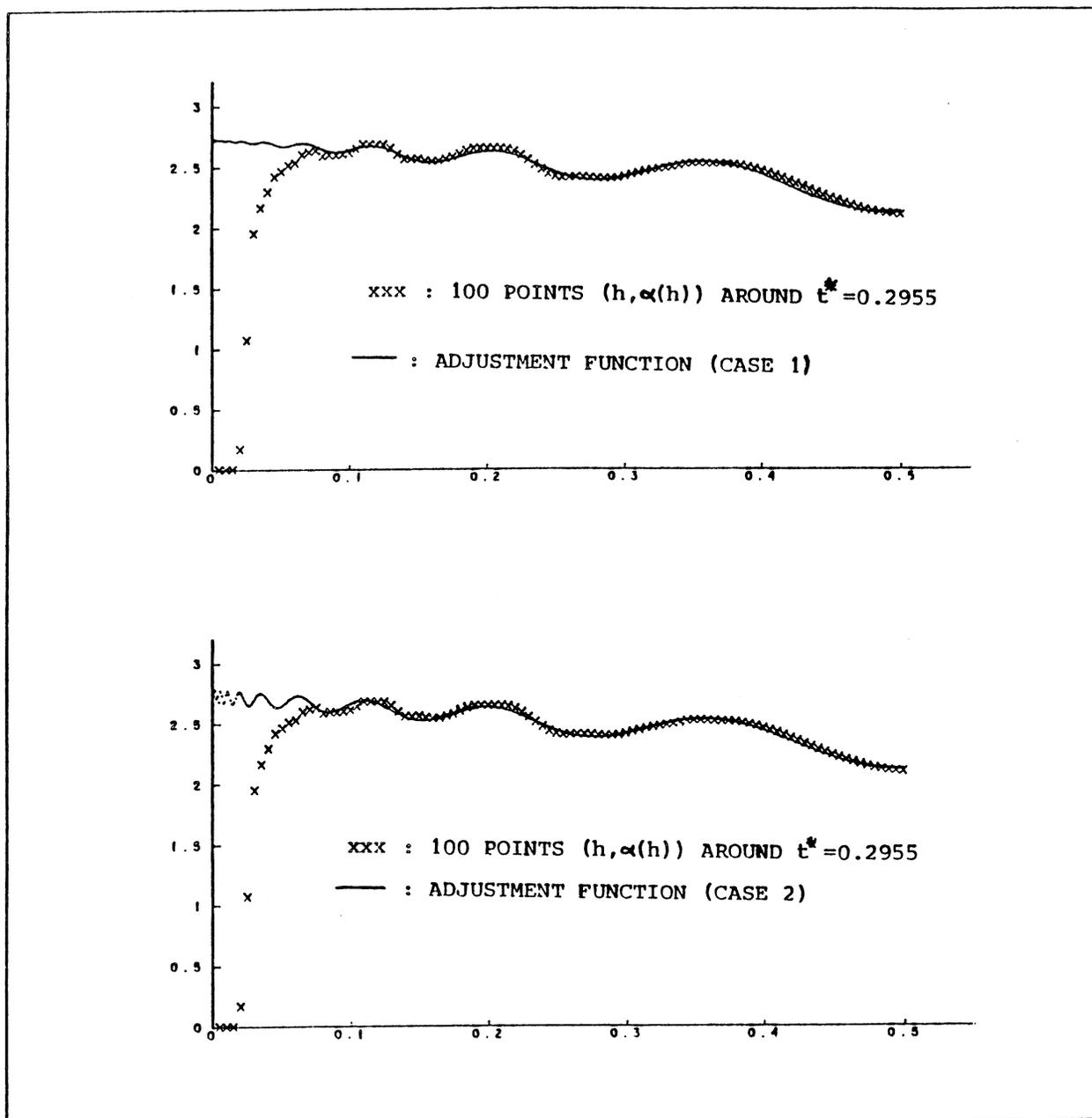


FIGURE 9

II-5-3 Etude du cas $q=3/2$

La Transformation de Renormalisation est dans ce cas $R(z)=[2z^2+1]^2/[4z-1]^2$; la valeur $q=1.5$, rappelons-le, ne correspond à aucune réalité physique car non entière.

Pour traiter cet exemple, on suivra le même procédé utilisé dans le cas $q=2$. Le point fixe (de $R(z)$) qui nous concerne est $z^*=3.0272\dots$. Nous référant à ([11]), la linéarisation de $R(z)$ autour de z^* aboutit à la valeur approchée ($\beta=2.8995\dots(=\alpha)$) de l'exposant critique de l'énergie libre f du modèle associé à l'application R .

Pour la même raison invoquée dans le cas du modèle d'ISING (ie $q=2$), nous devons chercher la mesure locale autour du point $t^*=[H_q(z^*)]_{q=1.5} = 0.4525\dots$. Les 2 points t^* et z^* sont repérés par des flèches sur la figure 10 où ($N=4^8=65536$) points de $J=J(R)$ sont dessinés. Notons, à titre indicatif, que la boule fermée $B(t^*, 0.345)$ contient près de $(N/5)$ points de J .

En figure 11, les points $(h, \alpha(h))$ autour de t^* , au nombre de (69) nous révèlent encore une série d'oscillations d'amplitude décroissante. Considérant l'allure du nuage $(\ln(h), \alpha(h))$ (non présenté ici), et d'une façon analogue au cas $q=2$, on établit que la précédente fonction θ est périodique de période T . Estimée de la même façon que précédemment, cette dernière avoisine la valeur $T^*=0.55$.

--- Application du procédé d'extrapolation

Après omission de (ν) points d'abscisse proche de 0 parmi ceux du nuage initial $(h, \alpha(h))$ (fig. 11), nous ajustons (toujours aux moindres carrés) les points restants par les 4 fonctions déjà utilisées dans le cas $q=2$, à savoir :

$$(i) L_1(h) = a h + b, \quad (ii) L_2(h) = a h^2 + b h + c$$

(iii) (resp. (iv)) la fonction précédente $F_1(h)$ (resp. $F_2(h)$) avec $\omega=2\pi/T^*=11.4$ (les notations des constantes sont les mêmes que précédemment).

Résultats numériques

On obtient les valeurs extrapolées suivantes ainsi que l'erreur d'ajustement associée à chaque fonction :

$$(i) \nu=13, b=\text{valeur extrapolée de } \alpha=2.91, \text{ la pente } a=-7.4 \cdot 10^{-1}, \varepsilon=2.5 \cdot 10^{-2}$$

$$(ii) \nu=13, c=\text{valeur extrapolée de } \alpha=2.91, b=-7.4 \cdot 10^{-1}, a=8.4 \cdot 10^{-7}, \varepsilon=2.5 \cdot 10^{-2}$$

$$(iii) \nu=19, \alpha=2.92, C=(K_0, K_1, K_2)=(-8.2 \cdot 10^{-1}, -7.3 \cdot 10^{-3}, 10^{-1}), \varepsilon=1.8 \cdot 10^{-2}$$

$$(iv) \nu=18, \alpha=2.92, \varepsilon=1.4 \cdot 10^{-2}$$

$$U=(U_0, U_1, U_2, U_3, U_4)=(-8.6 \cdot 10^{-1}, -4.1 \cdot 10^{-2}, -4.5 \cdot 10^{-2}, 1.6 \cdot 10^{-1}, 2.8 \cdot 10^{-1})$$

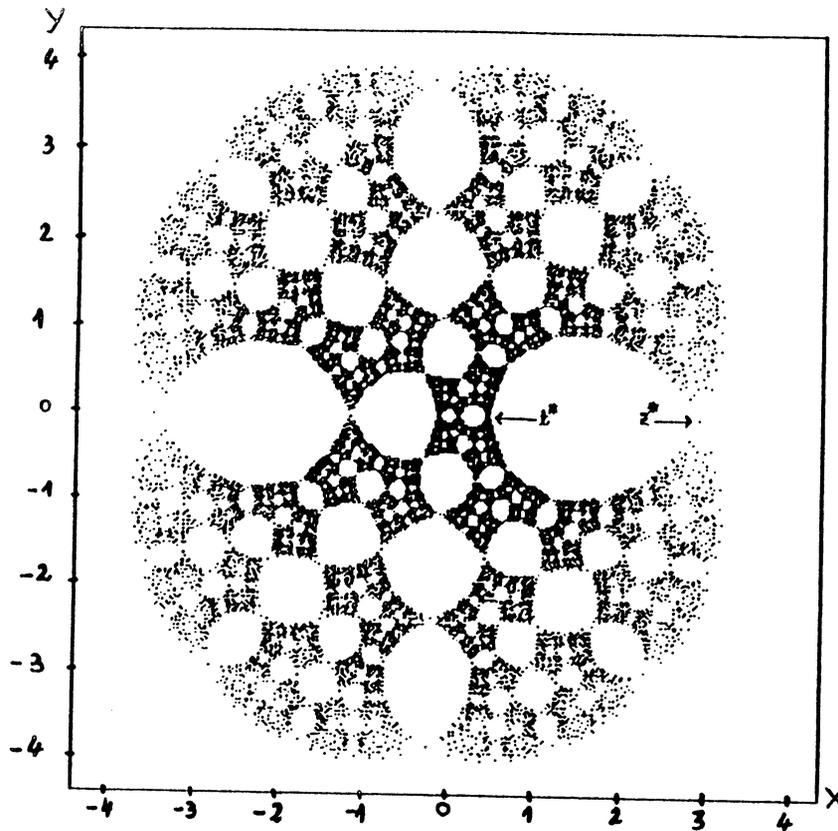
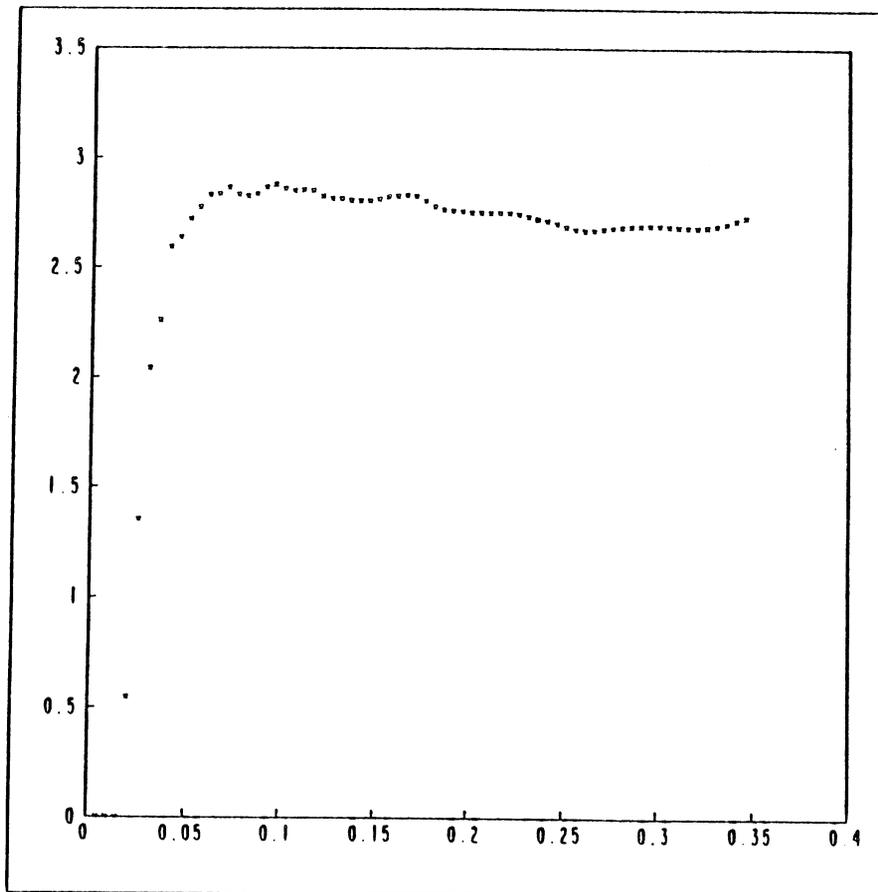


FIGURE 10 :

JULIA SET OF $R(z)$ WITH $Q=3/2$ FIGURE 11: (69) points $(h, \alpha(h))$ AROUND $T^* = 0.4525$

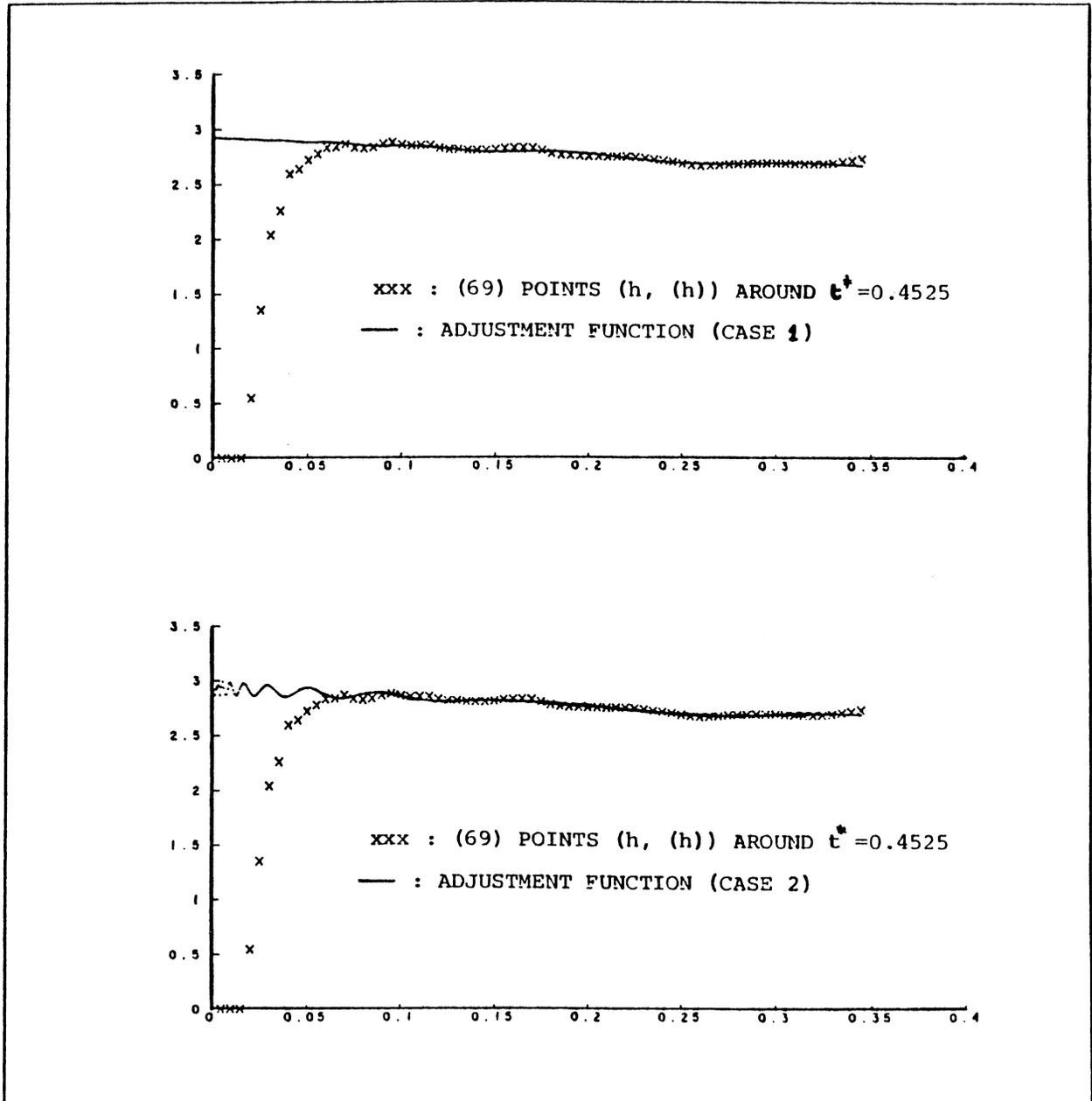


FIGURE 12

Commentaires

Les oscillations du nuage $(h, \alpha(h))$ autour de t^* (voir fig. 11) étant moins "prononcées" que dans le cas $q=2$ (fig. 6), on relève ici que les valeurs extrapolées de α résultant des 4 derniers ajustements sont proches l'une de l'autre .

En figure 12, la fonction d'ajustement $F_1(h)$ (resp. $F_2(h)$) est tracée en même temps que le nuage initial $(h, \alpha(h))$ de la figure 11; le vecteur C (resp. U) est pris comme ci-dessus .

Complétant ces résultats, de nombreuses expériences effectuées en changeant le nombre (ν) de points à négliger nous permettent de dire que l'exposant critique β (ou α) de l'énergie libre f autour du point $z^*=3.0272\dots$ vérifie : $2.90 \leq \alpha \leq 2.93$.

II-6 CONCLUSION (Chap. I et II de la Partie A)

A travers le 1^{er} et le 2^e chapitre de la présente partie, on a décrit plusieurs méthodes de détermination numérique de la mesure locale $M(x,r)$ sous la forme $[r^\alpha \Psi(r)]$ autour d'un point x d'un compact E de $(\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C})$. Le test de ces différentes méthodes a porté essentiellement sur l'ensemble de Julia borné d'une fraction rationnelle complexe. Parmi elles, le procédé d'extrapolation apparaît comme étant le plus efficace .

Dans la recherche de l'exposant α de $M(x,r)$, on a été amené, pour des raisons numériques, à négliger certains points $(r, \alpha(r))$ avant l'ajustement par une fonction adaptée à la forme du nuage obtenu .

Sur certains exemples liés à la Physique Statistique, l'application de ce procédé nous fournit des résultats acceptables.

PARTIE B

OUTILS ALGORITHMIQUES POUR L'ETUDE LOCALE D'UN ENSEMBLE DE POINTS

***CHAPITRE I : PROBLEME DU "RANGE-SEARCHING"
ALGORITHME DU PAVAGE REGULIER (A.P.R)***

CHAPITRE II : APPLICATIONS DE L'A.P.R
- PROBLEME DU "VARIABLE DISK RETRIEVAL"
- DIMENSION FRACTALE



INTRODUCTION DE LA PARTIE B

Comme indiqué, et partiellement abordé, dans la partie précédente, notre travail consiste en l'élaboration d'**outils algorithmiques** pour l'étude locale d'ensembles E d'un espace euclidien (essentiellement \mathbb{R}^2 ou \mathbb{C}).

On a vu dans la même partie que pour déterminer numériquement la mesure locale $M(x,r)$ autour d'un point x de E , tous les algorithmes qui y étaient présentés nécessitaient l'acquisition des points de $(E \cap B(x,h))$ où $B(x,h)$ est une boule centrée en x et de rayon h .

Si E est formé d'un nombre N élevé de points, il s'avère donc utile de faire appel à des méthodes d'**accès rapide** à ses différentes régions. Ces méthodes rentrent dans le cadre de la **géométrie algorithmique**; on renvoie à l'ouvrage de F.P.Preparata et M.I.Shamos ([36]) pour une large retrospective sur cette nouvelle discipline.

Le problème d'accès rapide à une région d'un sous-ensemble quelconque d'un espace euclidien de dimension k , nommé problème du "Range-Searching" (cf. [27]), est traité au premier chapitre de cette partie B.

Pour fixer les idées, citons une application simple de ce problème en dimension 2 : La direction d'une société de N employés entreprend, pour des raisons de gestion, de "recenser" tous ceux dont le salaire mensuel S (en unité monétaire) et l'ancienneté A (en années) satisfont aux conditions : $S_1 \leq S \leq S_2$ et $A_1 \leq A \leq A_2$ avec la possibilité de changer (périodiquement par exemple) les valeurs des constantes (S_i) et (A_i) $i=1,2$.

En termes géométriques, les ouvriers forment un ensemble de points $E = \{(x_j, y_j), j=1..N\}$ où l'abscisse x_j (resp. l'ordonnée y_j) indique le salaire S (resp. l'ancienneté A) du j -ième ouvrier. La question est alors de reporter les points de E inclus dans un (ou des) rectangle(s) $R = [S_1, S_2] \times [A_1, A_2]$.

Parmi les méthodes proposées quant à la solution du problème du "Range-Searching" (voir [3]), on présente brièvement, en début de chapitre, celle du balayage séquentiel, la méthode dite de la projection ainsi que l'algorithme basé sur la structure "Range-Tree". Pour chacune d'elles, on met en évidence, tenant compte du grand nombre N de points de E , ses inconvénients soit dans le cas du mode dit **répétitif** (cf. [27]) (possession de plusieurs rectangles R), soit du point de vue de la place-mémoire exigée qui, souvent, est considérable.

Pour toutes ces raisons, on a mis au point un procédé de résolution, appelé Algorithme du Pavage Régulier (A.P.R), alliant une efficacité suffisante (en liaison avec N) et une implémentation relativement plus facile au regard de celle des précédentes méthodes.

On détaille par la suite ses performances, d'abord dans un contexte théorique, puis, à l'aide de nombreuses expériences numériques, d'un point de vue purement expérimental. Ce dernier domaine se révélera d'ailleurs comme étant l'avantage essentiel de l'utilisation de l'A.P.R pour résoudre le problème du "Range-Searching".

Si la région auquel on s'intéresse est un disque $D(x,r)$ (au lieu d'un rectangle), comme c'est le cas dans les méthodes de la partie A, reporter les points de $(E \cap D(x,r))$ est sensiblement plus difficile. Les algorithmes existants dans la littérature et destinés à trouver une solution rapide à ce problème (appelé "Variable Disk Retrieval Problem") sont rassemblés dans ([27]). Comme pour le problème du "Range-Searching", l'inconvénient de ces algorithmes réside dans le fait qu'ils sont d'exploitation ardue à cause de la grandeur de l'aire de stockage.

Pour notre part, une méthode se servant d'une technique de codage et faisant appel à notre algorithme précédent (A.P.R) est présentée au second chapitre de cette partie. On montrera de plus que la complexité de cette méthode est la même que celle de l'Algorithme du Pavage Régulier.

Dans le même chapitre, un procédé d'estimation de la dimension fractale ([29], [15]) d'attracteurs étranges de systèmes dynamiques ([20],[8]) et d'ensembles de Julia de fractions rationnelles ([6]) est proposé puis ensuite testé numériquement. Signalons pour terminer cette introduction, que l'A.P.R, utilisé sous certaines conditions, constitue encore l'ossature de ce procédé.

1- Problème du RANGE-SEARCHING : Contexte et définition .

1-1 Généralités :

Pour le calcul de la complexité des algorithmes de résolution de problèmes rentrant dans le cadre de la géométrie algorithmique ([36]), on tient compte généralement des 3 coûts suivants:

a) *Stockage* (noté $S(N)$) : C'est la place mémoire requise pour les données utilisées par l'algorithme.

b) *Temps de préconditionnement* ou *Preprocessing time* (noté $P(N)$) : temps nécessaire à l'organisation (ou préconditionnement) des données.

c) *Temps de réponse* ou *Query time* (noté $Q(N)$) : A une question Q relative au problème étudié, et dont les données sont éventuellement préconditionnées, $Q(N)$ désigne le temps mis, par l'algorithme utilisé, pour répondre à cette question .

N désignant ici la taille du problème, on s'intéressera dans toute la suite à l'analyse asymptotique de l'algorithme, c.a.d à son comportement lorsque N croît à l'infini. On introduit les notations suivantes:

On dira qu'un temps $T=T(N)$ est en $O(f(N))$ si :

$$\exists c > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} / T(N) \leq c f(N) \text{ pour } N \geq N_0.$$

De même, T est en $\theta(f(N))$ si :

$$\exists c_1, c_2 > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} / c_1 f(N) \leq T(N) \leq c_2 f(N) \text{ pour } N \geq N_0.$$

Ci-après, on illustre sur un exemple l'évaluation des 3 coûts précédents.

1-2 Exemple : Problème de la recherche du plus proche voisin (Nearest neighbor searching)

Dans le langage de la géométrie algorithmique, ce problème fait partie de la catégorie de problèmes dits de proximité ([27]) .

Dans \mathbb{R} , il peut être formulé ainsi:

" Soit $E = \{(x_i)\}$ $i \in [1, N]$ un ensemble de réels ; on veut trouver, parmi ces points, le plus proche voisin d'un point quelconque q "

On décrit ici 2 méthodes de résolution de ce problème.

Procédé 1 : Il consiste en le calcul du minimum des distances euclidiennes $d_i = d(q, x_i)$ $i \in [1, N]$. Aucun arrangement n'étant apporté aux points de E , on obtient donc $S(N) = Q(N) = O(N)$.

Procédé 2 :

Dans le cas où l'on est en possession de plusieurs points q à traiter, il est avantageux d'effectuer un préconditionnement sur les points de E , ceci afin de faciliter la recherche et donc d'avoir un meilleur temps de réponse. Pour cela, on ordonne les $(x_i)_{i \in [1, N]}$ par ordre croissant, d'où un temps de préconditionnement $P(N)$ en $O(N \log N)$ (cf. l'ouvrage de Knuth [23] pour les méthodes de tri). On termine par des opérations de dichotomie (ou binary-searching (voir aussi [23])) pour localiser les points q parmi les points de E ainsi triés ; le temps de réponse est par conséquent $Q(N) = O(\log N)$ ([19]). Les performances de cette méthode sont donc les suivantes: $S(N) = O(N)$, $P(N) = O(N \log N)$, $Q(N) = O(\log N)$.

Remarque : Sauf indication contraire, tous les logarithmes sont à base 2.

1-3 Position du problème du Range-Searching

A travers ce chapitre, on s'intéressera au problème nommé Range-Searching. Celui-ci fait partie de la catégorie appelée "Geometric Searching Problems" ([27]).

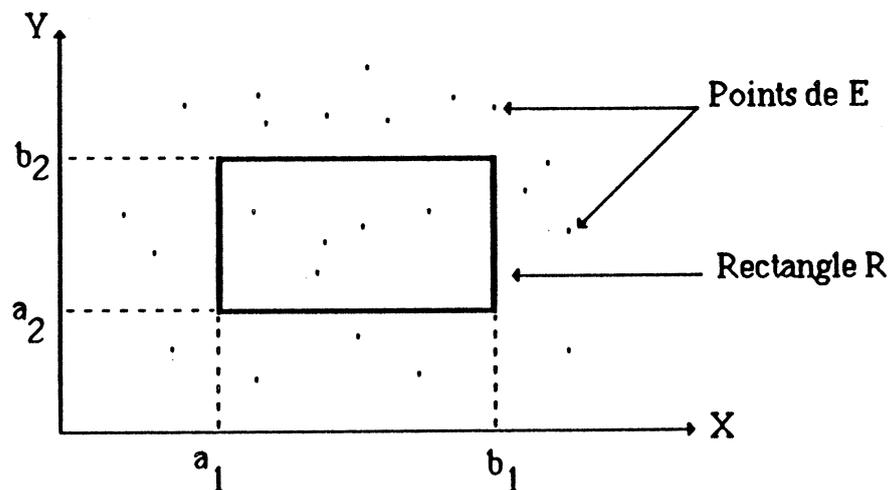
Formulation du problème :

Soit $E = \{(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki})\}_{i \in [1, N]}$, un sous-ensemble de points d'un espace euclidien de dimension k .

Plusieurs types de questions peuvent être demandées à propos de E , mais on n'en retiendra que celui relatif à des hyper-rectangles de l'espace considéré.

Le problème du Range-Searching s'énonce comme suit :

" Lister (ie reporter) rapidement les points de E inclus dans un hyper-rectangle quelconque et arbitraire $R = \prod_{j=1..k} [a_j, b_j]$ "



** Illustration du problème en dimension 2 .

En ce qui nous concerne, le domaine principal d'application de ce problème est l'étude locale d'un sous-ensemble du plan : mesure de densité, zoom numérique...etc. C'est le but de ce travail; pour d'autres domaines voir ([3]) et ([36]) .

remarque importante : Des objets différents des hyper-rectangles peuvent aussi être considérés, par exemple: cercle, polygone...etc. Ces cas sont exposés dans le livre de synthèse de F.P.Preparata et M.I.Shamos ([36]) et traités séparément dans ([4]) et par Willard ([40]) .

2- Trois algorithmes de résolution du problème du Range-Searching.

Pour réaliser cette étude et tenant compte du nombre de points N de l'ensemble E qui peut être très grand ($\sim 10^5$), on veut mettre au point une méthode de résolution du problème précédent, réellement implémentable et ayant une efficacité suffisante.

Ci-après, on décrit sommairement quelques méthodes avec évaluation des performances de chacune d'elles.

2-1 Méthode 1 : Balayage séquentiel (cf. [3])

Cette méthode naturelle consiste en ce qui suit :

Les N points de E étant stockés séquentiellement (dans un fichier ou dans un tableau), on répond à une question Q relative à un rectangle quelconque et arbitraire R en testant, pour chaque point, son appartenance au rectangle R .

Performances de la méthode: Comme elle ne fait pas intervenir une quelconque opération de préconditionnement sur les points de E , on a bien

$$S(N) = Q(N) = \theta(kN) (= \theta(N)) .$$

Commentaires: Si la taille du problème (ie: N) est petite ou si une grande proportion des N points est incluse dans R , alors ce procédé est performant. Mais, dans le cas général, les coûts donnés ci-dessus sont optimaux.

2-2 Méthode 2 : Méthode dite de projection ([3])

On commence par trier, selon l'ordre croissant, les points de E par rapport à chaque coordonnée $(x_j)_{j \in [1,k]}$. Pour $j \in [1,k]$ et sur chacune des k précédentes listes, on localise, par la méthode du binary searching, les points a_j et b_j : soit alors n_j ($n_j \leq N$) le nombre de points de E vérifiant $a_j \leq x_{ji} \leq b_j$ pour $i \in [1,N]$. On applique, pour terminer, la méthode du balayage séquentiel sur la sous-liste contenant $n = \min_{j \in [1,k]} (n_j)$ points de E .

Complexité de l'algorithme :

- (i) Stockage des k coordonnées des points de E , d'où : $S(N) = O(kN)$
- (ii) Tri des k coordonnées des N points de E , d'où $P(N) = O(k N \log N)$
- (iii) Temps de réponse $Q(N)$: Dans le pire des cas, ce temps est en $O(kN)$ (c.a.d en $O(N)$).

Commentaires: L'algorithme de projection s'avère avantageux si un des rangs de l'hyper-rectangle R considéré (ie correspondant à une des k coordonnées de l'espace de travail) exclut une grande partie des N points de E . Ceci suppose donc la possession d'informations sur la disposition de ces points, mais ce n'est pas le cas en général.

2-3 Méthode 3 : Algorithme basé sur la structure "Range-tree" (cf. [36] , [27] , [3])

La structure "**Range-tree**", notée $RT(k)$ en dimension k ($k \geq 1$), se définit récurivement : $RT(k)$ se construit en termes de $RT(k-1)$. On commence donc par définir $RT(1)$.

Elle consiste en un tableau T de taille N contenant les éléments de E ordonnés selon l'ordre ascendant .

L'algorithme basé sur $RT(1)$ se décrit alors facilement : Sachant que dans le cas $k=1$, l'hyper-rectangle R est un intervalle $[a,b]$, deux opérations de binary searching (coût : $O(\log N)$) sont nécessaires pour localiser a et b dans le tableau T . Les points cherchés sont par conséquent ceux compris entre ces 2 points .

Coûts de l'algorithme :

On a évidemment $S(N) = O(N)$, $P(N) = O(N \log N)$; si le nombre de points trouvés dans R est F , alors le temps de réponse $Q(N) = O(F + \log N)$.

remarque : Notons que l'algorithme décrit ci-dessus est précisément la méthode de la projection en dimension 1 .

** Description de la structure $RT(2)$: (ie en dimension $k=2$)

On commence d'abord par donner la définition suivante :

Définition : On appellera médiane d'un ensemble $\{Z_j\}_{j \in [1,p]}$ de p points, le point Z_u où $u = \lfloor p/2 \rfloor$.

Signalons que, pour $k=2$, $E = \{(x_i, y_i)\}_{i \in [1,N]}$ et le rectangle R est de la forme $[a,b] \times [c,d]$. La structure ($RT(2)$) fait appel, comme indiqué plus haut, au tableau T de $RT(1)$.

Elle est représentée par un arbre binaire dans lequel , à chaque noeud, on associe , en plus des 2 arêtes (gauche et droite) :

- une valeur v appelée valeur discriminatoire
- un tableau T de taille maximale N

Explicitons cette structure en commençant par la racine de l'arbre binaire :

Ce premier noeud contient les N points de E arrangés par ordre croissant des ordonnées, on lui associe ensuite :

- une valeur v égale à la médiane de ces ordonnées
- un tableau T où l'on stocke, triés par abscisse croissante, tous les points de E .

L'arête gauche (resp. droite) de la racine pointe sur tous les points (x,y) de E dont l'ordonnée vérifie: $y \leq v$ (resp. $y > v$). A chacune de ces 2 arêtes, on associe une valeur discriminatoire et un tableau T contenant leurs points respectifs ordonnés par abscisse croissante. Signalons au passage que le nombre de ces points est approximativement $(N/2)$

Le partitionnement des $(N/2)$ points de chaque arête continue suivant le même procédé que pour les N points de la racine de l'arbre .

En résumé, pour $s \in [0, t]$ où $t \leq (1 + \lfloor \log N \rfloor)$, on a :

Au niveau s (inclus celui de la racine), $\exists 2^s$ sous-arbres dont chacune des 2 arêtes représente $(N/2^s)$ points de E organisés comme ceux de la racine. Retenons que le nombre maximal de niveaux est $(1 + \lfloor \log N \rfloor)$ donc en $O(\log N)$.

-- **Fonctionnement de l'algorithme basé sur RT(2) :**

Il faut d'abord remarquer que chaque noeud de l'arbre binaire définit implicitement un intervalle $[Y_1, Y_2]$ selon les ordonnées des points qu'il représente, ainsi qu'une valeur discriminatoire v .

Afin de reporter les points de E inclus dans le rectangle $R=[a,b] \times [c,d]$, on distingue, en traitant ce noeud, les 3 cas suivants :

(i) $[Y_1, Y_2] \subseteq [c, d]$: On recherche alors, dans le tableau T qui lui est associé, tous les points (x, y) vérifiant : $a \leq x \leq b$.

