



**HAL**  
open science

# Les modèles de fiabilité du logiciel : application aux essais de validation d'un système informatique critique

Edmond Félix Kouka

► **To cite this version:**

Edmond Félix Kouka. Les modèles de fiabilité du logiciel : application aux essais de validation d'un système informatique critique. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1985. Français. NNT: . tel-00315983

**HAL Id: tel-00315983**

**<https://theses.hal.science/tel-00315983>**

Submitted on 2 Sep 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée à*

**l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR INGENIEUR  
«Mathématiques appliquées»**

*par*

**Edmond Félix KOUKA**



**LES MODELES DE FIABILITE DU LOGICIEL :**

APPLICATION AUX ESSAIS DE VALIDATION  
D'UN SYSTEME INFORMATIQUE CRITIQUE.



**Thèse soutenue le 20 mai 1985 devant la commission d'examen.**

**G. SAUCIER  
J. AUCLAIR  
J. BARRA  
P. CASPI  
E. GIRARD**

**Président**

**Examineurs**



**UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE**

**Année universitaire 1982-1983**

**Président de l'Université : M. TANCHE**

**MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.**

**(RANG A)**

**SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE**

**PROFESSEURS DE 1ère CLASSE**

<b>ARNAUD Paul</b>	<b>Chimie organique</b>
<b>ARVIEU Robert</b>	<b>Physique nucléaire I.S.N.</b>
<b>AUBERT Guy</b>	<b>Physique C.N.R.S.</b>
<b>AYANT Yves</b>	<b>Physique approfondie</b>
<b>BARBIER Marie-Jeanne</b>	<b>Electrochimie</b>
<b>BARBIER Jean-Claude</b>	<b>Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)</b>
<b>BARJON Robert</b>	<b>Physique nucléaire I.S.N.</b>
<b>BARNOUD Fernand</b>	<b>Biosynthèse de la cellulose-Biologie</b>
<b>BARRA Jean-René</b>	<b>Statistiques - Mathématiques appliquées</b>
<b>BELORISKY Elie</b>	<b>Physique</b>
<b>BENZAKEN Claude (M.)</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>BERNARD Alain</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>BERTRANDIAS Françoise</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>BERTRANDIAS Jean-Paul</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>BILLET Jean</b>	<b>Géographie</b>
<b>BONNIER Jean-Marie</b>	<b>Chimie générale</b>
<b>BOUCHEZ Robert</b>	<b>Physique nucléaire I.S.N.</b>
<b>BRAVARD Yves</b>	<b>Géographie</b>
<b>CARLIER Georges</b>	<b>Biologie végétale</b>
<b>CAUQUIS Georges</b>	<b>Chimie organique</b>
<b>CHIBON Pierre</b>	<b>Biologie animale</b>
<b>COLIN DE VERDIERE Yves</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>CRABBE Pierre (détaché)</b>	<b>C.E.R.M.O.</b>
<b>CYROT Michel</b>	<b>Physique du solide</b>
<b>DAUMAS Max</b>	<b>Géographie</b>
<b>DEBELMAS Jacques</b>	<b>Géologie générale</b>
<b>DEGRANGE Charles</b>	<b>Zoologie</b>
<b>DELOBEL Claude (M.)</b>	<b>M.I.A.G. Mathématiques appliquées</b>
<b>DEPORTES Charles</b>	<b>Chimie minérale</b>
<b>DESRE Pierre</b>	<b>Electrochimie</b>
<b>DOLIQUE Jean-Michel</b>	<b>Physique des plasmas</b>
<b>DUCROS Pierre</b>	<b>Cristallographie</b>
<b>FONTAINE Jean-Marc</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>GAGNAIRE Didier</b>	<b>Chimie physique</b>

.../...

GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

#### PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

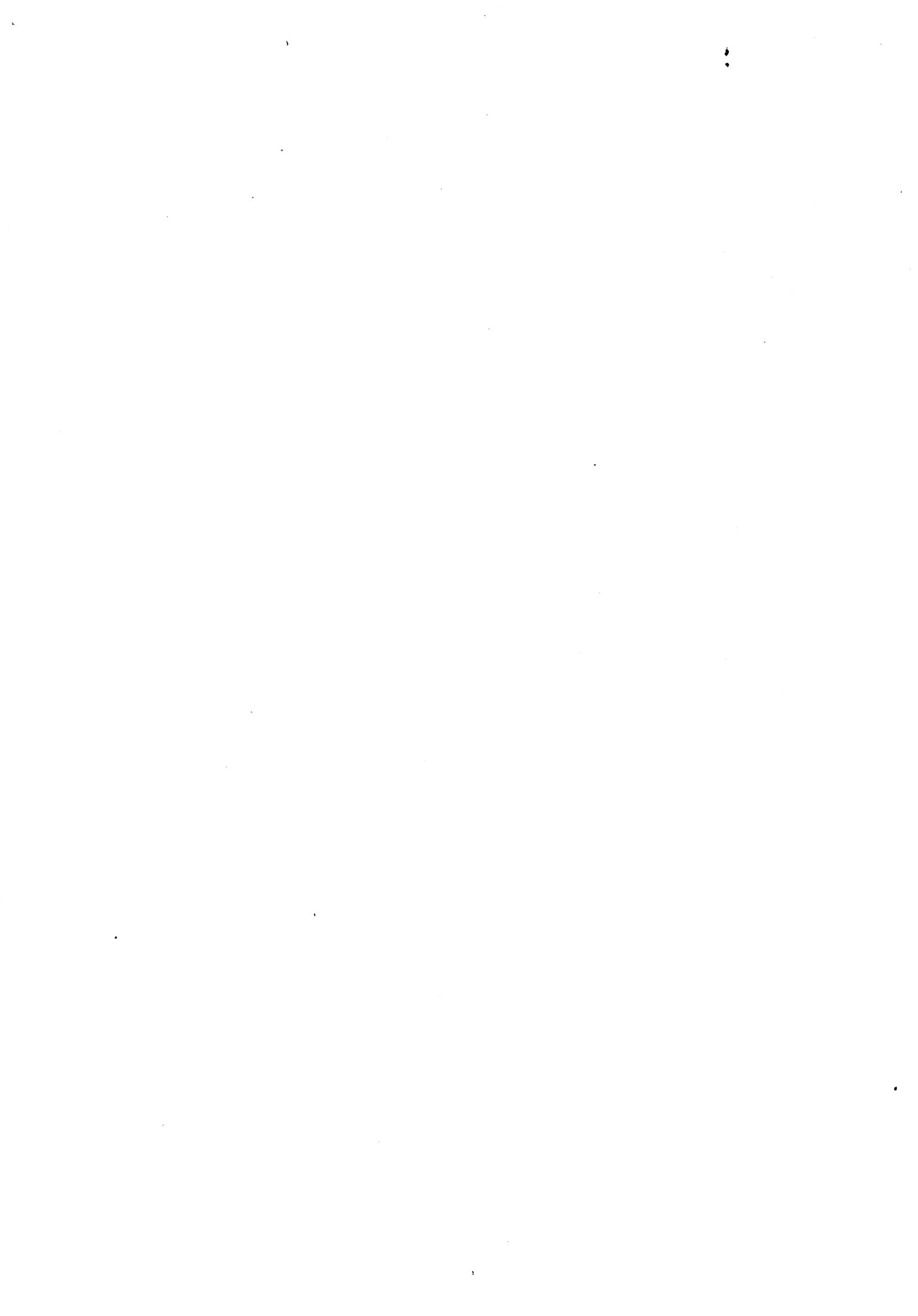
ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie



A mes parents.

LES MODELES DE FIABILITE DU LOGICIEL :  
APPLICATION AUX ESSAIS DE VALIDATION  
D'UN SYSTEME INFORMATIQUE CRITIQUE



Je remercie tous ceux qui ont bien voulu s'intéresser à ce travail, l'encourager, le critiquer ou l'examiner :

- Madame Gabrièle SAUCIER, professeur à l'E.N.S.I.M.A.G., qui me fait l'honneur d'assurer la présidence du jury. Je tiens, par la même occasion, à lui exprimer toute ma reconnaissance pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire.

- Monsieur Jean-René BARRA, professeur à l'U.S.M.G., qui, en apportant l'opinion d'un statisticien dans le jury, confère un surcroît de crédibilité à ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour son cours de D.E.A. qui, par son approche méthodologique critique, a suscité mon intérêt pour la statistique.

- Monsieur Jean-Pierre AUCLAIR, Chef de la division VZA de la SNCF, pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail. Ses remarques et son enthousiasme m'ont permis de surmonter quelques inquiétudes quant à l'avenir de ce travail dont l'issue me semblait quelque peu aléatoire.

- Monsieur Paul CASPI, Chargé de Recherche au CNRS, à qui je dois beaucoup en ce qui concerne toute mon initiation à la recherche. Ce travail ne serait pas sans sa sympathie et sa compétence.

- Monsieur Emmanuel GIRARD, Ingénieur à la C.I.M.S.A., qui me fait l'honneur de participer à ce jury.

Enfin, cette thèse est aussi le fruit d'une harmonieuse coopération : mes collègues du Laboratoire Circuits et Systèmes et ceux de l'IMAG en général m'ont apporté leur aide et leur soutien tant par l'ambiance chaleureuse que par la curiosité intellectuelle ou la qualité de travail. C'est pourquoi il m'est agréable de les remercier tous, et plus particulièrement :

- Mesdames S. ROCHE et S. HUMBLOT qui ont assuré la frappe de cette thèse.

- Monsieur IGLESIAS et l'équipe de reprographie de l'IMAG pour la patience et la gentillesse qu'ils ont ajoutées à la qualité de tirage de cette thèse.

Et pour terminer, je voudrais remercier ma famille et Edith grâce auxquelles j'ai pu mener à bien ces deux années de formation en toute confiance.

## SOMMAIRE

### INTRODUCTION

1

### I PREMIERE PARTIE : CONCEPTS ET OUTILS DE BASE

1 - Introduction.	7
2 - Bref aperçu sur la pathologie des systèmes.	8
3 - Les modèles de fiabilité du logiciel : un état sommaire de l'art.	16
4 - Conclusion.	78

### II DEUXIEME PARTIE : TSAR , UN TEST SEQUENTIEL D'ARRET APPLIQUE AUX ESSAIS DE MISE AU POINT ET DE VALIDATION DU LOGICIEL.

1- Introduction.	81
2- Position du problème.	83
3- Le test d'hypothèses en statistique.	86
4- Recherche d'un procédé de résolution.	89
5- Proposition d'un test séquentiel d'arrêt.	95
6- Dérivation de la règle d'arrêt au modèle de JELINSKI et MORANDA, (JM).	101
7- Dérivation de la règle d'arrêt au modèle de LITTLEWOOD (LB).	108
8- Quelques notions fondamentales de statistique Bayésienne.	129
9- Les lois a priori sur les taux de défaillance et leurs répercussions sur la règle d'arrêt appliquée au modèle de LITTLEWOOD.	133
10- Alternative au modèle de LITTLEWOOD : un problème de statistique Bayésienne.	143

11- Un aperçu sur les statistiques d'ordre.	154
12- Le problème de la première défaillance.	161
13- Un aperçu sur le modèle de LITTLEWOOD et VERRAL.	165
14- Conclusion.	169
<b>APPENDICE A.1</b>	<b>171</b>
<b>APPENDICE A.2</b>	<b>178</b>
<b>III TROISIEME PARTIE : ESSAIS PROBATOIRES DU TEST SEQUENTIEL D'ARRET.</b>	
1- Introduction.	189
2- Version classique : modèle JM, JELTSAR.	189
3- Version Bayésienne: modèle LB, LITSAR.	209
4- Conclusion critique.	232
<b>ANNEXE : Application du test d'arrêt aux essais de validation du P.A.I.</b>	<b>233</b>
<b>CONCLUSION</b>	<b>239</b>
<b>REFERENCES</b>	<b>245</b>

## CHAPITRE I

### CONCEPTS ET OUTILS DE BASE

... La probabilité est une vérité, mais une vérité connue par des principes insuffisants ; la connaissance de cette vérité, tout en étant défectueuse, n'est pourtant pas trompeuse pour cela,...

KANT (critique de la raison pure)



## I.1 - INTRODUCTION

Cette étude s'inscrit dans le cadre d'un contrat établi entre le Laboratoire Circuits et Systèmes et la SNCF. Ce contrat a pour objectif la conception et la validation d'un système de sécurité ferroviaire à base de microprocesseurs. Ce système comporte une certaine particularité vis-à-vis des applications informatiques classiques. En effet une exigence de haute sécurité est requise par l'application. C'est ce qui motive ce contrat de recherche. Un aperçu du problème associé à la validation d'un tel système peut être donné comme suit : appelons défaillance catastrophique du système, l'émission vers le terrain d'une commande erronée. Cela peut être : l'ouverture d'une portion de voie à deux trains circulant en sens opposés, ou la mise en mouvement d'une aiguille dans une portion de voie ouverte à la circulation. Bien d'autres cas de figure sont possibles. L'exigence de sécurité évoquée ci-dessus correspond à demander qu'une telle défaillance ne se produise en moyenne que moins d'une fois par milliard d'heures de fonctionnement cumulé du système.

Pour répondre de façon satisfaisante à une telle exigence, il convient de s'interroger sur les causes possibles de ces défaillances. Ces causes sont communément appelées fautes. Elles sont classiquement réparties en trois classes :

- Les fautes transitoires qui sont dues à des phénomènes parasites : électromagnétisme, émission de particules  $\alpha$  des substrats de circuits intégrés, erreurs d'utilisation humaine,
- les fautes aléatoires occasionnant les défaillances du matériel (pannes),
- les fautes de conception : fautes dans la conception ou l'utilisation de composants, fautes dans l'interconnexion de ces composants, fautes de programmation.

Les deux premiers types de fautes constituent un domaine d'étude classique faisant l'objet d'une littérature considérable : IEEE Trans. on Reliability, FTC, Fiabilité et Maintenabilité, TSI, ... Un examen approfondi de ce champ d'étude déborderait largement du cadre de cette thèse. Nous pouvons dire de façon très simplifiée que les principales techniques utilisées pour éviter les défaillances correspondantes sont : la fiabilité intrinsèque (éviter de faute), la sécurité intrinsèque et les redondances (tolérance aux fautes, qui dans le cas de la sécurité se ramène à une passivation des fautes). Ces techniques ont été largement utilisées dans le projet SNCF [CAS 81], [CAS 84] [SEV 84].

Le troisième type de faute, à savoir les fautes de conception, n'a été pris en compte que beaucoup plus récemment dans le domaine de la haute sécurité (ou de la haute fiabilité) industrielle. Cela tient au fait que dans ce domaine, il n'a été conçu jusqu'à présent que des systèmes relativement peu complexes et donc relativement vérifiables. L'utilisation de l'informatique, en permettant des fonctions industrielles beaucoup plus performantes, mais aussi plus complexes, a modifié profondément ce panorama : il est à prévoir que les défaillances dues à des fautes de conception risquent de devenir prépondérantes dans un avenir proche.

De même que pour les autres types de fautes, les techniques utilisées pour prendre en compte les fautes de conception peuvent être séparées en techniques d'évitement et techniques de tolérance aux fautes. En revanche la jeunesse du sujet fait que les techniques de tolérance en soient encore à leur balbutiement : Recovery-blocks, n-version programming [RAN 75], [CHN 78].

Les techniques d'évitement de fautes de conception représentent par contre un immense sujet, surtout pour ce qui est du logiciel. On peut citer :

- les outils et méthodes pour éviter les fautes de programmation : l'accent est porté sur l'amélioration des langages (langages de haut niveau), et sur celle des méthodes (programmation structurée, etc...).

L'examen de ce vaste sujet est largement au delà du cadre de cette thèse.

- Les méthodes de détection des erreurs. On peut y distinguer :

- les méthodes de vérification formelle : preuves de correction de programme, exécution symbolique, qui ont donné lieu à une masse considérable de travaux. On trouvera dans [BLA 84] une application de telles méthodes au projet SNCF.

- Les méthodes de test, que l'on peut classer en tests déterministes ou aléatoires. Le test aléatoire peut être assimilé à une technique d'essais en environnement réel ou simulé. On trouvera une étude synthétique des méthodes de test de programmes dans [DACS 79].

Quelque soit le type de fautes considéré, le large éventail de techniques (esquissé ici) pose au concepteur un problème de choix et donc d'évaluation. En quoi une technique particulière peut-elle contribuer à l'objectif final de sûreté de fonctionnement que l'on s'est fixé (ici c'est l'objectif de sécurité assigné au projet SNCF) ?

Pour ce qui est des défaillances d'origine matérielle, cette préoccupation est largement prise en compte, et depuis longtemps, par ce que l'on peut appeler la théorie de la fiabilité. Toutes les sources citées précédemment en font largement état.

Là encore le caractère récent de la prise en compte des fautes de conception apparaît lorsque l'on considère la littérature ayant trait à ce qui est maintenant appelé la théorie de la fiabilité du logiciel.

Tout d'abord il n'y a pratiquement rien pour ce qui est des techniques de tolérance aux fautes logicielles [KEI 84]. A notre connaissance, il en est de même pour les techniques de vérifications formelles.

En revanche, on peut noter des tentatives pour évaluer a priori la qualité d'un logiciel un peu de la même façon que les modèles RADC (MIK HDBK 2) et CNET (RDF). Ces derniers estiment le taux de défaillance d'un composant

électronique à partir de la description de ses diverses caractéristiques intrinsèques (technologie, complexité), sa qualité de fabrication, et son environnement d'utilisation. On peut citer à cet effet un éventail considérable de travaux [HAL 77], [MCA 76]...

On trouve aussi des méthodes pour estimer la proportion du nombre d'erreurs détectées par un test déterministe ou aléatoire [SCHI 78], [BOL 78]. Plus généralement on assiste à un développement spectaculaire des modèles qui visent un apprentissage a posteriori de la fiabilité d'un système. Ce dernier au cours des essais d'évaluation, opère dans un environnement aléatoire plus ou moins représentatif du milieu opérationnel réel où il évoluera. Ces modèles se répartissent en deux principales classes :

- Les modèles à taux de défaillance qui sont essentiellement utilisés au cours de la phase de mise au point : [JEL 72], [MUS 75], [GOE 79], [LIT 73], [LIT 79a], [LIT 81b], [SHO 75], [SCH 78].
- Les modèles d'échantillonnage qui interviennent au cours de la phase de validation : [NEL 78], [SCH 74], [MILL 73].

Pour ce qui concerne le projet SNCF, on peut dire que la plupart des techniques évoquées ci-dessus ont été mises en oeuvre :

- une méthodologie de programmation a été définie et appliquée. Elle porte sur une analyse du codage et de la documentation,
- des techniques de vérification formelle sont en cours d'application [BLA 84],
- chaque module a été soumis à un jeu de tests prédéfini avant intégration,
- après intégration, le système est soumis au jeu d'essais manuels utilisés pour les systèmes en technologie classique (relais) actuellement en service,

- ensuite le système est soumis à des essais aléatoires, d'abord simulés au moyen d'un simulateur d'environnement, puis en environnement réel. Au cours de ces essais le système sera mis en parallèle avec un système classique. Seul le système classique opère sur le terrain. La concordance des sorties des deux systèmes est vérifiée par un comparateur matériel externe.

Pour le moment, les techniques de redondance logicielle n'ont pas été mises en oeuvre pour des raisons de coût et de temps. Il n'est pas exclu d'y faire appel. Cela nécessite toutefois une certaine maturité dans la connaissance des techniques à utiliser pour obtenir des programmes dits indépendants. Il faudrait en plus mieux maîtriser l'évaluation de leur efficacité.

Dans le cadre de ce schéma de conception-vérification, la question posée par la SNCF est de savoir ce que l'on peut en déduire vis-à-vis de l'objectif de sécurité requis.

Comme nous l'avons vu plus haut, les précautions de conception et les méthodes de vérification formelle sont sans doute très efficaces mais il y a cependant très peu d'éléments actuellement pour évaluer cette efficacité. Il en est de même pour ce qui est des jeux de tests déterministes. Nous nous sommes donc consacrés à l'étude des essais en environnement réel ou simulé. Ces essais peuvent être envisagés de deux façons :

- Soit, on se contente d'observer le système, sans corriger les erreurs observées, dans un objectif mesure-validation qui conduit simplement à la décision rejet ou acceptation : c'est le cas des modèles d'échantillonnage,
- Soit, au contraire, on corrige les erreurs dès qu'elles apparaissent et les essais reprennent : c'est le cas des modèles à taux de défaillance.

La question posée par la SNCF peut alors être ramenée à celle de la décision d'arrêt de cette procédure, sous le respect de l'objectif de sécurité fixé.

C'est à cette question que cette thèse essaie de répondre.

Dans une première partie, nous présentons les concepts et outils de base qui sous-tendent notre étude. La seconde partie aborde la question posée, sous l'angle des principaux modèles de fiabilité du logiciel à taux de défaillance. A cet effet, diverses propositions sont faites et discutées. Celles-ci s'appuient sur des modèles distincts. Ces propositions sont à examiner en regard du dilemme suivant :

Peut-on ou non valider le système, sans l'essayer pendant un temps correspondant à l'objectif fixé (ici un milliard d'heures) ?

Nous verrons que la réponse à cette question est conditionnée à l'acceptation d'hypothèses qui sous-tendent les divers modèles. Cependant, l'état embryonnaire du sujet ne permet pas toujours de trancher sur la vraisemblance des dites hypothèses.

Nous ne répondrons donc pas entièrement à la question. Nous pensons toutefois que nos propositions présentent quelque intérêt. Notre démarche et notre réserve ne sont justifiées que par cet état de fait : l'impossibilité d'appliquer un test exhaustif au projet SNCF pour lequel une haute sécurité est exigée. Somme toute, le lecteur jugera.

Enfin, la troisième partie présentera les premières applications concrètes de ces propositions au projet SNCF.

## I - CONCEPTS ET OUTILS DE BASE

### I.1 - INTRODUCTION

Nous précisons ici la terminologie utilisée dans cette thèse en rapport avec les rubriques fondamentales d'une étude de sûreté de fonctionnement des systèmes :

- La **pathologie** des systèmes qui présente les différentes causes retenues pour expliquer le mauvais fonctionnement et leur évolution,
- les **moyens** d'obtenir une sûreté de fonctionnement grâce à des méthodes et des outils appropriés,
- enfin, les **mesures** de sûreté de fonctionnement qui permettent d'apprécier la qualité de service résultant soit des altérations du système soit des moyens qui s'opposent à ces altérations.

La nature particulière des altérations des systèmes logiciels complexes pour lesquels nous envisageons de proposer une procédure de validation nous conduira à établir un Etat de l'art des modèles de fiabilité du logiciel.

Une discussion sur la validité des modèles et la représentativité des essais de fiabilité clôturera ce chapitre de présentation générale.

## I.2 - BREF APERCU SUR LA PATHOLOGIE DES SYSTEMES

### I.2.1 Terminologie :

Nous définissons la sûreté de fonctionnement d'un système informatique comme [LAP 84] la qualité du service qu'il délivre, qualité telle que les utilisateurs du système puissent lui accorder une confiance justifiée.

Le service délivré par un système est son comportement tel qu'il est perçu par un ou d'autres systèmes particuliers interagissant avec lui : ses utilisateurs.

Les processus influençant la sûreté de fonctionnement sont complexes, on ne peut en général qu'en observer les retombées sur le service délivré par le système.

Une défaillance du système est constatée lorsque le service délivré dévie du service spécifié. La spécification du service est une description agréée de ce dernier.

L'occurrence de la défaillance est expliquée par l'activation d'une partie erronée du système. Une erreur est définie comme la partie de l'état d'un système qui est différente de celle qu'elle devrait être pour qu'il soit à même d'accomplir ses tâches conformément à l'attente de ses utilisateurs. Autrement dit une erreur est une dérivation d'une partie de l'état interne du système par rapport à l'état spécifié.

La cause phénoménologique d'une erreur est appelée une faute.

Ces différentes notions s'enchaînent de la façon suivante : lorsqu'une faute survient, le résultat est une circonstance indésirable dans l'état

interne d'une partie du système : une erreur potentielle ou latente. L'activation de cette erreur provoquera une circonstance indésirable cette fois dans la qualité du service attendu par l'utilisateur : une défaillance.

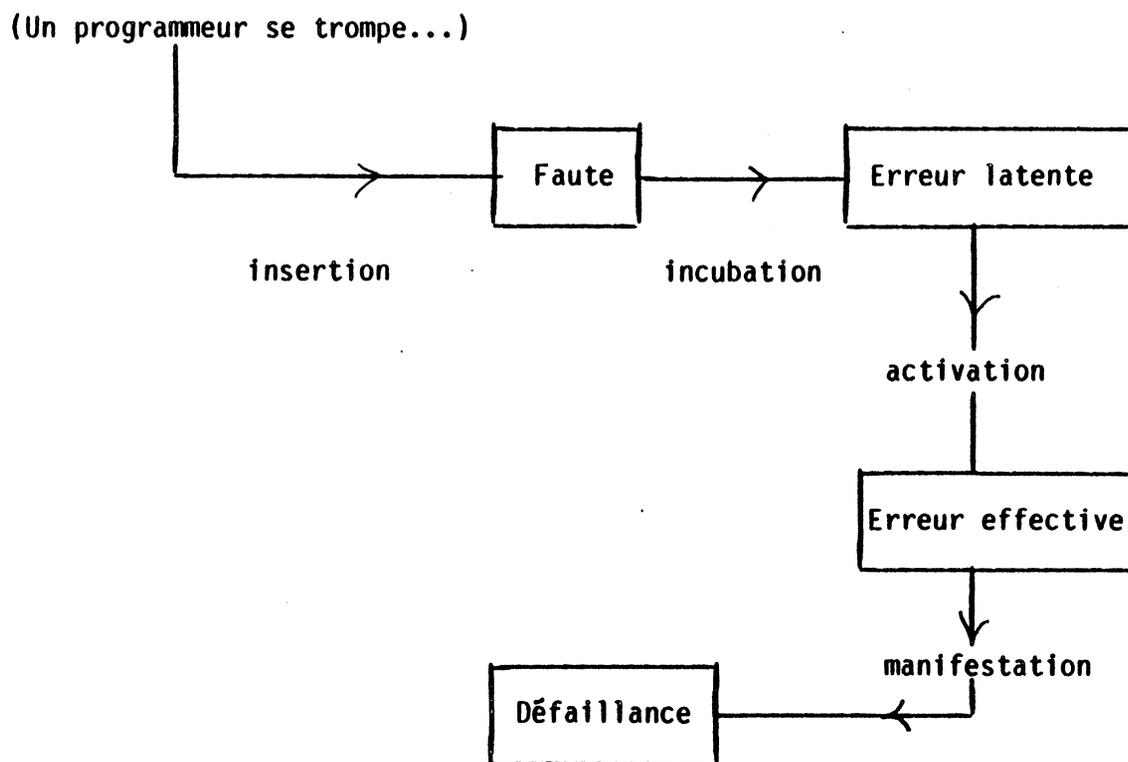


Figure 1 : Enchaînement des notions : faute, erreur, défaillance

### I.2.2 -CLASSIFICATION DES ALTERATIONS ET EXEMPLES DE MOYENS DE PREVENTION

Il est possible de classifier les altérations du système suivant leurs origines ou suivant leurs conséquences sur le fonctionnement de ce dernier. Deux modes de défaillances sont essentiellement retenus :

- Les défaillances dites **bénignes**. Elles provoquent des interruptions du système dont les coûts sont plus ou moins comparables à ceux résultant de l'accomplissement du service.
- Les défaillances **malignes** ou **catastrophiques**. Les interruptions résultant de ce mode de défaillance engendrent des conséquences sans commune mesure avec celles dues à l'accomplissement du service.

Il existe des techniques permettant de prévenir les défaillances du système. Pour cela on s'attaque à leurs sources. Nous pouvons brièvement citer :

- **L'évitement de faute** : on cherche par construction à minimiser la possibilité d'occurrence des fautes. Une vérification du système permet en outre la suppression des erreurs.
- **La tolérance aux fautes** : au moyen d'une redondance, il devient possible au système de délivrer un service malgré l'occurrence d'une faute.

La mise en oeuvre de ces techniques nécessite une classification préalable des fautes. Celles-ci sont classiquement réparties en trois catégories :

- Les fautes aléatoires : elles sont absentes à la conception du système. Elles apparaissent à un moment plus ou moins aléatoire. Après être passées par une phase intermittente, elles deviennent permanentes.

Ce type de faute est accusé par les composants matériels. C'est le cas des fautes physiques internes dûes au vieillissement ou à l'usure du matériel. Les défaillances qui en résultent sont appelées pannes.

- Les fautes transitoires : elles apparaissent de façon plus ou moins aléatoire. Elles passent par une phase intermittente puis disparaissent. C'est le cas des fautes physiques externes, des fautes d'interaction ou de manipulation, des fautes de maintenance.

- Les fautes permanentes : elles sont présentes dans la mise en service du système. Elles demeurent dans le système et par conséquent elles sont susceptibles d'en altérer le bon fonctionnement aussi longtemps qu'elles n'en sont pas retirées. Cette présence initiale de toutes les fautes permanentes particularise ce type de fautes vis-à-vis des deux premiers. En effet, le risque de masquage et de multiplicité de fautes est ici plus élevé. Dans les deux premiers cas, l'indépendance dans l'apparition de chaque faute garantit plus ou moins leur individualité. Un exemple de fautes permanentes est celui des fautes insérées dans l'écriture d'un programme. La spécificité des systèmes logiciels réside en ceci que seul ce dernier type de faute est essentiellement considéré. En effet un logiciel ne vieillit pas et ne peut notamment s'user. Les fautes du logiciel sont essentiellement dues à des erreurs humaines lors de l'écriture du code ou lors de certaines manipulations de correction.

Le développement des techniques de suppression de fautes du logiciel a mis en lumière un phénomène jusqu'alors inhabituel dans la théorie de la fiabilité : le phénomène de croissance de fiabilité. En effet, les corrections progressives qui sont apportées au logiciel se traduisent par une amélioration de la qualité de service délivré par ce dernier.

Pendant longtemps la théorie de la fiabilité s'est essentiellement intéressée aux deux premiers types de fautes : aléatoires et transitoires. La complexité sans cesse croissante des systèmes et notamment celle des systèmes

logiciels fait que de plus en plus il faut tenir compte des fautes initiales. Ce sont essentiellement des fautes humaines de conception.

### I.2.3 - LES MESURES

Des mesures ont été établies pour caractériser la sûreté de fonctionnement d'un système. Comme les circonstances considérées ici (manifestation de défaillance, interruption du système ...) sont non déterministes, des variables aléatoires leur sont associées, et les mesures correspondantes sont donc des probabilités. Deux mesures sont usuellement considérées : la fiabilité et la maintenabilité.

La fiabilité est définie comme la probabilité du temps durant lequel les tâches sont accomplies continûment (ou, ce qui est équivalent, du temps avant défaillance) à partir d'un instant initial de référence.

L'unité de mesure associée à la période d'exercice (temps d'accomplissement des tâches) est suivant les cas :

- un nombre d'essais,
- une granularité temporelle : temps d'unité centrale (CPU), temps calendaire,...

Appelons  $T$ , le temps de bon fonctionnement du système à partir de sa mise en service. Alors la fiabilité peut être définie comme la probabilité pour que  $T$  soit supérieur à une valeur  $x$  fixée a priori.

$$R(x) = \text{Prob}[T > x]$$

D'autres grandeurs peuvent caractériser la fiabilité :

- le taux de défaillance

Appelons  $f(t)$  la densité de probabilité de la variable aléatoire  $T$ . La probabilité de manifestation d'une erreur sur l'intervalle  $[0, x]$  est donnée par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

on a

$$R(x) = 1 - F(x)$$

Le taux de défaillance à l'instant  $t$  est défini par :

$$\lambda(t) = \frac{F'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)}$$

Cette dernière formule peut être étendue au cas où l'unité de mesure de la période d'exercice du système est une grandeur discrète. Dans le cas général, partant de la remarque suivante :

$$F'(t) = -R'(t)$$

on peut écrire

$$\lambda(t) = - \frac{R'(t)}{R(t)}$$

d'où la relation entre fiabilité et taux de défaillance

$$R(x) = e^{-\int_0^x \lambda(t)dt}$$

-Le MTTF (Mean Time To Failures) : c'est la valeur moyenne (au sens statistique) de la variable aléatoire T.

$$\text{MTTF} = E [T] = \int_0^{\infty} tf(t)dt$$

La croissance de fiabilité accusée par les systèmes logiciels en cours de mise au point fait qu'une grandeur telle que le MTTF peut dans certains cas être dénué de sens [LIT 75a]. En effet pour un logiciel sans erreur, le MTTF devrait être infini. Nous pouvons noter que cette hypothèse ne peut s'appliquer aux systèmes matériels en raison de la charge ou du vieillissement auxquels ils sont soumis au cours du temps.

**La maintenabilité** : c'est la mesure de l'interruption continue du service ou encore du temps jusqu'à restauration. Celle-ci est essentiellement exprimée en terme de MTTR (Mean Time To Repair).

Outre ces deux mesures de base, on peut citer quelques extensions aux concepts suivants :

- la **sécurité** qui élargit la notion de fiabilité sur la conséquence de la défaillance survenue : c'est la probabilité du temps de délivrance d'un service sûr (ou ce qui est équivalent, du temps avant défaillance catastrophique) à partir d'un instant initial de référence. Dans ce contexte, le MTTF est remplacé par le **MTTMF** (Mean Time To Malignant Failures)

- La **disponibilité** qui englobe les deux notions de fiabilité et de maintenabilité. C'est la mesure de l'accomplissement du service par rapport à l'alternance accomplissement-interruption.

De plus amples informations sur ces mesures pourront être trouvées dans [LAP 84].

### I.3 - LES MODELES DE FIABILITE DU LOGICIEL : ETAT SOMMAIRE DE L'ART

#### I.3.1 - INTRODUCTION

Nous avons déjà dit que l'application du concept de fiabilité à la description du comportement d'un programme est une discipline récente. Elle n'a pas encore atteint une maturité suffisante pour en faire une application normalisée. Cependant les résultats obtenus jusqu'alors semblent prometteurs. C'est pourquoi on assiste depuis la dernière décennie à une émergence de modèles de fiabilité du logiciel.

La littérature technique (IEEE Trans. on Reliability, Software Engineering, TSI, etc...) fait état de nombreux modèles de fiabilité du logiciel. Un modèle de fiabilité se présente sous forme d'équations mathématiques utilisées pour l'évaluation ou la prévision quantitative de la fiabilité. Cela est fait à partir des paramètres spécifiques. Ces paramètres sont supposés soit déjà connus, soit estimés à partir d'observations ou d'essais sur le logiciel. La complexité des systèmes logiciels fait que seules les erreurs humaines de conception sont essentiellement considérées.

On peut répartir ces modèles suivant les phases où ils sont utilisés dans le cycle de vie du logiciel.

- A la phase de conception : on essaye de déterminer les paramètres optimaux qu'il faut atteindre ou respecter dans l'écriture ou la conception d'un programme. Ces modèles visent la minimisation du nombre d'erreurs potentielles qu'on pourrait maladroitement insérer dans un programme lors de son écriture.

C'est essentiellement le cas des modèles développés par Halstead [HAL 77],

- la phase de mise au point (développement, debugging) : le programme opère dans un environnement plus ou moins réel. Le modèle utilisé prédit l'occurrence des défaillances du logiciel en fonction du temps. La fiabilité, le temps moyen de bon fonctionnement, le taux de défaillance sont estimés. Ces modèles sont appelés modèles à taux de défaillance : [JEL 72], [MUS 79a], [GOE 79], [SCH 78], [LIT 79a], [LIT 80].

- La phase de validation : le logiciel est soumis à des conditions d'application encore plus sévères que celles de la phase précédente. Contrairement à la phase précédente les erreurs ne sont plus corrigées. Ces modèles testent différents chemins du graphe de contrôle du logiciel. Pour cela les points d'entrée sont sélectionnés de façon aléatoire. Ces modèles sont appelés modèles d'échantillonnage. A ce stade on peut évaluer l'efficacité des jeux de tests utilisés précédemment pour débusquer les erreurs : [NEL 78], [TRW 76], [MIL 73]. On vérifie également si l'objectif de fiabilité qu'on s'était fixé est atteint ou non.

- La phase opérationnelle et la phase de maintenance : le logiciel est supposé opérer maintenant dans son environnement réel. Les différentes manipulations du programme pourront plus ou moins altérer sa sûreté de fonctionnement. Les modèles intervenant ici sont autant de précautions supplémentaires dans l'assurance de la qualité du service à délivrer. Il existe très peu de modèles qui se rapportent spécifiquement à cette phase : [LIT 75b], [CHE 78], [TRW 76].

#### 1.3.1.1 Un mot sur la représentativité des essais de fiabilité

Les mesures précédentes servent à quantifier la confiance qu'on peut accorder à un système suivant son profil d'utilisation. C'est pour éprouver ou vérifier cette confiance que le système après sa conception est soumis à des essais dits de fiabilité. A cet effet, le système évolue dans un environnement plus ou moins aléatoire : l'environnement d'évaluation. Pour accélérer plus ou moins le processus de manifestation de

défauts résiduels, ce dernier environnement est en général rendu plus restrictif que l'environnement réel auquel est destiné le système : l'environnement opérationnel effectif. Il reste à noter que le système a été conçu dans le respect de certaines spécifications : son environnement de définition. On voit tout de suite poindre le problème de la comptabilité entre ces trois environnements. Comme nous le verrons au chapitre suivant, certains auteurs introduisent dans leur modèle un facteur de représentativité des essais vis à vis du profil opérationnel effectif [MUS 75]. D'autres proposent des moyens pour évaluer l'efficacité des tests utilisés durant les essais [SCH 78].

Cependant les activités correspondant aux essais sont des activités humaines (modification, correction, ...), et en tant que telles imparfaites. On peut alors se demander dans quelle mesure les objectifs de sûreté de fonctionnement présentés précédemment peuvent-ils être complètement atteints. Dans le chapitre suivant nous essaierons de présenter les différentes précautions qui sont prises pour atteindre ou assurer un objectif de fiabilité donné à un système logiciel. L'exposé de nombreuses techniques utilisées à cet égard nous conduirait en dehors du contexte de cette thèse. Nous nous limiterons donc aux modèles dits de fiabilité du logiciel.

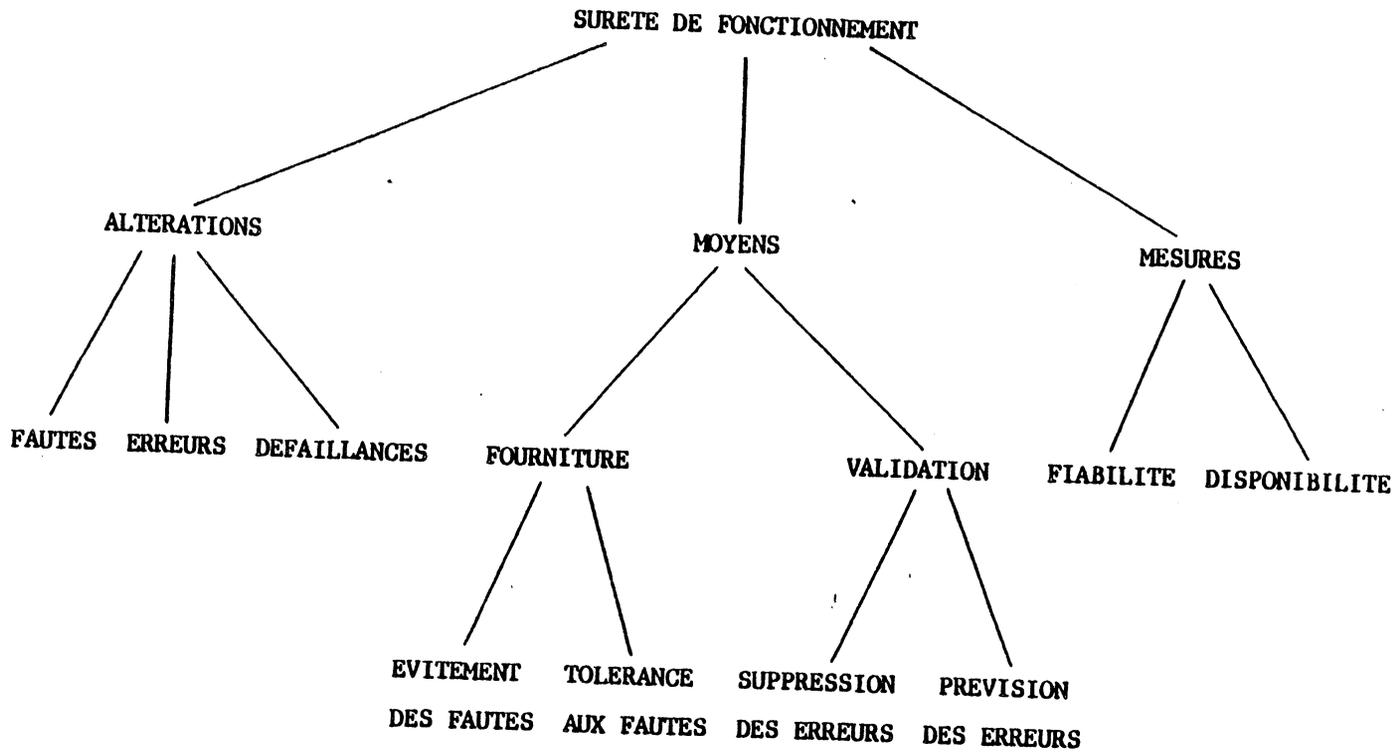


Figure 2 : Les rubriques de la sûreté de fonctionnement

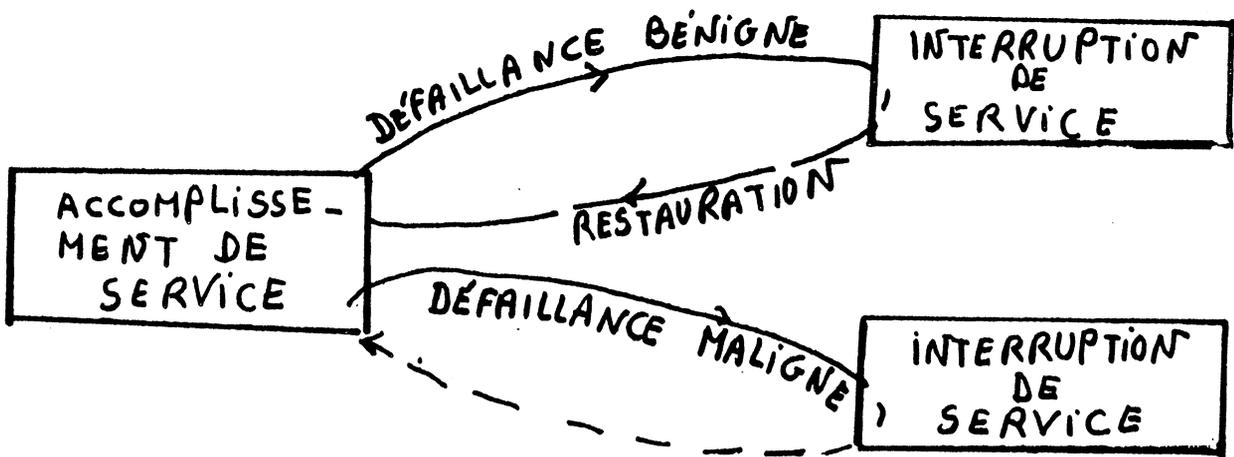


Figure 3 : Accomplissement et interruption de service

### I.3.2 - REVUE DES PRINCIPAUX MODELES DE FIABILITE SUIVANT LEURS PHASES D'UTILISATION

#### I.3.2.1 - La phase de conception

##### A - Des mesures de la complexité du texte d'un programme

Halstead [HAL 77] a développé une théorie appelée la science du logiciel. Des mesures ont été définies pour évaluer la complexité textuelle d'un programme :

1) La longueur d'un programme est définie par l'équation suivante :

$$N = N_1 + N_2$$

où  $N_1$  est le nombre d'occurrence d'opérateurs

$N_2$  est le nombre d'occurrence d'opérandes

Halstead s'est appuyé sur l'idée que la complexité d'un programme bien structuré ne devrait essentiellement dépendre que de son nombre d'opérateurs distincts  $n_1$  et de son nombre d'opérandes distincts  $n_2$ . Il a donc établi l'équation idéale suivante pour la prédiction de  $N$  :

$$N = n_1 \log_2 n_1 + n_2 \log_2 n_2$$

2) Le volume d'un programme a été défini par :

$$V = (N_1 + N_2) \log_2 (n_1 + n_2)$$

L'auteur définit un volume idéal :

$$V^* = (2 + n_2) \log_2 (2 + n_2^*)$$

où  $n_2^*$  est le nombre d'entrée/sortie.

Le volume idéal est constant pour un algorithme donné.

3) Le niveau d'un programme est défini par :

$$L = \frac{V^*}{V} < 1$$

L représente le niveau de la réalisation de certains algorithmes caractérisés par  $V^*$ .

Dans la pratique on prend comme estimateur de L, L tel que :

$$L = \frac{2 \cdot n_2}{n_1 \cdot N_2}$$

4) Le niveau de langage

Il a été défini par :  $\lambda = V^* L = V \cdot L^2$

$\lambda$  est constant pour un langage donné.

5) Taux d'effort de raisonnement mental.

Etant donné que la programmation nécessite des activités humaines plus ou moins importantes, Halstead a essayé de quantifier le taux d'effort mental exigé par la rédaction d'un programme. Il a défini une unité élémentaire de raisonnement en fonction du volume et de la longueur du programme à écrire :

$$E = \frac{V}{L} = \frac{V^{*3}}{\lambda^2}$$

Cet effort de raisonnement sert comme indicateur de la complexité du texte du programme. Halstead a mis en évidence un coefficient de corrélation élevé entre E et le nombre d'erreurs B insérées lors de l'écriture d'un programme. Il a donc établi une relation entre ces deux quantités, ce qui donne une estimation de B :

$$B = \frac{E^{2/3}}{3000}$$

On peut donc avoir une indication du nombre d'erreurs probables contenues dans un programme avant même que ne soit commencée la phase de mise au point ou de debugging.

### Critique des mesures d'Halstead

Les relations et les hypothèses de base présentées par Halstead dans sa science du logiciel ont soulevé quelques controverses [SHE 83]. En effet, il n'est pas toujours possible d'évaluer explicitement les paramètres nécessaires à cette métrologie. Par exemple, pour certains programmes la liste des paramètres d'entrée/sortie à prendre en compte n'est pas bien définie. C'est le cas d'un compilateur dont la sortie est constituée de plusieurs fichiers et de messages envoyés au système. Pour certains langages, il est quelque fois difficile de discriminer les rôles d'une fonction de référence donnée entre opérateur et opérande [LAS 81]. L'évaluation du taux d'effort mental E est une dérivation de certaines techniques utilisées en psychologie à la science du logiciel. Il ne semble pas vraisemblable qu'un être humain

soutiendra un effort de discrimination mentale constant par unité de temps. Ces mesures doivent donc être utilisées avec précaution et seulement à titre indicatif. Des discussions à ce propos pourront être trouvées dans [SHE 83].

## B - Des mesures de la complexité de la structure d'un programme

Certains auteurs ont défini des mesures pour évaluer la complexité structurelle d'un programme [MCA 76], [CUL 79], [SHN 79].

Ces mesures s'appuient sur des caractéristiques du graphe de contrôle du programme. On cherche à établir une relation entre le nombre d'erreurs probables dans le programme et sa complexité structurelle.

Nous en citons quelques unes.

### 1) Le nombre cyclomatique

Ce nombre a été défini par Mc CABE [MCA 76]. Il mesure le nombre de cycles indépendants dans un graphe G :

$$V(G) = A - N + 2$$

où :

A est le nombre d'arcs

N est le nombre de sommets de G.

Si le programme est structuré, on pose  $\Pi$  le nombre de décisions binaires simples dans le programme, on peut montrer que [MCA 76] :

$$V(G) = \Pi + 1$$

### 2) Indice d'accessibilité

D'autres auteurs [CUL 79] prennent en compte le nombre de boucles d'un graphe normalisé, le nombre de noeuds après avoir ordonné les instructions [WOO 79]. Un indice d'accessibilité à chaque sommet a aussi été défini [SHN 79]. C'est la somme du nombre de manières possibles d'atteindre chaque sommet à travers le graphe. Cette somme est ensuite divisée par le nombre total de sommets.

Une des formules retenues pour la complexité structurelle d'un programme ayant un graphe de contrôle G est [MOA 81] :

$$W = V(G) + nb$$

où nb est le nombre de boucles dans G.

Le but visé est d'obtenir une estimation du nombre B d'erreurs potentielles, sous la forme :

$$B = aw^b$$

Les paramètres a et b sont estimés sur la base de nombreux essais.

Critique : Ici encore, les mesures obtenues doivent être utilisées avec précaution. Un long apprentissage est nécessaire à l'établissement des paramètres donnant l'estimateur de B. Les mesures de la complexité structurelle d'un programme peuvent à la rigueur refléter la complexité logique de celui-ci mais elles ne pourraient en appréhender la complexité de calcul [MOA 81].

### I.3.2.2 - La phase de debugging

Après son écriture, le programme va être mis au point. A cet effet il est soumis à des tests plus ou moins aléatoires. A chaque manifestation d'erreur, celle-ci est corrigée puis le programme est ensuite relancé. La plupart des modèles considèrent que la correction d'une erreur n'en introduit pas

d'autres. Il s'en suit alors l'hypothèse intuitive d'une amélioration progressive du logiciel en cours de déverminage. Cette intuition s'appuie sur l'hypothèse d'un nombre initial fixé de défauts dans le programme. L'hypothèse supplémentaire d'une correction parfaite de chaque erreur débusquée se traduit par conséquent en une diminution certaine du nombre d'erreurs résiduelles. C'est pourquoi les modèles s'appliquant à cette phase sont appelés modèles de croissance de fiabilité. Nous verrons que le concept d'une croissance certaine de fiabilité sera remplacé par Littlewood en concept d'évolution de la fiabilité. En effet, le nouveau courant apporté par Littlewood dans la description du comportement d'un programme a divisé l'ensemble des modèles de fiabilité s'appliquant à cette phase en deux principales classes :

La classe des modèles qui lient le taux de défaillance d'un programme à son nombre d'erreurs résiduelles [JEL 72], [GOE 79], [MUS 75], [SCH 78], [LIT 79a] et celle des modèles qui récusent ce premier fondement [LIT 73], [LIT 81b].

(Pour refléter les divers courants terminologiques en vogue dans ce domaine, nous employerons indifféremment les termes : déverminage, débusquage, debugging, mise au point.)

Avant de passer en revue les principaux modèles utilisés dans cette phase, nous exposerons d'abord deux points qui nous paraissent essentiels dans cette approche modélisante : le mécanisme d'occurrence des erreurs et le concept de la taille d'une erreur.

#### I.3.2.2.1 - Un modèle du mécanisme d'occurrence de défaillances

##### A - Première source d'incertitude : les entrées

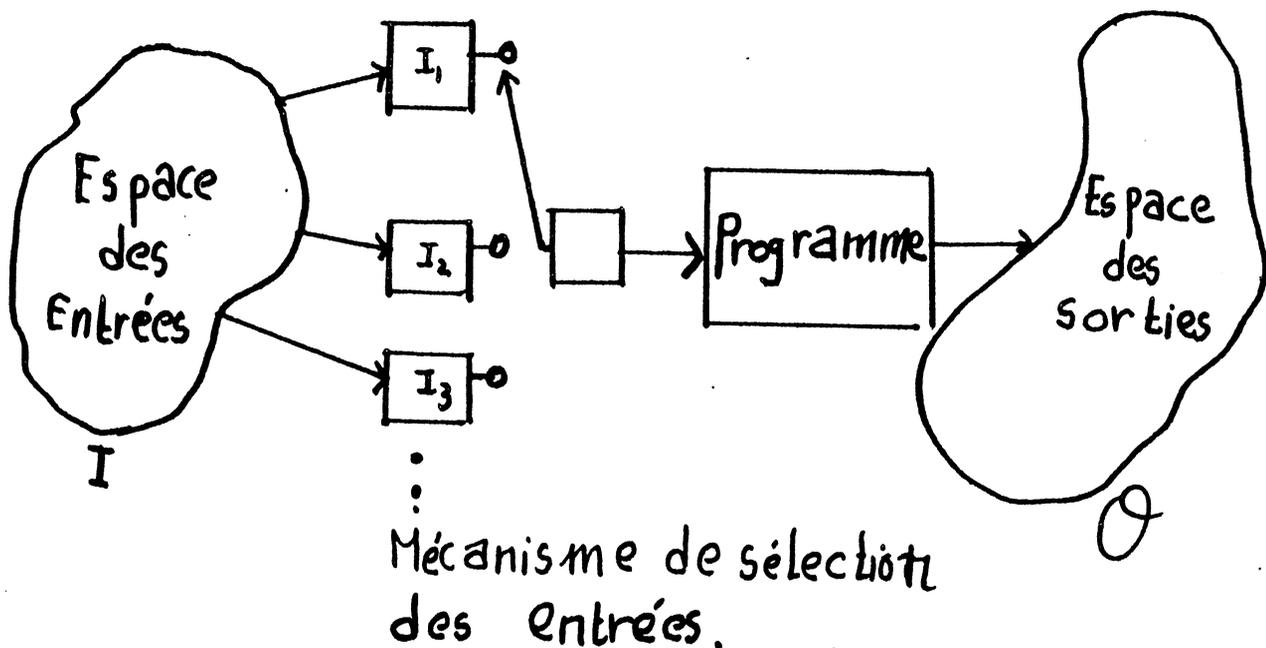
Littlewood [LIT 80] décrit un mécanisme d'occurrence de défaillances à partir d'un modèle de balayage du domaine d'entrée du logiciel.

Un programme  $P$  peut être vu comme une transformation de son espace d'entrée  $I$ , en son espace de sortie  $O$ .

$$P : I \longrightarrow O$$

Si  $O_F$  représente le sous-ensemble des sorties erronées, définies par les spécifications du programme, et  $I_F$  son image réciproque par  $P$ , c'est-à-dire le sous-ensemble des entrées erronées ( $I_F$  est vide si le programme est correct) alors une défaillance survient lorsque le programme reçoit une entrée appartenant à  $I_F$ .

En général, la plupart des modèles considèrent que les entrées sont sélectionnées de façon aléatoire. De ce fait, il paraît raisonnable de faire l'hypothèse d'une occurrence des défaillances suivant un processus de Poisson. La loi du temps (ou du nombre d'essais) entre défaillances successives ou avant la première défaillance est alors une loi exponentielle (resp. géométrique).



- Le modèle JM suppose que les processus de manifestation des erreurs sont indépendants entre eux. Cette hypothèse est aussi peu réaliste que la précédente. En effet, en cas de masquage d'une erreur, la manifestation de ladite erreur est conditionnée par celle des erreurs qui la couvrent.

- Les deux modèles précédents font l'hypothèse de corrections parfaites des erreurs. L'expérience montre [MUS 79b] qu'il faut tenir compte des erreurs éventuellement insérées lors des activités de correction.

- La neutralisation du temps nécessaire à la restauration du logiciel : celui-ci n'est pas relancé tant que l'erreur n'est pas détectée et corrigée. Or, il arrive que l'on ne puisse pas détecter une erreur.

- Les tests sont supposés représentatifs du milieu opérationnel effectif du programme. Cela est pourtant loin d'être vérifié.

#### I.3.2.2.5 - Le modèle de MUSA [MUS 75]

Ce modèle est connu sous le nom "d'exécution time model" [MUS 79a] car il se réfère à la fois au temps d'unité centrale et au temps calendaire. Il s'appuie sur les trois hypothèses de base suivantes :

1 - Le taux de défaillance est proportionnel au nombre d'erreurs résiduelles et à la fréquence d'exécution  $f$  (taux moyen d'exécution d'instructions divisé par le nombre d'instructions dans le programme) :

$$\lambda(t) = (N-n) \cdot f \cdot \phi$$

où :

$N$  : est le nombre initial d'erreurs dans le logiciel au début des essais,

$n$  : le nombre total d'erreurs corrigées jusqu'à présent,

$t$  : est le temps d'exécution du programme jusqu'à l'instant présent,

$\phi$  : est une constante de proportionnalité représentant le taux de détec-

fait à partir de la réalisation de l'échantillon  $t_1, \dots, t_n$ , suite d'intervalles de temps entre défaillances successives observées au cours du debugging. On obtient les équations suivantes pour les estimés  $\hat{N}$  et  $\hat{\phi}$  :

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{2}{\hat{N} - i + 1}}{\sum_{i=1}^n t_i}$$

où  $\hat{N}$  vérifie

$$\hat{N} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{N} - i + 1}} + \sum_{i=1}^n (i-1) t_i^2}{\sum_{i=1}^n t_i^2}$$

De même que pour le modèle précédent, on peut maintenant évaluer la fiabilité, le MTTF, le taux de défaillance...

