Méthode de calcul de certains écoulements

Paul Bourret

▶ **To cite this version:**

Paul Bourret. Méthode de calcul de certains écoulements. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1968. Français. NNT : . tel-00280999

HAL Id: tel-00280999
https://theses.hal.science/tel-00280999

Submitted on 20 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :

THESES

présentées à

LA FACULTE DES SCIENCES DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR INGENIEUR

par

P. Bourret

Ingénieur I. M. A. G.

Première thèse :

Méthodes de calcul de certains écoulements

Deuxième thèse :

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Thèses soutenues le 5 Juillet 1968, devant la commission d'examen :

MM.	J. KUNTZMANN	Président
	L. SANTON	Examinateurs.
	N. GASTINEL	

FACULTE DES SCIENCES

UNIVERSITE DE GRENOBLE

L I S T E D E S P R O F E S S E U R S

-:-:-:-:-

DOYEN HONORAIRE :

M. MORET

DOYEN :

M. BONNIER

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	NEEL Louis	Chaire de Physique Expérimentale
	HEILMANN René	Chaire de Chimie
	KRAVTCHENKO Julien	Chaire de Mécanique Rationnelle
	CHABAUTY Claude	Chaire de Calcul différentiel et Intégr.
	BENOIT Jean	Chaire de Radioélectricité
	CHENE Marcel	Chaire de Chimie Papetière
	FELICI Noël	Chaire d'Electrostatique
	KUNTZMANN Jean	Chaire de Mathématiques Appliquées
	BARBIER Reynold	Chaire de Géologie Appliquée
	SANTON Lucien	Chaire de Mécanique des Fluides
	OZENDA Paul	Chaire de Botanique
	FALLOT Maurice	Chaire de Physique Industrielle
	KOSZUL Jean-Louis	Chaire de Mathématiques
	GALVANI O.	Mathématiques
	MOUSSA André	Chaire de Chimie Nucléaire
	TRAYNARD Philippe	Chaire de Chimie Générale
	SOUTIF Michel	Chaire de Physique Générale
	CRAYA Antoine	Chaire d'Hydrodynamique
	REULOS R.	Théorie des Champs
	BESSON Jean	Chaire de Chimie
	AYANT Yves	Physique Approfondie

GALLISSOT	Mathématiques
Mlle LUTZ Elisabeth	Mathématiques
BLAMBERT Maurice	Chaire de Mathématiques
BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
MICHEL Robert	Chaire de Minéralogie et Pétrographie
BONNIER Etienne	Chaire d'Electrochimie et d'Electrométallurgie
DESSAUX Georges	Chaire de Physiologie Animale
PILLET E.	Chaire de Physique Industrielle et Electrotechnique
YOCCOZ Jean	Chaire de Physique Nucléaire Théorique
DEBELMAS Jacques	Chaire de Géologie Générale
GERBER R.	Mathématiques
PAUTHENET R.	Electrotechnique
VAUQUOIS B.	Chaire de calcul électronique
BARJON R.	Physique Nucléaire
BARBIER Jean-Claude	Chaire de Physique
SILBER R.	Mécanique des fluides
BUYLE-BODIN Maurice	Chaire d'Electronique
DREFUYS B.	Thermodynamique
KLEIN J.	Mathématiques
VAILLANT F.	Zoologie et Hydrobiologie
ARNAUD Paul	Chaire de Chimie
SENGEL P.	Chaire de Zoologie
BARNOUD F.	Chaire de Biosynthèse de la cellulose
BRISSONNEAU P.	Physique
GAGNAIRE	Chaire de Chimie Physique
Mme KOFLER L.	Botanique
DEGRANGE Charles	Zoologie
PEBAY-PEROULA J.C.	Physique
RASSAT A.	Chaire de Chimie Systématique
DUCROS P.	Chaire de Cristallographie Physique
DODU Jacques	Chaire de Mécanique Appliquée I.U.T.
ANGLES D'AURIAC P.	Mécanique des Fluides
LACAZE A.	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	GIDON P.	Géologie et Minéralogie
	GIRAUD P.	Géologie
	PERRET R.	Servomécanisme
Mme	BARBIER M.J.	Electrochimie
Mme	SOUTIF J.	Physique
	COHEN J.	Electrotechnique
	DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
	GASTINEL N.	Mathématiques Appliquées
	GLENAT R.	Chimie
	BARRA J.	Mathématiques Appliquées
	COUMES A.	Electronique
	PERRIAUX J.	Géologie et Minéralogie
	ROBERT A.	Chimie Papetière
	BIAREZ J.P.	Mécanique Physique
	BONNET G.	Electronique
	CAUQUIS G.	Chimie Générale
	BONNETAIN L.	Chimie Minérale
	DEPOMMIER P.	Etude Nucléaire et Chimie Atomique
	HACQUES Gérard	Calcul Numérique
	POLOUJADOFF M.	Electrotechnique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	NAPP-ZINN	Botanique
	RODRIGUES Alexandre	Mathématiques Pures
	STANDING Kenneth	Physique Nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	LANCIA Roland	Physique Atomique
Mme	KAHANE J.	Physique
	DEPORTES C.	Chimie
Mme	BOUCHE L.	Mathématiques
	SARROT-REYNAUD	Géologie Propédeutique
Mme	BONNIER M.J.	Chimie
	KAHANE A.	Physique Générale
	DOLIQUE J.M.	Electronique

BRIERE G.	Physique M.P.C.
DESRE G.	Chimie S.P.C.N.
LAJZROWICZ J.	Physique M.P.C.
VALENTIN P.	Physique M.P.C.
BERTRANDIAS J.P.	Mathématiques Appliquées - TMP
LAURENT P.J.	Mathématiques Appliquées - TMP
CAUBET J.P.	Mathématiques Pures
PAYAN J.J.	Mathématiques
Mme BERTRANDIAS F.	Mathématiques Pures M.P.C.
LONGEQUEUE J.P.	Physique
NIVAT M.	Mathématiques Appliquées
SOHM J.C.	Electrochmie
ZADWORNY F.	Electronique
DURAND F.	Chimie Physique
CARLER G.	Biologie Végétale
AUBERT G.	Physique M.P.C.
DELPUECH J.J.	Chimie Organique
PFISTER J.C.	Physique C.P.E.M.
CHIBON P.	Biologie Animale
IDELMAN S.	Physiologie Animale
BOUVARD Maurice	Hydrologie
RICHARD Lucien	Botanique
PELMONT Jean	Physiologie Animale
BLOGH D.	Electrotechnique I.P.
BOUSSARD J.Claude	Mathématiques Appliquées I.P.
MOREAU René	Hydraulique I.P.
BRUGEL L.	Energétique I.U.T.
SIBILLE R.	Construction Mécanique I.U.T.
ARMAND Yves	Chimie I.U.T.
BOLLIET Louis	Infromatique I.U.T.
KUHN Gérard	Energétique I.U.T.
GERMAIN Jean-Pierre	Construction Mécanique I.U.T.
CONTE René	Thermodynamique
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
PIERY Yvette	Biologie Animale

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIES

SAWCZUK A.	Mécanique des Fluides
CHEEKE J.	Thermodynamique
YAMADA O.	Physique du Solide
NATR Lubomir	B.M.P.V.
NAYLOR Arch	Physique Industrielle
SILBER Léo	Radioélectricité
NOZAKI Akihiro	Mathématiques Appliquées
RUTLEDGE Joseph	Mathématiques Appliquées
DONOHO Paul	Physique Générale
EGGER Kurt	B.M.P.V.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à

Monsieur le Professeur KUNTZMANN qui m'a fait le grand honneur d'accepter d'être le Président du Jury.

Je remercie particulièrement Monsieur le Professeur GASTINEL pour la confiance qu'il m'a fait en me suggérant ce travail et pour ses conseils judicieux qui permirent une orientation plus positive.

Je remercie Monsieur le Professeur SANTON pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être membre du Jury.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur LEVIN, Directeur du Département Recherches de la Société Bouchayer-Viallet-Schneider qui par ses précieux conseils a grandement facilité mes premiers contacts avec l'hydraulique.

Je remercie Monsieur LENORMAND, Ingénieur, pour les nombreuses précisions qu'il a pu m'apporter.

Je désire exprimer ma reconnaissance à Mademoiselle CLERET pour l'aide qu'elle m'a apportée dans la rédaction des programmes.

Je remercie Mademoiselle QUACCHIA et Monsieur MOUNET qui ont assuré la réalisation matérielle de cet ouvrage dans des circonstances particulièrement difficiles.

Je remercie enfin tous les membres du Laboratoire de Calcul qui ont contribué à ce travail.

SOMMAIRE

INTRODUCTION.

CHAPITRE I : Définition du coup de bélier et Etude des méthodes pour l'évaluer.

1) Etude physique du coup de bélier.
2) Evaluation par le calcul Analogique.
3) Evaluation par une méthode graphique.
4) Diverses méthodes numériques.

CHAPITRE II : Principe d'une méthode de résolution numérique.

1) Schéma aux différences finies utilisé.
2) Remarques.
3) Etude de la stabilité en fonction des paramètres définis.
4) Erreurs.
5) Introduction des conditions aux limites.

CHAPITRE III : Application aux systèmes hydrauliques linéaires.

1) Convention de représentation d'un système hydraulique - Graphe associé.
2) Linéarisation des pertes de charges par frottement.
3) Linéarisation des lois d'aboutement simples.
4) Procédures.
5) Résultats.

CHAPITRE IV : Traitement des structures en arbre.

1) L'algorithme dit "du collecteur".
2) Mode d'utilisation de l'algorithme du collecteur.
3) Procédures.
4) Résultats.

CHAPITRE V : Etude d'un algorithme plus général.

1) Algorithme du répartiteur.
2) Un algorithme à utiliser avec celui du répartiteur.
3) Un exemple particulier d'utilisation : le calcul des surtensions dans les lignes électriques.
4) Conditions de stabilité du schéma proposé.
5) Procédures.
6) Résultats.

Conclusion.

Bibliographie.

INTRODUCTION

Le but du travail que nous présentons ici est d'établir un ensemble d'algorithmes et les programmes pour calculatrices correspondants, destinés à calculer de façon aussi précise que possible la pression et la vitesse d'écoulement régnant dans une conduite lors d'un "coup de bélier".

Les hydrauliciens appellent "coup de bélier" les surpressions engendrées dans des conduites hydrauliques pendant un régime transitoire. On peut imaginer facilement le phénomène en entendant résonner une conduite d'appartement lors de la fermeture brusque d'un robinet.

Nous verrons dans le 1er chapître que l'on disposait déjà de nombreux outils pour étudier certains aspects du phénomène.
Ce que nous avons essayé d'établir est une méthode, la plus générale possible, que l'on puisse utiliser lorsque les procédés anciens se sont révélés insuffisants. Comme nous le verrons cette généralités se paie d'une certaine lourdeur et dans certains cas les procédés antérieurs seront plus adaptés à l'étude des coups de béliers.

CHAPITRE I

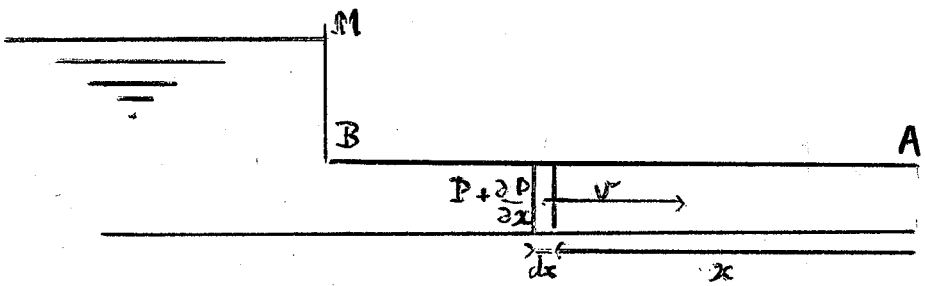
DEFINITION DU COUP DE BELIER ET ETUDE DES METHODES POUR L'EVALUER

Dans ce chapître, nous étudierons d'abord les lois physiques régissant le coup du bélier et nous en donnerons une formulation respectant les conventions des mathématiciens parfois différentes de celles des physiciens. Puis nous examinerons rapidement les moyens dont on dispose pour étudier le phénomène en essayant de montrer leur domaine d'application, définissant ainsi l'ensemble des questions qui restent posées et auxquelles nous nous proposons de répondre en partie.

1. ETUDE PHYSIQUE DU COUP DE BELIER.

a) Equations d'Allievi (1901).

Sous certaines hypothèses, pratiquement toujours vérifiées dans les conduites industrielles, ALLIEVI (1) a donné les équations qui régissent l'écoulement d'un fluide. Nous définirons d'abord ces hypothèses, puis après avoir rapidement établi les équations générales, nous donnerons les lois vérifiées en certains points particuliers d'un réseau hydraulique.



Hypothèses : On étudie une conduite AB faite de même métal de diamètre et épaisseur constants, emplie d'un fluide unique, de vitesse initiale V_0 constante tout au long de la conduite et dans une section quelconque de celle-ci, et soumis à une pression P_0.

Orientons l'axe des abcisses de A vers B en conservant à v une valeur positive c'est une convention posée par Allievi et conservée par la suite.

Appelons p(x, t), v(x, t), ρ respectivement la pression et la vitesse en x à l'instant t et le poids volumique du fluide.

On remarque que l'altitude des différentes sections n'a pas d'influence sur le mouvement. En effet toute dénivellation dh est équilibrée par une différence de pression $dp = \rho dh$ et est sans effet sur la vitesse.

L'inclinaison de la conduite n'a donc aucune importance.

Examinons les forces qui s'exercent sur un élément de volume Sxdx de la conduite ; en supposant négligeables les forces de frottement du liquide sur la paroi.

1°) Force due à la variation de pression = $- S \frac{\partial \rho}{\partial x} dx$ (1)

2°) Force d'inertie de la masse $\rho \frac{Sdx}{g}$ de l'élément dont la vitesse v varie dans le temps = $\rho \frac{Sdx}{g} \frac{dv}{dt}$ (2) (ou g est l'accélération de la pesanteur).

Si on néglige $\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = v \frac{\partial v}{\partial x}$ devant $\frac{\partial v}{\partial t}$ on peut écrire : $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt}$.

La validité de cette hypothèse est vérifiée à posteriori.

Ecrivons que la somme des forces est nulle il vient :

$$\frac{g \partial \rho}{\rho \partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3).$$

Ecrivons d'autre part que l'accroissement de la masse du volume Sdx est égal, pendant le temps dt, à la différence des masses entrantes et sortantes.

v augmente le long de x de $\frac{\partial v}{\partial x} dx$, la masse entrante est donc :

$\rho \frac{S}{g}(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx)\, dt$ et la masse sortante : $\rho \frac{S}{g} v dt$

l'accroissement est donc de : $\rho \frac{S}{g} \frac{\partial v}{\partial x} dx\, dt$.

Cet accroissement peut s'écrire $\frac{d(\rho \frac{S}{g} dx)}{dt} dt$

Donc on peut écrire $\rho \frac{S}{g} \frac{\partial v}{\partial x} dx\ dt = \frac{\partial(\rho \frac{S}{g} dx)}{\partial t} dt$ (4)

c'est-à-dire : $\rho S \frac{\partial v}{\partial x} = \partial \frac{(\rho S)}{\partial t}$ (5).

1°) Variation de ρ : Le fluide étant élastique se comprime sous l'effet de la variation de pression dp de x + dx à x. Cette compression est proportionnelle à dp, dx et $\frac{1}{\varepsilon}$ ou ε est le coefficient d'élasticité du fluide. La masse étant invariante il vient

$\rho S\ dx = (\rho + d\rho)\ S(1 - \frac{dp}{\varepsilon})dx$.

D'où il vient en négligeant les termes du 2ème ordre.

$$d\rho = \rho \frac{dp}{\varepsilon} \quad (6)$$

2°) Variation de S.

La conduite étant élastique sa déformation est proportionnelle, d'après les lois de l'élasticité des métaux à $\lambda = \frac{dpD^2}{4eE}$ ou D est le diamètre, e l'épaisseur du métal, E son coefficient d'élasticité.

S varie donc de $\frac{\pi(D + \lambda)^2}{4} - \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4}\left[(1 + \frac{\lambda}{D})^2 - 1\right] = \frac{2\lambda S}{D}$

en négligeant $\frac{\lambda^2}{D^2}$ devant 1 dans $(1 + \frac{\lambda}{D})^2$.

d'où $dS = S \frac{D}{2Ee} dp$ (7)

Reportons (6) et (7) dans (5) on obtient :

$$\rho S \frac{\partial v}{\partial x} = \rho S(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{2Ee}) \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{2Ee}) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (8)$$

Soit en posant $a^2 = \dfrac{g}{\rho(\frac{1}{\mathcal{E}} + \frac{D}{2Ee})}$ ce qui donne à a la dimension d'une vitesse, et en exprimant la pression en hauteur de liquide c'est-à-dire en écrivant $p = \rho h$ (3) et (8) deviennent

$$(I) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = g \dfrac{\partial h}{\partial x} & (9) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{g}{a^2} \dfrac{\partial h}{\partial t} & (10) \end{cases}$$

Ce sont les équations d'Allievi

Si l'on ne respecte pas la convention d'Allievi sur l'orientation des vitesses en sens contraire de l'axe des x on obtient

$$(II) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + g \dfrac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{g}{a^2} \dfrac{\partial h}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

C'est ce système que nous conserverons par la suite.

Il convient de ne pas oublier que $h = \dfrac{p}{\rho}$, ρ poids volumique du liquide, donc qu'on peut introduire dans ces 2 équations un coefficient multiplicateur de h, si on mesure les pressions en hauteur d'un autre liquide. Cette remarque sera utilisée par la suite.

Remarques.

Il existe en physique de nombreux phénomènes régis par des lois analogues (en mécanique et électricité notamment). Donc une méthode de résolution de ces équations a en principe un vaste champ d'applications ; d'autre part, si l'un de ces processus physiques est accessible à la mesure, on pourra par analogie, calculer la valeur des fonctions $v(x, t)$, $h(x, t)$ pour un autre phénomène. Nous verrons plus loin que malheureusement les variations de v et h en fonction du temps sont le plus souvent trop rapides pour être mesurables.

b) Conditions initiales et conditions aux limites usuelles.

Les équations aux dérivées partielles (I) décrivent convenablement les lois d'écoulement dans une conduite mais d'une part leur solution dépend des conditions initiales et aux limites que l'on se donne, d'autre part ces équations ne sont pas vérifiées aux extrémités de la conduite et ce sont précisément les lois qui régissent les variations de h et v aux points 0 et L(L étant la longueur de la conduite) qui serviront de conditions aux limites.

Conditions initiales : Il s'agit d'étudier un régime transitoire on connaît toujours le régime permanent initial et le plus souvent le régime final. C'est-à-dire que l'on se donne $v(x, 0)$ $h(x, 0)$ pour $0 \leq x \leq L$.

Conditions aux limites.

1°) En hydraulique.

Une conduite est en général reliée à un réservoir, dont le niveau peut être supposé constant durant la période d'étude du phénomène, c'est-à-dire qu'une condition aux limites sera presque toujours $H(0, t) = H_0$ = constante (ou $H(L, t) = H_0$ ceci suivant l'orientation de la conduite). A l'autre extrémité est situé un appareil hydraulique (vanne, turbine, pompe etc ...). Ces différentes machines sont caractérisées par ce que l'on appelle une courbe de fonctionnement ou courbe caractéristique. Elle peut être définie comme l'ensemble des couples de valeur (h, v) possibles pour cette machine dans une situation donnée ; c'est-à-dire pour des valeurs fixées des paramètres caractéristiques de la machine (par exemple section d'ouverture d'une vanne). Cette courbe peut donc être représentée analytiquement par une relation $v = f(h)$. Par exemple pour une vanne, la loi est, si S_0 représente la section initiale, $\alpha = \frac{v_0}{\sqrt{h_0}}$ ou v_0 et h_0 sont les valeurs initiales de v et h, $v(t) = \alpha \frac{S(t)}{S_0}\sqrt{h(t)}$. $S(t)$ étant la loi donnant la section en fonction du temps (ou loi de fermeture). Pour plus de détails sur les courbes caractéristiques et leur

établissement on peut se référer au cours de M. SILBERT (2). La perturbation, cause du coup de bélier est créée par une modification des paramètres caractéristiques de l'appareil. La variation de ces paramètres dans le temps étant une donnée au problème, on obtient finalement comme condition à l'extrémité une loi de la forme $v(t) = g(h(L, t), t)$. Le plus souvent on connaît son expression analytique mais il peut arriver qu'elle soit donnée par points. Un cas particulier de cette forme que nous examinerons est $v(t) = g(t)$. Il peut exister d'autres types de conditions aux limites, par exemple celle représentant la rupture d'une conduite en un point donné. Nous verrons que ces phénomènes peuvent être difficilement étudiés par la méthode que nous proposons et nous n'étudierons pas de telles conditions aux limites.

2°) En électricité.

Les conditions aux limites sont beaucoup plus variées. De façon approximative on peut les classer en 3 groupes, (en appelant V la tension et I l'intensité).

α) $V(0 \text{ ou } L, t) = \rho(t)$.

β) $I(0 \text{ ou } L, t) = g(t)$.

γ) Une relation différentielle entre $V(0 \text{ ou } L, t)$ et $I(0 \text{ ou } L, t)$.

Nous verrons que notre méthode s'adapte particulièrement à ce genre de conditions aux limites.

c) Pertes de charges.

Nous avons vu lorsque nous avons établi les équations d'Allievi que l'on supposait négligeables les forces de frottement du fluide sur la paroi. Cette approximation n'est pas toujours légitime surtout si la conduite présente un coude ou un étranglement localisé (diaphragme). Pour un diaphragme on peut considérer que la pression subit une discontinuité, l'expression de la valeur du saut de cette fonction est de la forme $\frac{lv^2}{2g}$ ou plus simplement kv^2. Une démonstration de cette formule est donnée dans le cours de M. SILBERT (2). Tenir compte

de la perte de charge par frottement revient à supposer qu'il existe une infinité de discontinuités en série. S'il n'est pas possible d'étudier le phénomène tel quel, il est évident que l'on peut l'approcher de façon aussi précise que l'on veut, en le simulant par un nombre fini de diaphragmes dont la perte de charge totale est égale à celle mesurée le long de la conduite et en supposant qu'il n'y a pas de frottement entre ces diaphragmes. D'autre part, il faut bien sûr introduire ce que l'on appelle les pertes de charges concentrées, c'est-à-dire les pertes de charges dues à une irrégularité précise de la conduite (diaphragme, coude, etc...). Ces pertes de charges sont aussi de la forme kv^2.

Revenons maintenant sur les équations d'ALLIEVI établies en supposant $v \frac{\partial v}{\partial x}$ négligeable devant $\frac{\partial v}{\partial t}$ ainsi que les frottements.

Introduisons ces quantités dans la première équation d'ALLIEVI.

Appelons J la force de frottement. La formule (3) du paragraphe b) devient :

$$g\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial J}{\partial x}\right) = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3')$$

Posons $H = h + \frac{v^2}{2g} + J$; (3') donne $g \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}$

Il est évidemment tentant pour avoir un système résoluble de remplacer dans la 2ème équation d'ALLIEVI h par H. Théoriquement c'est impossible, mais BERGERON (3) a montré que cette approximation était très près de la vérité. Pour notre part, nous introduisons les pertes de charges par un nombre fini de discontinuités et nous poserons entre chacune d'entre elles $H = h + \frac{v^2}{2g}$ et nous résoudrons le système

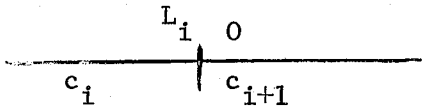
$$\left(g \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{g}{a^2}\frac{\partial H}{\partial t}\right).$$

Notons que dans les cas que nous avons étudiés $\frac{v^2}{2g} < h/100$. Ce qui montre bien que les 2 systèmes envisagés sont très proches l'un de l'autre.

d) Lois d'aboutement.

Un système hydraulique est un ensemble de conduites reliées les unes aux autres. Les équations d'ALLIEVI décrivent les phénomènes qui se déroulent dans une conduite unique. Appelons v_i et h_i la vitesse et la pression d'une conduite c_i. Si nous savons relier $h_i(L_i, t)$ $v_i(L_i, t)$ à $h_{i+j}(0, t)$ et $v_{i+j}(0, t)$ (où L_i est la longueur de la conduite c_i aboutée aux conduites $c_{i+1} \ldots c_{i+k}$) nous pourrons étudier le coup de bélier dans un réseau hydraulique complexe.

1°) Aboutement de 2 conduites c_i et c_{i+1} de sections S_i et S_{i+1}

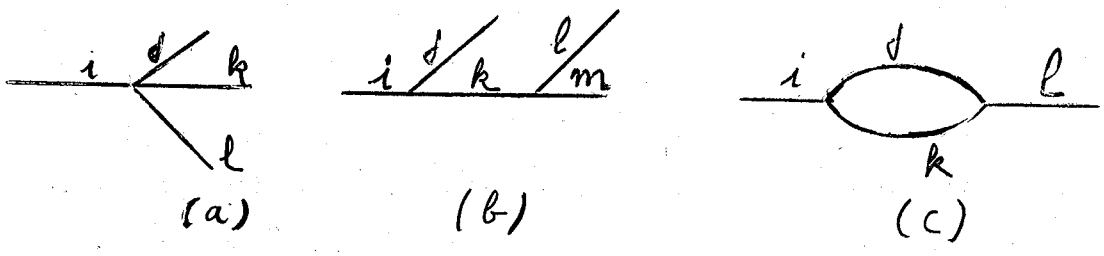


La première loi est celle de conservation des débits. Elle s'écrit :

$$v_i(L_i, t) \times S_i = v_{i+1}(0, t) \times S_{i+1} .$$

Pour les pressions la relation est : $H_{i+1}(0, t) = H_i(L_i, t) - k_i^{i+1} S(v_i) v_i^2(0, t)$
ou $S(v_i) = +1$ si $v_i > 0$
$= -1$ sinon.
Dans cette loi $k_i^{i+1} S(v_i) v_i^2(0, t)$ est généralement faible devant les pressions $H_i(L_i, t)$ et $H_{i+1}(0, t)$; aussi, certains auteurs écrivent-ils simplement l'égalité de ces pressions. Nous verrons d'ailleurs que cette approximation est nécessaire pour mettre en oeuvre certaines méthodes de calcul des coups de bélier dans des conduites à caractéristiques multiples. La méthode que nous proposons tient compte de la discontinuité entre les fonctions $H_i(L_i, t)$ et $H_{i+1}(0, t)$ mais il est évidemment possible de se ramener à l'approximation citée plus haut en prenant $k_i^{i+1} = 0$.

2°) Aboutement en étoile.



Le premier problème qui se pose, est celui de l'orientation des différentes conduites. En effet, il n'est pas possible, si l'on veut pouvoir mettre en oeuvre une méthode suffisamment générale, de fixer une convention d'orientation des conduites (+ vers le noeud par exemple, en appelant noeud la jonction d'au moins 3 conduites). En effet les schémas (b) et (c) montrent qu'on peut arriver alors à une contradiction. On est donc obligé de supposer que les conduites sont orientées dans un sens arbitraire. Dans le cas d'un aboutement de 2 conduites, on supposera qu'elles sont toutes 2 orientées dans le même sens et on appellera branche un ensemble de conduites aboutées les unes à la suite des autres et reliant soit 2 noeuds du réseau, soit un noeud à une entrée ou sortie du réseau. Ce vocabulaire issu de la théorie des graphes sera justifié au chapître III où l'on définira le graphe associé à un réseau hydraulique. A chaque branche i reliée au noeud p on associe un nombre ε_i^p. $\varepsilon_i^p = +1$ si la branche i est orientée vers le noeud p, $\varepsilon_i^p = -1$ sinon. Pour donner l'expression de la perte de charge en un noeud il nous faut définir d'abord ce que nous appellerons <u>la vitesse principale de rapport r</u> car c'est en fonction de celle-ci que seront écrites les pertes de charges.