(ii) $[Y_1, Y_2] \cap [c, d] \neq \{\emptyset\}$ mais l'inclusion (i) est non satisfaite :

On traite alors les 3 sous-cas qui suivent :

α) $v > d \Rightarrow$ examen de l'arête gauche du noeud

β) $v < c \Rightarrow$ examen de l'arête droite du noeud

γ) $v \in [c, d] \Rightarrow$ examen des 2 arêtes du noeud

(iii) $[Y_1, Y_2] \cap [c, d] = \{\emptyset\} \Rightarrow$ non traitement du noeud.

Performances de cet algorithme :

+ **Place mémoire** : en chacun des $O(\log N)$ niveaux, on doit stocker les $(2N)$ coordonnées des points de $E \Rightarrow S(N) = O(2N \log N)$ (donc en $O(N \log N)$)

+ **Preprocessing-time** : Ordonnancement des N points de E par rapport à chaque coordonnée $\Rightarrow P(N) = O(2N \log N) = S(N)$

+ **Temps de réponse** (ou Query-time) :

D'après l'analyse faite ci-dessus sur le fonctionnement de l'algorithme, au plus 2 opérations de binary searching (coût : $O(\log N)$) sont effectuées en chacun des $O(\log N)$ niveaux; la recherche des points de E inclus dans R se fait donc en un temps $Q(N) = O(F + \log^2 N)$ où F est le nombre de points trouvés dans le rectangle R .

--- **Exemple d'arbre binaire ayant la structure RT(2) .**

Ci-après figure l'arbre binaire, construit selon cette structure, sur un ensemble $E = \{t_i = (x_i, y_i), i=1..8\}$.

Ces points sont dessinés dans le plan selon leur ordonnée croissante (voir schéma A). Dans le schéma B, on les représente à chaque noeud de l'arbre. Le contenu du tableau T correspondant à ce noeud est indiqué entre les 2 arêtes de celui-ci.

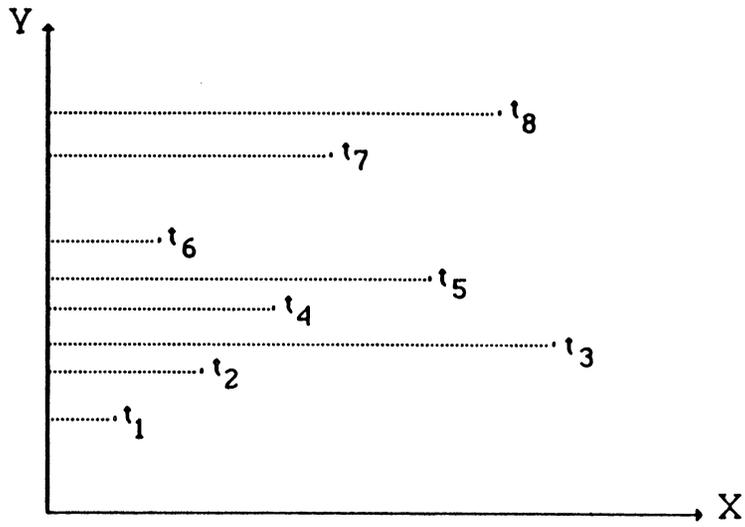


schéma A .

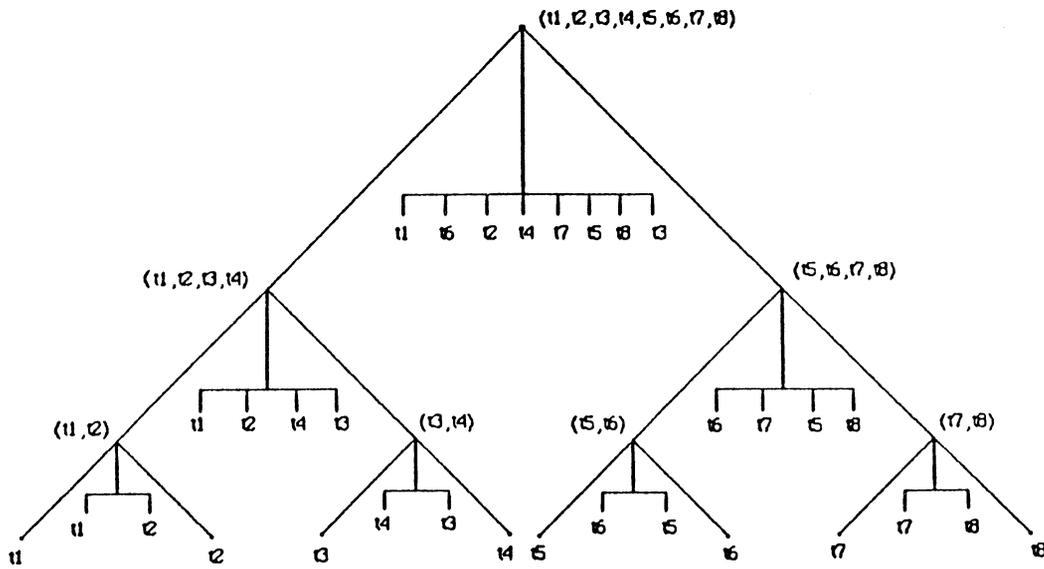


schéma B.

(les tableaux T sont symbolisés par $\overline{\text{TTT}}$)

**** Généralisation : description de la structure RT(k) pour $k \geq 3$.**

Il suffit pour cela de la présenter pour $k=3$; le passage aux dimensions supérieures se fait alors suivant le même procédé .

La structure RT(3) se déduit de celle de RT(2) : elle consiste en effet en un arbre binaire dont les points de chaque noeud sont triés suivant l'ordre croissant de leur 3^e coordonnée .

On associe ensuite à ce noeud :

- une valeur discriminatoire v égale à la médiane des (3^e coordonnée des points) qu'il représente .
- un arbre binaire binaire construit selon RT(2) sur les 2 premières coordonnées des points du noeud .

**** Coûts de l'algorithme basé sur RT(k) ($k \geq 2$) .**

Une analyse identique au cas de RT(2) nous donne les performances suivantes :

- $S(N) = P(N) = O(k N \log^{(k-1)} N)$ (ie: en $O(N \log^{(k-1)} N)$)
- $Q(N) = O(F + \log^k N)$ où F est le nombre de points reportés dans R .

Commentaires .

Bien que l'algorithme basé sur la structure "Range-tree" ait un meilleur temps de réponse que celui des 2 précédemment présentés, il utilise néanmoins un espace mémoire (et aussi un temps de préconditionnement) relativement élevé pour N grand.

A titre d'exemple, si un réel est codé sur 4 octets , alors (10^5) points de \mathbb{R}^2 nécessitent une place mémoire de plus de 13 méga-octets.

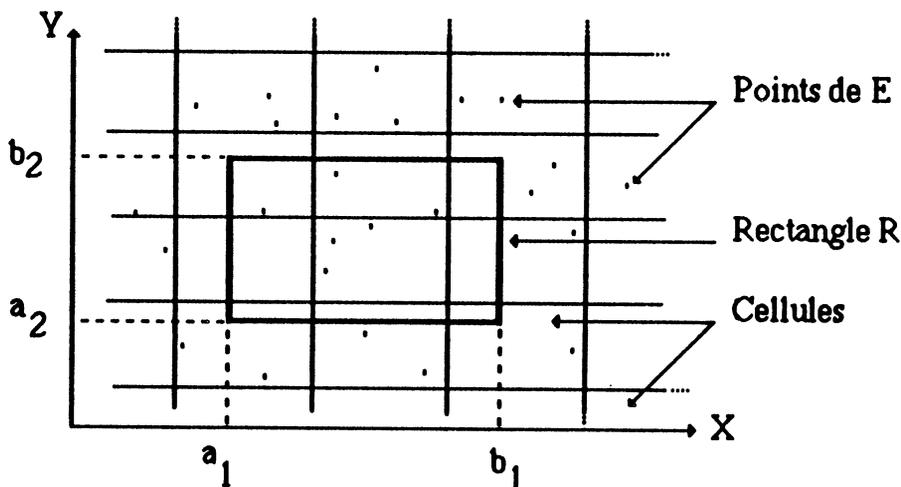
3- Résolution du problème du Range-Searching : Méthode des cellules

Pour résoudre ce problème, on décrit à travers ce paragraphe un algorithme basé sur la notion de cellule. On détaillera ensuite ses performances d'un point de vue théorique et expérimental.

3-1 Principe de la méthode.

Cette technique consiste en une subdivision en hyper-rectangles (ou cellules) de l'espace euclidien de dimension k ($k \geq 1$). Pour répondre à une question relative à un rectangle $R = \prod_{j=1..k} [a_j, b_j]$ sur un sous-ensemble E de N points, seuls les points des cellules intersectant R sont testés.

Ci-dessous, un schéma illustrant cette méthode est présenté dans le cas $k=2$.



Ceci suppose donc que, dans la liste des N points de E , on peut accéder **directement** aux points d'une cellule donnée de la subdivision (cf. [3] pour davantage de détails).

3-2 Bref historique de la méthode.

Les paramètres de base de cette technique sont la **forme** et la **taille** des cellules de la subdivision adoptée.

Pour trouver les points inclus dans R , il faudra notamment tenir compte des coûts suivants:

- + Nombre d'accès aux cellules
- + Tests d'inclusion (dans R)

Ce côté de la question, ainsi que la proposition de quelques types de subdivision ont été traités dans ([3] et [5]). Un autre genre de partitionnement en cellules de l'espace est présenté dans (Yuval [41]). L'étude de la complexité de l'algorithme basé sur ce partitionnement a été par la suite développée par le même auteur (cf. [42]).

La section 3 qui suit est consacrée à la description puis l'analyse d'un algorithme utilisant la notion de cellule dans le cas $k=2$.

Le nombre N de points à traiter, étant très grand, nous impose cette méthode pour des problèmes de mémoire.

3-3 Description et analyse de l'algorithme du PAVAGE REGULIER.

1- Rappel du problème du Range-Searching en dimension 2 - notations.

Soit $E = \{t_i = (x_i, y_i), i \in [1, N]\}$ un sous-ensemble quelconque de points du plan. Les points de cet ensemble étant supposés stockés dans un tableau T , on se propose de les organiser afin de lister rapidement ceux inclus dans un rectangle quelconque et arbitraire $R = [a, b] \times [c, d]$.

N étant fini, \exists 4 réels non uniques qu'on notera par X_1, X_2, Y_1 et Y_2 tels que $E \subseteq [X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2] = \mathfrak{D}$. On pourrait, par exemple, prendre : $X_1 = \min(x_i)$, $X_2 = \max(x_i)$, $Y_1 = \min(y_i)$ et $Y_2 = \max(y_i)$ pour $i \in [1, N]$.

Introduisons les paramètres suivants afin de paver le domaine \mathfrak{D} :

n (resp. m) = nombre de subdivisions sur $[X_1, X_2]$ (resp. sur $[Y_1, Y_2]$)

Δx (resp. Δy) = longueur d'une subdivision sur $[X_1, X_2]$ (resp. sur $[Y_1, Y_2]$)

ie : $\Delta x = (X_2 - X_1)/n$ et $\Delta y = (Y_2 - Y_1)/m$.

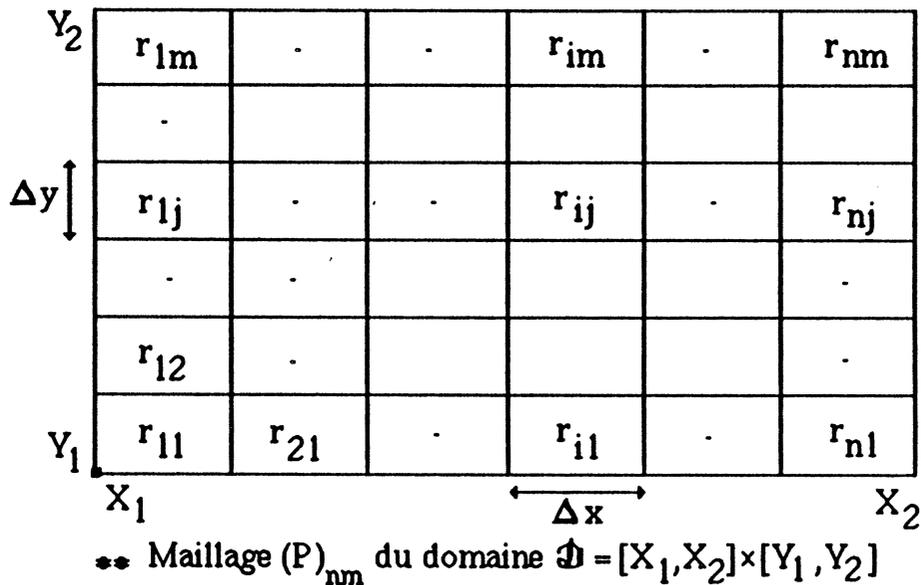
Le maillage (noté dorénavant $(P)_{nm}$) du domaine \mathfrak{D} , dessiné ci-après, est formé de (nm) cellules disjointes $(r_{ij})_{(i,j) \in [1,n] \times [1,m]}$ où :

$r_{ij} = [X_1 + (i-1)\Delta x, X_1 + i\Delta x] \times [Y_1 + (j-1)\Delta y, Y_1 + j\Delta y]$ si $(i,j) \in [1, n-1] \times [1, m-1]$

$r_{ij} = [X_1 + (i-1)\Delta x, X_2] \times [Y_1 + (j-1)\Delta y, Y_1 + j\Delta y]$ si $i=n$ et $j \in [1, m-1]$

$r_{ij} = [X_1 + (i-1)\Delta x, X_1 + i\Delta x] \times [Y_1 + (j-1)\Delta y, Y_2]$ si $j=m$ et $i \in [1, n-1]$

$r_{ij} = [X_1 + (i-1)\Delta x, X_2] \times [Y_1 + (j-1)\Delta y, Y_2]$ si $i=n$ et $j=m$.



Important : Sauf indication contraire on prendra $n \ll N$ et $m \ll N$, par exemple $n=m=100$ et $N=10^5$.

notation: Pour $(i,j) \in [1,n] \times [1,m]$, $|r_{ij}|$ désigne le nombre de points de E appartenant à la cellule r_{ij} .

2- Algorithme du PAVAGE REGULIER (en abrégé A.P.R)

On présente dans ce qui suit une méthode de résolution du problème du Range-Searching basée sur le partitionnement de $\mathcal{D} \supset E$ selon le pavé $(P)_{nm}$ ci-dessus. On évaluera ensuite les coûts suivants :

- $S(N,n,m)$ = espace mémoire total requis aux données utilisées par la méthode .
- $P(N,n,m)$ = Temps de préconditionnement des N points de l'ensemble E selon $(P)_{nm}$. Notons que ce temps doit inclure celui, en $O(N)$, nécessaire à la recherche des extrêmes X_1, X_2, Y_1 et Y_2 formant le domaine \mathcal{D} .
- $Q(N,n,m)$ = Temps de réponse à un rectangle quelconque et arbitraire R .

Pour $(i,j) \in [1,n] \times [1,m]$, on définit, dans un tableau T contenant les N points de E (cf. le schéma qui suit), 2 pointeurs notés $P_1(i,j)$ et $P_2(i,j)$ qui désignent, après l'opération de préconditionnement, respectivement le premier et le dernier point de la cellule r_{ij} . Ces 2 entiers sont simultanément positifs (resp. nuls) si $|r_{ij}| > 0$ (resp. si $|r_{ij}| = 0$).

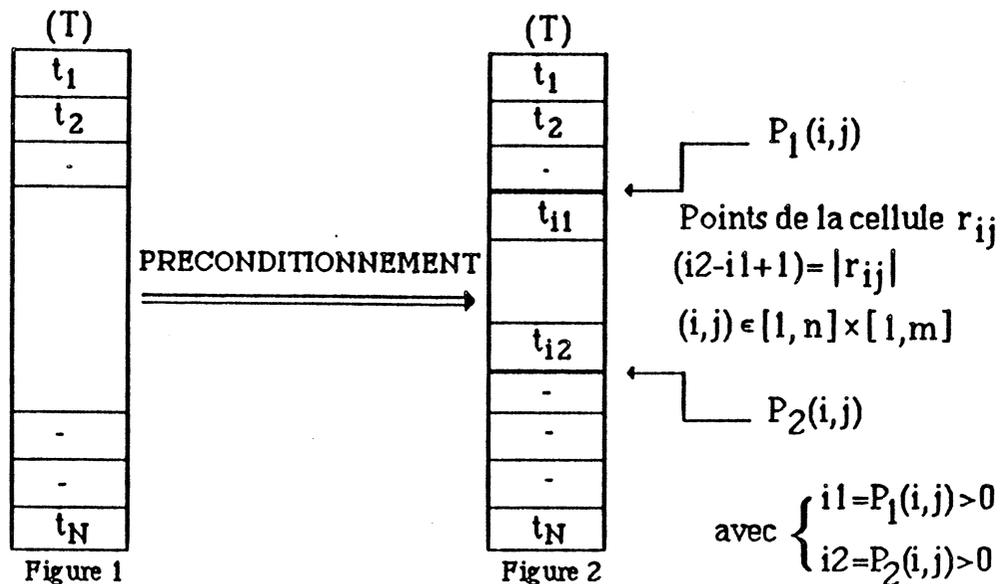
remarque importante :

Il est facile de voir qu'on peut ramener le nombre de ces pointeurs de $(2nm)$ à $(nm-1)$. En effet, d'après la construction même du pavé $(P)_{nm}$ (dessin précédent), il suffit de connaître uniquement les $P_1(i,j)$ $(i,j) \in [1,n] \times [1,m]$ où $P_1(1,1)$ (resp. $P_2(n,m)$) est connu et égal à 0 ou 1 (resp. 0 ou N) selon que $|r_{11}|$ (resp. $|r_{nm}|$) est égal à 0 ou non .

Les $P_2(i,j)$, pour $(i,j) \in ([1,n] \times [1,m])$ mais différents de $(1,1)$ et (n,m) , se déduisent alors des $P_1(i,j)$ (supposés non nuls) comme suit :

$$P_2(i,j) = \begin{cases} P_1(i,j+1) - 1 & \text{si } (i,j) \in [1,n] \times [1,m-1] \\ P_1(i+1,1) - 1 & \text{si } j=m \text{ et } i \in [1,n-1] \end{cases}$$

L'opération de préconditionnement des N points $t_i=(x_i,y_i)$ de E , initialement stockés dans T , peut être alors représentée par le schéma suivant :



De là, les principales étapes de l'algorithme sont :

(i) Stockage des N points de E dans un tableau T (figure 1) .

(ii) Localisation, selon un procédé A , de chaque point $t=(x,y)$ de E dans une des cellules du pavé $(P)_{nm}$; on en tire les quantités $|r_{ij}|$ où $(i,j) \in [1,n] \times [1,m]$.

Il est utile de signaler que A ne comporte que des opérations élémentaires du type addition, division et test logique .

(iii) Détermination, tenant compte des $|r_{ij}|$ de (ii), des pointeurs $P_1(i,j)$ et $P_2(i,j)$ où $(i,j) \in [1,n] \times [1,m]$.

(iv) Avec les pointeurs issus de (iii), on réordonne les N points de E comme le montre la figure 2. Ceci nécessite donc l'utilisation d'un tableau intermédiaire du même type que T .

Signalons, pour terminer cette description, que le sous-programme (écrit en langage PASCAL) explicitant ces 4 étapes figure à la fin de ce chapitre.

3- Evaluation des performances de l'algorithme.

- **Stockage** : Comme il faudra stocker (dans T et dans un tableau intermédiaire) les $(2N)$ coordonnées des points de E , les (nm) nombres $|r_{ij}|$ et les $(nm-1)$ pointeurs $P_1(i,j)$ (voir la remarque précédente), on obtient que:

$$S(N,n,m) = O(4N+2nm) \text{ (donc en } O(N+nm)\text{)}.$$

- **Preprocessing-time** : Cette opération consiste en

α) Le temps, en $O(N)$, de recherche des coordonnées X_1, X_2, Y_1 et Y_2 du domaine \mathcal{D} incluant E .

β) Un appel du procédé A pour chacune des coordonnées des points de E . Alors, d'après la remarque de l'étape (ii) de l'algorithme, ceci se fait en un temps linéaire par rapport à N

γ) La détermination des $(nm-1)$ pointeurs : coût en $O(nm)$

δ) La Réaffectation, après utilisation d'un tableau intermédiaire, des N points de E dans T en tenant compte des pointeurs : temps en $O(2N) = O(N)$.

Le temps de préconditionnement est, par conséquent, la somme des coûts de chacune des 4 étapes α, β, γ et δ d'où : $P(N,n,m) = O(N+nm)$.

- **Temps de réponse** :

1) **Temps de réponse théorique** : Pour répondre à une question Q relative à un rectangle $R=[a,b] \times [c,d]$, on procède comme suit :

(i) Localiser les 4 points (a,b,c,d) du plan dans le pavé $(P)_{nm}$; autrement dit, déterminer la cellule r_{ij} du pavé qui contient chacun de ces points. Le coût de l'opération de localisation (c.a.d du procédé A) est négligeable devant n, m et N : on n'en tiendra donc pas compte dans le coût total du temps de réponse $Q(N,n,m)$.

(ii) Il nous faudra distinguer ensuite les 2 cas suivants :

(*) Le rectangle R coïncide avec L cellules du pavé $(P)_{nm}$ ($L \leq nm$), notons les (R_s) $s \in [1,L]$. Il suffit alors, dans ce cas, de reporter à partir du tableau T , les $|R_s|$ points de chaque cellule R_s et cela suivant les pointeurs de chacune d'elles. On

résume ceci en écrivant : $Q(N,n,m) = O(\sum_{s=1..L} (|R_s|)) = O(F)$ où F désigne le nombre total de points (de E) inclus dans ces L cellules .

(**) Si le rectangle R chevauche sur L cellules R_s $s \in [1,L]$ du pavé $(P)_{nm}$:

$R \cap (R_s) \neq \{\emptyset\}$ pour $s \in [1,L]$; on teste alors, parmi les $|R_s|$ points (x,y) de chaque cellule R_s , ceux vérifiant les 2 inégalités (notées (#)) : $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$.

Si l'on note par : $F = \sum_{s=1..L} (|R_s|)$, $F_1 (\leq F)$ le nombre de points vérifiant (#), W le coût total des tests effectués sur les F points, on obtient que :

$$Q(N,n,m) = O(W+F_1) = O(F_1) \text{ car on a forcément } W < F_1 .$$

--- pire des cas : Si les R_s $s \in [1,L]$ cellules contiennent F points où F est de l'ordre de N , alors $Q(N,n,m)$ est en $O(N)$.

2) *Temps de réponse expérimental* : L'intérêt de notre méthode est, comme nous le verrons par la suite, que le temps de réponse est en fait, expérimentalement, en $O(F)$ où F est le nombre de points dans le rectangle .

Important : Si le pavé $(P)_{nm}$ choisi est très fin, ie que n et m sont de l'ordre de N , alors $S(N) = O(N^2)$. Pour N grand, l'aire de stockage est très élevée, d'où l'inefficacité de la méthode du PAVAGE REGULIER dans ce cas précis. Il faut quand même remarquer que les performances données ci-dessus restent inchangées si le produit (nm) est de l'ordre de N . Ces points mettent en évidence l'importance des nombres de subdivisions n et m du maillage .

Résumé des performances de l'A.P.R. : Les résultats de cette section (3-3) nous permettent d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 1 : Soit E un ensemble de N points dans un espace euclidien bidimensionnel. Sur un domaine \mathcal{D} contenant cet ensemble, considérons le MAILLAGE REGULIER formé de n et m subdivisions suivant chaque coordonnée avec n (et m) $\ll N$; alors :

Il existe un algorithme basé sur ce pavage et qui résout le problème du Range-Searching sur E avec comme performances :

$$\begin{aligned} * S(N,n,m) &= P(N,n,m) = O(N+nm) \\ * Q(N,n,m) &= \begin{cases} Q(N) = O(N) & \text{(dans le pire des cas)} \\ Q(N) = O(F) & \text{(expérimental)} \end{cases} \\ &\text{avec } F \text{ le nombre de points reportés.} \end{aligned}$$

Généralisation à d'autres dimensions.

Suivant le même processus et avec une analyse identique à la précédente (cas où la dimension k de l'espace de travail est 2), on peut élargir le champ d'application de la méthode du PAVAGE REGULIER à d'autres dimensions ($k \geq 1$) .

On en donne ci-après la généralisation :

Proposition 2: Soit E un sous-ensemble de N points dans un espace euclidien de dimension $k \geq 1$. Immergeons E dans un hyper-rectangle \mathcal{H} de cet espace et notons par $(n_i)_{i \in [1,k]}$ le nombre de subdivisions sur chaque coordonnée de cet hyper-rectangle, où $n_i \ll N \quad i \in [1,k]$.

Il existe alors un algorithme, basé sur ce maillage de \mathcal{H} , qui résoud le problème du **Range-Searching** sur E et ayant les performances :

- * $S(N, n_1, n_2, \dots, n_k) = P(N, n_1, n_2, \dots, n_k) = O(N + \prod_{i=1..k} (n_i))$
- * Dans le pire des cas $Q(N, n_1, n_2, \dots, n_k) = Q(N) = O(N)$.

3-4 Expérimentations numériques sur le TEMPS DE REPONSE.

La dernière section de ce chapitre est consacrée à la présentation de résultats numériques issus de l'application de l'Algorithme du Pavage Régulier (A.P.R) à quelques ensembles de points du plan contenant un grand nombre de points.

(a) Introduction

D'abord, il nous faut signaler que le programme exploitant notre algorithme a été mis au point et écrit en langage PASCAL sur le D.P.S 8 (système Multics) du C.I.C.G.

Les ensembles de points E choisis lors des expérimentations sont de 2 types :

(i) ensemble de Julia J d'une fraction rationnelle complexe (cf. Chap. I)
deux exemples de ce type sont présentés ici:

1) Ensemble de Julia de la fraction $(1/4) [u + (1/u)]^2$

2) Ensemble de Julia du polynôme $u^2 + (1/4)$ où $u \in \mathbb{C}$

(ii) attracteur étrange d'un système dynamique ([20])

3) Attracteur de Hénon: celui-ci est engendré par l'application

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (1 + y - 1.4 x^2, 0.3 x)$$

Nota: Le nombre total N de points de chaque ensemble est pris égal à $(2^{16}) = 65536$.

(b) Description des expériences

Pour chacun des 3 exemples ci-dessus, on choisit, en tenant compte de la symétrie et de la répartition des points de l'ensemble E correspondant, et d'un domaine \mathcal{D} fixé le contenant, des rectangles $R = [a, b] \times [c, d]$ en plusieurs régions de cet ensemble. On évalue ensuite :

- le temps nécessaire au préconditionnement des N points de E
- le temps de recherche des points de E inclus dans chaque rectangle R .

Afin de comparer les différentes performances, on calculera le temps de réponse $Q(N)$ relatif à chaque rectangle choisi sur les 3 ensembles par le biais de la méthode du balayage séquentiel décrite au début de ce chapitre.

Tous les temps étant donnés en secondes C.P.U., on tracera, pour un triplet (E, n, m) fixé, la variation du temps de réponse $t = Q(N, n, m)$ en fonction du nombre de points (noté nb) inclus dans les rectangles R pris sur E .

(c) Coordonnées des rectangles R sélectionnés

On donne ci-après les coordonnées des régions R choisies sur chacun des 3 ensembles E ci-dessus ainsi que celles du domaine \mathcal{D} correspondant .

Exemple 1 : $J(0.25 (u+1/u)^2)$ avec $\mathcal{D} = [-4.5,4.5] \times [-4.5,4.5]$
(7 rectangles)

- région 1 : $[0,0.62] \times [0,0.75]$ contient 8136 points (notée rect1)
- région 2 : $[0,1.375] \times [0.85,2.11]$ contient 4092 points (notée rect2)
- région 3 : $[0.80,1.60] \times [2.15,2.85]$ contient 1025 points
- région 4 : $[-1.5,-1] \times [0,0.75]$ contient 0 point
- région 5 : $[3,3.5] \times [0,0.83]$ contient 61 points
- région 6 : $[-3.5,-1] \times [-4,-1.5]$ contient 2763 points
- région 7 : $[0,2] \times [-2.75,-1]$ contient 5811 points .

Exemple 2 : $J(u^2+0.25)$ avec $\mathcal{D} = [-1.1,1.1] \times [-1.1,1.1]$
(7 rectangles)

- région 1 : $[0,0.25] \times [0.75,1.08]$ contient 2096 points
- région 2 : $[-0.875,-0.625] \times [0.25,0.50]$ contient 2569 points
- région 3 : $[0.40,0.625] \times [-0.0625,0.0625]$ contient 33 points
- région 4 : $[0.25,0.50] \times [-0.50,-0.25]$ contient 0 point
- région 5 : $[-0.75,-0.50] \times [-1,-0.625]$ contient 4277 points
- région 6 : $[0.25,0.33] \times [-1.08,-0.65]$ contient 1165 points
- région 7 : $[-1.08,-0.35] \times [-0.3,0.25]$ contient 3513 points .

Exemple 3 : Attracteur de Hénon avec $\mathcal{D} = [-1.35,1.35] \times [-0.45,0.45]$
(8 rectangles)

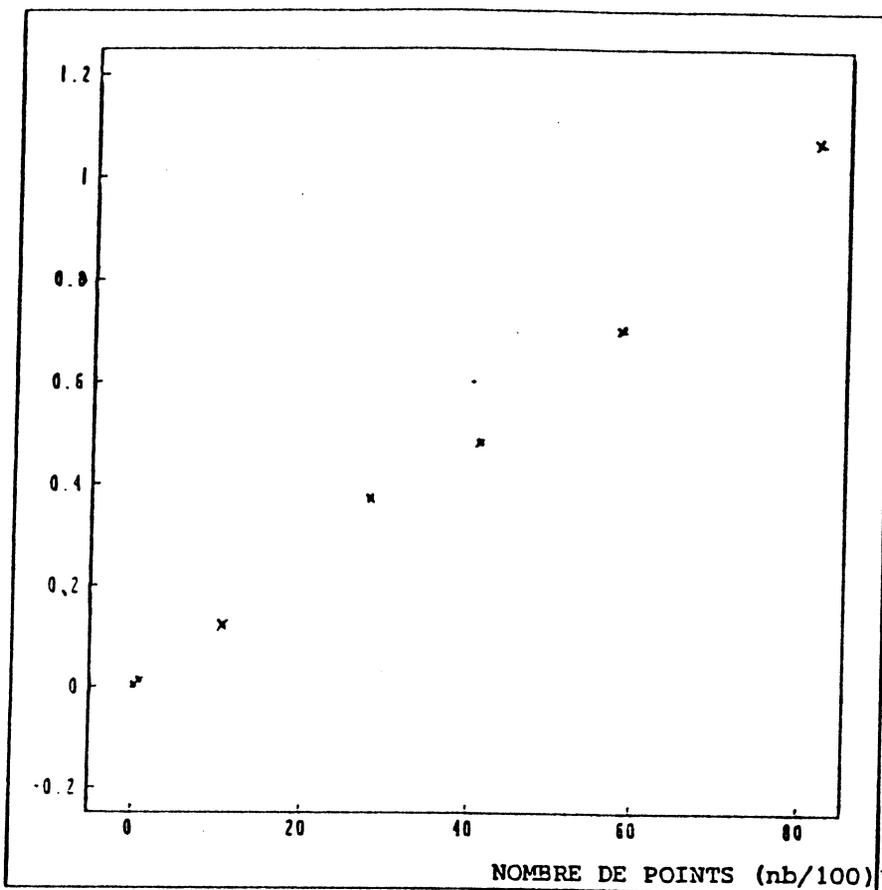
- région 1 : $[-1.3,-1] \times [0.333,0.39]$ contient 4497 points (notée henon1)
- région 2 : $[-0.3,-0.1] \times [0.20,0.266]$ contient 468 points
- région 3 : $[0.90,1] \times [0.066,0.135]$ contient 1727 points
- région 4 : $[0.85,1] \times [-0.066,0]$ contient 0 point
- région 5 : $[0.50,0.75] \times [0.15,0.21]$ contient 3613 points
- région 6 : $[0.62,0.64] \times [0.185,0.191]$ contient 121 points
- région 7 : $[0.1,0.3] \times [0.18,0.266]$ contient 2568 points .
- région 8 : $[-0.6,-0.35] \times [-0.3,-0.233]$ contient 998 points

(d) Résultats numériques et graphiques

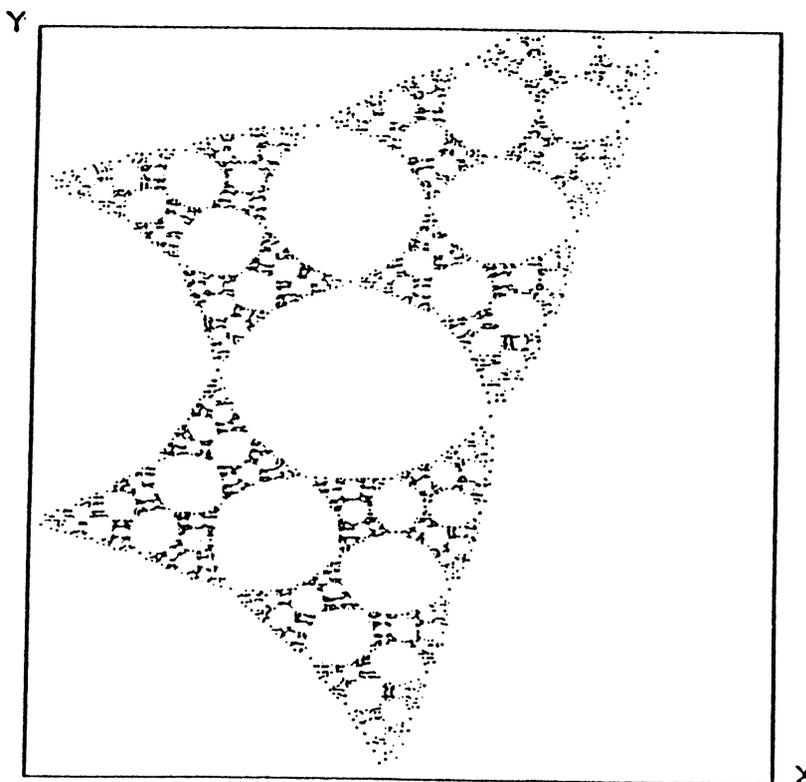
Pour un pavé $(P)_{nm}$ avec $n=m=50$, et sur chacun des 3 exemples, on dessine ci-après le nuage de points (nb,t) montrant la variation du temps de réponse $t=Q(N,n,m)$ en fonction du nombre de points (nb) contenus dans les régions prises sur l'ensemble associé à chaque exemple.