### Critique des deux modèles présentés.

Les fondements de ces deux modèles ont soulevé quelques controverses [LIT 80], [GOE 75] parmi lesquels nous pouvons citer les suivantes :

- Les deux modèles précédents accordent une même sévérité à toutes les erreurs présentes dans le programme. Or, l'expérience montre que cette hypothèse, aussi simplificatrice qu'elle puisse être, est très peu vraisemblable.

$$P[d_1, d_2, \dots, d_N] = N! \phi^N (e^{-\phi})^{\sum_{i=1}^N d_i}$$

$$\text{avec } 0 < d_1 < d_2 < \dots < d_N$$

On pourra vérifier qu'en posant, dans le modèle classique de Jelinski - Moranda présenté précédemment :

$$D_i = T_1 + T_2 + \dots + T_i$$

On retrouve pour les  $D_i$  la même densité conjointe que ci-haut.

Cette présentation qui nous paraît plus physique nous permettra plus loin de tirer profit des propriétés établies sur les statistiques d'ordre.

#### 1.3.2.2.4 - Le modèle de SCHICK et WOLVERTON [SCH 74] [SCH 78]

L'hypothèse de base est semblable à celle qui est présentée en premier au modèle précédent, mais cette fois la relation de proportionnalité entre le taux de défaillance  $\lambda_i$  et le nombre d'erreurs résiduelles  $N-(i-1)$  dépend du temps  $t_i$  écoulé depuis la manifestation de la dernière erreur :

$$\lambda_i = [N - (i-1)] \cdot \phi \cdot t_i$$

où  $\phi$  est une constante de proportionnalité,  $\lambda_i$  est le taux de défaillance après avoir détecté et corrigé  $i-1$  erreurs.

Les auteurs dérivent alors la distribution suivante régissant les intervalles de temps entre défaillances :

$$P[t_i] = (N-i+1) \cdot \phi \cdot t_i e^{-\frac{(N-i+1) \cdot \phi \cdot t_i}{2}}$$

On obtient donc une distribution de RAYLEIGH. La méthode de maximum de vraisemblance permet d'estimer les paramètres du modèle,  $N$  et  $\phi$ . Cela est

### I.3.2.2.3 - Une autre interprétation du phénomène observé

Nous proposons l'interprétation suivante du modèle de Jelinski et Moranda. On suppose que le logiciel recèle  $N$  erreurs au début des essais. Chaque erreur se manifestera selon un processus de Poisson indépendant du processus de manifestation des autres erreurs. Appelons  $L_i$ , la latence associée à l'erreur  $i$ .

Chaque fois qu'une erreur se produit, l'essai est arrêté et l'erreur correspondante est corrigée. Le logiciel est ensuite relancé. Il s'en suit que chaque processus de Poisson associé à une erreur donnée ne se réalise qu'une seule fois. Si de plus on suppose que tous les processus ainsi superposés ont tous le même taux  $\phi$ , on se trouve alors en présence d'un échantillon équidistribué :  $L_1, L_2, \dots, L_N$ . Ce sont des variables aléatoires indépendantes et de loi exponentielle.

Pour avoir la loi des dates d'apparition des erreurs il suffit de déterminer la loi de la statistique ordonnée à partir d'un tel échantillon.

Or 
$$P[L_i > \lambda/\phi] = e^{-\phi\lambda}$$

Pour tout  $i = 1, \dots, N$ .

Appelons  $S$  une substitution qui transforme  $(L_1, \dots, L_N) \rightarrow (D_1, \dots, D_N)$  avec

$$0 < D_1 < D_2 < \dots < D_N.$$

Chaque  $D_i$  étant un des  $L_j$  obtenu à partir d'un rangement des variables initiales.

A toutes les réalisations possibles de l'échantillon  $L_1, \dots, L_N$  on peut associer  $N!$  permutations possibles qui conduiront à la statistique ordonnée  $D_1 < D_2 < \dots < D_N$ . Chacune des permutations donne la même loi conjointe : d'où

$$P[d_1, d_2, \dots, d_N] = N! \prod_{i=1}^N \phi e^{-\phi d_i}$$

$$\lambda_{n+1} = (\hat{N}_0 - n) \cdot \hat{\phi}$$

- La fiabilité :

$$R(t) = \text{Prob}[T_{n+1} > t] = e^{-\lambda_{n+1} t}$$

- Le MTTF :

$$E[T_{n+1}] = \frac{1}{\lambda_{n+1}} = \frac{1}{(\hat{N}_0 - n) \cdot \hat{\phi}}$$

Le nombre d'erreurs résiduelles est évidemment estimé par  $\hat{N}_0 - n$ .

Critique : Nous émettrons essentiellement deux critiques à propos de ce modèle :

- une critique vis-à-vis de l'interprétation du phénomène étudié. Nous présenterons pour cela une autre façon de considérer le problème.

- une critique sur le fond. Les hypothèses de base de ce modèle ont en effet soulevé quelques controverses. Comme ces mêmes hypothèses sont plus ou moins partagées par le modèle que nous présenterons après celui-ci : [SCH 78], nous regrouperons donc les critiques correspondantes après ce dernier exposé.

Les intervalles de temps successifs  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n, \dots$  sont indépendants entre eux.

Estimation des paramètres.

Ce modèle comporte deux paramètres  $N_0$  et  $\phi$ . Ceux-ci peuvent être estimés à partir de l'observation de la suite d'intervalles de temps

$t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  effectuées au cours des essais de mise au point. La fonction de vraisemblance associée à une telle collecte de données est:

$$L(\phi, N_0) = \prod_{i=1}^n (N_0 - i) \cdot \phi \cdot e^{-(N_0 - i) \cdot \phi \cdot t_i}$$

Le critère du maximum de vraisemblance conduit aux deux équations suivantes pour les estimés  $\hat{N}_0$  et  $\hat{\phi}$ :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{N}_0 - i + 1} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\hat{N}_0 \sum_{i=1}^n t_i - \sum_{i=1}^n (i-1)t_i}$$

et

$$\hat{\phi} = \frac{n}{\hat{N}_0 \sum_{i=1}^n t_i - \sum_{i=1}^n (i-1)t_i}$$

A partir de là, on peut estimer quelques grandeurs caractéristiques, sachant que  $n$  erreurs ont jusqu'alors été corrigées :

- Le taux de défaillance :

Si les erreurs ne sont corrigées que chaque fois qu'une défaillance se manifeste, et si l'on admet en plus que le temps est suspendu pendant l'analyse et la correction de l'erreur, il vient alors que le taux de défaillance ne varie qu'aux instants de défaillance. Appelons  $d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$  les différentes dates d'occurrence des défaillances successives. Il paraît plausible d'écrire :

$$\lambda(t) = \lambda_{i+1} = N(d_i) \cdot \phi \quad \text{pour tout } t \text{ tel que } d_i < t < d_{i+1}$$

où  $N(d_i)$  est le nombre d'erreurs restant dans le programme après la  $i$  ième opération de correction.

Partant de  $N(d_0) = N_0$ , le nombre initial d'erreurs dans le programme au début des essais, en posant  $m_i$  égale au nombre total d'erreurs corrigées jusqu'à la date  $d_i$  (à savoir  $m_0 = 0$ ) on obtient :

$$\lambda_{i+1} = (N - m_i) \cdot \phi$$

Maintenant si l'on admet qu'une seule erreur est corrigée à chaque interruption du programme, on peut alors poser  $m_i = i$ .

2- L'intervalle de temps  $T_{i+1}$  séparant la manifestation de la  $i$  ième défaillance de celle de la  $i+1$  ième défaillance est une variable aléatoire de distribution exponentielle :

$$\text{Prob}[T_{i+1} > t] = e^{-(N_0 - i) \cdot \phi \cdot t} \quad \text{avec } t > 0$$

Il reste à voir comment les différents auteurs modélisent ce concept de la taille d'une erreur et la répercussion de ceci sur l'évaluation de la fiabilité d'un programme.

Il existe plusieurs modèles qui s'appliquent à cette dernière phase. Nous nous limiterons cependant à ceux qui se sont le plus faits remarquer. Une revue relativement complète peut être consultée dans [DAC 79].

#### I-3.2.2.2 LE MODELE DE JELINSKI ET MORANDA [JEL 72], [JEL 73].

Ces auteurs proposent les hypothèses fondamentales suivantes:

1- Le taux de défaillance du programme, à l'instant  $t$ , est proportionnel au nombre d'erreurs résiduelles :

$$\lambda(t) = N(t) \cdot \phi$$

où  $\phi$  est une constante de proportionnalité,  
 $N(t)$  est le nombre d'erreurs présentes dans le programme à l'instant  $t$ .

où  $nf$  est le nombre de défaillances survenues en  $n$  essais de test ; Cette définition est utilisée dans les modèles d'échantillonnage ; elle permet une première estimation de la fiabilité opérationnelle d'un tel programme au moyen de :

$$R_n = 1 - \frac{nf}{n} = 1 - V$$

Remarque : La notion de taille d'une erreur se rattache intuitivement à celle du taux de défaillance associé à une erreur.

La taille effective d'une erreur dépend de l'environnement opérationnel du programme. Durant les phases de tests il paraît donc nécessaire de prendre en compte la représentativité relative de l'environnement d'évaluation, où se font les tests, vis-à-vis de l'environnement opérationnel réel où le programme sera mis en exploitation.

Définition : Le facteur de représentativité d'un test  $T$  à l'instant  $s$  après avoir observé  $j$  défaillances, est défini [BAS 80] comme le rapport de la probabilité pour qu'un jeu de tests sélectionné suivant une certaine stratégie de test détecte une erreur donnée, à la probabilité de manifestation de cette même erreur partant d'un jeu de tests sélectionnés suivant le profil opérationnel effectif du programme. Ce facteur est noté  $f[T_j(s)]$ .

Durant la phase opérationnelle on a évidemment  $f[T_j(.)] \equiv 1$ . La fonction  $f$  est à valeurs dans  $R^+$ .

L'évaluation de cette fonction étant assez difficile, la plupart des modèles font l'hypothèse d'une représentativité implicite des essais, c'est-à-dire que  $f[T_j(.)] = 1$ . Ils considèrent donc que tout se passe comme si les conditions de l'environnement opérationnel étaient satisfaites par l'environnement des essais. Certains modèles essaient d'évaluer ce facteur [MUS 79a].

tion, inconnue a priori, opérée par cette dernière version P2 sur l'espace d'entrée I constitue justement la seconde source d'incertitude évoquée par Littlewood.

Imaginons maintenant un plan d'essais où un programme P est testé puis corrigé à chaque manifestation d'erreur et ensuite relancé. Ce processus de débbugging partant d'un programme P engendrera suivant le raisonnement ci-haut une séquence de programmes P1, P2, ... Pn, Pn+1... Chaque itéré étant une nouvelle version de l'itéré précédent via une modification. On obtient ainsi une famille de programmes caractérisée par le programme de départ et les modifications successives qui y ont été effectuées.

### C - Taille d'une erreur - Facteur de représentativité

Les modèles utilisés dans cette phase se fondent essentiellement sur le concept de taille d'une erreur.

Définition : La taille d'une erreur est [BAS 80] la probabilité pour qu'un élément sélectionné dans l'espace d'entrée I selon les critères de sélection des jeux de tests active cette erreur (le résultat serait alors une défaillance).

Les erreurs de grande taille ont vraisemblablement une plus grande propension à se manifester que les erreurs de petite taille qu'on qualifie d'erreurs fines.

La taille des erreurs latentes d'un programme peut être estimée de façon empirique par :

$$V = \frac{nf}{n}$$

Pour fixer les idées nous pouvons considérer deux versions P1 et P2 d'un même programme source P. Ces deux versions partagent les mêmes spécifications, les mêmes espaces d'entrée I et de sortie O. Cependant P1 et P2 diffèrent dans la manière (inconnue) dont ils opèrent leurs partitions de l'espace d'entrée I en sous espaces respectifs  $I_{F1}$  et  $I_{F2}$  qui donneront des sorties erronées, et leurs complémentaires.

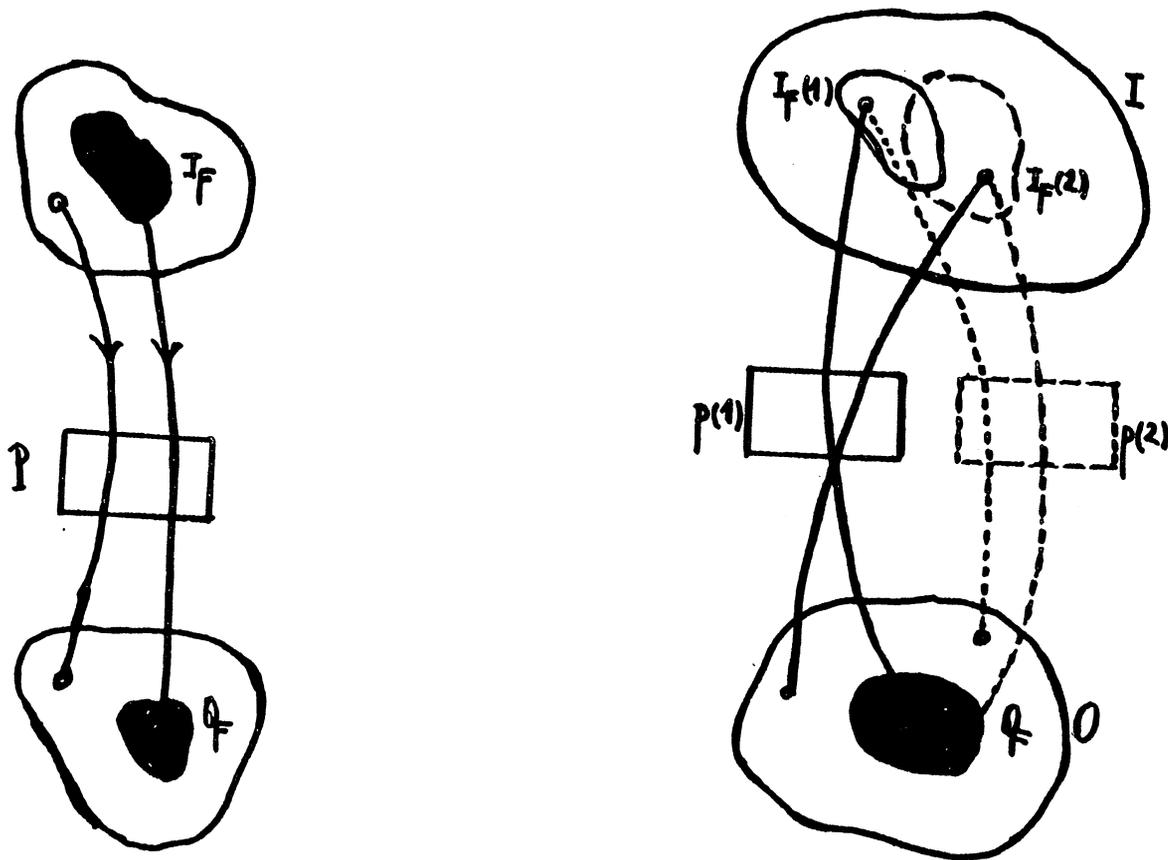


Figure 5 : Illustration de l'incertitude sur la nature du programme

Ce cas de figure intervient chaque fois qu'une correction ou une modification (bonne ou mauvaise) est effectuée sur un programme P1 par exemple. Le résultat est une nouvelle version P2 du programme initial. La nouvelle parti-

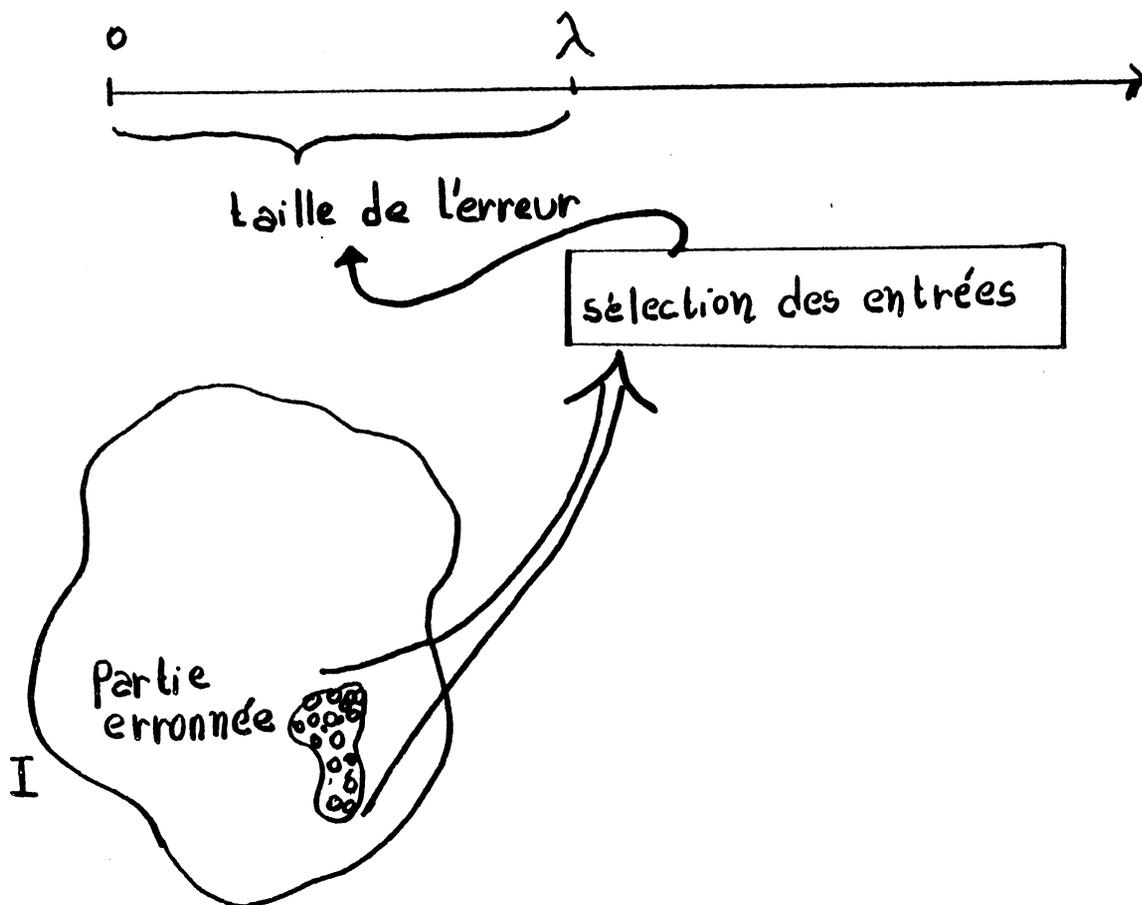


Figure 4

Le caractère aléatoire du comportement du programme par rapport au balayage des entrées constitue une première source d'incertitude appelée incertitude sur les entrées.

La plupart des modèles de fiabilité ne considèrent que cette seule source d'incertitude alors que Littlewood en a soupçonné une de plus : l'incertitude sur le programme lui-même.

#### B - Deuxième source d'incertitude : le programme

Littlewood [LIT 80] a enrichi son modèle en considérant une nouvelle source d'incertitude liée à la transformation P elle-même, c'est-à-dire à la nature du programme.

tion des erreurs.

2 - Le taux de correction d'erreurs est proportionnel au taux de défaillance :

$$\frac{dn}{dt} = B \cdot \lambda(t)$$

où la constante B peut tenir compte des cas de figure suivants :

- le problème des erreurs de correction
- le cas des erreurs qui en masquent d'autres
- le problème des erreurs qu'on ne peut détecter.

Pour tenir compte de l'environnement opérationnel futur du programme, MUSA introduit un facteur C de représentativité des tests dans l'équation précédente (facteur de compression du temps) :

$$\frac{dn}{dt} = B \cdot C \cdot \lambda(t)$$

Le nombre  $m_0$  de défaillances qui doivent se produire pour espérer débusquer n erreurs est donné par :

$$m_0 = \frac{n}{B}$$

De même pour déterminer complètement le logiciel, il faut espérer un nombre de défaillances égale à :

$$M_0 = \frac{N}{B}$$

A partir de là MUSA combine les relations précédentes pour obtenir l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dm_0}{dt} + (B.C.f.\Phi).m = (B.C.f.\Phi).M_0$$

dont la résolution donne :

$$m_0 = [1 - e^{-(B.C.f.\Phi)t}] . M_0$$

en posant

$$T_0 = \frac{1}{B.f.\Phi.M.} = \frac{C}{B.f.\Phi.C.M}$$

On obtient, pour le temps moyen jusqu'à la prochaine défaillance à partir du temps t, l'expression suivante :

$$E(t) = T(t) = \frac{1}{\lambda(t)} = T_0 \cdot e^{\frac{C}{M_0 T_0} t}$$

On a  $E(t)_{t=0} = T_0$  qui représente donc le temps moyen jusqu'à la première défaillance.

3 - L'intervalle de temps écoulé entre deux défaillances successives suit une loi de distribution exponentielle (le taux de défaillance est constant entre deux défaillances successives). La fonction de densité de probabilité associée est donnée par :

$$P[t' / t] = C \cdot \lambda(t) \cdot e^{-C \cdot \lambda(t) \cdot t'}$$

où  $t'$  est le temps d'exécution du programme en partant de  $t$ .

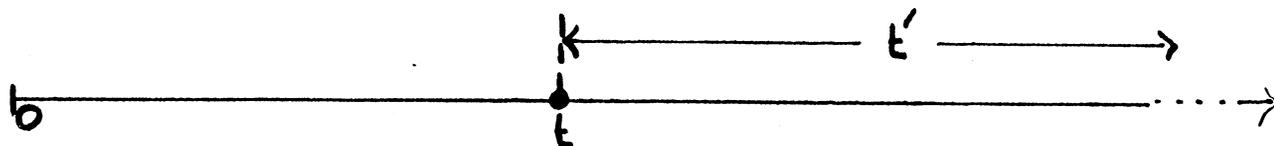


Figure 8 :

• Estimation des paramètres

Le facteur de représentativité des tests  $C$ , dépend de l'environnement des tests et de l'environnement effectif d'exploitation du programme. il est estimé à partir d'un apprentissage effectué sur un certain nombre de logiciels [MUSA 79b]. Le critère de maximum de vraisemblance permet l'estimation

des paramètres  $T_0$  et  $M_0$  à partir d'une suite d'observations collectées durant les essais. Ce procédé conduit aux deux équations suivantes :

$$T_0 = \frac{C}{m} \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{i-1}{m_0}\right) t'_i$$

et

$$M_0 = \frac{1}{d_m} \sum_{i=1}^m (i-1)t'_i + \frac{m}{\sum_{j=M_0-m+1}^{M_0} \frac{1}{j}}$$

$$\text{avec } d_m = \sum_{i=1}^m t'_i$$

Les variables  $t'_1, \dots, t'_m$  sont les intervalles de temps d'exécution entre les  $m$  premières défaillances.

#### 1.3.2.2.6 - Le modèle de Goël et Okumoto [GOE 79]

Les auteurs interprètent le phénomène de manifestation des erreurs comme différentes réalisations d'un processus de Poisson non homogène. Contrairement aux modèles précédents, le nombre d'erreurs initiales dans le logiciel n'est pas considéré comme un paramètre constant inconnu. Ici c'est une variable aléatoire.

Les hypothèses de base sont les suivantes :

- 1 - Le nombre d'erreurs présentes dans le logiciel à l'instant  $t$ , est une variable aléatoire  $N(t)$ . C'est un processus de comptage à incréments indépendants.
- 2 - Le nombre de défaillances qui peuvent survenir sur l'intervalle  $[0, t]$  est une variable aléatoire  $M(t)$  d'espérance finie  $m(t)$ . Pour des raisons

peu explicitées les auteurs identifient  $m(t)$  et  $E[N(t)]$ . De là les auteurs [GOE 79] dérivent l'équation suivante pour :

$$m(t) = N.(1 - e^{-\phi t})$$

où

- N est le nombre total d'erreurs que l'on peut espérer débusquer si les essais sont suffisamment longs,
- $\phi$  est une constante de proportionnalité.

Le taux moyen de détection d'erreurs est donné par :

$$m'(t) = \lambda(t) = N.\phi e^{-\phi t} = [N - m(t)].\phi$$

A ce stade, on voit que ce modèle peut être déduit du modèle de MUSA en posant dans ce dernier :

$$M_0 = N$$

et

$$\phi = \frac{C}{NT_0}$$

avec  $C = 1$  (c'est-à-dire une représentativité implicite des essais).

### Critiques des deux derniers modèles

Ces deux modèles restent sujets à la même critique que celle portée contre les modèles précédents à propos de la sévérité des erreurs.

Le modèle de MUSA apporte des améliorations sur les autres critiques précédentes :

- Le paramètre B lève l'objection sur le problème des erreurs de correction,
- la représentativité des tests est prise en compte à travers le paramètre C,
  
- Ce modèle permet de réutiliser le programme avant l'achèvement de correction d'une erreur à condition de ne pas comptabiliser une fois de plus sa nouvelle apparition,
- Musa a étendu son modèle [MUSA 81] de façon à tenir compte des modifications de conception effectuées au cours de la phase de déverminage.

Le modèle de Goël et Okumoto est, dans une certaine mesure, une version simplifiée du premier mais qui ne bénéficie pas pour autant des améliorations apportées par MUSA.

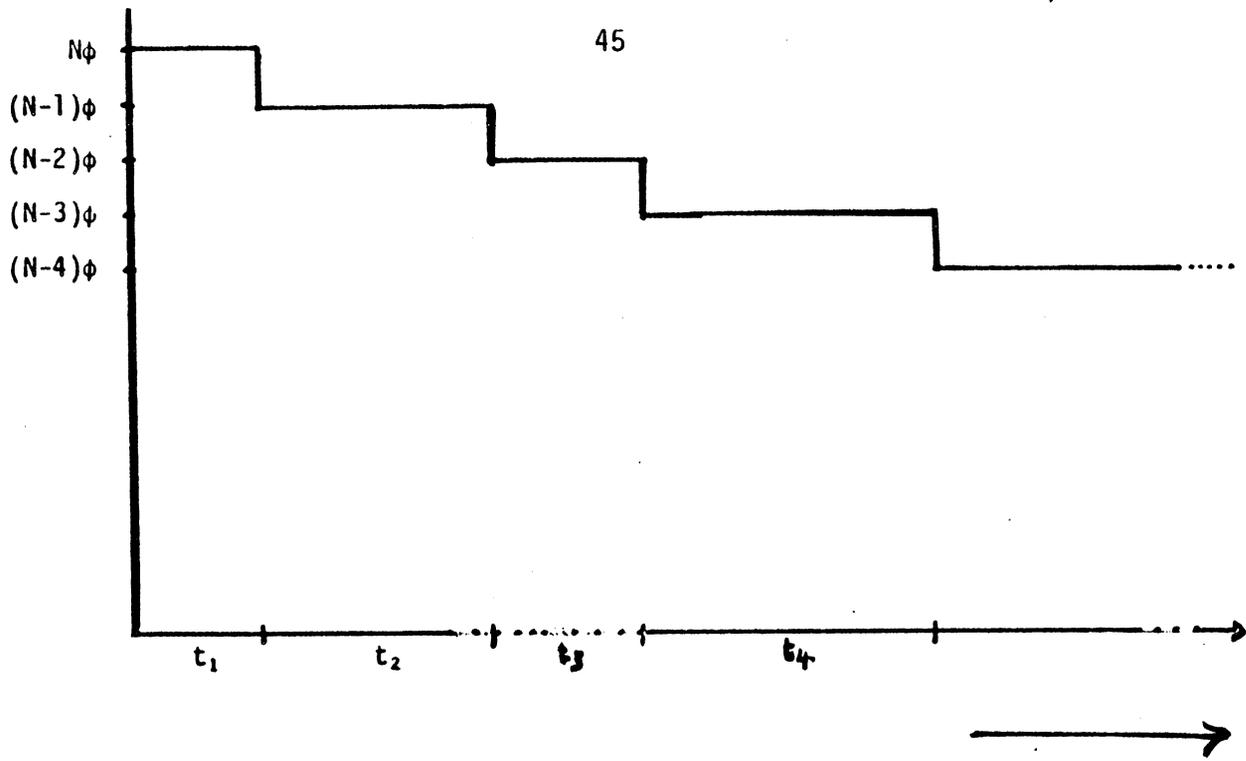
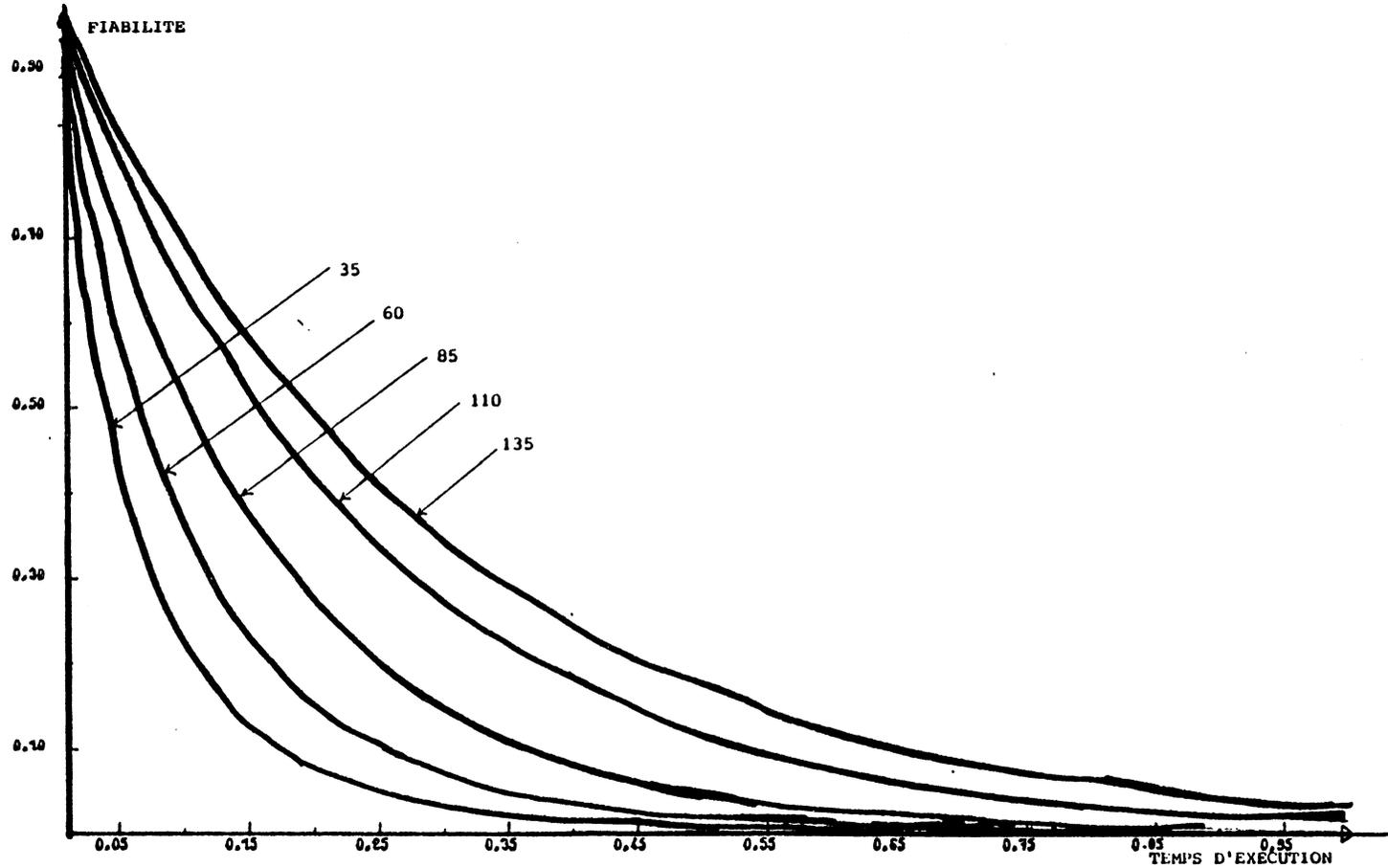


Figure 9 : Décroissance du taux de défaillance au fur et à mesure des corrections successives du logiciel



Fiabilité d'un logiciel après correction de 35, 60, 85, 110 et 135 erreurs.

Figure 10

1.3.2.2.7 - Les travaux de Littlewood [LIT 73], [LIT 79c], [LIT 80],  
[LIT 81a], [LIT 81b]

Littlewood a introduit l'approche Bayésienne dans les modèles de fiabilité du logiciel. Sa principale motivation est la réfutation des fondements des modèles précédents.

En effet, d'une part Littlewood [LIT 80] critique le fait que ces modèles accordent une même sévérité à toutes les erreurs, d'autre part celui-ci reproche à ces modèles de ne prendre en compte qu'une seule source d'incertitude : l'incertitude sur les entrées ; alors que la nature du programme constitue en elle-même une nouvelle source d'incertitude. Suite à ces deux critiques fondamentales l'auteur en est arrivé à renier complètement le concept du nombre d'erreurs résiduelles et à proposer un apprentissage Bayésien du comportement d'un logiciel.

Nous présentons dans leur ordre de validité croissante trois contributions de B. Littlewood au sujet des modèles de fiabilité du logiciel.

A - Le modèle de Littlewood [LIT 79a]

Ce modèle résulte essentiellement de la critique de l'hypothèse fondamentale partagée par les modèles précédents : "le taux de défaillances est proportionnel au nombre d'erreurs résiduelles".

Cette hypothèse, nous l'avons dit, paraît en effet peu vraisemblable. La conséquence de cette critique est que si chaque erreur a son propre taux de manifestation, au cours du processus de débbugging on détectera et corrigera plus vraisemblablement d'abord, les erreurs à fort taux de défaillance : erreurs de grandes tailles. De ce fait, Littlewood considère que la fiabilité d'un programme en cours de débbugging devrait vraisemblablement croître plus vite que ne le laisse supposer le modèle JM.

L'auteur propose une description Bayésienne des différents taux de défaillance du programme comme suit :

- a) A chaque erreur  $i$  est associé un taux de défaillance  $\lambda_i$ .
- b) La suite  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  des différents taux de défaillance d'un programme contenant  $N$  erreurs est un échantillon indépendant et équidistribué issu des différentes réalisations d'une même variable aléatoire  $\lambda$ . La loi a priori de  $\lambda$  est supposée connue.

Pour des raisons de souplesse du traitement de calculs, Littlewood choisit arbitrairement cette loi a priori au sein d'une famille de lois gamma, de paramètres inconnus :

- $\alpha$  : le paramètre de forme,
- $\beta$  : le facteur d'échelle
- ( $\alpha > 0$  ;  $\beta > 0$ ).

La densité de la loi a priori de  $\lambda$  est donnée par :

$$P[\lambda] = \beta^\alpha \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta\lambda}$$

avec  $\lambda > 0$ .

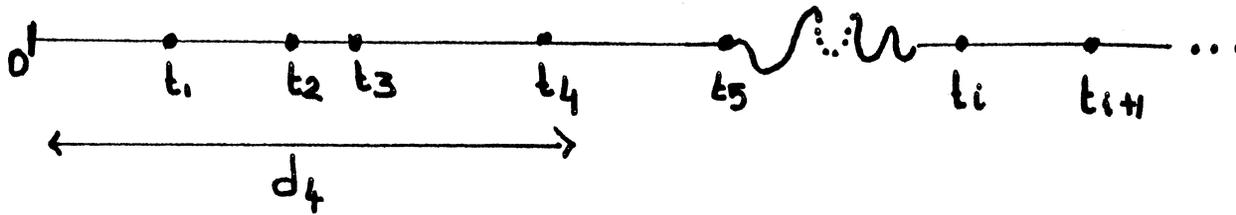
et :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad ; \quad x > 0$$

- c) Le temps d'exécution entre deux défaillances successives suit une loi de distribution exponentielle (mais conditionnellement au taux de défaillance).

$$P\{t_j / \lambda\} = \lambda e^{-\lambda t_j}$$

$$t_j > 0$$



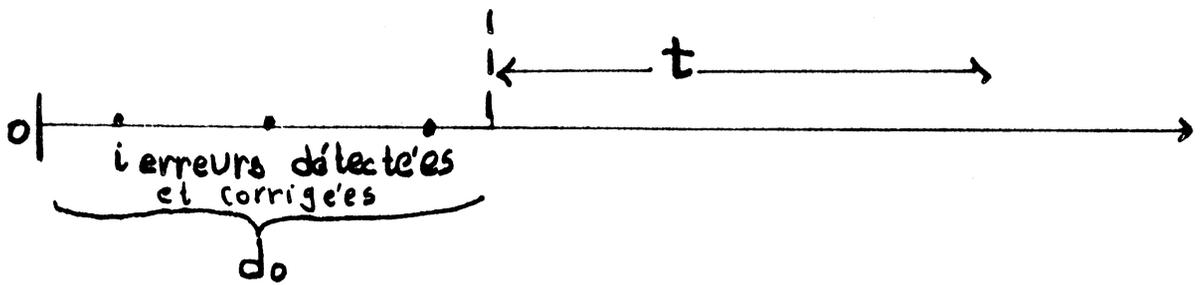


Figure 11 : Illustrations des variables  $d_0$ ,  $t$  et  $t_1, t_2, \dots, t_i$

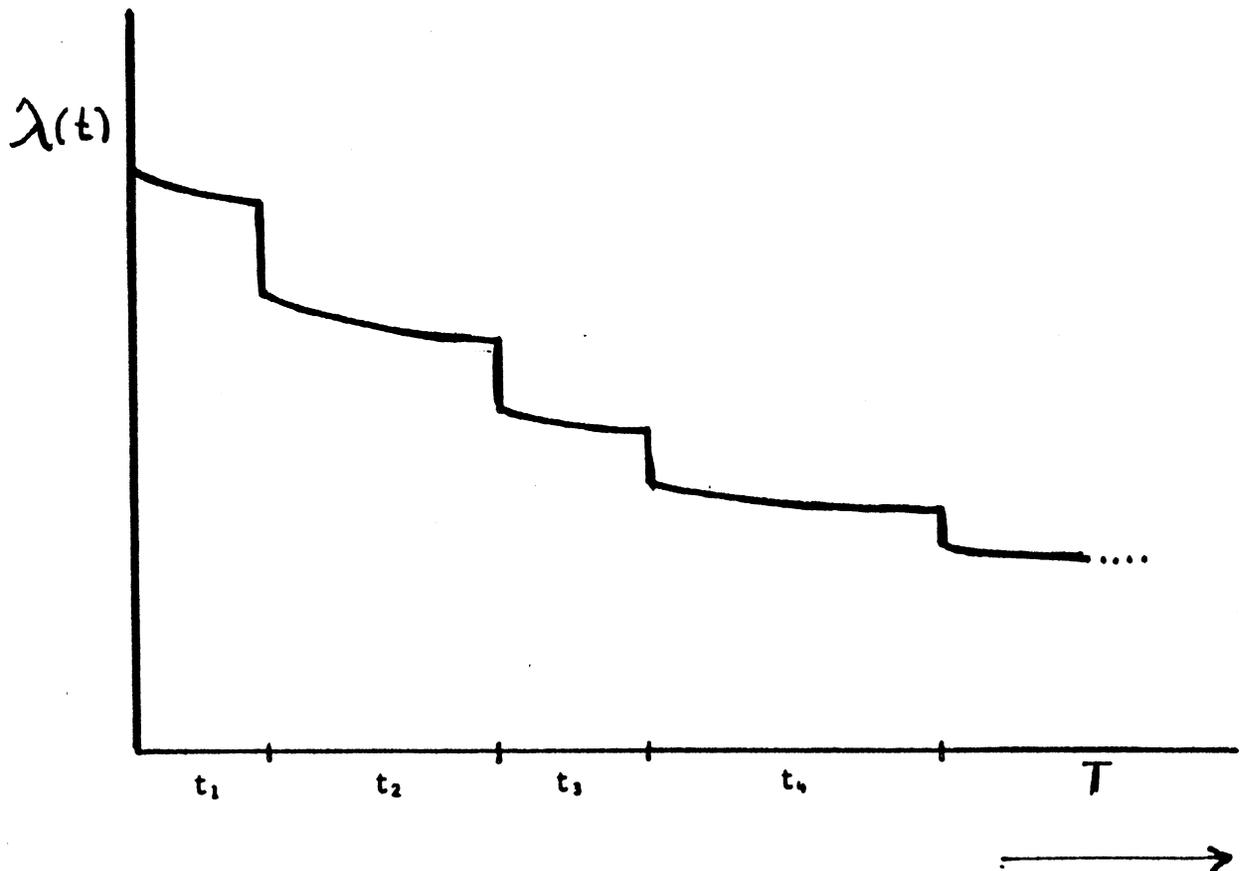


Figure 12 : Décroissance du taux de défaillance au cours du débogging

d) Le taux de défaillance  $\lambda$  après avoir observé  $i$  défaillances pendant une durée totale d'exécution égale à  $d_0$  est donné par :

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{N-i}$$

La loi a posteriori de  $\lambda$  est alors une loi gamma de paramètres  $\alpha' = \alpha$  et  $\beta' = \beta + d_0$  ( $d_0$  est la durée cumulée des essais jusqu'à l'instant présent).

A partir de là Littlewood fait appel à la règle de Bayes pour dériver la loi inconditionnelle du temps  $T$  de bon fonctionnement du programme partant d'un temps d'exécution total égal à  $d_0$  pour l'instant présent, et sachant que  $i$  erreurs ont été détectées :

$$\begin{aligned} R(t) &= P[t / \lambda, d_0] = \int_0^{\infty} P[t / \lambda, d_0] d\lambda \\ &= \frac{(N-i) \alpha (\beta + d_0)}{[\beta + d_0 + t] (N-i)^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

qui est une distribution de Paréto. Le taux de défaillance qui en résulte est

$$\lambda(t) = \frac{(N-i) \cdot \alpha}{\beta + d_0 + t}$$

Contrairement aux modèles précédents qui faisaient l'hypothèse d'un taux de défaillance constant entre deux défaillances consécutives, ici  $\lambda(t)$  est une fonction à décroissance hyperbolique par intervalle.

La fonction de vraisemblance des observations  $t_1, t_2, \dots, t_i$ , suite d'intervalles de temps de bon fonctionnement, est donnée en fonction des paramètres du modèle  $N, \alpha, \beta$  :

$$L(N, \alpha, \beta) = \prod_{m=1}^i P[t_m / t_1, \dots, t_{m-1}]$$

$$= \prod_{m=1}^i \frac{(N-m+1) \alpha [\beta + \sum_{j=1}^{m-1} t_j]^{(N-m+1)\alpha}}{[\beta + \sum_{j=1}^{m-1} t_j + t_m]^{(N-m+1)\alpha + 1}}$$

L'application du critère de maximum de vraisemblance conduit aux équations suivantes pour les estimés  $\hat{N}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$  :

$$\hat{\alpha} = \frac{i}{\sum_{m=1}^i \log \left( \frac{\hat{\beta} + \sum_{j=1}^m t_j}{\hat{\beta} + \sum_{j=1}^i t_j} \right) + \hat{N} \log \left( \frac{\hat{\beta} + \sum_{j=1}^i t_j}{\hat{\beta}} \right)}$$

où  $\hat{\beta}$  vérifie :

$$(\hat{N}-i) \hat{\alpha} \frac{t_i}{\hat{\beta} + t_i} + (\hat{\alpha} + 1) \sum_{j=1}^i \frac{t_j}{\hat{\beta} + t_j} = i$$

tandis que  $\hat{N}$  est la partie entière de :

$$\left( \frac{\hat{\beta}}{\hat{\beta} + \sum_{j=1}^i t_j} \right)^{\hat{\alpha}}$$

#### B - Le modèle de Littlewood et Verral [LIT 73], [LIT 80]

Ce modèle est issu d'une réfutation totale du concept du nombre d'erreurs résiduelles.

Les auteurs prennent en compte les deux sources d'incertitude sur le mécanisme d'occurrence de défaillances grâce aux hypothèses suivantes :

1 - L'incertitude sur les entrées : le temps d'exécution du programme entre défaillances successives suit une loi de distribution exponentielle, conditionnellement aux taux de défaillance courant :

$$P[t_i / \lambda_i] = \lambda_i e^{-\lambda_i t_i}$$

avec  $t_i > 0$ ,  $\lambda_i > 0$

2 - L'incertitude sur le programme lui-même : l'amélioration probable du programme résultant des différentes corrections d'erreurs effectuées lors du déverminage est traduite au moyen d'une décroissance stochastique (et non déterministe) du taux de défaillance :

$$\forall \lambda > 0 \quad \text{Prob}[\lambda_i < \lambda] > \text{Prob}[\lambda_{i-1} < \lambda]$$

Cette condition conduit les auteurs à décrire la suite  $\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots$  des taux de défaillance à l'aide d'une distribution gamma de paramètre de forme  $\alpha$  et de paramètre d'échelle  $\psi$ .

$$P[\lambda_i / \alpha, \psi(i)] = [\psi(i)]^\alpha \frac{\lambda_i^{\alpha-1} e^{-\lambda_i \psi(i)}}{\Gamma(\alpha)}$$

avec

$$\lambda_i > 0 \quad \text{et} \quad \alpha > 0$$

Pour assurer la décroissance stochastique des  $\lambda_i$ , la fonction  $\psi(i)$  doit être strictement croissante. Celle-ci caractérise l'effort progressif du programmeur et la complexité du programme.

La loi inconditionnelle du temps d'exécution entre défaillances est donnée par :

$$P[t_i / \alpha, \psi(i)] = \int_0^{\infty} P[t_i / \lambda_i] P[\lambda_i / \alpha, \psi(i)] d\lambda_i$$

$$= \frac{\alpha [\psi(i)]^\alpha}{[t_i + \psi(i)]^{\alpha+1}}$$

qui est encore une distribution de Paréto.

• Estimation des paramètres

La mise en oeuvre de ce modèle nécessite l'estimation des paramètres  $\alpha$  et  $\psi(i)$ . Pour assurer un traitement de calcul relativement peu complexe les auteurs font une fois de plus le choix arbitraire d'une fonction  $\psi(i)$  issue d'une famille paramétrique de fonctions affines :

$$\psi(i) = \beta_1 + i \cdot \beta_2$$

Les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  peuvent alors être estimés au moyen du critère du maximum de vraisemblance à partir d'une suite d'observations  $t_1, \dots, t_n$  collectées au cours des essais.

Les équations reliant les estimés  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  sont :

$$\hat{\alpha} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{(\hat{\beta}_1 + i\hat{\beta}_2)(\hat{\beta}_1 + i\hat{\beta}_2 + t_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{\beta}_1 + i\hat{\beta}_2 + t_i}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{it_i}{(\hat{\beta}_1 + i\hat{\beta}_2)(\hat{\beta}_1 + i\hat{\beta}_2 + t_i)}}{\sum_{i=1}^n \frac{i}{\hat{\beta}_1 + i\hat{\beta}_2 + t_i}}$$

et

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log \left[ 1 + \frac{t_i}{\hat{\beta}_1 + i\hat{\beta}_2} \right]}$$

La résolution de ce système d'équations au moyen des algorithmes itératifs usuels nécessite une initialisation arbitraire du couple  $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$  qui pourrait très bien conduire à un extremum local et non global. Il s'en suit que la valeur résultante de  $\hat{\alpha}$  n'est pas toujours significative du phénomène observé surtout lorsque la taille de l'échantillon analysé est faible.

N.B : Une valeur négative de  $\hat{\beta}_2$  indique une dégradation de la fiabilité.

### C - Le modèle de Littlewood et Keiller [LIT 81b]

C'est une variante du modèle précédent. L'idée dans ce dernier cas est de traduire l'amélioration stochastique du programme à travers le paramètre de forme  $\alpha$  de la loi gamma et non plus à travers le facteur d'échelle  $\psi$ .

Les auteurs font le choix non moins arbitraire d'une fonction  $\alpha$  :

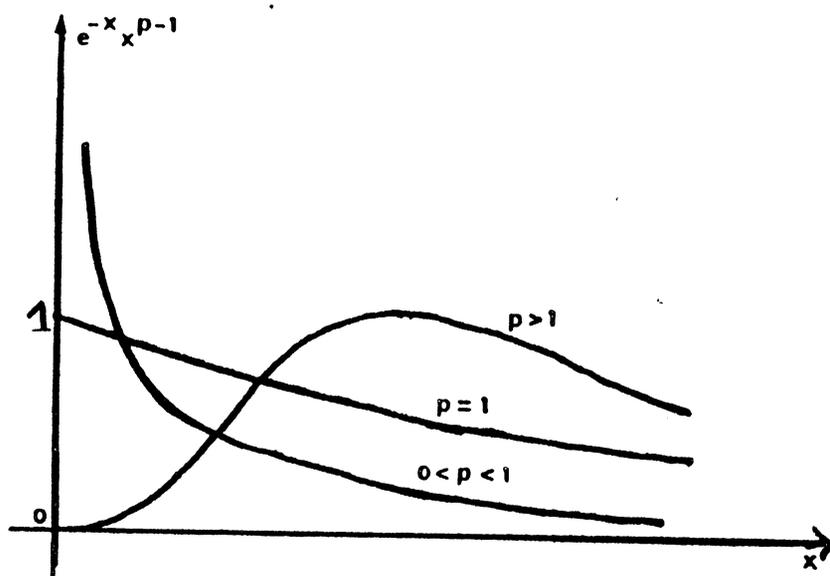
$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \quad \text{avec} \quad \alpha_2 > 0$$

Le type d'inférence qui en résulte est semblable à celui qui précède. Nous n'y reviendrons donc pas davantage.

• Critique des travaux de Littlewood

Littlewood apporte, d'un point de vue conceptuel, les solutions à différentes critiques que l'on peut faire des autres modèles. Cependant, au niveau structurel les deux derniers modèles qu'il propose présentent une complexité plus grande, leur mise en oeuvre requiert de grandes précautions et surtout une bonne connaissance de la théorie utilisée. Le choix de la forme du facteur  $\psi$  par exemple qui traduit la sensibilité du modèle vis-à-vis du travail de déverminage doit être fait avec attention et en bonne connaissance de cause, sinon on risque de fausser l'interprétation des résultats.

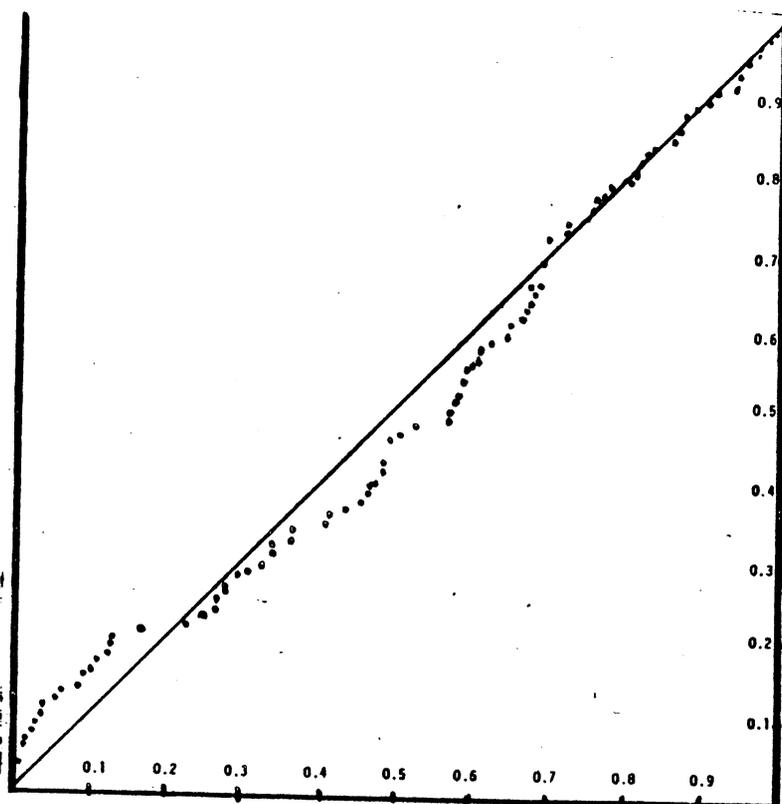
L'approche proposée par Littlewood dans ses deux derniers modèles véhicule l'hypothèse implicite que tout programme couve un nombre infini de défauts, de sorte que la notion de programme parfait devient dans ce contexte presque sûrement illusoire. Littlewood lui-même proclame [LIT 79b] que peu importe le nombre d'erreurs résiduelles, l'essentiel est de quantifier la confiance que l'on peut accorder au bon fonctionnement d'un logiciel durant une période donnée : c'est à dire sa fiabilité opérationnelle. L'auteur a donc pour cela basé son approche sur l'ajustement du modèle aux données observées permettant ainsi un bon pouvoir prédictif.



( $\alpha = p$ )

Figure 13 : Déformations de la distribution gamma suivant les variations du paramètre de forme  $\alpha$  (on a fixé  $\beta = 1$ )

Figure 14



Test of fit between actual observations and predicted distributions using L/V model with linear growth function. There are 100 observations used, prediction is 1 to 5 steps ahead, and the fit is extremely good.

Test ajustement du modèle de Littlewood - Verral aux données de défaillance du système de Musa [LIT 80]

### I.3.2.2.8 - Une autre interprétation du modèle de Littlewood

Comme nous l'avons fait pour le modèle de Jelinski et Moranda, nous allons proposer une interprétation plus physique du premier modèle de Littlewood [LIT 79a].

Considérons un système contenant  $N$  erreurs. La  $i$  ième manifestation d'erreur est le résultat de la réalisation d'un processus de Poisson de paramètre  $\lambda_i$ . On est donc en présence d'une superposition de  $N$  processus de Poisson indépendants. Comme il l'a été fait pour le modèle de Jelinski et Moranda, on suppose que chaque processus se manifeste une seule fois. En effet chaque erreur détectée est immédiatement corrigée.

Soit  $L_i$  la latence associée au  $i$ ème processus de manifestation d'erreurs. Les variables aléatoires  $L_i$  sont indépendantes et de lois exponentielles.

$$P[L_i > \ell/\lambda_i] = e^{-\lambda_i \ell}, \quad \ell > 0$$

La densité conjointe de  $(L_1, \dots, L_N)$  est donnée par :

$$P[L_1, \dots, L_N / \lambda_1, \dots, \lambda_N] = \prod_{i=1}^N \lambda_i e^{-\lambda_i \ell_i}$$

$$\lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Si nous faisons l'hypothèse supplémentaire suivante : Les  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  sont des variables aléatoires indépendantes de même loi  $P[\lambda]$  on peut alors dériver la loi inconditionnelle de  $(L_1, \dots, L_N)$  comme suit :

$$P[L_1, \dots, L_N] = \int \dots \int P[L_1, \dots, L_N / \lambda_1, \dots, \lambda_N] P[\lambda_1, \dots, \lambda_N] d\lambda_1 \dots d\lambda_N$$

On est dans les conditions d'application du théorème de Fubini. On obtient alors :

$$\prod_{i=1}^n \int P[L_i / \lambda_i] P[\lambda_i] d\lambda_i = \prod_{i=1}^n \int P[L_i / \lambda] P[\lambda] d\lambda$$

Prenons

$$P[\lambda] = \alpha^\beta \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda\beta} \quad \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0$$

Il vient que :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P[L_i / \lambda_i] P[\lambda_i] d\lambda_i &= \int_0^\infty P[L_i / \lambda] P[\lambda] d\lambda \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda\beta} \frac{\alpha^\beta \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda\beta}}{\Gamma(\alpha)} d\lambda \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{\beta}{\beta+\alpha} \right)^{\alpha+1} = P[L_i] \end{aligned}$$

qui est une loi de Paréto. La loi conjointe devient donc

$$P[L_1 \dots L_N] = \prod_{i=1}^N \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{\beta}{\beta+\alpha} \right)^{\alpha+1}$$

Soit maintenant  $D_1, \dots, D_N$  la suite ordonnée des dates d'apparition des erreurs. Une réalisation de cette suite,  $d_1, \dots, d_N$ , telle que :

$$0 < d_1 < d_2 < \dots < d_N$$

s'obtient à partir de n'importe laquelle des réalisations de  $L_1, \dots, L_N$  telles qu'il existe une permutation  $\delta$  vérifiant :

$$d_i = \delta(L_i) ; \quad i = 1, \dots, N$$

De plus toutes ces réalisations ont la même densité de probabilité . Enfin comme il y a  $N!$  permutations  $\delta$ , on a donc :

$$P[D_1, \dots, D_N / N, \alpha, \beta] = N! \prod_{i=1}^N \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{\beta}{\beta + d_i} \right)^{\alpha+1}$$

$$\text{avec} \quad 0 < d_1 \dots < d_N$$

Cette présentation nous permettra d'appliquer certaines propriétés des statistiques d'ordre à ce modèle.