<u>Définition de la vitesse principale de rapport π en un noeud</u>.

Considérons un noeud point d'aboutement des branches 1, 2, ... ℓ ; ces branches contiennent un fluide dont la vitesse v_i sera comptée positivement si elle est dirigée vers le noeud, négativement sinon. Nous dirons que v_i est vitesse principale de rapport π si pour tout j différent de i $\frac{v_j}{v_i} < \pi$ avec $\pi > 0$.

Quelques propriétés de la vitesse principale.

α) Si v_i est la seule vitesse positive ou négative alors v_i est vitesse principale de rapport π pour tout $\pi > 0$. En effet on a alors $\frac{v_j}{v_i} \leq 0$.

v_i est dite alors vitesse principale de rapport nul ou <u>vitesse de sens unique</u>.

β) On ne peut avoir au plus en un noeud que 2 vitesses principales de rapport π (une positive et une négative). En effet si l'on a $v_i > 0$ et $v_j > 0$ on a alors $\frac{v_j}{v_i} < \pi \Rightarrow \frac{v_i}{v_j} > \pi$ de même pour $v_i < 0$ et $v_j < 0$.

Donc, on ne peut avoir 2 vitesses principales de même signe.

<u>Convention</u>. S'il existe 2 vitesses principales de rapport π on exprimera les pertes de charges en fonction de : s'il en existe une celle de sens unique sinon la vitesse principale de rapport π positive. Il ne s'agit que d'une convention car, s'il existe 2 vitesses principales, on peut exprimer les pertes de charges indifféremment en fonction de l'une ou de l'autre.

Expression de la perte de charge en un noeud : Si v_i est la vitesse principale choisie en un noeud, suivant la convention citée ci-dessus, on peut écrire, en appelant H_i la pression à l'extrémité de la branche i : $H_i - H_j = h_i^j \, v_i^2 \, k_i^j$ étant une fonction de différents paramètres liés à la géométrie de l'embranchement. k_i^j étant d'autre part nul si $v_i \, v_j > 0$. Ceci est bien sûr une approximation plus précise que celle qui consiste à écrire $H_i = H_j$ et à laquelle on peut se ramener en prenant $k_i^j = 0$ pour tout couple (i, j) et qui ne diffère pratiquement pas de celle-ci lorsque les vitesses sont très faibles.

Cette loi physique exposée, nous allons maintenant lui donner une forme mathématique suffisamment générale et valable quelque soit l'orientation choisie sur les branches jointes par le noeud considéré puisqu'il n'est pas possible, comme nous l'avons vu, d'établir une convention générale d'orientation.

Posons $S(v_i) = +1$ si $v_i > 0$, $= -1$ sinon ; pour une branche i relié au noeud p nous aurons $S(\varepsilon_i^p v_i) = +1$ si v_i est dirigée vers le noeud, $= -1$ sinon.
Posons $S(v_i) = 1$ si v_i est vitesse principale choisie suivant la convention ci-dessus, $= 0$ sinon.
Alors on peut écrire $H_i - H_j = k_i^j (S(\varepsilon_i^p v_i) - S(\varepsilon_j^p v_j))(\delta(v_i) V_i^2 + \delta(v_j) V_j^2)$.
En examinant tous les cas possibles (il y en a 16) on peut vérifier que
α) $H_i - H_j = 0$, si v_i et v_j ont même direction relativement au noeud.
β) La pression décroît en suivant le sens du courant.
γ) Cette expression coïncide dans tous les cas avec les lois des hydrauliciens.
C'est cette forme que nous utiliserons par la suite avec le complément suivant : s'il n'existe pas de vitesse principale mais que toutes les vitesses soient inférieures en valeur absolue à une certaine quantité v_m alors nous poserons $H_i = H_j$. (l'expression citée plus haut restant d'ailleurs valable puisque $\delta(v_i) = \delta(v_j) = 0$). S'il n'existe pas de vitesse principale et que l'une des vitesses soit supérieure en valeur absolue à v_m nous ne résoudrons pas le problème.

2. EVALUATION PAR LE CALCUL ANALOGIQUE.

Une méthode intéressante d'évaluation du coup de bélier a été mise au point au Laboratoire d'Hydraulique de Toulouse par MM. ESCANDE et PIQUEMAL (4). Elle est basée sur l'analogie des équations régissant la naissance et la propagation des ondes de surpression dans une conduite hydraulique et de surtension dans une ligne électrique.

En effet pour un système hydraulique on a, avec les conventions des hydrauliciens

(1) $$\frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t}$$

Pour un système électrique ou i est l'intensité et u la tension on peut écrire :

$$\frac{\partial i}{\partial \tau} = \frac{1}{\ell} \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = c \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

Si dans un système d'unités cohérent, on réalise les égalités numériques $\frac{g}{a^2} = c$, $g = \frac{1}{\ell}$, $i_0 = v_0$, $H_0 = u_0$ on aura à tout instant ou $t = \tau$ et en tout point ou $x = z$ $v(x, t) = i(z, \tau)$, $h(x, t) = u(z, \tau)$.

Mais ces conventions conduisent à des grandeurs physiques peu commodes à réaliser ; aussi on considère une conduite c_1 dont les grandeurs caractéristiques sont :

$v_1 = kv$, $h_1 = mk$, $t_1 = nt$, $x_1 = px$, $a_1 = qa$, $g_1 = \pi g$

grandeurs vérifiant

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{g_1}{a_1^2} \frac{\partial h_1}{\partial t_1} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t_1} = g_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1}$$

c'est-à-dire $\frac{p}{k} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\pi}{q^2} \frac{m}{n} \frac{g}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t}$

$$\frac{k}{n} \frac{\partial v}{\partial t} = \pi \frac{m}{p} g \frac{\partial h}{\partial x} \qquad (4)$$

Comparons (1) et (4). On pourra dire que les 2 conduites sont équivalentes si

$$\begin{cases} \frac{p}{k} = \frac{\pi}{q^2} \frac{m}{n} \\ \frac{k}{n} = \frac{\pi m}{p} \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} p = qn \\ kq = \pi m \end{cases}$$

Donc, on peut fixer 4 de ces constantes et par ce système, calculer les 2 autres.

C'est évidemment à la conduite c_1 qu'on associe le circuit analogique vérifiant

$$\frac{g_1}{a_1^2} = c \qquad g_1 = \frac{1}{\ell}$$

c'est-à-dire $\frac{\pi}{q^2}\frac{g}{a^2} = c \quad \pi g = \frac{1}{\ell} \Rightarrow \pi = \frac{1}{g\ell} \quad q^2 = ca^2\ell$

ℓ et c étant des caractéristiques du circuit construit une fois pour toute, il ne reste donc plus que 2 degrés de liberté pour le choix des échelles d'analogie. Malheureusement, dans une ligne réelle, les ondes se propagent avec une vitesse proche de celle de la lumière et les mesures deviennent impossible, d'où la necessité d'utiliser des lignes à retard dont nous ne détaillons pas la théorie ici. Disons simplement qu'elles permettent, outre de rendre le phénomène accessible à la mesure, de simuler les conduites de section variables et les pertes de charge par frottement. Les conditions aux limites sont simulées soit par une penthode de puissance pour les variations de débit, soit par une alimentation stabilisée pour le reservoir de niveau constant. Cette méthode trouve sa limite dans l'impossible pratique de simuler correctement les bifurcations. De plus, il faut refaire l'expérience autant de fois qu'il y a de points où l'on veut mesurer la tension (à moins de disposer de nombreux oscilloscopes à mémoire). Enfin, pour chaque modèle à caractéristiques multiples, il faut réassembler le jeu de cellules constituant la ligne à retard.

Cependant, elle peut être très utile pour étudier l'influence des conditions aux limites sur un système hydraulique donné.

N.B. Une méthode, la plus exacte qui soit, peut aussi etre considérée comme analogique : c'est celle du modèle réduit. Nous n'insisterons pas sur ses inconvénients évidents et amplement démontrés par le nombre de procédés ayant vu le jour pour la remplacer.

3. EVALUATION PAR UNE METHODE GRAPHIQUE.

Développée par BERGERON dans les années 1945-1950 cette méthode a fait l'objet d'un ouvrage (5), couramment utilisé par les hydrauliciens et qui nous a grandement aidé à comprendre le phénomène d'un point de vue physique. Ce procédé graphique est fondé principalement sur 2 résultats classiques :

1°) Tout appareil hydraulique (pompe, turbine, vanne ; clapet etc ...) est caractérisé à un instant donné par 2 valeurs H et V. L'ensemble des couples de valeurs possibles à un instant donné constitue la courbe de fonctionnement de l'appareil et est supposée connue pour appliquer cette méthode.

2°) Pour un observateur se déplaçant avec la célérité d'une onde les 2 grandeurs physiques caractérisant cette onde sont reliées par une relation linéaire ce qui dans notre cas peut se traduire géométriquement de la façon suivante :
Si en un point x_0 à l'instant t le point caractéristique d'une conduite est $h(x_0, t)$, $v(x_0, t)$ à l'instant $t + \Delta t$ a lieu géométriquement au point caractéristique en $x_0 + \Delta x$ (si $\Delta x = a\Delta t$) est la droite passant par $h(x_0, t)$, $v(x_0, t)$ et de coefficient angulaire a/g ($-a/g$ si $\Delta x = -a\Delta t$). Ce résultat peut être obtenu directement en analysant le phénomène physique ou à partir de la solution générale des équations d'ALLIEVI. D'où le principe de la construction graphique de BERGERON : Le point caractéristique $h(x, t)$, $v(x, t)$ est obtenu par l'intersection de ses 2 lieux géométriques (courbe de fonctionnement et droite que nous venons de définir). On voit immédiatement qu'ayant choisi un Δt le Δx est fixé (ou réciproquement) ; de plus connaissant $h(x, t)$, $v(x, t)$ on ne pourra connaître que $h(x, t + n\Delta t)$ où $n\Delta t$ est le temps mis par l'onde pour effectuer un aller et retour dans la conduite.
Nous n'entrerons pas plus en détail dans cette méthode qui se complique beaucoup, sinon dans son principe du moins dans son application, lorsqu'on veut tenir compte des pertes de charges et surtout lorsque le système hydraulique considéré est tant soit peu complexe. Comme nous l'avons vu les renseignements obtenus sont assez

fragmentaires puisqu'on ne connaît les valeurs de h et v en différents points que tous les nΔt (valant pour certains réseaux jusqu'à 6s). La valeur cherchée étant souvent le maximum de h, la précision reste évidemment assez faible. De plus, comme il s'agit d'une méthode graphique, cette précision s'altère au fur et à mesure que l'on aborde des problèmes plus compliqués. Les risques d'erreurs sont aussi assez grands et son coût est assez élevé, puisque dans certains cas il faut envisager 2 mois de travail d'un dessinateur entraîné pour mener l'épure à son terme. Il n'en reste pas moins que cette méthode est celle à laquelle tous les auteurs de nouveaux procédés comparent leurs résultats pour juger de leur validité et c'est à elle que nous nous référerons le plus souvent dans nos exemples ; d'autant plus qu'elle a été conçue dans un esprit de généralité que nous avons essayé de conserver au cours de cette étude. En effet, il s'agit d'une méthode très générale et permettant, au prix, parfois, d'un effort très important, de résoudre la plupart des problèmes qui se posent au sujet du coup de bélier. Nous donnons, à titre d'exemple une épure de BERGERON pour une conduite étudiée par ailleurs avec d'autres méthodes.

4. DIVERSES METHODES NUMERIQUES.

Déjà de nombreux essais, plus ou moins couronnés de succès, ont été faits pour évaluer la surpression engendrée par un coup de bélier, à l'aide d'un calculateur numérique. Nous en exposerons 3 sans prétendre faire un résumé exhaustif de la question. Nous les avons choisis un peu arbitrairement en essayant de couvrir les 12 dernières années pour montrer l'intérêt que les hydrauliciens accordent à la résolution satisfaisant à ce problème, les obstacles qui demeurent et que nous ne prétendons pas supprimer entièrement et les questions particulières qui sont déjà résolues.

a) Méthode de Monsieur CARRY (6).

La plus ancienne parmi celles que nous avons pu connaître, est due à M. CARRY du Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique. Elle est bâtie sur la résolution

des équations d'ALLIEVI par remplacement des équations aux dérivées partielles par le schéma aux différences finies suivant :

$$gh(t + 1, x) = gh(t - 1, x) + \frac{a}{u}(aV(t, x + 1) - av(t, x - 1))$$

$$av(t + 1, x) = av(t - 1, x) + \frac{a}{u}(gh(t, x + 1) - gh(t, x - 1))$$

où $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Il pose $u = a$ (ce qui redonne la condition de BERGERON).
Mais, avec ce schéma il est pratiquement impossible de réaliser les conditions aux limites par des équations aux différences finies. Il remplace donc la condition amont (h = constante) par 2 conditions : 1°) l'équation d'une caractéristique ; $gh(t + 1, 0) - av(t + 1, 0) = gh(t, 1) - av(t, 1)$.
2°) l'équation des pertes de charges en supposant celles-ci concentrées en ce point c'est-à-dire : $gh(t + 1, 0) = gh_0 \times (1 - \frac{v^2(t + 1, 0)}{v_0^2})$ où h_0 et v_0 sont les conditions initiales.
Pour la condition aval le principe est le même, il calcule h et v comme étant l'intersection d'une droite caractéristique de BERGERON avec la courbe de fonctionnement de la vanne. Le domaine d'application de cette méthode est évidemment assez restreint puisqu'on ne peut traiter qu'une conduite à caractéristique unique en supposant les pertes de charges concentrées en amont. Sur une seule conduite cette approximation, sans être très fine, peut être acceptable : nous avons fait un essai en répartissant les pertes de charge tout au long de la conduite ; la différence avec les résultats obtenus avec la convention précédente est de l'ordre de 2 %.

b) <u>Méthode de MM. THIRRIOT et CANGUILHEM du Laboratoire d'Hydraulique de la Faculté des Sciences de Toulouse (7).</u>

Le calcul du coup de bélier peut ne pas être une fin en soi mais un moyen pour, par exemple étudier son évolution en fonction de certains paramètres. Ce qui entraîne la nécessité d'une évaluation peut être moins précise, mais rapide. Tel est le but de cette méthode. Elle suppose les pertes de charges négligeables. Son principe réside en des formules de récurrence déduites des équations d'ALLIEVI. Celles-ci ont pour solution générale

$$h + h_0 + F(t - \frac{x}{a}) + G(t + \frac{x}{a})$$

$$v = v_0 - \frac{g}{a}(F(t - \frac{x}{a}) - G(t + \frac{x}{a})$$

où F et G sont 2 fonctions dont l'expression dépend des conditions aux limites. En fait h peut désigner le surpression en soustrayant h(x, 0). Si dans un réseau l'indice i désigne une conduite à caractéristique unique on a

$h_i = F_i(t - \frac{x_i}{a_i}) + G(t + \frac{x_i}{a_i})$ et le débit $Q_i = S_i\ v_i$

$= Q_{0,\ i} + g\ \frac{S_i}{a_i}(F(t - \frac{x_i}{a_i}) - G(t + \frac{x_i}{a_i}))$

En prenant pour unité de débit $Q_{0,\ 0}$ et de pression $\frac{a_0\ Q_{0,\ 0}}{g\ S_0}$ on obtient

$$\begin{cases} h_i = f_i(t - \frac{x_i}{a_i}) + g_i(t + \frac{x_i}{a_i}) \\ q_i = q_{0,\ i} + m_i(f_i(t - \frac{x_i}{a_i}) - g_i(t - \frac{x_i}{a_i})) \end{cases}$$

avec $m_i = \frac{S_i}{a_i} / \frac{S_0}{a_0}$. Si on ne désire la surpression qu'aux extrémités des conduites, x_i ne peut prendre que les valeurs 0 et L_i ; où L_i est la longueur de la conduite c_i. Posons $t_i = \frac{L_i}{a_i}$

Il vient : $h_i = f_i(t - t_i) + g(t + t_i)$

$$q_i = q_{0,\ i} + m_i(f_i(t - t_i) - g(t + t_i))$$

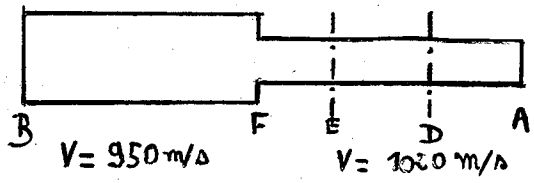
Avec les conditions aux limites et en écrivant d'une part que les surpressions en un noeud du réseau sont égales (puisque les pertes de charge sont négligeables) et d'autre part que la somme algébrique des débits est nulle, on obtient des systèmes linéaires dont les solutions donnent les surpressions aux extrémités des conduites à des intervalles de temps égaux au quart de la période propre de chaque tronçon. Cette méthode permet par sa rapidité d'aborder l'étude de la variation du coup de bélier en fonction de certains paramètres caractéristiques des systèmes hydrauliques étudiés.

c) Méthode de MM. VALVIS et ASCE (8).

La détermination de h(x, t) et v(x, t) étant basée dans la méthode de BERGERON sur l'intersection de 2 courbes, il était tentant de programmer celle-ci ; les courbes étant, soit des droites, soit des paraboles, soit des courbes données par points et qu'on peut approximer sans grands risques d'erreurs par des suites de segments de droites. C'est ce qui a été fait partiellement par les auteurs cités ci-dessus. Deux des inconvénients majeurs de la méthode de BERGERON sont alors évités : la perte de précision due à la complexité de l'épure et la lenteur de la réalisation de celle-ci. Toutefois le procédé de BERGERON se compliquant beaucoup dès que l'on envisage un réseau avec branchement (sans d'ailleurs tenir compte des pertes de charge au noeud) les programmes écrits ne permettent pas de traiter ce cas bien qu'il n'y ait pas d'impossibilité théorique. Enfin, le caractère fragmentaire des résultats obtenus demeure. Nous avons cependant testé nos programmes en traitant les mêmes cas que ceux donnés dans l'article cité en référence et nous avons pu obtenir la concordance des résultats.

Nous arrêterons là l'énumération des divers procédés d'étude du coup de bélier car on pourrait y consacrer des volumes. Ce rapide survol des moyens dont on dispose pour étudier le problème avait pour but de montrer l'intérêt qui s'y rattache et de justifier l'introduction d'un procédé pour connaître de façon peut être assez couteuse mais précise et détaillée, les fonctions h(x, t) et v(x, t).

EXEMPLE D'UNE EPURE DE BERGERON



630 m
620 m
610 m
600 m
590 m

ψ_{10A} 10A
ψ_{9A} 9A
ψ_{8A} 8A
ψ_{7A} 7A
ψ_{6A} 6A
ψ_{5A} 5A
ψ_{4A} 4A, 5D
ψ_{3A} 3A, 4D
ψ_{2A} 2A, 3D, 4E
ψ_{1A} 1A, 2D, 3E

10D
9D
8D
7D
6D
10E
9E
8E
7E
6E
5E
9F
8F
7F
6F
5F
4F
0F

65,75 m³/s
9B
66,75
8B
7B
6B
5B
72 m³/s
m

CHAPITRE II

PRINCIPE D'UNE METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE

Nous allons exposer maintenant quelques résultats qui nous ont permis de bâtir la méthode que nous proposons. Celle-ci est fondée sur la résolution par un procédé numérique des équations d'ALLIEVI. Ce procédé, permettant de vérifier les conditions aux limites usuelles, consiste en une discrétisation du problème, c'est-à-dire, un remplacement des équations aux dérivées partielles par des équations aux différences finies.

1. SCHEMA AUX DIFFERENCES FINIES UTILISE.

Ce schéma introduit par des auteurs russes (9, 10, 11) et américain (12) pour différents types d'équations a été étudié pour les équations hyperboliques par J.A. CUNGE (13). Nous nous servirons des résultats qu'il a établis, notamment sur la stabilité, sans les redémontrer. Nous verrons que ce schéma comporte 2 paramètres à fixer par l'utilisateur en fonction de ce qu'il désire obtenir.

Choisissons 2 pas Δx et Δt ;

On pose $H_K^n = H(K\Delta x, n\Delta t)$; $V_K^n = V(K\Delta x, n\Delta t)$;

le schéma aux différences finies utilisé est :

$$(I)\begin{cases} \dfrac{V_{K+1}^{n+1} - V_{K+1}^{n} + V_K^{n+1} - V_K^n}{2\,\Delta t} + g\,\dfrac{(\theta(H_{K+1}^{n+1} - H_K^{n+1}) + (1-\theta)\,(H_{K+1}^n - H_K^n))}{\Delta x} = 0 \\ \dfrac{H_{K+1}^{n+1} - H_{K+1}^{n} + H_K^{n+1} - H_K^n}{2\,\Delta t} + \dfrac{a^2}{g}\,\dfrac{(\theta(V_{K+1}^{n+1} - V_K^{n+1}) + (1-\theta)\,(V_{K+1}^n - V_K^n))}{\Delta x} = 0 \end{cases}$$

avec $0 < \theta < 1$;

Posons $\tau = g\,\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$, $\tau' = \dfrac{a^2}{g}\,\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$, $\Delta V_K = V_K^{n+1} - V_K^n$, $\Delta H_K = H_K^{n+1} - H_K^n$;

Il vient

$$(II)\begin{cases}\Delta V_{K+1} + 2\tau\theta\Delta H_{K+1} = -\Delta V_K + 2\tau\theta\,\Delta H_K - 2\tau(H^n_{K+1} - H^n_K)\\ 2\tau'\theta\Delta V_{K+1} + \Delta H_{K+1} = 2\tau'\theta\Delta V_K - \Delta H_K - 2\tau'(V^n_{K+1} - V^n_K).\end{cases}$$

Ce qui peut s'écrire encore :

$$III\quad\begin{cases}(1)\ \Delta V_K = B\Delta H_{K+1} + C^n_K + A\Delta V_{K+1}\\ (2)\ \Delta H_K = B'\Delta V_{K+1} + A\Delta H_{K+1} + D^n_K\end{cases}$$

avec $A = \dfrac{1 + 4\tau\tau'\theta^2}{4\tau\tau'\theta^2-1}$ $\quad B = \dfrac{-4\tau\theta}{1-4\tau\tau'\theta^2}$ $\quad B' = \dfrac{-4\tau'\theta}{1-4\tau\tau'\theta^2}$

$$C^n_K = \frac{+4\tau\tau'\theta(V^n_{K+1} - V^n_K) + 2\tau(H^n_{K+1} - H^n_K)}{4\tau\tau'\theta^2-1}$$

$$D^n_K = \frac{+4\tau\tau'\theta(H^n_{K+1} - H^n_K) + 2\tau'(V^n_{K+1} - V^n_K}{4\tau\tau'\theta^2-1}$$

<u>Propriété (P)</u> : S'il existe, au point $k\Delta x$, une relation linéaire entre ΔH_K et ΔV_K il existera aussi, au point $(k+1)\Delta x$, une relation linéaire entre ΔH_{K+1} et ΔV_{K+1}.

<u>Démonstration</u> : Posons $\Delta H_K = E_K\Delta V_K + F_K$.
Remplaçons ΔH_K et ΔV_K par leurs expressions dans (III) il vient :

$$B'\Delta H_{K+1} + A\Delta V_{K+1} + D^n_K = E_K(A\Delta V_{K+1} + B\Delta H_{K+1} + C^n_K) + F_K$$

Ce qui peut s'écrire $\Delta H_{K+1} = E_{K+1}\,\Delta V_{K+1} + F_{K+1}$

avec $E_{K+1} = \dfrac{AE_K - B'}{A - E_K B}$

(IV)

$$F_{K+1} = \frac{E_K C_K^n + F_K - D_K^n}{A - E_K B}$$

Sous réserve que la propriété (P) soit vérifiée en tout point du système hydraulique étudié, on dispose alors d'une méthode très rapide de calcul des ΔV_K et ΔH_K et ΔH_K, puisque le système d'équations linéaires en ΔV_K et ΔH_K a été triangularisé. En effet, connaissant les E_K, F_K, C_K^n calculés à l'instant n, et ΔV_N ou ΔH_N il suffit de "remonter" le système en utilisant les formules : $\Delta V_K = A\Delta V_{K+1} + B\Delta H_{K+1} + C_K^n$
$\Delta H_K = E_K \Delta V_K + F_K$. Le problème qui se pose est de savoir si les lois physiques citées au I-1 (pertes de charges, lois d'aboutissement, conditions aux limites) n'altèrent pas cette propriété. Nous verrons que l'on peut l'admettre dans presque tous les cas usuels.

2. REMARQUES.

a) Notation.

Pour la suite de l'exposé il est commode de poser $\Delta x = \nu a \Delta t$

ce qui donne : $\tau = g \dfrac{\Delta t}{\Delta x} = \dfrac{g}{\nu a}$; $\tau' = \dfrac{a^2}{g} \dfrac{\Delta t}{\Delta x} = \dfrac{a}{\nu g}$

d'où il vient $\tau\tau' = \dfrac{1}{\nu^2}$

b) Equation aux dimensions du système différentiel étudié.

Dans certains cas, il peut se produire au cours de la résolution numérique sur calculatrice binaire des phénomènes dits de pertes de signification. Sans entrer dans le détail de ceux-ci, rappelons que par exemple sur ordinateur IBM 7044 ; $1 + 10^{-9} = 1$ autrement dit si $B = A + 10^{-9}$ $B - A = 0$, d'où $C \times (B - A)$ qui est égal

à $C \times 10^{-9}$ en réalité, peut être pris pour nul. Les programmes sont établis en essayant d'éviter au maximum ce genre de perturbations qui peuvent entraîner de graves erreurs. Cependant, il est difficile d'imaginer en programmant un algorithme, tous les cas qui peuvent se produire et il est bon de posséder un moyen pour vérifier si des résultats quelque peu surprenants n'ont pas cette imprécision pour origine. Dans le problème que nous étudions, on peut remarquer que les équations d'ALLIEVI dont nous sommes partis ne sont pas homogènes.

$\frac{\partial V}{\partial t}$ a pour dimension celle d'une accélération c'est-à-dire LT^{-2}

$g \frac{\partial H}{\partial x_3}$ a pour équation aux dimensions $ML^{-2}T^{-2}$ il y a donc un coefficient de dimension $M^{-1}L^3$ qui vaut 1 parce que l'on mesure les pressions en mètres de liquide. On peut donc introduire dans ces équations un paramètre λ et une fonction H', avec $\lambda H' = H$, qui modifieront le rapport V/H, et pourront faire disparaître dans le calcul des C_K^n et D_K^n les phénomènes de perte de signification.

Les programmes rédigés permettent d'introduire ce paramètre (pris égal à 1 dans le plupart des cas). On peut ainsi vérifier qu'il ne se produit pas de perte de signification en faisant exécuter le programme pour 2 valeurs de λ(1 et 10^3 par exemple). On doit alors retrouver au coefficient multiplicatif λ près, les mêmes résultats.

Remarquons que si on introduit $M' = H/\lambda$ alors $\tau = \frac{g\lambda}{\nu a}$, $\tau' = \frac{a}{\nu g \lambda}$ donc $\tau\tau' = \frac{1}{\nu^2}$ est inchangé. Nous allons pouvoir déduire de cette propriété que la valeur de λ n'influe pas sur la vérification des conditions de stabilité du problème.

c) Etude de $E_{K+1} = f(E_K)$.