On fait remarquer que le temps de réponse, par application de la méthode séquentielle, pour n'importe quelle région d'un ensemble E contenant $N=65536$ points est constant et est égal à $t=6$ secondes C.P.U environ .

Signalons aussi que la région (rect1) de l'exemple 1 est aussi présentée.



Cas de l'ensemble de JULIA de $R(u)=0.25(u+1/u)^2$



$$(x, y) \in [0.00, 0.62] \times [0.00, 0.75]$$

région RECT1 de l'exemple ci-dessus

nb=8136 points t=1.07 Secondes C.P.U

FIGURE 1

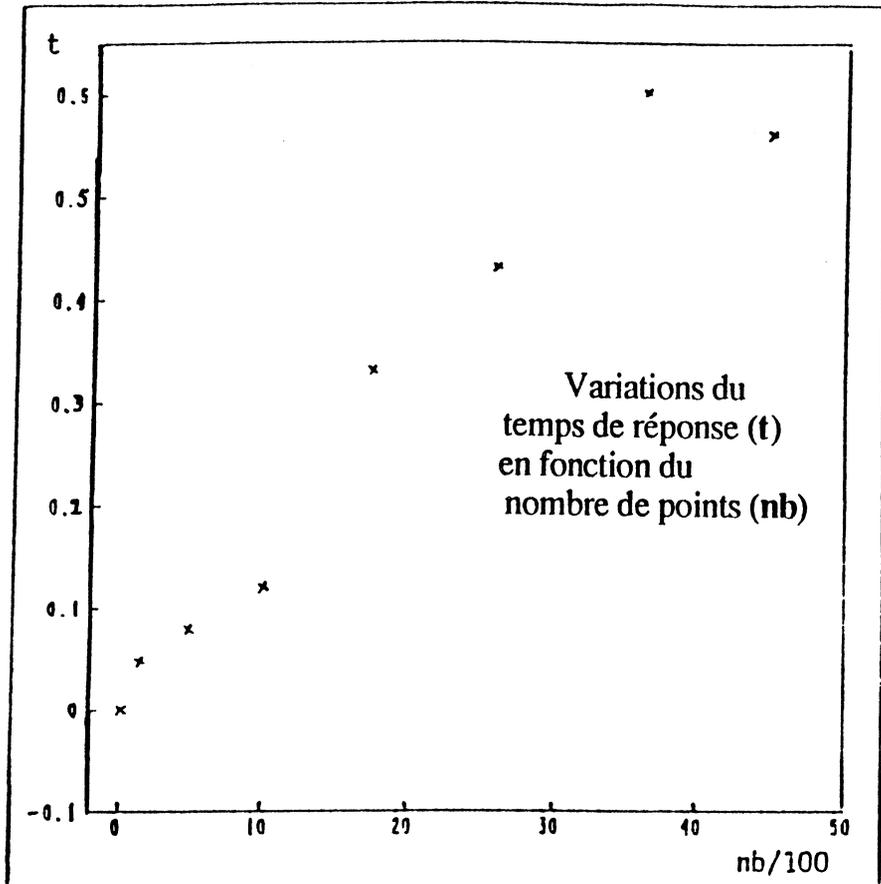


FIGURE 2

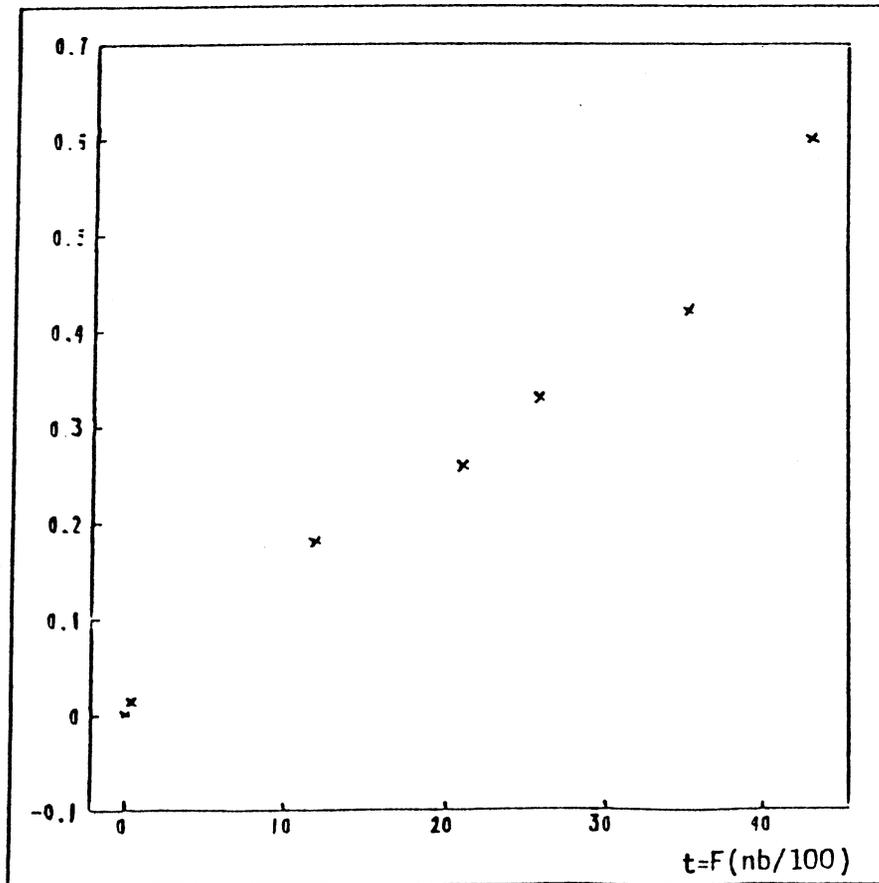


FIGURE 1: Cas de l'attracteur de HENON

FIGURE 2: Cas de l'ensemble de JULIA de $R(u) = u^2 + 0.25$

(e) Analyse et commentaires

Au vu de l'allure des nuages précédents ainsi que de résultats issus d'expériences ne figurant pas ici, on peut formuler les remarques suivantes :

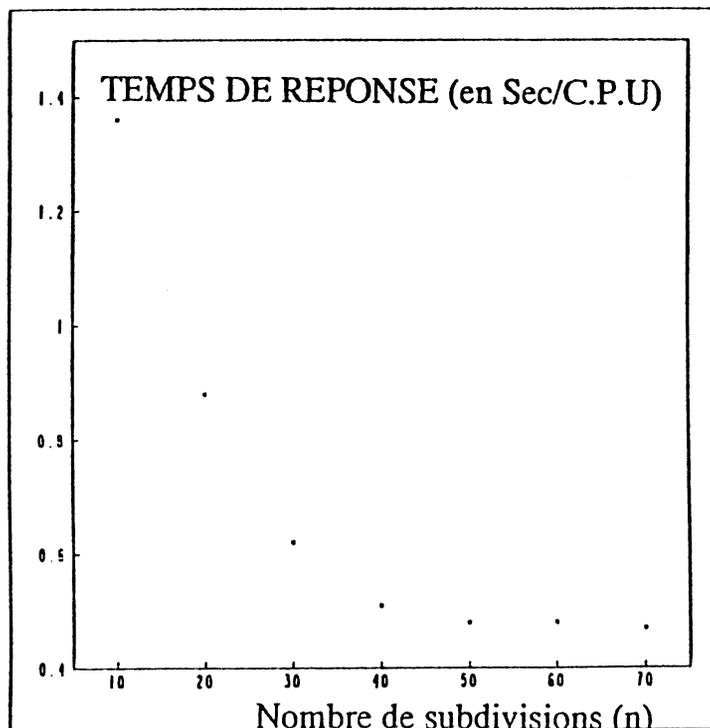
1) Le temps du préconditionnement des N points de E selon le pavé $(P)_{nm}$ reste sensiblement constant pour différentes valeurs du couple (n,m) .

exemple : si $(n=m) \in \{(10 i)\}_{i=1..7}$, ce temps est d'environ (63) secondes C.P.U sur différents ensembles E contenant $N=65536$ points .

2) Influence du nombre de subdivisions sur le temps de réponse .

Le temps de réponse t pour une région donnée d'un ensemble E tend à se stabiliser à mesure que les nombres (n,m) de subdivisions augmentent .

Illustration : sur des maillages $(P)_{nm}$ avec $n=m$, on évalue, dans le cas du rectangle $rect2$ de l'exemple 1 (voir ci-dessus), le temps de réponse t lorsque n croît de 10 à 70 par pas de 10 . On obtient alors le nuage (n,t) suivant :



D'autres expériences menées sur différentes régions du même exemple, ainsi que sur d'autres exemples confirment cette observation .

3) L'algorithme du PAVAGE REGULIER est de loin plus performant que la méthode du balayage séquentiel et ce dès que le nombre de rectangles à traiter est élevé .

On a déjà relevé que le test de $N=65536$ points par cette dernière méthode nécessite un temps $t=6$ secondes C.P.U et ceci quelque soit le rectangle choisi dans E où celui-ci contient N points. A titre de comparaison, on obtient avec notre méthode $t=1.07$ secondes C.P.U dans le cas du rectangle **rect1** de l'exemple 1 .

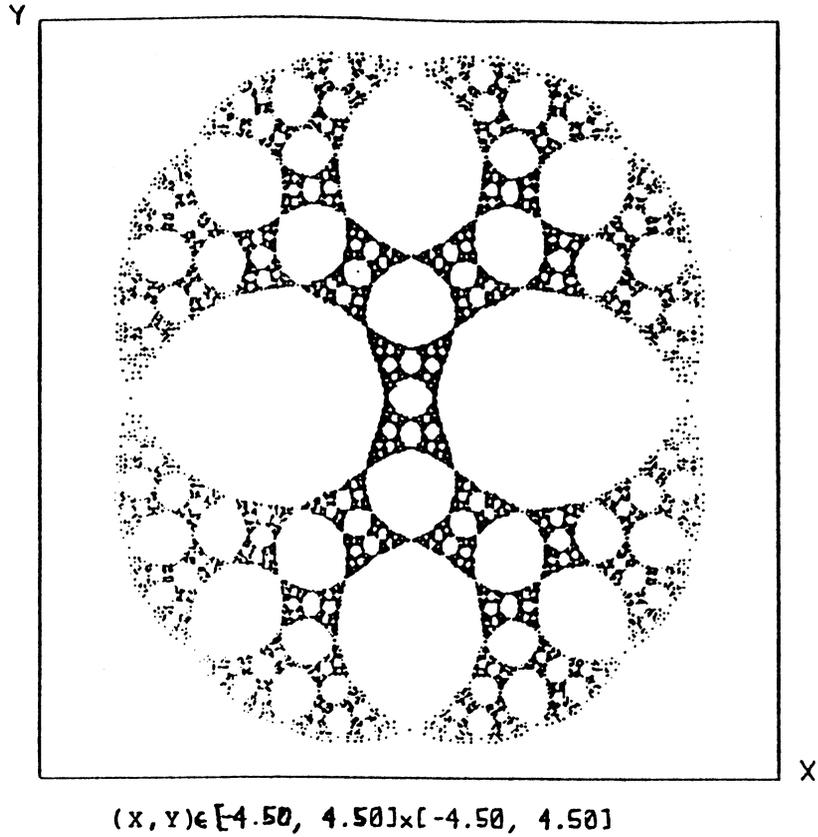
4) Le temps de réponse t semble approximativement **proportionnel** au nombre F de points reportés dans le rectangle correspondant.

Autrement dit, la valeur **expérimentale** du temps de réponse $Q(N,n,m)$ de l'algorithme du Pavage Régulier est en $O(F)$. Les nuages de points (nb,t) précédents illustrent bien cette (quasi)-proportionnalité .

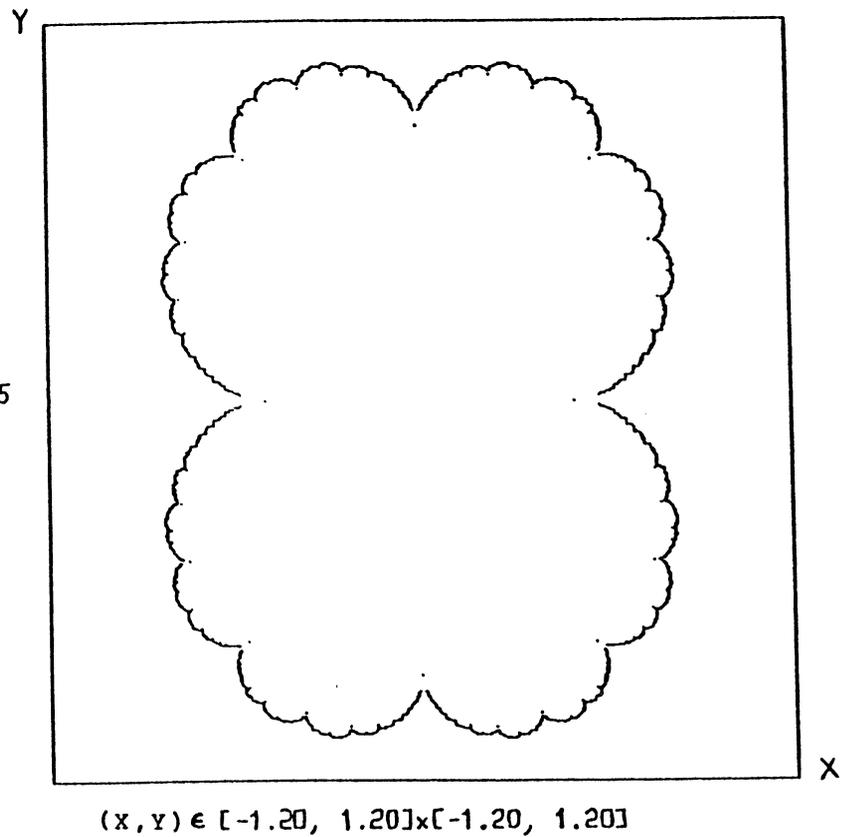
5) Le nombre de cellules du maillage sur lesquelles chevauche un rectangle quelconque et arbitraire R paraît n'avoir aucune influence sensible sur le temps de réponse qui lui est associé .

Pour clore ce chapitre, on présente ci-après les dessins des 3 ensembles E qui ont servi aux expériences présentées ici ainsi que la région (**henon1**) du 3^e exemple.

Ensemble de JULIA
de la fraction
 $R(u)=0.25(u+1/u)^2$

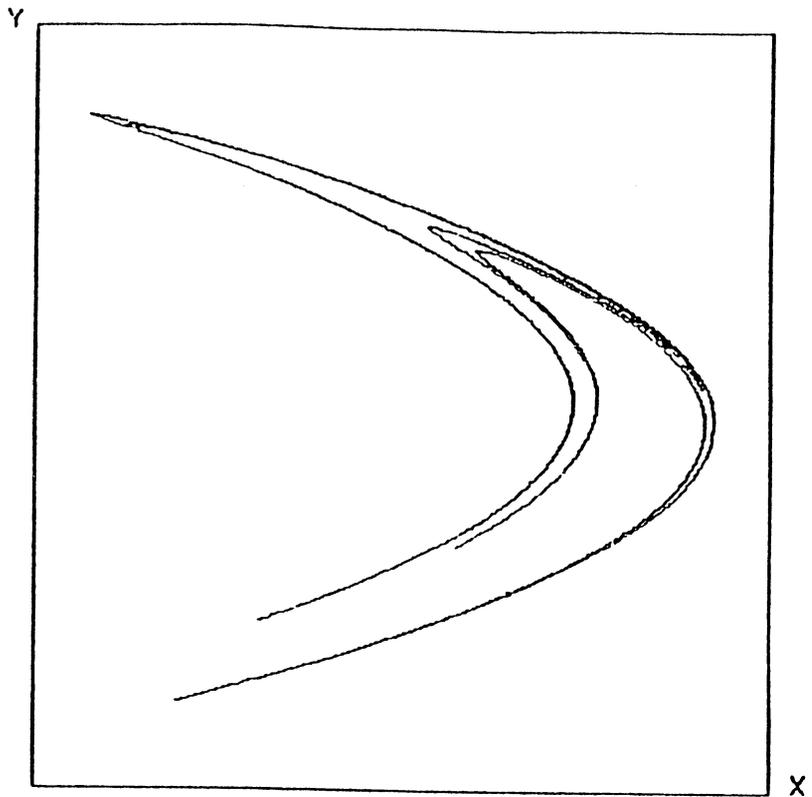


Ensemble de JULIA
du polynôme $R(u)=u^2+0.25$



(Ces 2 ensembles sont formés de 65536 points)

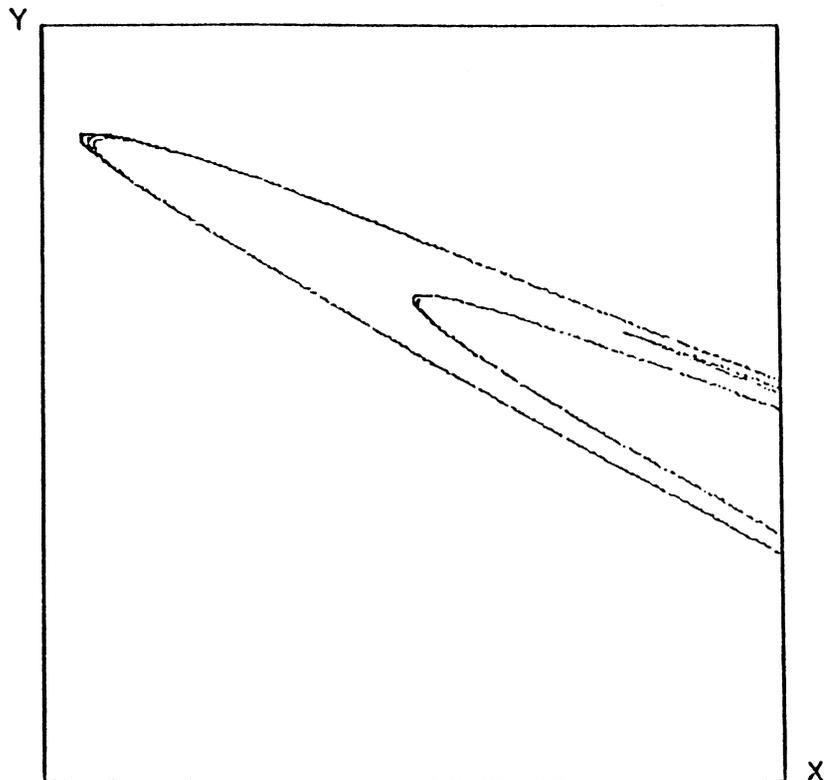
65536 points de
l'attracteur de HENON



$(x, y) \in [-1.50, 1.50] \times [-0.50, 0.50]$

région (henon1) de
l'exemple ci-dessus

nb=4497 points
t=0.56 Secondes C.P.U



$(x, y) \in [-1.30, -1.00] \times [0.33, 0.39]$

```

function QUICKTEST (np : integer ; ptest, pdep, delta : real) : integer ;
  var d : real ;
  begin
    d := (ptest - pdep) / delta ;
    if ((d < 0) or (d > np)) then quicktest := -1 else if (d = np) then
      quicktest := trunc (d) else quicktest := 1 + trunc (d) ;
  end ;

procedure PRECOND (var compty : tay2 ; var mark : tay1 ; var gx, gy : tab
; var ndom : integer) ;
  var i, j, s1, s2, t, bx, by : integer ; x, y : real ;
  begin (** DEBUT ETAPE I **)
    fconnect (f1, nom1) ; fconnect (f2, nom2) ;
    reset (f1) ; reset (f2) ;
    for i := 1 to n do
      for j := 1 to m do
        begin
          mark [i, j, 1] := 0 ; mark [i, j, 2] := 0 ;
          compty [i, j] := 0 ; nb [i, j] := 0 ;
        end ;
      s1 := 0 ; s2 := 0 ; ndom := 0 ;
    for i := 1 to nn do
      begin
        gx [i] := f1^ ; gy [i] := f2^ ;
        get (f1) ; get (f2) ;
        end ; fclose (f1) ; fclose (f2) ; (** FIN ETAPE I **)
      for i := 1 to nn do (** DEBUT ETAPE II **)
        begin
          x := gx [i] ; y := gy [i] ;
          bx := quicktest (n, x, x1, deltax) ;
          by := quicktest (m, y, y1, deltay) ;
          if ((bx > 0) and (by > 0)) then
            begin
              ndom := ndom + 1 ;
              compty [bx, by] := compty [bx, by] + 1 ;
              tx [ndom] := x ; ty [ndom] := y ;
            end ;
          end ; (** FIN ETAPE II **)
        for i := 1 to n do (** DEBUT ETAPE III **)
          for j := 1 to m do
            begin
              t := compty [i, j] ;
              if (t > 0) then
                begin
                  s1 := s2 + 1 ; s2 := s2 + t ;
                  mark [i, j, 1] := s1 ; mark [i, j, 2] := s2 ;
                  nb [i, j] := s1 - 1 ;
                end ;
              end ; (** FIN ETAPE III **)
            for i := 1 to ndom do (** DEBUT ETAPE IV **)
              begin
                x := tx [i] ; y := ty [i] ;
                bx := quicktest (n, x, x1, deltax) ;
                by := quicktest (m, y, y1, deltay) ;
                nb [bx, by] := nb [bx, by] + 1 ; t := nb [bx, by] ;
                gx [t] := x ; gy [t] := y ;
              end ; (** FIN ETAPE IV **)
            end ;
          " SOUS-PROGRAMME REALISANT LES      4 ETAPES DE
          L'ALGORITHME DU PAVAGE REGULIER (Paragraphe 3-3-2) "

```

**SIGNIFICATION DES PARAMETRES
DU SOUS-PROGRAMME PRECEDENT**

- fonction **QUICKTEST** : tient lieu du procédé appelé A (cf. la section 3-3)
- **nn** : nombre de points (x,y) de l'ensemble E à préconditionner
- **x1,y1** : bords inférieurs du domaine $\mathfrak{D} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$
- **n** (resp. **m**) : nombre de subdivisions sur $[x_1, x_2]$ (resp. sur $[y_1, y_2]$)
- **compty** : tableau des quantités $|r_{ij}|$, $(i,j) \in [1, n] \times [1, m]$
- **mark** : tableau représentant les pointeurs $P_1(i,j)$ et $P_2(i,j)$, $(i,j) \in [1, n] \times [1, m]$
- **gx,gy** : tableaux de stockage des abscisses et des ordonnées des (nn) points de E
- **bx,by** : indices i et j d'une cellule r_{ij} contenant un point (x,y) de E
- **tx,ty** : tableaux intermédiaires permettant la réorganisation des points de E dans les tableaux (gx,gy) initiaux.

II- Quelques applications de l'Algorithme du Pavage Régulier :

a-"Variable Disk Retrieval Problem"

Introduction

Comme signalé dans l'introduction de cette partie **B**, on s'intéresse dans ce deuxième chapitre à deux problèmes concernant notre étude. Comme on le verra, ceux-ci sont des applications de l'Algorithme du Pavage Régulier (A.P.R). Le premier d'entre eux, appelé "**Variable Disk Retrieval Problem**" est traité au paragraphe (a), alors que le second, figurant au paragraphe (b), consiste en le calcul numérique de quelques dimensions fractales d'attracteurs étranges de systèmes dynamiques et d'ensembles de Julia de fractions rationnelles. Notons enfin que l'on garde toutes les notations du chapitre **I** de cette partie.

a) Variable Disk Retrieval Problem (en abrégé V.D.R)

Dans tout ce paragraphe (a), E désigne un ensemble de points dans le plan ie $E = \{(x_i, y_i)\}_{i=1..N}$.

a-1 Formulation du V.D.R

Les N points de E étant donnés, ce problème s'énonce comme suit :

"Lister (ou encore reporter) rapidement les points de E inclus dans un disque $D = D[p=(x_0, y_0), r]$, le centre p et le rayon r étant quelconques et arbitraires".

Nota : Dans la suite, on notera (\mathcal{P}_1) cette formulation .

Pour les champs d'applications du (V.D.R), on renvoie à ([5]). Mains algorithmes ont été proposés pour résoudre ce problème (cf. [27] pour les détails).

Dans le cas où le rayon r du disque D est fixé, Bentley et Maurer ([4]) ont mis au point une méthode s'appuyant sur la construction de N cercles de rayon r et centrés en chacun des points de E . Les performances auxquelles ils ont abouti sont ici résumées :

$S(N) = P(N) = O(N^3)$, $Q(N) = O(F + \log N)$ où F est le nombre de points de E reportés dans D .

Pour N grand, cet algorithme est difficilement exploitable à cause de la place mémoire considérable qui est exigée.

a-2 Algorithme du Pavage Régulier : rappels et transformation de (\mathcal{P}_1)

Comme on l'a vu en (section 3-3) du précédent chapitre, il existe un domaine non unique $\mathcal{D} = [X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$ tel que $E \subset \mathcal{D}$. Notons encore par n (resp. m) un nombre (fixé) de subdivisions sur $[X_1, X_2]$ (resp. $[Y_1, Y_2]$) et par Δx (resp. Δy) la

longueur de chacune d'elles ; on a donc $\Delta x=(X_2-X_1)/n$ et $\Delta y=(Y_2-Y_1)/m$. Les nombres de subdivisions sont pris tels que n (et m) $\ll N$.

Ainsi construit, ce maillage de \mathcal{D} est, rappelons le, composé de (nm) cellules disjointes (r_{ij}) $(i,j) \in [1,n] \times [1,m]$ (se référer au chap. précédent pour la définition de la cellule (r_{ij})).

Le préconditionnement de l'ensemble E selon ce pavage consiste en la répartition des N points de cet ensemble suivant les (nm) cellules; le coût de cette opération est $P(N,n,m) = O(N+nm)$.

Une fois celle-ci effectuée, on peut donc accéder directement aux points de E inclus dans une cellule quelconque du maillage, et plus généralement, à ceux d'un rectangle arbitraire $R \subset \mathcal{D}$ (Problème du **Range-Searching**).

Après ces brefs et utiles rappels, le problème (\mathcal{P}_1) prend une autre formulation (\mathcal{P}_2) qui est la suivante :

"Soit un disque quelconque et arbitraire* $D=D[p=(x_0,y_0),r]$, on veut localiser toutes les cellules du maillage de \mathcal{D} qui intersectent D (frontière incluse)".

* On impose que le centre $p=(x_0,y_0)$ de D appartienne au domaine \mathcal{D} .

a-3 Une méthode de Résolution de (\mathcal{P}_2) : Technique de codage .

Considérons, dans le pavage de \mathcal{D} , le carré circonscrit au cercle $C=C(p,r)$, circonférence du disque D .

Les sommets du quadrilatère définissent 4 indices I_1, I_2, J_1 et J_2 tels que les cellules (r_{ij}) $(i,j) \in [I_1, I_2] \times [J_1, J_2]$ du maillage intersectent le carré circonscrit; pour la localisation de ces sommets, on renvoie au (§ 3-3-3, chap. I). Tenant compte de cela, la question du problème (\mathcal{P}_2) peut être mieux formulée. En effet, elle revient à trouver, parmi les $t=(I_2-I_1+1)(J_2-J_1+1)$ cellules précédentes, uniquement celles qui ont une intersection non vide avec la circonférence C du disque D .

Remarques :

(i) si $D=D[p=(x_0,y_0),r]$ dépasse $\mathcal{D}=[X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$ suivant l'intervalle $[X_1, X_2]$, c'est à dire si $(x_0+r) > X_2$ (resp. $(x_0-r) < X_1$), on pose $I_2=n$ (resp. $I_1=1$).

(ii) de même, si D dépasse \mathcal{D} suivant l'intervalle $[Y_1, Y_2]$, c'est à dire si $(y_0+r) > Y_2$ (resp. $(y_0-r) < Y_1$), on pose $J_2=m$ (resp. $J_1=1$).

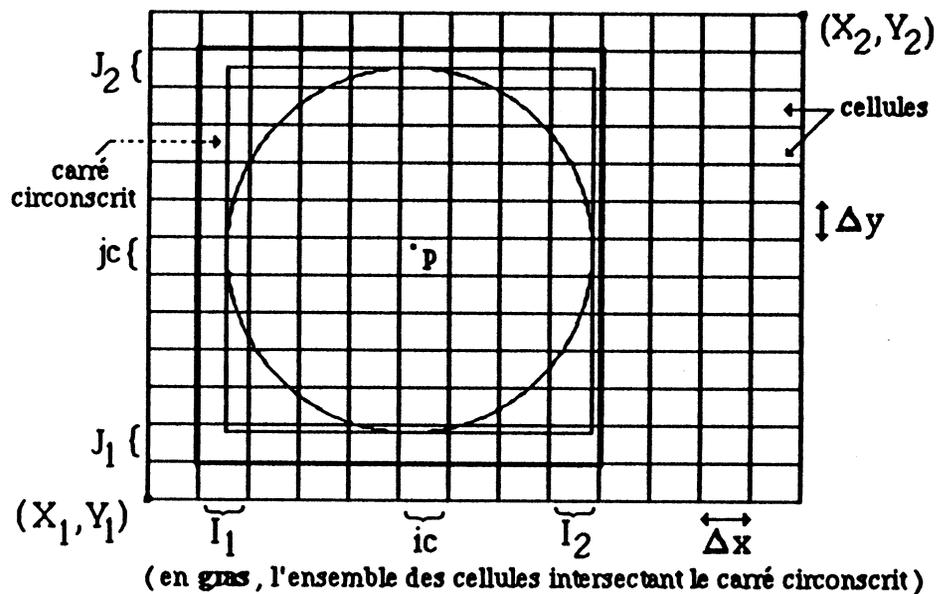
Pour repérer les cellules qui répondent à (\mathcal{P}_2) , on décrit dans la suite un procédé utilisant une technique de Codage sur les t cellules précédentes, tenant compte des remarques ci-dessus.

-- Description de la technique de codage .

On introduit t variables binaires $B(i,j) \in \{0,1\}$ $(i,j) \in [I_1, I_2] \times [J_1, J_2]$ qui, initialisées par exemple à 1 deviendront après application de notre méthode :

$$B(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } r_{ij} \cap D(p,r) \neq \{\emptyset\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si l'on note par i_c et j_c les indices i et j de la cellule (du maillage) qui contient le centre $p=(x_0, y_0)$ du disque D , les données du problème (\mathcal{P}_2) sont représentées sur le schéma ci-dessous.



Les cellules (r_{i,j_c}) $i \in [I_1, I_2]$ et $(r_{i_c,j})$ $j \in [J_1, J_2]$ sont les cellules de la ligne et de la colonne auxquelles appartient le centre p de D . Elles ont toutes une intersection non vide avec le disque $D=D(p,r)$ car :

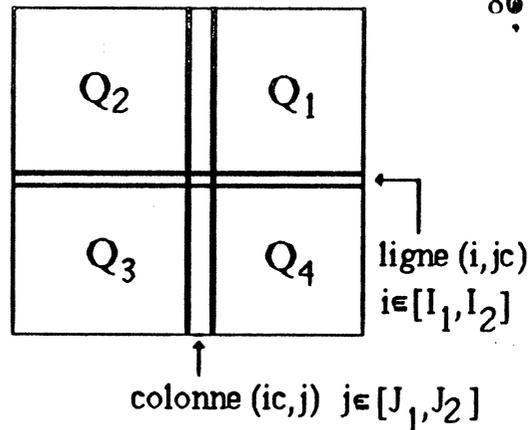
* Soit qu'elles sont **incluses** dans D

* Soit que le cercle ($C=C(p,r)$) et son carré circonscrit y sont **tangents**.

En plus de cette importante propriété, ces cellules divisent les t cellules (r_{ij}) $(i,j) \in [I_1, I_2] \times [J_1, J_2]$ intersectant le carré, en 4 quadrants $(Q_i)_{i=1..4}$.

En conséquence, on ne considère, dans la suite, parmi ces t cellules, que celles des 4 quadrants

(voir le dessin ci-contre).



Pour chaque quadrant, notre méthode repose sur le test, avec le rayon r du disque D , de la distance euclidienne $d[p=(x_0, y_0), (x+X_1, y+Y_1)]$ où x et y sont les coordonnées, dans le repère (X_1, Y_1) de \mathcal{D} , du sommet de certaines cellules de ce quadrant. Elles seront explicitées par la suite.

Tenant compte de la définition des cellules du maillage, le sommet (x, y) à considérer est, suivant le quadrant auquel appartient la cellule r_{ij} :

- (i) si $r_{ij} \in Q_1$, $x=(i-1) \Delta x$ et $y=(j-1) \Delta y$ ((x, y) est le sommet "Sud-Ouest" de r_{ij})
- (ii) si $r_{ij} \in Q_2$, $x= i \Delta x$ et $y=(j-1) \Delta y$ (sommet "Sud-est")
- (iii) si $r_{ij} \in Q_3$, $x= i \Delta x$ et $y=j \Delta y$ (sommet "Nord-est")
- (iv) si $r_{ij} \in Q_4$, $x= (i-1) \Delta x$ et $y=j \Delta y$ (sommet "Nord-ouest")

Chaque quadrant subit un traitement à part : à la fin de celui-ci, la variable binaire $B(i, j)$ d'une cellule r_{ij} (du quadrant traité) ayant une intersection vide avec le disque D vérifiera : $B(i, j)=0$.

Autrement dit, à la fin du traitement des 4 quadrants, les cellules répondant au problème (\mathcal{P}_2) sont les cellules $(r_{ij}) (i, j) \in [I_1, I_2] \times [J_1, J_2]$ telles que $B(i, j)=1$.