Remarquons que si l'on fait le changement de variables suivant :

$$D_i = T_1 + T_2 + \dots + T_i$$

dans le modèle de Littlewood tel qu'il a été présenté en 1.3.2.2.7.A, on retrouve pour les variables  $D_1, \dots, D_N$  la densité conjointe que nous venons d'établir.

Enfin, supposons comme cela peut arriver [LIT 80], que les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  soient infinis mais toutefois dans le respect de la relation de proportionnalité suivante :  $\frac{\alpha}{\beta} = \phi$ , une constante, alors :

$$\left( \frac{\beta}{\beta + d_i} \right)^{\alpha+1} \xrightarrow[\alpha \rightarrow +\infty]{\beta \rightarrow +\infty} e^{-\phi d_i}, \quad i = 1, \dots, N$$

La loi conjointe des variables  $D_1, \dots, D_N$  devient alors :

$$P[D_1, \dots, D_N / N, \phi] = N! \prod_{i=1}^N \phi e^{-\phi d_i} = N! \phi^N (e^{-\phi})^{\sum_{i=1}^N d_i}$$

On retrouve la loi de Jelinski - Moranda telle que nous en avons donné l'interprétation physique en I.3.2.2.3.

Ce curieux résultat présente le modèle JM comme le comportement asymptotique moyen du modèle de Littlewood face à un système qui dénote une très bonne croissance de fiabilité. A ce titre le modèle de Jelinski-Moranda se trouve à nos yeux réhabilité dans son utilisation comme indicateur de croissance de fiabilité.

### I.3.2.3 - La phase de validation

On veut s'assurer dans cette phase, de l'accomplissement des objectifs de fiabilité que les tests, opérés dans la phase précédente, essayaient de faire atteindre au programme. Le programme entre dans une nouvelle phase d'observation. Il évolue dans un milieu un peu plus sévère que celui auquel il était confronté précédemment. La règle n'est plus de corriger les erreurs éventuelles. Il s'agit de s'assurer que la qualité de service délivrée correspond bien à celle qui sera exigée du programme une fois installé dans son milieu opérationnel effectif. En fait, si un certain nombre d'erreurs venaient à se manifester au cours de cette période probatoire, il est possible de décider le rejet du logiciel en question.

Il existe quelques modèles de fiabilité du logiciel qui sont particulièrement adaptés à cette phase. Ce sont essentiellement des modèles d'échantillonnage : [MAC 73],[TRW 76],[NEL 78],[SHO 76].

Nous en présentons, dans un premier temps, l'idée générale.

#### Idee de base

On effectue une partition de l'espace d'entrée  $I$  du programme en un nombre restreint  $N$  de sous-ensembles disjoints  $I_j$ ,  $j=1, \dots, N$ . Chaque sous-ensemble  $I_j$  est associé à un chemin interne  $c_j$  dans le graphe de contrôle du programme. Si on tire au hasard  $n_j$  points dans  $I_j$  et qu'on exécute le

programme pour chaque point en observant  $f_j$  exécutions avec défaillance, alors on peut donner comme estimateur de la fiabilité du programme ainsi testé :

$$R = 1 - \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{n_j} P_j$$

où  $P_j$  représente la probabilité de sélectionner un point d'entrée au sein du sous ensemble  $I_j$ . Cela est fait dans le respect du profil opérationnel effectif du programme. C'est pourquoi certains auteurs [SHO 76],[BAS 80] désignent la fiabilité évaluée dans cette phase sous le vocable fiabilité opérationnelle.

#### I.3.2.3.1. Le modèle de Nelson

Ce modèle d'échantillonnage repose sur les hypothèses suivantes :

1 - L'espace d'entrée du programme est partitionné en  $N$  sous-ensembles  $I_j$ , pour tout  $j = 1, \dots, N$

2 - Chaque entrée est sélectionnée de façon aléatoire à partir d'un sous ensemble  $I_j$ . Cette sélection se fait suivant une loi de probabilité  $P_j$  représentant le profil opérationnel du programme.

3 - Une variable binaire  $Y_j$  teste la bonne exécution du programme pour une entrée partant de  $I_j$  :

$$Y_j = \begin{array}{l} 0 : \text{aucune défaillance} \\ 1 : \text{exécution défaillante} \end{array}$$

La probabilité d'une exécution défaillante est alors :

$$F = \sum_{i=1}^N P_i Y_i$$

d'où la fiabilité :

$$R = 1 - F = \prod_{i=1}^N P_i \cdot (1 - Y_i)$$

ce qui donne une expression semblable à celle présentée dans l'idée générale ci-haut. NELSON s'intéresse ensuite aux deux aspects suivants :

- 1 - La fiabilité du programme pour  $n$  exécutions et pour des entrées sélectionnées de façon aléatoire et indépendante selon  $P_i$  est donné par :

$$R(n) = R^n = (1 - F)^n$$

- 2 - En introduisant le mécanisme de sélection des entrées, soit  $P_{ji}$  la probabilité de sélectionner l'entrée  $I_i$  pour la  $j$  ième exécution, la probabilité d'une défaillance à la  $j$  ième exécution est alors :

$$F_j = \sum_{i=1}^N P_{ji} Y_{ji}$$

d'où la fiabilité globale pour  $n$  exécutions :

$$\begin{aligned} R(n) &= \prod_{j=1}^n (1 - F_j) \\ &= e^{\sum_{j=1}^n \log(1 - F_j)} \end{aligned}$$

où : Pour  $F_j \ll 1$ , on obtient  $R(n) \approx e^{-\sum_{j=1}^n F_j}$

$N$  : est le nombre de sous-ensembles d'entrée

$n$  : le nombre d'exécutions du programme.

Les approches présentées jusqu'ici considéraient le programme comme un tout, une unité atomique qu'on pourrait appeler une boîte noire. Dans la présentation qui va suivre le modèle prend en compte la structure interne du programme.

#### I.3.2.3.2 - Le modèle de SHOUMAN [SHO 76]

Ce modèle repose sur les hypothèses suivantes :

- 1 - Le programme en question a été conçu suivant une technique de programmation structurée,
- 2 - Le graphe de contrôle du programme est tel que la plupart des chemins sont indépendants les uns des autres, exception pouvant être faite pour un certain nombre restreint de types de dépendance.
- 3 - Le programme est testé suivant un jeu de tests donné qui se termine soit par une défaillance au temps  $t_j$ , soit sans défaillance au temps  $T_j$ ; la variable  $t_j$  est aléatoire et de distribution uniforme sur  $[0, T_j]$ .
- 4 - Les données d'entrée changent à chaque exécution du programme. L'auteur tire de ces hypothèses les résultats suivants :
  - a) La probabilité de défaillance du programme est donnée par :

$$q_0 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{nf}{N} = \sum_{j=1}^n f_j q_j$$

- b) son taux de défaillance est estimé par :

$$\lambda_0 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{nf}{H_N} = \frac{\sum_{j=1}^n f_j q_j}{\sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{q_j}{2}\right) \cdot f_j \cdot T_j}$$

où :

$H_N$ : le temps total des essais

$nf$ : le nombre total de défaillances survenues en  $N$  essais

$f_j$  la fréquence d'exécution du chemin  $j$

$q_j$ : la probabilité d'occurrence de défaillance lors de l'exécution du chemin  $j$ .

$T_j$ : est le temps d'exécution sans défaillance du chemin  $j$ .

$N$ : le nombre total d'essais, et  $n$  le nombre de chemins testés.

### Estimation des paramètres

Les paramètres du modèle  $\{f_j, T_j, q_j; j=1, \dots, n\}$  sont estimés de façon expérimentale sur la base de données des logiciels déjà développés.

#### 1.3.2.3.3 - Evaluation de l'efficacité des jeux de tests:

##### La méthode d'injection et capture des erreurs

C'est une technique expérimentale visant aussi bien l'évaluation de la taille des erreurs latentes du programme que celle de l'efficacité des jeux de tests auxquels est soumis le programme.

La méthode [SCH 78] consiste à inoculer successivement un certain nombre d'erreurs,  $m$ , au programme. Pour chaque erreur injectée, le programme est exécuté sur un certain nombre de jeux de tests activant divers chemins de son graphe de contrôle. L'essai est arrêté si cette erreur est détectée et donc recapturée ou alors si le jeu de tests est épuisé.

L'efficacité du jeu de tests est simplement estimé au moyen de la proportion du nombre d'erreurs ainsi recapturées, c'est à dire :

$$I_{ef} = \frac{mr}{m}$$

où

mr : est le nombre d'erreurs recapturées

m : est le nombre total d'erreurs semées dans le programme.

Cet estimateur est aussi utilisé comme un indicateur de la taille des erreurs endogènes du programme.

### Critique :

Les méthodes d'échantillonnage sont assez simples à appliquer d'autant plus qu'elles ne sont pas soumises à des hypothèses contraignantes sur la distribution de sélection des points d'entrée.

Nous pouvons toutefois signaler les quelques inconvénients suivants :

- la difficulté de déterminer de façon pratique le profil opérationnel effectif.

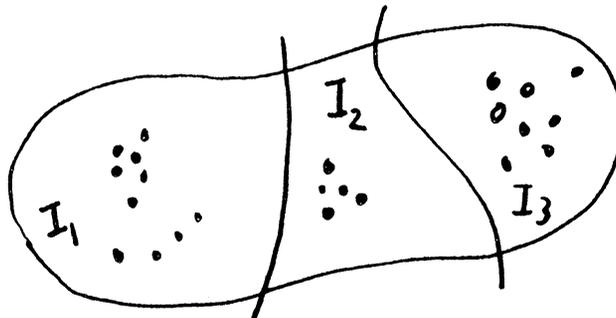
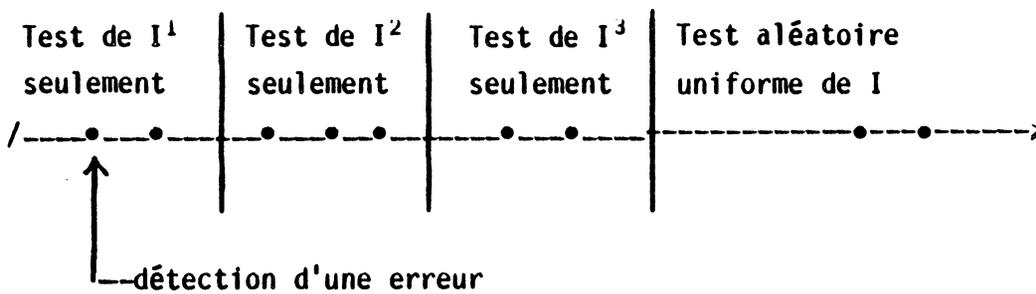
- La méthode d'injection-détection d'erreurs suppose la même taille aux erreurs endogènes et aux erreurs exogènes.

Enfin, d'un point de vue méthodologique nous considérons que l'usage qui est fait de ces modèles en vue de la validation de gros logiciels est plus ou moins douteux.

En effet, après avoir dépensé beaucoup d'argent pour concevoir et mettre au point un programme, personne ne va le jeter parce qu'il s'est manifesté une erreur dans la phase de validation. Nous pensons qu'il vaudrait mieux la corriger et recommencer la validation. Cela rejoint l'esprit de la phase de

debugging. Et c'est justement dans cet esprit, conciliant la phase de debugging et la phase de validation, que nous établirons, dans la seconde partie, une méthode de validation de programme.

## Efficacité des tests suivant différentes stratégies

Partition du domaine d'entrée  $I$ .Test aléatoire avec balayage uniforme de  $I$ .

Test avec sélections successives des chemins

Figure 15

#### I.3.2.4 - La phase opérationnelle et la phase de maintenance

Après avoir été validé le logiciel sera ensuite installé dans son milieu opérationnel réel. Pendant son utilisation, de nouvelles erreurs peuvent bien apparaître. En effet, l'environnement opérationnel peut présenter quelques configurations non conformes aux spécifications intrinsèques du logiciel. Des modifications peuvent être apportées au programme pour prendre en compte de nouvelles situations. Ces différents cas de figure sont susceptibles d'altérer la qualité de service qu'on avait jusqu'alors assurée au programme.

C'est pour prévenir de telles situations que certains auteurs [LIT 75b], [LIT 79c], [CHE 78], [LAP 84] ont proposé une modélisation plus fine du comportement d'un logiciel en opération.

En plus de la fiabilité, ces modèles prédisent la disponibilité et la maintenabilité d'un programme. La structure interne du programme est prise en compte. Celui-ci est considéré comme un ensemble de modules en interaction. Une approche markovienne est souvent utilisée pour décrire le mécanisme de transfert du contrôle d'un module du système à un autre. Les paramètres caractéristiques utilisés sont ceux qu'il serait souhaitable d'atteindre durant les essais de mise au point de façon à assurer une qualité de service optimale au programme en exploitation.

Nous présenterons brièvement l'approche développée par Littlewood [LIT 79c] dans ce contexte.

##### I.3.2.4.1 - Le modèle structuré de Littlewood [LIT 79c]

L'idée de base est de décrire convenablement les deux sources d'incertitude suivantes :

- Le transfert du contrôle d'un module à un autre. En effet on ignore a priori à quel instant ce transfert peut survenir.

- Le temps d'exécution (ou temps de séjour) de chaque module.

Pour modéliser ce mécanisme d'interaction entre les modules, Littlewood utilise un processus semi markovien caractérisé par :

- $P_{ij}$  : la probabilité d'un transfert du contrôle du module  $i$  au module  $j$   
 $i, j = 1, 2, \dots, n$
- La loi de séjour au sein du module  $i$  sachant que le transfert du contrôle sera ensuite donné au module  $j$  est noté  $M_{ij}$ . Soient  $\mu_1^{ij}$  et  $\mu_2^{ij}$  ses deux premiers moments (moyenne et variance).
- Le taux de défaillance associé au transfert de contrôle du module  $i$  au module  $j$  est noté  $\lambda_{ij}$  (ce taux est estimé lors des essais de débbugging).
- Le processus d'occurrence de défaillances du module  $i$  est supposé être un processus de Poisson de paramètre  $w_i$ .

A partir de là, Littlewood établit les théorèmes suivants :

**Théorème 1** : Le processus d'occurrence de défaillances d'un tel programme modulaire en exploitation est asymptotiquement un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  avec :

$$\lambda = \frac{\sum_{i,j} \pi_i P_{ij} (\mu_1^{ij} w_i + \lambda_{ij})}{\sum_{i,j} \pi_i P_{ij} \mu_1^{ij}} = \sum_{i=1}^n a_i w_i + \sum_{i,j} b_{ij} \lambda_{ij}$$

où le vecteur de composantes

$\pi_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , vérifie :  $\pi.P = \pi$  (équation du régime asymptotique) ;  $P$  est la matrice de terme général  $P_{ij}$  ;

$$\text{avec} \quad \sum_{i=1}^n \pi_i = 1, \quad \pi_i > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$a_i = \sum_{j=1}^n \frac{\pi_i P_{ij} \mu_{ij}}{\sum_{i,j} \pi_i P_{ij} \mu_{ij}}$$

est la proportion du temps passé à l'exécution du module  $i$  en l'absence de défaillance, et enfin

$$b_{ij} = \sum_{i,j} \frac{\pi_i P_{ij}}{\sum_{i,j} \pi_i P_{ij} \mu_{ij}}$$

est la fréquence de transfert du contrôle du module  $i$  au module  $j$ .

### Coût d'exploitation:

Soit  $Y_i$  le coût d'une défaillance survenant dans le module  $i$ . De même  $Y_{ij}$  représente le coût d'une défaillance survenant lors du transfert de contrôle du module  $i$  au module  $j$ . Ces variables aléatoires sont considérées comme étant indépendantes.

Le coût total des défaillances du programme survenues durant l'intervalle d'utilisation  $[0, t]$  peut être donné par :

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n Y_i(t) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{j=1}^n Y_{ij}(t)$$

( $Y_i(t)$  est le coût total des défaillances survenues dans le module  $i$  sur l'intervalle  $[0, t]$ ).

Littlewood établit alors le second théorème suivant :

Théorème 2 : Le processus de coût  $Y(t)$  suit asymptotiquement une loi normale

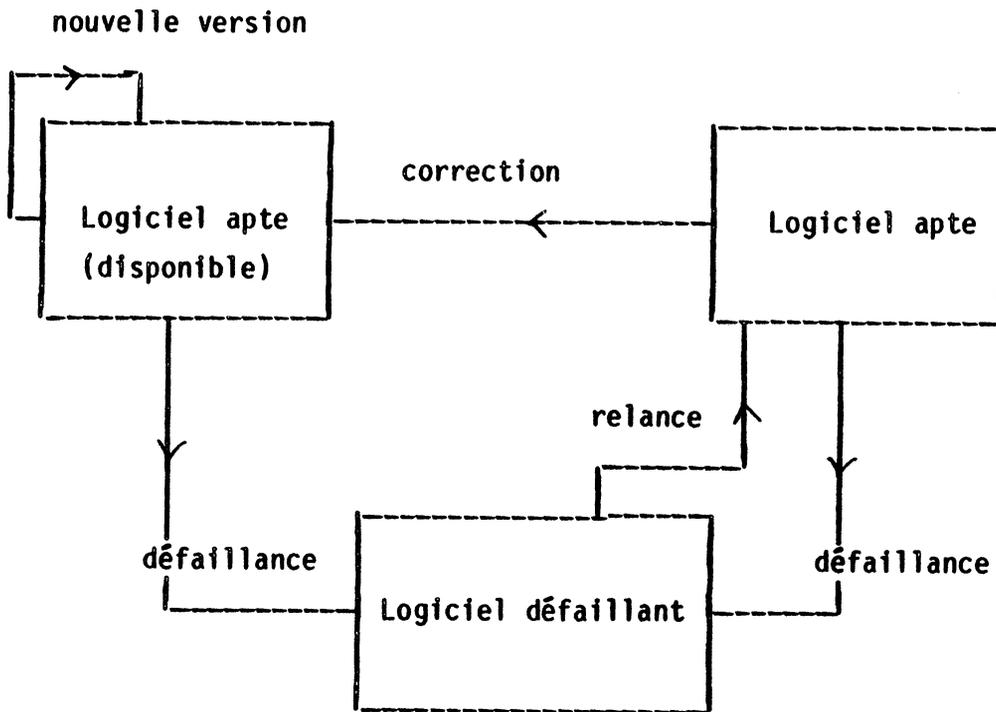
ie :

$$\frac{Y(t) - \mu t}{\sigma t^{1/2}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{P} N(0,1)$$

où

$$\mu = \frac{\sum_i \pi_i P_{ij} (\mu_1^{ij} w_i m_1^i + \lambda_{ij} m_1^{ij})}{\sum_{i,j} \pi_i P_{ij} \mu_1^{ij}}$$

est la moyenne asymptotique du coût par unité de temps d'exécution du programme.



Disponibilité = Probabilité d'être dans l'état "logiciel disponible", c'est à dire au repos ou en bon fonctionnement.

Figure 16 : Cycle de vie du logiciel

et  $m_1^i$  = moyenne asymptotique de  $Y_i$  ;  $m_1^{ij}$  : moyenne asymptotique de  $Y_{ij}$   
 $\sigma^2$  est la variance asymptotique de la variable aléatoire mesurant le coût unitaire d'exécution du programme.

Des détails sur le calcul de  $\sigma^2$  peuvent être trouvés dans [LIT 79c].

Enfin une évaluation de la disponibilité asymptotique du programme est donnée par :

$$\frac{1}{1+\mu} = \frac{\sum_{i,j} \pi_i P_{ij} \mu_1^{ij}}{\sum_{i,j} \pi_i P_{ij} [\mu_1^{ij} + \mu_1^{ij} w_i m_1^i + \lambda_{ij} m_1^{ij}]}$$

C'est la probabilité pour que le programme soit disponible à un instant donné. On peut ici interpréter  $m_1^i$  comme le coût moyen dû à la restauration du module défaillant  $i$  (idem pour  $m_1^{ij}$ ).

Les résultats présentés ci-dessus découlent en partie de l'hypothèse suivante : les taux d'exécution de chaque module sont très grands devant leurs taux de défaillance.

Nous bornerons la présentation de cette phase opérationnelle à ce dernier modèle. En ce qui concerne la phase de maintenance, il n'existe pratiquement aucun modèle spécifiquement conçu à cet effet. En général, ce sont les modèles de debugging qui y sont à nouveau appliqués. Enfin, un exposé plus détaillé sur l'évaluation de la sûreté de fonctionnement des logiciels en opération pourra être trouvé avec intérêt dans [LAP 84].

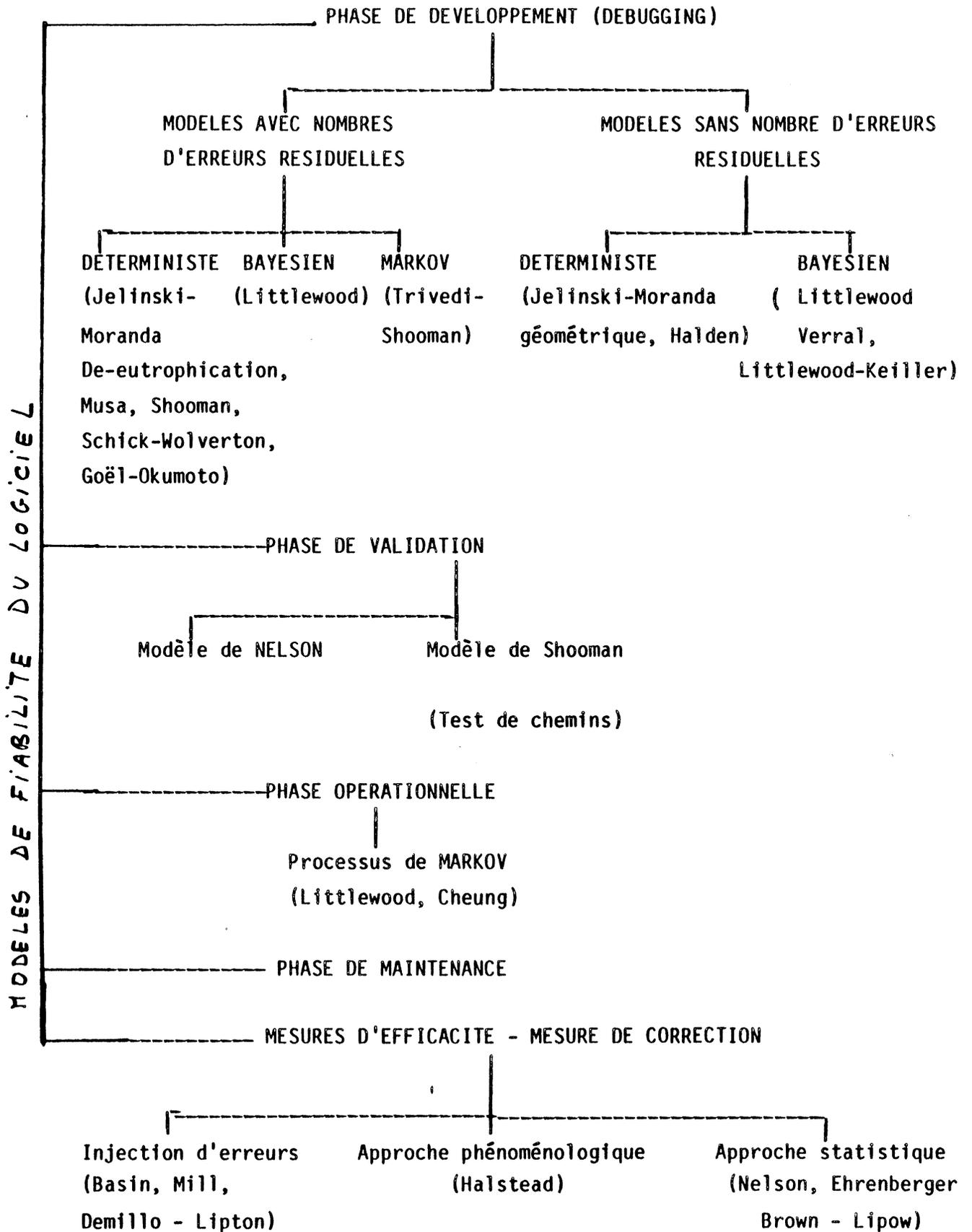


Figure 17 : Modèles de fiabilité du logiciel selon leurs phases d'application

### I.3.3 - VALIDITE DE MODELE

Le modèle est par définition une représentation simplifiée du comportement d'un système réel qui reproduit les relations entre les entrées et les sorties dans le but de rendre explicites des comportements non observables.

Par nature, un modèle schématise donc la réalité, de façon approximative, au moyen des lois qui ne représentent que les aspects essentiels des phénomènes modélisés. Il se réduit donc à des sous-ensembles du domaine général d'application.

Par conséquent l'utilisation d'un modèle implique un risque dû à l'écart entre le phénomène réel observé et sa représentation approchée par le modèle.

Il paraît alors important de valider de façon adéquate tout modèle à utiliser. Ceci est cependant très difficile et peut être même impossible par le caractère limité du modèle lui-même tel qu'il a été défini. Une idée de validation est l'évaluation des capacités répliquatives et prédictives du modèle. Des méthodes statistiques existent, test de Kolmogorov-Smirnov par exemple, pour mesurer l'ajustement d'un modèle à un ensemble de données expérimentales. La validation d'un modèle suivant ce procédé devrait se faire sur la base de plusieurs projets. Malheureusement les données de défaillance sont rares car les opérations de développement d'un programme sont assez onéreuses. Les auteurs en sont souvent réduits à valider leur modèle sur un petit nombre de projets lorsqu'ils ne se contentent pas seulement de prôner la conformité des fondements de leur modèle au phénomène étudié.

Des études ont été menées en vue d'établir une méthodologie d'évaluation des modèles de fiabilité du logiciel [MOA 81]. Les principaux critères retenus à cette fin sont :

- L'utilité qui est une propriété concernant la relation modèle et utilisateur. Elle évalue la capacité du modèle à produire des résultats dont il est possible de déduire directement ou par l'intermédiaire d'un autre modèle l'estimation du risque recherché.

- L'applicabilité qui est une relation concernant le modèle et le système réel étudié. Ce critère évalue la conformité de l'environnement théorique du modèle à l'environnement réel dans lequel on veut l'utiliser.

- La validité prédictive qui est un critère évaluant la capacité interne du modèle à produire des résultats conformes à ce qui est attendu.

Dans un article récent [MUS 84], Musa, Littlewood, Okumoto et Iannio se sont mis d'accord sur l'établissement des critères de comparaison suivants :

- La validité prédictive (définie plus haut),
- La capacité, elle fait référence à l'aptitude du modèle à estimer de façon satisfaisante les grandeurs utiles à la gestion d'un produit logiciel.

Ces grandeurs peuvent être :

- la fiabilité à un instant donné, le MTTF ;
- le temps nécessaire aux essais, au bout duquel on espère atteindre un objectif de fiabilité donné,
- les ressources humaines ou ressources en matériel nécessaires à la réalisation d'un projet logiciel, son coût financier.
  - la qualité des hypothèses qui se rapporte à la clarté et à la pertinence (par défaut à la plausibilité) des hypothèses du modèle.
  - L'applicabilité (déjà définie plus haut).
  - La simplicité qui se rapporte à la simplicité d'utilisation du modèle, à sa capacité de fournir à l'utilisateur le risque encouru dans la mise en oeuvre du modèle, à son implémentation.

Ce dernier critère peut s'inscrire dans le critère générique défini précédemment : l'utilité.

Enfin signalons que quelques efforts sont faits pour s'orienter vers des procédures dites adaptatives [LIT 84] pour mieux exploiter l'information contenue dans les données collectées.

Outre la difficulté de quantifier objectivement ces différents critères, le peu de données de base à partir desquels on valide les modèles remet plus ou moins en question la crédibilité des méthodes d'évaluation présentées.

#### **I.4 - CONCLUSION**

Nous avons donné un bref aperçu de l'Etat de l'art en ce qui concerne la théorie de la fiabilité du logiciel.

Nous pouvons en retenir deux points fondamentaux :

- Il est possible d'appliquer le concept de fiabilité à la description du comportement d'un programme. Cette description est faite au moyen de modèles.
- Les renseignements fournis par le modèle sont conditionnés à la validité des hypothèses et du type d'inférence sur lesquels celui-ci est fondé. L'Etat de l'art est cependant peu avancé dans les techniques d'évaluation de modèles de fiabilité du logiciel.

Maintenant, fort de ces deux remarques, peut-on valider un système auquel il est assigné une haute sûreté de fonctionnement, en l'exerçant pendant une durée de temps inférieure à sa durée de mission effective ?

Dans ce qui va suivre nous essayerons d'apporter une réponse partielle à cette question en proposant quelques procédures de validation d'un tel système. Cependant, la question cruciale restera celle de la crédibilité d'une telle validation. La jeunesse de l'Etat de l'art en matière d'évaluation de modèles ne nous permet pas encore de trancher sur cette question. Toutefois, malgré cet état de fait, nous indiquerons le bon usage qui pourrait être fait des différentes approches proposées.

## **CHAPITRE II**

**TSAR, UN TEST SEQUENTIEL D'ARRET  
D'UN PROCESSUS DE MISE AU POINT  
ET DE VALIDATION DE LOGICIEL**

Une erreur ne devient pas vérité parce que tout le monde y croit, pas plus qu'une vérité ne peut devenir erreur lorsque personne n'y adhère.

GANDHI (Tous les hommes sont frères)



## II - TSAR : UN TEST SEQUENTIEL D'ARRET APPLIQUE AUX ESSAIS DE MISE AU POINT ET DE VALIDATION DU LOGICIEL

### 1 - INTRODUCTION

Pour assurer une haute sûreté de fonctionnement au logiciel, il est d'usage de tester ce dernier suivant les phases présentées dans la première partie de cet exposé : La phase de développement et la phase de validation.

Dans ces deux phases, le problème d'arrêter les essais en un temps acceptable, tout en garantissant l'accomplissement de l'objectif fixé au préalable, se pose de la même façon.

L'intransigeance de la phase de validation conduisant à rejeter un logiciel dès la première manifestation d'erreur peut être lourde de conséquence si cette erreur était fortuitement la dernière. Il nous semble intéressant de concilier ces deux approches : mise au point et validation. L'aspect séquentiel associé à la phase de développement et la période d'exercice probatoire mise en jeu dans la phase de validation peuvent être simultanément mis à profit dans l'élaboration d'une procédure d'arrêt des essais de validation.

La plupart des concepteurs de modèles de fiabilité du logiciel se contentent d'estimer le nombre d'erreurs résiduelles à un instant donné [JEL 72], [MUS 75] et ils en déduisent par voie de conséquence la fiabilité du programme. Certains prédisent la fiabilité qu'atteindra le programme après un certain nombre d'erreurs qu'on n'a pas encore observées [LIT 79a]. Le problème de l'arrêt des essais est souvent gouverné par un critère de gestion de coût ; en effet certains auteurs [FOR 79] recommandent d'arrêter les essais lorsque le coût attendu de la correction d'une erreur résiduelle dépasse le bénéfice espéré de l'accroissement de qualité du logiciel qui en résulte.

Nous nous intéressons ici au problème de l'arrêt d'un processus séquentiel de développement et validation de logiciel. Dans le contexte particulier de la haute sûreté de fonctionnement, une telle décision d'arrêt comporte un certain risque qu'il conviendrait de maîtriser.

Une proposition dans ce sens peut être trouvée dans [FOR 79]. Les auteurs proposent une règle d'arrêt qui s'appuie sur le modèle de Jelinski et Moranda [JEL 72]. Cependant, cette proposition ne permet pas de maîtriser le risque statistique associé à la décision d'arrêt, et elle ne prend pas non plus en compte l'aspect séquentiel associé à la décision à prendre ; en effet, cette question se repose chaque fois qu'une erreur est détectée puis corrigée : a-t-on débusqué toutes les erreurs ? Pour y répondre, on se fixe un temps supplémentaire de fonctionnement sans défaillance au bout duquel on arrêtera vraisemblablement les essais.

Nous montrons ici qu'il est possible d'établir une règle d'arrêt séquentielle dont le risque associé est parfaitement connu. Pour cela nous posons d'abord le principe du test séquentiel et du calcul du risque associé à la décision d'arrêt. Ensuite nous dérivons la règle d'arrêt correspondant au modèle de Jelinski et Moranda. La généralisation de cette démarche au modèle de Littlewood est aussi abordée.

N.B : Le mot test peut être une nouvelle source d'ambiguïté dans cette partie où le vocabulaire utilisé en informatique se mêlera à la terminologie courante en statistique. Les tests, côté informatique, tel que nous l'avons conçu jusqu'à présent, se caractérisent par des sélections aléatoires de points d'entrée à partir desquels seront activés divers chemins du graphe de contrôle du logiciel. Nous retiendrons donc que le test informatique s'applique au logiciel lui-même. Nous l'appellerons aussi un essai.

Le test au sens statistique s'applique par contre au modèle statistique représentant le phénomène aléatoire qu'est le comportement du logiciel. Il permet de confronter certaines assertions entre elles, nous dirons

hypothèses, faites sur les lois de probabilités qui sous-tendent le modèle utilisé.

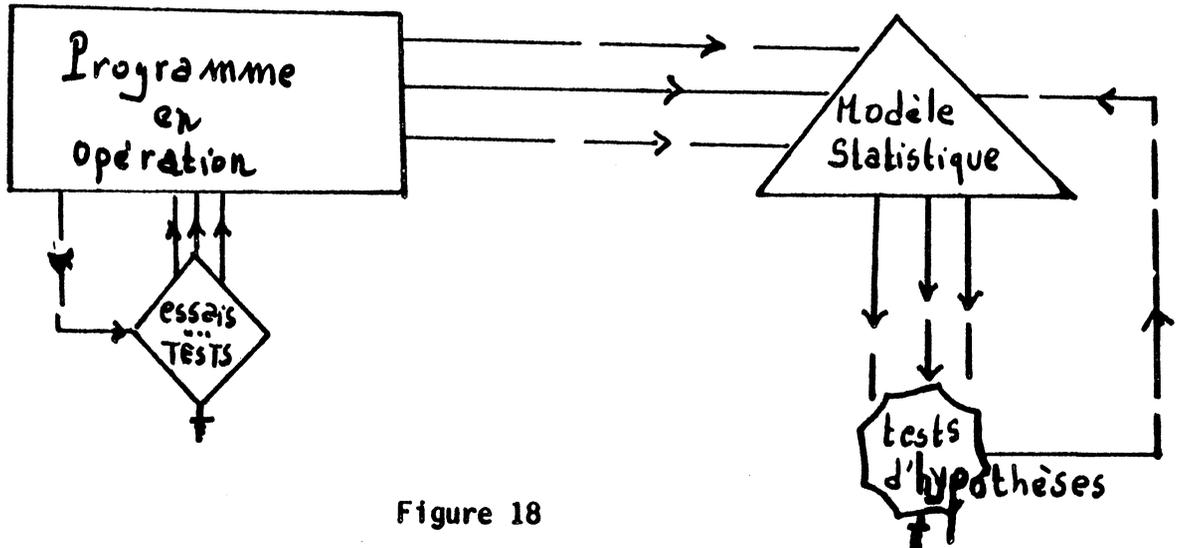


Figure 18

## 2 - POSITION DU PROBLEME

Considérons un système informatique soumis aux essais de debugging : un logiciel, pour ce qui nous concerne, dans sa phase de mise au point. Conformément aux hypothèses de base des modèles de fiabilité présentés précédemment nous supposons que celui-ci est testé dans un environnement plus ou moins aléatoire mais toutefois dans le respect d'une représentativité relative des essais vis-à-vis du profil opérationnel futur du logiciel en question.

Nous nous plaçons dans l'optique vérification-validation. Il s'agit donc, à la suite de certaines corrections apportées au logiciel, de décider l'arrêt des essais et par conséquent de valider le logiciel. Nous appuierons notre décision d'arrêt sur l'hypothèse d'un nombre d'erreur résiduelle nul dans le logiciel éprouvé. Une telle procédure nous conduit alors à partager l'hypothèse fondamentale d'une relation entre le taux de défaillance d'un programme et son nombre d'erreurs résiduelles.

## 2.1 - Sa formulation mathématique

Supposons maintenant que le programme contenait initialement (au début des essais de mise au point)  $N$  erreurs. ce nombre est évidemment inconnu. Nous faisons enfin l'hypothèse que ces erreurs se manifesteront au cours des essais selon un processus aléatoire régi par une famille de lois de probabilité  $P$ .

Nous voici donc ramenés à l'observation de processus qui délivrent itérativement des intervalles de temps aléatoires  $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$  (intervalles de temps entre les manifestations successives des erreurs) suivant une certaine distribution dépendant de paramètres inconnus :

$N$  : entier positif,  
et  $\theta$  : un vecteur de  $R^k$  (nous l'expliciterons dans ce qui suit).

En d'autres termes, nous pouvons nous placer face au problème de décision séquentielle suivant : il s'agit de prendre une décision sur la valeur du paramètre  $N$ . Cette décision est établie au sein d'un espace de décisions noté  $D$ . Elle s'appuie sur l'observation de la suite de variables aléatoires  $T_1, \dots, T_n, \dots$ . Enfin, on suppose que la densité de probabilité de la suite  $T_1, \dots, T_n$  est connue conditionnellement aux paramètres  $N$  et  $\theta$ . La procédure séquentielle s'arrête lorsque l'on peut décider avec une probabilité donnée d'une certaine valeur de  $N$ .

On voit donc que la mise en oeuvre d'une telle procédure de décision séquentielle nécessite au préalable la définition d'un plan d'expérience (comment récolter les données) et la détermination d'une règle d'arrêt.

## 2.2 - Une idée de résolution

Le plan d'expérience est assez simple. En effet, suivant l'optique vérification-validation que nous avons choisie, il suffit de récolter itérativement la suite  $T_1, \dots, T_n$  après chaque restauration et relance du logiciel. Ici paraît

l'aspect séquentiel de la décision à prendre. En effet, après la manifestation de chaque itéré de la suite précédente, on est conduit à choisir séquentiellement parmi les hypothèses suivantes laquelle est vraie :

$$N = 0, N = 1, N = i, \dots ?$$

La détermination d'une règle d'arrêt est par contre moins évidente. Il s'agit dans ce dernier cas de définir un espace de décision  $D$  à partir duquel on pourra trancher parmi les hypothèses successives présentées ci-haut à propos de la valeur effective du paramètre inconnu  $N$ .

Cette règle de décision ne se réduira pas à une simple estimation ponctuelle du paramètre  $N$ . Elle doit, en plus, apporter une certaine information sur la période de temps de bon fonctionnement du logiciel nécessaire pour acquérir une certaine confiance dans la vraisemblance de la décision de validation à prendre. En effet, après avoir observé le processus  $T_1, \dots, T_i$ , la règle décidera  $N = i$  s'il paraît vraisemblable d'arrêter les essais à cette étape et donc de valider le logiciel. Cette décision est prise à la suite d'une période probatoire de bon fonctionnement du logiciel de façon à conforter le bien-fondé de la décision d'arrêt.

Il nous paraît, à cet égard, naturel suivant en cela Foreman et Singpurwalla [FOR 79] de fonder notre règle de décision sur un **test d'hypothèses statistiques**. Ce test confrontera l'hypothèse d'un programme parfait c'est à dire  $N = n$  (nombre d'erreurs résiduelles nul, après avoir observé  $T_n$  ie:  $N-n = 0$ ) à celle d'un programme recèlant encore des erreurs résiduelles, c'est-à-dire  $N > n$ .

Dans le souci de clarifier la terminologie et la méthodologie qui seront employées par la suite nous présentons dans un premier temps les grandes lignes de la théorie du test d'hypothèses en statistique inférentielle.

### 3 - LE TEST D'HYPOTHESES EN STATISTIQUE

La théorie du test d'hypothèses est un point fort de l'Inférence en statistique. Nous en présentons ici quelques lignes générales.

#### 3.1 - Définitions

A) Hypothèse : Une hypothèse  $H$  est une assertion faite a priori sur la distribution d'une ou plusieurs variables aléatoires.

Considérons la structure statistique suivante :  $[\Omega, \mathcal{A}, (P_{\theta}, \theta \in \Delta)]$ . Une distribution de la famille  $(P_{\theta}, \theta \in \Delta)$  est parfaitement déterminée par la connaissance du paramètre  $\theta = (N, \theta_1 \dots \theta_k)$ . Toute affirmation portée sur une composante quelconque de  $\theta$  est une **hypothèse statistique**, par exemple  $H : N = n$

#### B) Test d'hypothèses

Un test d'hypothèses statistiques est une règle de décision conduisant soit au rejet soit à l'acceptation d'une des hypothèses confrontées. Cette décision s'appuie sur une fonction de l'échantillon observé : la statistique de test. Cette dernière est déterminée avant la collecte des données.

En général, on peut toujours se ramener à la confrontation de deux hypothèses opposées,  $H_0$  et  $H_1$ . La première est souvent du type " $\theta_1 = q$ ". Le test d'hypothèse définit a priori une région critique permettant de discriminer ces deux hypothèses. L'échantillon une fois collecté conduira à rejeter ou à accepter l'hypothèse nulle suivant que les observations tomberont dans la région critique ou non. Cette région est aussi appelée région de rejet de l'hypothèse nulle.

C) Région critique :

La région critique C est le lieu des observations qui conduisent à rejeter l'hypothèse nulle ( $H_0$ ). Elle est définie par la statistique de test avant de recueillir les données.

Lorsqu'une décision est prise pour discriminer deux hypothèses  $H_0$  et  $H_1$ , plusieurs cas de figure peuvent intervenir dont deux sont erronés : accepter l'hypothèse nulle à tort ou rejeter l'hypothèse nulle à tort.

Décision ↳ la réalité ↓	accepter $H_0$ i.e. (rejeter $H_1$ )	rejeter $H_0$ i.e. (accepter $H_1$ )
$\theta$ n'est pas dans la région critique	aucune erreur (1 - $\alpha$ )	erreur de première espèce ( $\alpha$ )
$\theta$ est dans la région critique	erreur de seconde espèce ( $\beta$ )	aucune erreur (1 - $\beta$ )

Nous avons mis entre parenthèses les mesures de probabilité associées à chaque décision :  $\text{Prob}[H / \theta]$  où H est l'une ou l'autre des deux hypothèses et  $\theta$  la vraie valeur du paramètre recherché.

#### D) Puissance d'un test et son niveau de signification

Un test est dit d'autant plus puissant qu'il est plus apte à rejeter l'hypothèse nulle quand celle-ci est fautive, c'est-à-dire :

$$\text{Prob}[\text{rejeter } H_0, H_0 \text{ est fautive}] = 1 - \beta \text{ est grand.}$$

Ce qui revient à dire que  $\beta$  est minimum. L'hypothèse  $H_0$  est supposée simple.

Le niveau de signification d'un test est sa propension à rejeter l'hypothèse nulle à tort, c'est-à-dire :

$$\alpha = \text{Prob}[\text{rejeter } H_0, H_0 \text{ est vraie}]$$

En général  $\alpha$  est fixé a priori et  $\beta$  est déterminé par le choix optimal d'une région critique.

NB : Lorsqu'on a collecté un échantillon  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de loi de probabilité conjointe  $P_\theta$ , on appellera fonction de vraisemblance associée à cet échantillon, la fonction du paramètre inconnu  $\theta$  définie par:

$$L(X; \theta) = P_\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Pour un test d'hypothèses où  $H_0$  est de la forme  $\theta = \theta_0$ , la fonction de vraisemblance sous l'hypothèse que  $H_0$  est vraie sera notée  $L(X; \theta_0)$ .

#### 3.3 - Un exemple de test séquentiel : la méthode de Wald

Pour minimiser la taille de l'échantillon à collecter avant d'arriver à prendre une décision d'arrêt, Wald [FIS 80] propose l'approche séquentielle suivante :

Soient deux constantes positives A, B telles que :

$$0 < B < A < +\infty.$$

La règle de décision à suivre se formule comme suit :

$$1 - \frac{L(x ; \theta_0)}{L(x ; \theta_1)} > A$$

arrêter le test et accepter  $H_0$

$$2 - \frac{L(x ; \theta_0)}{L(x ; \theta_1)} < B$$

arrêter le test et rejeter  $H_0$

$$3 - B < \frac{L(x ; \theta_0)}{L(x ; \theta_1)} < A$$

Aucune décision à prendre, continuer le test, ajouter une nouvelle observation à l'échantillon X et reprendre la procédure.

Les constantes A et B sont définies en fonction du niveau de signification du test et de sa puissance :

$$A \approx \frac{1 - \beta}{\alpha} ; B \approx \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

#### 4 - RECHERCHE D'UN PROCÉDE DE RESOLUTION

##### 4.1 - L'inadéquation de la méthode de Wald

A première vue la méthode de Wald semblerait se prêter à la résolution de

notre problème. Mais ceci n'est vrai qu'en partie. Nous allons essayer de le montrer.

A - Le test de Wald s'applique à deux hypothèses définies a priori et qui demeurent connues et figées tout au long de la procédure séquentielle :

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta = \theta_1 \neq \theta_0$$

Par contre, en ce qui nous concerne, lorsque nous avons recueilli le n-uplet  $t_1, t_2, \dots, t_n$  nous définissons alors le test d'hypothèses à cette n-ième étape :

$$H_0^{(n)} : N = n$$

$$H_1^{(n)} : N > n$$

En fait, la théorie des tests d'hypothèses [FER 67] montre que le test suivant :

$$H_0^{(n)} : N = n$$

$$H_1^{(n)} : N = n+1$$

est plus puissant que le précédent. C'est donc ce dernier test que nous retiendrons à chaque étape des essais de validation.

Foreman et Singpurwalla [FOR 79] proposent de retenir l'hypothèse nulle  $(n)$  ( $H_0 : N = n$ ) en accordant un temps d'exercice supplémentaire au logiciel

après la correction de la  $n$  ième erreur.

Si aucune nouvelle erreur ne se manifeste pendant cette période probatoire alors on peut en toute vraisemblance arrêter les essais et valider à ce titre un tel logiciel.

Cette démarche critique confère à ce test une propriété pour le moins singulière dans le domaine de la théorie du test d'hypothèses. En effet, dans ce cas de figure , l'erreur de première espèce est nulle. Les auteurs s'appuient sur le fait que cette façon de procéder assure que l'on ne pourra jamais rejeter l'hypothèse d'un logiciel exempt de défauts résiduels. En effet, quelque soit la durée de la période d'exercice supplémentaire servant à éprouver l'hypothèse nulle, si celle-ci est vraie, aucune nouvelle erreur ne pourra se manifester effectivement. Par conséquent, si l'hypothèse nulle est vraie elle sera forcément retenue.

Forts de ce raisonnement, nous pouvons alors imposer à la famille de lois de probabilités  $P_\theta$ , sous-jacente au processus de manifestation des erreurs  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , de satisfaire la condition suivante :

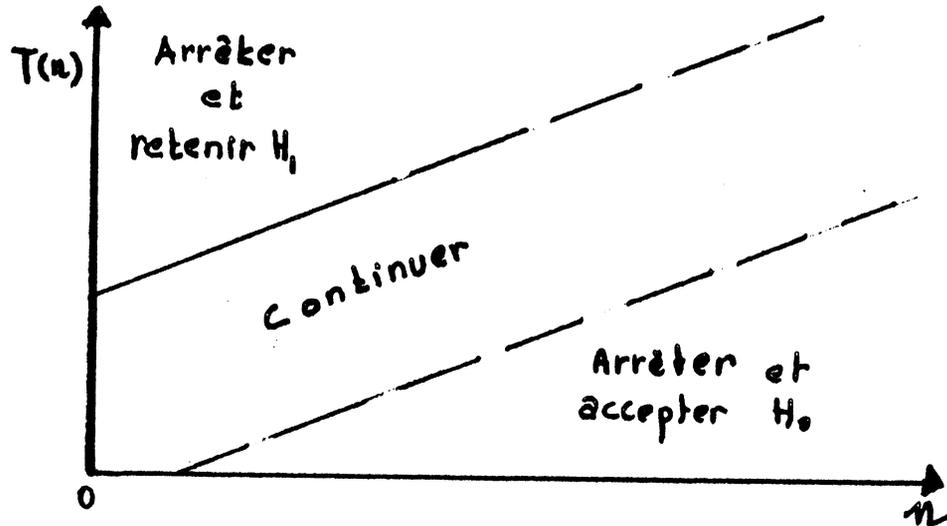
$$(H4.1) \quad P_\theta [T_n < +\infty / N = n] = P[T_n < +\infty / N < n, \theta] = 0$$

Cela traduit le fait qu'il est impossible qu'un logiciel contenant initialement  $N$  erreurs engendre, durant les essais de mise au point et en un temps fini, un processus de manifestation d'erreurs à plus de  $N$  itérés.

En d'autres termes les variables aléatoires  $T_n$  pour  $n > N$  sont presque sûrement infinies au sens de la mesure  $P_\theta$ .  
Les corrections sont supposées parfaites, mais nous reviendrons sur cette hypothèse.

B - Le test de Wald s'arrête aussitôt que l'échantillon recueilli permet la discrimination des deux hypothèses en présence. Ce test découpe l'espace des observations en trois régions orientant la décision à prendre.

L'exemple des essais de contrôle de qualité d'un lot en fin de fabrication donne lieu au découpage suivant :



(où  $T(n)$  est le pourcentage d'unités défectueuses pour un lot de taille  $n$  ;  $H_0 : \theta = \theta_0$  ;  $H_1 : \theta > \theta_0$  ).

La réponse définitive que nous attendons de notre test est l'acceptation à un moment donné de l'hypothèse nulle. Cette espérance peut se justifier à la lumière des remarques suivantes:

1 - Le test est appliqué à un logiciel qui recèle un nombre fini d'erreurs. Nous supposons que dès la manifestation d'une erreur celle-ci est détectée puis corrigée de façon sûre. En conséquence le nombre d'erreurs décroît au fur et à mesure des essais de débbuging.

2 - Le graphe de contrôle du logiciel est activé de façon plus ou moins aléatoire et surtout de telle façon que nous puissions faire l'hypothèse plausible d'un balayage représentatif de l'organigramme du logiciel. Le processus de manifestation des erreurs peut à ce titre être considéré comme

aléatoire. Les modèles de fiabilité du logiciel fournissent dans ce cas une approximation du phénomène aléatoire ainsi observé.

#### 4.2 - Une question de terminologie

L'aspect séquentiel orienté de ce test peut choquer plus d'un statisticien car une question se pose lorsque l'on décide de continuer le test : pourquoi utiliser à nouveau l'hypothèse  $H_0^{(n+1)}$  :  $N = n+1$  alors qu'à l'étape immédiatement précédente elle servait de contre-hypothèse ( $H_1^{(n)}$  :  $N = n+1$ ) et qu'elle a été justement retenue ? Cette question cache en fait un cas d'ambiguïté sur la terminologie utilisée : procédons-nous à un test séquentiel tel que le disent Foreman et Singpurwalla, ou ne sommes-nous pas plutôt confrontés à un problème d'estimation séquentielle ?

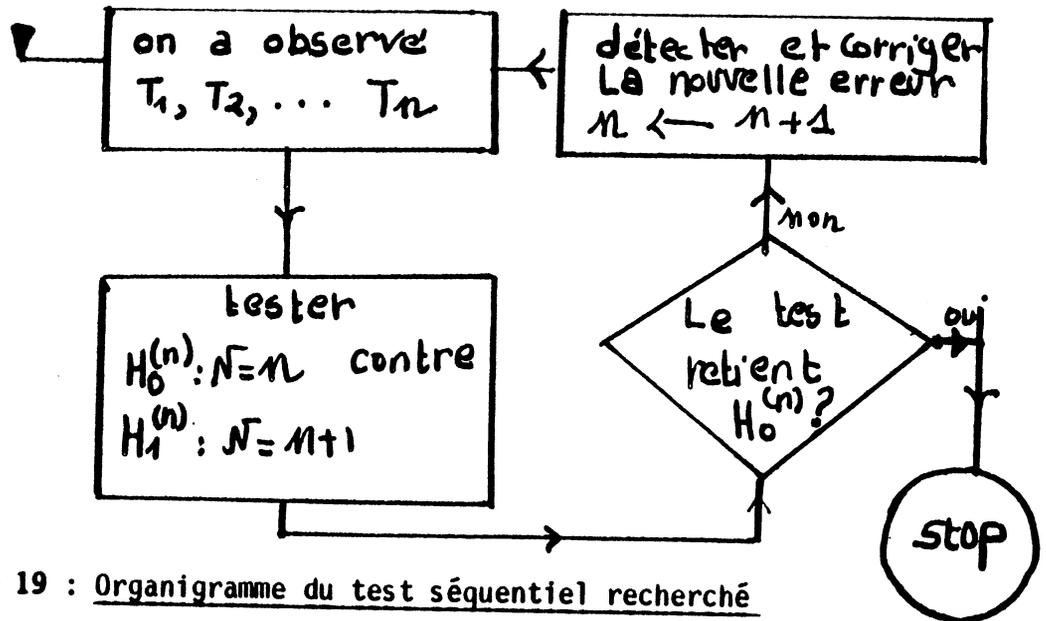


Figure 19 : Organigramme du test séquentiel recherché

Dans la première acception nous pouvons expliquer les hypothèses en présence de la façon suivante : à l'étape  $n$  du test d'arrêt où  $H_0^{(n)}$  :  $N = n$  est confrontée à  $H_1^{(n)}$  :  $N = n+1$ , le test choisit par exemple la seconde hypothèse  $H_1^{(n)}$ . Cela signifie qu'il demeure vraisemblablement encore des erreurs

résiduelles dans le logiciel en question. La nouvelle observation  $T_{n+1}$  qui viendra enrichir le  $n$ -uplet déjà observé  $(t_1, \dots, t_n)$  modifiera la nouvelle statistique de test. Cette nouvelle statistique est appliquée à un autre test

$$\begin{array}{l} \text{d'hypothèses } H_0 \quad N = n+1 \\ \text{contre } H_1 \quad N = (n+1) + 1 \end{array}$$

De plus les hypothèses  $H_1^{(n)}$  et  $H_0^{(n+1)}$  n'ont pas le même sens bien qu'elles se formulent de la même façon, ie :  $N = n+1$ . La première signifie, à la  $n$  ième étape du test, qu'il reste encore au moins une erreur dans le logiciel alors que la seconde signifie qu'on a mis à jour toutes les erreurs que couvrait le logiciel à ce stade de l'étude.

Lorsque le test s'arrête, en retenant l'hypothèse nulle, la valeur de celle-ci peut en toute vraisemblance être considérée comme un estimateur du nombre d'erreurs que recèlait le logiciel au début des essais de mise au point.

Alors pour conclure, s'agit-il en définitive d'un test d'hypothèses séquentiel ou d'une procédure d'estimation séquentielle ? Qu'il nous soit permis de laisser cette discussion byzantine sur la terminologie aux puristes. L'essentiel est de s'appuyer sur une procédure inférentielle convenable et solide de façon à assurer un pouvoir de décision acceptable à notre règle d'arrêt.

Cela étant dit, il s'agit maintenant de rechercher un bon pouvoir de décision.

L'inadéquation de la méthode de Wald ou des méthodes usuelles dont nous avons eu connaissance dans la théorie des tests d'hypothèses [FER 67], nous ont conduit à rechercher d'autres procédures inférentielles. Le test séquentiel d'arrêt : TSAR, est une des réponses possibles que nous proposons à ce genre de problème.