Etudions la fonction $E_{K+1} = f(E_K)$.

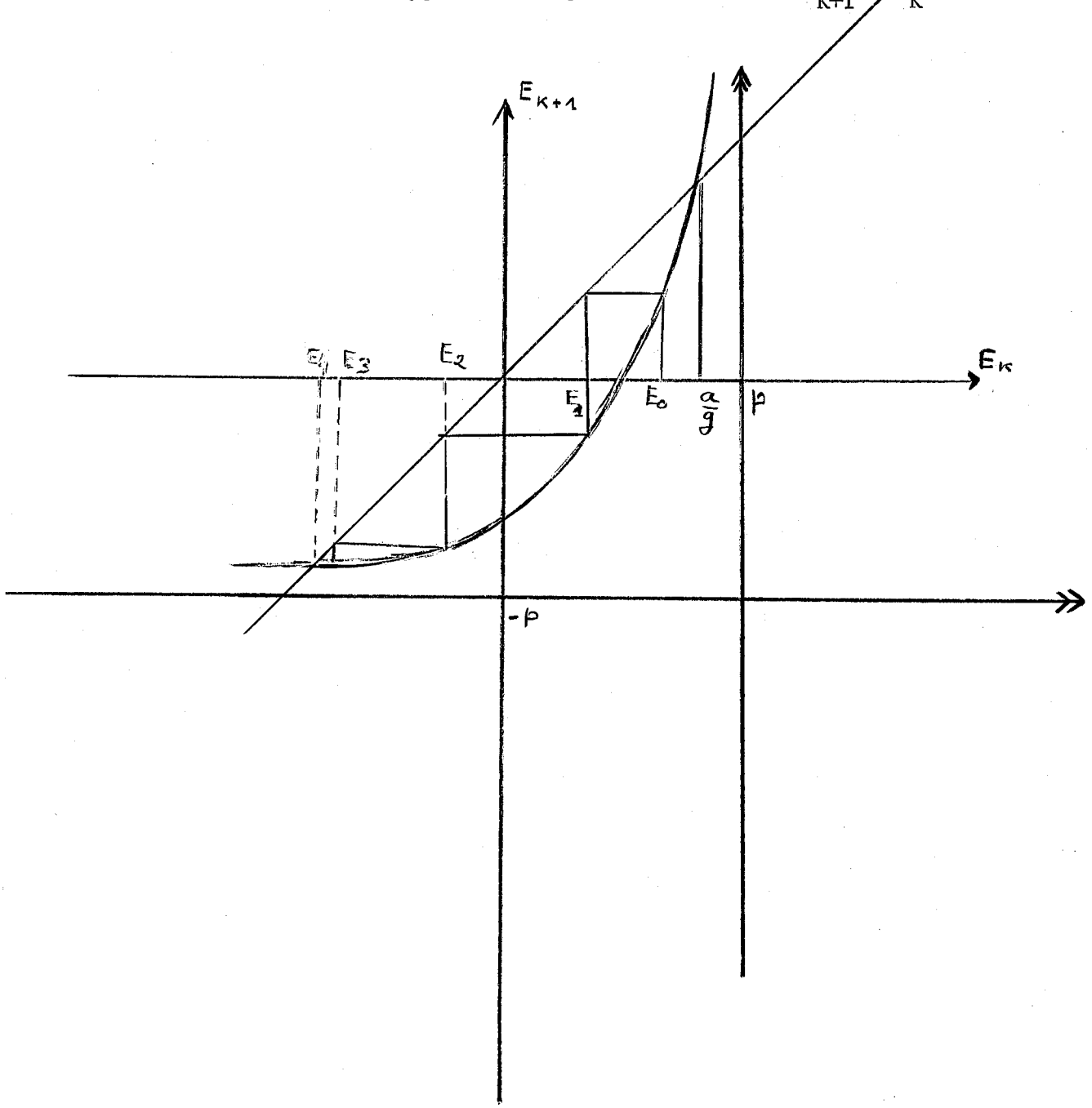
$$E_{K+1} = \frac{(1 + 4\tau\tau'\theta^2)E_K - 4\tau'\theta}{(1 + 4\tau\tau'\theta^2) - 4\tau\theta E_K}$$ soit encore en remplaçant τ et τ' par leurs expressions données au paragraphe précédent.

$$E_{K+1} = \frac{(1 + \frac{4\theta^2}{\nu^2})\ E_K - \frac{4a}{\nu g}\theta}{1 + \frac{4\theta^2}{\nu e} - \frac{4g\theta E_K}{a\nu}}$$ c'est l'expression d'une hyperbole dont les asymptotes

ont pour équations $E_{K+1} = -\frac{(\nu^2 + 4\theta^2)a}{4\nu g\theta}$

$E_K = \frac{(\nu^2 + 4\theta^2)a}{4\nu g\theta} = p$

D'où $E_{K+1} = -p$. Les conditions de stabilité montreront qu'il est nécessaire de se
$E_K = p$ déplacer sur la branche située au-dessus de l'asymptote horizontale
et que l'hyperbole coupe la bissectrice $E_{K+1} = E_K$



Un cas particulier important est celui où $\nu = 1 (\Delta x = a\Delta t)$ et $\theta = 1/2$.
En effet, nous allons voir que la méthode que nous proposons est très exactement celle de BERGERON.

En effet $E_{K+1} = \dfrac{(1+1)E_K - \dfrac{2a}{g}}{1 + 1 - \dfrac{2g}{a}E_K} = \dfrac{2gE_K - 2a}{2a - 2gE_K} \times \dfrac{a}{g}$

$E_{K+1} = -\dfrac{a}{g}$ quelque soit E_K.

$F_{K+1} = \dfrac{E_K C_K^n + F_K - D_K^n}{A - E_K B}$; tous les termes sauf F_K comportant $4\tau\tau'\theta^2 - 1$ au dénominateur on peut écrire en remplaçant les termes par leurs valeurs et en simplifiant :

$$F_{K+1} = \left[E_K(4\tau\tau'\theta(V_{K+1}^n - V_K^n) + 2\tau(H_{K+1}^n - H_K^n)) + F_K(4\tau\tau'\theta^2 - 1) - 4\tau\tau'\theta(H_{K+1}^n - H_K^n) - 2\tau'(V_{K+1}^n - V_K^n)\right] / \left[1 + 4\tau\tau'\theta^2 - 4E_K\tau\theta\right]$$

Soit en remplaçant τ, τ', θ, E_K par leurs valeurs lorsque $\nu = 1$ et $\theta = 1/2$

$$F_{K+1} = \frac{\left[-\dfrac{a}{g}(2(V_{K+1}^n - V_K^n) + \dfrac{2g}{a}(H_{K+1}^n - H_K^n)) - 2(H_{K+1}^n - H_K^n) - \dfrac{2a}{g}(V_{K+1}^n - V_K^n)\right]}{4}$$

$$F_{K+1} = -\frac{a}{g}(V_{K+1}^n - V_K^n) - (H_{K+1}^n - H_K^n)$$

Donc si on remplace E_{K+1} et F_{K+1} par leurs valeurs on obtient :

$$\Delta H_{K+1} = -\frac{a}{g}\Delta V_{K+1} - \frac{a}{g}(V_{K+1}^n - V_K^n) - (H_{K+1}^n - H_K^n)$$

Remplaçons ΔH_{K+1} et ΔV_{K+1} par leurs expressions, il vient :

$$H_{K+1}^{n+1} - H_{K+1}^n = -\frac{a}{g}(V_{K+1}^{n+1} - V_{K+1}^n) - \frac{a}{g}(V_{K+1}^n - V_K^n) - (H_{K+1}^n - H_K^n)$$

Soit : $H_{K+1}^{n+1} = -\frac{a}{g} V_{K+1}^{n+1} + \frac{a}{g} V_K^n + H_K^n$ c'est-à-dire l'équation des droites caractéristiques de BERGERON.

Malheureusement, s'il est toujours possible de prendre $\theta = 1/2$, lorsque l'on considère un système de plusieurs conduites, on ne peut, en général, réaliser $\nu = 1$ pour toutes les conduites. Nous allons voir au paragraphe suivant qu'on a alors intérêt à prendre $\theta \neq 1/2$.

3. ETUDE DE LA STABILITE EN FONCTION DES PARAMETRES DEFINIS.

Nous allons appliquer au cas particulier des équations d'ALLIEVI les résultats obtenus par J.A. CUNGE (13) sur la stabilité du schéma défini au II-1 et utilisé pour des équations hyperboliques.

La définition de la stabilité des équations aux différences finies est celle introduite par GODUNOV et RIABENKI (11). Rappelons la brièvement.

Choisissons pour norme des fonctions grilles $W_k = \begin{pmatrix} V \\ H \end{pmatrix}_h k$ définies sur le maillage $(kh, n\Delta t)$ avec $\Delta t = \mu h$ la quantité $\|W_k\|_W = \underset{n}{\text{Max}} \underset{k}{\text{Max}} |V_k^n| + \underset{n}{\text{Max}} \underset{k}{\text{Max}} |H_k^n|$.

Appelons ℓ_h l'opérateur agissant sur la fonction grille W_k aux limites du domaine considéré. ℓ_h est défini par :

$$\ell_h W(h) = \begin{cases} V_k^0 = \tilde{\varphi}_k^0 \\ H_k^0 = \tilde{\tilde{\varphi}}_k^0 \\ V_N^n = \tilde{\psi}_N^n \\ H_0^n = \tilde{\tilde{\psi}}_0^n \end{cases} = k = 0, 1 - N$$

On appellera $\|\varphi_k\| = \underset{k}{\text{Max}} |\tilde{\varphi}_k| + \underset{k}{\text{Max}} |\tilde{\tilde{\varphi}}_k| + \underset{n}{\text{Max}} \left| \frac{\tilde{\tilde{\varphi}}_0^{n+1} - \tilde{\tilde{\psi}}_0^n}{\Delta t} \right| +$

$\underset{n}{\text{Max}} \left| \frac{\tilde{\psi}_N^{n+1} - \tilde{\psi}_N^n}{\Delta t} \right|$; $\|f_k\|_F = \underset{n}{\text{Max}} \underset{k}{\text{Max}} (f(k\Delta x, n\Delta t))$

Définition : Etant donnés 2 opérateurs linéaires L_h et ℓ_h définis sur le maillage $(kh, n\mu k)$, W_k, f_k, φ_k des fonctions grilles le système d'équations $L_k W_k = f_k$ avec les

conditions aux limites $\ell_h W_h = \varphi_h$ est stable si la solution W_h satisfait à l'inégalité $\|W_h\|_W < N_1\|f_h\|_F + N_2\|\varphi_h\|_\varphi$;

Pour cette définition J.A. CUNGE a montré que la réalisation de 2 conditions suffisait à garantir la stabilité du schéma proposé au II-1. Ces 2 conditions rapportées à notre problème s'expriment sous la forme :

$\theta \geq 1:2$; $4zz'\theta^2 - 1 > 0$.

Autrement dit, on peut assurer cette stabilité en prenant $\theta \geq 1/2$ et $zz' \geq 1$. Conditions qui vérifient bien ce que nous annoncions du paragraphe II-2 pour l'introduction du paramètre λ.

4. ERREURS.

a) Sur les équations aux dérivées partielles.

En appliquant sur ce sujet les résultats obtenus par J.A. CUNGE, on trouve immédiatement, en appelant h le pas de discrétisation en x et en posant $\Delta t = \mu h$:

Pour $\theta = 1/2$ et $zz' \neq 1$ le schéma proposé approche les équations d'ALLIEVI avec une erreur d'ordre 2 en h.

Pour $\theta = 1/2$ et $zz' = 1$ le schéma proposé correspond exactement au système d'équations aux dérivées partielles aux points du maillage.

Pour $\theta \neq \frac{1}{2}$ le schéma proposé approche les équations d'ALLIEVI avec une erreur d'ordre 1 en h et un coefficient multiplicateur proportionnel à θ^2. L'instabilité inconditionnelle pour $\theta < 1/2$ bornant inférieurement ce coefficient.

b) Sur les résultats.

D'une façon générale la solution du système aux différences finies converge vers la solution du système aux dérivées partielles avec un ordre de convergence en h égal à celui de l'approximation.

Donc pour $\theta = 1/2$ et $zz' = 1$ on obtient la solution exacte, ce qui confirme la remarque que nous avions faite au paragraphe précédent en notant l'identité pour ce cas là

avec la méthode de BERGERON. Mais comme dans les systèmes hydrauliques complexes il est pratiquement impossible d'obtenir $\nu\nu' = 1$ pour chaque conduite nous ne nous attarderons pas.

Pour $\theta = 1/2$ et $\nu\nu' < 1$ nous avons remarqué avec J.A. CUNGE un phénomène d'ondulation derrière le front d'onde rendant difficile l'interprétation des résultats.

Pour $\theta > 1/2$ et $\nu\nu' > 1$. On peut voir une atténuation de l'onde obtenue par rapport à la solution analytique. Ce cas nous a paru le plus intéressant car il permet de connaître le signe de l'erreur. Cette erreur est positive pour les maxima et négative pour les minima. Nous avons pu, d'autre part, constater (cf résultats au chapître III) que l'erreur était maximale pour un maximum ou un minimum de l'onde et très faible pour les maxima en valeurs absolues de la dérivée. Il est donc possible d'obtenir un majorant d'un maximum et un minorant d'un minimum. Nous nous sommes toujours placés dans ce cas pour la suite de l'étude.

5. INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES.

Nous avons vu au paragraphe II-1 que notre méthode supposait que la propriété (P) soit vérifiée lorsqu'on introduit les lois physiques citées au paragraphe I-1. Si un certain nombre de ces lois n'interviennent que dans quelques problèmes que nous étudierons plus en détail au cours des chapîtres suivants, les conditions aux limites exposées au I-1-b, interviennent dans tous les systèmes hydrauliques que nous considérons ; aussi, allons-nous montrer maintenant que l'on peut introduire ces conditions sans altérer la propriété qui est à la base de notre méthode. Examinons donc les 3 types de conditions aux limites qui peuvent intervenir :

a) $H(x_0, t) = f(t)$

avec $x_0 = 0$ ou L, si L est la longueur de la conduite.

De cette loi on tire : $\dfrac{\partial H(x_0, t)}{\partial t} = f'(t)$

c'est-à-dire $\Delta H_0 = f'(t)\Delta t + O(\Delta t^2)$ donc avec une erreur en h^2 avec les conventions du paragraphe précédent.

Le plus souvent d'ailleurs f(t) = constante donc $f'(t) = 0$ et $\Delta H_0 = 0$. Notons ΔH_0 ou ΔH_N, $\Delta H_{0,\ N}$.

Ceci nous conduit dans notre système à 2 possibilités.

1°) Si $x_0 = 0$ donc $\Delta H_0 = f'(t)\Delta t$ ce qui se traduit par $E_0 = 0$, $F_0 = f'(n\Delta t)\Delta t$ à l'instant $n\Delta t$.

2°) Si $x_0 = L$ donc $\Delta H_N = f'(t)\Delta t$ ce qui permet d'initialiser le procédé de calcul des ΔV_K et ΔH_K.

En effet on a $\Delta V_N = \dfrac{\Delta H_N - F_N}{E_N}$, $\Delta H_N = f'(t)\Delta t$.

b) $V(x_0, t) = g(t)$. avec $x_0 = 0$ ou L

$$\frac{\partial V(x_0, t)}{\partial t} = g'(t) \quad \Delta V_{0,\ N} = g'(t) + O(\Delta t^2).$$

D'où l'on tire soit

1°) Si $x_0 = L$ $\Delta V_N = f'(t)\Delta t$ ce qui permet d'initialiser le calcul des ΔV_K et ΔH_K (ΔV_N connu et $\Delta H_N = E_N \Delta V_N + F_N$).
soit

2°) Si $x_0 = 0$ $\Delta V_0 = f'(t)\Delta t$.

On pourrait bien entendu développer un procédé analogue à celui exposé au paragraphe II-1 et basé sur une relation du type $\Delta V_K = E'_K \Delta H_K + F'_K$ mais nous verrons au chapitre IV quel est l'intérêt de disposer d'algorithmes indépendants des conditions aux limites ; aussi, allons-nous essayer connaissant ΔV_0 d'établir une relation linéaire entre ΔV_1 et ΔH_1, relation qui permettra de calculer les E_K et F_K pour $K = 1, 2, \ldots, N$.
Si l'on a la relation $\Delta V_K = E'_K \Delta H_K + F'_K$ on peut écrire en supposant $E'_K \neq 0$ $\Delta H_K = E_K \Delta V_K + F_K$ avec $E_K = \dfrac{1}{E'_K}$ et $F_K = \dfrac{-F'_K}{E'_K}$. D'autre part si on a la relation

$\Delta V_K = E'_K \Delta H_K + F'_K$ alors on a la relation $\Delta V_{K+1} = E'_{K+1} \Delta H_{K+1} + F'_{K+1}$. La démonstration de cette proposition est identique au paragraphe II-1. pour les E_K et F_K. On obtient alors :

$$E'_{K+1} = \frac{AE'_K - B}{A - B'E'_K} \quad ; \quad F'_{K+1} = \frac{F'_K + E'_K D^n_K - C^n_K}{A - E'_K B'}$$

Connaissant $\Delta V_0 = g'(t)\Delta t$ on peut écrire $\Delta V_0 = E'_0 \Delta H_0 + F'_0$ en posant $E'_0 = 0$, $F'_0 = g'(t)\Delta t$. D'où $E'_1 = \frac{-B}{A}$ et $F'_1 = \frac{g'(t)\Delta t - C^n_0}{A}$ donc on peut écrire :

$$E_1 = -A/B \qquad F_1 = \frac{C^n_0 - g'(t)\Delta t}{A} \times (-\frac{A}{B}) = \frac{g'(t)\Delta t - C^n_0}{B}$$

On a donc une relation linéaire entre ΔH_1 et ΔV_1 et l'on peut calculer les E_K et F_K. D'autre part le calcul des ΔH_K et ΔV_K étant initialisé par une autre condition aux limites on peut calculer ΔH_0 et ΔV_0 en fonction de ΔV_1 et ΔH_1.
$\Delta V_0 = A\Delta V_1 + B\Delta H_1 + C^n_0$ c'est-à-dire en remplaçant ΔH_1 par son expression en fonction de ΔV_1.

$$\Delta V_0 = A\Delta V_1 + B(-\frac{A}{B}\Delta V_1 + \frac{g'(t)\Delta t - C^n_0}{B}) + C^n_0 = g'(t)\Delta t.$$

La condition aux limites est bien vérifiée.

$\Delta H_0 = B'\Delta V_1 + A\Delta H_1 + D^n_0$.

c) $V(x_0, t) = \ell(H(x_0, t), t)$. Dérivons par rapport à t, il vient :

$$\frac{\partial V(x_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial \ell}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial \ell}{\partial t}$$

D'où l'on tire $\Delta V_{0,N} = \frac{\partial \ell}{\partial H}(H(x_0, t), t)\Delta H_{0,N} + \frac{\partial \ell}{\partial t}\Delta t$

c'est-à-dire $\Delta H_{0,N} = \frac{1}{\frac{\partial \ell}{\partial H}}\Delta V_{0,N} - \frac{\frac{\partial \ell}{\partial t}\Delta t}{\frac{\partial \ell}{\partial H}}$

Ce qui permet indifféremment, soit d'initialiser le processus de calcul des E_K et F_K à partir de $E_0 = \frac{1}{\frac{\partial \ell}{\partial H}}$ $F_0 = - \frac{\frac{\partial \ell}{\partial t} \Delta t}{\frac{\partial \ell}{\partial H}}$

soit d'initialiser le calcul des ΔV_K et ΔH_K en résolvant le système de 2 équations à 2 inconnues.

$$\begin{cases} \Delta H_N = E_N \Delta V_N + F_N \\ \Delta H_N = \frac{1}{\frac{\partial \ell}{\partial H}} \Delta V_N - \frac{\frac{\partial \ell}{\partial t}}{\frac{\partial \ell}{\partial H}} \end{cases}$$

CHAPITRE III

APPLICATION AUX SYSTEMES HYDRAULIQUES LINEAIRES

Nous allons maintenant, après avoir défini 3 classes de systèmes hydrauliques étudier l'application de notre méthode au premier de ces groupes.

1. CONVENTION DE REPRESENTATION D'UN SYSTEME HYDRAULIQUE - GRAPHE ASSOCIE.

Le dessin d'un système hydraulique complexe suggère d'y associer un graphe. C'est ce que nous avons fait et cela nous a permis de définir plusieurs classes de problèmes et les algorithmes de résolution correspondants. Outre qu'il facilite la classification des problèmes le langage de la théorie des graphes a été introduit pour suggérer comme suite à ce travail l'établissement d'un programme qui à partir du graphe associé à un système hydraulique, appellerait dans l'ordre voulu les procédures que nous avons écrites et éviterait ainsi la partie de programmation encore obligatoire pour le calcul des coups de bélier.

Définition du graphe associé :

Nous appellerons sommets du graphe associé à un système hydraulique.

1°) Les points d'entrée ou de sortie du système.

2°) Les points de jonction d'au moins 3 conduites différentes.

On voit qu'avec cette définition une arête du graphe associé correspond à ce que nous avons appelé branche du réseau au paragraphe I-1-d. Au noeud défini au même endroit correspond un sommet du graphe associé.

Les 3 structures pour lesquelles nous avons écrit un algorithme de calcul des coups de bélier sont :

1°) Structure linéaire.

Un système hydraulique est dit linéaire, si le graphe associé est composé uniquement de 2 sommets reliés par une seule arête. Cela correspond à une branche unique ou à ce que les hydrauliciens appellent une conduite à caractéristiques multiples. Ce cas très simple mais très courant en pratique sera étudié dans ce chapître.

2°) Structure en arbre.

Un système hydraulique sera dit "en arbre" si le graphe associé est un arbre. Rappelons simplement qu'en théorie des graphes on appelle arbre un graphe dont le nom d'arêtes est égal au nombre de sommets moins 1.

3°) Structure planaire.

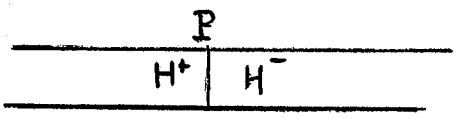
Un système hydraulique sera dit planaire si le graphe associé est planaire.

2. LINEARISATION DES PERTES DE CHARGES PAR FROTTEMENT.

Nous avons vu au paragraphe I-1-c que l'on pouvait assimiler les pertes de charges par frottement à une suite finie de discontinuités de la fonction H. La valeur du saut de la fonction s'exprimant sous la forme $kV^2S(V)$ ($S(V) = +1$ si $V > 0$, -1 sinon).

En un point de concentration de pertes de charge on peut donc écrire en désignant respectivement par H_t^+ et H_t^- les limites à gauche et à droite de la fonction H en ce point à l'instant t :

$$H_t^- = H_t^+ - kV_t^2 S(V_t) \quad (1)$$



Dans l'hypothèse ou V ne change pas de signe entre t et t + Δt on peut écrire $\Delta H^- = \Delta H^+ - 2kV_t S(V_t)\Delta V_t$. Avec une erreur du même ordre que celle introduite par le schéma aux différences utilisé. Si V change de signe entre t et t + Δt, cela revient à dire que V s'annule entre t et t + Δt donc que $|V_{t+\theta\Delta t}|$ reste faible si on a choisi entre t et t + Δt suffisamment petit ; autrement dit la perte de charge est négligeable à cet instant là. Donc on peut écrire $\Delta H^+ \simeq \Delta H^-$. Or dans l'expression (1) $2kV_t\Delta V_t$ est faible puisque $|V_t|$ l'est. Donc, et cela sera confirmé par l'expérience, on peut considérer la formule (1) comme générale. Il faut noter de plus que l'approximation des pertes de charge par frottement est d'autant meilleure qu'il y a un plus grand nombre de points de discontinuités ; mais plus ce nombre est grand et plus le k correspondant est faible (la somme de ces discontinuités étant égale à $KV^2S(V)$, K constante caractéristique de la conduite, mesurée en régime permanent donc avec V constant tout au long de la conduite) ; Or dans les programmes que nous avons écrits nous avons considéré qu'il y avait une discontinuité tous les Δx, donc la constante k est très faible (de l'ordre de 10^{-3}) et l'expression $2kV_tS(V_t)\Delta V_t$ est pratiquement nulle lorsque V change de signe entre t et t + Δt. Il reste maintenant à montrer que la propriété (P) énoncée au paragraphe II-1 est vérifiée aux points de discontinuités. Appelons V_t^+ et V_t^- les limites à gauche et à droite de la fonction V à l'instant t au point de discontinuité considéré. On a $V_t^+ = V_t^-$ puisque V est continue. Supposons que l'on ait la relation $\Delta H^+ = E_t^+\Delta V^+ + F_t^+$. On a $\Delta H^- = \Delta H^+ - 2kV_t^+\Delta V^+S(V^+)$ or $\Delta V^+ = \Delta V^-$ il vient :

$$\Delta H^- = (E_t^+ - 2kV_t^+S(V_t^+))\Delta V^- + F_t^+$$

Donc on peut écrire $\Delta H^- = E_t^-\Delta V^- + F_t^-$

avec $F_t^- = F_t^+$

$$E_t^- = E_t^+ - 2kV_t^+S(V_t^+)$$

La propriété (P) reste donc bien vérifiée aux points de discontinuité.

3. LINEARISATION DES LOIS D'ABOUTEMENT SIMPLES.

Reprenons les lois exposées au paragraphe I-1-d sur l'aboutement de 2 conduites. Appelons $H_i(L_i, t)$, $V_i(L_i, t)$ la pression et la vitesse à l'instant à l'extrémité de la conduite c_i de section S_i, et $H_{i+1}(0, t)$, $V_{i+1}(0, t)$ la pression et la

vitesse à l'instant t au début de la conduite c_{i+1} de section S_{i+1}.
On peut alors écrire : $S_i V_i(L_i, t) = S_{i+1} V_{i+1}(0, t)$.

$$H_{i+1}(0, t) = H_i(L_i, t) - k_i^{i+1} S(V_i(L_i, t)) V_i^2(L_i, t).$$

D'où l'on tire avec les notations habituelles et en désignant par K le point situé à l'extrémité de c_i et K+1 celui au début de c_{i+1}, $n\Delta t$ l'instant du calcul :

$$S_i \Delta V_k = S_{i+1} \Delta V_{K+1}.$$
$$\Delta H_{K+1} = \Delta H_K - 2k_i^{i+1} |V_K^n| \Delta V_K.$$

La justification de la validité de cette expression quand $V_K^n V_K^{n+1} < 0$ est la même qu'au paragraphe précédent. Montrons que la propriété (P) reste vérifiée en ce point.
Hypothèse $\Delta H_K = E_K \Delta V_K + F_K$ (1)
On peut écrire $\Delta V_K = \dfrac{S_{i+1}}{S_i} \Delta V_{K+1}$

$$\Delta H_K = \Delta H_{K+1} + 2k_i^{i+1} |V_K^n| \Delta V_K$$
$$= \Delta H_{K+1} + 2k_i^{i+1} |V_K^n| \frac{S_{i+1}}{S_i} \Delta V_{K+1}.$$

Reportons les expressions de ΔV_K et ΔH_K dans (1) il vient

$$\Delta H_{K+1} + 2k_i^{i+1} |V_K^n| \frac{S_{i+1}}{S_i} \Delta V_{K+1} = E_K \frac{S_{i+1}}{S_i} \Delta V_{K+1} + F_K$$

D'où $\Delta H_{K+1} = E_{K+1} \Delta V_{K+1} + F_{K+1}$

avec $E_{K+1} = \dfrac{S_{i+1}}{S_i}(E_K - 2k_i^{i+1} |V_K^n|)$.

$$F_{K+1} = F_K$$

Notons cependant que pour le calcul de ΔV_K on remplace la relation $\Delta V_K = A\Delta V_{K+1} + B\Delta H_{K+1} + C_K^n$ par $\Delta V_K = \dfrac{S_{i+1}}{S_i} \Delta V_{K+1}$.