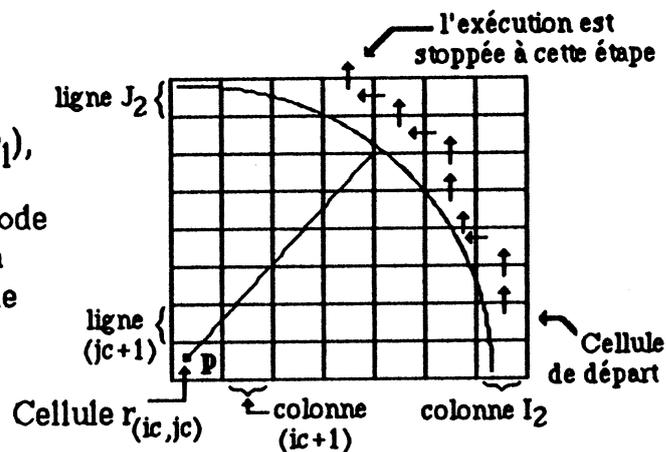
-- Fonctionnement de la méthode : Exemple du quadrant 1 .

Précisons d'abord que ce quadrant est composé, d'après ce qui précède, des cellules (r_{ij}) telles que $(i, j) \in [ic+1, I_2] \times [jc+1, J_2]$. On commence par initialiser i à I_2 et j à $(jc+1)$. Si le point $z=(x+X_1, y+Y_1)$, avec (x, y) le sommet "Sud-Ouest" de la cellule r_{ij} (dans le repère (X_1, Y_1)), vérifie $d[p, z] \leq r$ alors on met à 0 les codes des cellules situées à droite et sur la même ligne que r_{ij} (celle-ci non incluse), c'est à dire les cellules r_{kj} telles que $(i+1) \leq k \leq I_2$. On passe ensuite à la cellule $r_{i(j+1)}$ (donc au dessus de r_{ij}), ce qui revient à incrémenter l'indice j d'une unité. Le même procédé est effectué pour cette nouvelle cellule.

Si par contre $d[p,z] > r$, alors les codes $B(k,j)$ $i \leq k \leq I_2$ des cellules se trouvant à droite de r_{ij} (inclusive) se voient affectés la valeur 0, puis on passe à la cellule $r_{(i-1)j}$ à gauche de r_{ij} (i est donc décroché d'une unité) et on répète le processus sur $r_{(i-1)j}$.

Il est utile de rappeler que la cellule r_{ij} n'est traitée que si elle appartient au quadrant considéré. Dans le cas présenté ici (quadrant 1), i (resp. j) doit être dans l'intervalle $[ic+1, I_2]$ (resp. $[jc+1, J_2]$); le fonctionnement de la méthode est donc stoppé dès que $i < ic+1$ ou $j > J_2$.

Dans le cas du quadrant (Q_1), les différentes étapes du fonctionnement de la méthode sont illustrées par le dessin ci-contre sur un exemple de maillage et de cercle.



Remarques :

1) La description précédente sur Q_1 se transporte aisément aux 3 autres quadrants restants. Les 4 sous-algorithmes correspondants figurent à la fin de ce paragraphe (a).

2) Le principe de notre méthode réside dans le fait de "suivre" pas à pas, sur le maillage du domaine \mathcal{D} , la circonférence du disque D . Le tracé d'un cercle sur un écran graphique illustre d'ailleurs fort bien notre démarche en vue de sélectionner les cellules résolvant le problème (\mathcal{P}_2) (formulé en section (a-2)).

a-4 Complexité de l'algorithme .

Les cellules (r_{ij}) $(i,j) \in [I_1, I_2] \times [J_1, J_2]$ qui répondent à (\mathcal{P}_2) sont ainsi déterminées par les valeurs des variables binaires $B(i,j)$ qui leur sont associées.

On peut donc retourner au problème initial (\mathcal{P}_1) (section (a-1)) et évaluer les performances de notre méthode quant à la résolution de ce problème, cela avec notre connaissance de celles de l'Algorithme du Pavage Régulier relatif au problème du "Range-Searching" (Chap. B-I). Rappelons ces dernières :

$$S(N,n,m) = P(N,n,m) = O(N+nm)$$

$$Q(N,n,m) = O(N) \text{ dans le pire des cas.}$$

où N est le nombre de points de l'ensemble E .

(i) Preprocessing-time (ou temps de préconditionnement) $P^*(N,n,m)$

Comme aucun préconditionnement supplémentaire n'est apporté aux N points de E par notre algorithme, $P^*(N,n,m)$ est donc le même pour (\mathcal{P}_1) que pour le problème du Range-Searching : $P^*(N,n,m)=P(N,n,m)=O(N+nm)$.

(ii) Place mémoire $S^*(N,n,m)$ demandée par notre méthode

Il est évident que le nombre $t = (I_2 - I_1 + 1) \times (J_2 - J_1 + 1)$ de cellules que l'on a considéré, et donc celui des variables binaires correspondantes, ne peut dépasser la borne (nm) du nombre de cellules constituant le pavage de $\mathcal{D} \supset E$.

Avec le stockage des $B(i,j)$, $S^*(N,n,m)$ vérifie donc :

$$S^*(N,n,m) = S(N,n,m) + t \leq S(N,n,m) + nm$$

la place-mémoire nécessaire aux données utilisées reste donc en $O(N+nm)$

(iii) Query-time (ou temps de Réponse) $Q^*(N,n,m)$

On rappelle que, dans le pire des cas (ou "worst-case"), le temps de réponse au problème du Range-Searching est en $O(N)$. La méthode de résolution de (\mathcal{P}_1) comporte, comme on l'a vu, des opérations supplémentaires, en l'occurrence : localisation de la cellule (r_{ic}, j_c) du centre p du disque $D(p,r)$, calcul de distances euclidiennes, transformation (c'est à dire: remise à 0) des codes des cellules n'intersectant pas $C(p,r)$... etc. On en déduit que le temps de réponse $Q^*(N,n,m)$ est encore en $O(N)$ dans le pire des cas. On fait remarquer que la différence entre nos méthodes de résolution des deux problèmes (Range-searching) et (\mathcal{P}_1) réside à l'étape du temps de réponse car celle-ci fait intervenir (dans \mathcal{P}_1) les t codes $B(i,j)$.

La résolution du problème (\mathcal{P}_1) (ou *Variable Disk Retrieval Problem*) par la méthode décrite nous conduit à énoncer la proposition suivante :

Proposition: Soit E un ensemble de N points dans un espace euclidien de dimension 2.

Sur un domaine \mathcal{D} contenant E , considérons un maillage régulier comportant n et m subdivisions suivant chaque coordonnée avec n (et m) $\ll N$; alors :

Il existe une méthode, s'appuyant à la fois sur le préconditionnement des N points de E suivant ce maillage et sur une technique de codage, qui résoud le problème du V.D.R avec comme performances :

$$* S(N,n,m) = P(N,n,m) = O(N+nm)$$

$$* Q(N,n,m) = Q(N) = O(N) \text{ dans le pire des cas.}$$

(mais expérimentalement bien meilleur)

a-5 Présentation des 4 sous-algorithmes de notre méthode.

Avant de présenter, dans ce qui suit, l'algorithme relatif à chaque quadrant, on fait la remarque importante suivante :

Remarque :

Lors du test, avec le rayon r du disque $D=D[p=(x_0,y_0)]$ de la distance euclidienne $d(p,z)$ où z est le sommet (spécifié en section (a-3)) des cellules des quadrants $(Q_i)_{i=2..4}$ (resp. du quadrant Q_1), on considère l'inégalité stricte $d(p,z)<r$ (resp. large $d(p,z)\leq r$). Cette différence provient de la définition des cellules du maillage de \mathcal{D} .

Rappel: On initialise à 1 les codes $B(i,j)$ des t cellules $(r_{ij}) (i,j)\in [I_1,I_2] \times [J_1,J_2]$ intersectant le carré circonscrit au cercle $C(p,r)$, et ce avant de traiter celles qui appartiennent aux quadrants $(Q_i)_{i=1..4}$.

-- Quadrant 1 :

1) *Définition* : $Q_1 = \{r_{ij} / i \in [ic+1, I_2] \text{ et } j \in [jc+1, J_2]\}$.

2) *Traitement des cellules de Q_1* :

$i \leftarrow I_2, j \leftarrow jc+1$

tant que $((i \geq ic+1) \text{ et } (j \leq J_2))$ faire

Début

$x \leftarrow X_1 + (i-1) \Delta x, y \leftarrow Y_1 + (j-1) \Delta y$

si $(d[p,(x,y)] \leq r)$ faire

Début

$k \leftarrow (i+1)$

tant que $((k \leq I_2) \text{ et } (B(k,j)=1))$ faire

Début

$B(k,j) \leftarrow 0, k \leftarrow k+1$

Fin (tant que (k))

$j \leftarrow j+1$

Fin (si)

sinon faire

Début

$k \leftarrow i$

tant que $((k \leq I_2) \text{ et } (B(k,j)=1))$ faire

Début

$B(k,j) \leftarrow 0, k \leftarrow k+1$

Fin (tant que (k))

$i \leftarrow i-1$

Fin (sinon)

Fin (tant que (i) et (j))

-- Quadrant 2 :

1) *Définition* : $Q_2 = \{r_{ij} / i \in [I_1, ic-1] \text{ et } j \in [jc+1, J_2]\}$.

2) *Traitement des cellules de Q_2* :

$i \leftarrow I_1, j \leftarrow jc+1$

tant que (($i \leq ic-1$) et ($j \leq J_2$)) faire

Début

$x \leftarrow X_1 + i \Delta x, y \leftarrow Y_1 + (j-1) \Delta y$

si ($d[p, (x, y)] < r$) faire

Début

$k \leftarrow I_1$

tant que (($k \leq i-1$) et ($B(k, j) = 1$)) faire

Début

$B(k, j) \leftarrow 0, k \leftarrow k+1$

Fin (tant que (k))

$j \leftarrow j+1$

Fin (si)

sinon faire

Début

$k \leftarrow I_1$

tant que (($k \leq i$) et ($B(k, j) = 1$)) faire

Début

$B(k, j) \leftarrow 0, k \leftarrow k+1$

Fin (tant que (k))

$i \leftarrow i+1$

Fin (sinon)

Fin (tant que (i) et (j))

-- Quadrant 3 :

1) *Définition* : $Q_3 = \{r_{ij} / i \in [I_1, ic-1] \text{ et } j \in [J_1, jc-1]\}$.

2) *Traitement des cellules de Q_3* :

$i \leftarrow I_1, j \leftarrow jc-1$

tant que $((i \leq ic-1) \text{ et } (j \geq J_1))$ faire

Début

$x \leftarrow X_1 + i \Delta x, y \leftarrow Y_1 + j \Delta y$

si $(d[p, (x, y)] < r)$ faire

Début

$k \leftarrow I_1$

tant que $((k \leq i-1) \text{ et } (B(k, j) = 1))$ faire

Début

$B(k, j) \leftarrow 0, k \leftarrow k+1$

Fin (tant que (k))

$j \leftarrow j-1$

Fin (si)

sinon faire

Début

$k \leftarrow I_1$

tant que $((k \leq i) \text{ et } (B(k, j) = 1))$ faire

Début

$B(k, j) \leftarrow 0, k \leftarrow k+1$

Fin (tant que (k))

$i \leftarrow i+1$

Fin (sinon)

Fin (tant que (i) et (j))

-- Quadrant 4 :

a) *Définition* : $Q_4 = \{r_{ij} / i \in [ic+1, I_2] \text{ et } j \in [J_1, jc-1]\}$.

b) *Traitement des cellules de Q_4* :

$i \leftarrow I_2, j \leftarrow jc-1$

tant que $((i \geq ic+1) \text{ et } (j \geq J_1))$ faire

Début

$x \leftarrow X_1 + (i-1) \Delta x, y \leftarrow Y_1 + j \Delta y$

si $(d[p, (x, y)] < r)$ faire

Début

$k \leftarrow i+1$

tant que $((k \leq I_2) \text{ et } (B(k, j) = 1))$ faire

Début

$B(k, j) \leftarrow 0, k \leftarrow k+1$

Fin (tant que (k))

$j \leftarrow j-1$

Fin (si)

sinon faire

Début

$k \leftarrow i$

tant que $((k \leq I_2) \text{ et } (B(k, j) = 1))$ faire

Début

$B(k, j) \leftarrow 0, k \leftarrow k+1$

Fin (tant que (k))

$i \leftarrow i-1$

Fin (sinon)

Fin (tant que (i) et (j)).

(II-b)- Application de l'Algorithme du Pavage Régulier au calcul de quelques dimensions fractales

b-0 introduction

Ce dernier paragraphe est consacré au calcul de la **dimension fractale** d'ensembles compacts du plan . Ces ensembles sont, comme signalé précédemment, soit des attracteurs étranges de systèmes dynamiques ([15]), soit des ensembles de Julia de fractions rationnelles complexes (cf. [6]) .

Généralement, ces ensembles ont une structure **fractale** (ou de self-similarité), c.a.d dont la forme est extrêmement irrégulière ou fragmentée et ceci quelque soit l'échelle d'examen . Comme exemples de ces ensembles, on renvoie aux figures de la fin du précédent chapitre ainsi qu'au livre de Peitgen et Richter ([35]) où de "belles" images sont dessinées .

La dimension fractale intervient dans la quantification du degré d'irrégularité de l'ensemble étudié; elle est dans la plupart des cas, **non entière** .

Plusieurs algorithmes d'approche de cette dimension ont été élaborés ces dernières années. L'important article d'Eckmann et Ruelle ([15]) contient un large éventail de ces algorithmes ainsi qu'une bibliographie importante ayant trait à la dimension fractale.

Plus précisément, selon que l'on s'intéresse aux propriétés métriques de l'ensemble (basées donc sur la notion de distance) ou/et à ses propriétés probabilistes (différences des densités de points entre ses régions), on aboutit à plusieurs algorithmes d'approche de sa dimension fractale.

Suivant l'algorithme utilisé, cette dimension est appelée : la dimension de Hausdorff (notée d_H), la dimension de capacité (d_C), la dimension d'information (d_{inf}), la dimension de corrélation (d_{COR}) ... etc (voir Grassberger [19]).

Dans ce qui suit, après quelques rappels sur la théorie des Systèmes Dynamiques, on adapte l'*Algorithme du Pavage Régulier* à l'estimation de certaines de ces dimensions.

b-1 Théorie des systèmes dynamiques : rappels

Dans cet ordre d'idées, on rappelle brièvement, à travers cette section, les points de cette théorie qui nous seront utiles pour la suite .

(i) définition d'un système dynamique - notion d'attracteur .

(cf. [20],[16] et [15] pour les détails)

Un système dynamique, qu'on notera (X,T,f) , est la donnée de

- * un espace métrique (X,d) appelé espace de phases , généralement $X=\mathbb{R}^n$.
- * un espace temporel T ($T= \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$)
- * une application f telle que

$$f : X \times T \rightarrow X$$

$$(x,t) \rightarrow f(x,t) \text{ avec}$$

$$1) f(x,0)=x \quad \forall x \in X, \quad 2) f \text{ est continue en } x \text{ et en } t$$

$$3) \forall t_1, t_2 \in T, f[f(x,t_1), t_2]=f(x, t_1+t_2)$$

l'application f est le flot du système (X,T,f) et l'ensemble $f(x_0, T)=\{f(x,t), t \in T\}$ est l'orbite (ou encore la trajectoire) issue de x_0 . Signalons aussi que, dans le cas discret ($T=\mathbb{N}$), $f(x,n)=f^n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$, où f^n indique la n -ième composée de f .

L'étude du comportement asymptotique du système (ie quand $t \rightarrow +\infty$) , partant d'un point initial x_0 , a pour but de déterminer l'ensemble limite noté $(\omega(x_0))$ de l'orbite $f(x_0, T)$. Cet ensemble se définit comme suit en notant $T^+=T \cap \mathbb{R}^+$:

. la trajectoire $f(x_0, T)$ admet le point $y \in X$ comme point ω -limite si :

$$\exists \text{ une suite croissante } (t_i) \subset T^+ / \lim f(x_0, t_i)=y \text{ quand } (t_i \rightarrow \infty)$$

. $\omega(x_0)=\{y \in X / y \text{ est un point } \omega\text{-limite}\}$

Cet ensemble limite peut prendre différentes formes, elles sont regroupées sous l'appellation d'attracteur . On en donne ci-après la définition :

Définition : un attracteur est un ensemble compact (invariant) $A \subset X$ qui possède la propriété : il existe un voisinage $V(A)$ de A tel que, pour presque tout point (au sens de la mesure de Lebesgue) de départ $x_0 \in V(A)$, l'ensemble limite de $f(x_0, t)$ est A .

Si pour deux points proches x_1, x_2 de $V(A)$, les orbites $f(x_1, T)$ et $f(x_2, T)$ restent voisines en tendant vers A , le compact A est appelé attracteur simple . Sa structure est généralement régulière et sa dimension est entière . C'est le cas, par exemple, d'un point fixe (ou d'un cycle limite) attractif .

Une définition d'un attracteur étrange : Dans le cas où le système (X,T,f) est sensible aux conditions initiales prises dans $V(A)$, on est alors en présence d'un système chaotique et A est un attracteur étrange (ou chaotique); exemples: attracteur de Hénon ([21]), attracteur de Lorenz... etc, voir aussi ceux traités dans ([26]). Notons que la dimension fractale de ce type d'attracteurs est généralement non entière .

(ii) Systèmes dynamiques holomorphes ([6],[13])

Les récents progrès de l'informatique graphique ont grandement contribué à la compréhension des systèmes dynamiques dans le champ complexe ([35]).

Signalons qu'un côté de la théorie de ces systèmes (Ensemble de Julia de fraction rationnelle) a déjà été abordé au chapitre (A-I).

On considère ici uniquement les systèmes dépendant d'un (ou plusieurs) paramètre(s) (cf. [30],[31],[39]).

Dans le contexte de la dimension fractale, ceux générés par des polynômes quadratiques $P_1(z)=az^2+bz+c$, $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ nous intéresse tout particulièrement.

L'étude du comportement itératif de cette classe de polynômes se ramène, par la transformation conforme $L(z)=az+(b/2)$, à celle de la famille des polynômes conjugués ([6]) : $P(z)=L \circ P_1 \circ L^{-1}(z)=z^2+p$ où $p=[(4ac+2b-b^2)/4]$. Remarquons au

passage la simplification qui en résulte car l'espace des paramètres passse de \mathbb{C}^3 à \mathbb{C} .

La structure de l'ensemble de Julia $J(P)$ de $P(z)=z^2+p$ en fonction du paramètre p , détaillée dans l'article de Broliin([7]), montre que, si p est dans l'intervalle réel $]-3/4, 1/4[$, $J(P)$ est une **courbe de Jordan simple**. En d'autres termes, $J(P)$ peut être paramétrisé par une fonction continue $\gamma(t)$ à valeurs complexes où $t \in [0,1]$ et $\gamma(0)=\gamma(1)$. Ceci se généralise au cas où $p \in \mathbb{C}$ avec $|p|$ "petit" (cf. [39]).

Exemple simple : si $p=0$, $J(P)$ est le cercle unité $C(0,1)$ et $\gamma(t)=e^{2\pi i t}$ (avec $i^2=-1$).

-- Dimension fractale de $J(z^2+p)$ où p est complexe ($|p|$ petit)

Ruelle ([37]) montre que la dimension fractale, plus précisément la dimension de Hausdorff $d_H=d_H(p)$ ([20]), de $J(z^q+p)$ où $q \geq 2$ dépend analytiquement de p .

En fait, il établit la relation importante suivante :

$$d_H(p)=1+(|p|^2/[4 \ln(q)])+|p|^2 \varepsilon(p) \quad \text{avec } \varepsilon(p) \rightarrow 0 \text{ quand } p \rightarrow 0 \dots\dots (\#)$$

Pour leur part, Widom et al ([39]) ont par la suite effectué plusieurs expérimentations numériques en liaison avec (#) ainsi que sur d'autres caractéristiques géométriques de $J(z^q+p)$.

L'ensemble de Julia $J(z^q+p)_{p \neq 0}$ est, comme indiqué ci-dessus pour $q=2$, **semblable** au cercle unité $C(0,1)$ pour des petites valeurs du paramètre p ; sa dimension fractale est donc très proche de celle de $(J(z^q)=C(0,1))$ qui est 1. Ceci est d'ailleurs bien mis en évidence par la précédente égalité (#).

b-2 *Contexte et définitions*

Considérons un ensemble compact (du plan), du type indiqué en section (b-0), que nous approchons par un ensemble fini $E=\{(x_i, y_i)\}$, $i \in [1, N]$, contenant un grand nombre N de points. On cherche à évaluer la dimension de capacité (notée: $d_c(E)$) et la dimension d'information (notée $d_i(E)$) de E , et ceci par application de notre Algorithme du Pavage Régulier (chap. B-I) de paramètres N, n et m avec $(n=m)=n_1$; le choix de n_1 sera justifié par la suite.

Les algorithmes d'estimation de ces deux dimensions reposent sur le comptage des boîtes (ou "box-counting") non vides d'une grille contenant E , on renvoie à ([16]) pour plus de détails. Ci-après, on donne la définition de $(d_c(E))$ et de $(d_i(E))$.

-- Définition de $d_c(E)$ et de $d_i(E)$.

Immergeons l'ensemble E dans un domaine carré $\mathcal{D} = [X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$ c.a.d $X_2 - X_1 = Y_2 - Y_1$, et considérons, sur \mathcal{D} , une grille (ou maillage) notée $G(\varepsilon)$ dont la taille des boîtes (ou cellules) est ε avec $\varepsilon = (X_2 - X_1)/w = (Y_2 - Y_1)/w$ ($w \in \mathbb{N}^*$); w étant un nombre de subdivisions sur $[X_1, X_2]$ et $[Y_1, Y_2]$ tel que $w \ll N$.

On pose (r^{ε}_{ij}) , $(i,j) \in ([1,w])^2$, le nombre de points de E contenus dans la cellule r^{ε}_{ij} relativement à la grille $G(\varepsilon)$. La définition des cellules du maillage est la même que celle du chapitre précédent.

Dimension de Capacité $d_c(E)$

Soit $T(\varepsilon)$ le nombre cellules non vides de la grille $G(\varepsilon)$, donc des cellules $(r^{\varepsilon}_{ij})_{(i,j) \in ([1,w])^2}$ telles que $|r^{\varepsilon}_{ij}| > 0$. Si la limite existe, la dimension de capacité est donnée par : $d_c(E) = \lim_{(\varepsilon \rightarrow 0)} [-\ln(T(\varepsilon))/\ln(\varepsilon)]$.

Dimension d'information $d_i(E)$

D'après sa définition, $d_c(E)$ ne dépend pas des caractéristiques géométriques de E : elle ne tient pas compte, en particulier, de la différence des densités de points entre les régions de celui-ci. Par contre, la dimension d'information $d_i(E)$ prend en considération cette propriété. Pour la définir, on suppose l'existence d'une mesure limite μ sur E . Cette mesure, appelée "mesure naturelle", désigne, si E est un attracteur, la proportion du temps de séjour (ou la fréquence de visite) du système dynamique dans une région donnée de E . Dans le cas d'une cellule c de $G(\varepsilon)$, on prendra $\mu(c) = |c|/N$ lors de notre estimation ($N =$ nombre total de points dans E).

Soit $(C^{\varepsilon}_k)_{k=1..T(\varepsilon)}$ les boîtes non vides de $G(\varepsilon)$, si l'on pose $p^{\varepsilon}_k = \mu(C^{\varepsilon}_k) \in]0,1]$ et $H(\varepsilon) = -\sum_{k=1..T(\varepsilon)} (p^{\varepsilon}_k) \ln(p^{\varepsilon}_k)$, la dimension $d_i(E)$ est alors définie par :

$$d_i(E) = \lim_{(\varepsilon \rightarrow 0)} [-H(\varepsilon)/\ln(\varepsilon)] \text{ si cette limite existe .}$$

Remarques importantes :

(i) Il existe des exemples d'attracteurs de systèmes dynamiques pour lesquels les deux limites précédentes n'existent pas (thèse de Lausberg [26]).

(ii) A partir de leur définition respective, on montre que l'on a l'inégalité suivante : $d_c(E) \geq d_i(E)$ (cf. [19]).

b-3 Algorithme du pavage régulier : Rappels

A chaque cellule $r^{\varepsilon}_{ij}, (i,j) \in ([1,w])^2$, de la grille $G(\varepsilon)$, on associe, dans un tableau L contenant les N points de E, deux pointeurs $P_1^{(\varepsilon)}(i,j)$ et $P_2^{(\varepsilon)}(i,j)$ tels qu'on ait, après le préconditionnement de ces points selon $G(\varepsilon):P_1^{(\varepsilon)}(i,j)$ (resp. $P_2^{(\varepsilon)}(i,j)$) repère, dans le tableau L, le premier (resp. le dernier) point de la cellule r^{ε}_{ij} .

Ces deux pointeurs sont, comme on l'a vu au chapitre précédent, reliés par l'équivalence : $[(P_1^{(\varepsilon)}(i,j)=0)] \Leftrightarrow [P_2^{(\varepsilon)}(i,j)=0]$; la cellule r^{ε}_{ij} est donc non vide si $P_1^{(\varepsilon)}(i,j) \neq 0$, et on a alors dans ce cas : $|r^{\varepsilon}_{ij}| = (P_2^{(\varepsilon)}(i,j) - P_1^{(\varepsilon)}(i,j) + 1) =$ nombre de points de E dans la boîte (ou cellule) r^{ε}_{ij} . On peut donc avec cela évaluer les quantités $T(\varepsilon)$ et $H(\varepsilon)$ ci-dessus et ce relativement à la grille $G(\varepsilon)$.

-- Application de l'A.P.R au calcul de $d_c(E)$ et $d_i(E)$.

Pour un entier $p \geq 2$, considérons une suite décroissante d'entiers $(n_s)_{s=1..p}$. Chaque entier de cette suite représente un nombre de subdivisions du domaine carré \mathfrak{D} incluant E, et on associe à cette suite une autre suite de réels $(\varepsilon_s)_{s=1..p}$ telle que $\varepsilon_s = (X_2 - X_1) / n_s$ soit la taille d'une grille $G(\varepsilon_s)$. La suite d'entiers est choisie de la façon suivante :

+ $(n_p = n^*)$ et donc $n_s > n^*$, pour $s \in [1, p[$, est pris tel que $\varepsilon^* = ((X_2 - X_1) / n^*)$ soit assez proche de 0 et cela conformément aux définitions de $d_c(E)$ et $d_i(E)$.

+ $\forall s \in [2, p]$, n_s divise n_1 .

+ n_1 est choisi, comme on le verra dans la section (b-4) aussi grand que possible. Appliquons l'algorithme du Pavage régulier à E avec les paramètres N et $(n=m) = n_1$ (la grille associée est donc $G(\varepsilon_1)$) : on obtient alors les quantités $|r^{(\varepsilon_1)}_{ij}|$ où $(i,j) \in ([1, n_1])^2$ et $\varepsilon_1 = (X_2 - X_1) / n_1$.

D'après la construction même du maillage $G(\varepsilon_1)$ de \mathfrak{D} , et donc de ses $(n_1)^2$ cellules $r^{(\varepsilon_1)}_{ij}$, on constate aisément que, pour $(i^*, j^*) \in ([1, n_s])^2$ et $s \in [2, p]$, les entiers $|r^{(\varepsilon_s)}_{i^*j^*}|$ relatifs à la grille $G(\varepsilon_s)$ où $\varepsilon_s = (X_2 - X_1) / n_s$, se **déduisent** de ceux correspondants à la grille $G(\varepsilon_1)$ (voir ci-dessus) de la façon suivante :

Si l'on pose $\rho_s = n_1 / n_s$ ($s \in [2, p]$), $F_1(u) = \rho_s (u-1) + 1$, $F_2(u) = \rho_s u$ pour $u \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|r^{(\varepsilon_s)}_{i^*j^*}| = \sum_{(i,j)} [|r^{(\varepsilon_1)}_{ij}|] \quad i \in [F_1(i^*), F_2(i^*)], j \in [F_1(j^*), F_2(j^*)] \dots \dots \dots (##)$$

Estimer la dimension de capacité $d_c(E)$ et la dimension d'information $d_i(E)$ consiste à ajuster, par une droite aux moindres carrés, les 2 nuages ainsi formés, en l'occurrence $(\ln(\epsilon_s), -\ln(T(\epsilon_s)))_{s=1..p}$ et $(\ln(\epsilon_s), -H(\epsilon_s))_{s=1..p}$. Les pentés des deux droites donnent une valeur approchée de la dimension correspondante ([16]).

Connaissant, d'après l'égalité (##), les valeurs $|r(\epsilon_s)_{ij}|, (i,j) \in ([1, n_s])^2$ et $s \in [2, p]$, l'algorithme résumant le calcul numérique de ces deux dimensions se présente comme suit :

```

s ← 2
tant que (s ≤ p) faire
Début
    es = n1/ns , d1 ← 0 , d2 ← 0
    i* ← 1
    tant que (i* ≤ ns) faire
    Début
        j* ← 1
        tant que (j* ≤ ns) faire
        Début
            i1 ← F1(i*) , i2 ← F2(i*)
            j1 ← F1(j*) , j2 ← F2(j*) ,
            i ← i1 , t ← 0
            tant que (i ≤ i2) faire
            Début
                j ← j1
                tant que (j ≤ j2) faire
                Début
                    t ← t + |r(ε1)ij|
                    j ← j + 1
                Fin (j)
                i ← i + 1
            Fin (i)
            si (t > 0) faire
            Début
                d1 ← d1 + 1 , t ← t/N
                d2 ← d2 - (t) ln (t)
            Fin (si)
            j* ← j* + 1
        Fin (j*)
        i* ← i* + 1
    Fin (i*)
    ln(εs) ← ln((X2-X1)/ns) , -ln(T(εs)) ← -ln(d1) , -H(εs) ← -d2
    s ← s + 1
Fin (s).

```

b-4 Application de l'algorithme précédent à quelques compacts du plan .

Pour avoir un maximum de points dans chaque nuage $(\ln(\epsilon_s), -\ln(T(\epsilon_s)))_{s=1..p}$ et $(\ln(\epsilon_s), -H(\epsilon_s))_{s=1..p}$, il faut choisir la suite $(n_s)_{s=1..p}$ comme précédemment, tenant compte des contraintes machines et de celles du sous-programme exploitant l'algorithme, tel que p soit maximal. Autrement dit, il est intéressant d'utiliser un nombre n_1 possédant plusieurs diviseurs.

A titre indicatif, si $n_p=(n^*)=20$ on a les couples (n_1, p) suivants: $n_1=288, p=8$; $n_1=300, p=9$; $n_1=320, p=7$; $n_1=350, p=6$; $n_1=240, p=8$.

Sous le D.P.S 8 (système Multics) du C.I.C.G, les contraintes ci-dessus nous imposent la valeur $n_1=300$. Dans les expériences qui suivent, on fixera donc n_1 à 300; pour $n^*=20$ la suite $(n_s)_{s=1..9}$ est : $n_1=300, n_2=150, n_3=100, n_4=75, n_5=60, n_6=50, n_7=30, n_8=25$ et $n_9=n^*=20$.

Résultats numériques

L'application de l'algorithme précédent est faite sur les trois ensembles fractals E dessinés à la fin du chapitre (B-I); notons qu'ils sont tous formés d'un grand nombre de points $N=65536$.

Exemple 1 : E=ensemble de Julia de la fraction $R(z)=(1/4)(z+1/z)^2$ où $z \in \mathbb{C}$, le domaine carré incluant E est $\mathfrak{D} = ([-4.1, 4.1])^2$.

Valeurs numériques trouvées : $d_c \approx 1.43$, $d_i \approx 1.51$.

Exemple 2 : ensemble de Julia du polynôme $P(z)=z^2+(1/4)$, $\mathfrak{D} = ([-1.1, 1.1])^2$.

Estimations des dimensions : $d_c \approx 1.04$, $d_i \approx 1.01$

D'après l'égalité (#) de la section (b-1) ci-dessus, la dimension fractale (ici, de Hausdorff) de cet ensemble a, pour $p=1/4$, la valeur : $d_H(p) \approx 1.02$.

Exemple 3 : Attracteur de Henon ([21]).

Le système dynamique $(\mathbb{R}^2, \mathbb{N}, f)$ est engendré par l'application :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (1+y-1.4x^2, 0.3x)$$

et le domaine $\mathfrak{D} = ([-1.285, 1.285])^2$.

Le point de départ $X_0=(x_0, y_0)=(1.1606\dots, -0.0958\dots)$ de l'itération $X_{n+1}=f(X_n)$ ($n=0..65535$) est supposé pris sur l'attracteur .