## 5 - PROPOSITION D'UN TEST SEQUENTIEL D'ARRET

### 5.1 - Idée générale

Nous conservons l'idée directrice du test proposé par Foreman et Singpurwalla [FOR 79]. Ces auteurs proposent la démarche suivante :

Après avoir observé la  $n$  ième défaillance du logiciel on éprouvera l'hypothèse nulle, c'est à dire celle d'un programme exempt de défauts résiduels, en relançant le logiciel, après avoir bien sûr détecté et corrigé l'erreur précédente, pendant une période d'exercice supplémentaire  $X_{n+1}$ . Si aucune défaillance ne survient avant expiration de ce délai on décidera alors en faveur de l'hypothèse nulle ( $H_0 : N = n$ ) et l'essai sera arrêté. En revanche toute occurrence d'erreur avant l'échéance du sursis accordé au logiciel conduira à la correction de ladite erreur et au calcul d'une nouvelle période probatoire  $X_{n+2}$  au bout de laquelle on arrêtera probablement les essais.

On peut remarquer la nature itérative de cette procédure. La dernière décision d'arrêt à prendre devrait à notre sens impliquer chaque étape de la procédure. Cependant les auteurs [FOR 79] n'ont pas pris en compte la mesure du risque global associé à l'aspect séquentiel de cette procédure.

Nous proposons, à chaque étape du test, de calculer le temps critique  $X_{n+1}$  en fonction des paramètres de la loi de manifestation des erreurs,  $(N, \theta)$  et de l'ajuster à un risque  $r$  défini a priori. Ce risque, borne supérieure de l'erreur associée à la décision d'arrêt, est maintenu constant tout au long de la démarche séquentielle.

## 5.2 - Principe du test séquentiel

Plus formellement nous pouvons définir une partition en  $N$  classes disjointes de l'espace  $\Omega$  de toutes les réalisations possibles d'un processus  $T_1, \dots, T_n, \dots$  issu des manifestations successives des erreurs d'un logiciel en cours de mise au point. On fait l'hypothèse que ce logiciel recèlait  $N$  erreurs,  $N$  est inconnu, au départ des essais. La  $j$  ième classe de la partition, notée  $R(N=j)$  correspond à toutes les réalisations des  $j$ -uplets  $(t_1, \dots, t_j)$  conduisant à l'acceptation de l'hypothèse  $N = j$ . C'est donc la région d'acceptation de l'hypothèse nulle à la  $j$  ième étape de notre test d'arrêt :  $H_0^{(j)} : N = j$ . La région critique à ce stade est donnée par :  $D(N=j) = \Omega - R(N=j)$ .

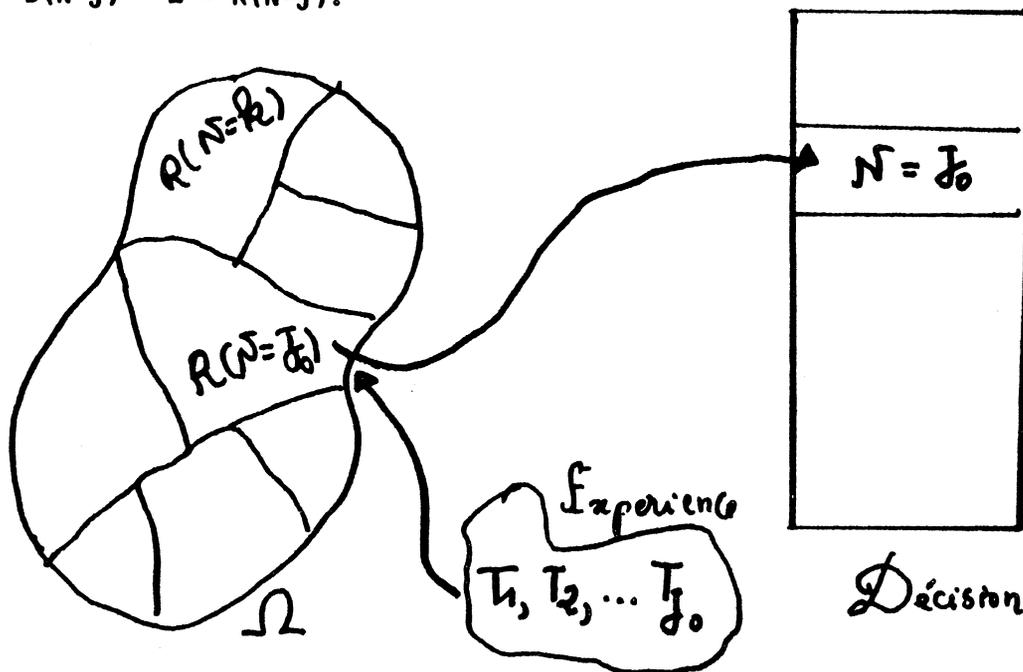


Figure 21 : décision d'arrêt pour un système avec  $N=J_0$

Comme il a été dit précédemment, nous nous proposons d'arrêter les essais au pas  $n$  si après avoir corrigé la dernière erreur détectée, le logiciel, une fois relancé, ne manifeste aucune défaillance supplémentaire durant un temps de fonctionnement  $X_{n+1}$  à définir :

$$T_{n+1} > X_{n+1} [t_1, t_2, \dots, t_n, \theta, N]$$

- $T_{n+1}$  : est le temps de bon fonctionnement du logiciel après la manifestation de la n ième erreur.
- $X_{n+1} [t_1, \dots, t_n, \theta, N]$  : est le temps critique d'observation supplémentaire du logiciel. Il dépend des variables aléatoires  $T_1, \dots, T_n$  déjà observées à cette étape, et du vecteur de paramètres de la distribution sous-jacente au processus de manifestation des erreurs:  $(\theta, N)$ .

Alors il vient naturellement que, dans l'espace de toutes les trajectoires possibles auxquelles peut conduire le processus  $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$  la région critique qui nous permettra à l'étape n de retenir l'hypothèse nulle est définie par :

$$R(N = n) = \left\{ T_1 < X_1[\theta], T_2 < X_2[T_1, \theta], \dots, T_n < X_n [T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, \theta], \right. \\ \left. T_{n+1} > X_{n+1} [T_1, T_2, \dots, T_n, \theta] \right\}$$

Les fonctions seuils  $X_j [t_1, \dots, t_{j-1}, \theta]$  assurant la décision d'arrêt sont judicieusement définies de façon à assurer un risque donné à la décision d'arrêt.

### 5.3 - Le risque statistique associé

Ce risque sera la mesure de l'erreur maximum encourue lorsque l'on décidera d'arrêter les essais. L'application de ce test d'arrêt aux essais de debugging d'un logiciel ayant un nombre initial d'erreurs égale à n et dont la loi de manifestation des erreurs est indiquée par  $\theta$ , conduira à une décision d'arrêt erronée si nous ne choisissons pas l'hypothèse "N = n".

Soit  $r(n, \theta)$  la probabilité d'une telle méprise ; nous pouvons écrire :

$$r(n, \theta) = \text{Prob} \left[ \bigcup_{\substack{i=0, \infty \\ i \neq n}} R(N=i) / N = n, \theta \right]$$

Or nous savons d'une part que les ensembles  $R(N=j)$  sont tous mutuellement disjoints ou vides et leur réunion reconstitue l'ensemble de toutes les réalisations possibles du processus observé ; d'autre part l'équation (H4.1) entraîne :

$$\text{Prob}[R(N = i) / N = n < i, \theta] = 0$$

C'est à dire que  $R(N=i)$ , pour  $N = n < i$ , est vide  $P_\theta$ -presque sûrement.

En définitive nous pouvons donc écrire :

$$r(n, \theta) = \sum_{j=1}^{n-1} \text{Prob}[R(N=j) / N = n, \theta]$$

Une autre formulation du risque peut être obtenue en considérant la région de rejet de l'hypothèse nulle :

$$D(N > n) = \{T_1 < X_1 [\theta], T_2 < X_2 [T_1, \theta], \dots, T_n < X_n [T_1, T_{n-1}, \theta]\}$$

Ce qui donne :

$$1 - r(n, \theta) = \text{Prob}[D(N > n) / N = n, \theta]$$

#### A - Le problème d'estimation des paramètres

Le test d'arrêt proposé par Foreman et Singpurwala était dans certains cas sujet à caution à cause du problème d'estimation des paramètres. En effet, en présence d'un échantillon de petite taille il se pose le problème de la confiance à accorder aux estimations des paramètres. Ceci désavantage plus ou moins la règle de décision. Ici, nous pouvons nous affranchir de ce genre de problème au moyen d'une majoration du risque, indépendamment des paramètres

de la distribution étudiée, et grâce à un choix convenable des régions critiques.

### B - Définition

Une règle de décision assure un risque  $\rho \in ]0,1[$  si et seulement si :

$$r(n, \theta) < \rho \quad \text{pour tout entier } n, \text{ et tout } \theta \in R^k$$

Une telle règle devrait garantir, quelque soit le système auquel elle s'applique, que la probabilité d'arrêter les essais à tort est plus petite que  $\rho$ .

Par souci d'optimalité nous envisageons de calibrer notre règle de décision sur un risque exact  $\rho$  défini a priori comme suit :

### C - Définition

Une règle d'arrêt assure exactement le risque  $\rho$  si et seulement si :

$$\rho = \sup_{n, \theta} r(n, \theta)$$

Une telle définition permet une construction itérative des fonctions seuils  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .. intervenant dans la définition des régions critiques.

Comme nous l'avons vu, la règle d'arrêt que nous proposons fonde son inférence sur le nombre d'erreurs résiduelles dans le logiciel éprouvé. Elle s'appliquera donc essentiellement à la classe des modèles de fiabilité du logiciel qui partagent ce concept du nombre d'erreurs résiduelles. Au sein de cette classe se trouvent deux modèles pilotes : le modèle de Jelinski et Moranda [JEL 72], le plus ancien. Ce même modèle sert de référence de base aux modèles déterministes. Le second, celui de Littlewood [LIT 79a],

véhicule le courant révolutionnaire de l'approche Bayésienne dans la fiabilité du logiciel. Nous dériverons donc notre test d'arrêt sur chacun de ces deux modèles.

## 6 - DERIVATION DE LA REGLE D'ARRET AU MODELE DE JELINSKI ET MORANDA

### 6.1 - Rappel du modèle JM

Les hypothèses de base du modèle JM ont été présentées en (I.3.2.2.2).  
 Considérons maintenant un logiciel contenant au début des essais de mise au point N erreurs. On déduit des hypothèses du modèle que si l'essai est suffisamment long on observera exactement N défaillances. On pourra donc collecter l'échantillon  $t_1, t_2, \dots, t_N$  correspondant aux intervalles de temps de bon fonctionnement entre les différentes défaillances successives.

Nous pouvons rappeler les équations fondamentales du modèle qui guideront notre démarche.

Le taux de défaillance du logiciel après avoir observé  $i-1$  défaillances est donné par :

$$\lambda_i = (N-i + 1) \cdot \phi$$

Où  $\phi$  est une constante de proportionnalité,  $\phi > 0$ .

La loi de probabilité de la variable  $T_i$  est exponentielle :

$$P[T_i / N, \phi] = (N-i + 1) \cdot \phi \cdot e^{-(N-i+1) \phi t_i}$$

avec  $t_i > 0$ , où  $t_i$  est une réalisation de la variable aléatoire  $T_i$ .  
 Finalement la loi conjointe de l'échantillon statistique  $T_1, \dots, T_N$ , conditionnellement aux paramètres N et  $\phi$  est donnée par :

$$P[t_1, \dots, t_N / N, \phi] = \prod_{i=1}^N (N-i+1) \cdot \phi \cdot e^{-(N-i+1) \phi t_i}$$

Elle est définie sur le domaine  $t_i > 0$ , pour tout  $i=1, \dots, N$ .

## 6.2 - Application de la règle d'arrêt

Cette règle peut aisément s'appliquer au modèle JM à la lumière des remarques suivantes :

- 1 - Dans le modèle JM le vecteur de paramètres inconnus  $\theta$  se réduit à un seul paramètre scalaire  $\phi$  qui peut être vu comme un facteur d'échelle temporelle.

En choisissant des règles de décision, c'est-à-dire des régions critiques telles que les fonctions seuils  $X_i$  des variables  $T_i$  soient linéaires, on obtiendra des quantités :

$$\text{Prob}[R(N = i) / N, \phi]$$

indépendantes de  $\phi$ ,  $r(n, \phi) = r(n) \quad \forall \phi > 0$

- 2 - La constante  $X_1$  doit à cet égard être infinie. En effet nous voulons avoir :

$$\forall \phi > 0, r(1, \phi) = \text{Prob}[R(N=0) / N=1, \phi]$$

$$\begin{aligned} &= \text{Prob}[t_1 > X_1 / N=1, \phi] \\ &= \int_{X_1}^{+\infty} P[t_1 / N=1, \phi] dt_1 \\ &= \int_{X_1}^{+\infty} \phi e^{-\phi t} dt < \rho < +\infty \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$r(1, \phi) = e^{-\phi X_1} < \rho$$

pour tout  $\rho \in ]0, 1[$

Soit :

$$X_1 > \frac{1}{\phi} \log\left(\frac{1}{\rho}\right) > 0$$

$\forall \phi > 0$

Pour un risque  $\rho$  acceptable donc strictement plus petit que 1, la seule solution est  $X_1$  infini, ce qui implique donc :

$$R(N=0) = \overline{0} \text{ et } r(1, \phi) = 0$$

En conséquence, on ne peut envisager de règles de décision, donc d'arrêter les essais, que si l'on a observé au moins une première défaillance. Ce problème de l'attente de la première défaillance sera abordé par la suite.

Moyennant ces remarques, nous avons la propriété fondamentale suivante :

#### A - Théorème 1

La règle de décision suivante :

$$- X_1 = + \infty$$

- et pour tout  $n > 1$

$$X_n = k_n \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) T_i - \sum_{i=1}^{n-1} (n-i+1) T_i$$

assure exactement le risque  $r$  lorsque les constantes  $k_n$  sont définies itérativement de la façon suivante qui assure l'ajustement de la règle au risque  $r$  :

Pour  $k_2$  :

$$\text{Prob}[R(N = 1) / N = 2] = \text{Prob}[T_2 > k_2 t_1 / N = 2] = r$$

Pour  $k_j, j > 2$

$$\text{Prob}[R(N = j-1) / N=j] + \text{Prob}[R(N = j-2) / N=j] + \dots + \text{Prob}[R(N=1) / N=j] = r$$

Ce qui donne les formules suivantes :

$$\frac{2}{k_2} = r$$

$$\frac{2}{k_3^2} = \frac{r}{4 - r}$$

et pour  $n > 3$

$$\frac{n}{k_n^{n-1}} = \frac{(n-2)r}{2(n-1) - (n-2)r} - \sum_{i=3}^{n-1} \frac{C_n^{i-1}}{[(n-i+1)k_i - n+i]^{i-1}}$$

avec 
$$C_n^i = \frac{n!}{(n-i)! i!}$$

La démonstration de ce théorème est mise en appendice A.1 placé à la fin de cette partie.

Nous pouvons donner à titre d'exemple, les cinq premiers résultats obtenus à partir d'un risque donné  $r$ .

### 6.3 - Exemple numérique

Pour un risque  $r = 0.05$  on obtient les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{ll} k_2 = 40 & x_2 = 38.0 t_1 \\ k_3 = 15.4 & x_3 = 27.8 t_1 + 13.4 t_2 \\ k_4 = 7.3 & x_4 = 18.0 t_1 + 11.6 t_2 + 5.3 t_3 \\ k_5 = 4.7 & x_5 = 13.9 t_1 + 10.2 t_2 + 6.4 t_3 + 2.7 t_4 \end{array}$$

Aussi, si l'on a observé une première défaillance au bout d'un temps d'essai  $t_1$ , et qu'après correction le système logiciel fonctionne correctement pendant  $38t_1$ , on arrêtera vraisemblablement les essais et on décidera que le système est correct, c'est-à-dire exempt de défauts résiduels, avec une probabilité d'erreurs de 5 %.

### 6.4 - Application

Nous avons écrit un programme qui délivre automatiquement les seuils d'arrêt en fonction des données de défaillances recueillies séquentiellement au cours des essais de débogging de logiciels. Ce programme a été baptisé JELTSAR. Nous l'avons exercé sur un certain nombre de données de défaillances issues de différents projets de développement de systèmes logiciels [MUS 79b]. Ces résultats sont mentionnés dans la troisième partie de cet exposé.

### 6.5 - Discussion

La validité de ces résultats peut être discutée sur la base de nombreuses critiques qu'a suscitées le modèle JM. Nous retiendrons essentiellement les trois critiques suivantes formulées par Littlewood car elles nous paraissent importantes:

A- Littlewood et Verral [LIT 81a] ont montré que l'estimation des paramètres du modèle JM :  $\phi$  et N, au moyen du critère du maximum de vraisemblance peut conduire à des estimateurs infinis lorsque le système exhibe une décroissance de fiabilité au lieu de la croissance supposée par le modèle. Bien que cette remarque désavantage le modèle JM, la dérivation de notre règle d'arrêt à ce modèle ne subit pas pour autant cette incommodité puisque cette règle s'affranchit, par construction même, du problème d'estimation de paramètres. Nous verrons plus loin que ce dernier avantage n'est pas aussi bénéfique qu'il ne paraît a priori.

B- Les mêmes auteurs, tout comme Keiller [LIT 81b], rejettent complètement le concept du nombre d'erreurs résiduelles dans sa relation avec le taux de défaillance tel que le postule le modèle JM en particulier. Leur point de vue étant qu'un système corrigé est une nouvelle version du système précédent. Cela conduit donc les auteurs à décrire les différentes versions engendrées par un programme en cours de mise au point suivant une inférence Bayésienne caractérisant ainsi les différentes mutations du programme au cours des tests. Cette approche tient compte des mauvaises corrections éventuelles opérées sur le système en question.

Cette approche lève donc l'équivoque sur le problème de démasquage des erreurs car les cas de figure suivants sont considérés :

- la non indépendance des processus de manifestations des erreurs,
- l'éventualité des erreurs de correction.

Sur ce dernier point nous pouvons faire la remarque suivante relative à la règle d'arrêt appliquée au modèle JM : un débogging imparfait, et par suite sa répercussion sur l'évolution de la fiabilité (décroissance ou bien évolution plus faible que linéaire) ne constitue vraisemblablement pas un inconvénient majeur à la règle d'arrêt proposée ; en effet, l'introduction progressive des erreurs de correction (c'est-à-dire dues à des corrections imparfaites) diminuera la probabilité d'apparition de longs intervalles  $T_j$  de temps de bon fonctionnement continu du système. De sorte que les différents délais probatoires  $X_j$  générés par la règle d'arrêt seront de plus en plus

grands et un tel système ainsi contaminé paraîtra assez tôt impossible à déverminer et donc à valider durant un temps d'essais raisonnable.

Finalement cet effet résultera sur un changement de l'interprétation du risque qui sera vu alors comme un risque plutôt pessimiste qu'exact.

C- Nous revenons plus précisément sur la critique de l'hypothèse fondamentale du modèle JM : "Toutes les erreurs ont la même sévérité ( $\phi$ )", a conduit Littlewood à élaborer le modèle LB [LIT 73]. En effet, l'hypothèse d'une contribution uniforme de toutes les erreurs au taux de défaillance total du système paraît peu réaliste. Il n'est pas établi qu'un programme à deux erreurs soit nettement moins fiable qu'un programme qui ne recèle qu'une seule erreur. Tout dépend en fait de leurs localisations dans le programme et de la façon dont ce dernier est activé. Littlewood associe alors des taux de défaillances distincts aux différentes erreurs résiduelles du programme, de sorte qu'au cours des essais de debugging on détectera et corrigera, en toute vraisemblance, d'abord les erreurs à fort taux de défaillance ou encore erreurs de grandes tailles tandis que les erreurs de petites tailles : erreurs fines, ne se manifesteront probablement que bien plus tard. Il s'en suit qu'au cours du debugging la fiabilité du système éprouvé évoluera plus vite que ne le prédit le modèle JM. Ce dernier cas de figure pourrait corrompre notre règle d'arrêt en ce sens que nous serions amenés à décider l'arrêt des essais et par suite à valider le système en question alors qu'en fait ce dernier recèle encore des erreurs résiduelles bien plus fines que celles que l'on a déjà débusquées. Relativement à ces remarques, le risque associé à la règle d'arrêt dérivée au modèle JM pourrait paraître optimiste.

C'est pour prendre en considération les critiques précédentes que nous avons envisagé l'extension de notre règle d'arrêt au modèle de Littlewood.

## 7 - DERIVATION DE LA REGLE D'ARRET AU MODELE DE LITTLEWOOD [LIT 79b]

### 7.1 - Rappel sur le modèle LB

Il est clair que le modèle JM ne peut être étendu aux remarques précédentes par la simple association d'un taux de défaillance propre à chaque erreur puisque l'échantillon de données récoltées durant les essais de debugging ne contiendra certainement pas assez d'informations permettant une estimation consistante des paramètres inconnus du modèle. Par contre, l'approche Bayésienne proposée par Littlewood contourne cette difficulté. Les hypothèses complémentaires apportées par Littlewood, présentées précédemment permettent cette extension.

Supposons maintenant un système contenant initialement  $N$  erreurs. celui-ci est soumis à des essais de mise au point assez longs.

Notons  $D_i$  le temps cumulé depuis le début des essais de développement jusqu'à la manifestation de l'erreur numéro  $i$  : c'est la date d'apparition de la  $i$  ième erreur :

$$D_i = T_1 + T_2 + \dots + T_i$$

où  $T_i$  est l'intervalle de temps de bon fonctionnement du système séparant la manifestation de l'erreur numéro  $i-1$  (ou depuis le départ des essais si  $i=1$ ) et celle de l'erreur numéro  $i$ .

D'après l'interprétation que nous avons proposée du modèle de Littlewood, nous savons que la densité conjointe de la statistique ordonnée  $D_1, D_2, \dots, D_N$  peut s'écrire :

$$P[d_1, d_2, \dots, d_N / N] = N! \prod_{i=1}^N \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{\beta}{\beta + d_i} \right)^{\alpha+1} \quad \text{si } 0 < d_1 < \dots < d_N$$

= 0 sinon

Les paramètres du modèle sont  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  et  $N$  entier positif

## 7.2 - Application de la règle d'arrêt

L'application de la méthode définie précédemment conduit rapidement à des calculs complexes et presque inextricables. Le recours aux  $X_j$  qui sont des fonctions linéaires des dates  $D_j$  permet l'élimination du facteur d'échelle temporelle  $\beta$  dans la règle de décision qui en résulte ; cependant la maximisation du risque associé à la décision d'arrêt, relativement au paramètre inconnu  $\alpha$  semble impossible.

C'est pourquoi, dans un premier temps, nous simplifierons en partie le problème en supposant que le paramètre  $\alpha$  est connu d'avance. En particulier, le choix  $\alpha = 1$  semble être relativement pessimiste car il correspond à une loi exponentielle qui autorise alors une large dispersion des différents taux de défaillance. Malgré cette simplification partielle, la complexité intrinsèque du modèle LB fait encore que le problème n'est pas entièrement résolvable. Toutefois nous présentons ci-après les résultats partiels obtenus.

Considérons, comme nous l'avons fait pour le modèle JM, les régions critiques suivantes :

$$R(N=0) = \emptyset$$

$$R(N = n) = \{D_2 < k_2 D_1, \dots, D_n < k_n D_{n-1}, D_{n+1} > k_{n+1} D_n\}$$

avec :

$$D_j = T_1 + T_2 + \dots + T_j$$

Pour un risque  $r$ , la constante  $k_n$  doit satisfaire :

$$r = \sum_{j=1}^{n-1} \text{Prob}[R(N=j) / N=n]$$

$$\text{Soit } D(N > n) = \{D_2 < k_2 D_1, \dots, D_n < k_n D_{n-1}\}$$

$$\text{alors } 1 - r = \text{Prob}[D(N > n) / N=n]$$

### 7.3 - Interprétation du risque

Dans le cas du modèle JM,  $r(N, \phi)$  représentait le risque effectif de valider à tort un logiciel avec  $N$  erreurs initiales. Le processus de manifestation de ces erreurs est régi par une distribution de paramètre  $\phi$ . Nous considérons dans le présent modèle qu'un logiciel peut être caractérisé par les paramètres spécifiques suivants :

- $N$ , le nombre d'erreurs présentes dans le logiciel au début des essais;
- La suite  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  des taux de défaillance respectivement associés à chaque erreur.

Dans le cas particulier du modèle JM on a  $\lambda_j = \phi$  pour tout  $j=1, \dots, N$ . Cela n'est plus le cas lorsque l'on considère le modèle de Littlewood. Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de la loi gamma qui gouverne les taux de défaillance dans ce dernier modèle, caractérisent à notre sens, non un programme mais une famille de programmes tous issus de la même équipe de conception.

Le risque associé à la validation à tort d'un programme quelconque issu d'une telle famille est :

$$r(\alpha, \beta, N, \lambda_1, \dots, \lambda_N)$$

Le calcul effectif d'un tel risque pose tout de suite le délicat problème de l'estimation des  $N+3$  paramètres en présence.

Par contre nous pouvons en partie contourner cette difficulté en considérant le risque moyen associé à la validation à tort d'une famille de

programmes issus de la même équipe de conception. Dans le cas d'une famille de programmes à  $N$  erreurs et dont l'équipe de conception est caractérisée par une loi de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  on obtient :

$$r(N, \alpha, \beta) = \int \dots \int r(\alpha, \beta, N, \lambda_1, \dots, \lambda_N) P(\lambda_1) \dots P(\lambda_N) d\lambda_1 \dots d\lambda_N$$

Vue sous cet angle, l'application de la règle d'arrêt au modèle de Littlewood devient semblable à la dérivation de cette même règle au modèle JM. Cependant, au lieu d'avoir deux paramètres  $N$  et  $\phi$ , on en a maintenant trois  $N, \alpha$  et  $\beta$ .

Ce pont entre les deux applications de la règle d'arrêt étant jeté, nous pouvons donc conserver des régions critiques semblables pour élaborer notre règle de décision séquentielle sur ce dernier modèle.

#### 7.4 - Calculs des seuils

Suite aux difficultés de calculs précitées, seul le calcul des constantes  $k_2$  et  $k_3$  a pu aboutir de façon exacte. L'expression analytique des itérés suivants est assez difficile à obtenir. En conséquence nous avons dû recourir à différentes heuristiques de calcul :

- simulation sur ordinateur,
- développement en série de Taylor,
- calcul des seuils inconditionnels,
- approche par majoration et approximation,
- et en dernier recours, la révision des hypothèses de base du modèle de Littlewood.

##### 7.4.1 - Calcul exact de $k_2$ et $k_3$

A - Pour un risque moyen donné  $r$ , la constante  $k_2$  doit satisfaire :

$$\text{Prob}[R(N=1) / N=2] = \text{Prob}[D_2 > k_2 D_1 / N=1] = r$$

Or la densité du couple  $D_1, D_2$  sous l'hypothèse que  $N=2$  est donnée par :

$$P[d_1, d_2 / N=2] = 2 \frac{\beta^2}{(\beta+d_1)^2 (\beta+d_2)^2}$$

avec  $0 < d_1 < d_2$  ( on a fixé  $\alpha = 1$  )

$$\begin{aligned} \text{Prob}[R(N=1) / N=2] &= \text{Prob}[D_2 > k_2 D_1 / n=2] \\ &= \int_0^{\infty} \int_{k_2 d_1}^{\infty} \frac{2 \beta^2 d(d_1, d_2)}{(\beta+d_1)^2 (\beta+d_2)^2} = r \\ &= \int_0^{\infty} \left[ \frac{2 \beta}{(\beta+d_1)^2} \int_{k_2 d_1}^{\infty} \frac{\beta d(d_2)}{(\beta+d_2)^2} \right] d(d_1) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{2 \beta d(d_1)}{(\beta+d_1)^2 (\beta+k_2 d_1)} \end{aligned}$$

Par décomposition en éléments simples de l'expression à intégrer on obtient :

$$\frac{2\beta}{(\beta+d_1)^2 (\beta+k_2 d_1)} = \frac{A}{\beta+d_1} + \frac{B}{(\beta+d_1)^2} + \frac{C}{\beta+k_2 d_1}$$

$$\text{avec } B = \frac{2\beta}{1-k_2}$$

$$C = \frac{2k_2^2}{(1-k_2)^2}$$

$$\text{et } A + \frac{C}{k_2} = 0$$

$$\text{Or } \int_0^{\infty} \frac{B}{(\beta+d_1)^2} d(d_1) = \frac{B}{\beta} = \frac{2}{1-k_2}$$

Pour tout  $D > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \int_0^D \left( \frac{A}{\beta+d_1} + \frac{C}{\beta+k_2 d_1} \right) d(d_1) &= A \cdot \log\left(\frac{\beta+D}{\beta}\right) + \frac{C}{k_2} \log\left(\frac{\beta+k_2 D}{\beta}\right) \\ &= \frac{C}{k_2} \log\left(\frac{\beta+k_2 D}{\beta+D}\right) \end{aligned}$$

$$\text{et } \lim_{D \rightarrow +\infty} \frac{C}{k_2} \log\left(\frac{\beta+k_2 D}{\beta+D}\right) = \frac{C}{k_2} \log(k_2) = \frac{2k_2}{(1-k_2)^2} \log(k_2)$$

d'où la définition de  $k_2$  :

$$\frac{2k_2}{(1-k_2)^2} \log(k_2) + \frac{2}{1-k_2} = r$$

B - Quant à la constante  $k_3$ , elle doit satisfaire :

$$\text{Prob}[R(N=2) / N=3] + \text{Prob}[R(N=1) / N=3] = r = 1 - \text{Prob}[R(N > 3) / N=3]$$

C'est-à-dire :

$$\text{Prob}[D_2 < k_2 D_1, D_3 > k_3 D_2 / N=3] + \text{Prob}[D_2 > k_2 D_1 / N=3] = r$$

Le calcul explicite de la constante  $k_3$  est présenté en appendice A.2.

L'équation finale donnant  $k_3$  est :

$$\frac{3(r-1)(k_2-k_3)}{(k_2-1)(k_3-1)} + \frac{6k_3}{(k_3-1)^2} \left[ 1 - \frac{k_2 \log(k_2)}{k_2-1} - \frac{k_3 \log(k_3)}{k_3-1} + \frac{k_2 k_3 \log(k_2 k_3)}{k_2 k_3 - 1} \right] = r$$

### 7.4.2 - Exemple numérique

Pour un risque moyen  $r = 0.05$ , nous obtenons :

$$k_2 = 167 \text{ et } k_3 = 83,67 \approx 84$$

En posant :

$$\begin{aligned} d_1 &= t_1 \\ d_2 &= t_1 + t_2 \end{aligned}$$

Nous obtenons la première règle d'arrêt :  $t_2 > 166 t_1$  que nous pouvons comparer à celle obtenue à partir du modèle JM:  $t_2 > 38 t_1$ .

Nous pouvons donc remarquer à quel point l'hypothèse de taux de défaillances distincts et équidistribués proposée par Littlewood semble beaucoup plus pessimiste dans la mesure où nous sommes conduit à tester le système beaucoup plus longtemps que ne le recommandait le modèle JM, avant de le valider.

Les difficultés de calculs des constantes  $k_i$  pour  $i > 3$  peuvent déjà être estimées au nombre toujours croissant d'intégrales à calculer qui interviennent en passant d'un itéré à l'autre, tel de  $k_2$  à  $k_3$ . Signalons seulement que le calcul de  $k_n$ , connaissant  $k_2, \dots, k_{n-1}$  met en jeu une intégrale multiple d'ordre  $n$ , telle que :

$$1 - r = \int_0^\infty \int_{\dots}^{k_2 d_1} \int_{d_{n-2}}^{k_{n-1} d_{n-2}} \int_{d_{n-1}}^{k_n d_{n-1}} \frac{n!}{(1+d_1)^2 (1+d_2)^2 \dots (1+d_n)^2}$$

avec  $0 < d_1 < d_2 < \dots < d_n$

## 7.5 - Heuristiques de calcul des seuils

### A - Recours au développement en serie de Taylor

Notons  $S_j(n) = \text{Prob}[D_2 < k_2 D_1, \dots, D_j < k_j D_{j-1} / N = n]$

On obtient :

$$1 - S_j(n) = \text{Prob}[D_2 > k_2 D_1 / N=n] + \sum_{\ell=2}^{j-1} \text{Prob}[D_2 < k_2 D_1, \dots, D_\ell < k_\ell D_{\ell-1}, D_{\ell+1} > k_{\ell+1} D_\ell / N=n]$$

Pour  $n > 3$  et  $j < n$ .

Nous allons essayer d'établir une relation de récurrence liant les  $S_j(n)$ .

Supposons connues les constantes  $k_2, \dots, k_{n-1}$ , il s'agit alors de déterminer  $k_n$ . Sans perte de généralité nous poserons  $\beta = 1$  dans la formule donnant la densité des variables  $D_1, \dots, D_n, \dots$  car  $\beta$  s'élimine dans l'expression de la règle d'arrêt.

Posons  $k_j = \frac{1}{1 - s_j}$  avec  $0 < s_j < 1$

Il vient alors que :

$$\begin{aligned} & \text{Prob}[D_2 < k_2 D_1, \dots, D_{j-1} < k_{j-1} D_{j-2}, D_j > k_j D_{j-1} / N = n] \\ &= \frac{n!}{(n-j)!} \int_0^\infty \int_{d_1}^{k_2 d_1} \int_{d_{j-2}}^{k_{j-1} d_{j-2}} \int_{k_j d_{j-1}}^\infty \frac{1}{(1+d_j)^{n-j}} \prod_{i=1}^j \frac{1}{(1+d_i)^2} = q_j(n) \end{aligned}$$

car la loi marginale de  $(D_1, \dots, D_j)$  est donnée par :

$$P[d_1, \dots, d_j / N=n] = \frac{n!}{(n-j)!} \frac{1}{(1+d_j)^{n-j}} \prod_{i=1}^j \frac{1}{(1+d_i)^2}$$

avec  $0 < d_1 < \dots < d_j$  et  $1 < j < n$   
 or

$$\int_{k_j d_{j-1}}^{\infty} \frac{1}{(1+d_j)^{n-j+2}} = \frac{1}{n-j+1} \frac{1}{(1+k_j d_{j-1})^{n-j+1}}$$

$$= \frac{1}{n-j+1} \frac{1}{(1-s_j)^{n-j+1}} \frac{1}{(1 + \frac{s_j}{d_{j-1}})^{n-j+1}}$$

car  $k_j = \frac{1}{1-s_j}$

or  $\frac{1}{(1-u)^n} = \sum_{\ell > 0} C_{n-1+\ell}^{n-1} u^\ell$  avec  $0 < u < 1$

alors  $\frac{1}{(1 - \frac{s_j}{1+d_{j-1}})^{n-j+1}} = \sum_{\ell > 0} C_{n-j+1+\ell}^{n-j} \frac{s_j^\ell}{(1+d_{j-1})^\ell}$

Cette série est uniformément convergente car  $0 < \frac{s_j}{(1+d_{j-1})} < 1$

Alors  $q_j^{(n)}$  devient :

$$q_j^{(n)} = \frac{n!}{(n-j+1)!} (1-s_j)^{n-j+1} \sum_{\ell > 0} s_j^\ell C_{n-j+1}^{n-j} \frac{(n+\ell-j+1)!}{(n+\ell)!} P[d_1, \dots, d_{j-1} / N=n+\ell]$$

L'intégration est faite sur le domaine :

$$D = \{D_1 > 0, D_1 < D_2 < k_2 D_1, \dots, D_{j-1} < k_{j-1} D_{j-2}\}$$

D'où la définition de  $S_{j-1}(n+\lambda)$

$$q_j(n) = \frac{n!}{(n-j+1)!} (1-s_j)^{n-j+1} \sum_{\lambda > 0} s_j^\lambda C_{n-j+\lambda}^{n-j} \frac{(n+\lambda-j+1)!}{(n+\lambda)!} S_{j-1}(n+\lambda)$$

or

$$q_j(n) = \text{Prob}[D_2 < k_2 D_1, \dots, D_{j-1} < k_{j-1} D_{j-2}, D_j > k_j D_{j-1} / N=n]$$

$$1 - S_j(n) = 1 - \text{Prob}[D_2 < k_2 D_1, \dots, D_j < k_j D_{j-1} / N=n]$$

$$= \text{Prob}[D_2 > k_2 D_1 / N=n] + \sum_{\lambda=3}^j \text{Prob}[D_2 < k_2 D_1, \dots, D_{\lambda-1} < k_{\lambda-1} D_{\lambda-2}, D_\lambda > k_\lambda D_{\lambda-1} / N=n]$$

$$q_j(n) = [1 - S_j(n)] - [1 - S_{j-1}(n)] = S_{j-1}(n) - S_j(n)$$

d'où

$$S_{j-1}(n) - S_j(n) = \frac{n!}{(n-j+1)!} (1-s_j)^{n-j+1} \sum_{\lambda > 0} s_j^\lambda C_{n-j+\lambda}^{n-j} \frac{(n+\lambda-j+1)!}{(n+\lambda)!} S_{j-1}(n+\lambda)$$

$$S_j(n) = S_{j-1}(n) - C_n^{j-1} (1-s_j)^{n-j+1} \sum_{\lambda > 0} s_j^\lambda \frac{C_{n-j+\lambda}^{n-j}}{C_{j-1}^{n+\lambda}} S_{j-1}(n+\lambda)$$

avec :

$$1 - S_2(n) = \text{Prob}[D_2 > k_2 D_1 / N=n]$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{n!}{k_2 d_1 (n-2)!} \frac{1}{(1+d_2)^{n-2}} \frac{1}{(1+d_1)^2 (1+d_2)^2}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{n}{(1+d_1)^2 (1+k_2 d_1)^{n-1}}$$

en posant  $k_2 = \frac{1}{1-s_2}$  avec  $0 < s_2 < 1$

On obtient :

$$\frac{1}{(1+k_2 d_1)^{n-1}} = \frac{(1-s_2)^{n-1}}{(1-s_2+d_1)^{n-1}} = \frac{(1-s_2)^{n-1}}{(1+d_1)^{n-1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{s_2}{1+d_1}\right)^{n-1}}$$

Or :

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{s_2}{1+d_1}\right)^{n-1}} = \sum_{\ell > 0} C_{n-2+\ell}^{n-2} \frac{s_2^\ell}{(1+d_1)^\ell}$$

D'où :

$$\begin{aligned} 1-S_2(n) &= \int_0^{\infty} \sum_{\ell > 0} n C_{n-2+\ell}^{n-2} \frac{s_2^\ell (1-s_2)^{n-1}}{(1+d_1)^{\ell+2+n-1}} \\ &= \sum_{\ell > 0} n C_{n-2+\ell}^{n-2} s_2^\ell \int_0^{\infty} \frac{(1-s_2)^{n-1}}{(1+d_1)^{\ell+n+1}} \\ &= \sum_{\ell > 0} \frac{n C_{n-2+\ell}^{n-2}}{\ell+n} s_2^\ell (1-s_2)^{n-1} \\ &= n(1-s_2)^{n-1} \sum_{\ell > 0} \frac{C_{n-2+\ell}^{n-2}}{\ell+n} s_2^\ell \end{aligned}$$

d'où :

$$S_2(n) = 1 - n(1-s_2)^{n-1} \sum_{\lambda > 0} \frac{C_{n-2+\lambda}^{n-2}}{n+\lambda} s_2^\lambda$$

Remarquons que :

$$1 - S_1(n) = \text{Prob}[R(N=0) / N=n > 0] = 0$$

$$\text{Car } R(N=0) = \emptyset$$

$$\text{D'où } S_1(n) = 1 \quad \forall n > 1$$

A ce titre, la formule suivante :

$$S_j(n) = S_{j-1}(n) - C_n^{j-1} (1-s_j)^{n-j+1} \sum_{\lambda > 0} s_j^\lambda \frac{C_{n-j+\lambda}^{n-j}}{C_{j-1}^{j-1} n+\lambda} S_{j-1}(n+\lambda)$$

demeure valable pour tout  $j > 2$  et  $n > j$ .

Or  $S_j(n)$  est la probabilité de ne pas arrêter les essais avant la manifestation de la  $j$  ième défaillance pour un programme avec  $n$  erreurs initiales.

$$\text{Alors } S_n(n) = \text{Prob}[D_2 < k_2 D_1, \dots, D_n < k_n D_{n-1} / N=n]$$

est la probabilité de ne pas valider à tort un système avec  $n$  erreurs initiales, d'où :

$$S_n(n) = 1-r$$

Ce qui donne les formules de récurrence suivantes :

$$S_j(n) = S_{j-1}(n) - C_n^{j-1} (1-s_j)^{n-j+1} \sum_{\lambda > 0} s_j^\lambda \frac{C_{n-j+\lambda}^{j-1}}{C_{n+\lambda}^{j-1}} S_{j-1}(n+\lambda)$$

et cela  $\forall j > 2, \forall n > j$

avec  $S_n(n) = 1-r$

$S_1(n) = 1 \quad \forall n > 1$

### A - Exemple

$$\text{Pour } j=n=2 \text{ on a } S_2(2) = 1-r = 1-2 \sum_{\lambda > 0} \frac{s_2^\lambda}{2+\lambda}$$

d'où :

$$r = 2(1-s_2) \sum_{\lambda > 0} \frac{s_2^\lambda}{2+\lambda}$$

$$= 2 \frac{(1-s_2)}{s_2^2} \sum_{\lambda > 0} \frac{s_2^{2+\lambda}}{2+\lambda} = 2 \frac{(1-s_2)}{s_2^2} \sum_{\lambda > 2} \frac{s_2^\lambda}{\lambda}$$

$$\text{Or } -\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^n}{n} + \dots$$

Pour tout  $0 < x < 1$

d'où :

$$r = \frac{2(1-s_2)}{s_2^2} [ -\log(1-s_2) - s_2 ]$$

$$= 2 \frac{(1-s_2)}{s_2^2} \log \left( \frac{1}{1-s_2} \right) - \frac{2(1-s_2)}{s_2}$$

$$\text{Or } k_2 = \frac{1}{1-s_2} \rightarrow s_2 = \frac{k_2-1}{k_2} \rightarrow \frac{s_2}{1-s_2} = k_2-1$$

$$\text{d'où } r = 2 \frac{k_2}{(k_2-1)^2} \log(k_2) - \frac{2}{k_2-1} = \frac{2k_2 \cdot \log(k_2)}{(1-k_2)^2} + \frac{2}{1-k_2}$$

On retrouve l'équation définissant  $k_2$ .

Les formules de récurrence que nous venons d'établir devraient permettre le calcul itératif des quantités  $s_2, s_3, s_n, \dots$  desquelles sera déduite la suite  $k_2, k_3, \dots, k_n, \dots$

Cependant ces formules font intervenir des séries numériques infinies. Leur sommation conduit à des dérivés logarithmiques de différents ordres de sorte que l'implémentation sur ordinateur de telles séries s'empêtre assez vite dans un imbroglio de problèmes de stabilité numérique, d'erreurs d'arrondi ou de précision et voire même des problèmes de dépassement de capacité de la mémoire allouée aux calculs. La troncature de ces séries fausse la séquence des seuils car les bornes de troncature doivent dépendre de chaque étape de calcul.

Il a donc fallu recourir à un autre procédé de résolution.

### B - Les seuils Markoviens - Les seuils inconditionnels

Outre la complexité liée au modèle de Littlewood, la difficulté des calculs est aussi liée à la nature de la règle d'arrêt proposée. En effet, à chaque étape, la décision à prendre conserve la mémoire de l'histoire du comportement du logiciel éprouvé (ie :  $k_j = f_j(k_2, \dots, k_{j-1})$  et le seuil  $x_j = g[f_j, T_1, \dots, T_j]$ ).

Nous allons relaxer cette contrainte en ne considérant qu'une décision de type Markovien. Ceci se justifie par la nature markovienne des processus  $D_1, \dots, D_2, \dots, D_n$ .

En effet :

$$\begin{aligned} P[d_j / d_1, \dots, d_{j-1} ; n] &= \frac{P[d_1, \dots, d_j / n]}{P[d_1, \dots, d_{j-1} / n]} \\ &= (n-j+1) \frac{(1+d_{j-1})^{n-j+1}}{(1+d_j)^{n-j+2}} \\ &= P[d_j / d_{j-1} ; n] \end{aligned}$$

Il s'en suit que :

$$\begin{aligned} \text{Prob}[D_j > k_j D_{j-1} / D_{j-1} ; n] &= \int_{k_j D_{j-1}}^{\infty} P[d_j / d_{j-1} ; n] \\ &= \left( \frac{1+d_{j-1}}{1+k_j d_{j-1}} \right)^{n-j+1} \end{aligned}$$

Si nous posons  $k_j = \frac{1}{1-s_j}$  avec  $0 < s_j < 1$ , on obtient :

$$\text{Prob}[D_j > k_j D_{j-1} / D_{j-1} ; n] = (1+d_{j-1})^{n-j+1} \frac{(1-s_j)^{n-j+1}}{(1+d_{j-1})^{n-j+1} \left(1 - \frac{s_j}{1+d_{j-1}}\right)^{n-j+1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1-s_j)^{n-j+1}}{\left(1 - \frac{s_j}{1+d_{j-1}}\right)^{n-j+1}} \\
&= (1-s_j)^{n-j+1} \sum_{\lambda > 0} C_{n-j+\lambda}^{n-j} \frac{s_j^\lambda}{(1+d_{j-1})^\lambda} \\
&= \alpha(j, n) ;
\end{aligned}$$

Posons  $E[\alpha(j, n)] = \int \dots \int \alpha(j, n) P[d_1, d_2, \dots, d_{j-1} / n]$

avec  $0 < d_1 < d_2 < \dots < d_{j-1}$

$$E[\alpha(j, n)] = \int \dots \int \alpha(j, n) \frac{n!}{(n-j+1)!} \frac{1}{(1+d_{j-1})^{n-j+1}} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{1}{(1+d_i)^2}$$

$$0 < d_1 < \dots < d_{j-1}$$

$$= \sum_{\lambda > 0} (1-s_j)^{n-j+1} C_{n-j+\lambda}^{n-j} s_j^\lambda \int \dots \int \frac{n!}{(n-j+1)!} \frac{1}{(1+d_{j-1})^{n-j+1+\lambda}} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{1}{(1+d_i)^2}$$

$$\text{Or } P[d_1, \dots, d_{j-1} / n+\lambda] = \frac{(n+\lambda)!}{(n+\lambda-j+1)!} \frac{1}{(1+d_{j-1})^{n-j+1+\lambda}} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{1}{(1+d_i)^2}$$

$$\text{et } \int \dots \int P[d_1, \dots, d_{j-1} / n+\lambda] = 1$$

Il s'en suit que :

$$E[\alpha(j,n)] = \sum_{\ell > 0} (1-s_j)^{n-j+1} C_{n-j+\ell}^{n-j} s_j^\ell \frac{n!}{(n-j+1)!} \frac{(n+\ell-j+1)!}{(n+\ell)!} \dots P[d_1 \dots d_j \leq 1/n]$$

$$= \sum_{\ell > 0} (1-s_j)^{n-j+1} C_{n-j+\ell}^{n-j} s_j^\ell \frac{C_n^{j-1}}{C_{n+\ell}^{j-1}}$$

enfin 
$$E[\alpha(j,n)] = (1-s_j)^{n-j+1} C_n^{j-1} \sum_{\ell > 0} \frac{C_{n-j+\ell}^{n-j}}{C_{n+\ell}^{j-1}} s_j^\ell$$

$$= \text{Prob}[D_j > k_j D_{j-1} / n]$$

Si l'on oublie, à chaque étape, les seuils précédents, on obtient les seuils inconditionnels suivants :

$k_n$  vérifie  $\text{Prob}[D_n > k_n D_{n-1} / n] = r_n$

$$= (1-s_n) \sum_{\ell > 0} \frac{s_n^\ell}{C_{n+\ell}^{n-1}}$$

et  $\text{Prob}[D_n > k_n D_{n-1} / n] = n!(1-s_n) \sum_{\ell > 0} \frac{(\ell+1)!}{(n+\ell)!} s_n^\ell$

Or 
$$\frac{(\ell+1)!}{(n+\ell)!} = \frac{1}{(\ell+2)(\ell+3)\dots(\ell+n)} = \prod_{j=0}^{n-2} \frac{1}{n+\ell-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{A_j}{n+\ell-j}$$

avec

$$A_m = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{n-2} \frac{1}{m-j}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \text{Prob}[D_n > k_n D_{n-1} / n] &= n! (1-s_n) \sum_{\lambda > 0} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{s_n^\lambda}{n+\lambda-j} \\ &= n! (1-s_n) \sum_{j=0}^{n-2} \left( \sum_{\lambda > 0} \frac{s_n^\lambda}{n+\lambda-j} \right) \\ &= n! (1-s_n) \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{s_n^{n-j}} \left( \sum_{\lambda > 0} \frac{s_n^{n+\lambda-j}}{n+\lambda-j} \right) \\ &= n! (1-s_n) \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{s_n^{n-j}} \left[ -\log(1-s_n) - \sum_{m=1}^{n-j-1} \frac{s_n^m}{m} \right] \end{aligned}$$

D'où

$$r_n = \text{Prob}[D_n > k_n D_{n-1} / n] = \frac{n!(1-s_n)}{s_n^n} \sum_{j=0}^{n-2} s_n^j \left[ -\log(1-s_n) - \sum_{m=1}^{n-j-1} \frac{s_n^m}{m} \right]$$

$$r_n = n! \frac{1-s_n}{s_n^n} \log\left(\frac{1}{1-s_n}\right) \sum_{j=0}^{n-2} s_n^j - \frac{n!(1-s_n)}{s_n^n} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-j-1} \frac{s_n^m}{m}$$

Or pour  $0 < s_n < 1$  on a

$$\sum_{j=0}^{n-2} s_n^j = 1 - \frac{1-s_n^{n-1}}{1-s_n}$$

d'où

$$r_n = n! \frac{1-s_n^{n-1}}{s_n^n} \log\left(\frac{1}{1-s_n}\right) - \frac{n!(1-s_n)}{s_n^n} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-j-1} \frac{s_2^m}{m}$$

Vérifions pour  $n=2$

$$\begin{aligned} r_2 &= 2 \frac{1-s_2}{s_2^2} \log\left(\frac{1}{1-s_2}\right) - \frac{2(1-s_2)}{s_2^2} s_2 \\ &= 2 \frac{1-s_2}{s_2^2} \log\left(\frac{1}{1-s_2}\right) - \frac{2(1-s_2)}{s_2^2} = \frac{2k_2 \log k_2}{(1-k_2)^2} + \frac{2}{1-k_2} \end{aligned}$$

qui est bien l'équation correspondant à la définition de  $k_2$ .

### Exemple numérique

A titre d'exemple nous donnons les cinq premières valeurs obtenues par ce procédé pour  $r_n = r = 5\%$  pour tout  $n > 1$

$$\begin{array}{ll} k_1 = +\infty & \\ k_2 = 167 & d_2 > 167 d_1 \\ k_3 = 54 & d_3 > 54 d_2 \\ k_4 = 38 & d_4 > 38 d_3 \\ k_5 = 32 & d_5 > 32 d_4 \end{array}$$

Ces seuils conduisent à une règle d'arrêt qui demeure plus pessimiste que celle déduite du modèle JM. Par contre le risque associé ne correspond plus au processus de debugging dans son intégralité.

### C - Recours à la simulation

Partant d'un bon générateur de nombre pseudo aléatoires régis par une distribution uniforme sur  $[0,1]$ , nous pouvons générer un échantillon de

variables aléatoires  $D_1, D_2, \dots, D_N, \dots$

En effet, le lemme suivant justifie ce passage.

**Lemme 1** : Etant donné une variable aléatoire  $T$  dont la fonction de répartition est continue :  $F(t) = \text{Prob}[T < t]$ , alors la variable aléatoire  $U$  définie par  $u = F(t)$  a une distribution uniforme sur l'intervalle  $[0,1]$ .

**Preuve** : Cela tient simplement à la relation suivante  $\forall x \in [0,1]$ ,

$$\begin{aligned} \text{Prob}[u < x] &= \text{Prob}[F(t) < x] \\ &= \text{Prob}[t < F^{-1}(x)] \\ &= F[F^{-1}(x)] = x \end{aligned}$$

( $F^{-1}$  est la fonction inverse de  $F$ ,  $F(t)$  étant supposée croissante).

Soit l'intervalle de temps séparant l'occurrence de l'erreur numéro  $i-1$  de celle de l'erreur numéro  $i$  au cours des essais de debugging du logiciel.

Le modèle de Littlewood permet d'écrire :

$$\text{Prob}(T_{i+1} > t_{i+1}) = 1 - F(t_i) = \left[ \frac{\beta + d_i}{\beta + d_i + t_{i+1}} \right]^{(n-i)\alpha} = u_i$$

avec  $d_{i-1} = t_1 + t_2 + \dots + t_{i-1}$

Ici nous nous restreignons à  $\alpha = 1$  ; le type de règles de décision qui nous concerne nous permettra de supposer  $\beta = 1$

$u_i$  (autant que  $1-u_i$ ) suit une loi uniforme sur  $[0,1]$ .

$$\frac{\beta + d_i}{\beta + d_i + t_{i+1}} = u_i \frac{1}{n-i}$$

$$\text{d'où } t_{i+1} = (\beta + t_1 + t_2 + \dots + t_i) \left[ (u_i)^{n-i} - 1 \right]$$

$$\text{c-a-d } d_{i+1} = d_i + (\beta + d_i) \left[ (u_i)^{n-i} - 1 \right]$$

$$d_{i+1} > k_i d_i \text{ entraîne } 0 < k_{i-1} < \left( \frac{\beta}{d_i} + 1 \right) \left[ (u_i)^{n-i} - 1 \right]$$

Nous avons procédé de la façon suivante :

- A une étape  $i$  où il faut approcher la valeur de  $k_n$ , on génère une série de trajectoires suivant la formule ci-haut:

$$T_i = \{D_1^{(i)}, \dots, D_n^{(i)}\} \quad i = 1, \dots, M$$

On estime  $\text{Prob}[D_2^{(i)} < k_2 T_1^{(i)}, \dots, D_n^{(i)} < k_n^{(i)} D_{n-1}^{(i)}]$ , par la proportion de trajectoires  $T_i$  satisfaisant  $\{D_2^{(i)} < k_2 T_1^{(i)}, \dots, D_n^{(i)} < k_n^{(i)} D_{n-1}^{(i)}\}$ , soit PM cette proportion

A ce stade on suppose que  $k_2, \dots, k_{n-1}$  sont connus. Le choix de  $k_n$  se fait au sein des candidats  $k_n^{(j)}$  satisfaisant :

$$\{D_2^{(i)} < k_2 D_1^{(i)}, \dots, D_n^{(i)} < k_n^{(j)} D_{n-1}^{(i)}\} \quad (R)$$

et tels que  $\text{PM} = \frac{\text{MS}}{M} = 95 \%$

où MS est le nombre de trajectoires satisfaisant à la relation (R), M le nombre total de trajectoires générées et  $k_n = \inf \{k_n^{(j)}\}$ ,  $j \in T_n^*$

où  $T_n^*$  est l'ensemble des trajectoires de taille  $n$  satisfaisant la relation (R).

En pratique, il a fallu non moins de  $M = 5000$  trajectoires pour estimer chaque itéré  $k_j$ . De plus cette méthode s'est avérée numériquement instable et assez coûteuse sur ordinateur. Nous pouvons néanmoins présenter les cinq premières constantes obtenues :

### Exemple numérique

Pour un risque  $r = 0.05$  on obtient :

$$\begin{array}{ll}
 k_1 = +\infty & \\
 k_2 = 168.43 & \text{d'où } X_2 = 167.43 t_1 \\
 k_3 = 60.22 & X_3 = 117.44 t_1 + 58.22 t_2 \\
 k_4 = 34.83 & X_4 = 100.49 t_1 + 66.66 t_2 + 32.83 t_3 \\
 k_5 = 25.45 & X_5 = 96.80 t_1 + 72.35 t_2 + 47.90 t_3 + 23.45 t_4
 \end{array}$$

On peut remarquer, tout au moins pour le calcul de  $k_2$ , que la méthode de simulation commet une erreur relative de 0.009. (le  $k_2$  théorique vaut 166,99)

Ces différentes élucubrations infructueuses nous ont conduit à reconsidérer quelques fondements du modèle de Littlewood.

Ce qui va suivre relève essentiellement de la statistique Bayésienne dont nous rappelons avant tout quelques notions de base.