4. PROCEDURES.

Nous allons maintenant exposer le mode d'emploi de 3 procédures ALGOL écrites pour résoudre le problème dit "linéaire", dont nous venons d'établir l'algorithme. Certaines des propriétés de ces procédures ne se justifient guère à ce niveau mais seront utilisées dans le chapître suivant.

Les données sont supposées définies dans des tableaux à 2 indices : le 1er représentant l'exemple à traiter le 2ème la conduite dans l'exemple considéré. Si, pour les structures linéaires on ne traitera le plus souvent qu'un exemple, dans les structures en arbre le 1er indice servira à repérer la branche (ou l'arête en langage de théorie des graphes).

Ces données sont : N[I, J] = nombre d'intervalles en x de la conduite J dans la branche I.

DX[I, J] = longueur de l'intervalle de la conduite J dans la branche I.

CEL[I, J] = célérité.

KTRØN[I, J] = coefficient de pertes de charge par frottement (= coefficient de perte de charge par frottement tout au long de la conduite divisé par N[I, J] - 1.

KAB[I, J] = coefficient de pertes de charge à l'aboutement des conduites J et J+1 dans la branche I.

TETA[I, J] = paramètre de stabilité choisi.

VT[I, J] = vitesse initiale.

S[I, J] = section ; NT[I] = nombre de conduites dans la branche I.

DT = intervalle de temps.

LAMBDA = paramètre multiplicateur de H (égal à 1 la plupart du temps, utilisé pour tester un éventuel phénomène de perte de signification).

D'autre part, ces procédures supposent déclarés les tableaux suivants :

A, B, R, RPRIM, RRPT2, NØPT (à 2 indices comme précédemment).

H, V, E, F, C[I, J] ou I repère la branche, I le point de la branche. J peut donc varier de 1 à $2 \sum_{J} N[I, J]$.

Enfin on suppose déclarée la variable réelle CTEG et les variables entières I, J, K, K1, K2.

Procédure INITIAL(NØBR, HINI, HFIN).

NØBR = numéro de branche

HINI = pression au point 1 de la branche (donné)

HFIN = pression à l'extrémité de la branche (calculé par INITIAL).

Son but est de calculer certaines expressions qui resteront constantes au cours des calculs et d'initialiser les tableaux H et V à partir des valeurs initiales données et en tenant compte pour H des pertes de charges.

Le texte de cette procédure est donné ainsi que celui des 2 suivantes en annexe de ce chapître.

Procédure DESCENTE(EI, FI, NØPT1, NØBR, EF, FF) ;

Cette procédure calcule pour la branche NØBR les valeurs E_K, F_K, (K = NØPT1, .. NTPTS(NTPTS étant le nombre de points de la branche considérée et étant calculé par INITIAL). En supposant

E [NØBR, NØPT1] = EI

F [NØBR, NØPT1] = FI

A la fin de l'exécution de DESCENTE on a :

EF = E [NØBR, NTPTS]

FF = F [NØBR, NTPTS]

Procédure MONTEE(DVI, DHI, NØPT1, NØBR, DVF, DHF).

Cette procédure calcule pour la branche NØBR les valeurs

ΔV_K et ΔH_K et "actualise" H_K^n et V_K^n ($H_K^{n+1} = H_K^n + \Delta H_K$, $V_K^{n+1} = V_K^n + \Delta V_K$)

pour K = NTPTS - 1, ... NØPT1 ; en supposant :

DV [NØBR, NTPTS] = DVI

DH [NØBR, NTPTS] = DHI

A la fin de l'exécution de MONTEE, DVF et DHF contiennent respectivement DV [NØBR, NØPT1] , DH [NØBR, NØPT1] .

5. RESULTATS.

Les résultats que nous présentons concernent un exemple de conduite linéaire à caractéristiques multiples traité par VALVIS et ASCE (8).

Les données fournies étant insuffisantes nous avons du, à partir des résultats exposés, retrouver certaines d'entre elles, concernant notamment les pertes de charges ; il convient de juger de la concordance des 2 méthodes en se souvenant de cette remarque car certaines données n'ont pu être obtenues qu'avec une précision de l'ordre de 1 %.

Le système étudié était composé de conduites C_1 et C_2, C_1 étant situé à l'amont. Les caractéristiques étaient les suivantes.

conduite	longueur	célérité	section	pression initiale	vitesse initiale	coefficient de pertes de charge
C_1	250 m	1000 m/s	5 m^2	220 m	1,8 m/s	10^{-3}/m
C_2	500 m	1000 m/s	3 m^2	calculée	3 m/s	10^{-3}/m

Coefficient de perte de charge à l'aboutement : 0,0633.

Perturbation étudiée : fermeture linéaire d'une vanne située à l'extrémité de C_2 en 4.5 s.

Loi de fermeture $V(t) = \alpha\, S(t) \sqrt{H(t)}$.

où S(t) est la loi de variation de la section de la vanne en fonction du temps. Donc $S(t) = 3 - 3t/4.5$.

Dans les 6 premiers tableaux on peut comparer les résultats obtenus par notre méthod pour le jeu de paramètres : $\Delta x = 25$ m $\Delta t = 0.04/6$ $\theta = \sqrt{2}/2$, à ceux obtenus par la méthode de BERGERON programmée. On peut constater l'écrêtement des maxima et des minima des courbes, avec une erreur relative inférieure à 2 % sur H ; ce qui confirm ce que nous avions anoncé au paragraphe II-4-b.

Dans les 2 tableaux suivants nous donnons les valeurs obtenues pour un jeu de paramètres correspondant à $\frac{\Delta x}{2}$ et $\frac{\Delta t}{2}$ et par l'extrapolation linéaire que l'on peut faire à partir de ces 2 séries de résultats. Ce procédé extrémement sommaire d'extrapolatio permet néanmoins de constater que l'écart entre la solution par la méthode de BERGERON et celle obtenue devient à peu près uniforme et qu'il peut être attribué en grande partie à la conjugaison des erreurs d'arrondis et de celles entraînées par l'incertitude sur certaines caractéristiques. Cet écart diminue légèrement lorsque le temps croît car le nouvel état permanent vers lequel on tend ne dépend que de caractéristiques données de façon exacte dans l'article cité en référence.

Enfin la méthode que nous proposons ne faisant pas jouer un rôle symétrique aux conditions aux limites (elles servent à initialiser le calcul l'une des E_K, F_K l'autre des ΔV_K, ΔH_K) il était naturel de songer à comparer les résultats obtenus en

inversant les rôles des conditions aux limites. Tous les résultats exposés dans les tableaux 1 à 8 sont obtenus en initialisant le calcul des E_K, F_K par la condition (1) H_0 = constante. et celui des ΔV_K, ΔH_K par la condition (2) $\frac{\partial V_N(t)}{\partial t} = \alpha \frac{dS(t)}{dt} \sqrt{H_N(t)} + \frac{\alpha}{2} \frac{S(t)}{\sqrt{H_N(t)}} \frac{dH_N(t)}{dt}$.

Dans le tableau 9 on peut remarquer la concordance des résultats obtenus dans ce cas avec ceux obtenus en initialisant le calcul des E_K, F_K par la condition (2) et celui des ΔV_K, ΔH_K par la condition (1).

Temps de calcul.

Le temps de calcul est proportionnel au nombre d'intervalles de divisions de la conduite que multiplie le nombre d'intervalles de temps pour lequel on effectue le calcul. Le coefficient de proportionnalité est pour un ordinateur IBM 7044 de 5 ms. Il faut bien sûr augmenter ceci du temps d'écriture des résultats, temps qui varie selon la précision avec laquelle on veut connaître le phénomène.

1) Pression à la vanne. Tableau I

Temps	Pression calculée en m.	Résultat par la méthode de BERGERON en m.	Erreur absolue en m.	Erreur relative en %.
0.16	221.03	221.91	0.88	0.4
0.33	228.00	229.07	1.07	0.47
0.49	235.27	236.51	1.24	0.52
0.66	242.813	244.25	1.42	0.57
0.83	250.61	252.29	1.67	0.66
0.99	258.23	260.65	2.42	0.93
1.16	265.08	267.64	2.56	0.96
1.33	271.09	273.55	2.46	0.90
1.49	275.14	280.25	5.11	1.83
1.66	275.89	277.86	1.97	0.71
1.83	274.33	275.14	0.81	0.29
1.99	272.27	271.78	0.49	0.08
2.16	270.48	270.46	0.02	< 0.01
2.33	268.87	268.63	0.24	0.09

Tableau 1 suite Pression à la vanne suite.

Temps	Pression calculée	Résultat par la méthode de BERGERON en m	Erreur absolue en m	Erreur relative en %
2.49	267.28	266.30	0.98	0.37
2.66	265.78	262.76	1.02	0.38
2.83	264.60	263.02	1.58	0.60
2.99	264.08	261.09	2.99	1.14
3.16	264.53	262.82	1.71	0.65
3.33	265.79	265.02	0.77	0.29
3.49	267.38	267.85	0.47	0.18
3.66	268.86	268.60	0.26	0.10
3.83	270.11	269.67	0.44	0.16
3.99	271.19	271.08	0.11	0.04
4.16	272.11	271.99	0.12	0.04
4.33	272.75	272.93	0.18	0.07
4.49	272.90	273.86	0.94	0.35
4.66	260.61	259.95	0.66	0.25
4.83	246.89	245.47	1.42	0.58
4.99	232.95	230.21	2.74	1.19
5.16	219.10	217.35	1.75	0.81
5.33	205.66	204.22	1.44	0.71
5.49	193.85	190.82	3.02	1.58

2) Débit à la vanne. Tableau 2

Temps	Débit calculé en m3/s	Résultat par la méthode de BERGERON en m3/s	Erreur absolue en m3/s	Erreur relative en %
0.16	8.80	8.79	0.01	0.11
0.33	8.60	8.58	0.02	0.23
0.49	8.38	8.37	0.01	0.12
0.66	8.17	8.14	0.03	0.37
0.83	7.94	7.91	0.03	0.38
0.99	7.70	7.67	0.03	0.39
1.16	7.43	7.39	0.04	0.54
1.33	7.14	7.10	0.04	0.56
1.49	6.82	6.80	0.02	0.29
1.66	6.44	6.39	0.05	0.78
1.83	6.05	5.98	0.07	1.17
1.99	5.65	5.57	0.08	1.44
2.16	5.26	5.19	0.07	1.35
2.33	4.87	4.80	0.07	1.46
2.49	4.49	4.41	0.08	1.81
2.66	4.10	4.03	0.07	1.74
2.83	3.72	3.65	0.07	1.92
2.99	3.35	3.27	0.08	2.45
3.16	2.98	2.91	0.07	2.41
3.33	2.62	2.56	0.06	2.34
3.49	2.26	2.20	0.06	2.73
3.66	1.89	1.84	0.05	2.72
3.83	1.52	1.47	0.05	3.40

Suite tableau 2 Débit à la vanne (suite)

Temps	Débit calculé en m^3/s	Résultat obtenu par la méthode de BERGERON en m3/s	Erreur absolue en m^3/s	Erreur relative en %
3.99	1.15	1.11	0.04	3.60
4.16	0.78	0.74	0.04	5.40
4.33	0.41	0.37	0.04	10.80
4.49	0.02	0.0	0.02	

Tableau 3 Débit à l'embranchement

Temps	Débit calulé en m^3/s	Résultat obtenu par la méthode de BERGERON en m^3/s	Erreur absolue en m^3/s
0.16	9.00	non obtenu	
0.33	9.00	non obtenu	
0.49	8.95	non obtenu	
0.66	8.76	8.75	0.01
0.83	8.50	8.49	0.01
0.99	8.19	8.22	0.03
1.16	7.79	7.75	0.04
1.33	7.33	7.27	0.06
1.49	6.87	6.77	0.10
1.66	6.41	6.32	0.09
1.83	5.96	5.86	0.10
1.99	5.53	5.39	0.14
2.16	5.12	5.01	0.11
2.33	4.73	4.63	0.10
2.49	4.37	4.26	0.11
2.66	4.03	3.93	0.10
2.89	3.69	3.62	0.07

Suite du tableau 3. Débit à l'embranchement.

Temps	Débit calculé en m^3/s	Résultat obtenu par la méthode de BERGERON en m^3/s	Erreur absolue en m^3/s
2.99	3.37	3.32	0.05
3.16	3.04	2.98	0.06
3.33	2.61	2.65	0.04
3.49	2.35	2.33	0.02
3.66	1.99	1.96	0.03
3.83	1.61	1.58	0.03
3.99	1.22	1.19	0.03
4.16	0.82	0.79	0.03
4.33	0.42	0.38	0.04
4.49	+ 0.01	- 0.04	0.05
4.66	- 0.32	- 0.43	0.09
4.83	- 0.79	- 0.82	0.03
4.99	- 1.09	- 1.22	0.13
5.16	- 1.11	- 1.11	0.0
5.33	- 1.00	- 1.00	0.0
5.49	- 0.80	- 0.87	0.07
5.66	- 0.43	- 0.40	0.03
5.83	+ 0.01	+ 0.07	0.06
5.99	+ 0.43	+ 0.56	0.13
6.16	+ 0.07	non obtenu	

Pression basse à l'embranchement. Tableau 4

Temps	Résultat calulé	Résultat obtenu par la méthode de BERGERON	Erreur absolue	Erreur relative en %
0.16	218.82	non obtenu		
0.33	218.86	idem		
0.49	219.89	idem		
0.66	223.81	224.25	0.44	0.19
0.83	228.73	229.54	0.81	0.39
0.99	232.44	235.06	2.62	1.10
1.16	233.56	234.31	0.75	0.32
1.33	233.28	233.70	0.42	0.18
1.49	233.04	233.00	0.04	0.02
1.66	233.15	233.48	0.33	0.14
1.83	233.35	233.87	0.52	0.22
1.99	233.16	234.19	1.03	0.44
2.16	232.30	232.51	0.21	0.09
2.33	231.02	230.57	0.45	0.19
2.49	229.98	228.32	1.66	0.73
2.66	229.59	228.91	0.68	0.30
2.83	229.74	229.55	0.19	0.08
2.99	230.03	230.27	0.24	0.10
3.16	230.20	230.02	0.18	0.08
3.33	230.31	229.82	0.49	0.21
3.49	230.54	229.69	0.85	0.37
3.66	231.04	230.69	0.35	0.15
3.83	231.71	231.92	0.21	0.09

Pression basse à l'embranchement. Suite Tableau 4

Temps	Résultat calculé en m	Résultat obtenu par la méthode de BERGERON	Erreur absolue en m	Erreur relative en %
3.99	232.31	233.48	1.17	0.50
4.16	232.61	233.04	0.43	0.18
4.33	232.59	232.48	0.11	0.05
4.49	232.43	231.74	0.69	0.30
4.66	232.26	232.03	0.23	0.10
4.83	232.04	232.20	0.16	0.07
4.99	230.05	232.27	2.22	0.96
5.16	222.51	221.98	0.53	0.24
5.33	212.93	211.41	1.52	0.72
5.49	205.90	200.62	5.28	2.64
5.66	204.41	203.59	0.82	0.40
5.83	206.34	206.72	0.38	0.08
5.99	208.81	210.04	1.23	0.58
6.16	211.19	non obtenu		

Pression haute à l'embranchement. Tableau 5

Temps	Résultat calculé en m	Résultat obtenu par la méthode de BERGERON en m	Erreur absolue en m	Erreur relative en %
0.16	219.03	non obtenu		
0.33	219.07	"		
0.49	220.10	"		
0.66	224.01	224.80	0.79	0.35
0.83	228.91	230.05	1.14	0.49
0.99	232.61	235.54	3.93	1.17

Pression haute à l'embranchement. Suite Tableau 5.

Temps	Résultat calculé en m	Résultat obtenu par la méthode de BERGERON en m	Erreur absolue en m	Erreur relative en %
1.16	233.71	234.74	1.03	0.44
1.33	233.42	234.07	0.65	0.28
1.49	233.16	233.33	0.17	0.07
1.66	233.25	233.77	0.52	0.22
1.83	233.44	234.11	0.33	0.14
1.99	233.24	234.40	0.26	0.11
2.16	232.36	232.68	0.32	0.14
2.33	231.08	230.73	0.35	0.15
2.49	230.02	228.44	1.58	0.69
2.66	229.62	229.02	0.60	0.26
2.83	229.78	229.64	0.14	0.06
2.99	230.06	230.35	0.29	0.13
3.16	230.23	230.09	0.14	0.06
3.33	230.32	229.87	0.45	0.20
3.49	230.56	229.73	0.73	0.32
3.66	231.05	230.72	0.33	0.14
3.83	231.72	231.94	0.22	0.09
3.99	232.31	233.49	1.18	0.51
4.16	232.61	233.04	0.43	0.18
4.33	232.59	232.48	0.11	0.05
4.49	232.43	231.74	0.69	0.30
4.66	232.26	232.02	0.24	0.10
4.83	232.04	232.20	0.16	0.07
4.99	230.04	232.26	2.22	0.96

Pression haute à l'embranchement. Suite Tableau 5.

Temps	Résultat calculé en m	Résultat obtenu par la méthode de BERGERON en m	Erreur absolue en m	Erreur relative en %
5.16	222.51	221.97	0.54	0.24
5.33	212.92	211.40	1.52	0.72
5.49	205.89	200.61	5.28	2.63
5.66	204.73	203.59	1.14	0.56
5.83	206.34	206.74	0.38	0.18
5.99	208.81	210.04	1.23	0.59
6.16	211.19	non obtenu		

3) Débit à l'amont. Tableau 6

Temps	Résultat calculé en m^3/s	Résultat obtenu par la méthode de BERGERON en m^3/s	Erreur absolue en m^3/s
0.16	9.00	non obtenu	
0.33	9.00	non obtenu	
0.49	9.00	non obtenu	
0.66	8.95	non obtenu	
0.83	8.72	non obtenu	
0.91	8.50	8.49	0.01
1.08	8.02	7.98	0.04
1.24	7.54	7.44	0.10
1.41	7.08	7.01	0.07
1.58	6.70	6.57	0.13
1.74	6.20	6.11	0.09
1.91	5.74	5.64	0.10
2.08	5.29	5.16	0.13
2.24	4.87	4.68	0.19
2.41	4.50	4.38	0.12
2.58	4.18	4.10	0.08
2.74	3.87	3.84	0.03
2.91	3.54	3.48	0.06
3.08	3.19	3.14	0.05
3.24	2.87	2.81	0.06
3.41	2.53	2.49	0.04
3.58	2.19	2.17	0.02
3.74	1.83	1.85	0.02
3.91	1.44	1.43	0.01

Temps	Débit calculé en m^3/s	Résultat obtenu par la méthode de BERGERON en m^3/s	Erreur absolue
4.08	1.04	0.99	0.05
4.24	0.62	0.52	0.10
4.41	0.21	0.15	0.06
4.58	- 0.20	- 0.23	0.03
4.74	- 0.60	- 0.62	0.02
4.91	- 0.99	- 1.02	0.03
5.08	- 1.36	- 1.42	0.06
5.24	- 1.50	- 1.82	0.32
5.41	- 1.21	- 1.21	0.0
5.58	- 0.65	- 0.57	0.08
5.74	- 0.11	+ 0.08	+ 0.19
5.91	+ 0.32	+ 0.39	0.07
6.08	+ 0.68	+ 0.72	0.04
6.24	1.00	+ 1.05	0.05

Etude de la convergence.

Pression à la vanne. Tableau 7

Temps 1	Résultat 2 pour pour h en m	Résultat 3 pour h/2 en m	Valeur extrapolée h = 0 4 en m	Résultat par BERGERON 5 en m	Erreur relativ en % 6
0.16	221.03	220.86	220.70	221.91	0.54
0.33	228.00	227.85	227.70	229.07	0.60
0.49	235.27	235.13	235.00	236.51	0.63
0.66	242.83	242.71	242.60	244.25	0.68
0.83	250.62	250.58	250.55	252.29	0.69
0.99	258.23	258.35	258.48	260.65	0.83
1.16	265.08	265.14	265.20	267.04	0.69
1.33	271.09	271.49	271.89	273.55	0.61
1.49	275.14	276.08	277.02	280.25	1.15
1.66	275.89	276.34	276.80	277.86	0.38
1.83	274.33	274.25	274.17	275.14	0.35
1.99	272.27	271.99	271.71	271.78	0.03
2.16	270.48	270.28	270.08	270.46	0.14
2.33	268.87	268.72	268.59	268.63	0.01
2.49	267.28	267.06	266.84	266.30	0.20
2.66	265.78	265.48	265.18	264.76	0.16
2.83	264.60	264.11	263.64	263.02	0.24

Suite Tableau 7. Convergence de la pression à la vanne (suite).

Temps	Résultat pour h	Résultat pour h/2	Valeur extrapolée h = 0	Résultat par BERGERON	Erreur relative en %
2.99	264.08	263.41	262.74	261.09	0.63
3.16	264.53	264.04	263.55	262.82	0.28
3.33	265.79	265.73	265.67	265.02	0.25
3.49	267.38	267.59	267.80	267.85	0.02
3.66	268.86	269.08	269.30	268.60	0.26
3.83	270.11	270.25	270.39	269.67	0.27
3.99	271.19	271.35	271.51	271.08	0.16
4.16	272.11	272.36	272.61	271.99	0.23
4.33	272.75	273.13	273.51	272.93	0.21
4.49	272.90	273.38	273.86	273.86	0.0
4.66	260.61	260.83	261.05	259.95	0.42
4.83	246.89	246.76	246.63	245.47	0.47
4.99	232.95	232.59	230.09	230.21	0.05
5.16	219.10	218.58	218.08	217.35	0.34
5.33	205.66	205.07	204.48	204.22	0.13
5.49	193.85	192.89	191.93	190.82	0.06

Convergence du débit à l'amont. Tableau 8

Temps	Résultat pour h	Résultat pour h/2	Résultat par Extrapole	Résultat par BERGERON	Erreur absolue
0.91	8.50	8.52	8.54	8.49	0.05
1.08	8.02	8.02	8.02	7.98	0.04
1.24	7.54	7.53	7.52	7.44	0.08
1.41	7.08	7.08	7.08	7.01	0.07
1.58	6.70	6.64	6.58	6.57	0.01
1.74	6.20	6.19	6.18	6.11	0.07
1.91	5.74	5.73	5.72	5.64	0.08
2.08	5.29	5.27	5.25	5.16	0.09
2.24	4.87	4.84	4.81	4.68	0.13
2.41	4.50	4.48	4.46	4.38	0.08
2.58	4.18	4.18	4.18	4.10	0.10
2.74	3.87	3.88	3.89	3.84	0.05
2.91	3.54	3.55	3.56	3.48	0.08
3.08	3.19	3.21	3.23	3.14	0.09
3.24	2.87	2.87	2.87	2.81	0.06
3.41	2.53	2.53	2.53	2.49	0.04
3.58	2.19	2.20	2.21	2.17	0.04
3.74	1.83	1.845	1.86	1.85	0.01
3.91	1.44	1.45	1.46	1.43	0.03
4.08	1.04	1.03	1.02	0.99	0.03
4.24	0.62	0.605	0.59	0.52	0.07
4.51	0.21	0.19	0.17	0.15	0.02
4.58	- 0.20	0.205	- 0.21	- 0.23	0.02
4.74	- 0.60	0.60	- 0.60	- 0.62	0.02

Convergence du débit à l'amont (suite).

Suite Tableau 8.