Valeurs numériques trouvées par notre méthode : $d_c \approx 1.24$, $d_i \approx 1.25$

estimations par d'autres algorithmes (cf. [18])

algorithme du "box-counting" : $d_c \approx 1.28$

algorithme des "boîtes centrées" : $d_c \approx 1.29$, $d_i \approx 1.26$

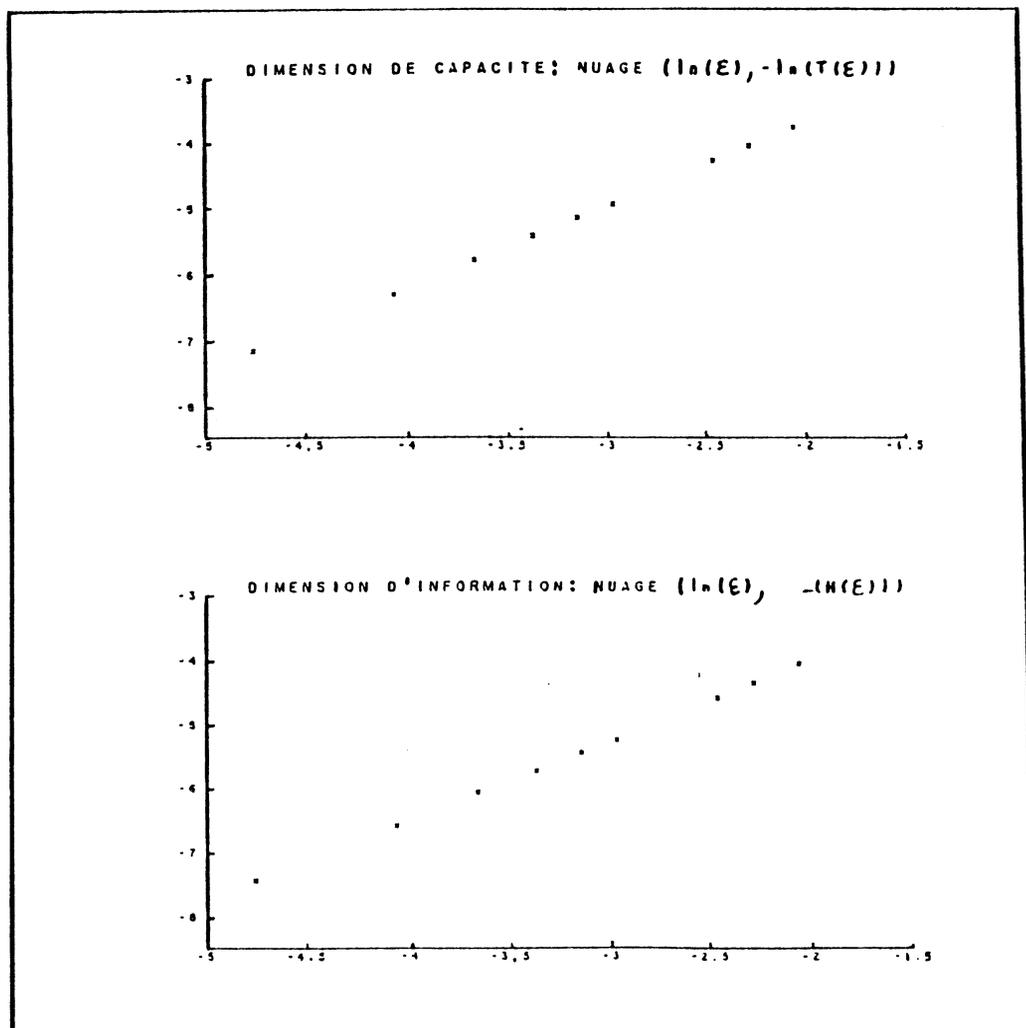
Remarque : On sait que, théoriquement, les 2 dimensions considérées ici sont reliées par l'inégalité : $d_c(E) \geq d_i(E)$. Mais on constate que celle-ci n'est, numériquement, pas respectée pour certains des exemples d'ensembles E traités ici.

Ceci provient du fait que le rapport entre la taille (ϵ_1) de la grille la plus fine $G(\epsilon_1)$ et celle (ϵ_p) de la grille $G(\epsilon_p)$ (dite "grille grossière") n'est pas assez grand; sur ce point, on renvoie à ([26]).

IMPORTANT:

Le préconditionnement des N points de E selon deux (ou plusieurs) grilles incluant E , assez fines et distinctes, contribuera à augmenter le nombre des points des nuages $(\ln(\epsilon), -\ln(T(\epsilon)))$ et $(\ln(\epsilon), -H(\epsilon))$ et de là à une estimation meilleure de la dimension de capacité $d_c(E)$ et d'information $d_i(E)$ de E . Mais, le temps d'exécution de notre algorithme de calcul de ces deux dimensions nous amènera dans ce cas à opter pour un traitement simultané de ces grilles.

Pour terminer, on trace ci-après les deux nuages de points $(\ln(\epsilon_s), -\ln(T(\epsilon_s)))_{s=1..9}$, $(\ln(\epsilon_s), -H(\epsilon_s))_{s=1..9}$ obtenus par notre algorithme et correspondants à l'exemple 3. L'approche aux moindres carrés linéaire qu'on a utilisée dans l'estimation des deux dimensions concorde bien avec l'aspect de ces nuages.





PARTIE C

ELSEP : UN LOGICIEL D'ETUDE LOCALE D'UN SOUS-ENSEMBLE DU PLAN

- DESCRIPTION
- EXPERIMENTATIONS NUMERIQUES



C - ELSEP : un logiciel d'Etude Locale d'un Sous-Ensemble du Plan Description et expérimentations numériques.

I- Introduction

A travers cette dernière partie, on présente un logiciel d'Etude Locale d'un Sous-Ensemble du Plan (en abrégé : ELSEP). Ce logiciel est formé d'algorithmes dont la quasi-totalité ont été exposés et testés dans les précédentes parties A et B.

Avant la description de l'algorithme général d'ELSEP, il est important de signaler que le programme l'exploitant est écrit en langage PASCAL sur le D.P.S 8 (Système Multics) du Centre Interuniversitaire de Calcul de Grenoble (C. I. C. G.). Ce programme fait appel, pour ses parties graphiques, au logiciel M.G.L (Micro-Graphique Language) accessible sur les terminaux TEKTRONIX (4107, 4109, 4115...).

II- Description générale d'ELSEP

L'étude locale que nous avons menée sur un sous-ensemble E du plan, et ce tout au long des deux précédentes parties, peut se résumer comme suit :

- * Mesure locale $M(x,r)$ autour d'un point x de E (thème des chapitres I et II de la partie A)
- * Zoom numérique sur une région quelconque R de E :
 - R est un rectangle (chapitre B-I)
 - R est un disque (paragraphe (a) du chapitre B-II)
- * Dimension fractale de E (paragraphe (b) du même chapitre).

Dans la description ci-dessous, chaque étape du logiciel est repérée par une étiquette. En explicitant une étape, on renverra, soit à la section correspondante dans la partie A (ou B) contenant l'algorithme qui y est utilisé, soit à une référence s'y rapportant.

Dans toute la suite, E désigne un ensemble de N points dans le plan, c'est-à-dire $E = \{(x_i, y_i)\} i=1..N$. Dans la plupart des cas, E est un ensemble approchant un compact généré par une application : ensemble de Julia d'une fraction rationnelle complexe, attracteur étrange d'un système dynamique à temps discret... etc. Signalons enfin que l'on garde toutes les notations utilisées dans les parties A et B.

-- Principales étapes de l'algorithme général

1- Existence de l'Ensemble E

- si E existe, aller à l'étape 3

2- Génération de N points de E (N est fixé par l'utilisateur)

- se reporter à ([1]) si E est l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle.

→ on en tire le domaine $\mathfrak{D}=[X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$ incluant E

- aller à l'étape 4

3- E est préconditionné ?

- si oui : Entrée des données suivantes

- Nombre N de points de E et lecture de ces points
- Coordonnées X_1, X_2, Y_1 et Y_2 du domaine \mathfrak{D}
- Nombres de subdivisions n et m sur $[X_1, X_2]$ et $[Y_1, Y_2]$ ($n, m \ll N$)
- lecture des pointeurs $P_1(i, j)$ ($(i, j) \in [1, n] \times [1, m]$) (voir le § 3-3-2 du chapitre B-I) puis aller à 5

4- Opération de préconditionnement de E selon $\mathfrak{D} = [X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$

- donnée des nombres n et m de subdivisions
- Appel de l'A.P.R. avec les paramètres N, n et m (chap. B-I)

Signalons que le sous-programme correspondant à cette opération a déjà été présenté à la fin du même chapitre.

5- Visualisation de l'ensemble E ?

(Au choix de l'utilisateur)

6- Sélection d'un rectangle $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathfrak{D}$?

6-1 Si oui

(i) Entrée de a, b, c et d

Validation de ces données

(ii) Appel de l'A.P.R.

(voir le temps de réponse du problème du Range-Searching au § 3-3-3 chap. B-I)

→ obtention du nombre ($|R|$) de points de E inclus dans R

(iii) Mémorisation des coordonnées a, b, c et d de R ainsi que des $|R|$ points reportés dans (ii).

6-2 Sinon

- (i) Calcul de la dimension fractale de l'ensemble E ?
si oui : préconditionnement de E selon la grille la plus fine et application du procédé décrit au (§ (b)-chap. B-II)
- (ii) *Fin des expériences.*

7- Choix d'un point $p=(x_0,y_0)$ dans R ?

- + Si oui : Visualisation des $(|R|)$ points de R
- + Si non aller à 5

8- Sélection sur le dessin de R, selon deux modes (lecture/visuel), du point p. Validation des coordonnées x_0 et y_0 de p

9- Début de la partie "TRAITEMENT" :

9-1 Entrée d'un rayon r_{max} et d'un pas h autour de $p = (x_0,y_0)$

9-2 Détermination des cellules du maillage de \mathcal{D} qui intersectent le disque

$D=D(p,r_{max})$ (cf. Technique de codage : § (a) chap. B-II)

→ Report et stockage des points de $(E \cap D)$; soit $(|D|)$ leur nombre

9-3 Visualisation des points $(x_i,y_i)_{i=1..|D|}$ obtenus ?

(Comme dans 5)

9-4 Tri par l'algorithme du TRI-RAPIDE (Knuth [23]) de ces $|D|$ points par ordre décroissant des distances euclidiennes :

$d_i=d(p=(x_0,y_0),(x_i,y_i))$ $i=1..|D|$ (temps en $O(|D| \log_2 |D|)$)

9-5 Détermination de la mesure locale $M(p,r)$ autour du centre p :

- Calcul des $(s=\lceil r_{max}/h \rceil)$ valeurs numériques $\alpha(r_i)$ de l'exposant α de $M(p,r)$ avec $r_i=r_{max}-(i-1)h$ ($i \in [1,s]$) par appel de l'algorithme d'extrapolation. Voir les étapes 1 et 2 du dit procédé au (§ II-3-1) de la partie A)

9-6 Visualisation des $(s=\lceil r_{max}/h \rceil)$ points $(r,\alpha(r))$ ainsi trouvés

9-7 Ajustements et extrapolations : *stratégie interactive*

- (i) Choix des points à négliger parmi ceux du nuage initial
(pour les critères du choix, on renvoie au § II-3-2 partie A)

- (ii) Ajustement aux moindres carrés du nuage, éventuellement tronqué, puis détermination de l'extrapolation. Les fonctions d'ajustements proposées sont indiquées au (§ II-5-3 partie A)

9-8 Un autre essai sur les points à omettre ?

- Si oui, aller à (9-7)

9-9 Changement des paramètres (rmax et h) autour du point $p=(x_0, y_0)$?

- Si oui, aller à (9-1)

- Sinon aller à l'étiquette 7 .

Remarque: L'utilisateur a la possibilité de changer certaines données qu'il fait entrer. Cette opération, appelée Validation des données, a été utilisée aux étapes numérotées (6-1-(i)) et 8 .

III- logiciel ELSEP : Description des expérimentations numériques

Dans cette section, on présente le contenu des expérimentations effectuées sur le D.P.S 8 (Système Multics) en appliquant notre logiciel à quelques compacts du plan. Ces compacts sont des ensembles invariants de systèmes dynamiques (holomorphes ou non) que l'on a approchés par des ensembles finis E composé chacun de (N=65536) points.

--- Description des expériences

Sur chaque exemple d'ensemble traité ici (au nombre de 3), on suivra le schéma général d'ELSEP ci-dessus présenté.

Plus précisément, une expérience sur E comporte successivement

1) Le dessin de l'ensemble E considéré

2) Le préconditionnement de ses N points selon un pavage du domaine $\mathcal{D}=[X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2] \supset E$. Le domaine \mathcal{D} est fixé et les nombres n et m de subdivisions suivant $[X_1, X_2]$ et $[Y_1, Y_2]$ seront toujours pris égaux à (n=m=50). Le choix de cette dernière valeur est justifié par les résultats numériques du chapitre I de la partie B. Rappelons au passage que l'opération de préconditionnement, selon un maillage régulier de ce type, d'un ensemble formé de N=65536 points se fait en un temps $P(N, n, m) \simeq 63$ secondes C.P.U.

3) Choix d'un rectangle $R=[a, b] \times [c, d]$ contenu dans E

Après le dessin des points de cette région, on indique le temps de réponse correspondant. A l'aide de la méthode du balayage séquentiel (voir les tests de la fin du chap. B-I), rappelons que le temps de réponse nécessaire au report des points d'une région quelconque de E est de l'ordre de 6 sec/C.P.U.

4) Sélection d'un point $p=(x_0, y_0)$ dans R

Si le point p n'est pas connu, les terminaux TEKTRONIX (série 410X, 4115...etc) nous permettent de choisir, à l'aide d'un curseur graphique, un point p_1 sur l'écran (où figurent les points de R). Une opération de recherche du plus proche voisin (qu'on note p) de p_1 dans E doit donc être effectuée.

5) Détermination de la mesure locale $M(p,r)$ autour de p (cf. chap. A-II)

Pour cela, on se place dans un voisinage $B(p,r)$ de p afin d'évaluer l'exposant numérique $\alpha(r)$. En diminuant le rayon r , on obtient ainsi (tracé à l'appui) un nuage de points $(r,\alpha(r))$ associé au point p .

remarque : Tous les nuages $(r,\alpha(r))$ que l'on va traiter sont formés de (100) points.

6) Nous ajustons ensuite aux moindres carrés le nuage précédent, éventuellement tronqué de quelques points d'abscisse proche de 0, par les fonctions (indépendantes) suivantes:

(i) $F_1(r) = a$ (constante) (ii) la droite $F_2(r) = a r + b$

(iii) la parabole $F_3(r) = a r^2 + b r + c$

Si $\alpha(r)$ est périodique (de période T) en $\ln(r)$ (comme c'était le cas des 2 exemples étudiés en section (II-5) de la partie A), on présente le nuage $(\ln(r),\alpha(r))$ puis on ajuste par

(iv) $F_4(r) = a + b r + c r \sin(\omega \ln(r)) + d r \cos(\omega \ln(r))$

(v) $F_5(r) = F_4(r) + e \sin(\omega \ln(r)) + f \cos(\omega \ln(r))$ avec $\omega=2\pi/(T^*)$

T^* est la valeur numérique de T , elle est prise égale à la distance entre deux sommets successifs du nuage $(\ln(r),\alpha(r))$.

Les valeurs approchées de l'exposant α de $M(p,r)$ sont déterminées par extrapolation: $\alpha_i = F_i(0)$ ($i=1..3$), $\alpha_i = \lim_{(r \rightarrow 0)} [F_i(r)]$ ($i=4,5$); les erreurs $(\epsilon_i)_{i=1..5}$ d'ajustement sont données pour rendre compte de la justesse de l'approximation par chacune des fonctions proposées.

Rappelons que, contrairement aux fonctions $(F_i)_{i=1..4}$, $F_5(r)$ ne vérifie pas l'hypothèse du (Th. 5) (section 1 du chap. A-II).

remarque : Une région R étant choisie et fixée, plusieurs points $p=(x_0,y_0)$ lui appartenant peuvent être sélectionnés et traités les uns à la suite des autres.

IV- Premier exemple d'application d'ELSEP

L'ensemble E est pris ici égal à l'ensemble de Julia $J(R_q)$ de la fraction rationnelle complexe $R_q(z) = (z^2 + q - 1)^2 / (2z + q - 2)^2$ pour $q=3$.

Rappelons que cet exemple a déjà été étudié dans la section (II-5) du (chap. A-II) pour $q=2$ et $q=3/2$. Nous y avons noté que $J(R_q)$ est invariant par la transformation homographique $H_q(z) = [(2-q)z + 2(q-1)] / [2z + (q-2)]$. Cette propriété nous a permis de déterminer numériquement l'exposant α de la mesure locale $M(z^*,r)$ autour de points z^* de $J(R_q)$ en liaison étroite avec l'étude de certains modèles discrets de la physique statistique (cf. [12],[11] et [35]).

On commence par dessiner l'ensemble $E=J=J(R_3)$ de l'application $R_3(z)=R(z)=(z^2+2)^2/(2z+1)^2$ formé de $(N=4^8=65536)$ points. Remarquons que ce nombre est une puissance du degré de R ; ainsi choisie, la forme de N , ainsi que sa grandeur, nous permettent d'approcher au mieux la mesure limite μ sur J . Sur ce dernier point, on renvoie à la section (I-1-3) du (chap. A-I).

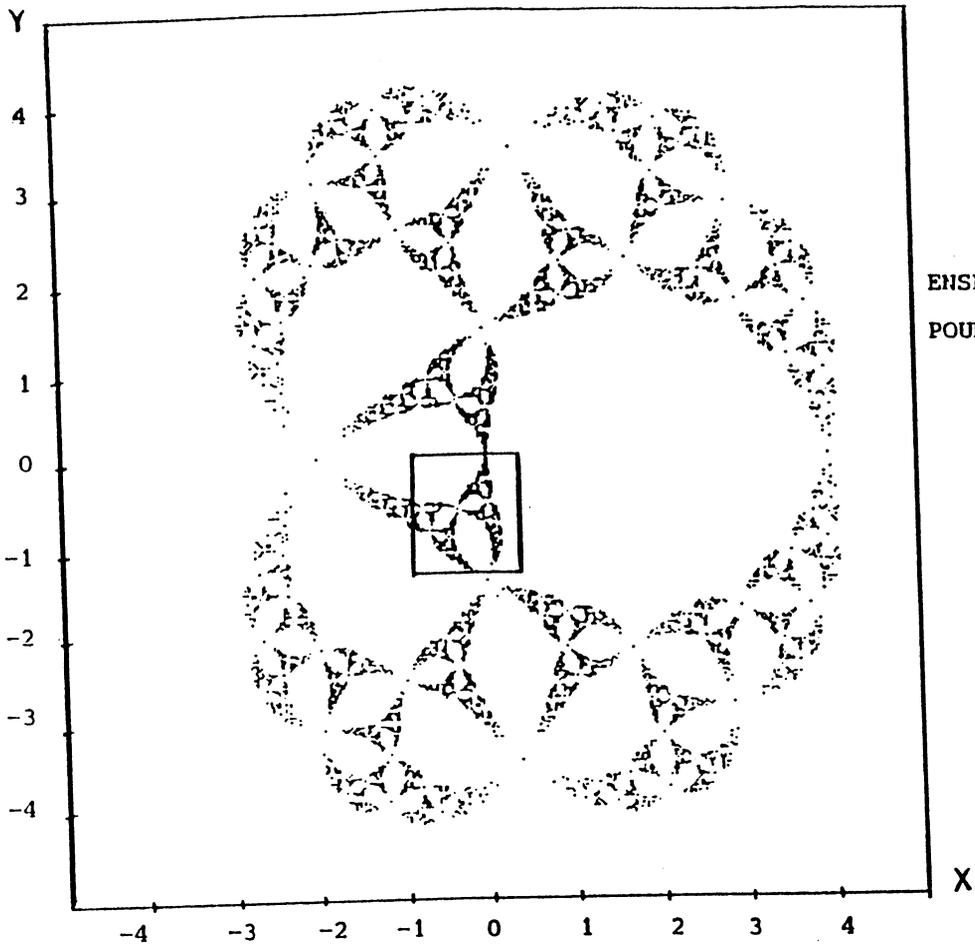
On constate sur le dessin de J que celui-ci a une structure fractale ([29]) et que presque toutes ses régions se rejoignent en des points qu'on pourrait appeler "points d'articulation".

Du point de vue physique, on va s'intéresser au seul point fixe répulsif réel et plus grand que 1 de la fraction $R(z)$ qui est $z^*=4$. D'après Derrida et al ([11]), l'exposant α de l'énergie libre (de la mesure locale $M(z^*,r)$, dans notre contexte) autour de ce point est approximativement (2.4094...).

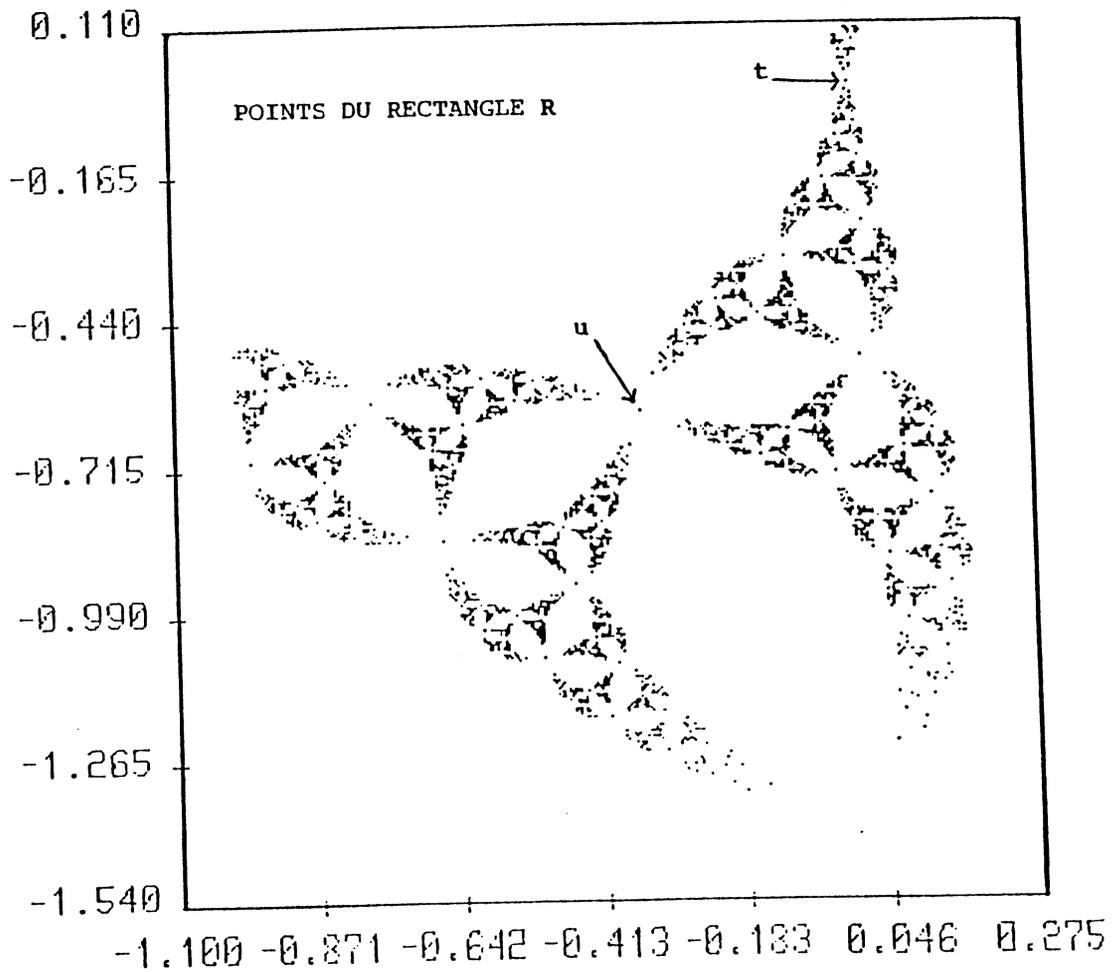
Mais pour la même raison signalée pour les cas ($q=2$ et $q=3/2$), il est difficile d'évaluer numériquement $M(z^*,r)$ (voir le § (II-3-0) du chap. A-II pour l'origine de cette difficulté): à titre d'exemple, la boule fermée $B(z^*,0.4)$ ne contient que (29) points de J . Le seul recours pour lever cette contrainte est de faire encore appel à la propriété d'invariance de $R(z)$ par $H_3(z)=H(z)=(4-z)/(2z+1)$; de là, il revient au même de chercher l'exposant α autour du point $t=H(z^*)=0$.

En plus de ce point t , on déterminera la mesure locale autour d'un "point d'articulation". Dans cet ordre d'idées, on sélectionne dans J une région R contenant à la fois un point (u) de ce dernier type et le point $t=0$: notre choix s'est alors porté sur le rectangle $R=[-1,0.25] \times [-1.4,0.1]$.

L'origine t et le point $u=(-0.3483\dots,-0.6158\dots)$ sont indiqués par des flèches sur le dessin des points de R ci-dessous présenté avec celui de l'ensemble initial J .



ENSEMBLE J(R)
POUR $q=3$



Il est utile de signaler que les ($N=65536$) points de J ont été auparavant préconditionnés selon un pavage régulier d'un domaine $\mathcal{D}=[-4.2,4.2] \times [-4.2,4.2]$ incluant J , les nombres de subdivisions n et m du maillage sont, rappelons-le, fixés et égaux à 50.

Les points $z=(x,y)$ de J vérifiant $z \in \mathbb{R}$ sont au nombre de ($F=15921 \approx N/4$), et le temps de réponse nécessaire au report de ces F points est $Q(N,n,m)=2.30$.

On s'efforcera dans ce qui suit de déterminer l'exposant α de la mesure locale autour des deux points centraux t et u .

--- Cas du point $t=0$

On se place au voisinage de t , on obtient (100) points $(r, \alpha(r))$ où r désigne un rayon (cf. chap. A-II).

Ce nuage est caractérisé par une série d'oscillations: à l'instar de $(J(\mathbb{R}_q))_{q=2,3/2}$,

$\alpha(r)$ est périodique en $(\ln(r))$ de période proche de $T^*=0.58$. Pour illustrer cette périodicité, les points $(r, \alpha(r))$ et $(\ln(r), \alpha(r))$ sont dessinés dans la page qui suit.

En omettant (ν) points $(r, \alpha(r))$ de petite abcisse, on donne ci-après les valeurs extrapolées (notées α -ext) de l'exposant α après avoir ajuster les points restants par les 5 fonctions introduites précédemment (section ci-dessus); l'erreur d'ajustement (ε) est indiquée pour chacune d'elles.

Résultats numériques :

- Ajustement par $F_1(r)$

$$\nu = 17, \alpha\text{-ext} = 2.35, \varepsilon = 6.18 \cdot 10^{-2}$$

- Ajustement par $F_i(r)$ ($i=2,3$)

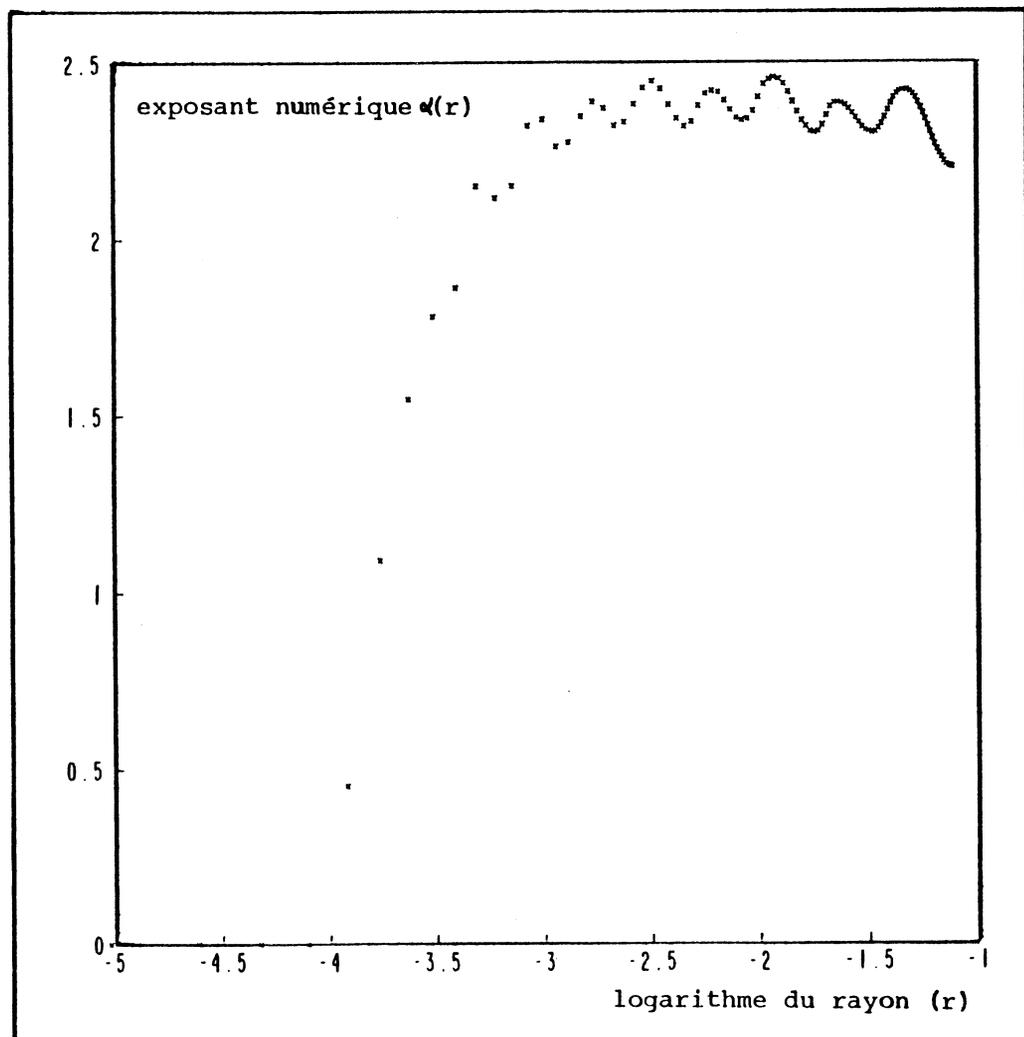
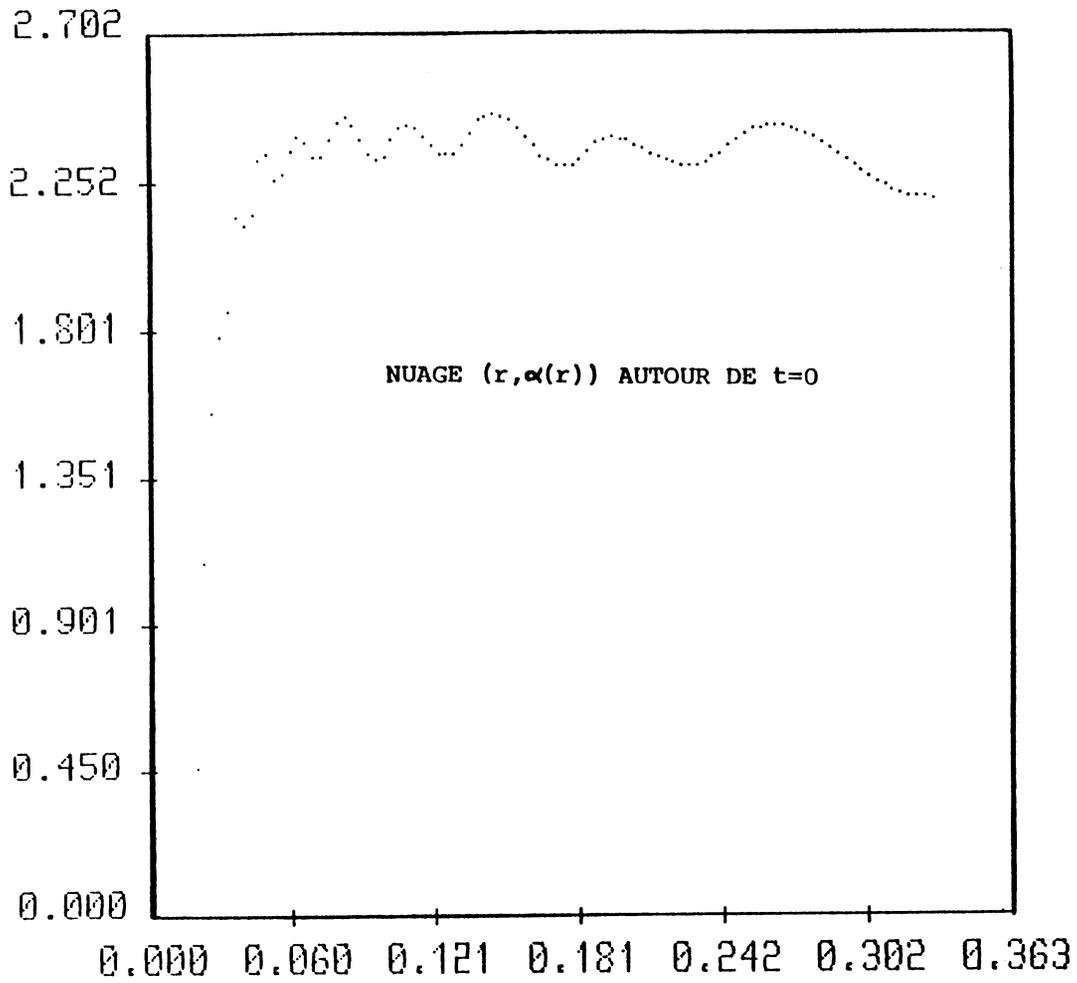
$$\nu = 17, \alpha\text{-ext} = 2.42, \varepsilon = 5.37 \cdot 10^{-2}$$

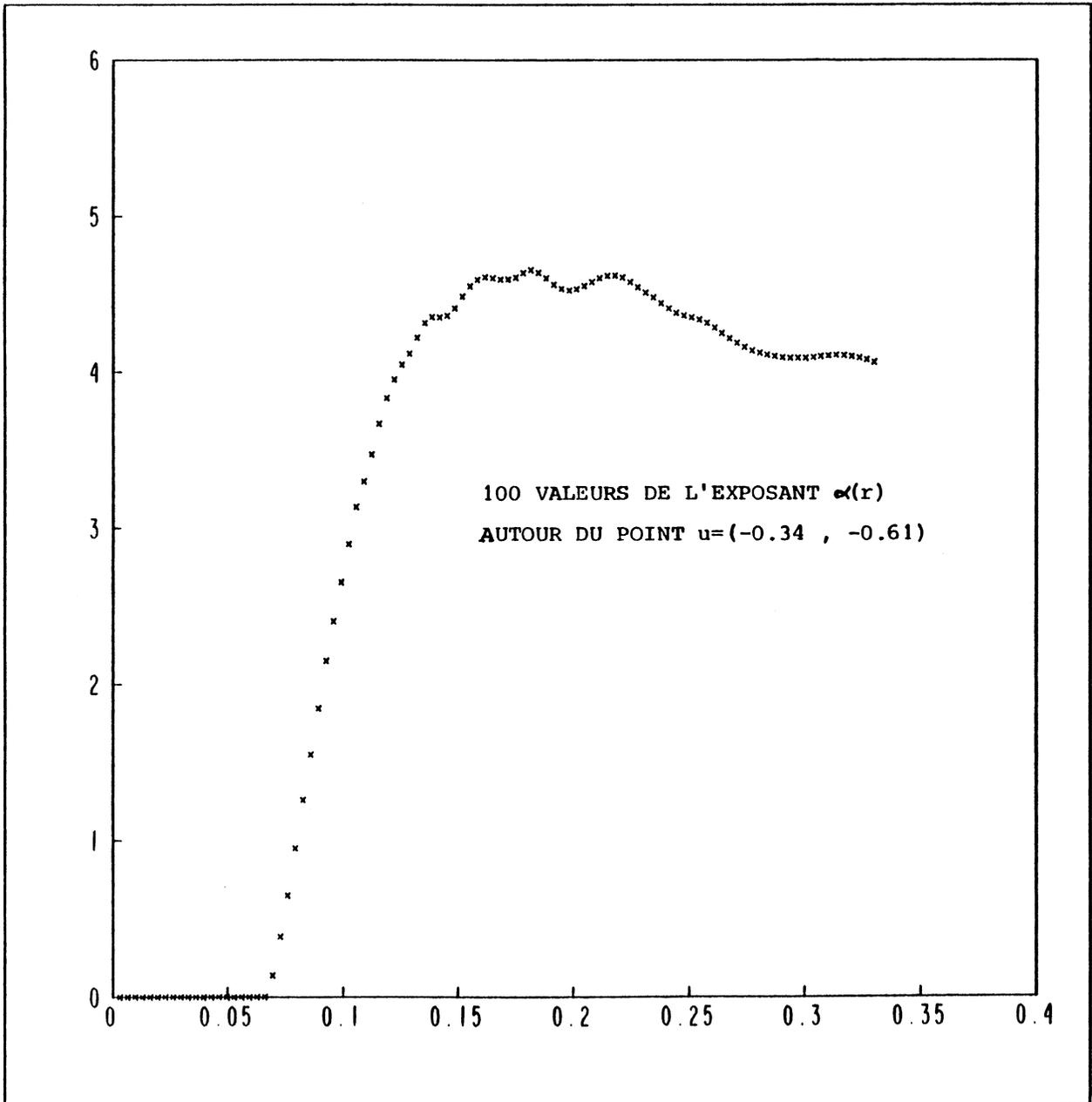
- Ajustement par $F_4(r)$ (1^{ère} fonction périodique avec $\omega=2\pi/T^*$)

$$\nu = 21, \alpha\text{-ext} = 2.43, \varepsilon = 3.90 \cdot 10^{-2}$$

- Ajustement par $F_5(r)$ (2^{ème} fonction périodique avec $\omega=2\pi/T^*$)

$$\nu = 21, \alpha\text{-ext} \approx 2.44, \varepsilon = 3.76 \cdot 10^{-2}$$





V- Deuxième exemple d'application d'ELSEP

Dans cet exemple, E est l'ensemble de Julia du polynôme $P(z)=z^2+p$ avec $p=-1/2$.