## 8 - QUELQUES NOTIONS FONDAMENTALES DE STATISTIQUE BAYESIENNE

Nous présentons ici quelques notions élémentaires mais néanmoins essentielles à la compréhension de l'inférence Bayésienne que nous adopterons par la suite.

### 8.1 - Probabilité conditionnelle

Soit  $(\Omega, P(\Omega), P)$  un espace probabilisé fini ; soient A et B deux évènements avec  $P[B] \neq 0$ , le quotient :

$$P[A / B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

est appelé probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

Le point important est que pour B fixé, l'application notée  $P[. / B]$  qui prend la valeur  $P[A / B]$  pour tout évènement A dans  $\Omega$ , est une mesure de probabilité.

(  $A \cap B$  est l'intersection des deux ensembles A et B )

### 8.2 - Formule de Bayes

Si A et B sont deux évènements de  $\Omega$  tels que  $P[A] \neq 0$  et  $P[B] \neq 0$ , on peut écrire les relations entre probabilité et probabilité conditionnelle sous une forme appelée loi de multiplication :

$$P[A \cap B] = P[B].P[A / B]$$

et

$$P[A \cap B] = P[A].P[B / A]$$

en éliminant  $P[A \cap B]$ , on obtient la relation appelée formule de Bayes.

$$P[A / B] = \frac{P[A] \cdot P[B / A]}{P[B]}$$

### 8.3 - Le théorème de Bayes

C'est une extension de la règle précédente à une famille d'évènements  $A_i$  constituant une partition de  $\Omega$ . On l'appelle famille complète d'évènements :

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j ; \bigcup_{i=1, n} A_i = \Omega$$

Tout évènement B peut s'écrire  $B = \bigcup_{i=1, n} (A_i \cap B)$  où les éléments de la réunion sont disjoints ; par conséquent :

$$P[B] = \sum_{i=1}^n P[A_i \cap B]$$

si l'on a  $P[A_i] \neq 0$  pour tout i, la loi de multiplication conduit à la formule suivante, appelée loi des probabilités totales ou loi de probabilité inconditionnelle :

$$P[B] = \sum_{i=1}^n P[A_i] P[B / A_i]$$

Par application à  $P[B]$  de la loi de probabilité inconditionnelle on obtient le théorème suivant appelé théorème de Bayes.

#### 8.4 - Théorème

Soient  $(A_1, \dots, A_n)$  une famille complète d'évènements telle que  $P[A_i] \neq 0 \forall i$  ; et soit B un évènement tel que  $P[B] \neq 0$ . Alors on a pour tout i :

$$P[A_i / B] = \frac{P[A_i] P[B / A_i]}{\sum_{i=1}^n P[A_i] P[B / A_i]}$$

En considérant les évènements  $A_i$  comme des causes probables de la réalisation de l'évènement B, on dit alors que les probabilités  $P[A_i]$  constituent les **probabilités a priori** de ces causes, tandis que les probabilités  $P[A_i / B]$  définissent les **probabilités a posteriori** de ces mêmes causes. Le passage des unes aux autres se fait à travers une expérience qui

permet de mesurer les probabilités conditionnelles  $P[B / A_i]$  définissant ainsi la réalisation de l'évènement B sachant que la cause  $A_i$  s'est réalisée.

• Evènements indépendants

Deux évènements A et B sont dits indépendants si  $P[A \cap B] = P[A].P[B]$

8.5 - Loi a priori et loi a posteriori : un cas litigieux

Les partisans des méthodes Bayésiennes et les défenseurs des méthodes classiques ne semblent pas avoir trouvé un terrain d'entente. Les premiers recommandent d'orienter une expérience selon l'idée a priori que l'on se fait des données à analyser, prétextant ainsi faire une économie appréciable tandis que les seconds reprochent justement à ces premiers cette idée intuitive démarrant une analyse.

Etant donné une statistique T dont la loi de probabilité P est indicée par un paramètre inconnu  $\theta \in R$ , on appelle loi a priori toute loi attribuée avant expérience sur  $\theta$ ; soit  $P_\theta$ . A la suite d'une expérience E où l'on a observé quelques réalisations de la statistique T, on peut "rectifier", le tir vis-à-vis de la loi du paramètre  $\theta$  grâce à la loi a posteriori qui tire profit de cette information supplémentaire :

Soit :

$$P[\theta / E] = \frac{P_\theta \cdot P[E / \theta]}{\int_{\Delta} P_\theta \cdot P[E / \theta] d\theta}$$

$\Delta$  est l'espace des paramètres.

Il reste à se demander sur quoi se fonde l'information a priori, quelle est l'importance réalisée, et aussi, c'est peut-être le point le plus

délicat, quelle signification concrète peut-on attribuer à l'information a posteriori résultant d'un constat sur échantillon ? Assez curieusement, il paraît aussi difficile de répondre à cette critique portée contre l'école Bayésienne autant qu'il ne paraît pas évident pour les partisans de l'école classique de prouver la stricte validité d'un modèle. Loin d'alimenter cette querelle nous jugerons plutôt sur les résultats apportés par chacun des deux types d'inférence, quand bien même nous pensons toutefois : chassez l'intuition, ... et voilà qu'elle revient à pas de loup...

## 9 - LOI A PRIORI ET REGLE D'ARRET

Une question se pose : la loi a priori est-elle de bon aloi ? Il est vrai qu'une part d'arbitraire intervient dans le choix d'une loi a priori en statistique Bayésienne. Le modèle de Littlewood n'échappe pas à cette critique. Nous avons donc cherché à voir la répercussion de ce choix sur le caractère optimiste ou pessimiste de la règle d'arrêt.

Nous essayons ici d'analyser la sensibilité de la règle d'arrêt aux différentes valeurs de  $\alpha$ , paramètre de forme de la loi a priori sur les taux de défaillance du programme.

### 9.1 - Formulation du problème

Nous nous sommes contentés de calculer pour chaque essai le premier pas de la règle d'arrêt.

Considérons un système avec deux erreurs de taux respectifs  $\lambda_1, \lambda_2$  dont la distribution a priori est notée  $P_0$  ; soient  $D_1, D_2$  les dates respectives d'apparition de ces erreurs. La loi conjointe de ce couple est donnée par :

$$P[D_1, D_2 / \lambda_1, \lambda_2] = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 d_1 - \lambda_2 d_2} + \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 d_1 - \lambda_1 d_2}$$

car la première erreur peut aussi bien être associée à  $\lambda_1$  qu'à  $\lambda_2$ .  
d'où :

$$\text{Prob}[D_2 > k_2 D_1 / \lambda_1, \lambda_2] = \lambda_1 e^{-(\lambda_1 + k_2 \lambda_2) d_1} + \lambda_2 e^{-(\lambda_2 + k_2 \lambda_1) d_1}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit} \quad \text{Prob}[D_2 > k_2 D_1] &= \int_0^{\infty} \text{Prob}[D_2 > k_2 D_1 / \lambda_1, \lambda_2] d(d_1) \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 k_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + k_2 \lambda_1} \\ &= \frac{1}{1 + k_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \frac{1}{1 + k_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = H(k_2, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}) \end{aligned}$$

La probabilité inconditionnelle  $\text{Prob}[D_2 > k_2 d_1]$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Prob}[D_2 > k_2 d_1] &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(k_2, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}) P_0(\lambda_1) P_0(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{P_0(\lambda_1) P_0(\lambda_2)}{1 + k_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned}$$

car  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  jouent des rôles symétriques dans H.

Faisons le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 \\ v &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \end{aligned}$$

auquel est associé le Jacobien  $\frac{D(\lambda_1, \lambda_2)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = |u|$

l'intégrale devient :

$$\begin{aligned}
 \text{Prob}[D_2 > k_2 d_1] &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{2}{1 + k_2 v} u P_0(uv) P_0(u) du dv \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{2}{1 + k_2 v} \left[ \int_0^{\infty} u P_0(uv) P_0(u) du \right] dv \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{2P(v)}{1 + k_2 v} dv
 \end{aligned}$$

où 
$$P(v) = \int_0^{\infty} u P_0(uv) P_0(u) du$$

La première règle d'arrêt ne dépend alors que de la loi du rapport  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

A - Si nous prenons pour  $P_0$  une loi gamma de paramètres de forme  $\frac{\lambda_1}{\alpha}$  (le facteur d'échelle peut être fixé à 1).

$$P_0(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} \quad x > 0$$

alors

$$\begin{aligned}
 P[v] &= \int_0^{\infty} u P(uv) P(u) du = \int_0^{\infty} u \frac{(uv)^{\alpha-1} e^{-uv}}{\Gamma(\alpha)} \frac{u^{\alpha-1} e^{-u}}{\Gamma(\alpha)} du \\
 &= \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha)} \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{2\alpha}}
 \end{aligned}$$

Posons 
$$x = \frac{1}{1+v}; \quad 0 < x < 1$$

Il vient alors que 
$$P[v] = \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\alpha-1} = B(x)_{(\alpha, \alpha)}$$

où  $B(x)$  est la loi Béta de paramètres  $a$  et  $b$ .  
 $(a, b)$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \text{Prob}[D_2 > k_2 d_1] &= \int_0^{\infty} \frac{2P(v)}{1 + k_2 v} dv \\ &= \frac{2}{B(\alpha, \alpha)} \int_0^{\infty} \frac{v^{\alpha-1}}{(1+k_2 v)(1+v)^{2\alpha}} dv \end{aligned}$$

$$\text{où } B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \text{ est la fonction bêta}$$

$$\text{Posons } k_2 = \frac{1}{1-s} \text{ avec } 0 < s < 1$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+k_2 v} &= \frac{1-s}{1-s+v} = \frac{1-s}{(1+v)} \frac{1}{1-\frac{s}{1+v}} \\ &= \frac{1-s}{(1+v)} \sum_{\lambda > 0} \left(\frac{s}{1+v}\right)^{\lambda} \\ &= (1-s) \sum_{\lambda > 0} \frac{s^{\lambda}}{(1+v)^{\lambda+1}} \end{aligned}$$

d'où

$$\text{Prob}[D_2 > k_2 d_1] = 2 \frac{(1-s)}{B(\alpha, \alpha)} \sum_{\lambda > 0} s^{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{v^{\alpha-1} dv}{(1+v)^{2\alpha+\lambda+1}}$$

En posant  $x = \frac{1}{1+v}$  on obtient

$$\begin{aligned} \text{Prob}[D_2 > k_2 d_1] &= \frac{2(1-s)}{B(\alpha, \alpha)} \sum_{\lambda > 0} s^\lambda \int_0^\infty x^{\alpha+\lambda} (1-x)^{\alpha-1} dx \\ &= 2(1-s) \sum_{\lambda > 0} s^\lambda \frac{B(\alpha, \alpha+\lambda+1)}{B(\alpha, \alpha)} \\ &= 2(1-s) \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)^2} \sum_{\lambda > 0} s^\lambda \frac{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}{\Gamma(2\alpha+\lambda+1)} \end{aligned}$$

## 9.2 - Calculs

A) Pour  $\alpha = 1$ .

Remarquons que pour  $\alpha=1$ , c'est à dire la loi exponentielle, on retrouve :

$$\text{Prob}[D_2 > k_2 d_1 / N=2] = 2(1-s) \sum_{\lambda > 0} \frac{s^\lambda}{\lambda+2}$$

$$= 2 \frac{(1-s)}{s^2} \left[ \log \frac{1}{1-s} - s \right]$$

comme

$$k_2 = \frac{1}{1-s}$$

$$= \frac{2k_2 \log k_2}{(1-k_2)^2} + \frac{2}{k_2} = r$$

qui confirme le résultat obtenu précédemment.

B) Pour  $\alpha = 0.5$ .

$$\text{Prob}[D_2 > k_2 d_1 / N=2] = 2(1-s) \sum_{\lambda > 0} s^\lambda \frac{\Gamma(1) \Gamma(\frac{1}{2} + \lambda + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(1 + \lambda + 1)}$$

Or  $\Gamma(\lambda + \lambda + 1) = (\lambda + 1)!$  et  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$$\Gamma(\frac{1}{2} + \lambda + 1) = \frac{(2\lambda + 2)! \sqrt{\pi}}{2^{2\lambda + 2} (\lambda + 1)!}$$

d'où 
$$\text{Prob}[D_2 > k_2 d_1 / N=2] = \frac{1-s}{2} \sum_{\lambda > 0} \left(\frac{s}{4}\right)^\lambda \frac{(2\lambda + 2)!}{(\lambda + 1)! (\lambda + 1)!}$$

$$= \frac{1-s}{2} \sum_{\lambda > 0} C_{2(\lambda + 1)}^{\lambda + 1} \left(\frac{s}{4}\right)^\lambda$$

dont la solution approchée, pour  $r = 5\%$  donne :

$$k_2 = \frac{1}{1-s} = 1520$$

Soit  $D_2 > 1520 D_1$ , c-à-d  $T_2 > 1519 T_1$ .

Ce qui donne une règle encore plus pessimiste que celle obtenue pour  $\alpha = 1$ .

### C $\alpha$ tend vers zéro

Nous essayons maintenant de montrer qu'il existe une distribution  $P(v)$  ne dépendant que du rapport  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  qui assure à la règle d'arrêt un caractère bien plus pessimiste encore que celui qui est obtenu pour  $\alpha = 0.5$ .

Loin de pouvoir le démontrer formellement nous nous contentons d'exhiber un exemple qui confortera cette hypothèse.

L'intégrale  $\int_0^{\infty} \frac{2 v^{\alpha-1} dv}{(1+k_2 v) (1+v)^{2\alpha}}$  est définie pour tout  $\alpha > 0$ . Nous nous

intéresserons au cas  $\alpha = 0$  qui attribue au rapport des taux de défaillance  $v = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  une distribution appelée valeur principale de cauchy :

$$p_A(v) = \frac{1}{2 \log(A)} \frac{1}{v} ; 0 < \frac{1}{A} < v < A$$

où  $A$  est la borne supérieure accordée aux variations de  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

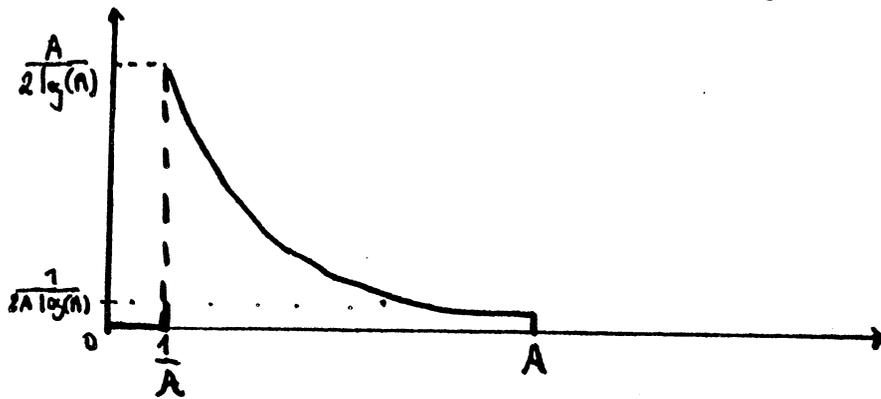


Figure 22

Dans ce cas :

$$\text{Prob}[D_2 > k_2 d_1 / N=2] = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(A)} \int_{\frac{1}{A}}^A \frac{dv}{v(1+k_2 v)}$$

$$\text{Or} \quad \frac{1}{(1+k_2v)v} = \frac{a}{v} + \frac{b}{1+k_2v}$$

avec  $a = 1 = -\frac{b}{k_2}$  ; il s'en suit que :

$$\begin{aligned} \text{Prob}[D_2 > k_2 d_1 / N=2] &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(A)} \left[ 2 \log A - \log \left( \frac{1+k_2A}{k_2+A} \right) A \right] \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ 1 - \frac{\log \left( \frac{1+k_2A}{k_2+A} \right)}{\log(A)} \right] = 1 \end{aligned}$$

On voit donc que la limite, au sens des distributions, de la suite  $P_A$ ,  $A \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ , finit par accorder un risque maximum à la décision d'arrêt ceci indépendamment de la constante  $k_2$ . Une telle distribution assure que quelque soit le temps d'attente de la seconde erreur, la manifestation de cette dernière demeure toujours presque sûre, de sorte que toute décision d'arrêt est presque sûrement erronée. Nous pouvons alors considérer que l'utilisation d'une telle distribution assure le risque maximal ; ce qui constitue alors l'exemple que nous envisagions d'exhiber.

Remarquons que pour une tolérance du rapport  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  (ou  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ ) définie sur  $\left[ \frac{1}{A}, A \right]$  si l'on désire assurer un risque  $r$  à la règle d'arrêt établie avec la distribution  $P_A$  (dont la limite  $A \rightarrow +\infty$ , assure le risque maximum) on obtient alors pour  $k_2$  :

$$k_2 = \frac{A^{2-r} - 1}{A(1 - \frac{1}{A^r})} ; A > 0 ; 0 < r < 1$$

( $k_2 \rightarrow +\infty$  si  $A \rightarrow +\infty$ )

### 9.3 - Un cas limite du modèle de Littlewood : le modèle JM

Revenons maintenant à l'expression première du premier pas de la règle de décision :

$$\begin{aligned} \text{Prob}[D_2 > k_2 d_1 / N=2] &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{P(x) P(y) dx dy}{1+k_2 \frac{y}{x}} \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x}{x+k_2 y} P(x) P(y) dx dy \end{aligned}$$

Prenons pour  $P_0$  la masse de Dirac en  $\phi > 0$

$$P_0(x) = \delta_{\phi}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \phi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

il vient alors que

$$\text{Prob}[D_2 > k_2 d_1 / N=2] = \frac{1}{1+k_2} = r$$

Pour  $r = 5\%$  on trouve  $k_2 = 39$  soit  $D_2 > 39D_1$ . C'est à dire  $T_2 + T_1 > 39T_1$  donc  $T_2 > 38T_1$  qui est le premier pas de la règle d'arrêt sur le modèle JM. Remarquons que ce cas intervient dans le modèle de Littlewood lorsque  $\alpha \rightarrow +\infty$  et  $\beta \rightarrow +\infty$  avec :

$\frac{\alpha}{\beta} = \phi$  qui est le taux de défaillance moyen ; dans ce cas la loi du

rapport  $v = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  est une masse de Dirac concentrée en  $v = \frac{\phi}{\phi} = 1$  ;

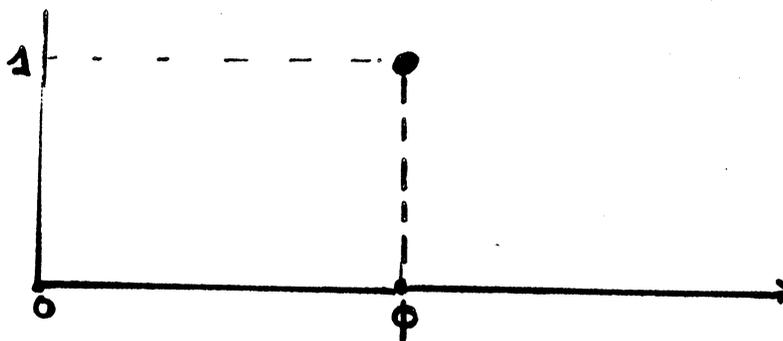


Figure 23

#### 9.4 - Discussion

Ces quelques exemples témoignent de la sensibilité de la règle d'arrêt vis-à-vis de la loi a priori qui est employée pour décrire le processus de manifestation des erreurs. A ce titre nous considérons que les caractères optimistes ou pessimistes manifestés par les modèles ne sont qu'une conséquence du choix plus ou moins arbitraire des lois sur lesquelles sont basées leurs inférences. Pour le cas particulier du modèle de Littlewood, par exemple, nous avons vu comment s'échelonnaient les degrés de pessimisme de la règle d'arrêt suivant les différentes valeurs du paramètre  $\alpha$  au sein de la famille des lois gamma. Une question demeure : que choisir ?...

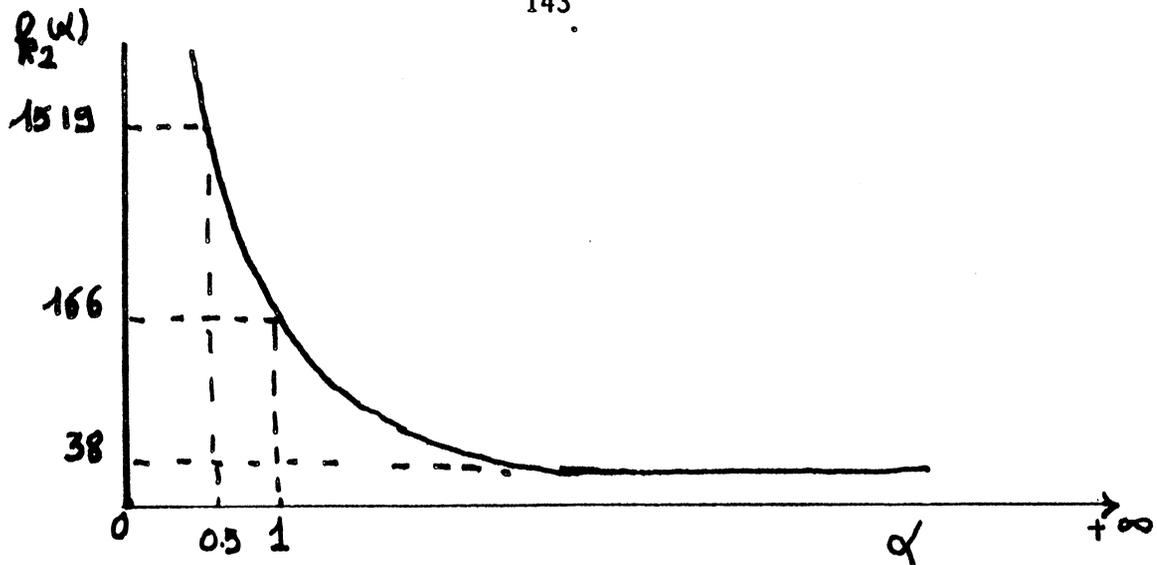


Figure 24

## 10 - ALTERNATIVE AU MODELE DE LITTLEWOOD : UN PROBLEME DE STATISTIQUE BAYESIENNE

Outre les difficultés de calculs inhérentes au modèle de Littlewood, la discussion précédente a mis en lumière la sensibilité de la règle d'arrêt vis-à-vis de la loi a priori sur les taux de défaillance.

Nous n'allons pas d'avantage nous enfoncer dans cette voie. Nous proposons par contre une autre méthodologie dans l'application de la règle d'arrêt au modèle de Littlewood.

### 10.1 - Inférence Bayésienne sur le nombre de défauts résiduels

En fait le modèle de Littlewood n'est que partiellement Bayésien. En effet, chaque système est caractérisé par les paramètres suivants :

- N le nombre de défauts en incubation dans le système au départ des essais de débogging,
- la suite aléatoire donnant les N taux de défaillance auxquels prétendra le système :  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ .

Le comportement auquel tend le système est modélisé par une famille de lois gamma de paramètres  $(\alpha, \beta)$ . Celle-ci étant jugée a priori on peut donc considérer qu'elle caractérise l'équipe de conception dont est issu le système en question.

Le modèle de Littlewood effectue un apprentissage de ce comportement probable grâce à une inférence Bayésienne appliquée sur les taux de défaillance successifs. En revanche la source d'incertitude due au paramètre inconnu  $N$ , nombre d'erreurs initiales, est traitée de façon déterministe. Or rien n'interdit d'entreprendre un apprentissage Bayésien de ce paramètre inconnu qui, tout autant que la suite des taux de défaillance, peut aussi être considéré comme aléatoire. La règle d'arrêt qui s'en suivra portera sur la probabilité a posteriori d'un nombre d'erreur résiduelle nul après un certain délai de fonctionnement sans défaillance du système en question. Ceci nécessite avant tout de définir de façon plus ou moins arbitraire, convenons-le, une loi a priori sur le paramètre  $N$ . Nous avons retenu de façon empirique les deux distributions suivantes :

A - La loi uniforme sur l'ensemble des entiers naturels  $N$ . Ce choix modélise le fait que l'on ait aucune information a priori sur  $N$ .

$$\text{Prob}[N=n] = \frac{1}{1+M} I(n)_{[0,M]}$$

où  $I(n)_{[0,M]}$  est la fonction indicatrice de  $[0,M]$  qui vaut 1 si  $n \in [0,M]$  et 0 sinon;  $n$  étant un entier naturel.

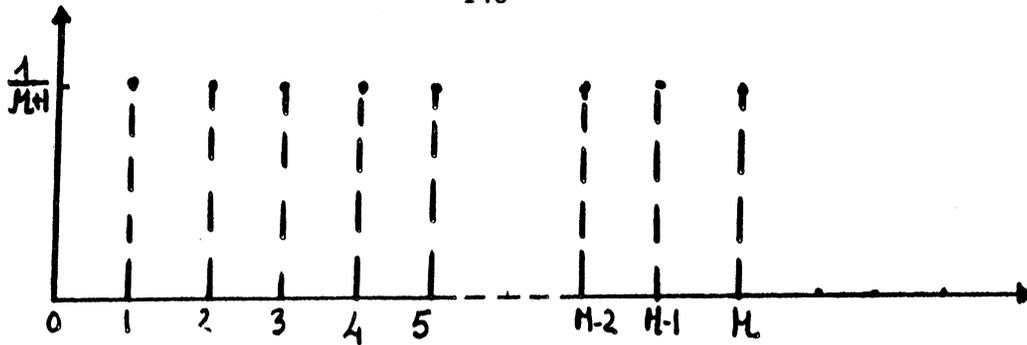


Figure 25

Cette distribution définit une mesure de Dirac sur l'ensemble des entiers naturels  $N$ .

B - La loi de Poisson de paramètre inconnu  $\gamma \in \mathbb{R}^+$ . Cette loi est souvent utilisée pour modéliser les différentes réalisations d'une variable aléatoire discrète.

$$P[N=n] = \frac{\gamma^n}{n!} e^{-\gamma} \quad n=0,1,2,\dots \quad \gamma > 0$$

Considérons d'abord ce dernier cas car certaines formules du premier modèle pourront en être facilement déduites.

A partir du modèle de Littlewood on obtient :

$$P[d_1, \dots, d_n / N=n] = n! \prod_{j=1}^n \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta + d_j)^{\alpha+1}}$$

Par intégrations successives, on déduit la loi marginale de  $D_1, D_2, \dots, D_j$

$$P[d_1, \dots, d_{i+1} / N=n] = \frac{n!}{(n-i-1)!} \frac{\alpha \beta^{(n-i)\alpha}}{(\beta + d_{i+1})^{(n-i)\alpha+1}} \prod_{j=1}^i \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta + d_j)^{\alpha+1}}$$

si  $i+1 < n$

= 0 sinon

$$\text{Prob}[d_1, d_2, \dots, d_i, D_{i+1} > y / N=n] = \frac{n!}{(n-i)!} \left[ \frac{\beta}{\beta+y} \right]^{(n-i)\alpha} \prod_{j=1}^i \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta+d_j)^{\alpha+1}}$$

si  $i+1 < n$

= 0 sinon

Or la loi conjointe de  $(d_1, \dots, d_i, N=n)$  est donnée par

$$\text{Prob}[d_1, d_2, \dots, d_i, D_{i+1} > y / N=n] = \frac{\gamma^n e^{-\gamma}}{n!} \cdot \frac{n!}{(n-i)!} \left( \frac{\beta}{\beta+y} \right)^{(n-i)\alpha} \prod_{j=1}^i \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta+d_j)^{\alpha+1}}$$

si  $i+1 < n$

= 0 sinon

La règle de Bayes donne la loi inconditionnelle :

$$\text{Prob}[d_1, d_2, \dots, D_{i+1} > y] = \sum_{n>i} \text{Prob}[d_1, \dots, d_i, D_{i+1} > y / N=n] P[N=n]$$

$$= \prod_{j=1}^i \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta+d_j)^{\alpha+1}} e^{-\gamma} \sum_{n>i} \frac{\gamma^n}{(n-i)!} \left( \frac{\beta}{\beta+y} \right)^{(n-i)\alpha}$$

$$= \prod_{j=1}^i \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta+d_j)^{\alpha+1}} e^{-\gamma} \gamma^i \sum_{n>i} \frac{\gamma^{n-i}}{(n-i)!} \left( \frac{\beta}{\beta+y} \right)^{(n-i)\alpha}$$

$$= e^{-\gamma} \prod_{j=1}^i \frac{\gamma \alpha \beta^\alpha}{(\beta+d_j)^{\alpha+1}} \sum_{\lambda>0} \frac{1}{j!} \left[ \gamma \left( \frac{\beta}{\beta+y} \right)^\alpha \right]^\lambda$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\gamma} e^{\gamma} \left(\frac{\beta}{\beta+y}\right)^{\alpha} \prod_{j=1}^i \frac{\gamma \beta^{\alpha}}{(\beta+d_j)^{\alpha+1}} \\
&= e^{-\gamma} \left[1 - \left(\frac{\beta}{\beta+y}\right)\right]^i \prod_{j=1}^i \frac{\gamma \beta^{\alpha}}{(\beta+d_j)^{\alpha+1}}
\end{aligned}$$

Enfin grâce au théorème de Bayes on obtient la loi a posteriori de N :

$$\begin{aligned}
P[N=n / d_1, d_2, \dots, d_i, D_{i+1} > y] &= \frac{P[d_1, \dots, d_i, d_{i+1} > y / N=n] P[N=n]}{P[d_1, d_2, \dots, d_i, d_{i+1} > y]} \\
&= \frac{\gamma^n e^{-\gamma}}{(n-i)!} \left(\frac{\beta}{\beta+y}\right)^{(n-i)\alpha} \gamma^{-i} e^{\gamma} \left[1 - \left(\frac{\beta}{\beta+y}\right)\right]^i \\
&= \left[\gamma \left(\frac{\beta}{\beta+y}\right)^{\alpha}\right]^{(n-i)} \frac{e^{-\gamma \left(\frac{\beta}{\beta+y}\right)^{\alpha}}}{(n-i)!} \\
&= \frac{\tilde{\gamma}^{n-i}}{(n-i)!} e^{-\tilde{\gamma}}
\end{aligned}$$

avec 
$$\tilde{\gamma} = \gamma \left(\frac{\beta}{\beta+y}\right)^{\alpha}$$

D'où nous pouvons avancer la proposition suivante :

**Proposition** : Partant d'une loi de Poisson de paramètre  $\gamma$  comme loi a priori sur N (le nombre d'erreurs initiales), la loi a posteriori du nombre

d'erreurs résiduelles  $(n-i)$ , après avoir détecté et corrigé  $i$  erreurs au bout d'un temps total d'essais égal à  $y$ , est encore une loi de Poisson de paramètre :

$$\tilde{\gamma} = \gamma \left( \frac{\beta}{\beta+y} \right)^\alpha$$

a - La règle d'arrêt Bayésienne

Le risque moyen encouru suite à la validation d'une famille de systèmes caractérisés par les paramètres  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , au bout d'un temps total d'essais égal à  $y$ , est tel que :

$$\text{Prob}[N=i / d_1, d_2, \dots, d_i, D_{i+1} > y] = 1-r$$

$$= e^{-\gamma \left( \frac{\beta}{\beta+y} \right)^\alpha}$$

Puisque  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont inconnus nous sommes amenés à estimer ces paramètres de façon appropriée.

b - Estimation des paramètres

Supposons qu'on ait détecté et corrigé  $i$  erreurs relatives à la séquence  $d_1, d_2, \dots, d_i$ . Nous voulons définir un temps total optimal  $y_{i+1}$  tel que si aucune défaillance ne survient dans l'intervalle  $]d_n, y_{i+1}[$  le système sera déclaré correct et l'on arrêtera l'essai avec une probabilité d'erreur égale à  $r$  ou de façon optimiste, l'essai sera arrêté avec une confiance égale à  $1-r$ .

Pour chaque temps  $y$  candidat à la valeur  $y_{i+1}$ , nous savons que  $i$  erreurs se sont déjà manifestées suivant la séquence  $d_1, d_2, \dots, d_i$  et que l'erreur suivante, si elle existe, ne s'est pas encore manifestée :  $d_{i+1} > y$ .

Nous proposons alors d'estimer  $\alpha, \beta, \gamma$  de façon à rendre maximum la vraisemblance du phénomène observé jusqu'à ce stade :

$$\text{Prob}[d_1, d_2, \dots, d_i, D_{i+1} > y / \alpha, \beta, \gamma]$$

et nous calculons

$$e^{-\gamma \left[ \frac{\beta}{\beta+y} \right]^\alpha}$$

Jusqu'à ce qu'une nouvelle défaillance se manifeste ou que cette quantité atteigne la valeur  $1-r$ .

Alors  $y_{n+1}$  vérifie :

$\alpha, \beta, \gamma$  rendent maximum  $P[d_1, d_2, \dots, d_n, d_{n+1} > y / \alpha, \beta, \gamma]$   
et

$$e^{-\gamma \left[ \frac{\beta}{\beta+y_{n+1}} \right]^\alpha} = 1-r$$

Soit  $L(\alpha, \beta, \gamma) = P[d_1, d_2, \dots, d_n, d_{n+1} > y / \alpha, \beta, \gamma]$

Posons  $\lambda(\alpha, \beta, \gamma) = \log[L(\alpha, \beta, \gamma)]$

alors  $\alpha, \beta, \gamma$  vérifient les équations de maximum de vraisemblance suivantes :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma} = 0$$

Les calculs conduisent aux résultats ci-après :

$$\gamma = \frac{n}{1-\psi} \quad \text{avec} \quad \psi = - \frac{\log(1-r)}{n-\log(1-r)}$$

$$\frac{n}{\alpha} = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^n \log \left[ 1 + \frac{d_i}{\beta} \right]$$

avec

$$\omega = 1 + \frac{\psi \log(\psi)}{1-\psi}$$

$\beta$  doit vérifier :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\beta - \alpha d_i}{\beta + d_i} = \alpha \cdot \frac{\psi}{1-\psi} \cdot \left( 1 - \psi^{\frac{1}{\alpha}} \right)$$

Une fois que le triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  solution des équations précédentes est obtenu on calcule alors  $y_{n+1}$ , le délai optimal

$$y_{n+1} = \beta \left[ \left( \frac{1}{\psi} \right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right]$$

### c - Le modèle JM Bayésien

Il peut arriver que les équations ci-dessus n'aboutissent pas à des estimateurs finis de  $\alpha$  et  $\beta$ . Dans ce cas, tel que l'a montré Littlewood [LIT 80] le rapport  $\frac{\alpha}{\beta}$  converge vers une constante  $\Phi$  qui peut être vue comme le taux de défaillance moyen du système. La loi a priori des taux de défaillance converge vers une masse de Dirac concentrée en  $\Phi$ . Le modèle de Littlewood se réduit alors à un modèle JM Bayésien avec les paramètres  $(N, \Phi)$ . Les équations ci-dessus se simplifient dans ce cas comme suit :

$$\Phi = \frac{\omega}{n \sum_{i=1}^n d_i}$$

et

$$y_{n+1} = \frac{-\log(\psi)}{\Phi} = -\frac{\log(\psi)}{\omega} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$$

$d_i = \sum_{j=1}^n t_j$  ;  $\omega$  et  $\psi$  gardent la même définition que ci-dessus.

### Cas A - La loi uniforme

Pour modéliser l'absence totale d'information a priori sur une variable aléatoire, il est plausible de prendre la distribution rectangulaire suivante :

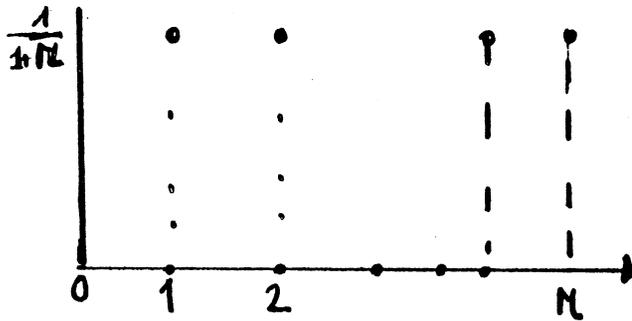


Figure 26

$$\text{Prob}[N=n] = \frac{1}{M+1} I(n)_{[0, M]}$$

La démarche inférentielle à suivre est la même que dans le cas B que nous venons de détailler. Il est intéressant de remarquer que la borne arbitraire  $M$  s'élimine de l'expression de la loi a posteriori de  $N$ .

$$\text{Prob}[N=n / d_1, d_2, \dots, d_i, D_{i+1} > y] = \frac{P[d_1, d_2, \dots, d_i, D_{i+1} > y / N=n] P[N=n]}{\sum_{j>i} P[d_1, d_2, \dots, d_i, D_{i+1} > y / N=j] \cdot P[n=j]}$$

Ce qui donne

$$= 0 \quad \text{si } n < i+1$$

$$= C_n^i (1-x)^i x^{n-i} \quad \text{sinon}$$

On obtient ainsi une loi binômiale négative (loi de Pascal) de paramètres  $i+1$  et  $x$ , avec :

$$x = \left( \frac{\beta}{\beta+y} \right)^\alpha$$

Proposition :

Partant d'une information vague (loi uniforme sur  $N$ ), la loi a posteriori du nombre d'erreurs résiduelles lorsqu'on a déjà détecté  $i$  erreurs durant un temps total d'essais égal à  $y$ , est une loi binômiale négative de paramètre  $x$  et  $i+1$  avec :

$$x = \left( \frac{\beta}{\beta+y} \right)^\alpha$$

### 1)- Estimation des paramètres

Comme dans le cas B, nous estimerons les paramètres inconnus  $\alpha$  et  $\beta$  de façon à maximiser :

$$\text{Prob}[d_1, d_2, \dots, d_i ; D_{i+1} > y]$$

tandis que  $y$  doit satisfaire :

$$\begin{aligned} \text{Prob}[N = i / d_1, \dots, d_i, D_{i+1} > y] &= 1-r \\ &= (1-x)^i \end{aligned}$$

$$\text{Soit } L(\alpha, \beta, y) = \text{Prob}[d_1, \dots, d_i, D_{i+1} > y / \alpha, \beta]$$

$$\text{et } \lambda(\alpha, \beta, y) = \log[L(\alpha, \beta, y)]$$

$\alpha$  et  $\beta$  vérifient

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = 0$$

On trouve les équations suivantes :

$$\frac{n}{\alpha} = \frac{1}{\omega} \sum_{j=1}^n \log\left(1 + \frac{d_j}{\beta}\right)$$

$$\text{avec } \omega = 1 + \frac{\psi}{1-\psi} \log(\psi)$$

$$\text{où } \psi = 1 - (1-r)^{\frac{1}{i}}$$

$$\beta \text{ est solution de } \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\beta - \alpha d_j}{\beta + d_j} = \alpha \frac{\psi}{1-\psi} \left[1 - \psi^{\frac{1}{\alpha}}\right]$$

y est alors donné par :

$$y = \mu \left[ \frac{1}{\alpha} - 1 \right]$$

On retrouve donc les mêmes formules données au cas B sauf pour l'expression donnant  $\psi$ . Comme nous l'avons évoqué précédemment, il peut arriver que l'échantillon de données collectées  $d_1, d_2, \dots, d_n$  ne permette pas d'obtenir des estimateurs finis de  $\alpha$  et  $\beta$ , dans ce cas le modèle de Littlewood dégénère en modèle JM Bayésien de paramètres  $\Phi$  et  $N$ . Les formules donnant  $\Phi$  et  $y$  restent les mêmes que celles qui ont été établies au cas B.

## 2) Application :

Nous avons écrit un programme, LITSAR, qui résout les équations ci-haut et qui délivre les temps optimaux  $y_i$  en fonction de l'échantillon des données de défaillance récoltées lors des essais de mise au point du logiciel. Ces applications sur des exemples de projets réels sont mentionnées dans la troisième partie de cet exposé.

## 11 - UN APERCU SUR LES STATISTIQUES D'ORDRE

Nous allons essayer de tirer parti des propriétés des statistiques d'ordre pour élaborer une règle d'arrêt. Pour cela nous présentons avant tout des propriétés générales que nous dériverons ensuite aux modèles JM et LB.

### 1 - PROPRIETES GENERALES

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$  un échantillon de taille  $n$  constitué de variables aléatoires indépendantes équidistribuées et positives.

Soit  $F$  la fonction de répartition de chacune des variables :

$$F(x) = \text{Prob}[X < x] = \int_0^x f(x) dx$$

Appelons  $D_j$  la  $j$  ième statistique d'ordre.

$D_j$  est une application définie comme suit :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow D_j(x_1, \dots, x_n) = x_{r_j}$$

avec

$$x_{r_1} < x_{r_2} < \dots < x_{r_n}$$

où  $(x_{r_1}, \dots, x_{r_n})$  est un échantillon obtenu en ordonnant l'échantillon initial  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

### Proposition 1

La loi de la statistique  $D_j$  est donnée par :

$$\text{Prob}[D_j < x] = \sum_{m=j}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} [F(x)]^m [1-F(x)]^{n-m}$$

Les démonstrations des propositions qui sont présentées dans cet aperçu peuvent être trouvées dans [FIS 80].

Soit  $I_1 = ]0, d_{j_1}]$ , ...,  $I_\ell = ]d_{j_{\ell-1}}, d_{j_\ell}]$ , ...,  $I_r = ]d_{j_r}, +\infty[$

avec

$$d_{j_i} = D_{j_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad 1 < j_1 < j_2 < \dots < j_r < n .$$

On définit alors:  $P_k = \int_{I_k} f(x) dx$  pour tout  $k=1, 2, \dots, r+1$

Proposition 2:

La loi conjointe de la statistique ordonnée  $(D_{j_1}, D_{j_2}, \dots, D_{j_r})$  issue d'un échantillon de taille  $n$  est donnée par :

$$P[dj_1, \dots, dj_r / n] = \frac{j_1^{j_1-1} j_2^{j_2-j_1-1} \dots j_r^{j_r-j_{r-1}-1} n^{n-j_r} \cdot P_1 \cdot P_2 \dots P_r \cdot P_{r+1} \cdot f(dj_1) \dots f(dj_r)}{(j_1-1)!(j_2-j_1-1)! \dots (j_r-j_{r-1}-1)!(n-j_r)!}$$

$$= \begin{cases} \text{si } 0 < dj_1 < dj_2 < \dots < dj_r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Corollaire : La loi conjointe des extrêmes  $(D_1, D_n)$  est donnée par :

$$P[D_1, D_n / n] = \begin{cases} n(n-1) \int_{d_1}^{d_n} f(x) dx^{n-2} f(d_1) f(d_n) & \text{si } D_1 < D_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2 - DERIVATION AU MODELE JM

Dans le cas du modèle JM, tel que nous l'avons présenté dans la première partie, la loi de l'échantillon initial (la suite des latences non ordonnées) est exponentielle.

$$P[X_j > x] = e^{-\lambda x} \quad x > 0 \quad \text{avec } \lambda > 0$$

Pour un programme avec  $N$  erreurs, la loi marginale de la statistique ordonnée (date d'apparition des erreurs)  $(D_1, D_2, \dots, D_j)$  est donnée par (cf

proposition 2):

$$P[D_1, D_2, \dots, D_j / N] = \frac{N!}{(N-j)!} e^{-\lambda d_j} \prod_{k=1}^j \lambda e^{-\lambda d_k} \text{ avec } 0 < d_1 < d_2 < \dots < d_j$$

Le corollaire précédent donne la loi des extrêmes :

$$P[D_1, D_n / N=n] = n(n-1) \left[ \int_{d_1}^{d_n} \lambda e^{-\lambda x} dx \right] \lambda e^{-\lambda d_n}$$

avec  $0 < D_1 < D_n$

$$= n(n-1) \left[ e^{-\lambda d_1} - e^{-\lambda d_n} \right] \cdot \lambda e^{-\lambda d_1} \cdot \lambda e^{-\lambda d_n}$$

### 2.1 - Calcul des seuils extrêmes

Pour un risque  $r$ , nous appelons seuil extrême le seuil  $k_{n1}$  défini à la même étape par :

$$\begin{aligned} \text{Prob}[D_n > k_{n1} D_1 / N=n] &= r \\ &= \int_0^{\infty} \int_{k_{n1} d_1}^{+\infty} P[d_1, d_n / N=n] \end{aligned}$$

En faisant le changement de variables suivant :

$y_1 = \lambda d_1$  et  $y_n = \lambda d_n$  on obtient

$$\begin{aligned} \text{Prob}[D_n > k_{n1} D_1] &= \text{Prob}[y_n > k_{n1} y_1] \\ &= \int_0^{\infty} \int_{k_{n1} y_1}^{\infty} P[y_1, y_n] dy_1 dy_n \end{aligned}$$

$$\text{Or } P\{y_1, y_n\} = n(n-1) (-1)^{\sum_{\lambda=0}^{n-2} C_{n-2}^{\lambda}} (-1)^{\lambda} e^{-(\lambda+1)y_1} e^{-(n-1-\lambda)y_n}$$

Il vient que :

$$\text{Prob}\{y_n > k_{n1} y_1\} = \sum_{\lambda=0}^{n-2} (-1)^{\lambda} C_{n-2}^{\lambda} \frac{1}{\lambda+1+(n-1-\lambda) k_{n1}} = r$$

Pour  $n=2$  on retrouve

$$\text{Prob}\{y_2 > k_{21} y_1\} = \frac{2}{1 + k_{21}} = r$$

Qui pour  $r = 5\%$  donne  $k_{21} = 39$

c'est à dire  $D_2 > 39 D_1$

soit  $T_2 > 38 T_1$

avec  $D_2 = T_2 + T_1$

$D_1 = T_1$

## 2.2 - Seuils inconditionnels

Les seuils inconditionnels sont définis de la façon suivante : pour un programme avec  $N$  erreurs initiales, à l'étape  $n$ , le seuil  $k_n$  vérifie :

$$\text{Prob}\{D_n > k_n D_{n-1} / N=n\} = r$$

Or d'après la proposition 2 on a :

$$P\{D_n, D_{n-1}\} = \frac{n!}{(n-2)!} P_1^{n-2} f(d_n) f(d_{n-1})$$

et  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

avec :

$$P_1 = \int_0^{d_{n-1}} f(x) dx = \int_0^{d_{n-1}} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda d_{n-1}}$$

d'où  $P[D_{n-1}, D_n] = n(n-1) [1 - e^{-\lambda d_{n-1}}]^2 e^{-\lambda d_n - \lambda d_{n-1}}$

On obtient alors pour  $k_n$  :

$$\text{Prob}[D_n > k_n D_{n-1}] = n(n-1) \sum_{\lambda=0}^{n-2} C_{n-2}^{\lambda} \frac{(-1)^\lambda}{1 + \lambda k_n} = r$$

### 3 - DERIVATION AU MODELE DE LITTLEWOOD

La loi initiale des latences non ordonnées est une loi de Paréto :

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{\beta}{\beta+x} \right)^{\alpha+1} \quad \text{avec } x > 0 \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

#### 3.1 - Seuils extrêmes

Comme il l'a été fait pour le modèle JM, on peut calculer la loi des dates extrêmes  $D_1$  et  $D_n$  pour un échantillon de taille  $n$  :

$$P[D_1, D_n / N=n] = n(n-1) \left[ \int_{d_1}^{d_n} \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{\beta}{\beta+x} \right)^{\alpha+1} dx \right] \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{\beta}{\beta+d_1} \right)^{\alpha+1} \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{\beta}{\beta+d_n} \right)^{\alpha+1}$$

$$\text{avec } 0 < D_1 < D_n$$

Le seuil extrême à l'étape  $n$  vérifie :

$$\begin{aligned} \text{Prob}[D_n > k_{n1} D_1 / N=n] &= \int_0^{\infty} \int_{k_{n1} d_1}^{\infty} P[d_1, d_n / N=n] \\ &= n \sum_{\ell=0}^{n-2} C_{n-1}^{\ell+1} (-1)^{n-2-\ell} \int_0^{\infty} \frac{\alpha dx}{(1+k_{n1}x)^{(\ell+1)\alpha} (1+x)^{(n-1-\ell)\alpha+1}} \end{aligned}$$

Pour  $n = 2$ ,  $\alpha = 1$  et  $r = 5\%$  on a :

$$\text{Prob}[D_2 > k_2 D_1] = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+k_{21}x)(1+x)^2} = 0.05$$

qui donne  $k_{21} = 167 = k_2$

### 3.2 - Seuils inconditionnels

La dérivation de la proposition 2 au modèle de Littlewood donne pour  $D_n$  et  $D_{n-1}$  la loi suivante :

$$P[D_{n-1}, D_n / N=n] = n(n-1) \left[ 1 - \left( \frac{\beta^{\alpha+1}}{\beta+d_{n-1}} \right)^{n-2} \right] \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{\beta^{\alpha+1}}{\beta+d_n} \right) \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{\beta^{\alpha+1}}{\beta+d_{n-1}} \right)$$

avec  $0 < D_{n-1} < D_n$

Le seuil inconditionnel à l'étape  $n$  se formule comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Prob}[D_n > k_n D_{n-1} / N=n] &= \int_0^{\infty} \int_{k_n d_{n-1}}^{\infty} P[d_n, d_{n-1} / N=n] \\ &= n(n-1) \sum_{\ell=0}^{n-2} C_{n-2}^{\ell} (1)^{\ell} \int_0^{\infty} \frac{\alpha dx}{(1+x)^{(\ell+1)\alpha+1} (1+k_n x)^{\alpha}} \end{aligned}$$

Ce qui donne une formule plus générale que celle qui a été établie précédemment pour ce même modèle.

Outre ce problème dû à la complexité structurelle des modèles, la règle d'arrêt proposée souffre d'un sérieux inconvénient lié à sa définition : le problème du temps d'attente de la première défaillance. En effet :

$$\text{Prob}[T_1 > x / N=1] = r$$

ne peut être calculé indépendamment des paramètres du modèle. Il convient donc d'envisager un critère d'arrêt suppléant cette lacune.

## 12 - LE PROBLEME DU TEMPS D'ATTENTE DE LA PREMIERE DEFAILLANCE

Dans les modèles de fiabilité présentés dans la première partie, on pourrait considérer l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $T_1$  :  $E[T_1]$  pour estimer la date d'arrivée de la première défaillance. Cependant cette quantité dépend des paramètres inconnus du modèle qu'on ne peut encore estimer à ce stade, puisqu'aucune donnée n'a encore été recueillie.

Le modèle JM, par exemple, donne :

$$E[T_1] = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{N \cdot \Phi} ;$$

Les deux paramètres  $N$  et  $\Phi$  sont inconnus. Quant au modèle de Musa :

$$E[T_1] = \frac{1}{B \cdot f \cdot \Phi \cdot N}$$

où  $B.f = C$  est une constante relativisant l'environnement des essais vis-à-vis de l'environnement opérationnel effectif du programme ; ici encore se pose le problème de l'estimation des paramètres du modèle :  $\phi, N$  et  $C$ .

De même le modèle de Littlewood [LIT 73] donne :

$$E[T_1] = \frac{\beta + t_0}{N\alpha - 1}$$

où  $t_0$  est la date actuelle, aucune erreur ne s'étant encore manifestée. Les paramètres du modèle,  $\alpha, \beta$  et  $N$  sont évidemment inconnus et nous n'avons aucun moyen de les estimer tant qu'aucune défaillance n'est survenue.

On voit donc à quel point le cas de la première défaillance constitue une véritable aporie. Ceci est un inconvénient majeur lorsque le logiciel à valider est fortuitement "parfait" car l'on ne pourra pas attendre indéfiniment cette première défaillance, qui vraisemblablement ne se manifestera pas, avant de prendre une décision d'arrêt.

Pour contourner cette difficulté nous avons eu recours à quelques procédés utilisés dans la théorie de la fiabilité des systèmes matériels. Nous adopterons une inférence Bayésienne pour évaluer la confiance à accorder à un système qui n'a pas failli depuis un certain temps sachant qu'on espère l'utiliser pour une durée de mission donnée. Il s'agit en fait d'exploiter le vieil adage : "pas de nouvelles, alors bonnes nouvelles". L'inférence Bayésienne n'échappe pas à la définition plus ou moins arbitraire d'une loi a priori. Nous conservons l'hypothèse plausible d'une arrivée des erreurs suivant un processus de Poisson de paramètre inconnu  $\lambda$ . Notre ignorance vis-à-vis de ce paramètre nous conduit au choix d'une loi a priori assez vague sur  $\lambda$  ; la loi uniforme sur  $[0, A]$  où  $A > 0$ , est une constante arbitraire.

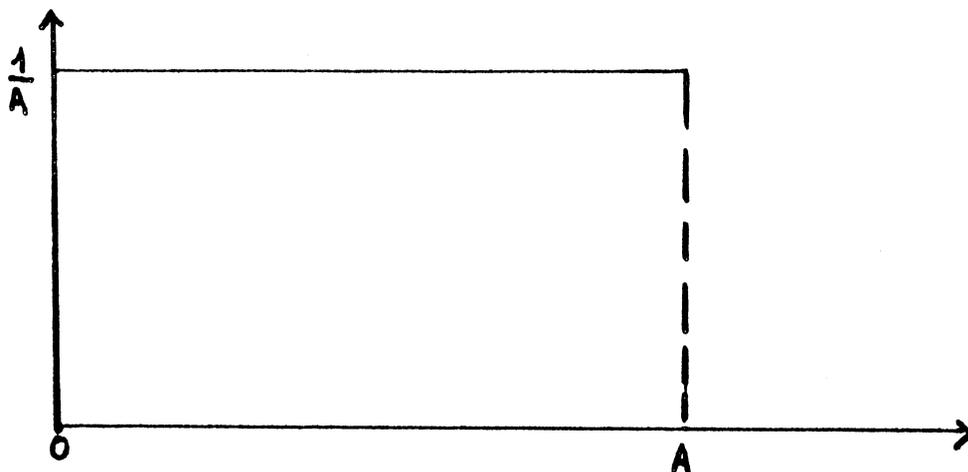


Figure 27

Pour une durée totale de mission égale à  $T$ , le nombre de défaillances probables suivant les hypothèses précédentes est  $M(T)$ , tel que :

$$\text{Prob}[M(T) = m_0] = \frac{(\lambda T)^{m_0}}{m_0!} e^{-\lambda T}$$

Considérons maintenant la période expérimentale où le système est soumis à des essais de debugging plus ou moins accélérés. Soit  $N(t)$  le processus de comptage du nombre d'occurrences de défaillances pendant les essais. Appelons  $C$  le facteur d'accélération du temps qui préfigure la représentativité des essais vis-à-vis du profil opérationnel effectif du système. Le taux de défaillance au cours des essais sera alors  $C \cdot \lambda$ .

Il vient que :

$$\text{Prob}[N(t) = n_0] = \frac{(Ct\lambda)^{n_0}}{n_0!} e^{-Ct\lambda}$$

La confiance recherchée s'évalue à partir de la loi conditionnelle suivante :

$$\text{Prob}[M(T) = m_0 / N(t) = n_0]$$

La règle de Bayes donne :

$$\text{Prob}[M(t) = m_0 / N(t) = n_0] = \frac{\frac{1}{A} \int_0^A \left(\frac{\lambda T}{m_0!}\right)^{m_0} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda t C)^{n_0}}{n_0!} e^{-\lambda t C} d\lambda}{\frac{1}{A} \int_0^A \frac{(\lambda t C)^{n_0} e^{-\lambda t C}}{n_0!} d\lambda}$$

Pour s'affranchir de la constante A, on fait  $A \rightarrow +\infty$  d'où la valeur moyenne:

$$\begin{aligned} \text{Prob}[M(T) = m_0 / N(t) = n_0] &= \frac{(Ct)^{n_0+1} T^{m_0}}{(T+Ct)^{m_0+n_0+1}} \frac{(m_0+n_0)!}{n_0! m_0!} \\ &= C^{n_0} \frac{(Ct)^{n_0+1} T^{m_0}}{n_0+m_0} \frac{1}{(Ct+T)^{n_0+m_0+1}} \end{aligned}$$

D'où la confiance recherchée : pas de défaillance au cours des essais :  
 $N(t) = n_0 = 0$ , alors aucune défaillance durant la mission :  $M(t) = m_0 = 0$

$$\text{Prob}[M(T) = 0 / N(t) = 0] > 1-r \quad r \in ]0,1[$$

C'est-à-dire :

$$\frac{Ct}{Ct+T} = \frac{1}{1 + \frac{T}{Ct}} > 1-r$$

soit :

$$t > \left( \frac{1}{r} - 1 \right) \cdot \frac{T}{C}$$

Pour  $r = 0.05$ , soit une confiance de  $1-r = 95 \%$ ,  $t > \frac{19}{C} \cdot T$

Ainsi pour atteindre une confiance au moins égale à 95 % sur la correction d'un système auquel il sera demandé une durée de mission égale à  $T$ , il faudra au cours des essais accélérer les sollicitations du système éprouvé de  $C$ -fois son utilisation normale ( $C$  est au moins égale à 19) et tester ainsi le système pendant une durée minimum égale à  $t = \frac{19}{C} T$ .