Temps	Résultat pour h	Résultat pour h/2	Résultat Extrapole	Résultat par BERGERON	Erreur absolue
4.91	- 0.99	- 1.00	- 1.01	- 1.02	0.01
5.08	- 1.36	- 1.39	- 1.42	- 1.42	0.00
5.24	- 1.50	- 1.62	- 1.74	- 1.82	0.08
5.41	- 1.21	- 1.24	- 1.27	- 1.21	0.06
5.58	- 0.65	- 0.64	- 0.63	- 0.57	0.06
5.74	- 0.11	- 0.07	- 0.03	+ 0.08	0.11
5.91	+ 0.32	+ 0.36	+ 0.40	+ 0.39	0.01
6.08	+ 0.68	0.70	0.72	0.72	0.0
6.24	1.00	1.00	1.00	1.05	0.05

Pression à la vanne. Tableau 9

Temps	Pression obtenue pour le sens 1	Pression obtenue pour le sens 2	Ecart absolu
0.16	221.03	220.93	0.10
0.33	228.00	227.90	0.10
0.49	235.27	235.16	0.11
0.66	242.83	242.72	0.11
0.83	250.62	250.51	0.11
0.99	258.23	258.11	0.12
1.16	265.08	264.97	0.11
1.33	271.09	270.97	0.12
1.49	275.14	275.02	0.12
1.66	275.89	275.77	0.12
1.83	274.33	274.22	0.11
1.99	272.27	272.16	0.11
2.16	270.48	270.37	0.11
2.33	268.87	268.76	0.11
2.49	267.28	267.18	0.10
2.66	265.78	265.68	0.10
2.83	264.60	264.49	0.11
2.99	264.08	263.98	0.10
3.16	264.53	264.42	0.11
3.33	265.79	265.69	0.10
3.49	267.38	267.27	0.11
3.66	268.86	268.75	0.11
3.83	270.11	270.00	0.11
3.99	271.19	271.08	0.11
4.16	272.11	272.00	0.11

```
%PROCEDURE ' INITIAL(NOBR,HINI,HFIN) ::
%ENTIER' NOBR ::
%REEL' HINI,HFIN ::
%DEBUT'
%REEL' CEL2,CTEG,PC  ::     'ENTIER' I,NTPTS,K,K1,K2 ::
NTPTS:=0 ::    CTEG:=9.81*DT*LAMBDA ::    K1:=1 ::
   H.(NOBR,1).:=HINI ::
   %POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQU A' NT.(NOBR). 'FAIRE'
   %DEBUT' NOPT.(NOBR,I).:=NTPTS:=NTPTS+2*N.(NOBR,I). ::
      R.(NOBR,I).:=CTEG/DX.(NOBR,I). ::
      CEL2:=CEL.(NOBR,I).*CEL.(NOBR,I)./96.170384 ::
      RPRIM.(NOBR,I).:=R.(NOBR,I).*CEL2 ::
      RRPT2.(NOBR,I).:=4.0*R.(NOBR,I).*RPRIM.(NOBR,I).*TETA.(NOBR,I).*
        TETAJ(NOBR,I). ::
      A.(NOBR,I).:=1.0+RRPT2.(NOBR,I). ::
      B.(NOBR,I).:=4.0*R.(NOBR,I).*TETA.(NOBR,I). ::
      BPRIM.(NOBR,I).:=B.(NOBR,I).*CEL2 ::
     'SI' I =1 'ALORS' 'ALLER A' POINT1 ::
      H.(NOBR,K1).:=H.(NOBR,K1-1).-KAB.(NOBR,I-1).*V.(NOBR,K1-1).*
        ABS(V.(NOBR,K1-1).)::
      POINT1 : K2:=NOPT.(NOBR,I). ::    PC:=KTRON.(NOBR,I). ::
      V.(NOBR,K1).:=VT.(NOBR,I). ::
      %POUR' K:=K1+1 'PAS' 2 'JUSQU A' K2-2 'FAIRE'
      %DEBUT' H.(NOBR,K).:=H.(NOBR,K-1). ::
              V.(NOBR,K).:=VT.(NOBR,I). ::
            H.(NOBR,K+1).:=H.(NOBR,K).-PC*V.(NOBR,K).*ABS(V.(NOBR,K).)::
             VJ(NOBR,K+1).:=VT.(NOBR,I). ::
   %FIN' BOUCLE K ::
   H.(NOBR,K2).:=H.(NOBR,K2-1). ::
   VJ(NOBR,K2).:=VT.(NOBR,I). ::
   K1:=K2+1 ::
%FIN' BOUCLE I ::
 HFIN:=H.(NOBR,NTPTS). ::
%FIN' INITIAL ::
```

```
%PROCEDURE% DESCENTE(EI,FI,NOPT1,NOBR,EF,FF) ::
%ENTIER% NOBR,NOPT1 ::
%REEL% EI,FI,EF,FF ::
%DEBUT%
%REEL% CTA,CTB,CTD,CTE,CTK,CTBPR,CT2R,CT2RP,DV,DH,DK,DENEF ::
%ENTIER% I,K,NC,NTPTS,K1,P ::
        E.(NOBR,NOPT1).:=EI ::      F.(NOBR,NOPT1).:=FI ::
    K:=1 ::    P:=0 ::    NC:=NT.(NOBR). ::    NTPTS:=NOPT.(NOBR,NC).::
    %POUR% I:=1 %PAS% 1 %JUSQU A% NC %FAIRE%
    %DEBUT% CTE:=RRPT2.(NOBR,I)./TETA.(NOBR,I). ::
       CT2R:=2.0*R.(NOBR,I). ::
       CT2RP:=2.0*RPRIM.(NOBR,I). ::
       CTBPR:=BPRIM.(NOBR,I). ::
       CTA:=A.(NOBR,I). ::    CTB:=B.(NOBR,I). ::
       CTK:=KTRON.(NOBR,I)./LAMBDA ::
       CTD:=RRPT2.(NOBR,I).-1.C ::
       %SI% I %NONEG% 1 %ALORS% %ALLER A% POINT2 %SINON%
       %SI% NOPT1 %NONEG% 1 %ALORS%
       %DEBUT% K:=2 ::
          C.(NOBR,1).:=RRPT2.(NOBR,1)./TETA.(NOBR,1).*(V.(NOBR,2).-
          V.(NOBR,1).)+2.C*R.(NOBR,1).*(H.(NOBR,2).-H.(NOBR,1).) ::
         %ALLER A% POINT3
       %FIN% ::
       POINT2 : K:=K+1 ::    DENEF:=CTA-CTB*E.(NOBR,K-1). ::
      E.(NOBR,K).:=(E.(NOBR,K-1).*CTA-CTBPR)/DENEF ::
      DH:=H.(NOBR,K).-H.(NOBR,K-1). ::
      DV:=V.(NOBR,K).-V.(NOBR,K-1). ::
      DK:=CTE*DH+CT2RP*DV ::
      C.(NOBR,K-1).:=CTE*DV+CT2R*DH ::
      F.(NOBR,K).:=(E.(NOBR,K-1).*C.(NOBR,K-1).+F.(NOBR,K-1).*CTD-DK)/
        DENEF ::
      POINT3 : K1:=K+1 ::    P:=NOPT.(NOBR,I). ::
      %POUR% K:=K1 %PAS% 2 %JUSQU A% P %FAIRE%
      %DEBUT% F.(NOBR,K).:=F.(NOBR,K-1). ::
          E.(NOBR,K).:=E.(NOBR,K-1).-2.C*CTK*ABS(V.(NOBR,K-1).)  ::
         DENEF:=CTA-E.(NOBR,K).*CTB ::
         E.(NOBR,K+1).:=(E.(NOBR,K).*CTA-CTBPR)/DENEF ::
         DH:=H.(NOBR,K+1).-H.(NOBR,K). ::
         DV:=V.(NOBR,K+1).-V.(NOBR,K). ::
         DK:=CTE*DH+CT2RP*DV ::
         C.(NOBR,K).:=CTE*DV+CT2R*DH ::
         F.(NOBR,K+1).:=(E.(NOBR,K).*C.(NOBR,K).+F.(NOBR,K).*CTD-DK)/
          DENEF ::
       %FIN% BOUCLE K ::
       %SI% P %SUPEG% NTPTS %ALORS% %ALLER A% SORTIE %SINON%
      K:=P+1 ::    F.(NOBR,K).:=F.(NOBR,K-1). ::
      E.(NOBR,K).:=S.(NOBR,I+1)./S.(NOBR,I).*(E.(NOBR,K-1).-2.0*KAB.(NOBR
         ,I).*ABS(V.(NOBR,K-1).))  ::
    %FIN% BOUCLE I ::
SORTIE : EF:=E.(NOBR,NTPTS). ::    FF:=F.(NOBR,NTPTS). ::
%FIN% DE DESCENTE ::
```

```
%PROCEDURE% MONTEE(DVI,DHI,NOPT1,NOBR,DVF,DHF) ::
%ENTIER% NOPT1,NOBR ::
%REEL% DVI,DHI,DHF,DVF::
%DEBUT%
%REEL% CTA,CTB,CTD,CTBPR,DV,DH,DK ::
%ENTIER% I,K,K1,K2,NC ::
NC:=NT1(NOBR)% :: K1:=NOPT.(NOBR,NC). ::
H1(NOBR,K1).:=H.(NOBR,K1).+DHI:: DH:=DHI ::
V1(NOBR,K1).:=V.(NOBR,K1).+DVI :: DV:=DVI ::
%POUR% I:=NT1(NOBR). 'PAS' -1 'JUSQU A' 1 'FAIRE'
%DEBUT% CTA:=A1(NOBR,I). :: CTB:=B.(NOBR,I). ::
   CTBPR:=BPRIM.(NOBR,I). :: CTD:=RRPT2.(NOBR,I).-1.0 ::
   K2:=K1-1 ::
   K1:= 'SI' I 'SUPER' 1 'ALORS' 2+NOPT.(NOBR,I-1). 'SINON' NOPT1+1 ::
   %POUR% K:=K2 'PAS' -2 'JUSQU A' K1 'FAIRE'
   %DEBUT% DV:=(CTA*DV+CTB*DH+C.(NOBR,K).)/CTD ::
      V.(NOBR,K).:=V.(NOBR,K).+DV ::
      DH:=E.(NOBR,K).*DV+F.(NOBR,K). ::
      H.(NOBR,K).:=H.(NOBR,K).+DH ::
      V.(NOBR,K-1).:=V.(NOBR,K-1).+DV ::
      DH:=E.(NOBR,K-1).*DV+F.(NOBR,K-1). ::
      H1(NOBR,K-1).:=H.(NOBR,K-1).+DH ::
   %FIN% BOUCLE K ::
   'SI' I=1 'ALORS'
      'DEBUT' 'SI' NOPT1=1 'ALORS'
                  'DEBUT' DV:=(CTA*DV+CTB*DH+C.(NOBR,1).)/CTD ::
                          V.(NOBR,1).:=V.(NOBR,1).+DV ::
                          DH:=E.(NOBR,1).*DV+F.(NOBR,1). ::
                          H.(NOBR,1).:=H.(NOBR,1).+DH ::
                  'ALLER A' FM ::
                  'FIN'
            'SINON' 'DEBUT' DK:=RRPT2.(NOBR,1).*(H.(NOBR,2).-H.(NOBR,
                                1).-DH)/TETA.(NOBR,1).+2.0*RPRIM.(NOBR,1).
                                *(V.(NOBR,2).-V.(NOBR,1).-DV) ::
                     DH:=(CTBPR*DV+CTA*DH+DK)/CTD ::
                     H.(NOBR,1).:=H.(NOBR,1).+DH ::
                     'ALLER A' FM ::
                     'FIN' ::
   %FIN% DE ALORS I=1 ::
   K1:=K1-1 ::
   DV:=(CTA*DV+CTB*DH+C.(NOBR,K1).)/CTD ::
   V1(NOBR,K1).:=V.(NOBR,K1).+DV ::
   DH:=E1(NOBR,K1).*DV+F.(NOBR,K1). ::
   H.(NOBR,K1)1:=H.(NOBR,K1).+DH ::
   K1:=K1-1 ::
   DV:=S1(NOBR,I)./S.(NOBR,I-1).*DV ::
   V.(NOBR,K1)1:=V.(NOBR,K1).+DV ::
   DH:=E1(NOBR,K1).*DV+F.(NOBR,K1). ::
   H.(NOBR,K1)1:=H.(NOBR,K1).+DH ::
%FIN% BOUCLE I ::
FM : 'FIN' DE MONTEE ::
```

CHAPITRE IV

TRAITEMENT DES STRUCTURES EN ARBRE.

Au cours de ce chapître nous exposerons une méthode pour calculer les coups de bélier dans structures en arbre, telles que nous les avons définies au chapître précédent.

1. L'ALGORITHME DIT "DU COLLECTEUR".

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'exposer un algorithme permettant : 1°) connaissant (p-1) couples de coefficients (E_K, F_K) (K = 1, ..., p-1) en un noeud reliant p branches de calculer le $p^{ième}$ couple (E_p, F_p).
2°) Les couples de coefficients (E_K, F_K) et un couple de valeurs $(\Delta V_p, \Delta H_p)$ étant connus de calculer les p-1 autres couples.
Reprenons les lois liant pression et vitesse en un noeud. Appelons ce noeud 0 et 1, ... p les branches qui y sont rattachées. Si on appelle H_i, V_i la pression et la vitesse à l'extrémité de la branche i, $\varepsilon_i^0 = +1$ si la branche i est orientée vers 0, $= -1$ sinon ; $\delta_i = 1$ si V_i est vitesse principale, $= 0$ sinon ; S_i section de la branche i en 0. On peut écrire :

$\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i S_i V_i = 0$. ou, pour simplifier les notations, puisqu'on ne considère pour le moment qu'un seul noeud ; $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i S_i V_i = 0$.

D'autre part on a : $H_i - H_j = \lambda_i^j (S(\varepsilon_i V_i) - S(\varepsilon_j V_j))\ (\delta_j V_j^2 + \delta_i V_i^2)\ S(\varepsilon_i V_i) = +1$ si $\varepsilon_i V_i > 0$, -1 sinon.

Admettons en outre l'hypothèse restrictive suivante : Entre t et t + Δt on ne peut changer de vitesse principale. C'est-à-dire que si à l'instant t V_j est vitesse principale à l'instant t + dt on ne peut se trouver que dans l'une des 2 possibilités :

où V_j est toujours vitesse principale, où il n'y aura pas de vitesse principale (vitesses faibles). C'est-à-dire $H_i^{n+1} - H_j^{n+1} = 0 \simeq \lambda_i^j (S(\varepsilon_i V_i) - S(\varepsilon_j V_j)) V_j^2$ puisque V_j sera alors faible. Autrement dit on considère les δ_i comme constants entre t et t + dt. Cette hypothèse est très vraisemblable et n'introduit pas d'erreur importante dans la description du phénomène. On ne peut faire d'hypothèse semblable sur l'expression $(S(\varepsilon_i V_i) - S(\varepsilon_j V_j))$; or cette expression n'est pas dérivable . Par contre on peut approcher avec une précision aussi grande que l'on veut S(x) par $\frac{2}{M}$ ArctgKx en prenant K suffisamment grand. (En fait en prenant K = 20 la précision sera suffisante pour nous. On écrit alors la perte de charge en 0 entre les branches c et j sous la forme : $H_i - H_j = \frac{2\lambda_i^j}{M} (\text{Artg}(K \varepsilon_i V_i) - \text{Arctg}(K \varepsilon_j V_j)) (\delta_j V_j^2 + \delta_i V_i^2)$.

Examinons les différents cas possibles (en excluant celui où les vitesses sont suffisamment élevées sans qu'il y ait de vitesse principale puisque cela conduit à une impossibilité pour notre méthode).

a) Il n'y a pas de vitesse principale.

C'est-à-dire que les pertes de charges sont négligeables.

Alors : $\delta_i = 0$ pour tout i

$H_i = H_j = 0$ pour tout i et j.

Donc $\Delta H_i = \Delta H_j$ en particulier $\Delta H_i = \Delta H_p$

D'autre part $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i S_i V_i = 0$ entraîne $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i S_i \Delta V_i = 0$

Si pour i = 1, ... p-1 on a $\Delta H_i = E_i \Delta V_i + F_i$

en posant $\alpha = \frac{\varepsilon_i S_i}{E_i}$ il vient $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \Delta H_i = \Delta H_p \sum_{i=1}^{p} \alpha_i$

$= \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i S_i \Delta V_i + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i F_i$

Or $\sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_i S_i \Delta V_i = - \varepsilon_p S_p \Delta V_p$

$$\text{Donc } \Delta H_p = \frac{-\varepsilon_p S_p \Delta V_p + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i F_i}{\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i}$$

c'est-à-dire $\Delta H_p = E_p \Delta V_p + F_p$ avec

$$E_p = \frac{-\varepsilon_p S_p}{\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i} \qquad F_p = \frac{\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i F_i}{\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i}$$

b) Il existe une vitesse principale V_j $j \neq p$.

Alors on peut écrire pour $i \neq j$

$$H_i - H_j = \frac{2\lambda_i^j}{\pi}(\text{Arctg}K\varepsilon_i V_i - \text{Arctg}K\varepsilon_j V_j)V_j^2$$

Dérivons cette expression par rapport au temps il vient :

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} - \frac{\partial H_j}{\partial t} = \frac{2\lambda_i^j}{\pi} K\left(\frac{\varepsilon_i}{1 + K^2V_i^2} \frac{\partial V_i}{\partial t} - \frac{\varepsilon_j}{1 + K^2V_j^2} \frac{\partial V_j}{\partial t}\right)V_j^2$$

$$+ \frac{2\lambda_i^j}{\pi}(S(\varepsilon_i V_i) - S(\varepsilon_j V_j))2V_j \frac{\partial V_j}{\partial t}$$

D'où l'on tire :

$$\Delta H_i - \Delta H_j = c_i \Delta V_i + d_i \Delta V_j \quad (1)$$

avec si $i \neq j$ $\quad c_i = \dfrac{2\lambda_i^j K \varepsilon_i V_j^2}{\pi(1 + K^2V_i^2)}$

$$d_i = \frac{2\lambda_i^j}{\pi}\left(2V_j(S(\varepsilon_i V_i) - S(\varepsilon_j V_j)) - \frac{K\varepsilon_j V_j^2}{1 + K^2V_j^2}\right)$$

On pose $c_j = d_j = 0$.

On a toujours pour i = 1, ..., p-1

$$\Delta H_i = E_i \Delta V_i + F_i$$

remplaçons ΔH_i et ΔH_j par leurs valeurs dans (1) il vient :

$$F_i - F_j = (c_i - E_i)\Delta V_i + (d_i + E_j)\Delta V_j.$$

c'est-à-dire $$\Delta V_j = \frac{(E_i - c_i)}{d_i + E_j} \Delta V_i + \frac{F_i - F_j}{d_i + E_j} \quad (2)$$

D'autre part faisons i = p dans (1) on obtient :

$$\Delta H_p - \Delta H_j = c_p \Delta V_p + d_p \Delta V_j.$$

Remplaçons ΔH_j par sa valeur.

$$\Delta H_p = E_j \Delta V_j + F_j + c_p \Delta V_p + d_p \Delta V_j$$

$$= (E_j + d_p) \frac{(E_i - c_i)}{d_i + E_j} \Delta V_i + c_p \Delta V_p + \frac{(E_j + d_p)(F_i - F_j)}{d_i + E_j}$$

Ceci pour i = 1, ... p-1 ; pour i = j la formule se simplifie en

$$\Delta H_p = (E_j + d_p)\Delta V_j + c_p \Delta V_j$$

$$= (E_j + d_p + c_p)\Delta V_j$$

On a donc pour i = 1, ..., p-1

$$\Delta H_p = G_i \Delta V_i + c_p \Delta V_p + L_i$$

avec $$G_i = \frac{(E_j + d_p)(E_i - c_i)}{d_i + E_j}$$

$$L_i = \frac{(E_j + d_p)(F_i - F_j)}{d_i + E_j} + F_j$$

Posons $$\alpha_i = \frac{\varepsilon_i \times S_i}{G_i} \qquad \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i = Q$$

Alors $\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \Delta H_p = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i G_i \Delta V_i + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i c_p \Delta V_p + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i L_i$

c'est-à-dire $Q\Delta H_p = \sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_i S_i \Delta V_i + Q c_p \Delta V_p + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i L_i$

$$\Delta H_p = \Delta V_p \left(c_p - \frac{\varepsilon_p S_p}{Q}\right) + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\alpha_i L_i}{Q}$$

Donc $\Delta H_p = E_p \Delta V_p + F_p$.

avec $E_p = c_p - \frac{\varepsilon_p S_p}{Q}$; $F_p = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\alpha_i L_i}{Q}$

c) V_p est vitesse principale.

Pour i = 1, ... p-1, on peut écrire

$\Delta H_i - \Delta H_p = c_i \Delta V_i + d_i \Delta V_p$

$\Delta H_i = E_i \Delta V_i + F_i$

c'est-à-dire $(E_i - c_i)\Delta V_i - d_i \Delta V_p + F_i = \Delta H_p$

Posons $\alpha_i = \frac{\varepsilon_i S_i}{E_i - c_i}$ $\quad \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i = Q$

Utilisant $\sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_i S_i \Delta V_i = 0$ on obtient :

$$Q\Delta H_p = -\varepsilon_p S_p \Delta V_p - \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i d_i \Delta V_p + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i F_i$$

donc $\Delta H_p = E_p \Delta V_p + F_p$

avec $E_p = -\left(\frac{\varepsilon_p S_p}{Q} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\alpha_i d_i}{Q}\right)$

$$F_p = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\alpha_i F_i}{Q}$$

Dans les 3 cas envisagés la propriété (P) reste donc vérifiée.
Montrons maintenant comment dans ces diverses éventualitées, on peut connaissant, ΔV_p et ΔH_p ainsi que les E_i, F_i pour i = 1, ..., p-1, calculer ΔV_i et ΔH_i pour les mêmes valeurs de i.

d) Calcul de ΔV_i, ΔH_i.

1°) cas a) On a $\Delta H_i = \Delta H_p$ pour i = 1, ... p-1. donc $\Delta V_i = \dfrac{\Delta H_i - F_i}{E_i}$

2°) cas b) $\Delta H_p = G_i \Delta V_i + c_p \Delta V_p + L_i$ donc $V_i = \dfrac{\Delta H_p - c_p \Delta V_p - L_i}{G_i}$; $\Delta H_i = E_i \Delta V_i + F_i$.

N.B. Il est bien sûr possible de recalculer les G_i et L_i au moment de leur 2ème utilisation mais il est évidemment préférable, dans la mesure du possible de les conserver en mémoire.

3°) cas c). $\Delta V_i = \dfrac{\Delta H_p - F_i + d_i \Delta V_p}{E_i - c_i}$

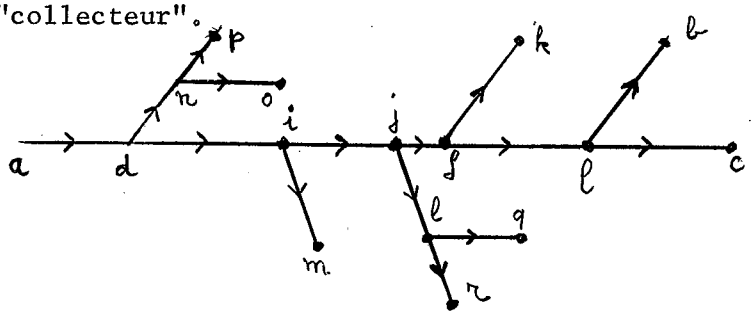
$\Delta H_i = E_i \Delta V_i + F_i$.

2. MODE D'UTILISATION DE L'ALGORITHME DU COLLECTEUR.

a) Proposition.

Toute structure en arbre peut être étudiée à l'aide des seuls algorithmes dits "linéaire" et "collecteur".

Démonstration. Si nous parvenons à montrer que l'on peut parcourir en entier une structure en arbre en connaissant en chaque sommet du graphe associé tous les couples de coefficients E_i, F_i sauf un, la proposition sera démontrée puisqu'il suffira alors d'utiliser sur les arêtes l'algorithme "linéaire" et pour chaque sommet l'algorithme "collecteur".



Pour cela choisissons un point pendant (a) du graphe. Relions ce point pendant à tous les autres points pendants du graphe. On a ainsi orienté le graphe sans contradictions possibles. En effet, une propriété des structures en arbre est qu'il existe un chemin et un seul pour aller d'un point à un autre. Donc si nous supposons qu'il peut y avoir ambiguité pour l'orientation d'une arête (ef) par exemple, c'est-à-dire que le chemin de (a) à (b) est défini par la suite a ... ef ... b et celui de (a) à (c) par a ... fe ... c nous obtenons 2 chemins possibles de (a) à (e) : a ... e, a ... fe. (f n'étant pas présent dans la première suite puisqu'un arbre ne comporte pas de cycle).
Montrons maintenant que dans le graphe ainsi orienté chaque sommet ne reçoit au plus qu'une arête orientée vers lui.
En effet, toujours en vertu de la propriété de l'unicité d'un chemin d'un point à un autre s'il y avait 2 arêtes orientées vers un sommet il y aurait 2 chemins au point pendant choisi à ce sommet.
Ceci fait changeons systématiquement le sens des arêtes, on voit immédiatement que s'il y a p points pendants, partant de p-1 d'entre eux on arrive toujours en suivant le sens des arêtes du $p^{ième}$ en ayant en chaque sommet une seule arête partante ; c'est-à-dire qu'après avoir appliqué l'algorithme "linéaire" sur les arêtes arrivantes on peut en chaque sommet appliquer l'algorithme collecteur. On initialise le calcul des coefficients E_K, F_K aux p-1 points pendants en utilisant les conditions aux limites en ces points.

b) Remarque.

Le choix des points pendants dont on part ne doit pas être arbitraire. En effet, nous avons vu que si les conditions aux limites usuelles peuvent servir indifféremment à l'initialisation du calcul des E_K, F_K (cas des points pendants de départ) ou de celui des ΔV_K, ΔH_K (cas du point pendant d'arrivée) l'une de celles-ci (utilisée pour exprimer qu'une vanne est fermée par exemple) ne permet pas d'obtenir E_1 et F_1 mais E_2 et F_2 et son emploi pour l'initialisation des E_K, F_K suscite quelques difficultés de programmation. Aussi conseillons-nous lorsque la perturbation à l'origine du coup de bélier est la fermeture d'une vanne et d'une seule, de prendre pour point pendant d'arrivée celui correspondant à cette vanne.

3. PROCEDURES.

Nous avons écrit trois procédures ALGOL permettant d'appliquer l'algorithme détaillé ci-dessus. Ces procédures supposent faites les déclarations énoncées au chapître précédent.

Procédure ANAL(NBRA, NØVP, LIST, SIG, V, RAP, VHAX, EXVP, IMPØS).

Cette procédure est utilisée pour un noeud comportant NBRA branches orientées par rapport au noeud suivant les sens indiqués dans le tableau SIG. Les vitesses de ces branches sont dans le tableau V. S'il existe une vitesse principale de rapport RAP le numéro de la branche correspondante est mis dans NØVP, EXVP prenant la valeur vraie. S'il n'existe pas de vitesse principale mais que toutes les vitesses soient, en valeur absolue inférieures à VHAX et EXVP prend la valeur faux. Si aucune de ces 2 possibilités n'est vérifiée, le programme est aiguillé sur l'étiquette IMPØS. D'autre part le tableau LIST est affecté des valeurs SIGNE(SIG [I]xV [I]).

Procédure CØLCØEF(NBRA, TYPE, NØVP, CØEF, C, D, LIST, SIG, L, G, Q, E, F, H, V, KS)

Cette procédure a pour but, en un noeud à NBRA branches dont les orientations sont précisées par le tableau SIG, de calculer E [NBRA] et F [NBRA] à partir de E 1 , ...E [NBRA - 1] , F [1], ... F [NBRA - 1] . Le tableau CØEF contient les coefficients de pertes de charges branche à branche.

S'il existe une vitesse principale, TYPE doit contenir VRAI et NØVP doit être le numéro de la branche correspondant à cette vitesse. KS est la constante d'approximation de la discontinuité de SIGNE(X) par $\frac{2}{\pi}$ Arctg KX. H et V sont des tableaux contenant pressions et vitesses des différentes branches (numérotées bien sûr dans le même ordre dans chaque tableau les concernant).

C, D, L, G sont des tableaux utilitaires à conserver pour être utilisés par la procédure CØLVAL : Q est un nombre réel qui n'est pas à conserver mais dont on peut avoir besoin pour rechercher une erreur.

Procédure CØLVAL(NBRA, E, F, C, D, L, G, H, V, DH, DV, NØVP, TYPE).

Cette procédure utilise les résultats de CØLCØEF(E, F, C, D, L, G) et d'ANAL(NØVP, TYPE) pour calculer à partir de DV [NBRA] et DH [NBRA] , les variations de pression et de vitesses sur les autres branches et les ajouter respectivement aux quantités contenues dans H et V.

On voit donc qu'il faut réserver pour chaque noeud d'un réseau un certain nombre de tableaux et en faire une affectation préalable en utilisant les résultats obtenus par INITIAL et DESCENTE, pour utiliser ces 3 procédures. Ce n'est pas une contrainte bien importante puisque ces tableaux sont mis à jour par ces procédures il n'y a donc qu'une affectation initiale à faire.

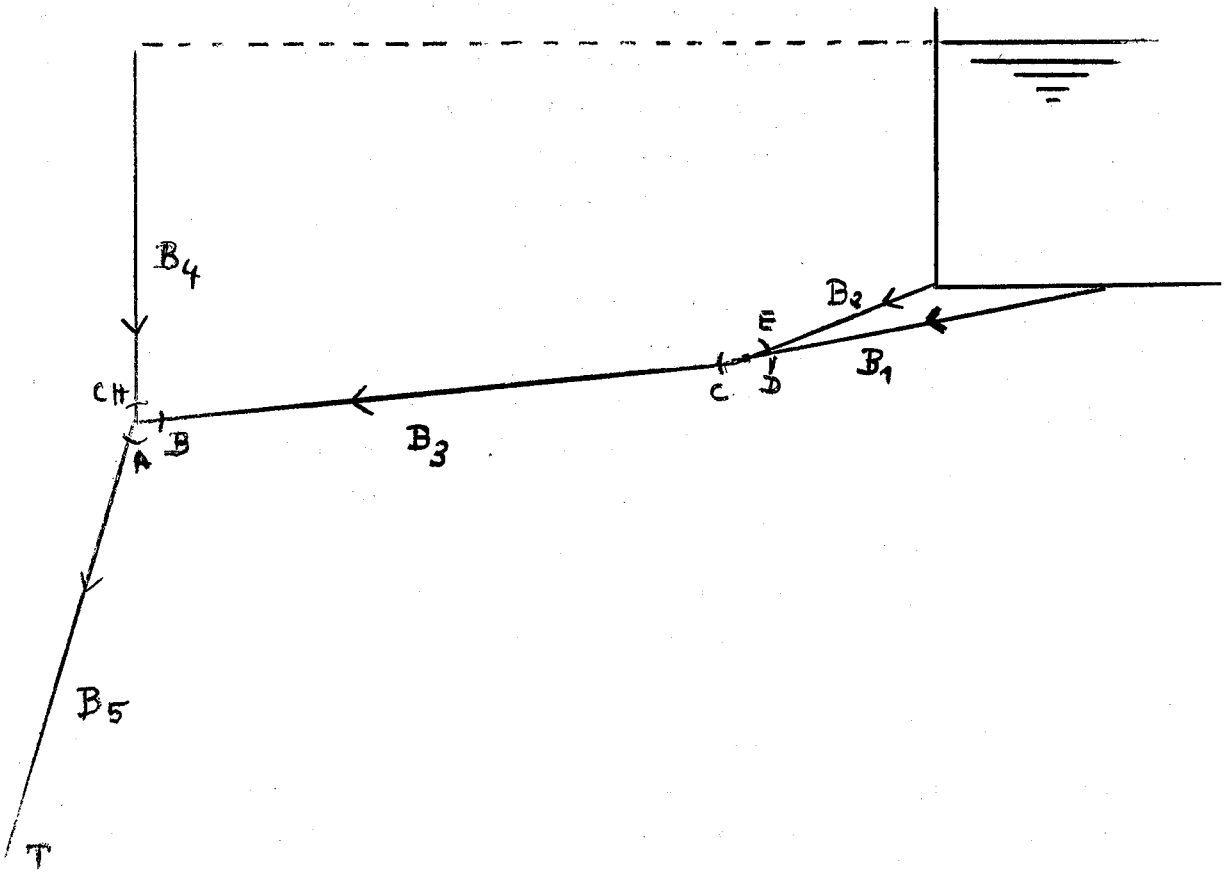
4. RESULTATS.