On a vu au (§ (b) du chap. B-II) que $J(z^2+p)$ est homéomorphe à un cercle pour p "petit" (dans \mathbb{C}). Dans le cas réel, ceci a lieu si $p \in]-3/4, 1/4[$ (cf. Brolin [7]).

De plus, on connaît la valeur exacte de l'exposant α autour d'un point quelconque x de $J(P)$ pour $p=0$ et $p=-2$ (voir le chap. A-II).

Rappelons brièvement ces valeurs :

- si $p=0$, $J(P)$ est le cercle unité $C(0,1)$, $\alpha=1 \forall x \in J$
- si $p=-2$, $J(P)=[-2,+2]$, $\alpha=1/2$ si $x=\pm 2$ et $\alpha=1$ si $x \in]-2,+2[$

Il nous a alors paru important d'étudier la variation de l'exposant α autour de points x de $J(z^2+p)$, $-2 \leq p \leq 0$, celle-ci sera illustrée ici pour $p=-1/2$.

Important : Parmi les différentes définitions de la dimension fractale (D) d'un compact E (voir [16]), celle appelée la dimension ponctuelle $d_{\text{ponc}}(x)$ en x de E coïncide, dans notre cas, avec le paramètre positif α de la mesure locale autour du point x .

-- *Comportement itératif de $P(z)=z^2-(1/2)$: Obtention de $J(P)$*

Outre le point à l'infini qui est toujours un point fixe super-attractif des polynômes, $P(z)$ a deux autres points fixes à distance finie qui sont les réels $z_1=(1-\sqrt{3})/2$ et $z_2=(1+\sqrt{3})/2$.

Le premier de ces points est attractif ($|P'(z_1)| < 1$) alors que z_2 est répulsif; d'après la définition de $J(P)$ (cf. section I-0-2 du chap. A-I) on a

$$J(P) \subseteq \text{adhérence de } \{z \in \mathbb{C} / P_n(z)=z_2; n=0,1,2,\dots\} \dots\dots\dots (\#).$$

De plus les itérés successifs du point critique ($z^*=-1/2$) du polynôme P tendent très rapidement vers z_1 , il n'existe donc pas d'autre cycle attractif ([17]).

On en déduit que le système dynamique holomorphe engendré par $P(z)$ admet trois ensembles invariants, à savoir :

- le domaine immédiat d'attraction du point z_1
- le domaine immédiat d'attraction du point à l'infini
- le compact $J(P)$ qui sépare les deux domaines précédents

Pour approcher $J=J(P)$, nous utilisons l'inclusion (#) avec ($n=0,1,2,\dots,16$) (voir le procédé décrit dans [1]) : on obtient alors ($N=2^{16}=65536$) points de cet ensemble, ensemble dessiné dans la suite.

Comme on peut le constater, J est une courbe de Jordan simple (ie sans point double), ceci confirme d'ailleurs les conclusions de Brolin ([7]). Malgré sa similitude avec le cercle unité (cas où $p=0$), et à la différence de celui-ci, $J(z^2-(1/2))$ est fractal (ou encore a une structure de self-similarité) et n'admet de tangente en aucun point.

--- Etude locale de $J=J(P)$

Du fait de la symétrie de J par rapport à l'origine, on restreindra notre étude uniquement aux points z du premier quadrant ($\Re(z) \geq 0$ et $\Im(z) \geq 0$).

Mis à part le réel $x_0=(1+\sqrt{3})/2$ et l'imaginaire $x_1=(0.9306\dots)$, tenant compte de la structure fractale de J , on peut globalement distinguer, parmi les points de ce quadrant, deux différentes classes :

- des points situés dans des "creux" (dits points de la 1^{ère} classe)
- dans des "pics" se trouvent ceux de la 2^e classe

Dans les expériences qui vont suivre, on estimera le paramètre α de la mesure locale autour de x_0 , x_1 et de plusieurs points de chaque classe; en particulier, on cherchera à savoir si ces derniers ont un exposant identique.

Pour accéder rapidement aux régions contenant les points qui nous intéressent, on effectue sur l'ensemble des (65536) points de J un préconditionnement selon le maillage formé de (50×50) cellules du domaine $[-1.5, 1.5] \times [-1.1, 1.1] \supset J$.

Trois régions R sont ensuite sélectionnées, ce sont les suivantes :

$$* R_1 = [1.12, 1.40] \times [-0.25, 0.25]$$

Le nombre de points trouvés dans $(J \cap R_1)$ est (9858) et le temps de réponse nécessité par ce report est (1.88 sec/C.P.U). En plus de $x_0=(1.3660\dots)$ qui appartient à R_1 , on y choisit aussi le point $x_2=(1.2404\dots, 0.0991\dots)$ qui fait partie de la première classe précédemment définie.

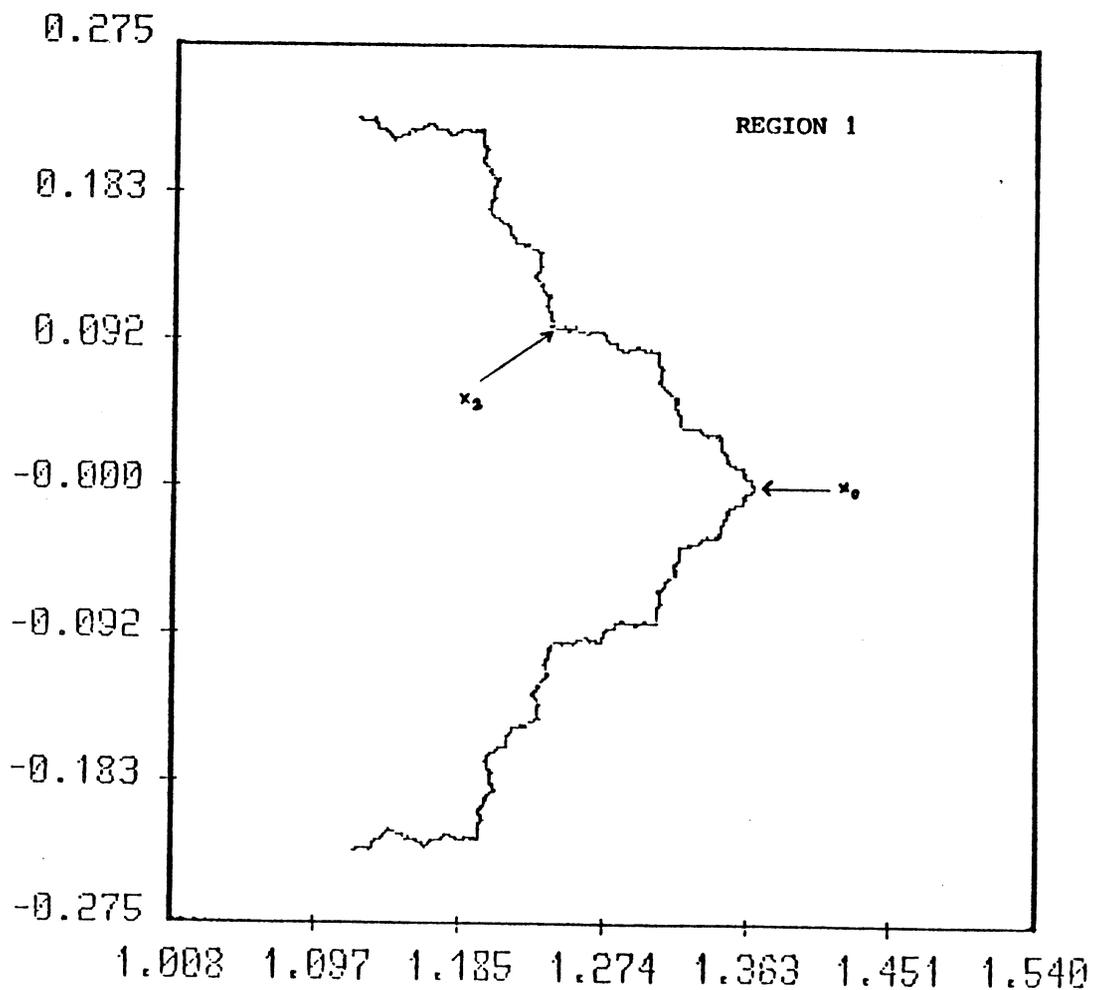
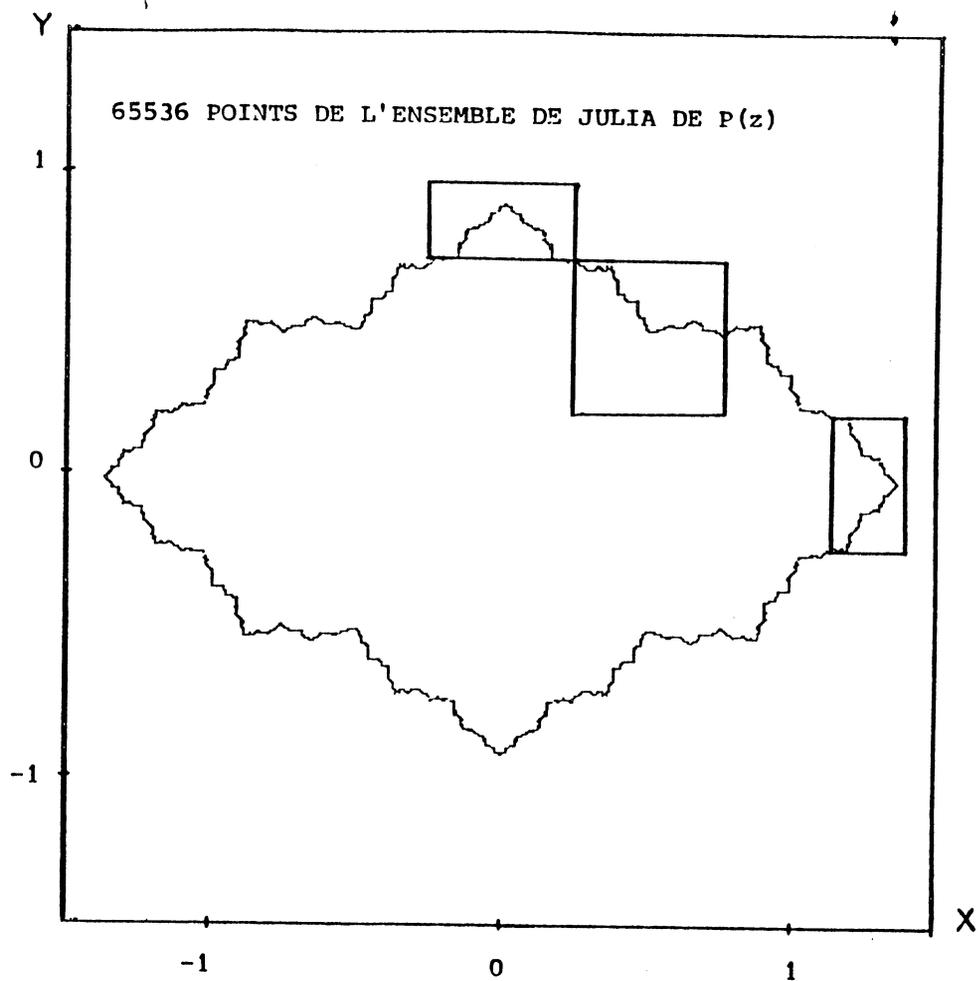
$$* R_2 = ([0.25, 0.75])^2$$

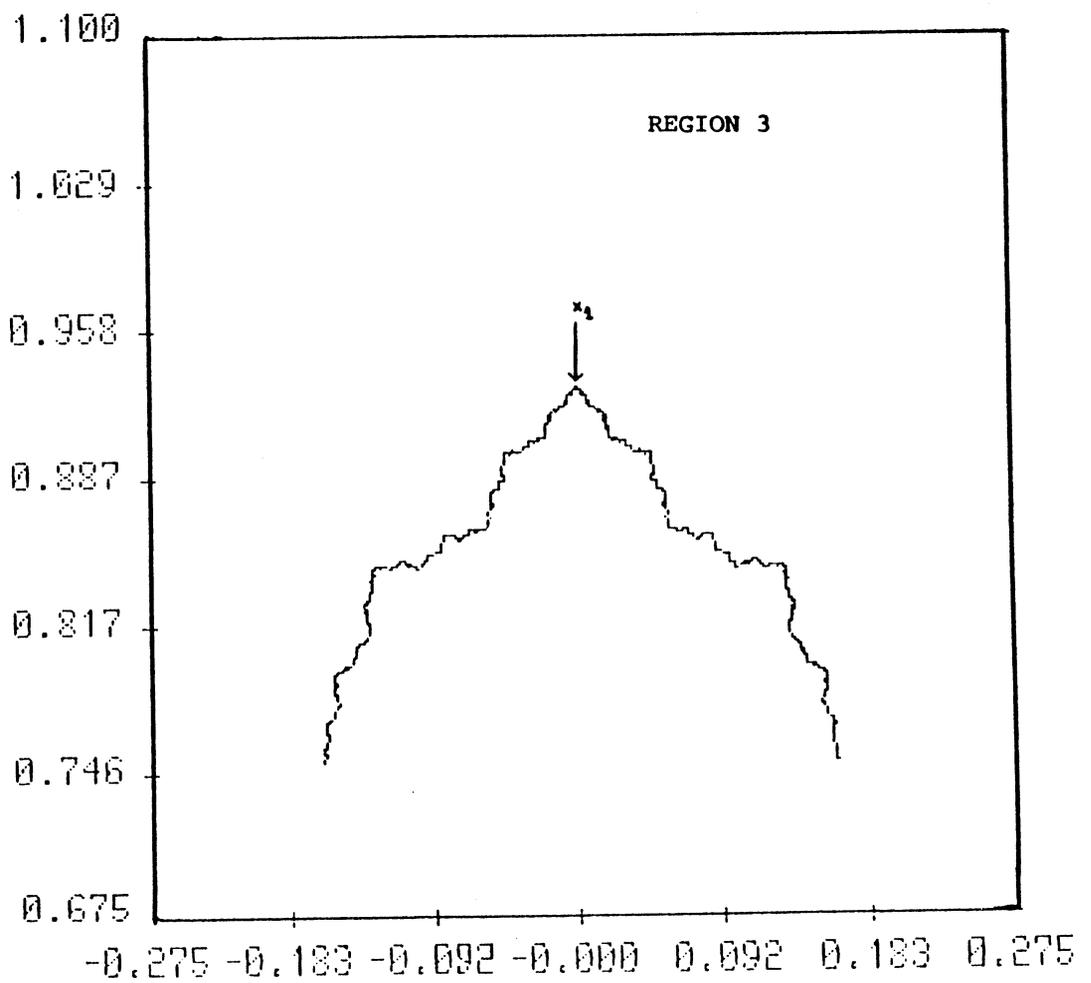
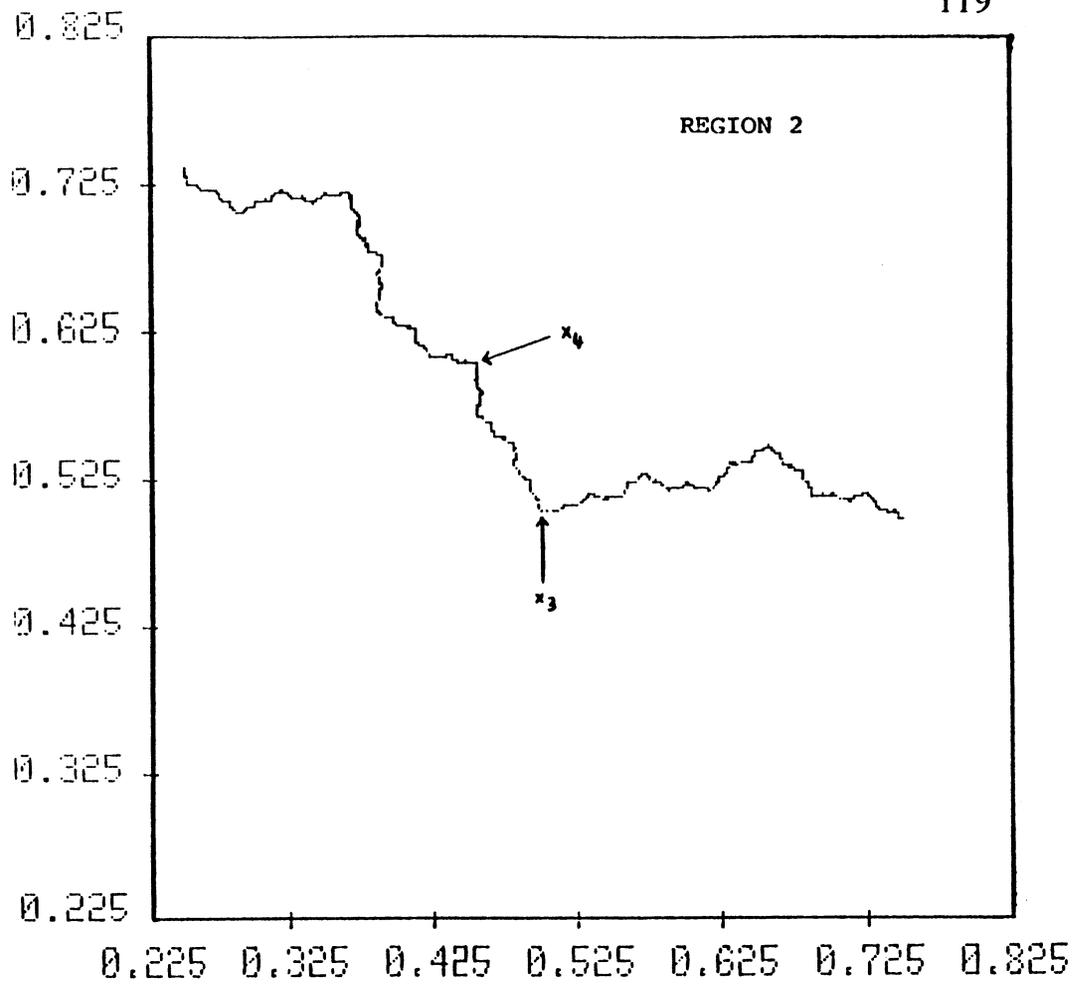
Nombre de points de J inclus dans R_2 : 3620 ; temps de réponse : 0.50 sec/C.P.U .

On cherchera à déterminer l'exposant α autour de deux points dans cette région, qui sont: $x_3=(0.4990\dots, 0.5029\dots)$ et $x_4=(0.4536\dots, 0.6025\dots)$. Notons que x_3 (resp. x_4) est, selon notre classification, dans la première (resp. deuxième) catégorie de points (voir ci-dessus).

$$* R_3 = [-0.25, 0.25] \times [0.75, 1.00]$$

Ce rectangle auquel appartient l'imaginaire pur $x_1=(0, 0.9306\dots)$ est composé de (5459) points de J , et il a fallu un temps ($t=0.67$ sec/C.P.U) pour les reporter. L'ensemble initial $J=J(z^2-(1/2))$ ainsi que les régions $(R_i)_{i=1..3}$ sont dessinés dans les pages qui suivent. Sur chacun des trois rectangles, on a indiqué le (ou les) point(s) que l'on a choisi(s).





--- *Traitement des points de la région R_1*

Les deux points choisis dans R_1 sont, rappelons-les, le réel $x_0 = ((1 + \sqrt{3})/2, 0)$ et $x_2 = (1.2404\dots, 0.0991\dots)$, ce dernier étant situé dans un "creux". On renvoie au dessin associé à R_1 quant à la localisation de ces points.

Autour de chacun d'eux, on appliquera le procédé d'extrapolation exposé au chapitre (A-II) afin d'obtenir un nuage expérimental de (100) points $(r, \alpha(r))$ où r est un rayon. Considérant l'aspect du nuage, on l'ajuste aux moindres carrés, après omission éventuelle des points de petite abscisse, par les fonctions $(F_i(r))_{i=1..5}$ (cf. la section III ci-dessus).

Remarque : Les fonctions périodiques en $(\ln(r))$ en l'occurrence $(F_i(r))_{i=4,5}$ ne seront bien sûr utilisées dans notre approche de α que si l'on observe une période T dans le nuage $(\ln(r), \alpha(r))$. Dans le cas contraire, on se restreindra aux ajustements par les fonctions $(F_i(r))_{i=1..3}$.

- Détermination de α autour de $x_0 = (1.3660\dots, 0)$

Dans ce but, on se place dans un voisinage $V(x_0)$ de x_0 (ici $V(x_0) = B(x_0, 0.12)$) puis on évalue numériquement l'exposant $\alpha(r)$ où $(0 < r \leq 0.12)$ (cf. la preuve du Th. 5 au chap. A-II); on en tire (100) points $(r, \alpha(r))$ que l'on trace ci-après.

Fait non constaté auparavant, $\alpha(r)$ ne subit aucune détérioration sensible quand r est très proche de 0 : à titre d'exemple, $\alpha(1.2 \cdot 10^{-3}) = 0.69$. De plus, le nuage de points est caractérisé par des oscillations analogues à celles déjà mises en évidence dans l'étude de l'exemple $J(R_q)$ ($q = 3/2, 2$ et 3).

Partant de ce rapprochement, l'exposant $\alpha(r)$ est effectivement périodique en $(\ln(r))$; les points $(\ln(r), \alpha(r))$, dessinés à la suite du nuage initial, illustre fort bien cette périodicité. La valeur estimée de cette période est $T^* = (1.0\dots) > 1$.

Important : si $P'(z)$ désigne la dérivée prise en z de $P(z) = z^2 - (1/2)$, on fait remarquer que la période numérique T^* est voisine de $T = \ln(|P'(x_0)|) = \ln(1 + \sqrt{3}) = 1.005\dots$.

Résultats numériques

De la même manière que pour l'exemple 1, on néglige (ν) points $(r, \alpha(r))$ avant d'ajuster par les cinq fonctions proposées. On reporte ensuite la valeur extrapolée (α -ext) de l'exposant α autour de x_0 ainsi que l'erreur d'ajustement (ϵ) correspondante.

Nous obtenons :

(i) Ajustement par $F_1(r)$: $\nu = 0$, α -ext = 0.68, $\epsilon = 2.57 \cdot 10^{-2}$

$\nu = 12$, α -ext = 0.68, $\epsilon = 2.56 \cdot 10^{-2}$

(ii) Ajustement par $F_2(r)$ et $F_3(r)$:

$\nu = 0$, α -ext = 0.69, $\epsilon = 2.50 \cdot 10^{-2}$

$$\nu=12, \alpha\text{-ext}=0.70, \varepsilon=2.42 \cdot 10^{-2}$$

(iii) Ajustement par $F_4(r)$:

$$\nu=0, \alpha\text{-ext}=0.68, \varepsilon=1.3 \cdot 10^{-2}$$

$$\nu=16, \alpha\text{-ext}=0.68, \varepsilon=9.7 \cdot 10^{-3}$$

(iv) Ajustement par $F_5(r)$: $\nu=0, \alpha\text{-ext}=0.68, \varepsilon=5.5 \cdot 10^{-3}$

Commentaires

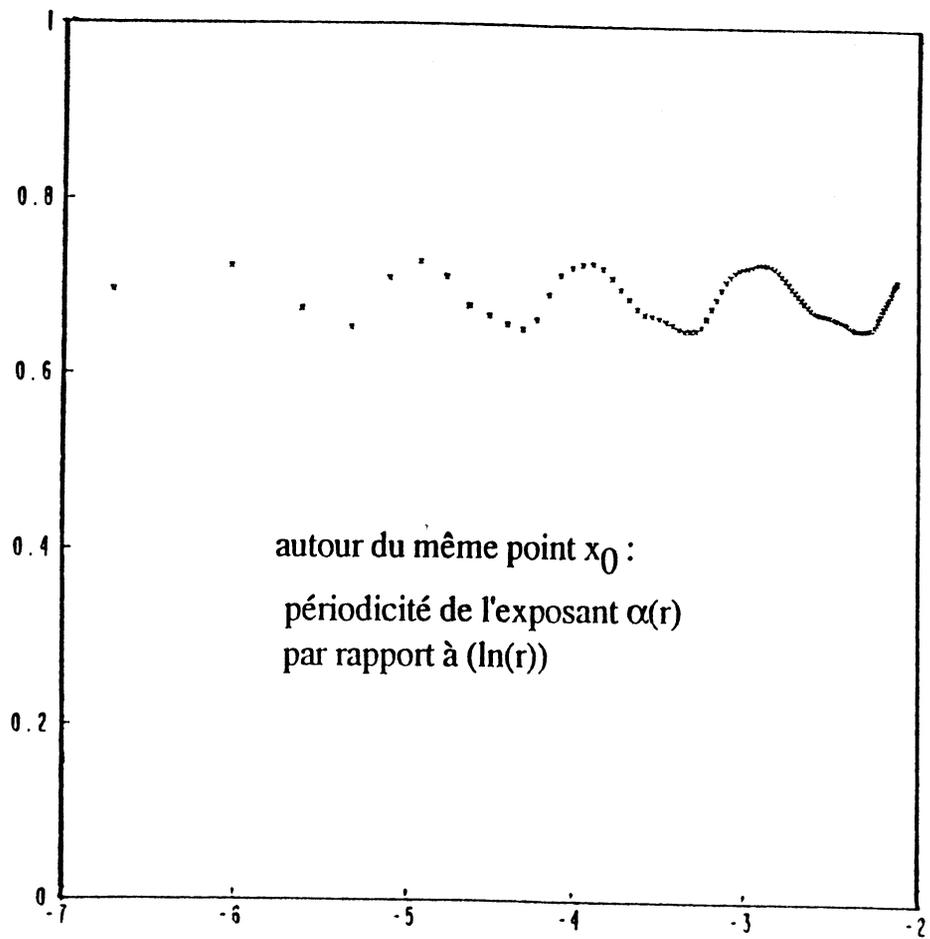
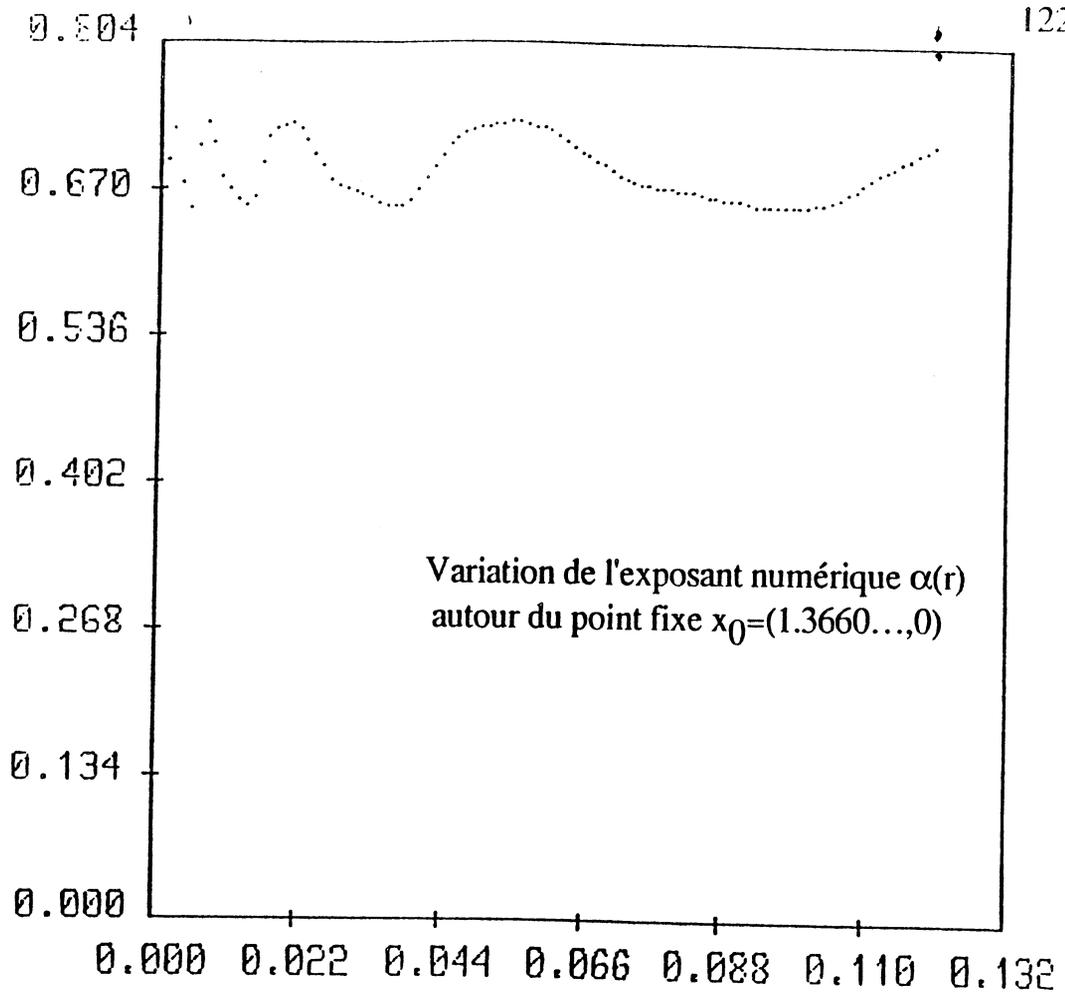
Le nuage $(r, \alpha(r))$ ne comportant aucune rupture, on constate que pour $(\nu=0)$, les valeurs $(\alpha\text{-ext})$ issus des cinq ajustements sont pratiquement égales; les erreurs d'ajustements (notées ε) montrent que les fonctions périodiques $(F_i(r))_{i=4,5}$ sont les approximations les plus adaptés à l'allure de ce nuage.

Par ailleurs, il semble que l'exposant théorique α de la mesure locale autour du seul point fixe répulsif réel et supérieur ou égal à 1 de $J(z^2+p)$ avec $(-2 \leq p \leq 0)$ qui est $x^* = ((1 + \sqrt{1-4p})/2)$, vérifie la formule suivante :

$$\alpha = \alpha(p) = \ln(2) / \ln(2x^*) = \ln(2) / \ln(1 + \sqrt{1-4p})$$

En particulier, on retrouve bien les exposants correspondants à $p=0$ et à $p=-2$ (voir le début de cette section).

Dans le cas traité ici, pour $(p=-1/2)$ et $x^* = x_0 = (1 + \sqrt{3})/2$, l'exposant est $\alpha = 0.689\dots$, valeur qui est très proche de celle des différents résultats ci-dessus présentés.



- Détermination de l'exposant α autour de $x_2=(1.2404\dots,0.0991\dots)$

Avec ce deuxième point de la région (R_1), on suit le même procédé que pour le réel $x_0=(1+\sqrt{3})/2$. On passe donc directement aux résultats relatifs au nuage des (100) points $(r,\alpha(r))$ autour de x_2 .

En comparaison avec celui obtenu en x_0 , le présent nuage (voir la figure correspondante) a un comportement oscillatoire moins "régulier". En effet, contrairement au cas du premier point, l'exposant numérique $\alpha(r)$ n'est pas clairement périodique en $(\ln(r))$: on se contentera donc d'ajuster le nuage initial par les fonctions $(F_i(r))_{i=1..3}$.