### 13-UN APERCU SUR LE MODELE DE LITTLEWOOD - VERRAL [LIT 80]

La supériorité substantielle du modèle de Littlewood - Verral a largement été prônée [MOA 81], [LIT 80]. En effet, d'un point de vue conceptuel, ce dernier modèle lève la plupart des objections qui sont portées à l'encontre des modèles de fiabilité à taux de défaillances que nous avons présentés dans la première partie de cet exposé. De plus, l'expérience montre que celui-ci fournit des ajustements significativement meilleurs que les modèles de MUSA et de Jelinski-Moranda.

Cependant la complexité structurelle de ce modèle rend sa mise en oeuvre assez difficile. En outre, dans le cadre d'une exigence de fiabilité, nous considérons que ce modèle est assez pessimiste dans ce sens qu'il demande des temps de validation pratiquement de l'ordre de grandeur de la durée de mission effective qui est assignée au produit à tester. L'utilisation d'un tel modèle aux essais de validation impliquerait alors de recourir à un procédé accélérant considérablement le cycle de vie du système en question.

Prenons pour appuyer cette assertion, l'exemple de l'estimation du taux de défaillance d'un système en cours de mise au point. Considérons qu'on ait déjà corrigé et détecté  $n$  erreurs. L'application du critère de maximum de vraisemblance au modèle de Littlewood - Verral donne entre autre la relation suivante liant les estimés des paramètres du modèle :

$$\alpha = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log\left[1 + \frac{t_i}{\psi(i)}\right]}$$

avec  $\psi(i) = \beta_1 + i\beta_2$

Le taux de défaillance moyen à l'étape suivante :  $E[\lambda_{n+1}^*]$  peut à ce stade-ci être estimé par :

$$\lambda_{n+1} = \frac{\alpha}{\psi(n+1)} = \frac{n}{\psi(n+1) \sum_{i=1}^n \log\left[1 + \frac{t_i}{\psi(i)}\right]}$$

Comme  $\psi(i) > 0$  et  $t_i > 0$  alors  $\log\left[1 + \frac{t_i}{\psi(i)}\right] < \frac{t_i}{\psi(i)}$

Il vient que  $\lambda_{n+1} > \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{\psi(n+1)}{\psi(i)} t_i}$

$$\text{Or } \frac{\psi(n+1)}{\psi(i)} = \frac{\beta_1 + (n+1)\beta_2}{\beta_1 + i\beta_2}$$

Si nous nous plaçons dans le cas favorable d'un logiciel qui accuse une croissance de fiabilité depuis le début des essais (hypothèse implicite du modèle JM) alors nous pouvons poser:

$\beta_1 > 0$  et  $\beta_2 > 0$

Dans ce cas de figure la fonction  $\frac{\Psi(n+1)}{\Psi(i)}$  est croissante en  $\beta_2$  et elle est décroissante par rapport à  $\beta_1$ . On obtient alors une bonne majoration de cette fonction en faisant  $\beta_1 \rightarrow 0$  et  $\beta_2 \rightarrow +\infty$   
d'où :

$$\frac{\Psi(n+1)}{\Psi(i)} < \frac{n+1}{i} \quad \text{pour tout } \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$$

On peut alors écrire :

$$\lambda_{n+1} > \frac{n}{n+1} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{i}} > \frac{n}{n+1} \frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i}$$

$$\lambda_{n+1} > \frac{n}{n+1} \frac{1}{D_n} \quad \text{avec } D_n = t_1 + t_2 + \dots + t_n$$

Si maintenant l'on exige d'arrêter les essais lorsque  $\lambda_{n+1} < 10^{-9} h^{-1}$ , on voit qu'il faudrait pour cela un temps minimum d'essai  $D_n$  tel que :

$$D_n > \frac{n}{n+1} 10^9 h \text{ soit un peu moins de } 100\,000 \text{ ans !}$$

La mise en oeuvre d'un tel modèle dans le cadre des essais en temps limité nécessiterait d'accélérer au moins 10 000 fois le temps de sollicitation du système à valider. De plus, ce modèle ne saurait traduire l'état parfait d'un programme si tant est qu'on puisse éventuellement l'atteindre.

Par contre, pour ce qui nous intéresse, nous pensons que nous pouvons tirer un bon parti de ce modèle dans le sens où l'indique le scénario suivant:

La règle d'arrêt TSAR fondée sur le modèle JM par exemple, appliquée à un processus de développement du logiciel, demande l'arrêt des essais. A ce moment, le modèle de Littlewood - Verral dont on aura simplement estimé les paramètres sur la base des données de défaillance observées, intervient pour fournir une indication du taux de défaillance du logiciel à l'instant présent. Ceci peut alors permettre de quantifier, moyennant ce dernier modèle, le risque encouru à la validation à tort d'un logiciel dont les essais sont gouvernés par la règle d'arrêt TSAR.

Toutefois ceci demeure une proposition dont il faudrait vérifier le bien-fondé sur la base d'un grand nombre d'essais.

### CONCLUSION

Dans cette partie qui constitue l'apport essentiel de cette thèse, nous avons établi une règle séquentielle d'arrêt d'un processus de vérification et validation du logiciel. Cette règle comporte une certaine originalité. En effet, elle autorise de fixer a priori le risque associé à une validation à tort du logiciel en question.

La règle d'arrêt proposée a été appliquée à deux modèles de fiabilité du logiciel : le modèle de Jelinski et Moranda [JEL 72] dont le type d'inférence relève de la statistique classique, le modèle de Littlewood [LIT 79b] qui fait partie de l'école Bayésienne.

La dérivation de la règle d'arrêt au modèle de Jelinski - Moranda fournit explicitement les fonctions de décisions exactes nécessaires à la bonne conduite des essais. Dans le cas particulier de ce premier modèle la règle d'arrêt présente l'avantage de s'affranchir du problème d'estimation des paramètres. La règle obtenue peut donc être tabulée une fois pour toute dès lors que l'on s'est fixé un risque de validation à tort.

Par contre, la dérivation de la règle au modèle de Littlewood s'est tout de suite enfoncée dans des difficultés de calculs liées à la complexité structurelle de ce modèle. De plus nous avons montré que cette règle était très sensible au choix de la loi a priori sur les taux de défaillance du logiciel. C'est pourquoi nous avons proposé une autre approche méthodologique de l'application de la règle d'arrêt au modèle de Littlewood. Nous avons adopté une inférence Bayésienne sur le nombre d'erreurs résiduelles qui est alors considéré comme une variable aléatoire. Cette dernière approche a pu aboutir.

Dans les deux cas de figure présentés ci-dessus, le problème du temps d'attente de la première défaillance reste posé. Nous avons toutefois proposé

une réponse qui, malgré tout demeure encore assez partielle devant l'exigence de sécurité assignée au système à valider.

Dans la partie qui suit nous soumettons les procédures inférentielles obtenues sur la base des deux modèles de fiabilité précités à des essais probatoires. Les exemples mis en oeuvre s'appuient sur des données de défaillance réelles issues de systèmes logiciels en cours de mise au point. Forts de ces exemples pratiques, nous pourrions alors établir une méthodologie d'application de la règle que nous proposons.

APPENDICE A.1Démonstration du théorème 1

Considérons le changement de variable inspiré par le test de rapport de vraisemblance utilisé dans la méthode évoquée précédemment :

$V_1 = \phi \cdot T_1$   
et pour  $n > 2$

$$V_n = \frac{\sum_{i=1}^n (n-i+1)\phi T_i}{\sum_{i=1}^{n-1} (n-i+1)\phi T_i} = \frac{\sum_{i=1}^n (n-i+1)T_i}{\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)T_i}$$

Les régions critiques associées à la décision d'arrêt s'en trouvent transformées de la façon suivante :

$$R(N=0) = 0$$

$$\text{Pour } n > 1 \quad R(N=n) = \{v_2 < k_2, \dots, v_3 < k_3, \dots, v_n < k_n, v_{n+1} > k_{n+1}\}$$

Où les  $k_i$  sont des constantes :

Il s'agit maintenant de montrer que l'on peut trouver une suite  $\{k_i\}$  telle que l'on ait pour tout  $n > 2$  et  $\phi$  :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \text{Prob}[R(N = i) / N = n, \phi] = r$$

où de façon équivalente  $\text{Prob}[D(N > n) / N=n, \phi] = 1-r$

Or la densité conjointe de la suite  $T_1, \dots, T_n$  pour tout  $N=n$  et  $\phi$  vaut :

$$\begin{aligned}
 P[t_1, \dots, t_n / N=n, \phi] &= \prod_{i=1}^n (n-i+1) \phi e^{-(n-i+1)\phi t_i} \\
 &= \phi^n \cdot n! e^{-\sum_{i=1}^n (n-i+1)\phi t_i}
 \end{aligned}$$

Le changement de variable ci-haut donne :

$$\sum_{i=1}^n (n-i+1) \phi t_i = \prod_{i=1}^n v_i$$

Pour  $m > 2$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m \phi t_i &= \sum_{i=1}^m (m-i+1) \phi t_i - \sum_{i=1}^{m-1} (m-i) \phi t_i \\
 &= \prod_{i=1}^m v_i - \prod_{i=1}^{m-1} v_i
 \end{aligned}$$

et pour  $m > 3$

$$\phi t_m = \sum_{i=1}^m \phi t_i - \sum_{i=1}^{m-1} \phi t_i = \prod_{i=1}^m v_i - 2 \prod_{i=1}^{m-1} v_i + \prod_{i=1}^{m-2} v_i$$

avec  $\phi t_2 = v_1 v_2 - 2v_1$

et  $\phi t_1 = v_1$

Ce changement de variable est triangulaire et l'on a :

$$\text{Pour } m > 2 \quad \frac{\partial t_m}{\partial v_m} = \frac{1}{\phi} \prod_{i=1}^{m-1} v_i$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial v_1} = \frac{1}{\phi}$$

$$\frac{\partial t_m}{\partial v_j} = 0 \text{ pour } j \neq m > 1$$

$$\text{d'où le Jacobien } \frac{\partial(t_1, \dots, t_n)}{\partial(v_1, \dots, v_n)} = \frac{1}{\phi^n} \prod_{i=1}^{n-1} v_i$$

Le domaine des variables  $t_m > 0$  se transforme en  $v_1 > 0, v_1; v_2 - 2v_1 > 0$

$$\text{Pour } m > 3 \quad \prod_{i=1}^m v_i - 2 \prod_{i=1}^{m-1} v_i + \prod_{i=1}^{m-2} v_i > 0$$

Soit :  $v_1 > 0$

$v_2 > 2$

et pour  $m > 3 \quad v_m > 2 - \frac{1}{v_{m-1}}$

La densité conjointe des nouvelles variables est indépendante du paramètre  $\phi$ .

$$P[v_1, v_2, \dots, v_n / N=n] = n! \prod_{i=1}^{n-1} v_i^{n-i} e^{-\prod_{i=1}^n v_i}$$

La variable  $v_1$  peut être éliminée du calcul par intégration sur celle-ci :

$$P[v_2, \dots, v_n / N=n] = \int_0^{\infty} P[v_1, \dots, v_n / N=n] dv_1$$

$$\begin{aligned}
 &= n! \frac{\prod_{i=2}^{n-1} v_i^{n-i}}{\prod_{i=2}^n v_i^n} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \\
 &= \frac{n! (n-1)!}{\prod_{i=2}^n v_i^i}
 \end{aligned}$$

Par intégration sur  $v_n$  on obtient la densité marginale :

$$\begin{aligned}
 P[v_2, \dots, v_{n-1} / N=n] &= \frac{n!(n-2)!}{\prod_{i=2}^{n-1} v_i^i} \int_0^{\infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{v_{n-1}}} \frac{n-1}{v_n^n} dv_n \\
 &= \frac{n!(n-2)!}{\prod_{i=2}^{n-1} v_i^i} \times \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{v_{n-1}}\right)^{n-1}} \\
 &= \frac{n!(n-2)!}{\prod_{i=2}^{n-2} v_i^i} \frac{1}{(2v_{n-1}-1)^{n-1}}
 \end{aligned}$$

Cette formule est valable pour  $n-1 \geq 2$  soit  $n \geq 3$ . Pour  $n=3$  on a :

$$P[v_2 / N=3] = \frac{3!}{(2v_2-1)^2}$$

Enfin, par récurrence si la densité marginale :

$P[v_2, \dots, v_{i+1} / N=n]$  vaut pour  $i+1 \geq n$  et  $i \geq 2$

$$P[v_2, \dots, v_{i+1} / N=n] = \frac{n! i!}{(n-i+1)!} \frac{1}{\prod_{j=2}^i v_j^j} \frac{1}{[(n-i)v_{i+1}^{-n+i+1}]^{i+1}}$$

Alors :

$$\begin{aligned} P[v_2, \dots, v_i / N=n] &= \frac{n!(i-1)!}{(n-i)!} \frac{1}{\prod_{j=2}^i v_j^j} \int_0^{\infty} \frac{i(n-i)dv_{i+1}}{2 - \frac{1}{v_i} [(n-i)v_{i+1}^{-n+i+1}]^{i+1}} \\ &= \frac{n!(i-1)!}{(n-i)!} \frac{1}{\prod_{j=2}^i v_j^j} \frac{1}{[(n-i) (2 - \frac{1}{v_i})^{-n+i+1}]^i} \end{aligned}$$

$$P[v_2, \dots, v_i / N=n] = \frac{n!(i-1)!}{(n-i)!} \frac{1}{\prod_{j=2}^{i-1} v_j^j} \frac{1}{[(n-i+1)v_i^{-n+i}]^i}$$

Il reste à démontrer par récurrence la suite des  $k_i$  ; on a :

$$r(2) = \text{Prob}[R(N=1) / N=2] = \text{Prob}[v_2 > k_2 / N=2] = r$$

Soit :

$$\int_{k_2}^{\infty} \frac{2}{v_2^2} dv_2 = \frac{2}{k_2} = r$$

$$\text{d'où} \quad k_2 = \frac{2}{r}$$

Supposons maintenant que pour tout  $i$  tel que  $2 \leq i \leq n-1$  la suite  $k_2, \dots, k_{n-1}$  déjà calculée vérifie :

$$r = \sum_{j=1}^{i-1} \text{Prob}[R(N=j) / N=i]$$

ou encore :

$$1-r = \text{Prob}[D(N > i) / N=i]$$

alors  $k_n$  doit vérifier :

$$r = \sum_{i=1}^{n-1} \text{Prob}[R(N=i) / N=n]$$

Le premier terme de cette somme donne :

$$\text{Prob}[R(N=1) / N=n] = \int_{k_2}^{\infty} n \frac{n-1 dv_2}{[(n-1)v_2 - n + 2]^2} = \frac{n}{(n-1)k_2 - n + 2}$$

Les autres termes donnent, en remarquant que :

$$R(N=i-1) = D(n > i-1) n \{v_i > k_i\}$$

$$\begin{aligned} \text{Prob}[R(N=i-1) / N=n] &= \int_{R(N=i-1)} \frac{n!(i-1)!}{(n-i)!} \frac{1}{\prod_{j=2}^{i-1} v_j} \frac{dv_2 dv_3 \dots dv_i}{[(n-i+1)v_i - n + i]^{i-1}} \\ &= \int_{D[N > i-1]} \frac{n!(i-2)!}{(n-i+1)!} \frac{dv_2 \dots dv_{i-1}}{\prod_{j=2}^{i-1} v_j} \int_{k_i}^{\infty} \frac{(i-1)(n-i+1)}{[(n-i+1)v_i - n + i]^{i-1}} dv_i \end{aligned}$$

Le deuxième terme de ce produit donne  $\frac{i-1}{[(n-i+1)k_i - n + i]^{i-1}}$

Quant au premier, on remarquera que le terme sous le signe intégrale vaut :

$$\frac{n!}{(n-i+1)!(i-1)!} P[v_2, \dots, v_{i-1} / N=i-1]$$

Or par hypothèse de récurrence :

$$\int_{D[N>i-1]} P[v_2, \dots, v_{i-1} / N=i-1] = 1-r$$

Donc :

$$\text{Prob}[R(N=i) / N=n] = \frac{C_n^{i-1} (1-r)}{[(n-i+1)k_{i-n+i}]^{i-1}} \text{ pour } 3 < i < n$$

En isolant le premier et dernier terme de la somme :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \text{Prob}[R(N=i) / N=n]$$

On doit avoir :

$$\frac{n}{(n-1)k_{2-n+2}} + \sum_{i=3}^{n-1} \frac{C_n^{i-1} (1-r)}{[(n-i+1)k_{i-n+i}]^{i-1}} + \frac{n(1-r)}{k_n^{n-1}} = r$$

En remplaçant  $k_2$  par sa valeur  $\frac{2}{r}$  il vient que :

$$r - \frac{n}{(n-1)k_{2-n+2}} = r - \frac{nr}{2(n-1) - (n-2)r} = \frac{r(1-r)(n-2)}{2(n-1) - (n-2)r}$$

En simplifiant par  $(1-r)$  on obtient enfin le résultat recherché :

$$\frac{n}{k_n^{n-1}} = \frac{(n-2)r}{2(n-1)-(n-2)r} - \sum_{i=3}^{n-1} \frac{C_n^{i-1}}{[(n-i+1)k_i^{-n+i}]^{i-1}}$$

avec  $\frac{2}{k_2} = r$

et  $\frac{3}{k_3^2} = \frac{r}{4-r}$   $r \in ]0,1[$

Le théorème est donc démontré par la construction explicite de la règle d'arrêt.

#### APPENDICE A.2

Pour le calcul du seuil  $k_3$ , la constante  $k_3$  doit vérifier :

$$\text{Prob}[D_3 > k_2 D_1, D_2 < k_2 D_1 / N=3] + \text{prob}[D_2 > k_2 D_1 / N=3] = r$$

où  $r$  est le risque associé à la validation à tort du logiciel,  $k_2$  est la constante associée à la décision à prendre à la deuxième étape du test.

La densité du triplet  $D_1, D_2, D_3$  sous l'hypothèse que  $N=3$  est :

$$P[d_1, d_2, d_3 / N=3] = 3! \frac{\beta^3}{(\beta+d_1)^2 (\beta+d_2)^2 (\beta+d_3)^2}$$

avec  $0 < d_1 < d_2 < d_3$

et la loi marginale du couple  $D_1$  et  $D_2$  est donnée par :

$$P[d_1, d_2 / N=3] = 3! \frac{\beta^2}{(\beta+d_1)^2 (\beta+d_2)^3}$$

$$0 < d_1 < d_2$$

Etant donné que le choix des fonctions de décisions linéaires élimine le facteur d'échelle  $\beta$  de la règle d'arrêt, nous pouvons donc, sans perte de généralité, poser  $\beta = 1$  dans les calculs permettant la définition de  $k_3$ . Ainsi nous avons la loi conjointe du triplet  $D_1, D_2, D_3$ .

$$P[d_1, d_2, d_3 / N=3] = \frac{6}{(1+d_1)^2 (1+d_2)^2 (1+d_3)^2}$$

$$\text{avec } 0 < d_1 < d_2 < d_3$$

$$\text{Posons } q_3 = \text{Prob}[D_2 < k_2 D_1, D_3 > k_3 D_2 / N=3]$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} \int_{d_1}^{k_2 d_1} \int_{k_3 d_2}^{\infty} \frac{6}{(1+d_1)^2 (1+d_2)^2 (1+d_3)^2} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{6}{(1+d_1)^2} \int_{d_1}^{k_2 d_1} \frac{1}{(1+d_2)^2 (1+k_3 d_2)} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{6}{(1+d_1)^2} f(d_1, k_2, k_3) \end{aligned}$$

$$\text{où } f(d_1, k_2, k_3) = \int_{d_1}^{k_2 d_1} \frac{1}{(1+d_2)^2 (1+k_3 d_2)}$$

Or :

$$\frac{1}{(1+d_2)^2 (1+k_3 d_2)} = \frac{A}{(1+d_2)^2} + \frac{B}{1+d_2} + \frac{C}{1+k_3 d_2}$$

$$\text{avec } A = -\frac{1}{k_3 - 1}$$

$$C = \frac{k_3^2}{(k_3-1)^2}$$

$$B + \frac{C}{k_3} = 0$$

d'où :

$$f(d_2, k_2, k_3) = \int_{d_1}^{k_2 d_1} \left[ -\frac{1}{k_3-1} \cdot \frac{1}{(1+d_2)^2} - \frac{k_3}{(k_3-1)^2} \cdot \frac{1}{1+d_2} + \frac{k_3^2}{(k_3-1)^2} \frac{1}{1+k_3 d_2} \right]$$

$$f(d_2, k_2, k_3) = \left[ \frac{1}{k_3-1} \cdot \frac{1}{1+d_2} - \frac{k_3}{(k_3-1)^2} \log(1+d_2) + \frac{k_3}{(k_3-1)^2} \log(1+k_3 d_2) \right]_{d_1}^{k_2 d_1}$$

$$= \frac{1}{k_3-1} \left[ \frac{1}{1+k_2 d_1} - \frac{1}{1+d_1} \right] - \frac{k_3}{(k_3-1)^2} \log\left(\frac{1+k_2 d_1}{1+d_1}\right) + \frac{k_3}{(k_3-1)^2} \log\left(\frac{1+k_2 k_3 d_1}{1+k_3 d_1}\right)$$

$$= \frac{1-k_2}{k_3-1} \frac{d_1}{(1+d_1)(1+k_2 d_1)} + \frac{k_3}{(k_3-1)^2} \left[ \log\left(\frac{1+d_1}{1+k_2 d_1}\right) - \log\left(\frac{1+k_3 d_1}{1+k_3 k_2 d_1}\right) \right]$$

Ce qui nous ramène à :

$$q_3 = \text{Prob}[D_3 > k_3 D_2, D_2 < k_2 D_1 / N=3]$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{6}{(1+d_1)^2} f(d_1, k_2, k_3)$$

$$= 6 \left\{ \frac{1-k_2}{k_3-1} \int_0^{\infty} \frac{d_1}{(1+d_1)^3 (1+k_2 d_1)} + \frac{k_3}{(k_3-1)^2} \left[ \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+d_1)^2} \log\left(\frac{1+d_1}{1+k_2 d_1}\right) \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+d_1)^2} \log\left(\frac{1+k_3 d_1}{1+k_3 k_2 d_1}\right) \right] \right\}$$

Soit :

$$\text{soit } q = \int_0^{\infty} \frac{d_1}{(1+d_1)^3 (1+k_2 d_1)}$$

et :

$$P(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+d_1)^2} \log\left(\frac{1+xd_1}{1+xyd_1}\right)$$

Alors :

$$q_3 = 6 \left\{ \frac{1-k_2}{k_3-1} q + \frac{k_3}{(k_3-1)^2} [P(1,k_2) - P(k_3,k_2)] \right\}$$

Or :

$$q = \int_0^{\infty} \frac{d_1}{(1+d_1)^3 (1+k_2 d_1)} = \int_0^{\infty} \left[ \frac{A}{(1+d_1)^3} + \frac{B}{(1+d_1)^2} + \frac{C}{1+d_1} + \frac{D}{1+k_2 d_1} \right]$$

avec :

$$A = \frac{1}{k_2-1} ; D = -\frac{k_2}{(k_2-1)^3}$$

$$C + \frac{D}{k_2} = 0 ; \quad A + B + C + D = 0 ;$$

Après intégration on obtient :

$$q = \int_0^{\infty} \frac{d_1}{(1+d_1)^3 (1+k_2 d_1)} = \frac{1}{k_2-1} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{k_2-1} - \frac{k_2}{(k_2-1)^2} \log(k_2) \right]$$

$$\text{Par ailleurs : } P(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+d_1)^2} \log\left(\frac{1+xd_1}{1+xyd_1}\right)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\log(1+xd_1)}{(1+d_1)^2} - \frac{\log(1+xyd_1)}{(1+d_1)^2}$$

$$= [h(x,1) - h(x,y)]$$

avec :

$$h(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{\log(1+xyd_1)}{(1+d_1)^2} = \left[ -\frac{1}{1+d_1} \log(1+xyd_1) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{xy}{(1+d_1)(1+xyd_1)}$$

$$= xy \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+d_1)(1+xyd_1)}$$

$$= \frac{xy}{1-xy} \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{1+d_1} - \frac{xy}{1+xyd_1} \right]$$

$$h(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{\log(1+xyd_1)}{(1+d_1)^2} = \frac{xy}{1-xy} \left[ \log\left(\frac{1+d_1}{1+xyd_1}\right) \right]_0^{\infty} = \frac{xy \log(xy)}{xy-1}$$

d'où :

$$P(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+d_1)^2} \log\left(\frac{1+xd_1}{1+xyd_1}\right) = h(x,1) - h(x,y) = \frac{x \log(x)}{x-1} - \frac{xy \log(x,y)}{xy-1}$$

et :

$$P(1,y) = \lim_{x \rightarrow 1} P(x,y) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \log(x)}{x-1} - \frac{y \log(y)}{y-1} = 1 - \frac{y \log(y)}{y-1}$$

car :

$$\frac{x \log(x)}{x-1} \rightarrow 1 \quad ; \quad x \rightarrow 1+0$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
 q_3 &= \text{Prob}[D_3 > k_3 D_2, D_2 < k_2 D_1 / N=3] \\
 &= 6 \left\{ \frac{1-k_2}{k_3-1} q + \frac{k_3}{(k_3-1)^2} [P(1, k_2) - P(k_2, k_3)] \right\} \\
 &= 6 \left\{ \frac{1}{2(k_3-1)} \left[ \frac{2k_2 \log(k_2)}{(1-k_2)^2} + \frac{2}{1-k_2} - 1 \right] + \frac{k_3}{(k_3-1)^2} \left[ 1 - \frac{k_2 \log(k_2)}{k_2-1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{k_3 \log(k_3)}{k_3-1} + \frac{k_2 k_3 \log(k_2 k_3)}{k_2 k_3 - 1} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

De même, la loi marginale du couple  $(D_1, D_2)$  est :

$$P[d_1, d_2 / N=3] = \frac{6}{(1+d_1)^2 (1+d_2)^3}$$

Alors :

$$\text{Prob}[D_2 > k_2 D_1 / N=3] = \int_0^{\infty} \int_{k_2 d_2}^{\infty} \frac{6}{(1+d_1)^2 (1+d_2)^3} = \int_0^{\infty} \frac{3}{(1+d_1)^2 (1+k_2 d_1)^2}$$

Or :

$$\frac{1}{(1+d_1)^2 (1+k_2 d_1)^2} = \frac{A}{(1+d_1)^2} + \frac{B}{1+d_1} + \frac{C}{(1+k_2 d_1)^2} + \frac{D}{1+k_2 d_1}$$

avec :

$$A = \frac{1}{(k_2-1)^2} ; C = \frac{k_2^2}{(k_2-1)^2}$$

$$B + \frac{D}{k_2} = 0 ; A+B+C+D = 1$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 \text{Prob}[D_2 > k_2 D_1 / n=3] &= 3 \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{(k_2-1)^2} \frac{1}{(1+d_1)^2} + \frac{2k_2}{(k_2-1)^3} \frac{1}{1+d_1} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k_2^2}{(k_2-1)^2} \frac{1}{(1+k_2 d_1)^2} - \frac{2k_2^2}{(k_2-1)^3} \frac{1}{1+k_2 d_1} \right] \\
 &= 3 \left[ -\frac{1}{(k_2-1)^2} \frac{1}{1+d_1} + \frac{2k_2}{(k_2-1)^3} \log(1+d_1) - \frac{k_2}{(k_2-1)^2} \log(1+k_2 d_1) - \frac{2k_2}{(k_2-1)^3} \log(1+k_2 d_1) \right]_0^{\infty} \\
 &= \frac{3}{(k_2-1)^2} \left[ 1+k_2 - \frac{2k_2}{k_2-1} \log(k_2) \right] = \frac{3}{(k_2-1)^2} \left[ \frac{2k_2 \log(k_2)}{1-k_2} + 2 + k_2 - 1 \right] \\
 \text{Prob}[D_2 > k_2 D_1 / N=3] &= \frac{3}{1-k_2} \left[ \frac{2k_2 \log(k_2)}{(1-k_2)^2} + \frac{2}{1-k_2} - 1 \right]
 \end{aligned}$$

Finalement  $k_3$  doit vérifier :

$$\begin{aligned}
 r &= 1 - \text{Prob}[D_3 < k_3 D_2, D_2 < k_2 D_1 / N=3] \\
 &= \text{Prob}[D_3 > k_3 D_2, D_2 < k_2 D_1 / N=3] + \text{Prob}[D_2 > k_2 D_1 / N=3] \\
 &= \frac{3}{(k_3-1)(1-k_2)^2} \left[ \frac{2k_2 \log(k_2)}{1-k_2} + \frac{2}{1-k_2} - 1 \right] + \frac{6k_3}{(k_3-1)^2} \left[ 1 - \frac{k_2 \log(k_2)}{k_2-1} + \frac{k_3 \log(k_3)}{k_3-1} + \frac{k_2 k_3 \log(k_2 k_3)}{k_2 k_3 - 1} \right] \\
 &\quad + \frac{3}{1-k_2} \left[ \frac{2k_2 \log(k_2)}{(1-k_2)^2} + \frac{2}{1-k_2} - 1 \right]
 \end{aligned}$$

Or, par définition de  $k_2$  :

$$\frac{2k_2 \log(k_2)}{(1-k_2)^2} + \frac{2}{1-k_2} = r$$

d'où :

$$\frac{3}{(k_3-1)} (r-1) + \frac{6k_3}{(k_3-1)^2} \left[ 1 - \frac{k_2 \log(k_2)}{k_2-1} - \frac{k_3 \log(k_3)}{k_3-1} + \frac{k_2 k_3 \log(k_2 k_3)}{k_2 k_3 - 1} \right]$$

$$- \frac{3}{k_2-1} (r-1) = r$$



**CHAPITRE III**

**ESSAIS PROBATOIRES DES REGLES  
D'ARRET ISSUES DU TEST TSAR**

**- LE P.A.I -**

Une probabilité, si séduisante soit-elle, ne saurait nous préserver de l'erreur, même si toutes les données du problème semblent aussi bien ajustées que les pièces d'un puzzle. Il faut se rappeler que le vraisemblable n'est pas toujours vrai et que le vrai n'est pas toujours vraisemblable.

**FREUD (Moïse et le monothéisme)**



### III - ESSAIS PROBATOIRES DU TEST SEQUENTIEL D'ARRET TSAR

#### III.1 - Introduction

Dans cette partie, nous soumettons les différentes versions des règles d'arrêt issues du test TSAR établi précédemment à quelques essais probatoires. Les essais en question s'appuient essentiellement sur les données de défaillances réelles récoltées par Musa [MUS 79b] au cours des opérations de mise au point ou durant la phase opérationnelle d'un certain nombre de systèmes logiciels.

Ces essais critiques sont menés en vue de mieux cerner les limites des conditions d'application des deux versions de TSAR : la version classique, JELTSAR issue de la dérivation du test d'arrêt TSAR au modèle classique de Jelinski et Moranda (JM) ; la version Bayésienne, LITSAR qui est le résultat de la dérivation de la règle d'arrêt au modèle de Littlewood B. (LB).

Nous définirons et justifierons par la suite une esquisse d'une méthodologie d'application de ces différentes règles au projet SNCF.

#### III.2 - Version classique : JELTSAR

Nous avons éprouvé la version classique de la règle d'arrêt sur les exemples de systèmes fournis par Musa. Les résultats qui en découlent sont regroupés dans les tableaux qui suivent. Ces derniers peuvent être lus comme il est indiqué ci-après :

- la première colonne donne le numéro de la défaillance courante dans la séquence étudiée,
- la seconde colonne, nommée T.T.F, relate les intervalles de temps observés entre les défaillances successives,

- la colonne portant en en-tête PATIENCE regroupe les intervalles de temps supplémentaires durant lesquels le système doit fonctionner sans défaillance avant d'être validé,
- dans la colonne appelée SEUIL figurent les dates, temps cumulés de bon fonctionnement, au bouts desquels on arrêtera vraisemblablement les essais si aucune défaillance supplémentaire ne se manifeste jusque-là.

Les résultats mentionnés dans ces deux dernières colonnes sont itérativement délivrés par la règle JELTSAR après chaque opération de détection et correction d'erreur.

Un éventuel arrêt à tort de la règle de décision peut intervenir lorsque celle-ci délivre un temps de validation inférieur à la latence de la prochaine erreur, partant de la dernière relance du logiciel. Ce cas de figure est signalé dans les tableaux par la chaîne de caractères :!!!!!!!

Nous avons vu au chapitre précédent que la règle d'arrêt qui résulte de la dérivation du test TSAR au modèle JM peut être tabulée une fois pour toute dès lors que l'on s'est fixé un risque  $r$ . Ce risque représente la probabilité maximum associée à la validation à tort du système éprouvé. Dans les essais qui suivent, ce risque vaut 5%.

Certains échantillons analysés étaient de très grande taille (de l'ordre de 500 données de défaillance). C'est le cas des données recueillies lors des opérations de mise au point. Comme nous le rappellerons plus loin, l'expérience a montré que le principal inconvénient que l'on pourrait redouter de cette règle d'arrêt est sa fragilité au début des essais. En effet, nous avons constaté que le risque d'une validation précoce, donc erronée, était plus élevé avant que la règle n'ait franchi le premier cinquième des données de défaillance. C'est pour mieux jauger cette sensibilité en amont que nous avons tronqué les échantillons de grande taille à une suite de 55 éléments au plus.

## système 2 tp

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		191.00		191.00		7258.00		7449.00	
	2		222.00		413.00		8281.46		8694.46	
	3		280.00		693.00		7507.24		8200.24	
	4		290.00		983.00		7505.09		8488.09	
	5		290.00		1273.00		7802.65		9075.65	
	6		385.00		1658.00		8336.12		9994.12	
	7		570.00		2228.00		9126.38		11354.38	
	8		610.00		2838.00		10157.67		12995.67	
	9		365.00		3203.00		11337.08		14540.08	
	10		390.00		3593.00		12464.03		16057.03	
	11		275.00		3868.00		13599.29		17467.29	
	12		360.00		4228.00		14644.98		18872.98	
	13		800.00		5028.00		15551.87		20579.87	
	14		1210.00		6238.00		16534.99		22772.99	
	15		407.00		6645.00		18236.29		24881.29	
	16		50.00		6695.00		20039.52		26734.52	
	17		660.00		7355.00		21336.68		28691.68	
	18		1507.00		8862.00		22273.59		31135.59	
	19		625.00		9487.00		24105.77		33592.77	
	20		912.00		10399.00		25785.13		36184.13	
	21		638.00		11037.00		27744.59		38781.59	
	22		293.00		11330.00		29924.48		41254.48	
	23		1212.00		12542.00		31413.59		43955.59	
	24		612.00		13154.00		33493.74		46647.74	
	25		675.00		13829.00		35525.30		49354.30	
	26		1215.00		15044.00		37203.97		52247.97	
	27		2715.00		17759.00		38012.97		55771.97	
	28		3551.00		21310.00		38798.10		60108.10	
	29		800.00		22110.00		42272.51		64382.51	
	30		3910.00		26020.00		43446.93		69466.93	
	31		6900.00		32920.00		43168.72		76088.72	
	32		3300.00		36220.00		46948.23		83168.23	
	33		1510.00		37730.00		52483.75		90213.75	
	34		195.00		37925.00		58982.34		96907.34	
	35		1956.00		39881.00		63819.51		103700.51	
	36		135.00		40016.00		70148.05		110164.05	
	37		661.00		40677.00		75767.37		116444.37	
	38		50.00		40727.00		81695.34		122422.34	
	39		729.00		41456.00		86811.48		128267.48	
	40		900.00		42356.00		91670.28		134026.28	
	41		180.00		42536.00		97022.54		139558.54	
	42		4225.00		46761.00		98927.91		145688.91	
	43		15600.00		62361.00		92238.49		154599.49	
	44		0.00		62361.00		100767.46		163128.46	
	45		0.00		62361.00		108940.53		171301.53	
	46		300.00		62661.00		116536.00		179197.00	
	47		9021.00		71682.00		116714.68		188396.68	
	48		2519.00		74201.00		123479.79		197680.79	
	49		6890.00		81091.00		126707.64		207798.64	
	50		3348.00		84439.00		133665.79		218104.79	
	51		2750.00		87189.00		141301.57		228490.57	
	52		6675.00		93864.00		145727.74		239591.74	
	53		6945.00		100809.00		150604.97		251413.97	

54      7899.00      108708.00      155362.11      264070.11  
 -----PATIENCE, ...ET LONGUEUR DE TEMPS !... -----

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		115.00		115.00		4370.00		4485.00	
	2		1.00		116.00		3209.20		3325.20	
	3		83.00		199.00		2519.66		2718.66	
	4		178.00		377.00		2627.34		3004.34	
	5		194.00		571.00		2948.91		3519.91	
	6		136.00		707.00		3291.80		3998.80	
	7		1077.00		1784.00		4121.38		5905.38	
	8		15.00		1799.00		5368.41		7167.41	
	9		15.00		1814.00		6256.39		8070.39	
	10		92.00		1906.00		6923.34		8829.34	
	11		50.00		1956.00		7506.25		9462.25	
	12		71.00		2027.00		7999.25		10026.25	
	13		606.00		2633.00		8274.05		10907.05	
	14		1189.00		3822.00		8569.86		12391.86	
	15		40.00		3862.00		9819.24		13681.24	
	16		788.00		4650.00		10570.55		15220.55	
	17		222.00		4872.00		11806.64		16678.64	
	18		72.00		4944.00		13057.39		18001.39	
	19		615.00		5559.00		13895.96		19454.96	
	20		589.00		6148.00		14860.60		21008.60	
	21		15.00		6163.00		16255.61		22418.61	
	22		390.00		6553.00		17296.43		23849.43	
	23		1863.00		8416.00		17419.06		25835.06	
	24		1337.00		9753.00		18368.47		28121.47	
	25		4508.00		14261.00		17470.77		31731.77	
	26		834.00		15095.00		20237.38		35332.38	
	27		3400.00		18495.00		21223.61		39718.61	
	28		6.00		18501.00		25295.56		43796.56	
	29		4561.00		23062.00		25847.24		48909.24	
	30		3186.00		26248.00		28324.61		54572.61	
	31		10571.00		36819.00		25902.36		62721.36	
	32		563.00		37382.00		33136.13		70518.13	
	33		2770.00		40152.00		38402.91		78554.91	
	34		652.00		40804.00		45489.16		86293.16	
	35		5593.00		46397.00		48541.82		94938.82	
	36		11696.00		58093.00		47742.97		105835.97	
	37		6724.00		64817.00		52867.77		117684.77	
	38		2546.00		67363.00		62131.59		129494.59	

-----PATIENCE, ...ET LONGUEUR DE TEMPS !... -----

système 3 tn

système 5 tp

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		37320.00		37320.00		1418160.00		1455480.00	
	2		31140.00		68460.00		1454222.40		1522682.40	
	3		3480.00		71940.00		1051688.23		1123628.23	
	4		19260.00		91200.00		909947.94		1001147.94	
	5		21480.00		112680.00		862064.97		974744.97	
	6		600.00		113280.00		835844.85		949124.85	
	7		2280.00		115560.00		816174.03		931734.03	

8	18840.00	134400.00	807479.55	941879.55
9	77400.00	211800.00	820070.98	1031870.98
10	12600.00	224400.00	886359.11	1110759.11
11	42840.00	267240.00	940798.31	1208038.31
12	2740.00	269980.00	1018457.63	1288437.63
13	16020.00	286000.00	1079943.67	1365943.67
14	7200.00	293200.00	1142783.09	1435983.09
15	120.00	293320.00	1203011.11	1496331.11
16	31020.00	324340.00	1241392.47	1565732.47
17	26640.00	350980.00	1289312.46	1640292.46
18	300.00	351280.00	1355431.09	1706711.09
19	8640.00	359920.00	1410221.88	1770141.88
20	780.00	360700.00	1467087.59	1827787.59
21	7680.00	368380.00	1514928.86	1883308.86
22	600.00	368980.00	1565347.87	1934327.87
23	64200.00	433180.00	1571432.28	2004612.28
24	12900.00	446080.00	1627740.21	2073820.21
25	360.00	446440.00	1691476.09	2137916.09
26	25800.00	472240.00	1733442.59	2205682.59
27	600.00	472840.00	1796096.75	2268936.75
28	15720.00	488560.00	1844122.55	2332682.55
29	19380.00	507940.00	1889992.53	2397932.53
30	8280.00	516220.00	1945243.36	2461463.36
31	15000.00	531220.00	1994039.11	2525259.11
32	10860.00	542080.00	2046146.26	2588226.26
33	600.00	542680.00	2105175.31	2647855.31
34	2280.00	544960.00	2159897.77	2704857.77
35	420.00	545380.00	2213638.58	2759018.58
36	1068.00	546448.00	2264278.54	2810726.54
37	3220.00	549668.00	2310999.64	2860667.64
38	9000.00	558668.00	2351586.86	2910254.86
39	7800.00	566468.00	2392793.10	2959261.10
40	8940.00	575408.00	2432563.22	3007971.22
41	20460.00	595868.00	2462897.54	3058765.54
42	9000.00	604868.00	2504345.98	3109213.98
43	12300.00	617168.00	2542820.00	3159988.00
44	24000.00	641168.00	2572136.73	3213304.73
45	60.00	641228.00	2623301.06	3264529.06
46	1740.00	642968.00	2671135.17	3314103.17
47	60.00	643028.00	2718802.00	3361830.00
48	2520.00	645548.00	2762707.23	3408255.23
49	2280.00	647828.00	2805588.21	3453416.21
50	16980.00	664808.00	2835064.26	3499872.26
51	1380.00	666188.00	2878777.32	3544965.32
52	16620.00	682808.00	2908445.93	3591253.93
53	7380.00	690188.00	2947010.12	3637198.12
54	3600.00	693788.00	2988436.26	3682224.26
55	11580.00	705368.00	3022245.78	3727613.78

système 5 (suite)

-----PATIENCE, ... ET LONGUEUR DE TEMPS !... -----

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		3.00		3.00		114.00		117.00	
	2		14.00		17.00		270.90		287.90	
	3		59.00		76.00		530.96		606.96	
	4		32.00		108.00		651.46		759.46	
	5		8.00		116.00		701.40		817.40	

système 6 tp'

6	52.00	168.00	767.93	935.93
7	2.00	170.00	834.33	1004.33
8	25.00	195.00	883.65	1078.65
9	2.00	197.00	935.57	1132.57
10	3.00	200.00	975.62	1175.62
11	4.00	204.00	1008.81	1212.81
12	1.00	205.00	1039.00	1244.00
13	30.00	235.00	1055.80	1290.80
14	21.00	256.00	1087.82	1343.82
15	196.00	452.00	1050.81	1502.81
16	265.00	717.00	1065.66	1782.66
17	6.00	723.00	1306.96	2029.96
18	3.00	726.00	1523.58	2249.58
19	8.00	734.00	1714.73	2448.73
20	1.00	735.00	1892.92	2627.92
21	12.00	747.00	2047.72	2794.72
22	36.00	783.00	2177.17	2960.17
23	38.00	821.00	2304.26	3125.26
24	1.00	822.00	2455.23	3277.23
25	74.00	896.00	2546.14	3442.14
26	43.00	939.00	2669.59	3608.59
27	236.00	1175.00	2661.05	3836.05
28	121.00	1296.00	2787.77	4083.77
29	18.00	1314.00	3006.09	4320.09
30	9.00	1323.00	3220.73	4543.73
31	23.00	1346.00	3413.76	4759.76
32	1.00	1347.00	3616.21	4963.21
33	672.00	2019.00	3305.86	5324.86
34	189.00	2208.00	3504.46	5712.46
35	83.00	2291.00	3807.61	6098.61
36	52.00	2343.00	4133.33	6476.33
37	8.00	2351.00	4485.43	6836.43
38	1.00	2352.00	4826.79	7178.79
39	41.00	2393.00	5120.40	7513.40
40	7.00	2400.00	5433.76	7833.76
41	43.00	2443.00	5705.28	8148.28
42	1.00	2444.00	6005.03	8449.03
43	4.00	2448.00	6289.56	8737.56
44	5.00	2453.00	6561.91	9014.91
45	1.00	2454.00	6827.08	9281.08
46	16.00	2470.00	7069.54	9539.54
47	70.00	2540.00	7260.48	9800.48
48	60.00	2600.00	7462.02	10062.02
49	2.00	2602.00	7712.15	10314.15
50	2.00	2604.00	7953.43	10557.43
51	3.00	2607.00	8185.55	10792.55
52	169.00	2776.00	8271.00	11047.00
53	29.00	2805.00	8492.37	11297.37
54	88.00	2893.00	8660.17	11553.17
55	55.00	2948.00	8861.04	11809.04

système 6 (suite)

-----PATIENCE, ... ET LONGUEUR DE TEMPS !... -----

I	NUMERO I	T.T.F I	DATE I	PATIENCE I	SEUIL I
	1	191520.00	191520.00	7277760.00	7469280.00
	2	2078820.00	2270340.00	33167652.96	35437992.96
	3	514560.00	2784900.00	30387549.16	33172449.16

système 14c t

4	1140.00	2786040.00	27118843.19	29904883.19
5	3120.00	2789160.00	24854055.70	27643215.70
6	327480.00	3116640.00	23616045.91	26732685.91
7	15420.00	3132060.00	22923432.38	26055492.38
8	60000.00	3192060.00	22430948.39	25623008.39
9	140160.00	3332220.00	22118246.17	25450466.17
10	937620.00	4269840.00	21936772.92	26206612.92
11	72240.00	4342080.00	22522283.67	26864363.67
12	737700.00	5079780.00	22879614.99	27959394.99
13	250680.00	5330460.00	23713954.34	29044414.34
14	2965.00	5333425.00	24637126.46	29970551.46
15	196.00	5333621.00	25441174.83	30774795.83
16	65173.00	5398794.00	26120246.18	31519040.18
17	2370.00	5401164.00	26782992.12	32184156.12
18	1581.00	5402745.00	27381749.84	32784494.84
19	228315.00	5631060.00	27801006.07	33432066.07
20	51480.00	5682540.00	28362194.42	34044734.42
21	44820.00	5727360.00	28897678.64	34625038.64
22	850080.00	6577440.00	28906954.75	35484394.75
23	361860.00	6939300.00	29467902.49	36407202.49
24	39300.00	6978600.00	30294436.70	37273036.70
25	545280.00	7523880.00	30734148.58	38258028.58
26	256980.00	7780860.00	31474882.45	39255742.45
27	396780.00	8177640.00	32130438.99	40308078.99
28	91260.00	8268900.00	33049425.98	41318325.98
29	1225620.00	9494520.00	33122557.57	42617077.57
30	120.00	9494640.00	34340491.68	43835131.68
31	1563300.00	11057940.00	34342962.23	45400902.23
32	513000.00	11570940.00	35437618.56	47008558.56
33	1776600.00	13347540.00	35626526.59	48974066.59
34	2469000.00	15816540.00	35620025.07	51436565.07
35	1678260.00	17494800.00	36671143.79	54165943.79
36	170760.00	17665560.00	39125509.82	56791069.82

système 14c (suite)

-----PATIENCE, ...ET LONGUEUR DE TEMPS !...-----

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		8100.00		8100.00		307800.00		315900.00	
	2		4800.00		12900.00		289390.89		302290.89	
	3		900.00		13800.00		206221.73		220021.73	
	4		450.00		14250.00		168355.63		182605.63	
	5		450.00		14700.00		148140.65		162840.65	
	6		6000.00		20700.00		141265.72		161965.72	
	7		2400.00		23100.00		141056.99		164156.99	
	8		2100.00		25200.00		142667.61		167867.61	
	9		2100.00		27300.00		145336.47		172636.47	
	10		1260.00		28560.00		148826.27		177386.27	
	11		1200.00		29760.00		152386.63		182146.63	
	12		300.00		30060.00		156225.29		186285.29	
	13		9000.00		39060.00		156870.24		195930.24	
	14		600.00		39660.00		164818.80		204478.80	
	15		2400.00		42060.00		171180.96		213240.96	
	16		600.00		42660.00		178558.42		221218.42	
	17		15060.00		57720.00		178116.30		235836.30	
	18		120.00		57840.00		191006.02		248846.02	
	19		360.00		58200.00		202441.19		260641.19	
	20		1200.00		59400.00		212379.12		271779.12	

système  
17 tp

21	300.00	59700.00	222305.33	282005.33
22	1200.00	60900.00	230897.91	291797.91
23	1200.00	62100.00	239119.15	301219.15
24	3300.00	65400.00	245651.09	311051.09
25	19800.00	85200.00	241556.42	326756.42
26	3000.00	88200.00	254055.78	342255.78
27	600.00	88800.00	268036.47	356836.47
28	9600.00	98400.00	274882.20	373282.20
29	8400.00	106800.00	284258.36	391058.36
30	8100.00	114900.00	295053.07	409953.07
31	15600.00	130500.00	301380.17	431880.17
32	1800.00	132300.00	320666.18	452966.18
33	5400.00	137700.00	336502.11	474202.11
34	3900.00	141600.00	353611.50	495211.50
35	2400.00	144000.00	371660.06	515660.06
36	1200.00	145200.00	390119.22	535319.22
37	79500.00	224700.00	347246.18	571946.18
38	9000.00	233700.00	375018.22	608718.22

-----PATIENCE, ...ET LONGUEUR DE TEMPS !...-----

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		20336.00		20336.00		772768.00		793104.00	
	2		11776.00		32112.00		722866.70		754978.70	
	3		40933.00		73045.00		720379.93		793424.93	
	4		34794.00		107839.00		760820.27		868659.27	
	5		17136.00		124975.00		790271.19		915246.19	
	6		148446.00		273421.00		938163.11		1211584.11	
	7		7995.00		281416.00		1112344.79		1393760.79	
	8		1636.00		283052.00		1229585.01		1512637.01	
	9		15830.00		298882.00		1313770.21		1612652.21	
	10		21932.00		320814.00		1387018.57		1707832.57	
	11		2485.00		323299.00		1461041.51		1784340.51	
	12		11000.00		334299.00		1520448.01		1854747.01	
	13		2880.00		337179.00		1578348.69		1915527.69	
	14		61182.00		398361.00		1607381.35		2005742.35	
	15		4800.00		403161.00		1683096.34		2086257.34	
	16		38005.00		441166.00		1735921.96		2177087.96	
	17		16200.00		457366.00		1807997.86		2265363.86	
	18		6000.00		463366.00		1883452.10		2346818.10	
	19		1000.00		464366.00		1956079.26		2420445.26	
	20		10000.00		474366.00		2016962.00		2491328.00	
	21		220.00		474586.00		2081404.00		2555990.00	
	22		35580.00		510166.00		2118646.08		2628812.08	
	23		81000.00		591166.00		2134060.31		2725226.31	
	24		643095.00		1234261.00		1803705.11		3037966.11	
	25		47857.00		1282118.00		2059532.10		3341650.10	
	26		154800.00		1436918.00		2234898.97		3671816.97	
	27		170460.00		1607378.00		2423078.14		4030456.14	
	28		108540.00		1715918.00		2680272.32		4396190.32	
	29		73800.00		1789718.00		2968714.93		4758432.93	
	30		1860.00		1791578.00		3306092.88		5097670.88	
	31		336600.00		2128178.00		3378078.64		5506256.64	
	32		268140.00		2396318.00		3563678.99		5959996.99	
	33		74880.00		2471198.00		3934895.26		6406093.26	
	34		286200.00		2757398.00		4139800.31		6897198.31	
	35		25320.00		2782718.00		4584674.48		7367392.48	

système

système 27 tr

36	7080.00	2789798.00	5024465.07	7814263.07
37	59820.00	2849618.00	5402055.91	8251673.91
38	87900.00	2937518.00	5749103.91	8686621.91
39	76200.00	3013718.00	6103141.45	9116859.45
40	89280.00	3102998.00	6442544.97	9545542.97
41	1209600.00	4312598.00	5889352.29	10201950.29

s-27-(s)

-----PATIENCE, ...ET LONGUEUR DE TEMPS !...-----

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		320.00		320.00		12160.00		12480.00	
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!										
	2		14390.00		14710.00		201643.91		216353.91	
	3		9000.00		23710.00		221222.24		244932.24	
	4		2880.00		26590.00		216623.58		243213.58	
	5		5700.00		32290.00		217066.93		249356.93	
	6		21800.00		54090.00		236872.92		290962.92	
	7		26800.00		80890.00		274134.79		355024.79	
	8		113540.00		194430.00		345566.27		539996.27	
	9		112137.00		306567.00		484720.69		791287.69	
	10		660.00		307227.00		671660.03		978887.03	
	11		2700.00		309927.00		816760.48		1126687.48	
	12		28793.00		338720.00		928130.19		1266850.19	
	13		2173.00		340893.00		1042841.07		1383734.07	
	14		7263.00		348156.00		1138492.08		1486648.08	
	15		10865.00		359021.00		1222073.41		1581094.41	
	16		4230.00		363251.00		1302207.27		1665458.27	
	17		8460.00		371711.00		1372240.65		1743951.65	
	18		14805.00		386516.00		1434202.46		1820718.46	
	19		11844.00		398360.00		1496434.17		1894794.17	
	20		5361.00		403721.00		1560202.64		1963923.64	
	21		6553.00		410274.00		1619091.16		2029365.16	
	22		6499.00		416773.00		1674876.79		2091649.79	
	23		3124.00		419897.00		1730098.74		2149995.74	
	24		51323.00		471220.00		1750491.32		2221711.32	
	25		17010.00		488230.00		1805472.28		2293702.28	
	26		1890.00		490120.00		1870981.81		2361101.81	
	27		5400.00		495520.00		1930007.47		2425527.47	
	28		62312.00		557832.00		1946426.44		2504258.44	
	29		24826.00		582658.00		2002387.45		2585045.45	
	30		26335.00		608993.00		2059125.69		2668118.69	
	31		363.00		609356.00		2136933.47		2746289.47	
	32		13989.00		623345.00		2200235.63		2823580.63	
	33		15058.00		638403.00		2261951.86		2900354.86	
	34		32377.00		670780.00		2310140.51		2980920.51	
	35		41632.00		712412.00		2354765.67		3067177.67	
	36		4160.00		716572.00		2433405.41		3149977.41	
	37		82040.00		798612.00		2448590.56		3247202.56	
	38		13189.00		811801.00		2530796.07		3342597.07	
	39		3426.00		815227.00		2618989.20		3434216.20	
	40		5833.00		821060.00		2701791.69		3522851.69	
	41		640.00		821700.00		2785964.35		3607664.35	
	42		640.00		822340.00		2866588.27		3688928.27	
	43		2880.00		825220.00		2942108.74		3767328.74	
	44		110.00		825330.00		3017202.54		3842532.54	
	45		22080.00		847410.00		3071448.86		3918858.86	
	46		60654.00		908064.00		3095240.56		4003304.56	

systeme 49 tp

47	52163.00	960227.00	3133629.53	4093856.53
48	12546.00	972773.00	3210421.28	4183194.28
49	784.00	973557.00	3295812.67	4269369.67
50	10193.00	983750.00	3370411.21	4354161.21
51	7841.00	991591.00	3445671.74	4437262.74
52	31365.00	1022956.00	3499647.43	4522603.43
53	24313.00	1047269.00	3561671.62	4608940.62
54	298890.00	1346159.00	3393203.30	4739362.30
55	1280.00	1347439.00	3518206.82	4865645.82

s-40(s)