Nous avons mis au point nos procédures sur un exemple industriel relativement complexe. Nous ne donnons en annexe de ce chapître que quelques résultats partiels, car pour les détailler comme ceux de l'exemple du chapître précédent il nous faudrait un volume. Il est d'autre part extrêmement difficile de comparer plus en détail nos résultats avec ceux obtenus par une autre méthode car la mise en oeuvre d'une vérification par la méthode de BERGERON par exemple nous aurait pris, vu la complexité du problème, plusieurs mois. Nous ne donnons donc que la valeur du premier maximum de la courbe de pression en certains points du réseau. Ce premier maximum a été calculé à partir de formules déduites des séries enchaînées d'ALLIEVI par Monsieur LEVIN, Directeur du Département Recherche à la Société Bouchayer-Viallet-Schneider. Ces formules ne tenant pas compte des pertes de charges, l'écart observé nous a paru normal.
Nous tenons à attirer l'attention des utilisateurs éventuels sur deux points très importants qui nous ont causé quelques surprises.

1°) Il est absolument nécessaire de vérifier que les conditions de stabilité soient respectées pour toutes les conduites de chaque branche. Cette instabilité peut n'apparaître qu'au bout d'un grand nombre d'itérations si la conduite où elle a lieu est située loin de l'origine de la perturbation.

2°) Les cheminées d'équilibre doivent être considérées comme étant à la pression de la conduite sur laquelle elles débouchent, sur toutes leurs longueurs.

L'exemple que nous avons traité était composé de 5 branches composées respectivement de 1, 1, 11, 2 et 6 conduites. Les 3 premières branches étant des galeries en charge (la 3ème ayant près de 20 km de long) ; la 4ème branche était une cheminée d'équilibre et la 5ème une conduite forcée débouchant sur une turbine.
La perturbation étudiée provenait du "décrochage" de la turbine de façon linéaire de sa puissance maximale à zéro en un temps donné.



POINT	1er maximum calculé	1er maximum de référence	Ecart relatif	2ème maximum
T	42,95	40,65	0,056	38,91
A	1,09	Non évalué		0,98
CH	1,08	1,25	0,156	0,97
B	0,35	0,28	0,25	0,31
C	négligeable	Non évalué		négligeable
D				
E				

```
'PROCEDURE' ANAL(NBRA,NOVP,LIST,SIG,V,RAP,VMAX,EXVP,IMPOS) ::
'ENTIER' NBRA,NOVP :: 'ENTIER' 'TABLEAU' SIG,LIST ::
'REEL' 'TABLEAU' V :: 'REEL' RAP,VMAX :: 'BOOLEEN' EXVP ::
'ETIQUETTE' IMPOS ::
'DEBUT' 'ENTIER' Q,NVSP,NVSN ::
   'REEL' RMP,RMN,VSUPO,VSUPNE ::
   EXVP:= 'FAUX' :: NOVP:=0 ::
   'POUR' I:=1 'PAS' 1 'A' NBRA 'FAIRE'
EXVP:= 'SI' ABS(V.(I).) 'INFER' VMAX 'ALORS' EXVP 'SINON' 'VRAI' ::
   'SI' 'NON' EXVP 'ALORS' 'ALLERA' SORTZ ::
'COMMENTAIRE' ON POURSUIT SI MAX(V.(I).) 'SUPER' VMAX ::
   Q:=0 :: NVSP:=0      ::
   'POUR' I:=1 'PAS' 1 'A' NBRA 'FAIRE'
'DEBUT' LIST.(I).:='SI' V.(I). 'NONEG' 0.0 'ALORS' SIG.(I).*SIGNE(V.(I).)
'SINON' 1::
   Q:=Q+LIST.(I). ::
   'FIN' ::
   'SI' Q=2-NBRA 'ALORS' 'ALLERA' VUNIPO ::
   'SI' Q=NBRA-2 'ALORS' 'ALLERA' VUNINE ::
   VSUPO:=VSUPNE:=0.0 :: NVSP:=NVSN:=0 ::
   'POUR' I:=1 'PAS' 1 'A' NBRA 'FAIRE'
   'DEBUT'
   'SI' LIST.(I). 'SUPER' 0 'ET' ABS(V.(I).) 'SUPER' VSUPO 'ALORS'
   'DEBUT'
   VSUPO:=ABS(V.(I).) :: NVSP:=I :: 'ALLERA' FIB ::
'FIN' ::
'SI' LIST.(I). 'INFER' 0 'ET' ABS(V.(I).) 'SUPER' VSUPNE 'ALORS'
'DEBUT' VSUPNE:=ABS(V.(I).) :: NVSN:=I :: 'FIN' ::
FIB: 'FIN' ::
RMP:=RMN:=0.0 ::
   'POUR' I:=1 'PAS' 1 'A' NBRA 'FAIRE'
'DEBUT' 'SI' I=NVSP 'ALORS' 'ALLERA' SUITE ::
RMP:= 'SI' LIST.(I). 'SUPER' 0 'ET' ABS(V.(I)./VSUPO) 'SUPER' RMP
   'ALORS' ABS(V.(I)./VSUPO) 'SINON' RMP ::
SUITE: 'SI' I=NVSN 'ALORS' 'ALLERA' STOP ::
RMN:= 'SI' LIST.(I). 'INFER' 0 'ET' ABS(V.(I)./VSUPNE) 'SUPER' RMN
   'ALORS' ABS(V.(I)./VSUPNE) 'SINON' RMN ::
STOP: 'FIN' ::
'SI' RMP 'INFER' RAP 'ALORS' 'DEBUT' NOVP:=NVSP :: 'ALLERA' SORTZ ::
'FIN' ::
'SI' RMN 'INFER' RAP 'ALORS' 'DEBUT' NOVP:=NVSN :: 'ALLERA' SORTZ ::
   'FIN' ::
'ALLERA' IMPOS ::
VUNIPO: I:=0 ::
'POUR' I:=I+1 'TANTQUE' LIST.(I). 'INFER' 0 'FAIRE' NOVP:=I ::
   NOVP:=NOVP+1 :: 'ALLERA' SORTZ ::
VUNINE: I:=0 ::
   'POUR' I:=I+1 'TANTQUE' LIST.(I). 'SUPER' 0 'FAIRE' NOVP:=I ::
   NOVP:=NOVP+1 ::
SORTZ: 'FIN' ANAL ::
```

```
    'PROCEDURE' COLVAL(NBRA,E,F,C,D,L,G,H,V,DH,DV,NOVP,TYPE) ::
    'ENTIER' NBRA,NOVP :: 'BOOLEEN' TYPE ::
    'TABLEAU' E,F,C,D,L,G,H,V,DH,DV ::
    'DEBUT' 'REEL' DHP,DVP,ENBRA,FNBRA,DVI,DHI ::
       ENBRA:=E.(NBRA). :: FNBRA:=F.(NBRA). ::
       DVP:=DV.(NBRA). :: DHP:=ENBRA*DVP+FNBRA ::
       'SI' TYPE 'ALORS' 'ALLERA' VITPRINALE ::
    'POUR' I:=1 'PAS' 1 'A' NBRA-1 'FAIRE'
       'DEBUT'
       H.(I).:=H.(I).+DHP ::
       DVI:=(DHP-F.(I).)/E.(I). ::
       V.(I).:=V.(I).+DVI ::
       DV.(I).:=DVI :: DH.(I).:=DHI ::
       'FIN' ::
       'ALLERA' SORTX ::
VITPRINALE: 'SI' NOVP=NBRA 'ALORS' 'ALLERA' CASP ::
       'POUR' I:=1 'PAS' 1 'A' NBRA-1 'FAIRE'
    'DEBUT'
       DVI:=(DHP-C.(NBRA).*DVP-L.(I).)/G.(I). ::
       DV.(I).:=DVI ::
       V.(I).:=V.(I).+DVI ::
       DH.(I).:=E.(I).*DVI+F.(I). ::
       H.(I).:=H.(I).+DH.(I). ::
    'FIN' ::
       'ALLERA' SORTX ::
CASP: 'POUR' I:=1 'PAS' 1 'A' NBRA-1 'FAIRE'
    'DEBUT'
       DVI:=(DHP-F.(I).+D.(I).*DVP)/(E.(I).-C.(I).)     ::
       DV.(I).:=DVI ::
       V.(I).:=V.(I).+DVI ::
       DH.(I).:=E.(I).*DVI+F.(I). ::
       H.(I).:=H.(I).+DH.(I). ::
    'FIN' ::
SORTX:H.(NBRA).:=H.(NBRA).+DHP::
  V.(NBRA).:=V.(NBRA).+DVP::
  'FIN'::
```

```
    %PROCEDURE% COLCOEF(NBRA,TYPE,NOVP,COEF,C,D,LIST,SIG,
        L,G,Q,E,F,H,V,KS) ::
    %ENTIER% NBRA,NOVP :: %BOOLEEN% TYPE :: %REEL% C,KS::
  %REEL%%TABLEAU%C,D,L,G,E,F,H,V,COEF::
   %ENTIER%%TABLEAU%LIST,SIG::
    %DEBUT% %REEL% EP,VP,FNBRA,RESP,ALPI,GI          ::
   %REEL%%TABLEAU%ALP.(1:NBRA).::
        RESP:=Q:=FNBRA:=C.C ::
    %SI% TYPE %ALORS% %ALLERA% VITPRINALE ::
    %POUR% I:=1 %PAS% 1 %A% NBRA-1 %FAIRE%
    %DEBUT%
        ALP.(I).:=SIG.(I).*SECT.(I)./E.(I). ::
        Q:=ALP.(I).+Q ::
        FNBRA:=FNBRA+F.(I).*ALP.(I). ::
    %FIN% ::
    E.(NBRA).:=-(SIG.(NBRA).*SECT.(NBRA).)/Q          ::
        %ALLERA% SORTY ::
        VITPRINALE: VP:=V.(NOVP). ::
        %SI% NOVP=NBRA %ALORS% %ALLERA% CPART ::
  %POUR% I:=1%PAS%1%A%NBRA%FAIRE%
  %DEBUT%C.(I).:=KS*SIG.(I).*2*COEF.(NOVP,I).*VP**2/PI
        /(1.0+(KS*V.(I).)**2) ::
  D.(I).:=2*COEF.(NOVP,I).*VP*(2*(LIST.(I).-LIST.(NOVP).)-KS*SIG.(NOVP).
  /(1.0+(KS*V.(NOVP).)**2))/PI::
    %FIN% ::
        EP:=E.(NOVP). :: C.(NOVP).:=D.(NOVP).:=0.0 ::
        %POUR% I:=1 %PAS% 1 %A% NBRA-1 %FAIRE%
        %DEBUT%
        G.(I).:=(EP+D.(NBRA).)*(E.(I).-C.(I).) ::
        ALPI:=SIG.(I).*SECT.(I).*(D.(I).+EP)/G.(I). ::
   G.(I).:=G.(I)./(D.(I).+EP)::
   L.(I).:=(EP+D.(NBRA).)*(F.(I).-F.(NOVP).)/(D.(I).+EP)::
   L.(I).:=L.(I).+F.(NOVP).::
    Q:=Q+ALPI :: ALP.(I).:=ALPI ::
    FNBRA:=FNBRA+ALPI*L.(I). ::
%FIN% ::
    E.(NBRA).:=C.(NBRA).-SIG.(NBRA).*SECT.(NBRA)./C ::
  %ALLERA%SORTY::
CPART: %POUR% I:=1 %PAS% 1 %A% NBRA-1 %FAIRE%
    %DEBUT%
 C.(I).:=2*SIG.(I).*COEF.(NOVP,I).*VP**2/PI/(1.0+(KS*V.(I).)**2)::
 D.(I).:=2*COEF.(NOVP,I).*VP*(2*(LIST.(I).-LIST.(NOVP).)-KS*SIG.(NOVP).
 /(1.0+(KS*V.(NOVP).)**2))/PI::
        ALPI:=SIG.(I).*SECT.(I)./(E.(I).-C.(I).) ::
        Q:=Q+ALPI ::
        RESP:=RESP+ALPI*D.(I). ::
        FNBRA:=FNBRA+ALPI*F.(I). ::
        ALP.(I).:=ALPI ::
    %FIN% ::
    E.(NBRA).:=-(SIG.(NBRA).*SECT.(NBRA).+RESP)/C ::
SORTY: F.(NBRA).:=FNBRA/Q ::
%FIN% COLCOEF ::
```

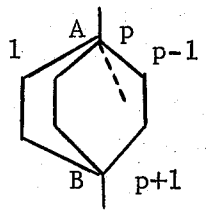
CHAPITRE V

ETUDE D'UN ALGORITHME PLUS GENERAL

Tous les graphes associés à un système hydraulique n'étant pas des "arbres" il a paru nécessaire d'élaborer un algorithme permettant de traiter ces cas là. C'est ce que nous allons exposer dans ce chapître.

1. ALGORITHME DU REPARTITEUR.

Considérons le système hydraulique dont le graphe associé est :



Nous allons donner un procédé de calcul des E_i, F_i $i = 1, \ldots, p-1$ connaissant seulement E_p et F_p pour un sommet du graphe associé relié à p arêtes.
Comme dans l'algorithme du collecteur nous allons être amenés à considérer 3 cas :

a) Pas de vitesse principale.

(C'est-à-dire pertes de charges négligeables en ce noeud).

On peut alors écrire $\Delta H_i = \Delta H_p = E_p \Delta V_p + F_p \quad i = 1, \ldots p-1$

Or $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i S_i \Delta V_i = 0$ donc $- \varepsilon_p S_p \Delta V_p = \sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_i S_i \Delta V_i$

Donc $\Delta V_i = \dfrac{- E_p}{\varepsilon_p S_p} \sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_i S_i \Delta V_i + F_p \quad (I)$

Relation qui n'est pas du type attendu. Montrons que l'on peut néanmoins résoudre le problème dans ce cas là.

Posons $\Delta H = \begin{vmatrix} \Delta H_1 \\ \vdots \\ \Delta H_{p-1} \end{vmatrix}$ $\Delta V = \begin{vmatrix} \Delta V_1 \\ \vdots \\ \Delta V_{p-1} \end{vmatrix}$ E = Matrice des E_i^k

avec $E_i^k = \dfrac{-E_p \varepsilon_k S_k}{\varepsilon_p S_p}$; $F = \begin{vmatrix} F_p \\ \vdots \\ F_p \end{vmatrix}$

Les (p-1) relations (I) peuvent s'écrire : $\Delta H = E\Delta V + F$;

<u>Propriété (P')</u> : Si pour un ensemble de p conduites, divisées en un même nombre d'intervalles (mais éventuellement de longueurs différentes).
On a au $k^{ième}$ intervalle la relation vectorielle $\Delta H_K = E_K \Delta V_K + F_K$ alors au $(K+1)^{ième}$ intervalle on a la relation $\Delta H_{K+1} = E_{K+1} \Delta V_{K+1} + F_{K+1}$.

<u>Démonstration</u> : Supposons donc qu'au $k^{ième}$ intervalle on ait la relation (II) : $\Delta H_K = E_K \Delta V_K + F_K$. Appelons ΔH_K^i, ΔV_K^i les $i^{ième}$ composantes des vecteurs ΔH_K, ΔV_K.
Nous avons vu au paragraphe II-1 qu'on peut écrire

$$\Delta V_K^i = A_i \Delta V_{K+1}^i + B_i \Delta H_{K+1}^i + c_{K,\,i}^n$$

$$\Delta H_K^i = B_i' \Delta V_{K+1}^i + A_i \Delta H_{K+1}^i + D_{K,\,i}^n$$

où A_i, B_i, B_i', $c_{K,\,i}^n$, $D_{K,\,i}^n$ sont définis par les caractéristiques de la conduite c_i et son état à l'instant $n\Delta t$.

Donc en posant $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & A_{p-1} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & & B_{p-1} \end{pmatrix}$

$$B' = \begin{pmatrix} B'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B'_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & B'_{p-1} \end{pmatrix} \qquad D_K^n = \begin{vmatrix} D_{K,}^n & 1 \\ \circ & \\ \circ & \\ D_{K,}^n & p-1 \end{vmatrix} \qquad c_K^n = \begin{vmatrix} c_{K,}^n & 1 \\ \circ & \\ \circ & \\ c_{K,}^n & p-1 \end{vmatrix}$$

On peut écrire $\Delta V_K = A\Delta V_{K+1} + B\Delta H_{K+1} + c_K^n$

$$\Delta H_K = B'\Delta V_{K+1} + A\Delta H_{K+1} + D_K^n$$

Reportons dans (II) il vient

$$B'\Delta V_{K+1} + A\Delta H_{K+1} + D_K^n = E_K(A\Delta V_{K+1} + B\Delta H_{K+1} + c_K^n) + F_K$$

$$\text{Soit } \Delta H_{K+1} = (A - E_K B)^{-1}(E_K A - B')\Delta V_{K+1} + (A - E_K B)^{-1}(E_K c_K^n + F_K - D_K^n)$$

C'est-à-dire $\Delta H_{K+1} = E_{K+1}\Delta V_{K+1} + F_{K+1}$ avec

$$\left.\begin{aligned} E_{K+1} &= (A - E_K B)^{-1}(E_K A - B') \\ F_{K+1} &= (A - E_K B)^{-1}(E_K c_K^n + F_K - D_K^n) \end{aligned}\right\} \quad (III)$$

On voit immédiatement par analogie avec le cas scalaire le procédé de résolution : On calcule les matrices E_K et les vecteurs F_K par les relations de récurrence (III). Puis, soit grâce aux conditions aux limites, soit grâce aux résultats obtenus par un algorithme du type collecteur que nous étudierons plus bas, on initialise le calcul des ΔH_K et ΔV_K et on remonte le système en utilisant les relations :

$$\Delta V_K = A\Delta V_{K+1} + B\Delta H_{K+1} + c_{K,}^n \quad \Delta H_K = E_K\Delta V_K + F_K$$

Le système a finalement été triangularisé par bloc.

Avant d'étudier les 2 autres cas possibles pour l'algorithme du répartiteur nous allons rapidement montrer que l'introduction des pertes de charges par frottement ou dues à un aboutement de conduite dans une branche du répartiteur n'affecte pas la propriété (P').

1°) Pertes de charges par frottement.

Au $k^{ième}$ intervalle on a la relation $\Delta H_K = E_K\Delta V_K + F_K$ (IV).

Supposons qu'il y ait une discontinuité de la fonction H_i en ce point de la branche b_r

Appelons $H^j_{K_\ell +}$; $H^j_{K_\ell -}$; $V^j_{K_\ell +}$; $V^j_{K_\ell -}$ les limites à gauche et à droite des fonctions H_j et V_j au point $K\Delta x_j$.
On peut écrire pour $j \neq i$ $H^j_{K_\ell +} = H^j_{K_\ell -}$; $V^j_{K_\ell +} = V^j_{K_\ell -}$
D'autre part $V^i_{K_\ell +} = V^i_{K_\ell -}$.

$$H^i_{K_\ell -} = H^i_{K_\ell +} - k\, S(V^i_{K_\ell +})\,(V^i_{K_\ell +})^2$$

D'où l'on tire :

$$\Delta H^j_{K_\ell +} = \Delta H^j_{K_\ell -} \quad \text{pour } j \neq i$$
$$\Delta V^j_{K_\ell +} = \Delta V^j_{K_\ell -} \quad \text{pour } j = 1, \ldots p-1.$$
$$\Delta H^i_{K_\ell -} = \Delta H^i_{K_\ell +} - 2k_i V^i_{K_\ell +}\, S(V^i_{K_\ell +})\Delta V^i_{K_\ell -}$$

Reportons ces valeurs dans (IV) il est facile de voir que l'on obtient la relation

$$\Delta H_{K_\ell -} = E_{K_\ell -} \times \Delta V_{K_\ell -} + F_{K_\ell -}$$

avec $F_{K_\ell -} = F_{K_\ell +} = F_K$

$$E_{K_\ell -} = E_{K_\ell +} - 2k_i |V^i_K| \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \ldots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (i) \\ (p-1). \end{matrix}$$

La généralisation au cas où ℓ fonctions H_i présentent une discontinuité en ce point est évidente. Nous donnerons simplement l'expression de $E_{K_\ell -}$ dans le cas où $\ell = p-1$.

$$E_{K_\ell -} = E_{K_\ell +} - 2 \begin{bmatrix} k_1|V^1_K|, & k_1|V^1_K|, & \ldots & k_1|V^1_K| \\ k_2|V^2_K|, & k_2|V^2_K|, & \ldots & k_2|V^2_K| \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ k_{p-1}|V^{p-1}_K|, & k_{p-1}|V^{p-1}_K|, & \ldots & k_{p-1}|V^{p-1}_K| \end{bmatrix}$$

2°) <u>Pertes de charges dues à un aboutement.</u>

Le raisonnement est identique à celui que nous venons de tenir mais cette fois on doit écrire si i est la branche où il y a discontinuité de la pression et de la vitesse $\Delta V^i_{K_\ell +} = \dfrac{S_i^{\ell+1}}{S_i^{\ell}} \Delta V^i_{K_\ell -}$ où $S_i^{\ell+1}$ et S_i^{ℓ} sont les sections des conduites

c_ℓ et $c_{\ell+1}$ de la branche i.

On a alors $E_{K,-} = E_{K,+} - 2k^{\ell+1}_{\ell,i} \dfrac{S_i^{\ell+1}}{S_i^{\ell}} V^i_{K,+} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (i) \\ (p-1) \end{matrix}$

$F_{K,+} = F_{K,-}$.

b) <u>Il existe une vitesse principale V_j $j \neq p$.</u>

Comme nous l'avons vu au paragraphe IV-1 on peut écrire

$\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i S_i \Delta V_i = 0$ donc $\Delta V_p = - \sum_{i=1}^{p-1} \dfrac{\varepsilon_i S_i \Delta V_i}{\varepsilon_p S_p}$.

$\Delta H_i - \Delta H_j = c_i \Delta V_i + d_i \Delta V_j$ pour $i = 1, \dots p$

avec $c_j = d_j = 0$.

On suppose que dans la relation $\Delta H_p = E_p \Delta V_p + F_p$

on connaît E_p et F_p.

$$\Delta H_p = \frac{-E_p}{\varepsilon_p S_p} \sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_i S_i \Delta V_i + F_p$$

Or

$$\Delta H_p - \Delta H_j = c_p \Delta V_p + d_p \Delta V_j$$

$$E_p \Delta V_p + F_p - \Delta H_j = c_p \Delta V_p + d_p \Delta V_j$$

c'est-à-dire

$$\Delta H_j = (E_p - c_p)\Delta V_p - d_p \Delta V_j + F_p$$

$$\begin{cases} \Delta H_j = \dfrac{-(E_p - c_p)}{\varepsilon_p S_p} \displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_i S_i \Delta V_i - d_p \Delta V_j + F_p \\ \Delta H_i = \Delta H_j + c_i \Delta V_i + d_i \Delta V_j \end{cases}$$

Ces 2 relations permettent d'écrire, avec les notations définies du paragraphe précédent : $\Delta H = E\Delta V + F$

où E est une matrice dont les éléments sont :

$$E_i^k = \frac{-(E_p - c_p)}{\epsilon_p S_p}\ \epsilon_k S_k \text{ pour } i \neq j,\ k \neq j,\ k \neq i.$$

$$E_i^j = \frac{-(E_p - c_p)}{\epsilon_p S_p}\ \epsilon_j S_j + d_i - d_p$$

$$E_j^k = \frac{-(E_p - c_p)}{\epsilon_p S_p}\ \epsilon_k S_k$$

$$E_j^j = \frac{-(E_p - c_p)}{\epsilon_p S_p}\ \epsilon_j S_j - d_p.$$

F étant le vecteur $F_p \times \begin{vmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}$

On obtient donc une relation du même type que celle obtenue au paragraphe précédent. Les démonstrations concernant la propriété (P') ne dépendent évidemment pas de l'origine de la relation vectorielle $\Delta H_K = E_K \Delta V_K + F_K$; elles sont donc toujours valables dans ce cas, et nous pourrons intégrer suivant le même procédé en tenant compte éventuellement des pertes de charges par frottement ou dues à l'aboutement de 2 conduites.

c) V_p est vitesse principale.

On dispose toujours des 3 mêmes relations

$$\Delta H_i - \Delta H_p = c_i \Delta V_i + d_i \Delta V_p \text{ pour } i = 1, \ldots, p-1$$

$$\Delta H_p = E_p \Delta V_p + F_p$$

$$\sum_{i=1}^{p} \epsilon_i S_i \Delta V_i = 0 \text{ donc } - \epsilon_p S_p \Delta V_p = \sum_{i=1}^{p-1} \epsilon_i S_i \Delta V_i$$

$$\text{D'où : } \Delta H_i = \frac{-(E_p + d_i)}{\varepsilon_p S_p} \sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon_k S_k \Delta V_k + c_i \Delta V_i + F_p$$

Ensemble de relations que l'on peut écrire sous la forme

$$\Delta H = E\Delta V + F \text{ avec } F = F_p \begin{vmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$E_i^j = \frac{-(E_p + d_i)}{\varepsilon_p S_p} \varepsilon_j S_j \text{ pour } j \neq i$$

$$E_i^i = \frac{-(E_p + d_i)}{\varepsilon_p S_p} \varepsilon_i S_i + c_i$$

Ici aussi les démonstrations concernant la propriété (P') restent valables.
Ces 3 cas étant étudiés il reste à montrer comment connaissant les ΔV_i, ΔH_i pour $i = 1, \ldots p-1$ on calcule ΔV_p et ΔH_p. Le calcul est le même dans les 3 cas puisqu'on peut écrire

$$\Delta V_p = -\frac{1}{\varepsilon_p S_p} \sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_i S_i \Delta V_i \text{ et } \Delta H_p = E_p \Delta V_p + F_p.$$

N.B. Dans les 3 cas nous avons obtenu des relations liant les ΔV_K^i et ΔH_K^i au $K^{ième}$ intervalle de chaque branche ; nous n'avons pas supposé que les longueurs des intervalles des différentes branches étaient égales par contre, et c'est une contrainte qui fera écarter cet algorithme lorsqu'on le pourra, c'est-à-dire pour les structures en arbre, nous allons voir au paragraphe suivant qu'il est nécessaire que toutes les branches issues du répartiteur comportent le même nombre d'intervalles.