Nous aboutissons aux valeurs extrapolées (α -ext) suivantes du paramètre α en négligeant ($\nu=12$) points $(r,\alpha(r))$ d'abscisse petite :

(i) Ajustement par $F_1(r)$:

$$\alpha\text{-ext}=1.70, \quad \varepsilon=\text{erreur d'ajustement}=8.40 \cdot 10^{-2}$$

(ii) Ajustement par $F_2(r)$ et $F_3(r)$: $\alpha\text{-ext}=1.85, \quad \varepsilon=4.88 \cdot 10^{-2}$

--- Traitement des points de la région R_2

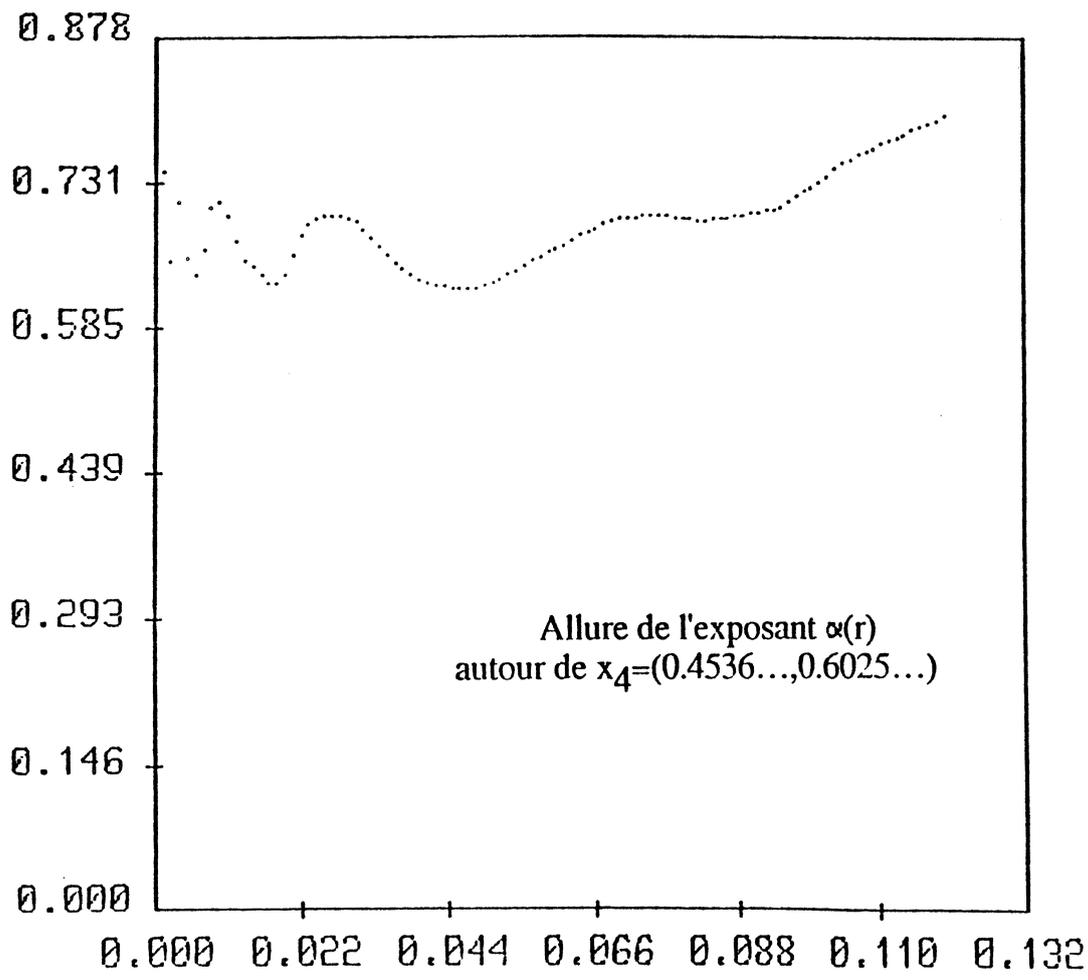
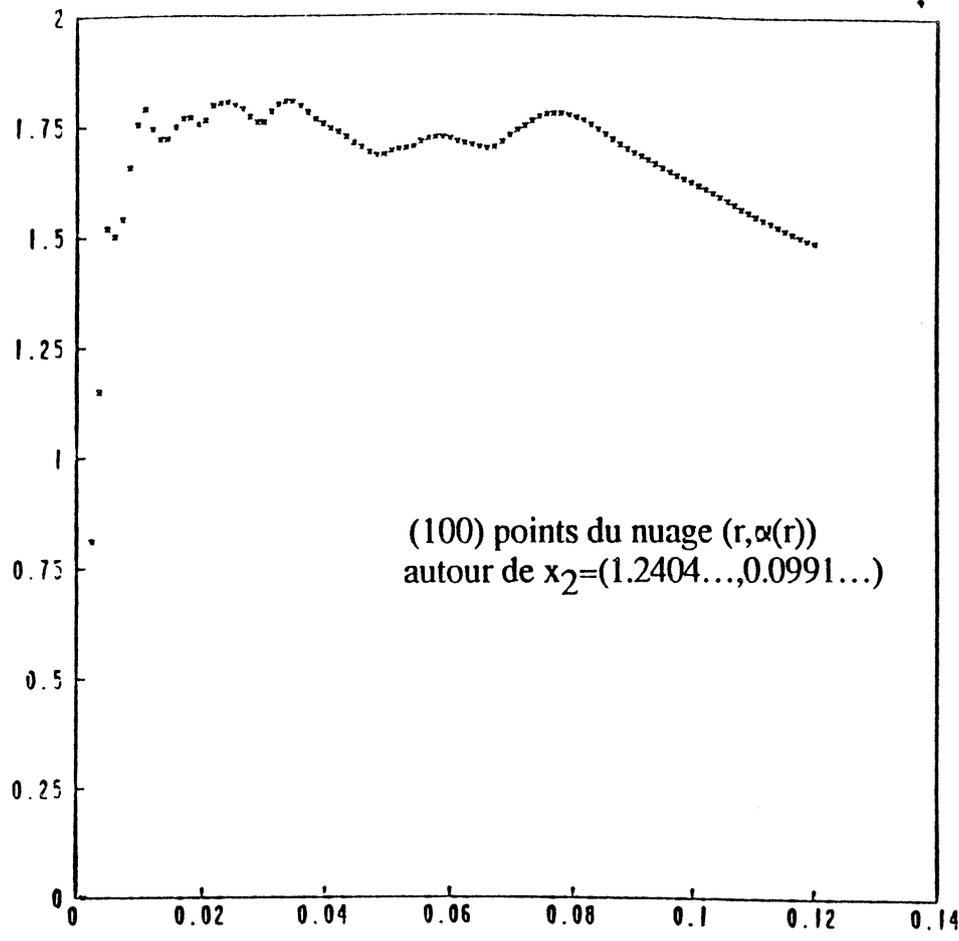
Le couple de points auxquels on s'intéresse sont $x_3=(0.4990\dots,0.5029\dots)$ et $x_4=(0.4536\dots,0.6025\dots)$. Le point x_3 est situé dans une région "creuse" de $J(z^2-(1/2))$ et est donc, géométriquement, du même type que x_2 .

En nous plaçant dans un voisinage de x_3 identique à celui pris autour de x_2 , on remarque que les nuages $(r,\alpha(r))$ associés à ces deux derniers points sont similaires. D'ailleurs, ceci est confirmé par la valeur extrapolée (α -ext) trouvée pour x_3 ; ici (α -ext=1.87) est du même ordre que celle de x_2 (voir ci-dessus). A cause de cela, il nous a paru inutile de présenter le nuage $(r,\alpha(r))$ obtenu autour de x_3 .

- Détermination numérique de α autour de x_4 .

On aborde maintenant les points dits de la 2^e classe (ie disposés sur des "pics"), classe auquel appartient x_4 . On renvoie au dessin de la région (R_2) pour la localisation de ce point.

Partant du même voisinage utilisé pour les points précédents (x_i) ($i=0..3$), le nuage expérimental $(r,\alpha(r))$ (voir la figure correspondante) conduit, après en avoir omis ($\nu=5$) points tels que r est proche de 0, aux valeurs extrapolées suivantes :



(i) Ajustement par $F_1(r)$: $\alpha\text{-ext}=0.69$, $\varepsilon=4.56 \cdot 10^{-2}$

(ii) Ajustement par $F_2(r)$ et $F_3(r)$: $\alpha\text{-ext}=0.62$, $\varepsilon=3 \cdot 10^{-2}$

Il est important de noter que si l'on enlève en plus ($\xi=20$) points $(r, \alpha(r))$ de grande abscisse (cf. § II-3-2 du chap. A-II) , l'approximation par $F_i(r)$ ($i=2,3$) nous donne : $\alpha\text{-ext}=0.64$ avec une erreur $\varepsilon=2.5 \cdot 10^{-2}$.

Remarque : Des expériences du même genre, mais qui ne figurent pas ici, menées autour de points de la classe de x_4 (ie qui se trouvent sur des "pics" de $J(z^2-(1/2))$) ont redonné quasiment la même valeur approchée de l'exposant α : $\alpha\text{-ext}=0.63 \pm 0.01$.

--- Traitement des points de la région R_3

Dans cette dernière région, on a sélectionné un seul point qui est l'imaginaire $x_1=(0,0.9306\dots)$.

Sur le nuage de points $(r, \alpha(r))$, on constate de prime abord une certaine similitude avec celui obtenu au voisinage du réel x_0 . En effet, ces ensembles de points comportent tous deux un phénomène oscillatoire (périodicité par rapport à la variable $\ln(r)$); et en plus de cela, on n'y détecte aucune rupture dans les exposants numériques $\alpha(r)$ quand r est très voisin de l'origine.

Dans le cas du point x_1 , pour $r=1.5 \cdot 10^{-3}$ la valeur $\alpha(r)$ est 0.72; les nuages $(r, \alpha(r))$ et $(\ln(r), \alpha(r))$ figurant ci-dessous illustrent bien nos observations. Notons encore que la période relevée est d'environ $T^*=(1.0\dots)>1$.

résultats numériques sur la valeur extrapolée de α

On présente maintenant les valeurs approchées de l'exposant α de la mesure locale prise autour du point x_1 :

1) Ajustement aux moindres carrés par $F_1(r)$ (droite de pente nulle)

$$\nu=1 , \alpha\text{-ext}=0.68 , \varepsilon=2.77 \cdot 10^{-2}$$

2) par $F_2(r)$ et $F_3(r)$ (droite et parabole)

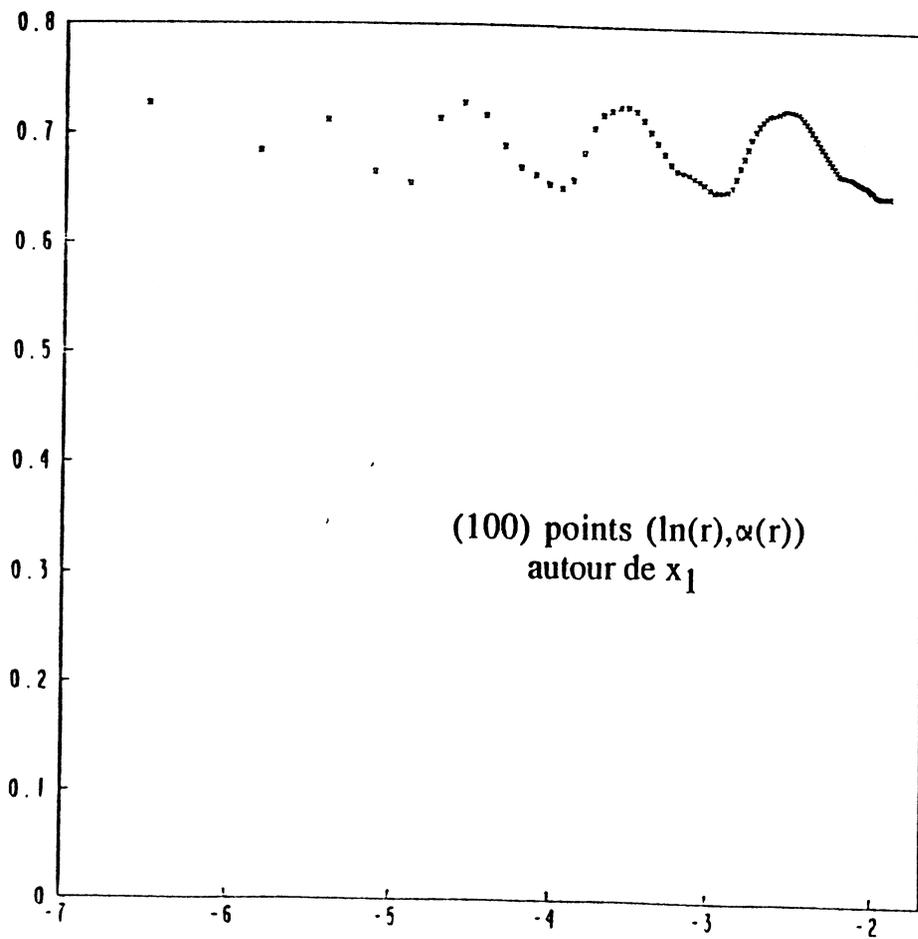
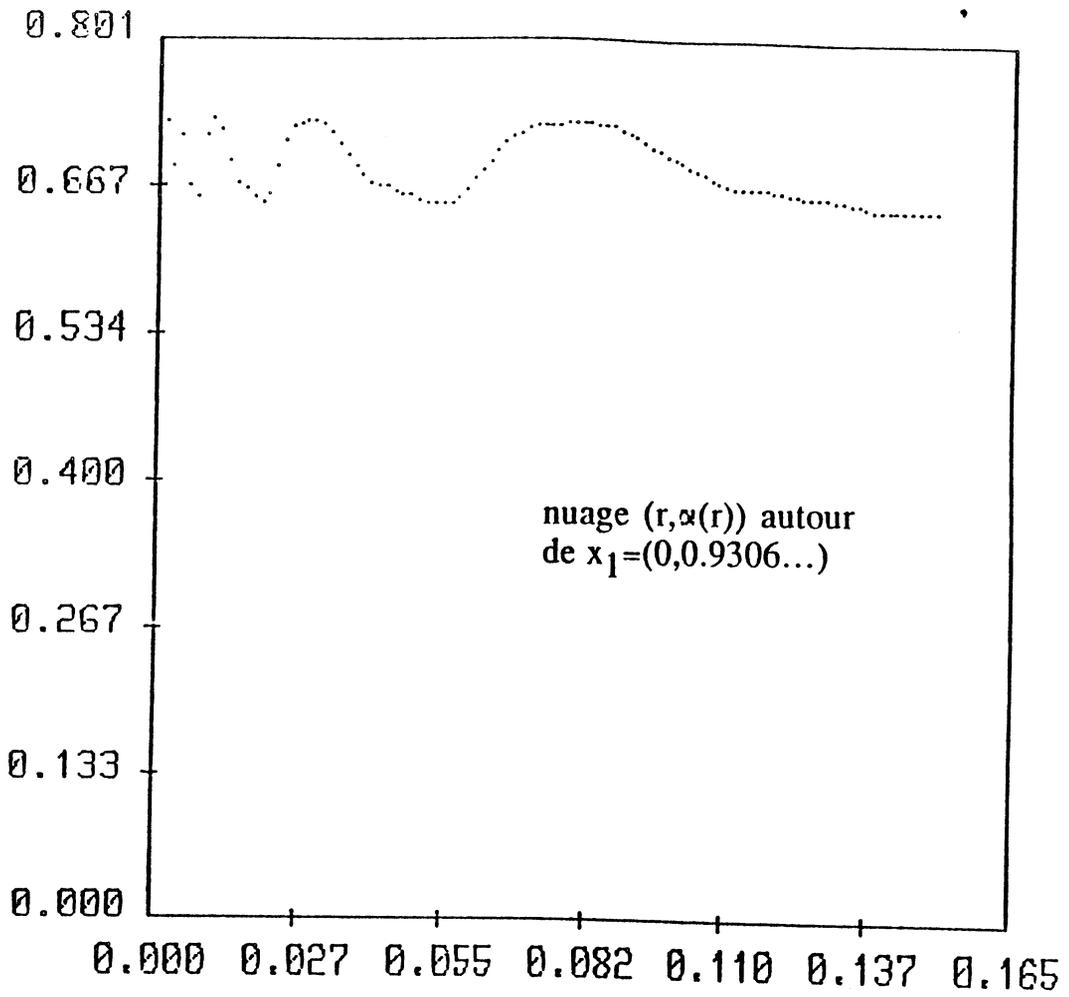
$$\nu=1 , \alpha\text{-ext}=0.70 , \varepsilon=2.57 \cdot 10^{-2}$$

3) par la fonction périodique $F_4(r)$ (cf. section III précédente)

$$\nu=1 , \alpha\text{-ext}=0.68 , \varepsilon=1.36 \cdot 10^{-2}$$

4) par la fonction périodique $F_5(r)$

$$\nu=1 , \alpha\text{-ext}=0.69 , \varepsilon=5.51 \cdot 10^{-3}$$



Commentaires sur l'étude locale de $J=J(z^2-(1/2))$

Par le biais de la génération d'un grand nombre ($N=65536$) de points de J , plusieurs zooms numériques sur certaines de ses régions nous ont permis de mettre en évidence l'invariance de sa structure à des échelles d'examen différentes. En fait, cet ensemble est **fractal** (Mandelbrot [29]) et a une dimension légèrement supérieure à celle du cercle (Ruelle [37]) auquel il est homéomorphe .
L'étude locale menée autour de quelques points de cet ensemble nous amène à formuler les remarques suivantes :

- La mesure locale $M(x,r)$ autour des points x réels (ou des imaginaires) est périodique en $(\ln(r))$.

- A cause de la self-similarité (ou structure fractale) de J , les points y occupant des "sites" \mathcal{Y} identiques (ie des "pics" ou des "creux") ont des exposants calculés $\alpha=\alpha(\mathcal{Y})$ de même ordre, en d'autres termes : $\forall y \in \mathcal{Y}, M(y,r) \sim r^\alpha$.

- L'exposant α qui régit le comportement de la mesure locale $M(x^*,r)$ autour de l'unique point fixe répulsif réel ($x^* \geq 1$) de $P(z)=z^2+p$, où $p \in [-2,0]$, est donné par la relation suivante (expérimentalement vérifiée) : $\alpha = \ln(2)/\ln(2x^*)$.

VI- Troisième exemple d'application d'ELSEP

On considère ici le système dynamique à temps discret engendré par l'application suivante (dite de Kaplan-Yorke):

$$f : [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0,1] \times \mathbb{R}$$

$$(x,y) \rightarrow (f_1(x,y)=ax \pmod{1}, f_2(x,y)=by+\cos(2\pi x))$$

où les constantes a et b sont telles que: $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a > b > 1$.

--- *Comportement itératif de la fonction (f) d'évolution du système.*

Observons d'abord que pour $X_0=(x_0,y_0) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, la suite des itérés successifs itérés $X_{n+1}=f(X_n)=(f_1(X_n),f_2(X_n))$ est restreinte à l'intervalle $[0,1]$ suivant les abscisses x_n alors que les ordonnées y_n peuvent prendre n'importe quelle valeur. Examinons maintenant la jacobienne $J(x,y)$ de f : elle admet a et b comme valeurs propres. Ces deux constantes étant toutes deux supérieures à 1, on en déduit qu'il n'existe aucun attracteur (à distance finie) pour notre système ([8]). D'autre part, on constate que: $\forall x_0 \in [0,1]$ et $|y_0|$ assez grand, les itérés $X_{n+1}=f(X_n)=f^{n+1}(X_0)$ tendent rapidement vers $(\pm\infty)$ dans la direction des y ; en effet ceux-ci se comportent comme $(b^n y_0)$ et dépendent du signe de y_0 . Par conséquent, le système considéré possède les points $y=+\infty$ et $y=-\infty$ comme seuls attracteurs.

Remarques:

1) Si les paramètres a et b sont pris tels que $a=2$ et $b \in]-1,+1[$, Kaplan et Yorke (voir référence dans [28]) ont noté l'existence d'un attracteur étrange (ou chaotique) \mathcal{A} pour le système dynamique engendré par f . De plus, \mathcal{A} est l'ensemble-limite (cf.[20]) de presque toute condition initiale $X_0=(x_0,y_0) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ (au sens de la mesure de Lebesgue).

2) Dans le cas général, si les deux composantes (f_1,f_2) satisfont aux conditions de Cauchy-Riemann, le système dynamique est un système holomorphe ([6]).

--- *Frontière des bassins des deux attracteurs ($y=\pm\infty$)*

D'après ce qui précède, cette frontière (notons-la \mathcal{F}) a la propriété importante suivante:

soit $X^*=(x^*,y^*) \in \mathcal{F}$, presque tout point $X_0=(x_0,y_0)$ d'un voisinage $B(X^*,\varepsilon)$ ($\varepsilon>0$) vérifie $X_{n+1}=(x_{n+1},y_{n+1})=f(X_n) \rightarrow +\infty$ (ou $-\infty$) suivant l'axe des y .

On peut donc dire que la frontière \mathcal{F} tient lieu d'ensemble répulsif puisqu'elle envoie à l'infini quasiment toutes les trajectoires $\{f^n(X_0), n \in \mathbb{N}\}$ issues de son voisinage; il découle de là que \mathcal{F} attire les orbites inverses $\{f^{-n}(X_0), n \in \mathbb{N}\}$.

En se basant sur cette dernière caractéristique de \mathcal{F} , Mc Donald et al ([28]) ont en tiré l'expression explicite de \mathcal{F} ; en fait, ils établissent que :

$$\mathcal{F} = \{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} / y=F(x)\} \text{ où}$$

$$F(x) = - \sum_{(j=1.. \infty)} b^{-j} \cos(2 \pi a^{j-1} x)$$

Sachant ($b>1$), cette série converge uniformément pour tout x , la fonction F est donc continue (bornée) sur $[0,1]$. De plus, la double inégalité $a>b>1$ entraîne la divergence de la série dérivée associée à $F'(x)$: la courbe $y=F(x)$ représentative de la frontière \mathcal{F} n'est dérivable en aucun point.

--- Structure de \mathcal{F}

L'illustration de nos précédentes observations est donnée par la figure ci-après où l'on a tracé la fonction $y=F(x)$ avec $a=4$ et $b=1.8$. On y remarque que \mathcal{F} est composée d'une multitude de parties semblables quoique de tailles différentes: elle est fractale au sens de Mandelbrot ([29]). Les domaines d'attraction respectifs de $(\pm\infty)$ s'"enchevêtrent" selon une structure striée délimitée par \mathcal{F} . Le grossissement de la région qui y est indiquée ($R=[0.15,0.38] \times [-0.40,-0.10]$) rend bien compte de ce type de structure.

En tant que séparatrice, la frontière \mathcal{F} est un ensemble invariant et compact du système dynamique représenté par l'application f ; la compacité provenant du simple fait que $\mathcal{F} \subset [0,1] \times [-\gamma,+\gamma]$ où $\gamma=1/(b-1)$ est tel que $|F(x)| \leq \gamma$.

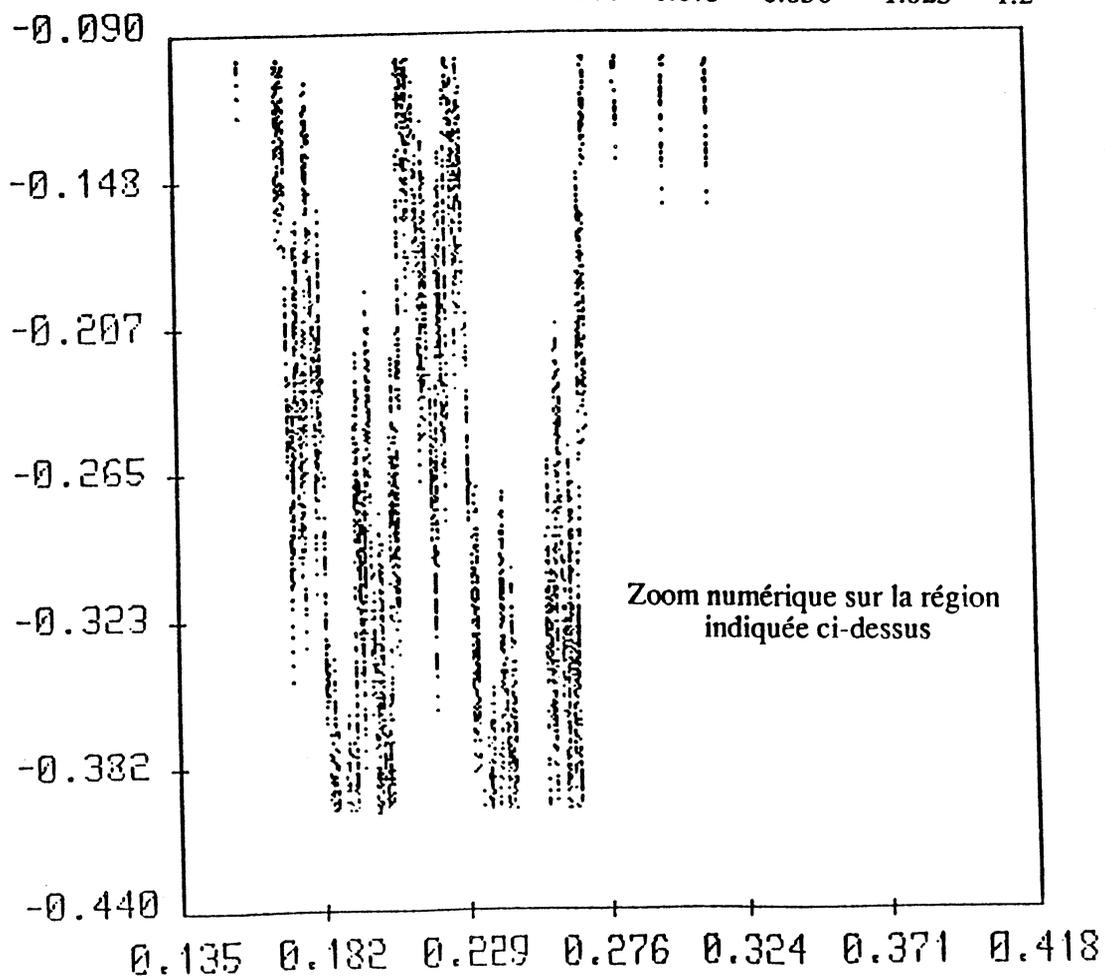
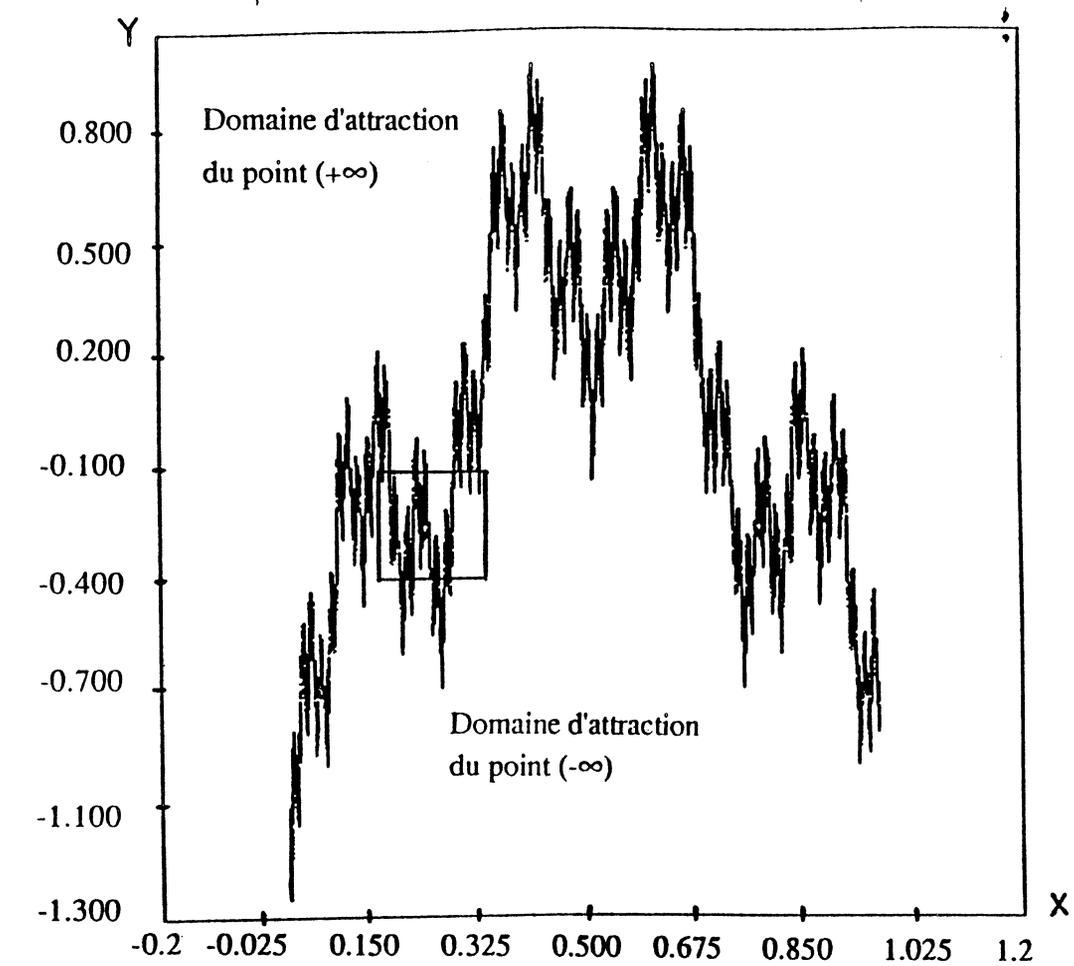
--- Dimension fractale de \mathcal{F}

La dimension de capacité (cf. chap. B-II) d_c de \mathcal{F} s'exprime en fonction des deux paramètres a et b ; elle obéit à la formule (proposée dans [28]):

$$d_c = 2 - [\ln(b) / \ln(a)] \dots\dots\dots (*)$$

En appliquant notre procédé décrit au second paragraphe du (chap. B-II) à \mathcal{F} approchée par ($N=65536$) points $(x,F(x))$ avec $a=4$ et $b=1.8$, on obtient les estimations des deux dimensions (de capacité d_c et d'information d_i) suivantes:

$$d_c \approx 1.55 \text{ et } d_i \approx 1.53 \text{ et l'égalité } (*) \text{ donne } d_c \approx 1.57.$$



VII- Conclusion (partie C)

Dans cette dernière partie, on a présenté un logiciel ayant trait à l'Etude Locale d'un Sous-Ensemble du Plan (*ELSEP*). Ce logiciel est actuellement fonctionnel sur le D.P.S 8 (système Multics) au centre de calcul de Grenoble.

ELSEP est en fait la combinaison de plusieurs algorithmes dont la plupart ont été décrits et testés dans les précédentes parties (A et B). Les problèmes résolus par ces algorithmes sont abondamment développés dans la littérature : problèmes du "Range-Searching" ([3],[27]), du "Variable Disk Retrieval" ([4],[27],[40],[36]); calcul de la dimension fractale ([15],[19]).

Dans le cas où l'ensemble \mathfrak{E} considéré est un invariant compact d'un système dynamique holomorphe (cf. [6]) ou non ([20],[28],[8]), notre logiciel fournit le moyen

- de générer (puis de visualiser) un ensemble E numériquement très proche de \mathfrak{E} .
- d'évaluer rapidement le temps de séjour (ou fréquence de visite) du système dynamique dans n'importe quelle région R de E; la région R peut être un rectangle ou un cercle.
- de déterminer la dimension ponctuelle ($d_p(x)$) (ou l'exposant α de la mesure locale $M(x,r)$) autour d'un point quelconque x de E.
- d'estimer la dimension fractale de l'ensemble E.



CONCLUSION



Tout au long de ce travail, on a mené une étude locale sur des ensembles invariants compacts \mathcal{K} ($\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{C}) de systèmes dynamiques à temps discret.

Les ensembles \mathcal{K} considérés ici sont de deux types:

+ \mathcal{K} est la frontière des domaines d'attraction des points fixes (et des cycles) attractifs de l'application f engendrant le système.

Si celui-ci est holomorphe, \mathcal{K} est l'ensemble de Julia de la fraction rationnelle f ; plusieurs ensembles de ce type ont été traités dans cette thèse. Dans la partie C, un autre exemple de ce genre d'ensemble est présenté dans le cas non holomorphe.

+ \mathcal{K} est un attracteur étrange, c.a.d un ensemble-limite d'un système dynamique chaotique.

L'ensemble \mathcal{K} a, dans la plupart des cas, une structure fractale; numériquement, on l'approche par un ensemble fini E formé d'un grand nombre N de points ($N \sim 10^5$).

La dimension ponctuelle $d_p(x)$ (ou encore l'exposant α de la mesure locale $M(x,r)$ autour d'un point x d'un compact \mathcal{K} nous renseigne sur la fréquence de visite, au voisinage de ce point, du système dynamique étudié. Afin de mieux cerner la distribution des points sur \mathcal{K} , divers algorithmes de détermination de $d_p(x)$ (méthodes d'ajustement, méthodes basées sur la convergence vague de mesures bornées et procédé d'extrapolation), sont décrits et testés dans la partie A de cette thèse. Une application importante en Physique Statistique (modèles hiérarchiques de réseaux de verres de spins) a donné des résultats en accord avec la théorie existante dans ce domaine. A partir d'expérimentations numériques effectuées sur plusieurs ensembles fractals \mathcal{K} (ensemble de Julia du polynôme z^2+p avec $p=-0.5, p=-1, \dots$), il semble que l'exposant α de la mesure locale soit identique autour des sites similaires du compact \mathcal{K} .

Le préconditionnement des points de \mathcal{K} selon un pavage régulier nous fournit la possibilité de procéder à des zooms numériques sur une région \mathcal{R} (rectangulaire ou circulaire) arbitraire en un temps C.P.U acceptable puisque proportionnel au nombre de points de \mathcal{K} inclus dans \mathcal{R} (partie B). Par le biais de ces grossissements, la structure géométrique de l'ensemble \mathcal{K} est alors perçue avec plus de précision. De plus, si le maillage initial est choisi assez fin, on peut chercher une estimation de la dimension fractale du compact \mathcal{K} considéré et "mesurer" ainsi globalement son degré d'irrégularité issu de l'aspect fractal souvent observé.

Les différentes directions suivies dans le cadre de notre étude locale d'un ensemble \mathcal{K} du type précédemment indiqué constituent les composantes essentielles du logiciel *ELSEP*. Ce logiciel, mis au point par nos soins et écrit en langage PASCAL, est actuellement fonctionnel sur le D.P.S 8 (système Multics) du C.I.C.G.

Suivant la répartition des points de l'ensemble \mathcal{K} considéré, il sera intéressant de préconditionner ces points selon un maillage adapté à la forme de cet ensemble. Ceci diminuera sensiblement et la place mémoire nécessaire au présent algorithme du

pavage régulier et son temps de réponse (ou d'accès) à la région \mathcal{R} désirée. D'autre part, en nous appuyant sur quelques méthodes de la géométrie algorithmique on peut envisager l'utilisation d'autres figures d'accès (exemple polygone convexe...etc) en plus du rectangle et du cercle. Dans cette même optique, l'étude locale pourrait aussi concerner d'autres paramètres géométriques de \mathcal{X} comme les tangentes, les angles ainsi que son enveloppe convexe.

Il est évident que l'augmentation du nombre N de points générés pour approcher le compact \mathcal{X} rendrait plus précise et donc plus efficace son étude locale. Notons tout de même que le matériel utilisé dans le cadre de cette thèse nous permet de disposer de ($N=2^{17}$) points du plan.

Dans le cas particulier de l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle R de degré ($k \geq 2$) avec N de la forme (k^n), on pourrait accélérer la recherche des antécédents $R^{-m}(z_0)$ (où $m=0..n$ et z_0 un point fixe répulsif de R) si nous traitons simultanément les $(k^m)_{m \geq 1}$ points du niveau m par groupes composés (par exemple) de k points.

Pour résoudre ce genre de problème (voir aussi la dernière remarque du § (b) chap. B-II), les techniques de l'**Algorithmique Parallèle** nous paraissent toutes indiquées. Ainsi se trouve posée l'éventualité d'une parallélisation de notre logiciel *ELSEP*.

BIBLIOGRAPHIE

..... et que même la plus lasse rivière
trouve, un jour, son repos dans la mer.

(ANonyme)



- [1] N.AKROUNE
Etude numérique de quelques ensembles de Julia
RAPPORT DE D.E.A (GRENOBLE 1984)
- [2] J.C.ANGLES D'AURIAC
Méthodes numériques pour l'étude de la dynamique des phénomènes critiques. Application aux verres de spins.
THESE DOCTEUR-INGENIEUR (GRENOBLE 1981)
- [3] J.L.BENTLEY , J.H.FRIEDMAN
Data structures for range-searching
COMPUTING SURVEYS - Vol 11 N° 4 (Dec. 79)
- [4] J.L.BENTLEY , H.A.MAURER
A note on euclidean near neighbor searching in the plane
INFORMATION PROCESSING LETTERS Vol 8 N° 3 (Mar.79)
- [5] J.L.BENTLEY , D.F.STANAT , E.H.WILLIAMS
The complexity of finding fixed-radius near neighbors
INFORMATION PROCESSING LETTERS Vol 6 N° 6 (Dec.77)
- [6] P.BLANCHARD
Complex analytic dynamics on the Riemann sphere
BULLETIN (new series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY - Vol 11 N° 1 (Jul. 84)
- [7] H.BROLIN
Invariant sets under iteration of rational functions
ARKIV FOR MATHEMATIK Band 6 N° 6 (1965)
- [8] P.COLLET , J.P.ECKMANN
Iterated maps on the interval as Dynamical Systems
BIRKHAUSER (BOSTON 1980)
- [9] CH.J.DE LA VALLEE-POUSSIN
Le potentiel logarithmique , balayage et représentation conforme
GAUTHIER-VILLARS (PARIS 1949)
- [10] B.DERRIDA , J.P.ECKMANN , A.ERZAN
Renormalisation groups with periodic and aperiodic orbits
JOURNAL OF PHYSICS (A) Vol 16 (1983)
- [11] B.DERRIDA , C.ITZYKSON , J.M.LUCK
Oscillatory critical amplitudes in hierarchical models
COMMUNICATIONS IN MATHEMATICAL PHYSICS 94 (1984)

- [12] B.DERRIDA , L.DE SEZE , C.ITZYKSON
Fractal structure of zeroes in hierarchical models
JOURNAL OF STATISTICAL PHYSICS 33 (1983)
- [13] A.DOUADY
Systèmes dynamiques holomorphes
SEMINAIRE BOURBAKI 35^e ANNEE (1982/83) N° 599
- [14] N.DU PLESSIS
An introduction to potential theory
OLIVER & BOYD (EDINBURGH 1970)
- [15] J.P.ECKMANN , D.RUELLE
Ergodic theory of chaos and strange attractors
REVIEWS OF MODERN PHYSICS Vol 57 N° 3 Part 1 (Jul.85)
- [16] J.D.FARMER , E.OTT , J.A.YORKE
The dimension of chaotic attractors
PHYSICA 7D (1983)
- [17] P.FATOU
Sur les équations fonctionnelles
B.S.M.F 47 (1919) et 48 (1920)
- [18] P.GRASSBERGER
On the fractal dimension of the Henon attractor
PHYSICS LETTERS Vol 97A N° 6 (1983)
- [19] P.GRASSBERGER
Generalized dimensions of strange attractor
PHYSICS LETTERS Vol 97A N° 6 (1983)
- [20] J.GUCKENHEIMER , P.HOLMES
Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields
SPRINGER-VERLAG 42 (NEW-YORK 1983)
- [21] M.HENON
A two-dimensional mapping with a strange attractor
COMMUNICATIONS IN MATHEMATICAL PHYSICS Vol 50 (1976)
- [22] G.JULIA
Mémoire sur l'itération de fonctions rationnelles
JOURNAL DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES (1918)
- [23] D.E.KNUTH
The art of computer programming - Vol III (Sorting and searching)
ADDISON-WESLEY , reading , MASSON (1973)

- [24] B.LACOLLE
 Sur quelques méthodes de la Physique Statistique
 THESE D'ETAT (GRENOBLE 1984)
- [25] S.LATTES
 Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions de Poincaré
 C.R.A.S 166 (1918)
- [26] C.LAUSBERG
 "Calcul des dimensions fractales sur un micro-ordinateur"
 THESE DOCTORAT (Nouveau régime) (à paraître: GRENOBLE 1987)
- [27] D.T.LEE , F.P.PREPARATA
 Computational geometry - A survey
 IEEE TRANSACTIONS ON COMPUTERS Vol C 33 N° 12 (Dec.84)
- [28] S.W.Mc DONALD , C.GREBOGI , E.OTT , J.A.YORKE
 Fractal basin boundaries
 PHYSICA 17 D (1985)
- [29] B.MANDELBROT
 Fractals:form,chance and dimension
 FREEMAN , SAN FRANCISCO (1977)
- [30] B.MANDELBROT
 Fractals aspects of the iteration of $z \rightarrow \lambda z(1-z)$ for complex λ and z
 ANNALS OF THE NEW-YORK ACADEMY OF SCIENCES Vol 357
 (1980)
- [31] C.MASSE
 L'itération de Newton : Convergence et chaos
 THESE DE 3^e CYCLE (GRENOBLE 1984)
- [32] P.MONTEL
 Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs
 applications. CHELSEA PUBLISHING COMPANY (NEW-YORK 1974)
- [33] T.NIEMEYER , J.M.J.VAN LEEUWEN
 Phase transitions and critical phenomena
 DOMB, GREEN (EDS.) Vol 1 & 6 NEW-YORK : ACADEMIC PRESS (76)
- [34] H.OTTAVI , G.ALBINET
 Comparisons of the Julia sets given by three lattices and renormalisation
 substitution
 EUROPHYSICS LETTERS Vol 1 (1) (1986)

- [35] H.O.PEITGEN , P.H.RICHTER
The beauty of fractals (Images of complex dynamical systems)
SPRINGER-VERLAG (BERLIN 1986)
- [36] F.P.PREPARATA , M.I.SHAMOS
Computational geometry - An introduction
SPRINGER-VERLAG (NEW-YORK 1985)
- [37] D.RUELLE
Repellers for real analytic maps
ERGODIC THEORY & DYNAMICAL SYSTEMS Vol 2 (1982)
- [38] M.TSUJI
Potential theory in modern function theory
CHELSEA PUBLISHING COMPANY (NEW-YORK 1975)
- [39] M.WIDOM , D.BENSIMON , L.P.KADANOFF , S.J.SHENKER
Strange objects in the complex plane
JOURNAL OF STATISTICAL PHYSICS Vol 32 N° 3 (1983)
- [40] D.E.WILLARD
Polygon retrieval
SIAM JOURNAL OF COMPUTING Vol 11 N° 1 (1982)
- [41] G.YUVAL
Finding near neighbours in k-dimensional space
INFORMATION PROCESSING LETTERS - Vol 3 N° 4 (Mar.75)
- [42] G.YUVAL
Finding nearest neighbours
INFORMATION PROCESSING LETTERS - Vol 5 N° 3 (Août 76)

ANNEXE

Introduction:

Quelques aspects de la Physique Statistique sont présentés dans cette annexe. Sans trop entrer dans les détails, on tentera surtout de mettre en évidence le lien existant entre cette discipline et la théorie des systèmes dynamiques.

Verres de spins:définition:

Des impuretés magnétiques mélangées à un métal initialement non magnétisé donnent naissance à un système couramment appelé "verre de spins". Pour que l'on puisse supposer une répartition aléatoire des impuretés dans le métal, le pourcentage de celles-ci doit être assez faible.

Les moments magnétiques (ou spins) de S_i et S_j de deux impuretés i et j sont reliés par une énergie d'interaction $J_{ij}=J(r_{ij})$ qui dépend de la distance r_{ij} les séparant. La configuration de ces 2 spins est parallèle ($\uparrow\uparrow$) (resp. anti-parallèle ($\downarrow\downarrow$)) dans le cas ferromagnétique ($J_{ij}>0$) (resp. anti-ferromagnétique ($J_{ij}<0$)).

L'énergie totale d'un système $S=\{S_i\}$ ($i=1..N$) contenant N spins est donnée par :

$$E(S) = -\sum_{i,j} J_{ij} (S_i \cdot S_j) + \sum_i H \cdot S_i \dots\dots\dots(1)$$

où $J_{ij}=J_{ji}$ et H désigne un champ magnétique extérieur à S . Nous reviendrons plus tard sur cette égalité.

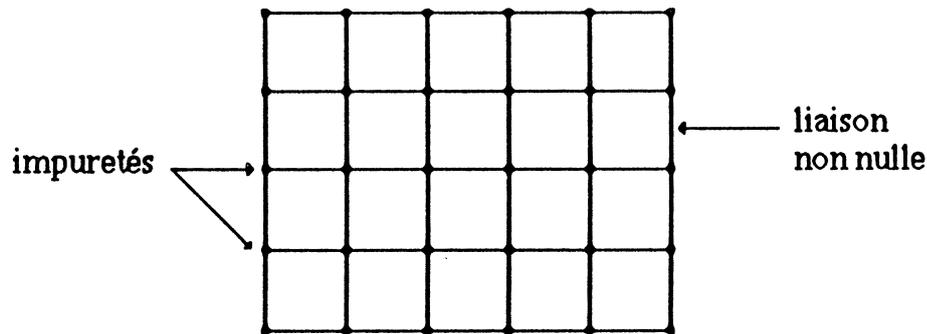
Notion de transition de phase : problèmes des verres de spins

Un changement dans la structure physique d'une matière, tel l'évaporation d'un liquide, la fusion d'un solide...etc est appelé **transition de phase**. Ce processus étant caractérisé par sa discontinuité, une phase est de ce fait l'état de la dite matière entre deux transitions de phase. Mais, comme on le verra dans ce qui suit, plusieurs autres états (ou phases) peuvent exister.

Pour simplifier, supposons que la température (absolue) T soit l'unique paramètre décrivant un système de verres de spins (v.s). Le problème des (v.s) provient de l'apparition de **singularités** sur les différentes fonctions thermodynamiques (énergie libre, susceptibilité magnétique, chaleur spécifique...) du système (cf. [2],[33]). La singularité entraîne une variation brutale, à une certaine température T_c , de la valeur d'une de ces fonctions; le passage de l'état du système à ($T < T_c$) à l'état où ($T > T_c$) est l'indice d'une transition de phase. Plus généralement, le point de changement de phase pour une (ou plusieurs) variable(s) décrivant le système considéré est appelé **point critique**.

--- Les modèles

Dans le but de modéliser les systèmes de (v.s), la distribution aléatoire des impuretés est remplacée par une disposition régulière sur un maillage (ou grille). Les grilles souvent étudiées ([33],[34],[2],[35]) sont les grilles planes (voir la figure ci-dessous) ou tridimensionnelles.



Elles sont formées de liaisons et de noeuds: une liaison indique une énergie d'interaction non nulle; un noeud (ou site) porte une impureté, donc un spin, que l'on représente par un vecteur de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 ou, en simplifiant encore, par un élément de $\{-1,+1\}$. Le modèle correspondant à ce dernier cas est dit d'ISING.

Pour définir un modèle ([2]), on se doit de connaître

- La géométrie du maillage: grille à (2 d) ou (3 d), nombre de voisins d'un spin, bords du maillage (libre, torique...etc).

- Le type de l'énergie de liaison J_{ij} ($\in \mathbb{R}$) entre deux spins i et j du réseau.

exemples:

- liaison à +1 (resp. -1) : les spins ont une configuration parallèle ($\uparrow\uparrow$) (resp. anti-parallèle ($\downarrow\downarrow$)).
- liaison à +1 avec une probabilité (p) et à -1 avec une probabilité ($1-p$).
- liaison affectée à un réel choisi selon la loi uniforme ou la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Le modèle d'ISING est celui qui a suscité le plus d'intérêt car on peut espérer un traitement mathématique du problème des verres de spins (v.s) (on renvoie à [33] et aux références qui y sont portées).

Ses caractéristiques peuvent être résumées ainsi :

- * Le maillage est plan
- * chaque spin a quatre voisins
- * Les liaisons sont toutes à +1 et les spins prennent deux états.

Une fonction importante du système : l'énergie libre .

Résoudre le problème de la détermination d'une transition de phase, si elle existe, conduit, dans le cadre de l'étude mathématique d'un modèle, à l'utilisation d'une grille finie composée de N spins. Autrement dit, on fait appel à la simulation numérique à défaut de la réalisation d'expériences physiques.

Les principales fonctions thermodynamiques d'un système de (v.s) s'obtiennent par différenciation de l'énergie libre $f(T,H)$ de ce système par rapport au champ magnétique extérieur H et à la température T (cf. [33] et l'égalité (1) précédente). Avant de définir $f(T,H)$, on doit d'abord introduire la **fonction de partition** $Z_N(T,H)$ qui prend en compte toutes les configurations possibles des N spins ([24],[35]) :

$$Z_N(T,H) = \sum_{\sigma \in S} [e^{-E(\sigma)/(kT)}] \dots\dots\dots (2)$$

où σ parcourt toutes les configurations du système $S = \{ \text{spin } S_i \} \ i=1..N$ et k la constante de Boltzmann.

Un autre problème lié aux (v.s) est le calcul de la fonction de partition. Bien que celui-ci est en général d'un traitement ardu ([33]), notons tout de même que différents algorithmes de calcul de $Z_N(T,H)$ sont proposés dans ([2] et [24]) et qu'il existe, pour certains modèles, des solutions analytiques de ce problème ([24]).

Les deux étapes ci-après définissent l'énergie libre du système des N spins:

$$\begin{aligned} 1) f_N(T,H) &= (1/N) \ln [Z_N(T,H)] \\ &\dots\dots\dots(3) \\ 2) f(T,H) &= \lim_{(N \rightarrow \infty)} (f_N(T,H)) \end{aligned}$$

on renvoie à ([10],[11]) pour l'étude de f dans les différents cas pouvant se présenter.

Important : Dans toute la suite, on se restreindra à l'étude des systèmes en l'absence d'un champ magnétique extérieur (ie $H \equiv 0$ dans l'égalité (1)).

A l'étape (1) ci-dessus, on constate qu'en prenant le logarithme, les racines de $Z_N(T)$ induisent des singularités pour la fonction énergie $f(T)$.

conséquence: Si une singularité est située dans la région physique ($T > 0$), elle peut constituer une transition de phase magnétique.

Mais la fonction de partition $Z_N(T)$ (relation (2)) étant égale à la somme d'exponentielles, et donc de termes strictement positifs, n'a pas de racines dans la région physique. Comme stipulé dans ([33]), la limite ($N \rightarrow \infty$) (appelée limite thermodynamique) apparaissant dans l'étape (2) permet de contourner cette difficulté en vue de déceler une éventuelle transition de phase: en effet, on peut prévoir que les zéros de $Z_N(T)$ s'accumulent, à la faveur de la limite thermodynamique, près de l'axe réel $T > 0$ et déterminent ainsi un point critique T_c .

Etude d'un modèle régulier : le modèle du *diamant*

Ce modèle fait partie de la vaste classe de modèles dits de Potts (cf. [33]) qui ont les particularités suivantes:

- Les spins du réseau peuvent prendre q états différents ($q \geq 2$)
- Les spins S_i et S_j non voisins ont une énergie d'interaction nulle (c.a.d que l'on a $J_{ij}=J_{ji}=J=0$).

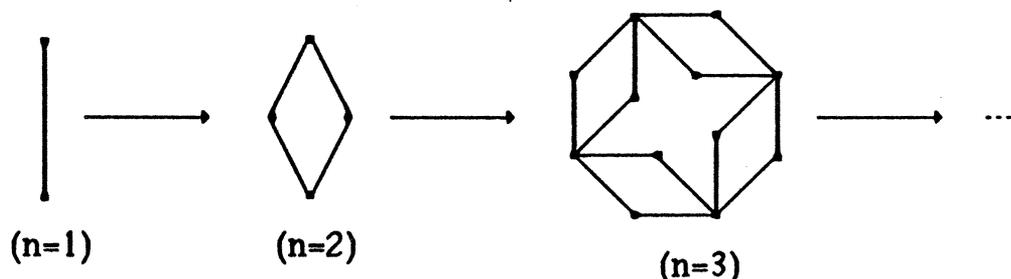
Pour une configuration fixée σ de la grille représentant le modèle, l'égalité (1) s'écrit

$$E(\sigma) = - \sum_{\langle i,j \rangle} J \delta_{ij} \dots\dots\dots (4)$$

où $\langle i,j \rangle$ signifie que la sommation est faite uniquement sur les spins i et j voisins dans (σ) et où δ désigne l'usuel symbole de Kronecker.

--- Construction du modèle du *diamant*

Ce processus se définit comme suit: au passage de l'étape n à l'étape $n+1$ ($n \geq 1$), chaque liaison entre deux spins est remplacée par un ensemble de quatre autres liaisons (cf. schéma ci-dessous)



- Construction récursive d'un modèle hiérarchique (ici le *diamant*)
(• = spin , — = liaison)

Le réseau du *diamant* est obtenu en répétant ce processus une infinité de fois.

--- Calcul de la fonction de partition

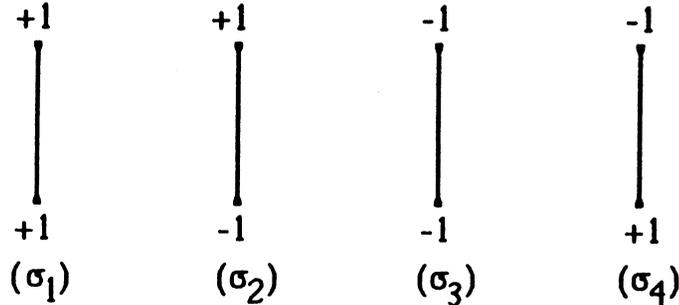
Tenant compte de la construction du modèle, la fonction de partition du réseau à l'étape n est donnée par l'égalité (2) :

$$Z_n(T,H) = \sum_{\sigma} [e^{-E(\sigma)/(kT)}]$$

où $E(\sigma)$ (introduite dans l'égalité (1)) est la somme des énergies de liaison dans la configuration (σ). Chaque spin pouvant prendre q états différents, on a au total (q^N) configurations (σ) avec N le nombre de spins dans une configuration à l'étape n (formée d'après ce qui précède de 4^{n-1} liaisons, avec $n \geq 1$).

Exemple de calcul de $Z_n(T)$:

Supposons, pour simplifier, que le modèle est à spins ± 1 c.a.d que ceux-ci prennent ($q=2$) états (+1 ou -1) et évaluons $Z_n(T)$ pour $n=1$. A cette étape de construction, les configurations (s), au nombre de (q^2), sont les suivantes:



De la précédente relation (4), on trouve que: $E(\sigma_1)=E(\sigma_3)=-J$, $E(\sigma_2)=E(\sigma_4)=0$
d'où $Z_1(T) = \sum_{i=1..4} [e^{-E(\sigma_i)/(kT)}] = 2 e^{J/(kT)} + 2$

ou encore, si l'on pose $y = e^{J/(kT)} > 0$: $Z_1(T) = Z_1(y) = 2y + 2$

le modèle est ferromagnétique (resp. anti-ferromagnétique) si $y > 1$ (ie si $J > 0$) (resp. $0 < y < 1$ (ie si $J < 0$)).

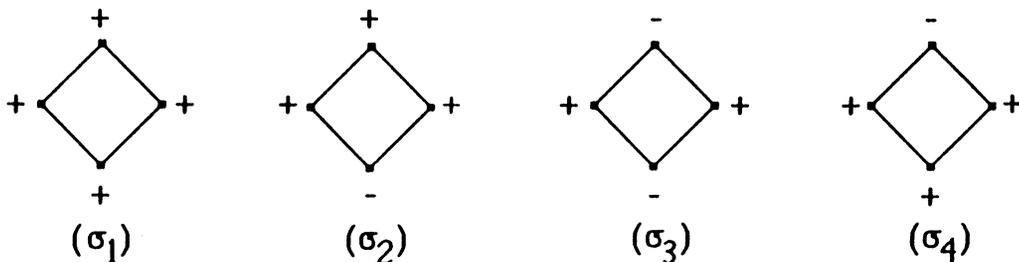
Important: Si ($q \geq 2$), on aboutit de la même manière à la relation $Z_1(y) = q(y+q-1)$.

Remarque: Cette dernière égalité traduit le fait que sur (q^2) configurations, il en existe un nombre (q) du type (+ — +) ou (- — -) qui correspondent donc à un terme en la variable (y^1) dans $Z_1(y)$. Il en reste donc ($q^2 - q$) liaisons du type (+ — -) ou (- — +) (dites liaisons frustrées) et qui sont associées à un terme constant (y^0) dans la fonction $Z_1(y)$. Avec cela, on obtient bien: $Z_1(y) = q y^1 + (q^2 - q) y^0 = q(y+q-1)$.

Expression de $Z_n(T)$ pour $n \geq 2$ (dans le cas $q=2$).

Appelons $Z_n(y)$ la fonction de partition du réseau construit après n itérations; dans ce qui va suivre on cherchera une relation entre $Z_n(y)$ et $Z_{n+1}(y)$.

De la construction récursive du modèle, on sait que la liaison $y^1 = (+ \text{ — } +)$ se transforme, au passage de l'étape n à l'étape $n+1$, en quatre autres liaisons qui sont précisées par les figures ci-après:

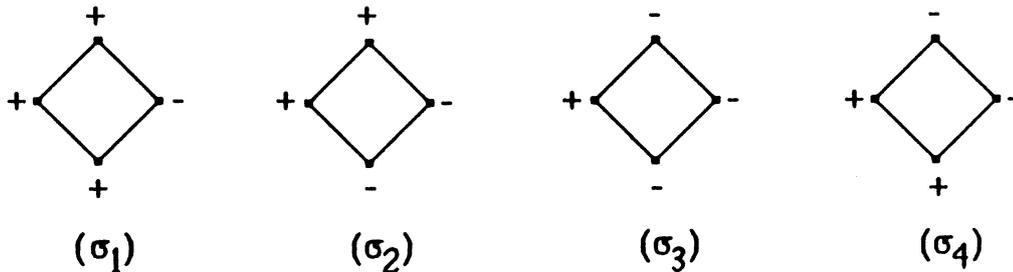


Leur énergie respective de liaison s'en déduit aisément :

$$E(\sigma_1)=-4J , E(\sigma_2)=E(\sigma_4)= -2J , E(\sigma_3)=0$$

→ le terme en y^1 dans $Z_n(y)$ est remplacé par (y^4+2y^2+1) à l'étape $(n+1)$ et donc dans l'expression de $Z_{n+1}(y)$ (cf. égalité 2). On arrive au même résultat avec la liaison $y^1=(- \text{---} -)$.

Suivant un procédé identique au précédent, la liaison $(+ \text{---} -)$, et donc le terme constant (y^0) dans $Z_n(y)$, devient à l'étape $(n+1)$:



et les énergies de liaison sont alors : $E(\sigma_1)=E(\sigma_2)=E(\sigma_3)=E(\sigma_4)=-2J$. Il découle de là que le terme constant (y^0) est remplacée par $(4y^2)$ à l'étape $(n+1)$ (ie dans $Z_{n+1}(y)$), de même pour l'autre liaison frustrée $(- \text{---} +)$.

Le schéma de construction du modèle indique que chaque configuration à l'étape n ($n \geq 1$) est composée de (4^{n-1}) liaisons; si N est le nombre de spins d'une configuration, il y a au total $(q^N=2^N)$ configurations possibles à l'étape indiquée. On peut maintenant calculer $Z_{n+1}(y)$ à partir de $Z_n(y)$.

Pour cela, considérons le terme y^p ($p \geq 0$) apparaissant dans l'expression de $Z_n(y)$. Alors, d'après la remarque faite sur le calcul de $Z_1(y)$, sur les (4^{n-1}) liaisons d'une configuration (à l'étape n) y^p est le résultat de p liaisons ($(+ \text{---} +)$ ou $(- \text{---} -)$) et de $(4^{n-1}-p)$ liaisons frustrées (ie du type $(+ \text{---} -)$ ou $(- \text{---} +)$). Les p liaisons vont se transformer (en passant de n à $n+1$) en $(y^4+2y^2+1)^p$ et les $[u=(4^{n-1}-p)]$ autres en $(4y^2)^u$, d'où le terme en y^p dans $Z_n(y)$ devient (cf. égalité (2)) dans $Z_{n+1}(y)$:

$$y^p \rightarrow [(y^4+2y^2+1)^p(4y^2)^u] = [(y^4+2y^2+1)/(4y^2)]^p (2y)^{2(u+p)} = [R(y)]^p (2y)^{2(u+p)}$$

(n) ←----- (n+1) ----->

Autrement dit :

$$Z_{n+1}(y) = Z_n [R(y)] (2y)^{2(u+p)}$$

et plus généralement pour $q \geq 2$:

$$Z_{n+1}(y) = Z_n [R_q(y)] (A_q(y))^{2(u+p)} \dots\dots\dots (5)$$

où $R_q(y)=(y^2+q-1)^2/(2y+q-2)^2$, $A_q(y)=(2y+q-2)$ et $u+p=4^{n-1}$.

La fraction rationnelle R_q est appelée la **Transformation de Renormalisation** du modèle du diamant ([12],[35]).

Distribution des zéros de Z_n

Pour $q=2$ en particulier et selon l'étape n , cette fonction s'écrit:

$$Z_1(y) = 2y+2, Z_2(y)=2y^4+12y^2+2, \dots. \text{ De la relation de récurrence (5),}$$

on constate que $\forall q \geq 2$, $Z_n(y)$ est un polynôme de degré (4^{n-1}) , de coefficients tous strictement positifs; q étant le coefficient du plus haut degré.

Mais comme $y=e^{J/(kT)} > 0$, ce polynôme n'admet pas de racines situées dans la région physique ($0 < T < \infty$): Il est donc difficile de localiser les éventuelles singularités de l'énergie libre $f(T)$ (égalités (3)). Pour résoudre ce problème, on étudie la **distribution des zéros de $Z_n(y)$ dans le plan complexe.**

Appelons (y_i) ($i=1..(u=4^{n-1})$) (resp. y_j^* ($j=1..(v=4^{n-2})$)) les racines des polynômes $Z_n(y)$ (resp. $Z_{n-1}(y)$) avec $n \geq 2$. L'égalité (5) nous donne:

$$q \prod_{i=1..u} (y-y_i) = [q \prod_{j=1..v} (R_q(y)-y_j^*)] (2y+q-2)^{2v}$$

remplaçons $R_q(y)$ par son expression $[(y^2+q-1)^2/(2y+q-2)^2]$, on obtient après simplifications

$$\prod_{i=1..u} (y-y_i) = \prod_{j=1..v} [(y^2+q-1)^2 - y_j^* (2y+q-2)^2]$$

et pour $n=2$ par exemple, cette égalité devient:

$$\prod_{i=1..4} (y-y_i) = ([(y^2+q-1)^2 - y_1^* (2y+q-2)^2] = P_4(y)) \text{ d'où l'on tire}$$

facilement l'équivalence : $(P_4(y)=0) \Leftrightarrow (R_q(y)=y_1^*)$

conséquence : Trouver les racines (y_i) ($i=1..4$) du polynôme Z_2 revient à chercher les antécédents (par R_q) du seul zéro $y_1^*=(1-q)$ du polynôme $Z_1(y)=q(y+q-1)$.

En généralisant ce raisonnement aux autres étapes ($n \geq 2$), on établit que :

La connaissance des (4^{n-2}) racines du polynôme Z_{n-1} nous permet de calculer les (4^{n-1}) racines de Z_n , celles-ci étant les pré-images (ou antécédents) par R_q des zéros de Z_{n-1} . En termes de la racine de Z_1 (qui est $y_0=1-q$), les zéros de Z_n sont donc les antécédents par $(R_q^{(n-1)})$ (ie la composée $(n-1)$ fois de R_q) de y_0 .

De là, on peut écrire : $\{ y / Z_n(y)=0 \} \equiv \{ z / R_q^{(n-1)}(z) = y_0 ; n=1, 2, \dots \}$, et en faisant tendre n vers l'infini (voir le processus de construction du réseau), les racines de Z_n forment, dans le champ complexe, l'ensemble des singularités de l'énergie libre $f(y)$ du modèle (égalités (3)). Cet ensemble-limite n'est autre que l'ensemble de Julia $J(R_q)$ de la transformation de renormalisation R_q (cf. § (I-0) du chap. A-I), et l'intersection $(J(R_q) \cap \mathbb{R}^+)$ nous donne ainsi les points y (et donc T) indiquant l'existence de transitions de phase pour notre modèle.

Remarques :

1) Il n'est pas nécessaire de choisir ($y_0=1-q$) comme le point de départ des itérations inverses dans l'identité ci-dessus. En effet, $J(R_q)$ est indépendant (à deux exceptions près au plus) du point de départ (cf. Blanchard [6]).

2) Les températures $T_1=0$ et $T_2=\infty$ sont des états stationnaires des réseaux de verres de spins ([35]). L'étude du comportement itératif du système dynamique holomorphe engendré par l'application R_q montre que les points $y_1=1$ et $y_2=\infty$ sont des points fixes attractifs. Par le biais du changement de variable ($y(T)=e^{J/(kT)}$) introduit précédemment, on vérifie que $y_2=\lim_{(T \rightarrow 0)} y(T)$ et $y_1=\lim_{(T \rightarrow \infty)} y(T)$.

Energie libre du modèle.

L'énergie libre (voir les égalités (3)) du réseau du diamant est donnée par la limite:

$$f(y)=\lim_{(n \rightarrow \infty)} [1/(4^{n-1})] \ln (Z_n(y))$$

Considérons la relation de récurrence (5) :

$Z_n(y) = Z_{n-1}[R_q(y)] (2y+q-2)^{2^v}$ où $v=4^{n-2}$ et reportons cette valeur de Z_n dans l'expression ci-dessus de l'énergie, on obtient après simplifications

$$f(R_q(y)) = 4 f(y) - 2 \ln(2y+q-2)$$

c'est l'équation fonctionnelle vérifiée par l'énergie libre du modèle du diamant. Pour l'étude en détails de cette équation ainsi que de la fonction énergie dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques, on renvoie à Derrida et al ([10] et [11]).

AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT 3ème CYCLE, DOCTORAT-INGENIEUR, DOCTORAT USTMG

Vu les dispositions de l'Arrêté du 16 avril 1974,

Vu les dispositions de l'Arrêté du 5 juillet 1984,

Vu les rapports de M. **B. LACOLLE**

M.

M. **N. AKROUNE** est autorisé

à présenter une thèse en vue de l'obtention du **DOCTORAT TROISIEME**
CYCLE " MATHEMATIQUES APPLIQUEES "

Grenoble, le **14 MAI 1987**

Le Président de l'Université Scientifique
Technologique et Médicale



J.J. PAYAN





Résumé :

Divers algorithmes d'étude locale d'ensembles invariants compacts de systèmes dynamiques sont présentés dans ce travail.

Nous commençons par développer des méthodes de calcul numérique de la densité locale autour d'un point d'un ensemble de Julia de fraction rationnelle. Ce problème est important dans le domaine de l'étude des modèles hiérarchiques de la physique statistique. De plus, cette densité serait un des paramètres principaux de la caractérisation d'invariants compacts de systèmes dynamiques (attracteur étrange...).

L'application de ces méthodes demande des algorithmes d'accès rapide à des régions (rectangle, cercle) du compact numériquement approché par un ensemble formé d'un grand nombre de points. Nous avons mis au point un algorithme, réellement implémentable et expérimentalement efficace, qui résout ce problème. On montre que, sous certaines conditions, ce procédé permet l'estimation de quelques dimensions fractales de l'ensemble considéré. Un logiciel, nommé *ELSEP* et écrit en langage Pascal, qui regroupe et exploite tous ces algorithmes ponctue cette étude.

Des résultats numériques et graphiques illustrent chacune des parties traitées.

Mots-clés :

Analyse numérique , système dynamique , ensemble de Julia , mesure , renormalisation , physique statistique , géométrie algorithmique , dimension fractale , logiciel.