-----PATIENCE, ...ET LONGUEUR DE TEMPS !...-----

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		82530.00		82530.00		3136140.00		3218670.00	
	2		713700.00		796230.00		11853348.24		12649578.24	
	3		671220.00		1467450.00		13366377.34		14833827.34	
	4		61470.00		1528920.00		12897595.04		14426515.04	
	5		77130.00		1606050.00		12394874.14		14000924.14	
	6		205650.00		1811700.00		12175233.44		13986933.44	
	7		105660.00		1917360.00		12140522.83		14057882.83	
	8		33390.00		1950750.00		12162761.93		14113511.93	
	9		16560.00		1967310.00		12193410.69		14160720.69	
	10		9360.00		1976670.00		12229439.00		14206109.00	
	11		67500.00		2044170.00		12260258.73		14304428.73	
	12		4590.00		2048760.00		12346789.43		14395549.43	
	13		123210.00		2171970.00		12392027.99		14563997.99	
	14		5400.00		2177370.00		12540378.52		14717748.52	
	15		678960.00		2856330.00		12393318.10		15249648.10	
	16		57600.00		2913930.00		12832715.63		15746645.63	
	17		85680.00		2999610.00		13230606.99		16230216.99	
	18		26460.00		3026070.00		13649147.24		16675217.24	
	19		100620.00		3126690.00		13994756.17		17121446.17	
	20		12150.00		3138840.00		14392714.58		17531554.58	
	21		154350.00		3293190.00		14674790.94		17967980.94	
	22		164610.00		3457800.00		14973112.36		18430912.36	
	23		3150.00		3460950.00		15397097.91		18858047.91	
	24		10350.00		3471300.00		15785271.13		19256571.13	
	25		157500.00		3628800.00		16050381.18		19679181.18	
	26		66870.00		3695670.00		16398309.20		20093979.20	
	27		245700.00		3941370.00		16615741.08		20557111.08	
	28		167310.00		4108680.00		16931365.09		21040045.09	
	29		27720.00		4136400.00		17364256.30		21500656.30	
	30		229860.00		4366260.00		17631142.95		21997402.95	
	31		21420.00		4387680.00		18083118.50		22470798.50	
	32		3780.00		4391460.00		18527021.15		22918481.15	
	33		105570.00		4497030.00		18871515.82		23368545.82	
	34		2700.00		4499730.00		19295848.65		23795578.65	
	35		69390.00		4569120.00		19648352.24		24217472.24	
	36		62730.00		4631850.00		20001285.99		24633135.99	
	37		20340.00		4652190.00		20381329.21		25033519.21	
	38		413550.00		5065740.00		20440650.55		25506390.55	
	39		55170.00		5120910.00		20848516.32		25969426.32	
	40		41940.00		5162850.00		21257763.27		26420613.27	
	41		75420.00		5238270.00		21629405.63		26867675.63	
	42		900.00		5239170.00		22056874.33		27296044.33	
	43		43200.00		5282370.00		22432901.42		27715271.42	
	44		380610.00		5662980.00		22527460.65		28190440.65	

système s

45	500850.00	6163830.00	22576640.64	28740470.64
46	69930.00	6233760.00	23048069.61	29281829.61
47	3600.00	6237360.00	23565837.51	29803197.51
48	990.00	6238350.00	24067001.77	30305351.77
49	14400.00	6252750.00	24539013.28	30791763.28
50	2430.00	6255180.00	25006162.36	31261342.36
51	17910.00	6273090.00	25444539.23	31717629.23
52	5670.00	6278760.00	25880626.70	32159386.70
53	210060.00	6488820.00	26131283.82	32620103.82
54	82620.00	6571440.00	26507341.01	33078781.01
55	151740.00	6723180.00	26823037.44	33546217.44

s-ssla

-----PATIENCE, ... ET LONGUEUR DE TEMPS !... -----

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		5400.00		5400.00		205200.00		210600.00	
	2		10200.00		15600.00		286690.89		302290.89	
	3		24060.00		39660.00		343860.64		383520.64	
	4		8460.00		48120.00		356851.27		404971.27	
	5		33900.00		82020.00		405352.49		487372.49	
	6		16500.00		98520.00		456363.61		554883.61	
	7		6300.00		104820.00		496768.44		601588.44	
	8		87540.00		192360.00		549292.38		741652.38	
	9		5400.00		197760.00		648174.87		845934.87	
	10		51780.00		249540.00		722741.01		972281.01	
	11		1140.00		250680.00		820729.56		1071409.56	
	12		6300.00		256980.00		898884.11		1155864.11	
	13		2400.00		259380.00		967928.83		1227308.83	
	14		16260.00		275640.00		1022223.80		1297863.80	
	15		109140.00		384780.00		1036745.53		1421525.53	
	16		94380.00		479160.00		1100161.28		1579321.28	
	17		5400.00		484560.00		1235524.77		1720084.77	
	18		15600.00		500160.00		1351754.92		1851914.92	
	19		14400.00		514560.00		1461378.17		1975938.17	
	20		30660.00		545220.00		1555143.05		2100363.05	
	21		131460.00		676680.00		1588870.47		2265550.47	
	22		38700.00		715380.00		1715022.99		2430402.99	
	23		273480.00		988860.00		1691642.15		2680502.15	
	24		84540.00		1073400.00		1865740.79		2939140.79	
	25		23160.00		1096560.00		2088340.67		3184900.67	
	26		175860.00		1272420.00		2196001.67		3468421.67	
	27		310020.00		1582440.00		2244552.66		3826992.66	
	28		148920.00		1731360.00		2473292.33		4204652.33	
	29		79680.00		1811040.00		2768613.79		4579653.79	
	30		12720.00		1823760.00		3110030.79		4933790.79	
	31		4920.00		1828680.00		3438417.01		5267097.01	
	32		70320.00		1899000.00		3699655.99		5598655.99	
	33		71340.00		1970340.00		3958631.01		5928971.01	
	34		1200.00		1971540.00		4269475.40		6241015.40	
	35		219660.00		2191200.00		4397319.70		6588519.70	
	36		36540.00		2227740.00		4698416.67		6926156.67	
	37		1680.00		2229420.00		5017481.96		7246901.96	
	38		44160.00		2273580.00		5287890.29		7561470.29	
	39		20160.00		2293740.00		5571487.39		7865227.39	
	40		48300.00		2342040.00		5822864.41		8164904.41	
	41		210060.00		2552100.00		5941814.79		8493914.79	
	42		30180.00		2582280.00		6232057.35		8814337.35	

système sslb tp

43	168000.00	2750280.00	6403432.13	9153712.13
44	173580.00	2923860.00	6588041.70	9511901.70
45	56820.00	2980680.00	6885233.99	9865913.99
46	271440.00	3252120.00	7003219.10	10255339.10
47	139920.00	3392040.00	7262427.16	10654467.16
48	186240.00	3578280.00	7492621.26	11070901.26
49	15900.00	3594180.00	7880139.36	11474319.36
50	185640.00	3779820.00	8114379.49	11894199.49
51	208020.00	3987840.00	8345529.69	12333369.69
52	62340.00	4050180.00	8716908.73	12767088.73
53	40380.00	4090560.00	9101617.88	13192177.88
54	29820.00	4120380.00	9487090.69	13607470.69
55	257334.00	4377714.00	9670919.79	14048633.79

SS1b

-----PATIENCE, ...ET LONGUEUR DE TEMPS !...-----

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		5400.00		5400.00		205200.00		210600.00	
	2		81060.00		86460.00		1235846.72		1322306.72	
	3		2100.00		88560.00		1052138.88		1140698.88	
	4		13620.00		102180.00		949896.49		1052076.49	
	5		22800.00		124980.00		916127.33		1041107.33	
	6		13380.00		138360.00		908692.25		1047052.25	
	7		4620.00		142980.00		908540.55		1051520.55	
	8		5100.00		148080.00		910339.50		1058419.50	
	9		26640.00		174720.00		916562.52		1091282.52	
	10		45960.00		220680.00		938382.79		1159062.79	
	11		5100.00		225780.00		990516.09		1216296.09	
	12		28800.00		254580.00		1029733.45		1284313.45	
	13		58620.00		313200.00		1067532.66		1380732.66	
	14		1920.00		315120.00		1148126.93		1463246.93	
	15		99540.00		414660.00		1176945.43		1591605.43	
	16		60000.00		474660.00		1260411.68		1735071.68	
	17		3000.00		477660.00		1384592.49		1862252.49	
	18		34500.00		512160.00		1478976.21		1991136.21	
	19		52500.00		564660.00		1564904.39		2129564.39	
	20		2280.00		566940.00		1688013.94		2254953.94	
	21		32100.00		599040.00		1782260.99		2381300.99	
	22		167940.00		766980.00		1793332.00		2560312.00	
	23		42840.00		809820.00		1929570.05		2739390.05	
	24		145920.00		955740.00		1998780.42		2954520.42	
	25		43380.00		999120.00		2167985.46		3167105.46	
	26		43380.00		1042500.00		2335041.11		3377541.11	
	27		26820.00		1069320.00		2511720.41		3581040.41	
	28		286500.00		1355820.00		2499925.88		3855745.88	
	29		27000.00		1382820.00		2736921.35		4119741.35	
	30		44400.00		1427220.00		2951803.36		4379023.36	
	31		110220.00		1537440.00		3114386.50		4651826.50	
	32		269100.00		1806540.00		3171827.27		4978367.27	
	33		60840.00		1867380.00		3433861.50		5301241.50	
	34		85800.00		1953180.00		3673797.00		5626977.00	
	35		98820.00		2052000.00		3906514.23		5958514.23	
	36		61260.00		2113260.00		4173473.87		6286733.87	
	37		156300.00		2269560.00		4363879.67		6633439.67	
	38		52740.00		2322300.00		4652173.37		6974473.37	
	39		54960.00		2377260.00		4933538.67		7310798.67	
	40		32100.00		2409360.00		5228668.15		7638028.15	

système sslc

41	129660.00	2539020.00	5437790.13	7976810.13
42	116760.00	2655780.00	5668038.16	8323818.16
43	75000.00	2730780.00	5939610.38	8670390.38
44	37260.00	2768040.00	6241352.54	9009392.54
45	24180.00	2792220.00	6546688.59	9338908.59
46	146640.00	2938860.00	6743128.94	9681988.94
47	35760.00	2974620.00	7043338.37	10017958.37
48	16080.00	2990700.00	7353120.73	10343820.73
49	900.00	2991600.00	7665986.01	10657586.01
50	10320.00	3001920.00	7959650.46	10961570.46
51	2280.00	3004200.00	8250817.27	11255017.27
52	28800.00	3033000.00	8509849.35	11542849.35
53	75960.00	3108960.00	8723973.73	11832933.73
54	52140.00	3161100.00	8960331.53	12121431.53
55	28920.00	3190020.00	9214841.26	12404861.26

sslc

-----PATIENCE, ... ET LONGUEUR DE TEMPS !... -----

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		26100.00		26100.00		991800.00		1017900.00	
	2		139680.00		165780.00		2596295.05		2762075.05	
	3		300.00		166080.00		2097109.07		2263189.07	
	4		409980.00		576060.00		2901153.30		3477213.30	
	5		751920.00		1327980.00		4449989.42		5777969.42	
	6		1579800.00		2907780.00		7007283.56		9915063.56	
	7		374280.00		3282060.00		9618252.74		12900312.74	
	8		111600.00		3393660.00		11585441.81		14979101.81	
	9		113460.00		3507120.00		13052843.10		16559963.10	
	10		625380.00		4132500.00		14193106.64		18325606.64	
	11		321920.00		4454420.00		15514012.46		19968432.46	
	12		240120.00		4694540.00		16776731.02		21471271.02	
	13		74160.00		4768700.00		17995969.17		22764669.17	
	14		274560.00		5043260.00		18986696.30		24029956.30	
	15		225000.00		5268260.00		19979374.77		25247634.77	
	16		2460.00		5270720.00		21039495.77		26310215.77	
	17		539340.00		5810060.00		21708986.06		27519046.06	
	18		243000.00		6053060.00		22655617.41		28708677.41	
	19		900.00		6053960.00		23721568.33		29775528.33	
	20		557220.00		6611180.00		24363154.00		30974334.00	
	21		667440.00		7278620.00		25051132.62		32329752.62	
	22		319800.00		7598420.00		26089014.82		33687434.82	
	23		124560.00		7722980.00		27253602.04		34976582.04	
	24		389520.00		8112500.00		28186301.76		36298801.76	
	25		1680180.00		9792680.00		28288816.35		38081496.35	
	26		773220.00		10565900.00		29413963.75		39979863.75	
	27		1056420.00		11622320.00		30446628.83		42068948.83	
	28		193740.00		11816060.00		32255839.23		44071899.23	
	29		521340.00		12337400.00		33755065.24		46092465.24	
	30		4980.00		12342380.00		35643588.31		47985968.31	
	31		2065920.00		14408300.00		35911117.22		50319417.22	
	32		143340.00		14551640.00		37999680.76		52551320.76	
	33		522660.00		15074300.00		39712945.81		54787245.81	
	34		572160.00		15646460.00		41393015.52		57039475.52	
	35		139920.00		15786380.00		43417591.90		59203971.90	
	36		720.00		15787100.00		45468922.63		61256022.63	
	37		9900.00		15797000.00		47409990.33		63206990.33	
	38		1980.00		15798980.00		49264259.21		65063239.21	

système ss2 tp

39	3060.00	15802040.00	51030333.22	66832373.22
40	81900.00	15883940.00	52653554.52	68537494.52
41	960.00	15884900.00	54281905.11	70166805.11
42	140940.00	16025840.00	55727859.26	71753699.26
43	678540.00	16704380.00	56701818.26	73406198.26
44	13140.00	16717520.00	58275517.21	74993037.21
45	1200.00	16718720.00	59797630.71	76516350.71
46	302640.00	17021360.00	61014074.05	78035434.05
47	780.00	17022140.00	62474402.66	79496542.66
48	1354276.00	18376416.00	62764710.87	81141126.87
49	91500.00	18467916.00	64273049.19	82740965.19
50	2760.00	18470676.00	65813070.16	84283746.16
51	231000.00	18701676.00	67108964.61	85810640.61
52	227820.00	18929496.00	68392610.47	87322106.47
53	80700.00	19010196.00	69785349.74	88795545.74
54	1380.00	19011576.00	71209019.77	90220595.77
55	501840.00	19513416.00	72163693.19	91677109.19

ss2

-----PATIENCE, ... ET LONGUEUR DE TEMPS !... -----

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		107400.00		107400.00		4081200.00		4188600.00	
	2		17220.00		124620.00		3215262.50		3339882.50	
	3		180.00		124800.00		2131181.46		2255981.46	
	4		32880.00		157680.00		1757724.64		1915404.64	
	5		960.00		158640.00		1560804.00		1719444.00	
	6		26100.00		184740.00		1460578.51		1645318.51	
	7		44160.00		228900.00		1429886.95		1658786.95	
	8		333720.00		562620.00		1523111.34		2085731.34	
	9		17820.00		580440.00		1824756.52		2405196.52	
	10		40860.00		621300.00		2060175.41		2681475.41	
	11		18780.00		640080.00		2272014.00		2912094.00	
	12		960.00		641040.00		2457536.05		3098576.05	
	13		960.00		642000.00		2611754.61		3253754.61	
	14		79860.00		721860.00		2713383.87		3435243.87	
	15		240.00		722100.00		2869295.66		3591395.66	
	16		120.00		722220.00		3005541.55		3727761.55	
	17		1800.00		724020.00		3125205.66		3849225.66	
	18		480.00		724500.00		3233483.70		3957983.70	
	19		780.00		725280.00		3331114.51		4056394.51	
	20		37260.00		762540.00		3398975.89		4161515.89	
	21		2100.00		764640.00		3493639.31		4258279.31	
	22		72060.00		836700.00		3537856.17		4374556.17	
	23		258704.00		1095404.00		3480225.95		4575629.95	
	24		480.00		1095884.00		3664771.53		4760655.53	
	25		21900.00		1117784.00		3821050.46		4938834.46	
	26		478620.00		1596404.00		3661188.77		5257592.77	
	27		80760.00		1677164.00		3901101.89		5578265.89	
	28		1200.00		1678364.00		4198709.79		5877073.79	
	29		80700.00		1759064.00		4420179.54		6179243.54	
	30		688860.00		2447924.00		4205581.92		6653505.92	
	31		2220.00		2450144.00		4648558.67		7098702.67	
	32		758880.00		3209024.00		4505829.88		7714853.88	
	33		166620.00		3375644.00		4961353.49		8336997.49	
	34		8280.00		3383924.00		5541985.88		8925909.88	
	35		951354.00		4335278.00		5374246.95		9709524.95	
	36		1320.00		4336598.00		6115004.01		10451602.01	

système ss3 tn

37	14700.00	4351298.00	6807331.92	11158629.92
38	3420.00	4354718.00	7476257.49	11830975.49
39	2520.00	4357238.00	8113936.89	12471174.89
40	162480.00	4519718.00	8595470.80	13115188.80
41	520320.00	5040038.00	8795989.74	13836027.74
42	96720.00	5136758.00	9407098.41	14543856.41
43	418200.00	5554958.00	9747486.92	15302444.92
44	434760.00	5989718.00	10122004.96	16111722.96
45	543780.00	6533498.00	10455427.05	16988925.05
46	8820.00	6542318.00	11289662.64	17831980.64
47	488280.00	7030598.00	11698464.68	18729062.68
48	480.00	7031078.00	12560234.63	19591312.63
49	540.00	7031618.00	13389262.17	20420880.17
50	2220.00	7033838.00	14186174.47	21220012.47
51	1080.00	7034918.00	14955392.07	21990310.07
52	137340.00	7172258.00	15583361.40	22755619.40
53	91860.00	7264118.00	16244887.27	23509005.27
54	22800.00	7286918.00	16953395.07	24240313.07
55	22920.00	7309838.00	17640926.94	24950764.94

-----PATIENCE, ... ET LONGUEUR DE TEMPS !... -----

ss3

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		242460.00		242460.00		9213480.00		9455940.00	
	2		6300.00		248760.00		6822255.78		7071015.78	
	3		253680.00		502440.00		5779939.19		6282379.19	
	4		24120.00		526560.00		5132986.05		5659546.05	
	5		37620.00		564180.00		4760134.52		5324314.52	
	6		928380.00		1492560.00		5367651.80		6860211.80	
	7		534180.00		2026740.00		6526365.89		8553105.89	
	8		191700.00		2218440.00		7672964.45		9891404.45	
	9		11760.00		2230200.00		8612664.57		10842864.57	
	10		159240.00		2389440.00		9311959.13		11701399.13	
	11		19140.00		2408580.00		9978391.96		12386971.96	
	12		595980.00		3004560.00		10383955.59		13388515.59	
	13		476220.00		3480780.00		11059930.45		14540710.45	
	14		58980.00		3539760.00		12008166.83		15547926.83	
	15		5820.00		3545580.00		12869278.24		16414858.24	
	16		100620.00		3646200.00		13577351.28		17223551.28	
	17		6300.00		3652500.00		14286577.20		17939077.20	
	18		328140.00		3980640.00		14750341.79		18730981.79	
	19		4560.00		3985200.00		15457556.28		19442756.28	
	20		6780.00		3991980.00		16096644.36		20088624.36	
	21		69420.00		4061400.00		16642504.44		20703904.44	
	22		579120.00		4640520.00		16846901.45		21487421.45	
	23		577080.00		5217600.00		17198187.64		22415787.64	
	24		631920.00		5849520.00		17640160.70		23489680.70	
	25		120.00		5849640.00		18630869.61		24480509.61	
	26		148200.00		5997840.00		19448098.84		25445938.84	
	27		928140.00		6925980.00		19704041.08		26630021.08	
	28		43860.00		6969840.00		20776270.68		27746110.68	
	29		3600.00		6973440.00		21816599.04		28790039.04	
	30		300.00		6973740.00		22794649.78		29768389.78	
	31		66027.00		7039767.00		23665628.80		30705395.80	
	32		167880.00		7207647.00		24423995.53		31631642.53	
	33		186840.00		7394487.00		25158574.31		32553061.31	
	34		279044.00		7673531.00		25819330.69		33492861.69	

système ss4 tp

35	420120.00	8093651.00	26389647.05	34483298.05
36	67800.00	8161451.00	27277165.83	35438616.83
37	323460.00	8484911.00	27934602.45	36419513.45
38	112020.00	8596931.00	28780673.71	37377604.71
39	5280.00	8602211.00	29689605.17	38291816.17
40	634261.00	9236472.00	30060724.00	39297196.00
41	1920.00	9238392.00	31019685.03	40258077.03
42	902340.00	10140732.00	31216809.09	41357541.09
43	2100.00	10142832.00	32267708.82	42410540.82
44	4200.00	10147032.00	33273618.04	43420650.04
45	480.00	10147512.00	34242518.29	44390030.29
46	177060.00	10324572.00	35029077.76	45353649.76
47	42360.00	10366932.00	35920860.49	46287792.49
48	37020.00	10403952.00	36789411.79	47193363.79
49	54540.00	10458492.00	37616635.41	48075127.41
50	335520.00	10794012.00	38187993.36	48982005.36
51	300.00	10794312.00	39062736.85	49857048.85
52	152040.00	10946352.00	39780423.13	50726775.13
53	111360.00	11057712.00	40527308.46	51585020.46
54	491760.00	11549472.00	40942730.47	52492202.47
55	80340.00	11629812.00	41752508.59	53382320.59

-----PATIENCE, ...ET LONGUEUR DE TEMPS !...-----

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		3.00		3.00		114.00		117.00	
	2		30.00		33.00		485.21		518.21	
	3		113.00		146.00		1004.69		1150.69	
	4		81.00		227.00		1295.64		1522.64	
	5		115.00		342.00		1576.33		1918.33	
	6		9.00		351.00		1762.51		2113.51	
	7		2.00		353.00		1867.81		2220.81	
	8		91.00		444.00		1957.36		2401.36	
	9		112.00		556.00		2092.06		2648.06	
	10		15.00		571.00		2274.93		2845.93	
	11		138.00		709.00		2406.44		3115.44	
	12		50.00		759.00		2610.83		3369.83	
	13		77.00		836.00		2796.50		3632.50	
	14		24.00		860.00		3008.94		3868.94	
	15		108.00		968.00		3166.18		4134.18	
	16		88.00		1056.00		3355.80		4411.80	
	17		670.00		1726.00		3266.04		4992.04	
	18		120.00		1846.00		3714.74		5560.74	
	19		26.00		1872.00		4206.65		6078.65	
	20		114.00		1986.00		4605.50		6591.50	
	21		325.00		2311.00		4873.89		7184.89	
	22		55.00		2366.00		5378.77		7744.77	
	23		242.00		2608.00		5736.09		8344.09	
	24		68.00		2676.00		6241.47		8917.47	
	25		422.00		3098.00		6488.63		9586.63	
	26		180.00		3278.00		6984.89		10262.89	
	27		10.00		3288.00		7605.22		10893.22	
	28		1146.00		4434.00		7387.06		11821.06	
	29		600.00		5034.00		7824.80		12858.80	
	30		15.00		5049.00		8784.20		13833.20	
	31		36.00		5085.00		9671.37		14756.37	
	32		4.00		5089.00		10536.00		15625.00	

/MUSA 75,

33	0.00	5089.00	11354.24	16443.24
34	8.00	5097.00	12120.64	17217.64
35	227.00	5324.00	12680.31	18004.31
36	65.00	5389.00	13375.82	18764.82
37	176.00	5565.00	13961.46	19526.46
38	58.00	5623.00	14640.31	20263.31
39	457.00	6080.00	14982.99	21062.99
40	300.00	6380.00	15508.15	21888.15
41	97.00	6477.00	16218.59	22695.59
42	263.00	6740.00	16779.83	23519.83
43	452.00	7192.00	17204.74	24396.74
44	255.00	7447.00	17838.35	25285.35
45	197.00	7644.00	18530.16	26174.16
46	193.00	7837.00	19225.54	27062.54
47	6.00	7843.00	20074.08	27917.08
48	79.00	7922.00	20830.72	28752.72
49	816.00	8738.00	20959.66	29697.66
50	1351.00	10089.00	20747.13	30836.13
51	148.00	10237.00	21720.84	31957.84
52	21.00	10258.00	22785.13	33043.13
53	233.00	10491.00	23636.98	34127.98
54	134.00	10625.00	24571.94	35196.94
55	357.00	10982.00	25303.35	36285.35

/MUSA 75/

-----PATIENCE, ...ET LONGUEUR DE TEMPS !...-----

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		115.00		115.00		4370.00		4485.00	
	2		60.00		175.00		3999.49		4174.49	
	3		83.00		258.00		3206.71		3464.71	
	4		178.00		436.00		3227.28		3663.28	
	5		194.00		630.00		3492.74		4122.74	
	6		136.00		766.00		3798.58		4564.58	
	7		1077.00		1843.00		4602.70		6445.70	
	8		15.00		1858.00		5831.66		7689.66	
	9		15.00		1873.00		6706.51		8579.51	
	10		92.00		1965.00		7363.74		9328.74	
	11		50.00		2015.00		7939.38		9954.38	
	12		71.00		2086.00		8426.90		10512.90	
	13		606.00		2692.00		8697.57		11389.57	
	14		1189.00		3881.00		8990.26		12871.26	
	15		40.00		3921.00		10237.31		14158.31	
	16		788.00		4709.00		10986.89		15695.89	
	17		222.00		4931.00		12221.74		17152.74	
	18		72.00		5003.00		13471.61		18474.61	
	19		615.00		5618.00		14309.61		19927.61	
	20		589.00		6207.00		15273.93		21480.93	
	21		15.00		6222.00		16668.80		22890.80	
	22		390.00		6612.00		17709.64		24321.64	
	23		1863.00		8475.00		17832.41		26307.41	
	24		1337.00		9812.00		18782.08		28594.08	
	25		4508.00		14320.00		17884.71		32204.71	
	26		834.00		15154.00		20651.72		35805.72	
	27		3400.00		18554.00		21638.40		40192.40	
	28		0.00		18554.00		25715.07		44269.07	
	29		4561.00		23115.00		26265.63		49380.63	
	30		3186.00		26301.00		28742.01		55043.01	

31	10571.00	36872.00	26318.91	63190.91
32	563.00	37435.00	33551.93	70986.93
33	2770.00	40205.00	38818.07	79023.07
34	52.00	40257.00	46356.47	86613.47
35	5593.00	45850.00	49269.65	95119.65
36	11696.00	57546.00	48338.94	105884.94
37	6724.00	64270.00	53338.85	117608.85
38	2546.00	66816.00	62484.20	129300.20
39	10175.00	76991.00	65610.39	142601.39

-----PATIENCE, ...ET LONGUEUR DE TEMPS !...-----

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		15301.00		15301.00		581438.00		596739.00	
	2		51313.00		66614.00		1112536.40		1179150.40	
	3		38141.00		104755.00		1075459.28		1180214.28	

-----PATIENCE, ...ET LONGUEUR DE TEMPS !...-----

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		125230.00		125230.00		4758740.00		4883970.00	
	2		17170.00		142400.00		3710081.48		3852481.48	
	3		83430.00		225830.00		2894052.89		3119882.89	

-----PATIENCE, ...ET LONGUEUR DE TEMPS !...-----

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		76900.00		76900.00		2922200.00		2999100.00	
	2		32111.00		109011.00		2567141.47		2676152.47	

-----PATIENCE, ...ET LONGUEUR DE TEMPS !...-----

I	NUMERO	I	T.T.F	I	DATE	I	PATIENCE	I	SEUIL	I
	1		83747.00		83747.00		3182386.00		3266133.00	
	2		6397.00		90144.00		2412982.92		2503126.92	
	3		7917.00		98061.00		1621345.62		1719406.62	
	4		954.00		99015.00		1282038.28		1381053.28	

-----PATIENCE, ...ET LONGUEUR DE TEMPS !...-----

Dans l'ordre, systèmes 1,2,3 et 4 EN phase opérationnelle

### III.2.1- Bilan des essais de JELTSAR

Dans la partie II nous avons évoqué le caractère plus ou moins optimiste qui, d'un point de vue conceptuel, est inhérent au modèle JM. Cependant, des essais pratiques auxquels nous avons soumis la règle JELTSAR nous pouvons tirer deux remarques fondamentales :

- La règle d'arrêt n'a que très peu validé à tort les systèmes essayés. En effet, sur 18 exemples elle ne s'est arrêtée à tort qu'une fois.
- Le risque d'arrêt à tort est plus élevé au début des essais. De tels arrêts précoces sont souvent lourds de conséquence dans la mesure où il peut rester encore une bonne centaine d'erreurs à débusquer.

C'est pour éviter ce risque de validation hâtive que nous avons été amenés à considérer une autre utilisation et par conséquent à formuler une autre interprétation de la règle JELTSAR.

Nous proposons d'utiliser cette règle à titre indicatif et non de façon péremptoire.

Cette recommandation empirique peut être justifiée comme suit :

Nous faisons l'hypothèse que les défaillances se manifestent par classes d'erreurs. Chaque classe étant définie comme un ensemble d'erreurs auxquelles sont associés des taux de manifestations compris dans un certain intervalle. L'interprétation que nous nous proposons de faire vis-à-vis de cette règle revient à dire que les temps de validation qui sont exigés par celle-ci correspondent au temps nécessaire à l'épuisement d'une certaine catégorie d'erreurs résiduelles. Vues sous ce jour, les hypothèses du modèle JM deviennent plausibles en regard de chaque classe d'erreurs et non plus pour chaque erreur élémentaire.

La démarche préconisée est donc la suivante : La règle étant mise en oeuvre, le logiciel éprouvé est continuellement sollicité (il est éventuel-

lement immobilisé pour sa correction puis relancé) tant que les délais qui sont itérativement délivrés par la règle ne sont pas épuisés. C'est le seul point impératif de la règle. Lorsque l'on aura enfin atteint le délai de validation courant, en l'absence de défaillance supplémentaire, cela indiquera alors une rupture dans le processus de manifestation d'une classe d'erreur. A partir de ce moment là, il s'amorcera vraisemblablement un nouveau processus de manifestation d'une autre catégorie d'erreurs résiduelles. Comme nous supposons qu'il y a indépendance dans les différents processus de manifestation des classes d'erreurs, il paraît alors plausible de réinitialiser la règle d'arrêt depuis cette dernière rupture observée. En effet, le dernier processus d'écoulement d'une classe d'erreurs ne nous apporte aucune information substantielle sur le processus de manifestation des erreurs de la classe suivante. La règle repart alors comme si l'on était en présence d'un nouveau système à analyser.

Nous verrons que la version Bayésienne, LITSAR de ce même test souffre également des mêmes limitations évoquées ci-dessus.

### III.3 - Version Bayésienne, LITSAR.

Les essais probatoires portent sur les mêmes données de défaillance que celles qui viennent d'être présentées. Les tableaux regroupant les résultats s'expliquent de la façon suivante :

- la première colonne porte le numéro  $i$  de l'erreur courante,
- la seconde colonne, notée DATE, donne les temps cumulés des périodes de bon fonctionnement du logiciel jusqu'à la manifestation de l'erreur courante,
- les colonnes désignées PATIENCE, SEUIL ont les mêmes interprétations que dans la version classique précédente.

Le modèle de Littlewood, LB, sur lequel s'appuie la règle d'arrêt dans sa version Bayésienne, comporte trois paramètres inconnus :  $N, \alpha, \beta$ .

Nous avons vu dans la première partie que ce modèle dégénérerait en modèle JM lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  tendaient vers l'infini mais en respectant toutefois la condition  $\frac{\alpha}{\beta} = \text{cste}$

Dans les tableaux qui suivent, la colonne notée ALPHA regroupe les valeurs suivantes :

- si l'information apportée par les données ne permet pas de mettre en lumière l'effet de dispersion des différents taux de manifestation des erreurs, tel que le conçoit le modèle LB, alors ce dernier modèle dégénère en modèle JM Bayésien. Ce cas de figure est signalé par la lettre J en fin de ligne. ALPHA représente dans ce cas un estimateur du rapport  $\frac{\alpha}{\beta}$ ,

- en revanche, lorsque cet effet de dispersion devient significatif au niveau des données, le modèle LB lui-même se met en oeuvre, et ALPHA devient alors un estimateur du paramètre  $\alpha$ . Dans ce cas, en fin de ligne figure la lettre L.

Le risque associé à une validation à tort est maintenu à 5%. La chaîne de caractères !!!!!!! dénote un arrêt prématuré.

## Littlewood avec loi uniforme sur N

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha	
1	191.00	676.91	867.91	0.004236	J
2	413.00	963.54	1376.54	0.002962	J
3	693.00	1346.33	2039.33	0.002139	J
4	983.00	1794.44	2777.44	0.001651	J
5	1273.00	2288.78	3561.78	0.001338	J
6	1658.00	2803.14	4461.14	0.001103	J
7	2228.00	3348.87	5576.87	0.000906	J
8	2838.00	4032.25	6870.25	0.000753	J
9	3203.00	4943.86	8146.86	0.000648	J
10	3593.00	5836.27	9429.27	0.000570	J
11	3868.00	6792.97	10660.97	0.000512	J
12	4228.00	7667.75	11895.75	0.000465	J
13	5028.00	8301.33	13329.33	0.000421	J
14	6238.00	8858.79	15096.79	0.000376	J
15	6645.00	10183.98	16828.98	0.000341	J
16	6695.00	11706.70	18401.70	0.000315	J
17	7355.00	12699.96	20054.96	0.000292	J
18	8862.00	13199.74	22061.74	0.000268	J
19	9487.00	14606.85	24093.85	0.000248	J
20	10399.00	15838.14	26237.14	0.000229	J
21	11037.00	17362.00	28399.00	0.000213	J
22	11330.00	19151.35	30481.35	0.000200	J
23	12542.00	20201.33	32743.33	0.000188	J
24	13154.00	21855.80	35009.80	0.000177	J
25	13829.00	23468.18	37297.18	0.000167	J
26	15044.00	24692.07	39736.07	0.000158	J
27	17759.00	24908.27	42667.27	0.000148	J
28	21310.00	24927.72	46237.72	0.000137	J
29	22110.00	27670.12	49780.12	0.000128	J
30	26020.00	27949.37	53969.37	0.000119	J
31	32920.00	26460.15	59380.15	0.000108	J
32	36220.00	28959.85	65179.85	0.000099	J
33	37730.00	33253.45	70983.45	0.000092	J
34	37925.00	38612.23	76537.23	0.000085	J
35	39881.00	42313.01	82194.01	0.000080	J
36	40016.00	47595.52	87611.52	0.000075	J
37	40677.00	52225.48	92902.48	0.000071	J
38	40727.00	57241.91	97968.91	0.000068	J
39	41456.00	61487.62	102943.62	0.000065	J
40	42356.00	65506.21	107862.21	0.000062	J
41	42536.00	70074.22	112610.22	0.000060	J
42	46761.00	71091.60	117852.60	0.000057	J
43	62361.00	63000.67	125361.67	0.000054	J
44	62361.00	70221.58	132582.58	0.000051	J
45	62361.00	77171.95	139532.95	0.000049	J
46	62661.00	83612.80	146273.80	0.000047	J
47	71682.00	82414.63	154096.63	0.000044	J
48	74201.00	87806.28	162007.28	0.000042	J
49	81091.00	89529.40	170620.40	0.000040	J
50	84439.00	94968.92	179407.92	0.000038	J
51	87189.00	101091.12	188280.12	0.000037	J

système 2 tp



50	664808.00	2214105.32	2878913.32	0.000002	J
51	666188.00	2254923.73	2921111.73	0.000002	J
52	682808.00	2281445.25	2964253.25	0.000002	J
53	690188.00	2316884.22	3007072.22	0.000002	J
54	693788.00	2355306.62	3049094.62	0.000002	J
55	705368.00	2386013.89	3091381.89	0.000002	J

s-5

-----...DONNEES EPUISEES...-----

Littlewood avec loi uniforme sur N

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha	
1	3.00	10.63	13.63	0.269667	J
!!!!!!!					
2	17.00	28.58	45.58	0.089453	J
!!!!!!!					
3	76.00	250.79	326.79	2.136918	L
4	108.00	140.51	248.51	0.018449	J
5	116.00	204.79	320.79	0.014858	J
6	168.00	249.78	417.78	0.011776	J
7	170.00	323.29	493.29	0.010243	J
8	195.00	375.24	570.24	0.009067	J
9	197.00	437.58	634.58	0.008313	J
10	200.00	490.36	690.36	0.007779	J
11	204.00	536.22	740.22	0.007372	J
12	205.00	579.10	784.10	0.007062	J
13	235.00	601.03	836.03	0.006712	J
14	256.00	634.85	890.85	0.006376	J
15	452.00	564.46	1016.46	0.005651	J
16	717.00	510.03	1227.03	0.004731	J
17	723.00	695.91	1418.91	0.004131	J
18	726.00	867.99	1593.99	0.003711	J
19	734.00	1022.31	1756.31	0.003398	J
20	735.00	1170.51	1905.51	0.003157	J
21	747.00	1299.52	2046.52	0.002962	J
22	783.00	1404.16	2187.16	0.002792	J
23	821.00	1507.06	2328.06	0.002641	J
24	822.00	1637.61	2459.61	0.002517	J
25	896.00	1705.24	2601.24	0.002395	J
26	939.00	1805.43	2744.43	0.002284	J
27	1175.00	1759.70	2934.70	0.002148	J
28	1296.00	1845.41	3141.41	0.002018	J
29	1314.00	2026.26	3340.26	0.001908	J
30	1323.00	2207.06	3530.06	0.001814	J
31	1346.00	2368.55	3714.55	0.001733	J
32	1347.00	2542.72	3889.72	0.001663	J
33	2019.00	2170.79	4189.79	0.001551	J
34	2208.00	2303.69	4511.69	0.001447	J
35	2291.00	2542.82	4833.82	0.001356	J
36	2343.00	2807.51	5150.51	0.001278	J
37	2351.00	3103.29	5454.29	0.001212	J
38	2352.00	3392.86	5744.86	0.001155	J
39	2393.00	3637.03	6030.03	0.001104	J
40	2400.00	3904.48	6304.48	0.001060	J
41	2443.00	4131.87	6574.87	0.001020	J
42	2444.00	4390.70	6834.70	0.000985	J
43	2448.00	4637.12	7085.12	0.000953	J
44	2453.00	4873.87	7326.87	0.000925	J

système 6 tp

45	2454.00	5105.87	7559.87	0.000899	J
46	2470.00	5316.88	7786.88	0.000876	J
47	2540.00	5476.18	8016.18	0.000854	J
48	2600.00	5646.23	8246.23	0.000832	J
49	2602.00	5866.80	8468.80	0.000813	J
50	2604.00	6080.30	8684.30	0.000795	J
51	2607.00	6286.24	8893.24	0.000778	J
52	2776.00	6342.29	9118.29	0.000761	J
53	2805.00	6535.16	9340.16	0.000745	J
54	2893.00	6673.69	9566.69	0.000729	J
55	2948.00	6845.46	9793.46	0.000714	J

s-6

-----...DONNEES EPUISEES...-----

Littlewood avec loi uniforme sur N

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha	
1	8100.00	28706.83	36806.83	0.000100	J
2	12900.00	34959.86	47859.86	0.000085	J
3	13800.00	40917.55	54717.55	0.000080	J
4	14250.00	45501.58	59751.58	0.000077	J
5	14700.00	49207.54	63907.54	0.000075	J
6	20700.00	51597.62	72297.62	0.000068	J
7	23100.00	57528.16	80628.16	0.000063	J
8	25200.00	63544.41	88744.41	0.000058	J
9	27300.00	69428.88	96728.88	0.000055	J
10	28560.00	75607.69	104167.69	0.000052	J
11	29760.00	81411.16	111171.16	0.000049	J
12	30060.00	87356.68	117416.68	0.000047	J
13	39060.00	87841.63	126901.63	0.000044	J
14	39660.00	95894.12	135554.12	0.000042	J
15	42060.00	102170.02	144230.02	0.000040	J
16	42660.00	109607.35	152267.35	0.000038	J
17	57720.00	107125.24	164845.24	0.000036	J
18	57840.00	118484.74	176324.74	0.000034	J
19	58200.00	128740.46	186940.46	0.000032	J
20	59400.00	137667.29	197067.29	0.000031	J
21	59700.00	146807.04	206507.04	0.000029	J
22	60900.00	154698.25	215598.25	0.000028	J
23	62100.00	162283.70	224383.70	0.000027	J
24	65400.00	168048.31	233448.31	0.000027	J
25	85200.00	161730.67	246930.67	0.000025	J
26	88200.00	172095.26	260295.26	0.000024	J
27	88800.00	184190.86	272990.86	0.000023	J
28	98400.00	188744.62	287144.62	0.000022	J
29	106800.00	195563.69	302363.69	0.000021	J
30	114900.00	203595.55	318495.55	0.000020	J
31	130500.00	206542.24	337042.24	0.000019	J
32	132300.00	222694.51	354994.51	0.000018	J
33	137700.00	235419.44	373119.44	0.000017	J
34	141600.00	249517.11	391117.11	0.000017	J
35	144000.00	264717.07	408717.07	0.000016	J
36	145200.00	280529.92	425729.92	0.000015	J
37	224700.00	231614.20	456314.20	0.000014	J
38	233700.00	253428.89	487128.89	0.000014	J

système 17 t

-----...DONNEES EPUISEES...-----

## Littlewood avec loi uniforme sur N

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha	
1	20336.00	72071.85	92407.85	0.000040	J
2	32112.00	87419.14	119531.14	0.000034	J
3	73045.00	124273.11	197318.11	0.000022	J
4	107839.00	176400.68	284239.68	0.000016	J
5	124975.00	234217.47	359192.47	0.000013	J
6	273421.00	267401.14	540822.14	0.000009	J
7	281416.00	403150.45	684566.45	0.000007	J
8	283052.00	516614.39	799666.39	0.000006	J
9	298882.00	604693.22	903575.22	0.000006	J
10	320814.00	682087.58	1002901.58	0.000005	J
11	323299.00	765753.26	1089052.26	0.000005	J
12	334299.00	834758.59	1169057.59	0.000005	J
13	337179.00	903484.94	1240663.94	0.000005	J
14	398361.00	931295.80	1329656.80	0.000004	J
15	403161.00	1007923.14	1411084.14	0.000004	J
16	441166.00	1057350.40	1498516.40	0.000004	J
17	457366.00	1126081.72	1583447.72	0.000004	J
18	463366.00	1199518.12	1662884.12	0.000004	J
19	464366.00	1271657.21	1736023.21	0.000003	J
20	474366.00	1332098.20	1806464.20	0.000003	J
21	474586.00	1397115.98	1871701.98	0.000003	J
22	510166.00	1432162.13	1942328.13	0.000003	J
23	591166.00	1438905.35	2030071.35	0.000003	J
24	1234261.00	1045776.20	2280037.20	0.000003	J
25	1282118.00	1243175.62	2525293.62	0.000002	J
26	1436918.00	1355603.25	2792521.25	0.000002	J
27	1607378.00	1476044.73	3083422.73	0.000002	J
28	1715918.00	1665819.36	3381737.36	0.000002	J
29	1789718.00	1889470.23	3679188.23	0.000002	J
30	1791578.00	2168839.95	3960417.95	0.000002	J
31	2128178.00	2168942.30	4297120.30	0.000001	J
32	2396318.00	2274596.39	4670914.39	0.000001	J
33	2471198.00	2569348.81	5040546.81	0.000001	J
34	2757398.00	2689996.20	5447394.20	0.000001	J
35	2782718.00	3056747.34	5839465.34	0.000001	J
36	2789798.00	3424747.39	6214545.39	0.000001	J
37	2849618.00	3733791.62	6583409.62	0.000001	J
38	2937518.00	4013981.61	6951499.61	0.000000	J
39	3013718.00	4303198.96	7316916.96	0.000000	J
40	3102998.00	4579103.04	7682101.04	0.000000	J
41	4312598.00	3919386.87	8231984.87	0.000000	J

...DONNEES EPUISEES...

système 27 tp

## Littlewood avec loi uniforme sur N

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha	
1	82530.00	292490.66	375020.66	0.000010	J
!!!!!!!					
2	796230.00	1206500.01	2002730.01	0.000002	J
3	1467450.00	2221598.10	3689048.10	0.000001	J
4	1528920.00	3191674.26	4720594.26	0.000000	J
5	1606050.00	3888675.40	5494725.40	0.000000	J

système ssla tp

6	1811700.00	4431732.24	6243432.24	0.000000	J
7	1917360.00	4987379.34	6904739.34	0.000000	J
8	1950750.00	5510459.15	7461209.15	0.000000	J
9	1967310.00	5966996.13	7934306.13	0.000000	J
10	1976670.00	6365675.37	8342345.37	0.000000	J
11	2044170.00	6686377.98	8730547.98	0.000000	J
12	2048760.00	7024836.69	9073596.69	0.000000	J
13	2171970.00	7260954.05	9432924.05	0.000000	J
14	2177370.00	7579393.84	9756763.84	0.000000	J
15	2856330.00	7458091.03	10314421.03	0.000000	J
16	2913930.00	7924679.68	10838609.68	0.000000	J
17	2999610.00	8345013.50	11344623.50	0.000000	J
18	3026070.00	8789483.09	11815553.09	0.000000	J
19	3126690.00	9153376.15	12280066.15	0.000000	J
20	3138840.00	9573306.18	12712146.18	0.000000	J
21	3293190.00	9864414.48	13157604.48	0.000000	J
22	3457800.00	10160092.19	13617892.19	0.000000	J
23	3460950.00	10586757.77	14047707.77	0.000000	J
24	3471300.00	10981033.27	14452333.27	0.000000	J
25	3628800.00	11242808.12	14871608.12	0.000000	J
26	3695670.00	11586372.78	15282042.78	0.000000	J
27	3941370.00	11785451.33	15726821.33	0.000000	J
28	4108680.00	12076221.36	16184901.36	0.000000	J
29	4136400.00	12487762.35	16624162.35	0.000000	J
30	4366260.00	12723683.92	17089943.92	0.000000	J
31	4387680.00	13148684.68	17536364.68	0.000000	J
32	4391460.00	13570002.69	17961462.69	0.000000	J
33	4497030.00	13890190.49	18387220.49	0.000000	J
34	4499730.00	14293973.06	18793703.06	0.000000	J
35	4569120.00	14625878.80	19194998.80	0.000000	J
36	4631850.00	14958447.92	19590297.92	0.000000	J
37	4652190.00	15320231.72	19972421.72	0.000000	J
38	5065740.00	15345838.39	20411578.39	0.000000	J
39	5120910.00	15721369.86	20842279.86	0.000000	J
40	5162850.00	16100039.02	21262889.02	0.000000	J
41	5238270.00	16441339.57	21679609.57	0.000000	J
42	5239170.00	16841505.87	22080675.87	0.000000	J
43	5282370.00	17191395.88	22473765.88	0.000000	J
44	5662980.00	17248787.17	22911767.17	0.000000	J
45	6163830.00	17246601.53	23410431.53	0.000000	J
46	6233760.00	17668227.36	23901987.36	0.000000	J
47	6237360.00	18139780.76	24377140.76	0.000000	J
48	6238350.00	18598091.85	24836441.85	0.000000	J
49	6252750.00	19029913.10	25282663.10	0.000000	J
50	6255180.00	19459671.39	25714851.39	0.000000	J
51	6273090.00	19862776.10	26135866.10	0.000000	J
52	6278760.00	20265886.66	26544646.66	0.000000	J
53	6488820.00	20480018.30	26968838.30	0.000000	J
54	6571440.00	20819703.52	27391143.52	0.000000	J
55	6723180.00	21097344.17	27820524.17	0.000000	J

ssla

-----DONNEES EPUISEES.-----

Littlewood avec loi uniforme sur N

système ss1b t

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha
1	5400.00	19137.88	24537.88	0.000150 J
2	15600.00	32259.86	47859.86	0.000085 J

3	39660.00	55718.36	95378.36	0.000046	J
4	48120.00	84393.29	132513.29	0.000035	J
5	82020.00	109251.52	191271.52	0.000025	J
6	98520.00	149166.76	247686.76	0.000020	J
7	104820.00	190659.16	295479.16	0.000017	J
8	192360.00	199719.84	392079.84	0.000013	J
9	197760.00	276220.56	473980.56	0.000011	J
10	249540.00	321418.87	570958.87	0.000009	J
11	250680.00	403242.84	653922.84	0.000008	J
12	256980.00	471567.72	728547.72	0.000008	J
13	259380.00	535532.98	794912.98	0.000007	J
14	275640.00	584746.40	860386.40	0.000007	J
15	384780.00	576698.77	961478.77	0.000006	J
16	479160.00	607906.25	1087066.25	0.000005	J
17	484560.00	717747.65	1202307.65	0.000005	J
18	500160.00	812050.73	1312210.73	0.000005	J
19	514560.00	902648.06	1417208.06	0.000004	J
20	545220.00	977755.16	1522975.16	0.000004	J
21	676680.00	982338.74	1659018.74	0.000004	J
22	715380.00	1080351.28	1795731.28	0.000003	J
23	988860.00	1007895.50	1996755.50	0.000003	J
24	1073400.00	1132467.38	2205867.38	0.000003	J
25	1096560.00	1310277.67	2406837.67	0.000003	J
26	1272420.00	1365413.34	2637833.34	0.000002	J
27	1582440.00	1345326.92	2927766.92	0.000002	J
28	1731360.00	1503038.16	3234398.16	0.000002	J
29	1811040.00	1729917.40	3540957.40	0.000002	J
30	1823760.00	2009338.31	3833098.31	0.000002	J
31	1828680.00	2281798.49	4110478.49	0.000002	J
32	1899000.00	2488727.53	4387727.53	0.000001	J
33	1970340.00	2694789.70	4665129.70	0.000001	J
34	1971540.00	2957602.17	4929142.17	0.000001	J
35	2191200.00	3030923.37	5222123.37	0.000001	J
36	2227740.00	3280510.05	5508250.05	0.000001	J
37	2229420.00	3552355.26	5781775.26	0.000001	J
38	2273580.00	3777513.09	6051093.09	0.000001	J
39	2293740.00	4018654.75	6312394.75	0.000001	J
40	2342040.00	4228945.10	6570985.10	0.000001	J
41	2552100.00	4301665.80	6853765.80	0.000000	J
42	2582280.00	4547929.92	7130209.92	0.000000	J
43	2750280.00	4672284.27	7422564.27	0.000000	J
44	2923860.00	4806933.56	7730793.56	0.000000	J
45	2980680.00	5055559.44	8036239.44	0.000000	J
46	3252120.00	5119043.58	8371163.58	0.000000	J
47	3392040.00	5322643.91	8714683.91	0.000000	J
48	3578280.00	5494764.17	9073044.17	0.000000	J
49	3594180.00	5827214.55	9421394.55	0.000000	J
50	3779820.00	6004071.19	9783891.19	0.000000	J
51	3987840.00	6175066.46	10162906.46	0.000000	J
52	4050180.00	6487889.72	10538069.72	0.000000	J
53	4090560.00	6816140.79	10906700.79	0.000000	J
54	4120380.00	7147392.61	11267772.61	0.000000	J
55	4377714.00	7273088.56	11650802.56	0.000000	J

ss1b

-----DONNEES EPUISEES-----

Littlewood avec loi uniforme sur N

-----  
i      D(i)      Patience X(i+1)      Seuil Y(i+1)      Alpha

1	5400.00	19137.88	24537.88	0.000150	J
!!!!!!!					
2	86460.00	718511.38	804971.38	1.276912	L
3	88560.00	195122.22	283682.22	0.000015	J
4	102180.00	242076.82	344256.82	0.000013	J
5	124980.00	283607.23	408587.23	0.000012	J
6	138360.00	329019.06	467379.06	0.000011	J
7	142980.00	373490.04	516470.04	0.000010	J
8	148080.00	411461.05	559541.05	0.000009	J
9	174720.00	436729.78	611449.78	0.000009	J
10	220680.00	459963.95	680643.95	0.000008	J
11	225780.00	516572.70	742352.70	0.000007	J
12	254580.00	554930.07	809510.07	0.000007	J
13	313200.00	581083.72	894283.72	0.000006	J
14	315120.00	654903.01	970023.01	0.000006	J
15	414660.00	661855.89	1076515.89	0.000005	J
16	474660.00	719611.16	1194271.16	0.000005	J
17	477660.00	824020.27	1301680.27	0.000005	J
18	512160.00	898698.71	1410858.71	0.000004	J
19	564660.00	962733.85	1527393.85	0.000004	J
20	566940.00	1068129.15	1635069.15	0.000004	J
21	599040.00	1144740.60	1743780.60	0.000003	J
22	766980.00	1124736.05	1891716.05	0.000003	J
23	809820.00	1230802.18	2040622.18	0.000003	J
24	955740.00	1261670.02	2217410.02	0.000003	J
25	999120.00	1394269.79	2393389.79	0.000003	J
26	1042500.00	1526216.10	2568716.10	0.000002	J
27	1069320.00	1670285.89	2739605.89	0.000002	J
28	1355820.00	1610184.42	2966004.42	0.000002	J
29	1382820.00	1802536.21	3185356.21	0.000002	J
30	1427220.00	1974875.42	3402095.42	0.000002	J
31	1537440.00	2092877.18	3630317.18	0.000002	J
32	1806540.00	2095060.52	3901600.52	0.000002	J
33	1867380.00	2303829.33	4171209.33	0.000002	J
34	1953180.00	2490995.80	4444175.80	0.000001	J
35	2052000.00	2670775.05	4722775.05	0.000001	J
36	2113260.00	2886468.40	4999728.40	0.000001	J
37	2269560.00	3022778.38	5292338.38	0.000001	J
38	2322300.00	3259046.75	5581346.75	0.000001	J
39	2377260.00	3490166.95	5867426.95	0.000001	J
40	2409360.00	3737603.47	6146963.47	0.000001	J
41	2539020.00	3897492.47	6436512.47	0.000001	J
42	2655780.00	4077632.67	6733412.67	0.000000	J
43	2730780.00	4299868.21	7030648.21	0.000000	J
44	2768040.00	4554339.48	7322379.48	0.000000	J
45	2792220.00	4814749.37	7606969.37	0.000000	J
46	2938860.00	4964292.92	7903152.92	0.000000	J
47	2974620.00	5219439.75	8194059.75	0.000000	J
48	2990700.00	5486472.75	8477172.75	0.000000	J
49	2991600.00	5759186.83	8750786.83	0.000000	J
50	3001920.00	6014812.29	9016732.29	0.000000	J
51	3004200.00	6270125.71	9274325.71	0.000000	J
52	3033000.00	6494571.54	9527571.54	0.000000	J
53	3108960.00	6673978.71	9782938.71	0.000000	J
54	3161100.00	6876146.25	10037246.25	0.000000	J
55	3190020.00	7097570.34	10287590.34	0.000000	J

...DONNEES EPUISEES...

Littlewood avec loi uniforme sur N

système ss3tp

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha	
1	107400.00	380631.24	488031.24	0.000008	J
2	124620.00	404163.08	528783.08	0.000008	J
3	124800.00	436243.62	561043.62	0.000008	J
4	157680.00	469072.07	626752.07	0.000007	J
5	158640.00	516163.50	674803.50	0.000007	J
6	184740.00	549690.79	734430.79	0.000007	J
7	228900.00	585838.01	814738.01	0.000006	J
8	562620.00	540016.81	1102636.81	0.000005	J
9	580440.00	767200.83	1347640.83	0.000004	J
10	621300.00	953360.17	1574660.17	0.000003	J
11	640080.00	1137283.98	1777363.98	0.000003	J
12	641040.00	1312010.11	1953050.11	0.000003	J
13	642000.00	1465417.22	2107417.22	0.000003	J
14	721860.00	1555449.14	2277309.14	0.000002	J
15	722100.00	1707016.18	2429116.18	0.000002	J
16	722220.00	1843644.08	2565864.08	0.000002	J
17	724020.00	1966518.02	2690538.02	0.000002	J
18	724500.00	2080007.19	2804507.19	0.000002	J
19	725280.00	2184099.99	2909379.99	0.000002	J
20	762540.00	2254978.95	3017518.95	0.000002	J
21	764640.00	2353615.47	3118255.47	0.000002	J
22	836700.00	2395491.28	3232191.28	0.000002	J
23	1095404.00	2313067.15	3408471.15	0.000002	J
24	1095884.00	2477056.36	3572940.36	0.000002	J
25	1117784.00	2614505.98	3732289.98	0.000002	J
26	1596404.00	2402144.86	3998548.86	0.000002	J
27	1677164.00	2590380.72	4267544.72	0.000001	J
28	1678364.00	2842532.19	4520896.19	0.000001	J
29	1759064.00	3018685.40	4777749.40	0.000001	J
30	2447924.00	2721233.62	5169157.62	0.000001	J
31	2450144.00	3089732.06	5539876.06	0.000001	J
32	3209024.00	2837190.80	6046214.80	0.000001	J
33	3375644.00	3184208.38	6559852.38	0.000000	J
34	3383924.00	3665742.76	7049666.76	0.000000	J
35	4335278.00	3360583.81	7695861.81	0.000000	J
36	4336598.00	3975376.45	8311974.45	0.000000	J
37	4351298.00	4551360.09	8902658.09	0.000000	J
38	4354718.00	5113061.58	9467779.58	0.000000	J
39	4357238.00	5651751.57	10008989.57	0.000000	J
40	4519718.00	6035177.19	10554895.19	0.000000	J
41	5040038.00	6124295.06	11164333.06	0.000000	J
42	5136758.00	6628249.98	11765007.98	0.000000	J
43	5554958.00	6853492.18	12408450.18	0.000000	J
44	5989718.00	7105077.14	13094795.14	0.000000	J
45	6533498.00	7304760.65	13838258.65	0.000000	J
46	6542318.00	8013458.79	14555776.79	0.000000	J
47	7030598.00	8288597.10	15319195.10	0.000000	J
48	7031078.00	9024782.39	16055860.39	0.000000	J
49	7031618.00	9735665.80	16767283.80	0.000000	J
50	7033838.00	10421249.52	17455087.52	0.000000	J
51	7034918.00	11085471.62	18120389.62	0.000000	J
52	7172258.00	11610434.66	18782692.66	0.000000	J
53	7264118.00	12172072.80	19436190.80	0.000000	J
54	7286918.00	12785462.96	20072380.96	0.000000	J
55	7309838.00	13382311.88	20692149.88	0.000000	J

Littlewood avec loi uniforme sur N

système ss4tp

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha	
1	242460.00	859290.98	1101750.98	0.000003	J
2	248760.00	870750.49	1119510.49	0.000004	J
3	502440.00	1059934.86	1562374.86	0.000003	J
4	526560.00	1325337.05	1851897.05	0.000002	J
5	564180.00	1525371.09	2089551.09	0.000002	J
6	1492560.00	1569674.31	3062234.31	0.000002	J
7	2026740.00	2174245.84	4200985.84	0.000001	J
8	2218440.00	3010721.80	5229161.80	0.000000	J
9	2230200.00	3845098.62	6075298.62	0.000000	J
10	2389440.00	4482048.38	6871488.38	0.000000	J
11	2408580.00	5151669.70	7560249.70	0.000000	J
12	3004560.00	5434297.53	8438857.53	0.000000	J
13	3480780.00	5937060.99	9417840.99	0.000000	J
14	3539760.00	6767349.82	10307109.82	0.000000	J
15	3545580.00	7556955.47	11102535.47	0.000000	J
16	3646200.00	8208981.99	11855181.99	0.000000	J
17	3652500.00	8886585.39	12539085.39	0.000000	J
18	3980640.00	9291565.49	13272205.49	0.000000	J
19	3985200.00	9959786.36	13944986.36	0.000000	J
20	3991980.00	10574299.80	14566279.80	0.000000	J
21	4061400.00	11099668.28	15161068.28	0.000000	J
22	4640520.00	11235709.18	15876229.18	0.000000	J
23	5217600.00	11480333.72	16697933.72	0.000000	J
24	5849520.00	11779822.80	17629342.80	0.000000	J
25	5849640.00	12650344.44	18499984.44	0.000000	J
26	5997840.00	13354520.33	19352360.33	0.000000	J
27	6925980.00	13446803.99	20372783.99	0.000000	J
28	6969840.00	14373653.45	21343493.45	0.000000	J
29	6973440.00	15286823.89	22260263.89	0.000000	J
30	6973740.00	16153540.66	23127280.66	0.000000	J
31	7039767.00	16922933.67	23962700.67	0.000000	J
32	7207647.00	17582414.93	24790061.93	0.000000	J
33	7394487.00	18219443.82	25613930.82	0.000000	J
34	7673531.00	18779067.89	26452598.89	0.000000	J
35	8093651.00	19238138.96	27331789.96	0.000000	J
36	8161451.00	20022254.96	28183705.96	0.000000	J
37	8484911.00	20571566.25	29056477.25	0.000000	J
38	8596931.00	21314628.11	29911559.11	0.000000	J
39	8602211.00	22129648.03	30731859.03	0.000000	J
40	9236472.00	22389285.84	31625757.84	0.000000	J
41	9238392.00	23245973.37	32484365.37	0.000000	J
42	10140732.00	23314755.12	33455487.12	0.000000	J
43	10142832.00	24247037.42	34389869.42	0.000000	J
44	10147032.00	25143080.57	35290112.57	0.000000	J
45	10147512.00	26010203.62	36157715.62	0.000000	J
46	10324572.00	26696419.44	37020991.44	0.000000	J
47	10366932.00	27493570.47	37860502.47	0.000000	J
48	10403952.00	28272887.81	38676839.81	0.000000	J
49	10458492.00	29015286.70	39473778.70	0.000000	J
50	10794012.00	29497443.62	40291455.62	0.000000	J
51	10794312.00	30288744.47	41083056.47	0.000000	J
52	10946352.00	30923983.85	41870335.85	0.000000	J

53	11057712.00	31590468.50	42648180.50	0.000000	J
54	11549472.00	31917107.11	43466579.11	0.000000	J
55	11629812.00	32641174.52	44270986.52	0.000000	J

ss4 tp

-----DONNEES EPUISEES-----

Littlewood avec loi uniforme sur N

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha	
1	3.00	10.63	13.63	0.269667	J
!!!!!!!					
2	33.00	49.05	82.05	0.049696	J
!!!!!!!					
3	146.00	952.64	1098.64	1.350133	L
4	227.00	271.23	498.23	0.009202	J
5	342.00	410.86	752.86	0.006331	J
6	351.00	592.42	943.42	0.005215	J
7	353.00	737.79	1090.79	0.004632	J
8	444.00	825.50	1269.50	0.004073	J
9	556.00	927.72	1483.72	0.003555	J
10	571.00	1100.23	1671.23	0.003213	J
11	709.00	1192.47	1901.47	0.002870	J
12	759.00	1365.02	2124.02	0.002607	J
13	836.00	1516.73	2352.73	0.002385	J
14	860.00	1704.82	2564.82	0.002215	J
15	968.00	1828.24	2796.24	0.002054	J
16	1056.00	1980.70	3036.70	0.001912	J
17	1726.00	1763.35	3489.35	0.001680	J
18	1846.00	2094.17	3940.17	0.001501	J
19	1872.00	2487.81	4359.81	0.001369	J
20	1986.00	2793.50	4779.50	0.001259	J
21	2311.00	2950.35	5261.35	0.001152	J
22	2366.00	3356.31	5722.31	0.001067	J
23	2608.00	3607.67	6215.67	0.000989	J
24	2676.00	4016.69	6692.69	0.000925	J
25	3098.00	4146.64	7244.64	0.000860	J
26	3278.00	4527.22	7805.22	0.000803	J
27	3288.00	5045.65	8333.65	0.000756	J
28	4434.00	4659.27	9093.27	0.000697	J
29	5034.00	4908.33	9942.33	0.000641	J
30	5049.00	5698.12	10747.12	0.000596	J
31	5085.00	6430.97	11515.97	0.000559	J
32	5089.00	7156.49	12245.49	0.000528	J
33	5089.00	7849.14	12938.14	0.000502	J
34	5097.00	8501.46	13598.46	0.000480	J
35	5324.00	8946.39	14270.39	0.000459	J
36	5389.00	9534.33	14923.33	0.000441	J
37	5565.00	10013.74	15578.74	0.000424	J
38	5623.00	10592.78	16215.78	0.000409	J
39	6080.00	10824.52	16904.52	0.000394	J
40	6380.00	11235.23	17615.23	0.000379	J
41	6477.00	11836.14	18313.14	0.000366	J
42	6740.00	12285.97	19025.97	0.000354	J
43	7192.00	12590.84	19782.84	0.000341	J
44	7447.00	13103.66	20550.66	0.000330	J
45	7644.00	13676.06	21320.06	0.000319	J
46	7837.00	14253.44	22090.44	0.000309	J
47	7843.00	14991.42	22834.42	0.000300	J

/MUSA 75/

48	7922.00	15642.00	23564.00	0.000291	J
49	8738.00	15646.31	24384.31	0.000282	J
50	10089.00	15276.08	25365.08	0.000272	J
51	10237.00	16096.80	26333.80	0.000263	J
52	10258.00	17016.10	27274.10	0.000254	J
53	10491.00	17724.48	28215.48	0.000247	J
54	10625.00	18520.10	29145.10	0.000239	J
55	10982.00	19110.14	30092.14	0.000232	J

/MUSA 75/

-----...DONNEES EPUISEES...-----

système 40 tp/100

Littlewood avec loi uniforme sur N

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha	
1	3.20	11.34	14.54	0.252812	J
!!!!!!!!!!!!!!!					
2	147.10	35924.85	36071.95	0.459614	L
3	237.10	372.03	609.13	0.007163	J
4	265.90	529.94	795.84	0.005761	J
5	322.90	655.71	978.61	0.004870	J
6	540.90	757.89	1298.79	0.003788	J
7	808.90	934.86	1743.76	0.002898	J
!!!!!!!!!!!!!!!					
8	1944.30	2262.66	4206.96	4.730420	L
9	3065.67	8522.56	11588.23	2.189701	L
10	3072.27	13022.23	16094.50	2.148573	L
11	3099.27	10483.66	13582.93	3.155699	L
12	3387.20	4597.83	7985.03	0.000693	J
13	3408.93	5553.35	8962.28	0.000626	J
14	3481.56	6373.80	9855.36	0.000576	J
15	3590.21	7103.86	10694.07	0.000537	J
16	3632.51	7831.04	11463.55	0.000506	J
17	3717.11	8472.79	12189.90	0.000481	J
18	3865.16	9035.90	12901.06	0.000459	J
19	3983.60	9606.49	13590.09	0.000439	J
20	4037.21	10203.22	14240.43	0.000422	J
21	4102.74	10757.91	14860.65	0.000408	J
22	4167.73	11286.67	15454.40	0.000395	J
23	4198.97	11816.74	16015.71	0.000384	J
24	4712.20	11962.06	16674.26	0.000371	J
25	4882.30	12451.27	17333.57	0.000359	J
26	4901.20	13055.65	17956.85	0.000349	J
27	4955.20	13600.83	18556.03	0.000340	J
28	5578.32	13685.51	19263.83	0.000329	J
29	5826.58	14160.82	19987.40	0.000319	J
30	6089.93	14638.88	20728.81	0.000309	J
31	6093.56	15338.67	21432.23	0.000300	J
32	6233.45	15895.26	22128.71	0.000292	J
33	6384.03	16437.02	22821.05	0.000285	J
34	6707.80	16835.45	23543.25	0.000277	J
35	7124.12	17186.62	24310.74	0.000270	J
36	7165.72	17885.49	25051.21	0.000263	J
37	7986.12	17920.94	25907.06	0.000255	J
38	8118.01	18631.24	26749.25	0.000248	J
39	8152.27	19409.72	27561.99	0.000242	J
40	8210.60	20140.75	28351.35	0.000236	J
41	8217.00	20893.35	29110.35	0.000230	J
42	8223.40	21617.56	29840.96	0.000226	J
43	8252.20	22296.32	30548.52	0.000221	J
44	8253.30	22976.86	31230.16	0.000217	J
45	8474.10	23446.80	31920.90	0.000213	J
46	9080.64	23597.28	32677.92	0.000209	J
47	9602.27	23882.90	33485.17	0.000204	J
48	9727.73	24555.21	34282.94	0.000200	J
49	9735.57	25319.60	35055.17	0.000196	J
50	9837.50	25978.81	35816.31	0.000193	J
51	9915.91	26647.89	36563.80	0.000189	J
52	10229.56	27100.41	37329.97	0.000186	J
53	10472.69	27631.96	38104.65	0.000183	J
54	13461.59	25783.07	39244.66	0.000178	J

55 13474.39 26877.35 40351.74 0.000173 J

-----...DONNEES EPUISEES...-----  
 systeme 3 tp

Littlewood avec loi uniforme sur N

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha	
1	1.15	4.08	5.23	0.703478	J
2	1.16	4.10	5.26	0.774485	J
3	1.99	4.77	6.76	0.645296	J
4	3.77	6.06	9.83	0.466372	J
5	5.71	8.10	13.81	0.345027	J
6	7.07	10.78	17.85	0.275622	J
7	17.84	15.18	33.02	12.946758	L
8	17.99	19.90	37.89	0.136451	J
9	18.14	27.08	45.22	0.116663	J
10	19.06	32.79	51.85	0.103578	J
11	19.56	38.19	57.75	0.094495	J
12	20.27	42.93	63.20	0.087618	J
13	26.33	44.31	70.64	0.079428	J
14	38.22	43.93	82.15	0.069142	J
15	38.62	53.92	92.54	0.062077	J
16	46.50	58.26	104.76	0.055409	J
17	48.72	67.86	116.58	0.050283	J
18	49.44	78.11	127.55	0.046381	J
19	55.59	83.95	139.54	0.042764	J
20	61.48	90.85	152.33	0.039492	J
21	61.63	102.54	164.17	0.036928	J
22	65.53	110.68	176.21	0.034656	J
23	84.16	108.29	192.45	0.031953	J
24	97.53	113.53	211.06	0.029329	J
25	142.61	97.19	239.80	0.025977	J
26	150.95	117.76	268.71	0.023322	J
27	184.95	142.58	327.53	29.787403	L
28	185.01	206.26	391.27	15.355429	L
29	230.62	293.07	523.69	7.411151	L
30	262.48	439.46	701.94	5.004580	L
31	368.19	788.31	1156.50	3.134995	L
32	373.82	1274.30	1648.12	2.571723	L
33	401.52	1851.89	2253.41	2.247644	L
34	408.04	2463.49	2871.53	2.074112	L
35	463.97	3273.39	3737.36	1.909711	L
36	580.93	4743.30	5324.23	1.709827	L
37	648.17	6903.91	7552.08	1.554824	L
38	673.63	9522.24	10195.87	1.450727	L

-----...DONNEES EPUISEES...-----

systeme 14c/1000 tp

Littlewood avec loi uniforme sur N

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha	
1	191.52	678.76	870.28	0.004224	J
!!!!!!!					
2	2270.34	4299.16	6569.50	8.548988	L
3	2784.90	5464.81	8249.71	0.000529	J
4	2786.04	6999.33	9785.37	0.000469	J
5	2789.16	8059.54	10848.70	0.000439	J

6	3116.64	8816.19	11932.83	0.000412	J
7	3132.06	9665.48	12797.54	0.000395	J
8	3192.06	10353.73	13545.79	0.000382	J
9	3332.22	10927.77	14259.99	0.000370	J
10	4269.84	11119.64	15389.48	0.000349	J
11	4342.08	12054.28	16396.36	0.000333	J
12	5079.78	12543.19	17622.97	0.000314	J
13	5330.46	13481.25	18811.71	0.000298	J
14	5333.42	14534.81	19868.23	0.000286	J
15	5333.62	15481.56	20815.18	0.000276	J
16	5398.79	16296.15	21694.94	0.000268	J
17	5401.16	17094.97	22496.13	0.000261	J
18	5402.74	17827.35	23230.09	0.000255	J
19	5631.05	18347.52	23978.57	0.000249	J
20	5682.53	19003.33	24685.86	0.000244	J
21	5727.35	19627.88	25355.23	0.000239	J
22	6577.43	19640.61	26218.04	0.000233	J
23	6939.29	20181.09	27120.38	0.000227	J
24	6978.59	20995.34	27973.93	0.000221	J
25	7523.87	21387.80	28911.67	0.000215	J
26	7780.85	22074.23	29855.08	0.000210	J
27	8177.63	22659.26	30836.89	0.000204	J
28	8268.89	23514.90	31783.79	0.000199	J
29	9494.51	23456.70	32951.21	0.000193	J
30	9494.63	24561.18	34055.81	0.000188	J
31	11057.93	24373.21	35431.14	0.000182	J
32	11570.93	25270.16	36841.09	0.000176	J
33	13347.53	25187.01	38534.54	0.000169	J
34	15816.53	24807.94	40624.47	0.000161	J
35	17494.79	25437.62	42932.41	0.000153	J
36	17665.55	27499.35	45164.90	0.000146	J

---...DONNEES EPUISEES...---

systeme 17/1000 tp

Littlewood avec loi uniforme sur N

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha	
1	8.10	28.71	36.81	0.099877	J
2	12.90	34.96	47.86	0.085193	J
3	13.80	40.92	54.72	0.079735	J
4	14.25	45.50	59.75	0.076730	J
5	14.70	49.21	63.91	0.074580	J
6	20.70	51.60	72.30	0.068049	J
7	23.10	57.53	80.63	0.062668	J
8	25.20	63.54	88.74	0.058260	J
9	27.30	69.43	96.73	0.054537	J
10	28.56	75.61	104.17	0.051556	J
11	29.76	81.41	111.17	0.049089	J
12	30.06	87.36	117.42	0.047158	J
13	39.06	87.84	126.90	0.044216	J
14	39.66	95.89	135.55	0.041902	J
15	42.06	102.17	144.23	0.039828	J
16	42.66	109.61	152.27	0.038123	J
17	57.72	107.13	164.85	0.035561	J
18	57.84	118.48	176.32	0.033552	J
19	58.20	128.74	186.94	0.031920	J
20	59.40	137.67	197.07	0.030527	J
21	59.70	146.81	206.51	0.029357	J
22	60.90	154.70	215.60	0.028325	J
23	62.10	162.28	224.38	0.027405	J

24	65.40	168.05	233.45	0.026516	J
25	85.20	161.73	246.93	0.025227	J
26	88.20	172.10	260.30	0.024076	J
27	88.80	184.19	272.99	0.023090	J
28	98.40	188.74	287.14	0.022074	J
29	106.80	195.56	302.36	0.021075	J
30	114.90	203.60	318.50	0.020110	J
31	130.50	206.54	337.04	0.019098	J
32	132.30	222.69	354.99	0.018219	J
33	137.70	235.42	373.12	0.017413	J
34	141.60	249.52	391.12	0.016686	J
35	144.00	264.72	408.72	0.016037	J
36	145.20	280.53	425.73	0.015460	J
37	224.70	231.61	456.31	0.014482	J
38	233.70	253.43	487.13	0.013619	J

-----...DONNEES EPUISEES...-----

/GOE 79/

I NUMERO I	T.T.F	I DATE	I PATIENCE	I SEUIL	I
1	9.00	9.00	342.00	351.00	
2	12.00	21.00	410.84	431.84	
3	11.00	32.00	359.99	391.99	
4	4.00	36.00	328.84	364.84	
5	7.00	43.00	317.17	360.17	
6	2.00	45.00	311.73	356.73	
7	5.00	50.00	310.21	360.21	
8	8.00	58.00	313.77	371.77	
9	5.00	63.00	322.07	385.07	
10	7.00	70.00	331.59	401.59	
11	1.00	71.00	344.39	415.39	
12	6.00	77.00	354.16	431.16	
13	1.00	78.00	367.03	445.03	
14	9.00	87.00	375.52	462.52	
15	4.00	91.00	388.95	479.95	
16	1.00	92.00	403.75	495.75	
17	3.00	95.00	416.26	511.26	
18	3.00	98.00	428.54	526.54	
19	6.00	104.00	438.97	542.97	
20	1.00	105.00	453.28	558.28	
21	11.00	116.00	460.63	576.63	
22	33.00	149.00	456.98	605.98	
23	7.00	156.00	479.39	635.39	
24	91.00	247.00	447.10	694.10	
25	2.00	249.00	499.81	748.81	
26	1.00	250.00	549.70	799.70	
27	87.00	337.00	536.77	873.77	
28	47.00	384.00	572.63	956.63	
29	12.00	396.00	641.34	1037.34	
30	9.00	405.00	710.30	1115.30	
31	135.00	540.00	684.70	1224.70	
32	258.00	798.00	596.68	1394.68	
33	16.00	814.00	744.66	1558.66	
34	35.00	849.00	872.86	1721.86	

-----PATIENCE, ...ET LONGUEUR DE TEMPS !... -----

/GOE 79/

Littlewood avec loi uniforme sur N

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha	
1	9.00	31.90	40.90	0.089889	J
2	21.00	47.37	68.37	0.059635	J
3	32.00	65.49	97.49	0.044754	J
4	36.00	83.38	119.38	0.038404	J
5	43.00	98.35	141.35	0.033720	J
6	45.00	114.23	159.23	0.030896	J
7	50.00	126.92	176.92	0.028559	J
8	58.00	138.54	196.54	0.026306	J
9	63.00	152.76	215.76	0.024450	J
10	70.00	165.83	235.83	0.022773	J
11	71.00	182.53	253.53	0.021525	J
12	77.00	194.77	271.77	0.020375	J
13	78.00	210.24	288.24	0.019467	J
14	87.00	219.62	306.62	0.018525	J
15	91.00	233.63	324.63	0.017695	J
16	92.00	249.23	341.23	0.017012	J

17	95.00	262.36	357.36	0.016404	J
18	98.00	275.09	373.09	0.015857	J
19	104.00	285.44	389.44	0.015323	J
20	105.00	299.81	404.81	0.014861	J
21	116.00	306.26	422.26	0.014357	J
22	149.00	298.74	447.74	0.013639	J
23	156.00	317.31	473.31	0.012992	J
24	247.00	273.93	520.93	0.011883	J
25	249.00	316.88	565.88	0.011008	J
26	250.00	358.19	608.19	0.010304	J
27	337.00	331.46	668.46	0.009430	J
28	384.00	351.88	735.88	0.008613	J
29	396.00	406.06	802.06	0.007945	J
30	405.00	461.49	866.49	0.007392	J
31	540.00	415.76	955.76	0.006735	J
32	798.00	490.07	1288.07	14.362028	L
33	814.00	921.01	1735.01	7.122242	L
34	849.00	1361.24	2210.24	5.271003	L

-----...DONNEES EPUISEES...-----

Successivement, systèmes 1,2,3 et 4 en phase opérationnelle

Littlewood avec loi uniforme sur N

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha	
1	15301.00	54227.55	69528.55	0.000053	J
2	66614.00	120073.64	186687.64	0.000022	J
3	104755.00	188754.37	293509.37	0.000015	J
-----...DONNEES EPUISEES....-----					

Littlewood avec loi uniforme sur N

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha	
1	125230.00	443821.70	569051.70	0.000006	J
2	142400.00	467539.73	609939.73	0.000007	J
3	225830.00	550058.63	775888.63	0.000006	J
-----...DONNEES EPUISEES....-----					

Littlewood avec loi uniforme sur N

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha	
1	76900.00	272537.64	349437.64	0.000011	J
2	109011.00	314687.78	423698.78	0.000010	J
-----...DONNEES EPUISEES....-----					

Littlewood avec loi uniforme sur N

i	D(i)	Patience X(i+1)	Seuil Y(i+1)	Alpha	
1	83747.00	296803.77	380550.77	0.000010	J
2	90144.00	306160.71	396304.71	0.000010	J
3	98061.00	329540.97	427601.97	0.000010	J
4	99015.00	352888.47	451903.47	0.000010	J

### III.3.1 - Bilan des essais sur LITSAR

D'un point de vue conceptuel, le modèle LB est plus pessimiste que le modèle JM, relativement à la règle d'arrêt tout au moins. Cependant, l'amorce d'une inférence Bayésienne sur la base d'une loi a priori vague n'apporte pas d'emblée une loi a posteriori significative. De plus l'estimation des paramètres sur un petit échantillon de données, tel qu'en début des essais, donne des résultats peu cohérents. Il s'en suit que la version Bayésienne de la règle d'arrêt, LITSAR, est fortement défavorisée par ce début d'apprentissage évasif. Cela se manifeste par une fragilité initiale plus prononcée que celle qui est accusée par la version classique, JELTSAR qui, elle se passe de l'estimation de paramètres.

Par contre, la phase de jeunesse (premier cinquième de l'échantillon en moyenne) étant passée, l'information apportée par les données permet alors d'estimer plus ou moins bien les paramètres du modèle. De plus, lorsque l'effet de dispersion des taux de manifestation des erreurs devient substantiel, la règle qui jusqu'ici restait calée sur le modèle JM Bayésien, active alors le modèle LB lui-même. A partir de là, le caractère pessimiste du modèle LB se manifeste. En effet, on constate alors des délais de validation plus longs que ceux qui sont exigés par la version classique JELTSAR.

IL est à noter que de fortes ruptures dans l'évolution de la fiabilité, telles que le reflètent certaines données de défaillance, ont pour effet de faire basculer la règle LITSAR d'un modèle à l'autre : alternativement du modèle JM Bayésien au modèle LB. Cela indique certainement la période de séjour dans une classe puis le passage à une autre classe d'erreurs. Mais tout ceci n'est encore qu'hypothétique.

Comparativement à la version classique, la version Bayésienne de TSAR s'est révélée plus sensible dans la localisation des ruptures d'évolution de la fiabilité.

Ainsi que nous l'avons recommandée pour la version classique, la règle LITSAR, est aussi à utiliser à titre exploratoire.

L'hypothèse des classes d'erreurs, émise précédemment demeure, à notre sens, valable même vis-à-vis du modèle LB. Les classes d'erreurs à forts taux de manifestation sont vraisemblablement associées aux premiers processus d'arrivée de défaillances. Le modèle JM Bayésien en gouverne les délais d'épuisement. En revanche, les classes d'erreurs fines, à faibles taux de défaillance, exigent des temps d'épuisement bien plus longs qui sont alors délivrés par le modèle LB lui-même.

La fragilité initiale de cette version lui a valu 8 arrêts à tort sur 18 exemples de systèmes essayés. En conséquence, la méthodologie d'application que l'on peut esquisser provisoirement à ce propos est la même que celle qui a été conseillée pour la version précédente.

### **III. 4 Conclusion critique**

Les essais probatoires auxquels ont été soumises les deux versions de la règle d'arrêt issue du test séquentiel TSAR : version classique appliquée au modèle JM, JELTSAR et la version Bayésienne dans son application au modèle LB, LITSAR, montrent que cette règle doit, dans sa globalité, être utilisée à titre exploratoire et de surcroît dans un but indicatif mais surtout pas, dans l'état actuel de nos connaissances, à titre inférentiel.

En effet, le bénéfice appréciable obtenu en élaborant d'une part une règle qui s'affranchit du problème d'estimation des paramètres et d'autre part une inférence Bayésienne sur un paramètre dont on ne connaît rien a priori, se paye lourdement par un comportement peu significatif de la règle en début des essais.

A ce stade de nos recherches, nous ne pouvons encore nous risquer à établir une méthodologie objective d'application de cette règle. Cependant nous pouvons en donner quelques prémices :

- Il faut essayer de satisfaire au mieux les conditions d'application du modèle utilisé. En effet, les facteurs suivants influencent nettement les résultats :

- la procédure de collecte des données (le cas de mauvaises corrections, le problème de masquage d'erreurs...),
- l'environnement des essais (sa représentativité effective),
- l'interprétation critique des résultats indicatifs délivrés par la règle : on doit être plus critique au début des essais. Les délais exigés par la règle doivent être impérativement respectés. Cependant, nous ne pouvons que conseiller la prudence lorsqu'un délai a été épuisé sans défaillance, et que, dans ce cas, on serait tenté de valider le système.

**ANNEXE : Application du test d'arrêt aux essais de validation du poste d'aiguillage informatisé (PAI) de la SNCF**

**I.1- Introduction**

Le poste d'aiguillage informatisé de la SNCF communément appelé PAI est un titre générique d'une série d'études critiques visant la conception et la réalisation d'un système de sécurité ferroviaire à base de microprocesseurs. La mise en oeuvre d'un tel système pose le délicat problème de sa validation. Parmi les différents moyens techniques mis en oeuvre par la SNCF à cette fin, le test TSAR peut intervenir à deux niveaux du projet :

- en amont, le système étant en cours de mise au point, le test d'arrêt donne une indication du temps minimum qu'il faudrait nécessairement allouer aux essais de façon à minimiser le risque d'un arrêt prématuré de cette phase,

- en aval, le système ayant traversé le crible de validation par les méthodes classiques, le test TSAR intervient comme une aide supplémentaire au diagnostic de validation permettant, le cas échéant, la remise en question et voire même la réfutation totale des résultats issus des procédés de validation antérieurs.

Nous présentons d'abord le PAI suivant les différentes rubriques d'étude retenues par la SNCF. Les options de validation du système de sécurité et les moyens utilisés seront évoqués. Finalement, nous situerons et justifierons le recours à un plan d'expérience statistique pour ce problème de validation.

## I.2 - Présentation sommaire du système PAI [SEV 84]

### A - Sa fonction

La fonction essentielle du système PAI consiste à assurer une circulation sûre des trains dans une gare. Suivant les ordres de commande d'itinéraires donnés par l'opérateur, le système en question vérifie et met à jour les mesures de sécurité nécessaires au bon fonctionnement continu de la gare.

### B - Sa structure

Le système PAI est constitué de plusieurs modules dont un seul, appelé module d'enclenchement, assure des fonctions de sécurité.

Les autres assurant essentiellement une aide à l'exploitation, c'est donc sur le module d'enclenchement que se rapportera le problème critique de la validation du système PAI.

### C - Le module d'enclenchement

Un module d'enclenchement est constitué de deux microprocesseurs (appelés unités) totalement indépendants, alimentés séparément et travaillant de façon asynchrone.

Un comparateur, supposé de sécurité, situé à l'extérieur du système PAI, vérifie la concordance des sorties des deux unités. Une rapide transmission d'informations est entretenue de façon dynamique entre les différents modules grâce à une technologie adéquate.

### I.3 - Plan d'expérience pour la validation du module d'enclenchement

La SNCF a essentiellement retenu les différentes phases de validation suivantes :

1 - La validation durant la phase de conception où différentes méthodes nouvelles ou classiques sont mises en oeuvre de façon à s'assurer que le système a bien été conçu et spécifié conformément à la mission qui lui a été assignée.

2 - La validation du système en plate-forme; celle-ci vient renforcer les efforts de validation précédents de façon à s'assurer :

- qu'aucune faute, tant d'analyse que de programmation, n'a échappé au crible de validation antérieur,

- qu'une panne du matériel ou une perturbation imprévue de l'environnement n'engendrerait pas une configuration dangereuse.

La structure partitionnée du module de sécurité dont les deux unités exécutent pour l'instant un programme identique permet une validation séparée de chaque unité. Celle-ci est menée à bien en deux temps comme nous le résumons ci-après :

A - La validation du logiciel seul, le matériel étant supposé correct ; deux options ont été retenues à cet égard :

1) La vérification du logiciel par exécution symbolique [BLA 84] ;

2) La validation du logiciel au moyen de méthodes statistiques relevant de la théorie de la fiabilité du logiciel (c'est-à-dire l'objet de ce travail) ;

A ce stade, l'environnement d'évaluation du logiciel en question est simulé de façon convenable.

B - La validation globale de l'unité, le logiciel étant cette fois-ci réputé sans erreur résiduelle ;

Cette étape évalue l'efficacité des mesures de précaution déployées tant au niveau du logiciel qu'au niveau du matériel, pour protéger l'unité contre les pannes matérielles reconnues possibles par l'analyse de sécurité. Trois méthodes d'évaluation sont menées en parallèle à cet effet :

- l'évaluation de l'efficacité du mécanisme de détection d'erreurs de logiciel par l'utilisation des méthodes d'injection d'erreurs [SEV 84],
- l'évaluation de l'efficacité des mécanismes de détection d'erreurs du matériel par l'utilisation de composants avariés [CAS 84],
- l'étude des latences de panne au moyen d'essais de vieillissement accéléré du matériel en laboratoire [CAS 84].

### 3 - La validation du système sur le site

Le système évolue maintenant dans son environnement opérationnel réel. Ses sorties sont confrontées à celles qui sont délivrées par un système classique ayant fait ses preuves de sécurité. Toute cause de divergence est localisée sans ambiguïté par le comparateur de sorte que toute erreur détectée au niveau du logiciel en question peut être corrigée de façon sûre. Le système classique sert de référence de base.

Le test TSAR vient à ce stade ratifier ou réfuter la sûreté de fonctionnement évaluée précédemment.

#### 1.4 - Justification de l'application de la règle d'arrêt

La règle d'arrêt peut dans ce contexte être considérée comme une aide supplémentaire au diagnostic qui sanctionnera l'acceptation ou le rejet du système en question.

L'analyse du comportement du système est effectuée par la règle sur la base des données de défaillance délivrées par celui-ci. L'unité de mesure des différentes données peut être le temps (en seconde ou en heure) séparant les défaillances successives ou le nombre de sollicitations du système entre les défaillances successives.

Comme nous l'avons dit dans ce qui précède, les règles issues du test TSAR sont des outils d'exploration qui aident à quantifier les différents délais nécessaires à l'épuisement progressif des différentes classes d'erreurs que recèle le logiciel testé. Le recours à de tels outils peut être justifié par les arguments suivants :

- les méthodes usuelles de validation de systèmes sont incapables de prendre en compte toutes les caractéristiques et toutes les configurations de l'environnement opérationnel du système PAI. Il s'en suit que ce dernier ne pourra jamais être testé et prouvé de façon exhaustive.

- bien que tout ait été mis en oeuvre pour vérifier le système par les méthodes classique durant les phases de conception et de mise au point, il demeure cependant impossible d'affirmer que le système est exempt d'erreurs.

Les outils apportés par le test TSAR, qui viennent se placer en parallèle avec les méthodes classiques de validation, n'ont pas l'ambition démesurée de suppléer aux limitations, sommes toutes naturelles, de ces premières méthodes. Ils apportent en quelque sorte une approche différente dans les procédés de validation des systèmes critiques et par la même occasion une protection supplémentaire en vue de l'assurance de sécurité recherchée. La mise en oeuvre de ces différentes méthodes comporte à cet égard un aspect complémentaire et non concurrent.

Signalons enfin que le système ayant traversé le crible sévère de validation décrit précédemment, nous pouvons supposer, lors de la mise en oeuvre, en aval du test TSAR, qu'il ne reste vraisemblablement qu'un petit nombre d'erreurs fines qui ont échappé aux essais (et peut être même qu'il n'en

reste plus). Ce point de vue permettra à la règle d'arrêt de rejeter assez vite les systèmes qui exigeront un temps de validation rédhibitoire. Pour terminer, disons que, d'une part cette dernière hypothèse d'un petit nombre d'erreurs résiduelles dans le système après sa mise au point classique et que, d'autre part la conception même de la règle d'arrêt, nous épargnent le problème de l'estimation de nombreux paramètres caractérisant le système en question tels que le font les modèles structurés. Les modèles en boîte noire que nous avons utilisés, se sont avérés acceptables dans ce cas précis.

## CONCLUSION

Reprenons ici le problème fondamental posé dans l'introduction de ce travail : considérons un système informatique complexe auquel doit être assigné une haute fiabilité et dont on ne peut ni prouver ni tester la correction de façon exhaustive. La question est de savoir s'il est possible d'établir une règle d'arrêt de mise au point qui garantisse cette exigence de fiabilité. Cette garantie est considérée du point de vue des erreurs de conception, sinon de façon certaine, au moins au sens d'un risque statistique donné.

Nous avons cherché à répondre à cette question au moyen des principaux modèles de fiabilité du logiciel. Ces derniers ont justement été proposés pour apprendre la fiabilité d'un système sur la base de son comportement au cours d'un processus de mise au point. Nous avons considéré ces modèles dans un certain ordre. Cet ordre peut être défini par une certaine progression dans le sens de la validité des hypothèses qui sous-tendent ces modèles. Les deux premiers modèles s'appuient sur le concept du nombre d'erreurs résiduelles. Compte tenu de la haute fiabilité exigée, il était naturel de se poser la question en termes de système qui ne recèle plus d'erreurs.

Le premier modèle considéré est celui de Jelinski et Moranda (JM). Ce modèle est d'un point de vue conceptuel le plus simple de tous. Pour ce modèle, nous avons pu dériver une règle d'arrêt séquentielle qui garantit la correction du système à un risque statistique donné. Cette règle est fondée sur l'observation d'un temps de bon fonctionnement depuis la dernière opération de détection et correction d'erreur. Le temps probatoire délivré par la règle est uniquement fonction des intervalles de temps entre les défaillances observées précédemment et du risque statistique choisi a priori. L'avantage de cette règle est qu'elle est facile à appliquer. En outre, elle présente la particularité de ne pas faire appel à des techniques d'optimisation non

linéaire en même temps qu'elle s'affranchit du problème d'estimation des paramètres. Toutefois, ces avantages apparents, doivent être naturellement confrontés à la question de la crédibilité de la règle qui en résulte.

Celle-ci peut se juger d'abord conceptuellement par l'examen des hypothèses de base du modèle utilisé. De prime abord cet examen n'est pas favorable. En effet, contrairement à ce que postule le modèle JM, le nombre initial d'erreurs dans le système ne décroît pas forcément d'une unité à chaque opération de détection et correction d'erreur car les processus de manifestation d'erreurs ne sont pas toujours indépendants entre eux : il peut y avoir des phénomènes de masquage de sorte qu'une erreur ne pourra pas se manifester tant qu'une autre (celle qui la masque) n'est pas débusquée. Enfin il est maintenant clair que l'hypothèse, que fait toujours le modèle JM, d'une égalité des taux de manifestation de toutes les erreurs est très peu réaliste. Ces observations conduisent clairement à indiquer que ce modèle et la règle d'arrêt qui en découle sont nettement optimistes.

En revanche, l'application de cette même règle à une collection de données de défaillances réelles de systèmes logiciels a donné des résultats satisfaisants en ce sens que sur cet échantillon de systèmes, le nombre de décisions d'arrêt à tort est paru compatible avec le risque affiché. Toutefois deux remarques essentielles doivent être signalées à propos de ces résultats :

- le risque d'un arrêt précoce est plus élevé au début des essais. Cela est très grave puisque le système est déclaré correct alors qu'il recèle encore un grand nombre d'erreurs;
- par contre, la règle devient de plus en plus robuste au fur et à mesure que le nombre de données analysées s'accroît.

Forts de ces remarques, nous avons considéré par la suite le modèle de Littlewood (LB). Celui-ci est une généralisation améliorée du modèle JM. Il lève l'objection par rapport à l'hypothèse d'égalité des taux de manifestation des erreurs. Ce modèle, bien que plus satisfaisant d'un point de vue

conceptuel, est cependant plus complexe dans son exploitation. Nous avons pu, malgré tout, en dériver une règle d'arrêt, similaire à la précédente, fondée sur une prédiction Bayésienne. Cette règle est cependant plus difficile à mettre en oeuvre car elle fait appel à des techniques d'optimisation non linéaire pour l'estimation des paramètres du modèle. Les essais probatoires de cette règle sur les mêmes données de défaillance nous ont fourni la constatation paradoxale suivante : l'effet de dispersion des différents taux de manifestation des erreurs met longtemps à se faire jour. Tant que cet effet n'apparaît pas, le modèle reste calé sur sa version appauvrie, le modèle JM Bayésien. Il fournit dans ce cas des temps de validation plus courts que ceux qui sont délivrés par le modèle JM dans sa version classique citée plus haut.

Cela est probablement dû au fait que d'une part lorsque le nombre de défaillances observées est faible, l'estimation des paramètres est fragile et peu consistante, et d'autre part les méthodes de décisions Bayésiennes sont relativement optimistes. En revanche, dès que l'effet de dispersion se met en lumière, les temps de validation deviennent ostensiblement plus grands que ceux de la règle JM classique. Dans ce cas, il nous semble préférable de privilégier les résultats fournis par le modèle LB à ceux que donne le modèle JM car ces premiers sont conceptuellement mieux fondés.

Enfin, nous nous sommes tournés vers le modèle de Littlewood et Verral (LV) qui lève les objections conceptuelles restantes. En outre, ce modèle est communément connu comme fournissant des ajustements aux données expérimentales significativement meilleurs que le modèle JM. Cependant, cette amélioration se fait au détriment du concept du nombre d'erreurs résiduelles qui disparaît ici de sorte que ce modèle nie implicitement l'existence de systèmes corrects. L'effet qui en résulte est de rendre ce modèle très sévère dans son application à une règle d'arrêt. Dans ce contexte, nous avons montré de façon approchée, il est vrai, que le temps de validation préconisé par ce modèle doit être de l'ordre de grandeur du temps de bon fonctionnement qui sera exigé dans la mission effective du système en question. Lorsqu'une très

grande fiabilité est exigée, ce temps risque de devenir assez vite rédhibitoire.

En somme, au vu de ces résultats, il paraît clairement que les réponses que nous pouvons donner à la question posée ci-dessus ne peuvent être que limitées. En fait, nous en sommes réduits à reconnaître qu'il n'existe pas vraiment de moyens indéniables permettant, sur la base de l'observation du fonctionnement d'un système durant un temps limité, de s'assurer que ce dernier délivrera un service correct pendant un temps beaucoup plus long.

Est-ce à dire que nous concluons à la vanité de ce travail ? Bien au contraire, connaître ses limites est une information fort peu négligeable. En fait, nous montrons aux concepteurs de systèmes critiques un aspect jusqu'alors peu connu de la difficulté de leur délicate tâche. De plus, si nous concluons à la fragilité des règles d'arrêt que nous avons établies pour ce qui est d'accepter des systèmes, nous pensons par contre, qu'une règle intrinsèquement optimiste, telle que celle qui s'appuie sur le modèle JM, pourrait devenir un standard pour ce qui est de ne pas accepter un système. En effet, si une telle règle, optimiste par essence, demande un temps de validation rédhibitoire, nous pensons que le système correspondant ne devrait en aucun cas être mis en service dans un environnement critique. Il serait préférable, dans ce cas, de revoir complètement la conception du système en question plutôt que d'insister d'avantage sur sa mise au point. Nous pensons, en fin de compte, que nous fournissons à cette occasion un outil non négligeable pour aider à la gestion de projet de systèmes informatiques critiques.

En ce qui concerne les perspectives, peut-on maintenant envisager d'aller plus loin ? Au fond, cette recherche des règles d'arrêt nous a permis de mieux cerner la question cruciale de la fiabilité des systèmes et notamment des systèmes logiciels : quelle information substantielle apportent les erreurs déjà détectées sur celles qui ne se sont pas encore manifestées, mis à part le fait trivial qu'elles ne se sont justement pas manifestées ?

La réponse à cette question épineuse exige, de l'avis général, que l'on puisse disposer de données de défaillance fiables, c'est-à-dire issues de protocoles de conception et de mise au point soigneusement contrôlés. De plus, on devrait disposer d'un grand nombre de données pour espérer un apprentissage convenable de ce phénomène. Pour ce faire, il faudrait faire travailler de vraies équipes de conception sur des durées réalistes en se dotant de moyens de contrôle adéquats. Un tel projet, de grande envergure et de longue haleine, serait naturellement assez coûteux mais c'est, à notre avis, le prix à payer dans ce domaine pour avancer.



REFERENCES

- [ABE 79] ABE J., SAKAMURA K., AISO H.,  
"An analysis of software project failure",  
Proc. 4th Int. Conf. Software Eng., Munich, Germany, Sept. 1979,  
pp.378-385.
- [ANG 80] ANGUS J. E., SCHAFER R.E, SUKERT A.  
"Software reliability model validation."  
Proc. Annual Reliability and Maintainability Symp., 1980,  
San Francisco, CA, Jan. 1980, pp.191-199.
- [BAS 80] BASTANI F.B.  
"An input based model theory of software reliability and its  
application"  
Ph.D. in Electrical Engineering and Computer Science, 1980.
- [BLA 84] BLANQUART J., LAPRIE C., ALRLAT J.  
"Sur la certification des systèmes informatiques : le projet EVE.  
Application au poste d'aiguillage informatisé".  
Proc. 4ème colloque int. sur la Fiabilité et la Maintainabilité,  
PERROS-GUIREC, Juin 1984, pp. 650-656.
- [BRO 75] BROWN J. R., LIPOW M.,  
"Testing for software reliability"  
Proc. 1975 Int. Conf. Reliable Software, Los Angeles, CA, April  
1975, pp. 518-527.

- [CAS 84a] CASPI P., KOUKA E.,  
"Un test statistique de correction de systèmes fondé sur le modèle de fiabilité du logiciel de Jelinsky-Moranda"  
Proc. IVème Congrès int. CNET sur la Fiabilité et la Maintenabilité, pp. 597-602, Perros-Guirec, Juin 1984.
- [CAS 84b] CASPI P., KOUKA E.,  
"Stopping rules for a debugging process based on different software reliability models"  
Proc. 4th int. Conf. Fault-Tolerant Computing, FTCS14, Florida, USA, Juin 1984, pp.114-119.
- [CAS 84c] CASPI P., PILAUD E.  
"Conception et évaluation descendante d'un système à haute sécurité"  
Proc. 4ème colloque int. sur la Fiabilité et la Maintenabilité, PERROS-GUIREC, juin 1984, pp. 590-595.
- [CHE 78] Cheung R. C.,  
"A user-oriented software reliability model,"  
Proc. COMPSAC 78, Chicago, IL, Nov., 1978, pp. 565-570.
- [CHN 78] CHEN and AVIZIENIS  
"N-version Programming : A Fault Tolerance approach to Reliability of Software operation".  
In digest of Eighth international Fault Tolerant Computing Symposium IEEE Computer Society, Toulouse France 1978, pp. 3-5.
- [COX 66] COX D.R., LEWIS P.A.W.,  
"The statistical analysis of series of events."  
London, Methuen, 1966.

- [DUA 64] DUANE J.T.  
"Learning curve approach to reliability monitoring."  
IEEE Trans. Aerospace, Vol.2, 1964, pp. 563-566.
- [CUL 79] CULIK K.  
"The cyclomatic number and normal number of programs"  
SIGPLAN Notices, vol. 14, April 1979, pp. 12-17.
- DACS 79] Quantitative Software Models  
DACS, SRR-1, March 1979.
- [FER 67] FERGURSON T.S.  
"Mathematical statistics, a decision theoretic approach"  
Academic Press, 1967.
- [FIS 80] FISZ M.  
"Probability theory and mathematical statistics"  
Krieger Publishing company New-York 1980.
- [FOR 79] FORMAN E.H., SINGPURWALLA N.D.,  
"Optimal time intervals for testing hypotheses on computer software errors."  
IEEE Trans. Reliability, Vol.R-28, N°3., Aug. 1979, pp. 250-253.
- [GOE 79] GOEL A.L., OKUMOTO K.,  
"Time dependent error-detection model for software reliability and other performance measures."  
IEEE Trans. Reliability, Vol. R-28, N°3, Aug. 1979, pp. 206-211.
- [HAL 77] HALSTEAD M.H.,  
"Elements of software science."  
Elsevier North-Holland, Inc., New-York, 1977.

- [JEL 72] JELINSKI Z., MORANDA P.  
"Software reliability research."  
Statistical Computer Performance Evaluation, Academic Press,  
New-York, 1972, pp. 465-484.
- [JEL 73] JELINSKI Z., MORANDA P.,  
"Application of a probability-based model to code reading."  
Rec. 1973 IEEE Symp. Computer Software Reliability, New-York, May  
1973, pp. 78-81.
- [KEI 84] R. KEITH SCOTT, J. GAULT, D. MC ALLISTER  
"Experimental validation of six fault-Tolerant software Reliability  
models".  
Proceedings FTCS-14, pp. 102-106, June 1984, Florida.
- [LAP 84] LAPRIE J.C.  
"Dependability Evaluation of Software Systems in operation"  
IEEE Trans. Software Engineering, vol. SE. 10, n° 6, November 1984  
PP. 701-714.
- [LAS 81] LASSEZ J., KNIJFF D., SHEPHERD J.  
"A critical examination of software science"  
J.Syst.Software, vol. 2, Dec. 1981, pp.105-112.
- [LIT 73] LITTLEWOOD B., VERRAL J.,  
"A bayesian reliability growth model for computer software."  
Rec. 1973, IEEE Symp. Computer Software reliability, New-York, May  
1973, pp. 70-77.
- [LIT 75a] LITTLEWOOD B.,  
"MTBF is meaningless in software reliability."  
IEE Trans. Reliability, Vol. R.24, April 1975, p. 82.

[LIT 75b] LITTLEWOOD B.

"A reliability model for Markov structured software "

Proc. 1975 Int. Conf. Reliable Software, Los Angeles, Ca,  
pp. 204-207.

[LIT 79a] LITTLEWOOD B.

"A bayesian differential debugging model for software  
reliability."

Mathematical Departement, the City Univerşity, London, England,  
June 1979.

[LIT 79b] LITTLEWOOD B.,

"How to measure software reliability and how not to..."

IEEE Trans. Reliability, Vol. R.28, June 1979, pp. 103-110.

[LIT 79c] LITTLEWOOD B.,

"Software reliability model for modular program structure."

IEEE Trans. Reliabilty, Vol. R-28, N°3, Aug. 1979, pp. 241-246.

[LIT 80] LITTLEWOOD B.,

"Theory of software reliability: How good are they and how can they  
be improved ?"

IEEE Trans. Soft. Eng. vol. SE-6, N°5, Sept. 1980, pp. 489-500.

[LIT 81a] LITTLEWOOD B.,

"Stochastic reliability growth: method for fault removal in  
computer programs and hardware designs"

IEEE Trans. Reliability, Vol. R-30, N°4, Oct. 1981, pp. 313-320.

- [LIT 81b] LITTLEWOOD B., KEILLER P., MILLER D., SOFER A.  
"Comparison of software reliability predictions"  
Proc. 13th int. Fault-Tolerant Computing Symp.  
Milan, June 1983.
- [LIT 81c] LITTLEWOOD B., VERRAL J.  
"Likelihood function of a debugging model for computer software  
reliability"  
IEEE Trans. Reliability, Vol. R-30, N°2, June 1981.
- [LIT 84] LITTLEWOOD B., KEILLER P.  
"Adaptative software reliability modeling"  
The fourteenth international conference on Fault-Tolerant Computing  
FTCS14, FLORIDA, June 1984, pp.108-113.
- [MAC 73] MacWILIAMS, W.R.  
"Reliability of large real-time control software systems"  
Rec. 1973 IEEE Symp. Computer Software Reliability, New York May  
1973.
- [MCA 76] McCABE T.J.  
"A complexity measure."  
IEEE Trans. Software Eng., Vol. SE-2, Dec. 1976, pp. 308-320.
- [MIL 73] MILLS H. ,  
"On the development of large reliable software."  
Rec. IEEE Symp. Computer Software Reliability, New-York, May 1973,  
pp. 155-159.

- [MOA 81] MOAWAD RAMADAN  
"Fiabilité du logiciel: Modélisation et évaluation de modèles"  
Thèse de Docteur-Ingénieur de ENSAE, Dec. 1981.
- [MOR 78] MORAND P.,  
"Software reliability revisited."  
Computer(IEEE), Vol. 11, N°4, April 1978, pp. 92-94.
- [MUS 75] MUSA J.,  
"A theory of software reliability and its applications."  
IEEE Trans. Software Eng., Vol. SE-1, N°3, Sept. 1975,  
pp. 312-327.
- [MUS 79a] MUSA J.,  
"Validity of execution-time theory of software reliability."  
IEEE Trans. Reliability, Vol. R-28, N°3, Aug. 1979, pp.181-191.
- [MUS 79b] MUSA J.D.  
"Software reliability Data report"  
Bell Telephone Laboratories, Whippany, N.J. 1981.
- [MUS 81] MUSA J.D., IANNINO A.,  
"Software reliability modeling accounting for program size  
variation due to integration or design changes."  
ACM SIGMETRICS Workshop on Measurement and Evaluation of Software  
Quality, College Park, Md., Mar. 1981.
- [MUS 84] MUSA J., IANNINO A., OKUMOTO K., LITTLEWOOD B.  
"Criteria for software Reliability Model comparisons"  
IEEE Trans. Software Engineering vol. SE. 10, n° 6, November 1984,  
pp. 687-691.

- [NEL 78] NELSON E.,  
"Estimating software reliability from test data"  
Microelectronics and Reliability, Vol. 17, Pergamon Press, 1978,  
pp. 67-74.
- [PIL 82] PILAUD E.  
"Conception et validation de systèmes informatiques à haute sûreté  
de fonctionnement"  
Thèse de Docteur-Ingénieur INPG, Grenoble, Novembre 1982.
- [RAN 75] BRIAN RANDELL  
"System structure for software fault Tolerance".  
IEEE Trans. on software Engineering, vol. SE-1, n° 2, June 1975.
- [SCH 74] SCHICK G., WOLVERTON R.,  
"Achieving reliability in large scale software systems."  
Proc. 1974 Reliability and Maintainability Symp., Los Angeles, CA,  
Jan. 1974, pp. 302-319.
- [SCH 78] SCHICK G., WOLVERTON R.,  
"An analysis of competing software reliability models"  
IEEE Trans. Software Eng., Vol. SE-4, Mar. 1978, pp. 104-120.

- [SHE 83] SHE V.Y., CONTE S., DUNSMORE H.  
 "Software science revisited: A critical analysis of the theory and its empirical support."  
 IEEE Sof. Eng. Vol. SE-9, N°2, Mar. 1983, pp.155-165.
- [SHN 79] SCHNEIDEWIND N.F.  
 "Application of program graphs and complexity analysis to software development."  
 IEEE Trans. on Reliability, vol. R-28; N°3, Aug. 1979.
- [SEV 84] SEVESTRE M.  
 "Validation d'un système de sécurité ferroviaire à base de microprocesseurs".  
 Proc. 4ème colloque Int. sur la Fiabilité et la Maintenabilité.  
 PERROS-GUIREC, Juin 1984, pp. 586-589.
- [SHO 75] SHOOMAN M.  
 "Software reliability : measurement and models."  
 Proc. 1975 Annual Reliability and Maintainability Symposium, Washington, D.C., Jan. 1975, pp. 485-491.
- [SHO 76] SHOOMAN M.  
 "Structured models for software reliability prediction."  
 Proc. 2th Int. Conf. Software Eng., San Francisco, CA, 1976, pp. 268-280.
- [TRI 75] TRIVEDI A., SHOOMAN M.  
 "A many-state Markov model for the estimation and prediction of computer software performance."  
 Proc. 1975, Int. Conf. Reliable Software, Los Angeles, CA, pp. 208-220.

- [TRW 76] TRW Defense and Space Systems Group;  
"Software Reliability Study"; Report N°76-2260. 1-9-5  
TRW, Redondo Beach, CA., 1976.
- [WOO 79] WOODWAR M., HENNET M., HEDLEY D.  
"A measure of control flow complexity in program text"  
IEE Trans. on Soft. Eng., vol. SE-5, N°1, Jan. 1979, pp. 45-50.

DERNIERE PAGE D'UNE THESE

DOCTEUR INGENIEUR  
-----

Vu les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,  
Vu les rapports de Madame Gabrielle Saucier,  
Monsieur Emmanuel Girard,

Monsieur Edmond Félix Kouka est autorisé à présenter une thèse en vue  
de l'obtention du grade de DOCTEUR INGENIEUR, spécialité  
Mathématiques appliquées.

Grenoble, le

02 MAI 1985

Le Président de l'Université Scientifique  
et Médicale

Monsieur TANCHE



*Tanche*





## RESUME :

L'application du concept de fiabilité à la description du comportement d'un programme est une discipline relativement récente communément appelée : Théorie de la fiabilité du logiciel. L'état de l'art, bien qu'embryonnaire, semble cependant prometteur.

Dans le contexte de la haute sûreté de fonctionnement auquel nous nous intéressons, et plus particulièrement dans le cadre de la validation d'un système informatique critique, le recours à cette théorie pose le délicat problème de la confiance à accorder aux résultats obtenus. La complexité du système en question rend impossible l'application des méthodes de preuve ou de test exhaustifs de correction de programme. Le recours à un plan d'essais statistiques en environnement plus ou moins aléatoire et plus ou moins accéléré nous met en face du dilemme suivant : peut-on, ou non, valider un système en l'activant pendant une durée de temps inférieure à sa durée de mission effective ? Nous montrons, sur la base de règles de décision d'arrêt d'un processus de mise au point de système, dans quelle mesure la réponse à cette question cruciale est conditionnée à l'acceptation ou au rejet des hypothèses sous-tendant les divers modèles de fiabilité du logiciel utilisés.

## MOTS CLES :

Sûreté de fonctionnement, Fiabilité, Logiciel, Erreur, Défaillance, Test, Essai, Mise au point, Debugging, Test d'hypothèses, Loi a priori, Inférence statistique, Règle de décision d'arrêt, Vraisemblance.