2. UN ALGORITHME A UTILISER AVEC CELUI DU REPARTITEUR.

Nous n'avons pas précisé au paragraphe précédent comment initialiser le calcul des ΔV_N^i et ΔH_N^i. En effet au dernier intervalle des branches issues du répartiteur on dispose de (p-1) relations linéaires entre 2p-2 inconnues il faut donc trouver (p-1) autres relations linéaires. Ces relations peuvent bien sûr être fournies par des conditions aux limites si nos (p-1) branches aboutissent à des points

pendants du graphe ; nous ne nous attarderons pas sur ce cas qui correspond en fait à une structure en arbre et qui, nous l'avons vu peut se traiter plus simplement en utilisant l'algorithme du collecteur. Nous allons donc examiner pour le type de structure défini au paragraphe V-1 la façon d'initialiser le calcul des ΔH_K^i et ΔV_K^i.

Considérons donc les (p-1) branches (ou arêtes) issues d'un sommet A et se rejoignant au sommet B. Nous supposons ces (p-1) branches découpées en un même nombre N d'intervalles. A chaque intervalle on a 2 relations : $\Delta H_K = E_K \Delta V_K + F_K$ et $\Delta V_K = A\Delta V_{K+1} + B\Delta H_{K+1} + C_K^n$.

Où A et B sont des matrices diagonales et C_K^n un vecteur dont la $i^{ième}$ composante ne dépend que des caractéristiques et de l'état à l'instant $n\Delta t$ de la branche i.

Ecrivons les relations dont on dispose à la jonction aval de ces p-1 branches et désignons par l'indice p+1 les valeurs des différentes grandeurs caractéristiques de cette branche.

$\Delta H = E\Delta V + F$ (relation vectorielle dans $\mathbb{R}^{p-1}$)

$$\sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_i S_i \Delta V_i + \varepsilon_{p+1} \Delta V_{p+1} = 0$$

On peut toujours distinguer 3 cas.

a) <u>Pas de vitesse principale</u>.

(Pertes de charges négligées à l'embranchement)

Donc $\Delta H_i = \Delta H_j$ pour tout couple (i, j).

Appelons $S = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 S_1 & & \\ \vdots & & \\ & & \varepsilon_{p-1} S_{p-1} \end{vmatrix}$ comme $- \varepsilon_{p+1} S_{p+1} \Delta V_{p+1} = \sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_i S_i \Delta V_i$

On peut écrire $- \varepsilon_{p+1} S_{p+1} \Delta V_{p+1} = S^T \Delta V$

Posons $\alpha = (E^T)^{-1} S$

$E^T\alpha = S$; $\alpha^T E = S^T$

On peut donc écrire $\alpha^T \Delta H = \alpha^T E \Delta V + \alpha^T F$

$= S^T \Delta V + \alpha^T F$

$= - \varepsilon_{p+1} S_{p+1} \Delta V_{p+1} + \alpha^T F$

Or $\alpha^T \Delta H = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \Delta H_i = \Delta H_{p+1} \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i$ puisque $\Delta H_i = \Delta H_{p+1}$

Donc on a : $\Delta H_{p+1} = E_{p+1} \Delta V_{p+1} + F_{p+1}$ avec

$$E_{p+1} = \frac{- \varepsilon_{p+1} S_{p+1}}{\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i} \qquad F_{p+1} = \frac{\alpha^T F}{\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i}$$

b) Il existe une vitesse principale V_j $j \neq p+1$

On peut alors écrire pour tout i : $\Delta H_i - \Delta H_j = c_i \Delta V_i + d_i \Delta V_j$ (1)

avec $c_j = d_j = 0$.

En particulier $\Delta H_{p+1} = \Delta H_j + c_{p+1} \Delta V_{p+1} + d_{p+1} \Delta V_j$

Remplaçons ΔH_j par sa valeur tirée de (1) il vient

$\Delta H_{p+1} = \Delta H_i + c_{p+1} \Delta V_{p+1} + d_{p+1} \Delta V_j - c_i \Delta V_i - d_i \Delta V_j$

Soit $\Delta H_{p+1} = \Delta H_i + c_{p+1} \Delta V_{p+1} + (d_{p+1} - d_i) \Delta V_j - c_i \Delta V_i$

Posons $U = \begin{vmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}$ $U \in \mathbb{R}^{p-1}$

Il vient $\Delta H_{p+1} U = \Delta H + c_{p+1} \Delta V_{p+1} U - C \Delta V$

C matrice $(p-1) \times (p-1)$ avec $C_i^i = c_i$ $i \neq j$

$C_j^j = - d_{p+1}$ $C_i^j = - d_{p+1} + d_i$

$C_i^k = 0$ $k \neq j$.

Or $\Delta H = E\Delta V + F$ par hypothèse.

$$\Delta H_{p+1}U = (E - C)\Delta V + c_{p+1}\Delta V_{p+1}U + F \quad (2)$$

Posons $\alpha = ((E - C)^T)^{-1} S$ (où S a la même définition qu'au paragraphe précédent).

$(E - C)^T\alpha = S \qquad \alpha^T(E - C) = S^T$

Multiplions à gauche chaque terme de (2) par α on obtient :

$$\Delta H_{p+1} \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i = S^T\Delta V + c_{p+1}\Delta V_{p+1} \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i F_i$$

Sachant que $S^T\Delta V = - \varepsilon_{p+1} S_{p+1} \Delta V_{p+1}$ et posant $\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i = Q$

$$\text{on peut écrire } \Delta H_{p+1} = \frac{(c_{p+1}Q - \varepsilon_{p+1}S_{p+1})\Delta V_{p+1}}{Q} + \frac{\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i F_i}{Q}$$

C'est-à-dire $\Delta H_{p+1} = E_{p+1}\Delta V_{p+1} + F_{p+1}$

$$\text{avec } E_{p+1} = \frac{(c_{p+1}Q - \varepsilon_{p+1}S_{p+1})}{Q} \qquad F_{p+1} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\alpha_i F_i}{Q}$$

On peut donc sur la (p+1) ième branche utiliser la propriété (P) pour résoudre le problème.

c) V_{p+1} est vitesse principale.

La relation (1) du paragraphe précédent devient :

$\Delta H_i - \Delta H_{p+1} = c_i\Delta V_i + d_i\Delta V_{p+1}$ pour $i = 1, \ldots p-1$

D'où l'on tire

$$\Delta H_{p+1}U = \Delta H - C\Delta V - \Delta V_{p+1}D$$

$$\text{ou } C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & \cdot & \ldots & c_{p-1} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} d_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{p-1} \end{vmatrix}$$

Donc $\Delta H_{p+1}{}^{U} = (E - C)\Delta V - \Delta V_{p+1}{}^{D} + F$

En posant $\alpha = ((E - c)^{T})^{-1} S$ on obtient

$\Delta H_{p+1} = E_{p+1}\Delta V_{p+1} + F_{p+1}$ avec

$$E_{p+1} = \frac{(-\xi_{p+1} S_{p+1} - \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i d_i)}{Q} \; ; \; F_{p+1} = \frac{\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i F_i}{Q}$$

où $Q = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i$

Nous allons maintenant donner les formules permettant dans les 3 cas de calculer les ΔH_i, ΔV_i à partir de ΔH_{p+1}, ΔV_{p+1} donc d'initialiser le calcul des vecteurs ΔH_K, ΔV_K introduits dans l'algorithme du répartiteur.

1er cas : $\Delta H_i = \Delta H_{p+1}$ donc $\Delta H = \Delta H_{p+1}{}^{U}$

$\Delta V = E^{-1}(\Delta H - F)$

2ème cas : On a vu qu'on pouvait écrire dans cette hypothèse

$$\Delta H_i = \Delta H_{p+1} - c_{p+1}\Delta V_{p+1} + c_i \Delta V_i + (d_i - d_{p+1})\Delta V_j$$

Posons $\Delta H_{p+1} - c_{p+1}\Delta V_{p+1} = L$

On obtient $\Delta H = LU + M\Delta V$

M matrice $(p-1) \times (p-1)$ avec $M_i^i = c_i \quad i \neq j \quad M_j^j = - d_{p+1}$

$M_i^j = d_i - d_{p+1}$, $M_i^k = 0 \quad i, k \neq j$.

Or $\Delta H = E\Delta V + F$ Donc $\Delta V = (M - E)^{-1} (F - LU)$.

3ème cas : On trouve dans l'étude de cette possibilité une relation du même type qui s'écrit avec les conventions du paragraphe correspondant :

$\Delta H = C\Delta V + \Delta H_{p+1}{}^{U} - \Delta V_{p+1}{}^{D}$

ce qui fournit les (p-1) relations linéaires manquantes pour la résolution. On obtient $\Delta V = (E - C)^{-1} (\Delta H_{p+1}{}^{U} - \Delta V_{p+1}{}^{D} - F)$

$\Delta H = E\Delta V + F$

Il n'est pas concevable d'examiner tous les cas possibles dont le graphe associé est planaire. Les divers algorithmes exposés ci-dessus doivent permettre de traiter la plupart des cas réels, en outre certains cas particuliers pourront probablement être résolus à partir d'algorithmes que l'on pourra bâtir en s'inspirant de ceux que nous avons établis.

3. UN EXEMPLE PARTICULIER D'UTILISATION : LE CALCUL DES SURTENSIONS DANS LES LIGNES ELECTRIQUES.

Nous avons essayé d'appliquer notre méthode à l'étude de la mise sous tension d'une ligne électrique triphasée. L'intérêt était double : d'abord cela nous a permis de montrer que, comme nous l'avons annoncé au chapître I, notre méthode peut s'appliquer à l'étude des phénomènes physiques analogues à ceux du coup de bélier. Ensuite, le graphe associé à une ligne triphasée étant du type défini au paragraphe V-1, cet exemple nous a permis de vérifier l'hypothèse émise implicitement dans le paragraphe V-1 à savoir que l'on pouvait adopter le schéma aux différences finies proposé au chapître II pour des grandeurs vectorielles.

a) Equations aux dérivées partielles régissant la propagation des ondes dans une ligne électrique.

Ces équations ainsi que les conditions aux limites énoncées plus loin nous ont été fournies sous la forme utilisée ici par J.C. SABONNADIERE (14).

Appelons $I(x, t) = \begin{matrix} I_1(x, t) \\ I_2^1(x, t) \\ I_3^2(x, t) \end{matrix}$ l'intensité au point x et à l'instant t dans les branches 1, 2, 3 ; $V(x, t) = \begin{matrix} V_1(x, t) \\ V_2^1(x, t) \\ V_3^2(x, t) \end{matrix}$ le tension dans les mêmes conditions ; I_0 la matrice unité d'ordre 3 ; U le vecteur $\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$.

r, r_1, ℓ, ℓ_1, c, c_1 étant des constantes on peut alors écrire les 2 équations.

$$\text{I} \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial x}(x, t) = (rI_0 + r_1 UU^T) I(x, t) + (\ell I_0 + \ell_1 UU^T) \dfrac{\partial I}{\partial t}(x, t) \\ -\dfrac{\partial I}{\partial x}(x, t) = ((3c + c_1) I_0 - cUU^T) \dfrac{\partial V}{\partial t}(x, t) \end{cases}$$

b) Schéma aux différences finies proposé.

Choisissons 2 pas Δx et Δt, posons $\theta \in [0, 1]$ un paramètre dont le choix sera fixé par les conditions de stabilité.

$V_k^n = V(k\Delta x, n\Delta t)$ $I_k^n = I(k\Delta x, n\Delta t)$. $d = 3c + c_1$

$\Delta V_k = V_k^{n+1} - V_k^n$ $\qquad \Delta I_k = I_k^{n+1} - I_k^n$

Le schéma aux différences proposé pour approcher le système (I) est :

$$\text{II} \quad \begin{cases} \dfrac{-\theta(V_{k+1}^{n+1} - V_k^{n+1}) - (1 - \theta)(V_{k+1}^n - V_k^n)}{\Delta x} = (rI_0 + r_1 UU^T)(\theta I_k^{n+1} + (1 - \theta) I_K^n) \\ + (\ell I_0 + \ell_1 UU^T)\left(\dfrac{I_{k+1}^{n+1} - I_{k+1}^n + I_k^{n+1} - I_k^n}{2\Delta t}\right) \\ \dfrac{-\theta(I_{k+1}^{n+1} - I_k^{n+1}) - (1 - \theta)(I_{k+1}^n - I_k^n)}{\Delta x} = (dI_0 - cUU^T) \dfrac{(V_{k+1}^{n+1} - V_{k+1}^n + V_k^{n+1} - V_k^n)}{2\Delta t} \end{cases}$$

Remplaçons $(V_k^{n+1} - V_k^n)$, $(I_k^{n+1} - I_k^n)$, $(V_{k+1}^{n+1} - V_{k+1}^n)$, $(I_{k+1}^{n+1} - I_k^n)$

respectivement par ΔV_k, ΔI_k, ΔV_{k+1}, ΔI_{k+1}. Multiplions chaque équation par $2\Delta t$ il vient en posant : $\dfrac{\Delta t}{\Delta x} = \rho$, $R = rI_0 + r_1 UU^T$

$L = \ell I_0 + \ell_1 UU^T$, $G = dI_0 - cUU^T$

$$\text{III}\begin{cases} 2\rho\theta\Delta V_k - 2\rho\theta V_{k+1} - (2\Delta t\theta R + L)\Delta I_k - L\Delta I_{k+1} = 2\Delta t R I_k^n + 2\rho(V_{k+1}^n - V_k^n) \\ - G\Delta V_k - G\Delta V_{k+1} + 2\rho\theta\Delta I_k - 2\rho\theta\Delta I_{k+1} = 2\rho(I_{k+1}^n - I_k^n) \end{cases}$$

Eliminons ΔV_k entre ces 2 équations on trouve :

$$(4\rho^2\theta^2 I_0 - 2\Delta t RG - LG)\Delta I_k = (4\rho^2\theta^2 I_0 + LG)\Delta I_{k+1} + 4\rho\theta G\Delta V_{k+1}$$

$$+ 2\Delta t RG I_k^n + 2\rho G(V_{k+1}^n - V_k^n) + 4\rho^2\theta(I_{k+1}^n - I_k^n)$$

Posons $M = 4\rho^2\theta^2 I_0 - 2\Delta t RG - LG$

On peut alors écrire $\Delta I_k = A\Delta I_{k+1} + B\Delta V_{k+1} + c_k^n$ (IV-1)

avec $A = M^{-1}(4\rho^2\theta^2 I_0 + LG)$

$B = 4\rho\theta M^{-1} G$

$c_k^n = M^{-1}(2\Delta t RG I_k^n + 2\rho G(V_{k+1}^n - V_k^n) + 4\rho^2\theta(I_{k+1}^n - I_k^n))$

Si on élimine ΔI_k entre les 2 équations du système (III) on obtient :

$\Delta V_k = B'\Delta I_{k+1} + A'\Delta V_{k+1} + D_k^n$ (IV-2)

avec en posant $M'(4\rho^2\theta^2 I_0 - 2\Delta t\theta RG - LG)$

$A' = M'^{-1}(4\rho^2\theta^2 I_0 + 2\Delta t\theta RG + LG)$

$B' = M'^{-1}(4\rho\theta L + 4\rho\theta^2\Delta t R)$

$D_k^n = M'^{-1}(4\rho\theta\Delta t R I_k^n + 4\rho^2\theta(V_{k+1}^n - V_k^n) + (4\rho\theta\Delta t + 2\rho L)(I_{k+1}^n - I_k^n))$

c) Procédé de résolution.

Propriété : Si pour le point $k\Delta x$ il existe une matrice d'ordre $3E_k$ et un vecteur F_k tels que $\Delta I_k = E_k\Delta V_k + F_k$ alors pour le point $(k+1)\Delta x$ il existe E_{k+1} et F_{k+1} tels que $\Delta I_{k+1} = E_{k+1}\Delta V_{k+1} + F_{k+1}$.

Démonstration : Hypothèse : $\Delta I_k = E_k \Delta V_k + F_k$

Remplaçons ΔI_k et ΔV_k par leurs expressions dans (IV-1) et (IV-2) il vient

$$A\Delta I_{k+1} + B\omega V_{k+1} + c_k^n = E_k(A'\Delta V_{k+1} + B'\Delta I_{k+1} + D_k^n) + F_k$$

donc $\Delta I_{k+1} = E_{k+1}\Delta V_{k+1} + F_{k+1}$ avec

$$E_{k+1} = (A - E_k B')^{-1} (E_k A' - B)$$

$$F_{k+1} = (A - E_k B')^{-1} (E_k D_k^n + F_k - c_k^n)$$

Le procédé de résolution est alors calqué sur celui exposé au chapître II. Une des conditions aux limites fixant E_0 et F_0 on calcule les E_k, F_k, D_k^n puis la 2ème condition aux limites permettant le calcul de ΔV_N, ΔI_N (en utilisant la relation $\Delta I_N = E_N \Delta V_N + F_N$ si $L = N\Delta x$ est la longueur de la ligne) ; On calcule les ΔV_k et ωI_k en utilisant alternativement les formules $\Delta V_k = A'\Delta V_{k+1} + B'\Delta I_{k+1} + D_k^n$

$$\Delta I_k = E_k \Delta V_k + F_k.$$

Remarque sur les matrices A, B, A', B', E_k.

Etant données 2 matrices d'ordre n $(\lambda I_0 + \mu UU^T)$ et $(\lambda' I_0 + \mu' UU^T)$ la somme et le produit de ces 2 matrices est de même type. La somme est $(\lambda + \lambda')I_0 + (\mu + \mu')UU^T$ le produit est $\lambda\lambda' I_0 + (\lambda\mu' + \lambda'\mu + n\mu\mu')UU^T$.
L'inverse si elle existe de $(\lambda I_0 + \mu UU^T)$ est $\frac{1}{\lambda} I_0 \frac{-\mu}{\lambda(\lambda + n\mu)} UU^T$.

Or R, L, G sont des matrices de ce type donc A, A', B, B' en sont aussi ; donc si E_0 est de ce type (et nous verrons que c'est le plus souvent possible) les E_k sont de ce type. Cette remarque facilite grandement les calculs en évitant notamment les inversions et les produits de matrices et en permettant de ne conserver en mémoire pour les matrices E_k que les 2 nombres caractéristiques de ces matrices (λ_{E_k} et μ_{E_k}), d'où une économie de place et de temps appréciable. Nous utiliserons ultérieurement d'autres propriétés de ces matrices.

d) Conditions initiales et aux limites.

Conditions initiales : On suppose donnés V(x, 0), et I(x, 0).

Conditions aux limites :

Une des conditions aux limites pour les cas que l'on peut étudier par le procédé que nous proposons est I(0, t) = 0.

On peut alors écrire $\Delta I_0 = 0$ ce qui revient à dire que l'on peut poser $E_0 = 0$ $F_0 = 0$. La matrice nulle étant bien du type $(\lambda I_0 + \mu UU^T)$ nous pourrons donc utiliser les remarques ci-dessus.

La 2ème condition aux limites peut être de type très divers. Elle s'exprime en général par une relation différentielle entre V(L, t) et I(L, t) (ou L est la longueur de la ligne).

Relation qui jointe à celle obtenue par le calcul des E_K et F_K permet d'obtenir un système de 6 équations à 6 inconnues dont la solution est $(\Delta V_N, \Delta I_N)$ ce qui permet d'initialiser le calcul des ΔV_K, ΔH_K.

4. CONDITIONS DE STABILITE DU SCHEMA PROPOSE.

Nous avons rigoureusement suivi pour cette étude le raisonnement de J.A. CUNGE(13) auquel nous renvoyons pour la justification des théorèmes employés. Au préalable rappelons certaines propriétés des matrices de type $(\lambda I_0 + \mu UU^T)$ d'ordre 3.

Leurs valeurs propres sont λ, (valeur propre double) et $\lambda + 3\mu$.

On peut aussi constater que les valeurs propres de la somme de 2 matrices de ce type sont la somme des valeurs propres.

Les valeurs propres de l'inverse sont les inverses des valeurs propres et les valeurs propres d'un produit sont les produits des valeurs propres.

Ceci fait reprenons les notations employées lors de la définition de la stabilité au paragraphe II-3. On peut alors utiliser 2 théorèmes :

Théorème 1 : Si le système aux différences finies $L_h w_h = f(h)$, $\ell_h w_h = \varphi(h)$ est réduit à la forme $w^{n+1} = R_h w^n + \varepsilon\zeta^n$ avec $\|\zeta^n\| \leq K_1\|f(h)\|_F + K_2\|\varphi(h)\|_\varphi$ (1)
$\|w^0\| \leq K_3\|f(h)\|_F + K_4\|\varphi(h)\|_\varphi$ une condition suffisante de stabilité est $\|R_h^n\| \leq K$.

Théorème 2 : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\|R_h^n\| \leq K$ est que le spectre de la famille (R_h) soit contenu dans le cercle unité.

Nous allons donc opérer sur notre schéma une réduction conforme à celle indiquée par le théorème 1 et montrer que sous certaines conditions le spectre de l'opérateur R_h ainsi défini est contenu dans le cercle unité.
Notons tout d'abord que dans la condition de réduction (1) K_s ne doit pas dépendre de f(h) en conséquence il est possible d'étudier la stabilité en posant R = 0 dans les équations physiques. En effet nous aurons alors $\|f(h)\|_F = 0$ donc si $\|\zeta^k\| \leq K_2\|\varphi(h)\|_\varphi$ à fortiori on aura pour $R \neq 0$ $\|\zeta^n\| \leq K_1\|f(h)\|_F + K_2\|\varphi(h)\|_\varphi$ pour tout $K_1 \geq 0$.
Le schéma aux différences finies devient alors avec les conventions du paragraphe précédent

$$(I)\begin{cases} -2\rho\theta(V_{K+1}^{n+1} - V_K^{n+1}) - L(I_{K+1}^{n+1} + I_K^{n+1}) = 2\rho(1-\theta)(V_{K+1}^n - V_K^n) - L(I_{K+1}^n + I_K^n) \\ -2\rho\theta(I_{K+1}^{n+1} - I_K^{n+1}) - G(V_{K+1}^{n+1} + V_K^{n+1}) = 2\rho(1-\theta)(I_{K+1}^n - I_K^n) - G(V_{K+1}^n + V_K^n) \end{cases}$$

Posons $z_K = R_h W_K^n = R_h \begin{bmatrix} V_K^n \\ I_K^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_K \\ i_K \end{bmatrix}$

$$y_K^n = \frac{W_K^{n+1} - R_h W_K^n}{\Delta t} = \begin{bmatrix} f_K \\ g_K \end{bmatrix}$$

$$W_K^{n+1} = \begin{Bmatrix} v_K + \Delta t f_K \\ i_K + \Delta t g_K \end{Bmatrix}$$

Remplaçons dans (I) W_K^{n+1} par sa valeur il vient

$$(II)\begin{cases} -2\rho\theta(v_{K+1} - v_K) - L(i_{K+1} + i_K) + \Delta t\,[-2\rho\theta(f_{K+1} - f_K) - L(g_{K+1} + g_K)] = \\ \quad 2\rho(1-\theta)\,(V_{K+1}^n - V_K^n) - L(I_{K+1}^n + I_K^n) \\ -2\rho\theta(i_{K+1} - i_K) - G(v_{K+1} + v_K) + \Delta t\,[-2\rho\theta(g_{K+1} - g_K) - G(f_{K+1} + f_K)] = \\ \quad 2\rho(1-\theta)\,(I_{K+1}^n - I_K^n) - G(V_{K+1}^n + V_K^n) \end{cases}$$

Ce qui permet de définir R_h par :

$$(III)\begin{cases} -2\rho\theta(v_{K+1} - v_K) - L(i_{K+1} + i_K) = 2\rho(1-\theta)\,(V_{K+1}^n - V_K^n) - L(I_{K+1}^n + I_K^n) \\ -2\rho\theta(i_{K+1} - i_K) - G(v_{K+1} + v_K) = 2\rho(1-\theta)\,(I_{K+1}^n - I_K^n) - G(V_{K+1}^n + V_K^n) \end{cases}$$

et par conséquent ζ_K par

$$(IV)\begin{cases} -2\rho\theta(f_{K+1} - f_K) - L(g_{K+1} + g_K) = 0 \\ -2\rho\theta(g_{K+1} - g_K) - G(f_{K+1} + f_K) = 0 \end{cases}$$

Pour K = 0 nous avons $\zeta_0 = \dfrac{W_0^{n+1} - z_0}{\Delta t}$ or $W_0^{n+1} = 0, z_0 = 0$

donc $\zeta_0 = 0$.

Pour le 2ème point limite K = N nous trouvons $\zeta_N = \left| \begin{matrix} \dfrac{V_N^{n+1} - V_N^n}{\Delta t} \\ \dfrac{I_N^{n+1} - I_N^n}{\Delta t} \end{matrix} \right|$

Etude du spectre de R_h.

Représentons la solution W_K^n par une série de Fourier

$$W_K^n = \sum_{-\infty(m)}^{+\infty} (\Psi(m))^n\, e^{jKm\Delta x}$$

avec $j = \sqrt{-1}$ $\Psi(m) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ coefficients de m et t

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \qquad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Soit $a = m\Delta x$

Dès lors on peut poser

$$v_{K+1} = p^{n+1} e^{j(K+1)a} \qquad i_{K+1} = q^{n+1} e^{j(K+1)a}$$
$$v_K = p^{n+1} e^{jKa} \qquad i_K = q^{n+1} e^{jKa}$$
$$V^n_{K+1} = p^n e^{j(K+1)a} \qquad I^n_{K+1} = q^n e^{j(K+1)a}$$
$$V^n_K = p^n e^{jKa} \qquad I^n_K = q^n e^{jKa}$$

Le système (III) devient alors

$$(V)\begin{cases} -2\rho\theta p^{n+1}(e^{j(K+1)a} - e^{jKa}) - Lq^{n+1}(e^{j(K+1)a} + e^{jKa}) = \\ 2\rho(1-\theta)p^n(e^{j(K+1)a} - e^{jKa}) - Lq^n(e^{j(K+1)a} + e^{jKa}) \\ -2\rho\theta q^{n+1}(e^{j(K+1)a} - e^{jKa}) - Gp^{n+1}(e^{j(K+1)a} + e^{jKa}) = \\ 2\rho(1-\theta)q^n(e^{j(K+1)a} - e^{jKa}) - Gp^n(e^{j(K+1)a} + e^{jKa}) \end{cases}$$

Posons $\ell = 2\rho\dfrac{(\ell^{ja} - 1)}{\ell^{ja} + 1}$; $L' = \dfrac{1}{2\rho} L$; $G' = \dfrac{1}{2\rho} G$ il vient

$$(V)\begin{cases} -\theta p^{n+1}\ell - Lq^{n+1} = (1-\theta)\ell p^n - Lq^n \\ -\theta q^{n+1}\ell - Gp^{n+1} = (1-\theta)\ell q^n - Gp^n \end{cases}$$

Donc on peut écrire avec toujours I_0 matrice unité d'ordre 3

$$\begin{pmatrix} -\theta\ell I_0, & -L' \\ -G', & -\theta\ell I_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^{n+1} \\ q^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\theta)\ell I_0, & -L' \\ -G', & (1-\theta)\ell I_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^n \\ q^n \end{pmatrix}$$

Posons $Z = (\theta^2 \ell^2 I_0 - L'G')^{-1}$

On peut écrire alors :

$$\begin{pmatrix} p^{n+1} \\ q^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \theta \ell Z, & ZL' \\ ZG', & - \theta \ell Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 - \theta)\ell I_0, & - L' \\ - G', & (1 - \theta)\ell I_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^n \\ q^n \end{pmatrix}$$

D'où en utilisant la commutativité des produits des matrices utilisées (en effet les matrices I_0, L, G, L', G' donc Z sont de type $\lambda I_0 + \mu UU^T$ donc commutables).

$$\begin{pmatrix} p^{n+1} \\ q^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \theta(1 - \theta)\ell^2 Z - ZL'G', & \ell ZL' \\ \ell ZG', & - \theta(1 - \theta)\ell^2 Z - ZL'G' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^n \\ q^n \end{pmatrix}$$

Soit $\begin{pmatrix} p^{n+1} \\ q^{n+1} \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} p^n \\ q^n \end{pmatrix}$ H n'étant autre que la matrice d'amplification utilisées pour étudier la stabilité numérique selon la méthode de RICHTMYER.

Déterminons les valeurs propres de H.

Pour cela remarquons tout d'abord que si $A = \lambda_a I_0 + \mu_a UU^T$

$B = \lambda_b I_0 + \mu_b UU^T$, $c = \lambda_c I_0 + \mu_c UU^T$ (A, B, c d'ordre 3)

les valeurs propres de la matrice d'ordre b $\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & A \end{pmatrix}$ sont les solutions de l'équation

$$\left[(\lambda_a - \delta)^2 - \lambda_b \lambda_c\right]^2 - \left[(\eta_a - \delta)^2 - \eta_b \eta_c\right] \quad \text{(VII)}$$

avec $\eta_{a,\,b,\,c} = \lambda_{a,\,b,\,c} + 3\mu_{a,\,b,\,c}$

C'est-à-dire $\delta = \lambda_a \pm \sqrt{\lambda_b \lambda_c}$ (racine double) et

$$\delta = \eta_a \pm \sqrt{\eta_b \eta_c}.$$

Soit ici en appliquant les diverses propriétés sur les produits et les inversions des matrices de type $\lambda I_0 + \mu UU^T$ et en rappelant que

$$L = \lambda_\ell I_0 + \mu_\ell UU^T \qquad G = \lambda_g I_0 + \mu_g UU^T$$

$$\lambda_a = (-\theta(1-\theta)\ell^2 - \frac{\lambda_\ell \lambda_g}{4\rho^2})/(\theta^2\ell^2 - \frac{\lambda_\ell\lambda_g}{4\rho^2})$$

où λ_ℓ et λ_g sont directement fonctions des paramètres du problème. Nous conservons ces symboles pour l'instant et nous les expliciterons une fois les conditions de stabilité obtenus.

$$\lambda_a = 1 + \frac{4\theta\ell^2\rho^2}{\lambda_g\lambda_\ell - 4\rho^2\theta^2}$$

$$\sqrt{\lambda_b\lambda_c} = \frac{\ell}{2\rho}\sqrt{\lambda_\ell\lambda_g} \,/\, (\theta^2\ell^2 - \frac{\lambda_\ell\lambda_g}{4\rho^2}) = \frac{2\rho\ell\sqrt{\lambda_\ell\lambda_g}}{4\rho^2\theta^2 - \lambda_\ell\lambda_g}$$

Posons $s = 2\rho \operatorname{tg} \frac{a}{2} = 2j\rho\ell \qquad \lambda = \lambda_\ell\lambda_g$

Il vient : $\delta = \left(1 - \frac{\theta s^2}{s^2\theta^2 + \lambda}\right) \pm \frac{js\sqrt{\lambda}}{s^2\theta^2 + \lambda}$

$$|\delta|^2 = (1 - \frac{s^2\theta}{\lambda + s^2\theta^2}) + \frac{s^2\lambda}{(s^2\theta^2 + \lambda)^2}$$

$$= 1 + (\frac{-2s^2\theta(\lambda + s^2\theta^2) + s^4\theta^2 + s^2\lambda)}{(s^2\theta^2 + \lambda)^2}$$

$$= 1 + (\frac{-2s^2\theta + s^2}{s^2\theta^2 + \lambda} = 1 + \frac{s^2(1-2\theta)}{s^2\theta^2 + \lambda}$$

donc $|\delta| \leq 1$ si et seulement si $1 - 2\theta \leq 0$.

Donc une condition suffisante de stabilité sera $\theta \geq 1/2$.

On obtiendrait évidemment pour la racine fonction des η_a, η_b, η_c de l'équation VII la même condition.

Il reste à montrer que R_h tel qu'il a été défini répond bien aux conditions d'applications du théorème (1). Comme déjà les calculs ci-dessus sont absolument calqués sur ceux menés par J.A. CUNGE (13 p.19 à 23) en remplaçant les termes scalaires par des matrices 3 x 3 il ne nous a pas paru utile de donner ici le détail de la vérification des conditions d'applications du théorème (1). Nous énoncerons simplement le résultat auquel ils mènent. Pour les systèmes à 2 fonctions on a vu (cf paragraphe II-3) que la condition de vérification était $4\rho^2\theta^2 - 1 > 0$; dans notre problème cette condition devient $4\rho^2\theta^2 I_0$ - GL positive (ou I_0 est toujours la matrice unité d'ordre 3).

Condition qui s'exprime en fonction des paramètres du problème sous la forme de la double inégalité : $4\rho^2\theta^2 - \lambda_g\lambda_\ell > 0$

$$4\rho^2\theta^2 - \eta_g\eta_\ell > 0$$

c'est-à-dire en remplaçant λ_g, λ_ℓ, η_g, η_ℓ par leurs valeurs

$$\rho > \text{Max} \quad \frac{(\sqrt{\ell(3c + c_1)}}{2\theta}, \quad \frac{\sqrt{(\ell + 3\ell_1)\ (3c + c_1 - 3c))}}{2\theta}$$

Soit

$$\rho > \text{Max} \left(\frac{\sqrt{\ell(3c + c_1)}}{2\theta}, \quad \frac{\sqrt{c_1(\ell + 3\ell_1)}}{2\theta} \right)$$

Ce qui donne la valeur minimum admissible pour ρ.

Cette valeur limite malheureusement la portée de notre méthode car si l'on désire un Δt très faible on est amené à prendre un Δx assez petit ce qui allonge considérablement le temps de calcul. On peut évidemment jouer sur la valeur de θ entre 0,5 et 1 pour vérifier les conditions de stabilité mais il faut se souvenir que l'erreur croit comme θ^2. Nous aboutissons donc exactement au même problème que celui exposé par J.C. SABONNADIERE dans (15).

5. PROCEDURES.

Nous avons écrit 3 procédures ALGOL permettant d'effectuer la partie des calculs qui est semblable pour tout problème d'évaluation de surtension. Pour utiliser la méthode proposée il est nécessaire d'introduire une procédure supplémentaire, dépendant du type de la 2ème conditon aux limites, pour initialiser le calcul des ΔV_K, ΔI_K à partir des résultats obtenus par les 3 procédures que nous allons décrire.

Ces procédures supposent déclarées un certain nombre de variables et de tableaux dont la liste est donnée en Annexe (ainsi d'ailleurs que le texte des procédures).

Procédure INITIAL

Cette procédure a pour but de calculer un certain nombre de valeurs invariantes par rapport au temps ; Elle permet, mise en dehors de la boucle "temps" un gain de temps appréciable.

Procédure DESCENTE(EI, EF, FF, N).

Cette procédure calcule à partir des valeurs E_1 et F_1 supposées mises dans les tableaux EI et FI, avec λ_{E_1} = EI[1], μ_{E_1} = EI[2] F_j = FI [J] , les différentes valeurs caractéristiques des matrices E_K et les vecteurs F_K, D_K^n mis en réserve dans des tableaux prévus à cet effet.

Après l'exécution de DESCENTE EF contient les valeurs caractéristiques de la matrice E_{N+1} (si $N\Delta x = L$ ou L est la longueur de la ligne étudiée), le tableau FF contient le vecteur F_{N+1}.

Procédure MONTEE(DV, DI, N).

Cette procédure calcule pour K = N, N-1, ..., 1 les vecteurs ΔV_K et ΔI_K successifs, les ajouter respectivement à V_K^n et I_K^n en supposant les tableaux DV et DI remplies par les valeurs de ΔV_{N+1} et ΔI_{N+1}.

N.B. MONTEE n'assure pas, pour des raisons que l'on verra au paragraphe suivant, la mise à jour de V_{N+1}^n et I_{N+1}^n.

6. RESULTATS.

Nous avons appliqué cette méthode au cas suivant.
Les constantes des équations aux dérivées partielles étaient

$R = 0.024/Km \quad L = 0.00105/Km \quad c = 1,0410^{-9}/Km$

$R_1 = 0.085/Km \quad L_1 = 0.000785/Km \quad c_1 = 8,510^{-9}/Km.$

La deuxième condition aux limites utilisée peut s'écrire

en posant $E_t = \begin{vmatrix} \cos wt \\ \cos(wt \\ \cos(wt + 2\pi/3) \end{vmatrix}$ $V_t = \begin{vmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \\ V_3(t) \end{vmatrix}$

$I_t = \begin{vmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \\ I_3(t) \end{vmatrix}$ I'_t variable auxiliaire $= \begin{vmatrix} I'_1(t) \\ I'_2(t) \\ I'_3(t) \end{vmatrix}$

$$(1) \quad \begin{cases} E_t - R_0 I'_t - L_0 \dfrac{dI'_t}{\partial t} \\ I_t + I'_t = c_0 \dfrac{dV_t}{\partial t} \end{cases}$$

Les conditions initiales étaient $V(x, 0) = I(i, 0) = I'(0) = 0.$

donc $\dfrac{dV(0)}{dt} = 0.$

Remplaçons I'_t par sa valeur on obtient

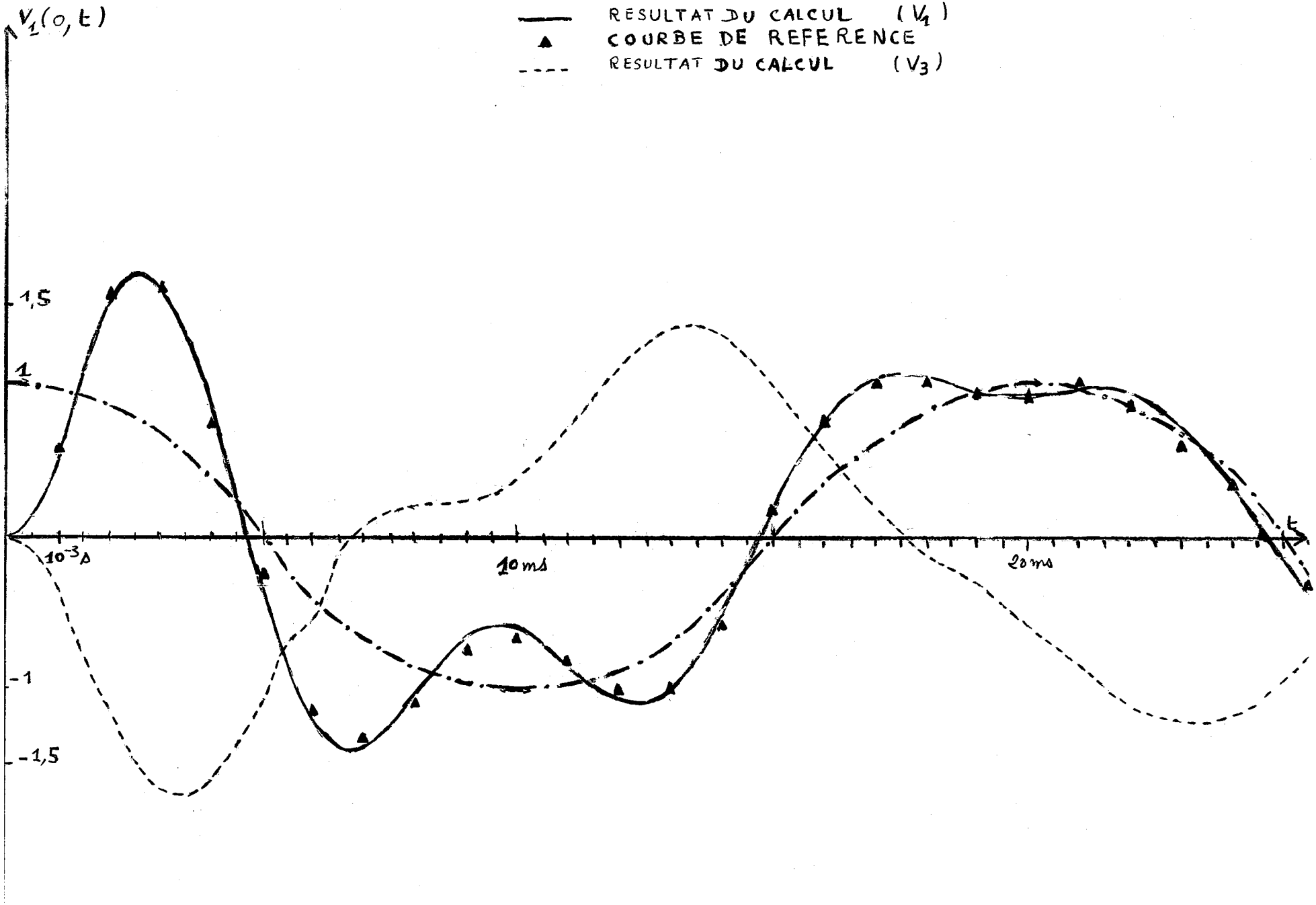
$$(2) \qquad E_t - R_0 c_0 \frac{dV_t}{dt} + R_0 I_t - L_0 c_0 \frac{d^2 V_t}{dt^2} + L_0 \frac{dI_t}{dt} = V_t$$

Les valeurs des constantes étant : $R_0 = 0,\ c_0 = 310^{-7},\ L_0 = 0,029.$

Cette équation différentielle remplacée par un schéma aux différences classique donne une relation linéaire entre ΔI_{N+1} et ΔV_{N+1}, relation qui jointe à celle obtenue après l'exécution de DESCENTE permet de calculer ΔI_{N+1} et ΔV_{N+1} donc d'utiliser MONTEE.

N.B. L'équation différentielle (2) nécessite pour être intégrée correctement un pas Δt très petit qui n'est pas justifié pour l'intégration des équations générales de propogation, nous avons donc intégré (2) avec un pas $dt = \Delta t/K$ ($K = 25$) en supposant les quantités E_{N+1} et F_{N+1} constantes entre $n\Delta t$ et $(n+1)\Delta t$. Nous donnons en annexe la courbe de tension obtenue et celle de référence tirée de (14).

Nous ne conclurons pas sur l'utilité de notre procédé pour le calcul des surtensions car nous n'avons abordé cette question qu'à titre d'exemple de l'étendue du domaine possible d'applications de notre méthode et nous n'avons pas suffisamment approfondi le problème physique général, nous bornant à quelques essais numériques particuliers.


$V_1(0,t)$
COS(100πt)
RESULTAT DU CALCUL (V_1)
COURBE DE REFERENCE
RESULTAT DU CALCUL (V_3)
1,5
1
-1
-1,5
10^{-3}s
10ms
20ms
t

```
%DEBUT% %REEL% PI,OMEGA,OMEG2,LZ,CZ,C1Z,TINF,TSUP,TACT,PI3,R,R1,L,L1,C,
C1,TETA,RO,DT,U,LAX,MUX,LAS,MUS,LAP,MUP,LAQ,MUQ,LAMM1,MUMM1,LAA,LAB,MUA,
MUB,LAAPR,MUAPR,LABPR,MUBPR,LAMPM1,MUMPM1 ::
 %REEL% OMET,DT2,DTRZ,DTLZ,RZ,CLN,SDV,LAG,MUG,LAGM1,PDT,PDT2,CMTAC,CMDT ::
%ENTIER% K1,J1,NBDX,K2 ::
%ENTIER% NBINAL,K,M ::
 %REEL% %TABLEAU% CL,CLIV.(1:3,1:3).,DV,DI,EIN,FINIT,EFT,FFT.(1:3).,F,D ,
I,VJ(1:3,1:1000).,LAE,MUE.(1:1000). ::
%REEL% %TABLEAU% GARV,COSI,H,GDI,GDV,DVP,DIP.(1:3). ::
%PROCEDURE% INITIAL ::
%DEBUT%
%REEL% RTL,LAG,LARG,MURG,ROTETA,DEUXDT,RO2T2,DEUXRO,LALG,MULG,LAM,MUM,
 TDT,LAMPR,MUMPR ::
LAG:=3.0*C+C1 :: LARG:=R*LAG :: MURG:=R1*C1-R*C ::
ROTETA:=4.0*RO*TETA :: DEUXDT:=2.0*DT ::
U:=RO*ROTETA :: RO2T2:=U*TETA ::
LAX:=ROTETA*DT*R :: MUX:=ROTETA*DT*R1 :: DEUXRO:=RO+RO ::
LAS:=DEUXRO*L :: MUS:=DEUXRO*L1 :: LALG:=L*LAG ::
MULG:=L1*C1-L*C :: LAP:=DEUXDT*LARG :: MUP:=DEUXDT*MURG ::
LAQ:=DEUXRO*LAG :: MUQ:=-DEUXRO*C ::
LAM:=RO2T2+LAG*(DEUXDT*R+L) :: MUM:=-MUP-MULG ::
LAMM1:=1.0/LAM :: MUMM1:=-MUM/(LAM*(LAM+3.0*MUM)) ::
LAMPR:=LAM+DEUXDT*LARG*(1.0-TETA) ::
MUMPR:=MUM+DEUXDT*MURG*(1.0-TETA) ::
LAMPM1:=1.0/LAMPR :: MUMPM1:=-MUMPR/(LAMPR*(LAMPR+3.0*MUMPR )) ::
RTL:=RO2T2+LALG ::
LAA:=LAMM1*RTL :: LAB:=ROTETA*LAMM1*LAG ::
MUA:=MUMM1*(RTL+3.0*MULG)+LAMM1*MULG ::
MUB:=ROTETA*(-C*LAMM1+MUMM1*C1) :: LAAPR:=LAMPM1*(RTL+LAP) ::
LAAPR:=LAAPR-(1.0-TETA)*DEUXDT*LARG ::
MUAPR:=(DEUXDT*(LARG+3.0*MURG)+RTL+3.0*MULG)*MUMPM1+LAMPM1*(DEUXDT*
  MURG+MULG) :: TDT:=TETA*DT :: MUAPR:=MUAPR-(1.0-TETA)*MURG*DEUXDT::
LABPR:=ROTETA*LAMPM1*(L+TDT*R) ::
MUBPR:=ROTETA*(LAMPM1*(L1+TDT*R1)+MUMPM1*(L+3.0*L1+TDT*(R+3.0*R1))) ::
%FIN% ::
```

```
%PROCEDURE% DESCENTE(EI,FI,EF,FF,N) ::% %ENTIER% N ::
%REEL% %TABLEAU% EI,EF,FI,FF ::
%DEBUT%
%REEL% %TABLEAU% C.(1:3). :: %ENTIER% J,K ::
%REEL% SX,SV,LAW1,MUW1,LAW1M1,MUW1M1,SP,SVK,SS,SQ,LAW2,MUW2,S1,S2,S3,
  DIV,DII,SXMU ::
LAE.(1).:=EI.(1). :: MUE.(1).:=EI.(2). ::
F.(1,1).:=FI.(1). :: F.(2,1).:=FI.(2). :: F.(3,1).:=FI.(3). ::
SV:=V.(1,1).+V.(2,1).+V.(3,1). :: SX:=I.(1,1).+I.(2,1).+I.(3,1). ::
%POUR% K:=1 %PAS% 1 %JUSQU A% N %FAIRE%
%DEBUT%
LAW1:=LAA-LAE.(K).*LABPR ::
MUW1:=MUA-LABPR*MUE.(K).-MUBPR*(LAE.(K).+3.0*MUE.(K).) ::
LAW1M1:=1.0/LAW1 :: MUW1M1:=-MUW1/(LAW1*(LAW1+3.0*MUW1)) ::
LAW2:=LAE.(K).*LAAPR-LAB ::
MUW2:=MUE.(K).*LAAPR+MUAPR*(LAE.(K).+3.0*MUE.(K).)-MUB ::
LAE.(K+1).:=LAW1M1*LAW2 ::
MUE.(K+1).:=LAW1M1*MUW2+MUW1M1*(MUW2+3.0*MUW2) ::
SP:=SX :: SVK:=SV :: SV:=V.(1,K+1).+V.(2,K+1).+V.(3,K+1). ::
SQ:=(SV-SVK)*MUQ :: SX:=I.(1,K+1).+I.(2,K+1).+I.(3,K+1). ::
SXMU:=SX*MUX :: SS:=(SX-SP)*MUS :: SP:=SP*MUP :: S1:=S2:=0.0 ::
%POUR% J:=1 %PAS% 1 %JUSQU A% 3 %FAIRE%
%DEBUT%
DIV:=V.(J,K+1).-V.(J,K). :: DII:=I.(J,K+1).-I.(J,K). ::
C.(J).:=LAP*I.(J,K).+SP+LAQ*DIV+SQ+L*DII :: S2:=S2+C.(J). ::
D.(J,K).:=LAX*I.(J,K+1).+SXMU+LAS*DII+SS+L*DIV :: S1:=S1+D.(J,K). ::
%FIN% ::
S1:=S1*MUMPM1:: S2:=S2*MUMM1 :: S3:=0.0 ::
%POUR% J:=1 %PAS% 1 %JUSQU A% 3 %FAIRE%
%DEBUT%
C.(J).:=C.(J).*LAMM1+S2 :: D.(J,K).:=D.(J,K).*LAMPM1+S1 ::
S3:=S3+D.(J,K). ::
%FIN% ::
S3:=S3*MUE.(K). :: S1:=0.0 ::
%POUR% J:=1 %PAS% 1 %JUSQU A% 3 %FAIRE%
%DEBUT%
F.(J,K+1).:=LAE.(K).*D.(J,K).+S3+F.(J,K).-C.(J). ::
S1:=S1+F.(J,K+1). ::
%FIN% ::
S2:=S1*MUW1M1 ::
%POUR% J:=1 %PAS% 1 %JUSQU A% 3 %FAIRE%
F.(J,K+1).:=LAW1M1*F.(J,K+1).+S2 ::
%FIN% DE BOUCLE K ::
EF.(1).:=LAE.(N+1). :: EF.(2).:=MUE.(N+1). ::
FF.(1).:=F.(1,N+1). :: FF.(2).:=F.(2,N+1). :: FF.(3).:=F.(3,N+1). ::
%FIN% DE DESCENTE ::
```

```
'PROCEDURE' MONTEE(DV, DI, N) FF
'ENTIER' N FF     'REEL' 'TABLEAU' DV, DI FF
'DEBUT'
'ENTIER' J,K FF 'REEL' SV, SI, SVMU FF
SVF=DV.(1).+DV.(2).+DV.(3). FF
'POUR' KF=N 'PAS' -1 'JUSQU A' 1 'FAIRE'
'DEBUT'
SIF=(DI.(1).+DI.(2).+DI.(3).)*MUBPR FF SVMUF =SV*MUAPR FF
'POUR' JF=1 'PAS' 1 'JUSQU A' 3 'FAIRE'
'DEBUT'
DV.(J).F=LAAPR*DV.(J).+SVMU+LABRP*DI.(J).+SI+D.(J.K). FF
V.(J,K).F=V.(J,K).+DV.(J). FF
'FIN' FF
SVF=DV.(1).+DV.(2).+DV.(3). FF SVMUF=SV*MUE.(K). FF
'POUR' JF=1 'PAS'1 'JUSQU A' 3 'FAIRE'
'DEBUT'
DI.(J).F=LAE.(K).*DV.(J).+SVMU+F.(J,K). FF  I.(J,K).F=I.(J,K).+DI.(J).FF
'FIN' FF
'FIN' DE BOUCLE K FF
'FIN' DE MONTEE FF
```

CONCLUSION

Les différentes études sur le coup de bélier que nous avons pu consulter [cf (5) et (16) notamment] avaient toutes ceci en commun : après un exposé théorique de la méthode générale suggérée l'auteur traitait quelques exemples et terminait sans avoir épuisé la diversité de ceux-ci et en essayant de donner quelques conseils à ceux qui voudraient utiliser son procédé pour traiter un cas non étudié dans l'ouvrage. Aussi sommes-nous pleinement conscients d'une part de l'arbitraire qu'il y a à arrêter là cette étude et d'autre part que nombre de cas particuliers nécessiteront une petite étude complémentaire pour être étudiés par la méthode que nous proposons.
Nous pensons qu'elles ne devraient pas offrir de difficultés particulières, surtout si le choix de notre procédé de préférence à un autre a été fait en pleine connaissance de cause, c'est-à-dire en connaissant aussi bien l'une que l'autre les 2 méthodes. Il est en effet difficile de guider le choix des utilisateurs car celui-ci est déterminé par des facteurs aussi divers que le coût, le temps nécessaire à l'obtention des résultats, la précision sur telle ou telle grandeur, la diversité des résultats à connaître etc ...

Les caractéristiques de la méthode que nous avons présentée étant assez satisfaisantes dans ces divers domaines nous pensons néanmoins qu'elle pourra être utilisée avec profit dans une bonne partie de cas réels.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. ALLIEVI Théorie des coups de bélier (Dunod 1901).

2. SILBERT Cours de Mécanique des Fluides. Faculté des Sciences (GRENOBLE).

3. L. BERGERON Communication au Congrès de Mécanique Générale Liège (1931).

4. L. ESCANDE et J. PIQUEMAL Etude par Analogie Electrique des surpressions dans les conduites forcées.
Comptes rendus des Séances de l'Acad. des Sciences.
t. 242 (1956) p. 2421-2486.
t. 244 (1957) p. 692.
t. 246 (1958) p. 371-374
t. 247 (1958) p. 984-986.
t. 252 (1961) p. 1728-1730

5. L. BERGERON Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en Electricité. (Dunod 1949).

6. C. CARRY Coups de bélier - Note technique. NEYRPIC (1958).

7. L. THIRRIOT G. CANGUILHEM VIIIème Congrès d'Hydraulique. Pise (1963).

8. P.G. VALVIS M. ASCE Water Hammer Analysis including friction losses. WATER-POWER (Février, Mars 1967).

9. A.A. ABRANOV On the translation of boundary conditions for systems of linear ordinary differential equations. (a variant of the sweep method). URSS COMPUT. Math. and Math. Phys. n° 1 (1961).

10. I.M. GELFAND, O.V. LOKUTSLESKI — The double sweep method for solution of difference equations. Appendix II. Theory of difference shemes. Godunov and Ryabenki.

11. S.K. GODUNOV, V.S. RYABENKI — Theory of difference shemes. North Holland Publishing Company. Amsterdam (1964).

12. R. RICHTMYER — Difference methods for initial value problems Interscience Publishers. Nem-York (1957).

13. J.A. CUNGE — Etude d'un schéma de différences finies appliqué à l'intégration numérique d'un certain type d'équations hyperboliques d'écoulement. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Grenoble (Mai 1966).

14. J.C. SABONNADIERE — Applications des calculatrices numériques en Electrotechnique. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Grenoble. 5juin 1965).

15. J.C. SABONNADIERE — Etude à l'aide d'une calculatrice numérique des surtensions d'enclenchement des lignes longues triphasées. Revue Générale de l'Electricité. Tome 77. n° 3 (Mars 1968).

16 CH. JAEGER — Théorie Générale du coup de bélier (Dunod 1933).

VU

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU, et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE