



HAL
open science

Résolution numérique de problèmes en contrôle optimal à évolution linéaire et critère quadratique

André Durand

► **To cite this version:**

André Durand. Résolution numérique de problèmes en contrôle optimal à évolution linéaire et critère quadratique. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1968. Français. NNT: . tel-00280993

HAL Id: tel-00280993

<https://theses.hal.science/tel-00280993>

Submitted on 20 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

n° d'ordre

T H E S E S

présentées à la Faculté des Sciences
de l'Université de Grenoble

pour obtenir
le grade de Docteur-Ingénieur
"MATHEMATIQUES APPLIQUEES"

par

André DURAND
Ingénieur IMAG, Licencié ès Sciences

Première Thèse

RESOLUTION NUMERIQUE DE PROBLEMES DE CONTROLE OPTIMAL
A EVOLUTION LINEAIRE ET CRITERE QUADRATIQUE

Deuxième Thèse

Proposition donnée par la Faculté

Thèses soutenues le 25 janvier 1968, devant la Commission d'Examen :

Monsieur	J. KUNTZMANN	Président
Messieurs	J.R. BARRA	Examineur
	P.J. LAURENT	Examineur

FACULTE DES SCIENCES

LISTE DES PROFESSEURS

DOYENS HONORAIRES :

M. MORET

M. WEIL

DOYEN :

M. BONNIER E.

PROFESSEURS TITULAIRES :

MM. NEEL Louis	Chaire de Physique Expérimentale
HEILMANN René	Chaire de Chimie
KRAVTCHENKO Julien	Chaire de Mécanique Rationnelle
CHABAUTY Claude	Chaire de calcul différentiel et intégral
BENOIT Jean	Chaire de Radioélectricité
CHENE Marcel	Chaire de Chimie Papetière
WEIL Louis	Chaire de Thermodynamique
FELICI Noël	Chaire d'Electrostatique
KUNTZMANN Jean	Chaire de Mathématiques Appliquées
BARBIER Reynold	Chaire de Géologie Appliquée
SANTON Lucien	Chaire de Mécanique des Fluides
OZENDA Paul	Chaire de Botanique
FALLOT Maurice	Chaire de Physique Industrielle
KOSZUL Jean-Louis	Chaire de Mathématiques M.P.C.
GALVANI O.	Mathématiques
MOUSSA André	Chaire de Chimie Nucléaire
TRAYNARD Philippe	Chaire de Chimie Générale

SOUTIF Michel	Chaire de Physique Générale
CRAYA Antoine	Chaire d'Hydrodynamique
REULOS R.	Théorie des Champs
BESSON Jean	Chaire de Chimie
AYANT Yves	Physique Approfondie
GALLISSOT	Mathématiques
Melle LUTZ Elisabeth	Mathématiques
MM. BLAMBERT Maurice	Chaire de Mathématiques
BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
MICHEL Robert	Chaire de Minéralogie et Pétrographie
BONNIER Etienne	Chaire d'Electrochimie et d'Electrométallurgie
DESSAUX Georges	Chaire de Physiologie Animale
PILLET E.	Chaire de Physique Industrielle et Electrotechnique
VOCCOZ Jean	Chaire de Physique Nucléaire Théorique
DEBELMAS Jacques	Chaire de Géologie Générale
GERBER R.	Mathématiques
PAUTHENET R.	Electrotechnique
VAUQUOIS B.	Chaire de Calcul Electronique
BARJON R.	Physique Nucléaire
BARBIER Jean-Claude	Chaire de Physique
SILBER R.	Mécanique des Fluides
BUYLE-BODIN Maurice	Chaire d'Electronique
DREYFUS B.	Thermodynamique
KLEIN J.	Mathématiques
VAILLANT F.	Zoologie et Hydrobiologie
ARNOUD Paul	Chaire de Chimie M.P.C.
SENGEL P.	Chaire de Zoologie
BARNOUD F.	Chaire de Biosynthèse de la Cellulose
BRISSONNEAU P.	Physique
GAGNAIRE Didier	Chaire de Chimie Physique

Mme	KOFLER L.	Botanique
MM.	DEGRANGE Charles	Zoologie
	PELAY-PEROULA J.C.	Physique
	RASSAT A.	Chaire de Chimie Systématique

PROFESSEURS SANS CHAIRE :

MM.	GIDON P.	Géologie et Minéralogie
	GIRAUD P.	Géologie
	PERRET R.	Servomécanismes
Mme	BARBIER M.J.	Electrochimie
Mme	SOUTIF J.	Physique
MM.	COHEN J.	Electrotechnique
	DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
	GASTINEL N.	Mathématiques Appliquées
	ANGLES-d'AURIAC P.	Mécanique des Fluides
	DUCCROS P.	Minéralogie et Cristallographie
	GLENAT R.	Chimie
	LACAZE A.	Thermodynamique
	BARRA J.	Mathématiques Appliquées
	COUMES A.	Electronique
	PERRIAUX J.	Géologie et Minéralogie
	ROBERT A.	Chimie Papetière
	BIAREZ J.P.	Mécanique Physique
	BONNET G.	Electronique
	CAUQUIS G.	Chimie Générale
	BONNETAIN L.	Chimie Minérale
	DEPOMMIER P.	Etude Nucléaire et Génie Atomique
	HACQUES Gérard	Calcul Numérique
	POLOUJADOFF M.	Electrotechnique

MAITRES DE CONFERENCES :

MM. DODU J.	Mécanique des Fluides
LANCIA Roland	Physique Automatique
Mme KAHANE J.	Physique
MM. DEPORTES C.	Chimie
Mme BOUCHE L.	Mathématiques
MM. SARROT-RAYNAUD J.	Géologie Propédeutique
Mme BONNIER M.J.	Chimie
MM. KAHANE A.	Physique Générale
DOLIQUE J.M.	Electronique
BRIERE G.	Physique M.P.C.
DESPRE P.	Chimie S.P.C.N.
LAJZEROWICZ J.	Physique M.P.C.
VALENTIN P.	Physique M.P.C.
BERTRANDIAS J.P.	Mathématiques Appliquées T.M.P.
LAURENT P.	Mathématiques Appliquées T.M.P.
CAUBET J.P.	Mathématiques Pures
PAYAN J.J.	Mathématiques
Mme BERTRANDIAS F.	Mathématiques Pures M.P.C.
MM. LONGEQUEUE J.P.	Physique
NIVAT M.	Mathématiques Appliquées
SOHM J.C.	Electrochimie
ZADWORNY F.	Electronique
DURAND F.	Chimie Physique
CARLIER G.	Biologie Végétale
AUBERT G.	Physique M.P.C.
DELPUECH J.J.	Chimie Organique
PFISTER J.C.	Physique C.P.E.M.
CHIBON P.	Biologie Animale
IDELMAN S.	Physiologie Animale
BLOCH D.	Electrotechnique
BRUGEL L.	I.U.T.
SIBILLE R.	I.U.T.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur KUNTZMANN, Directeur de l'Institut de Mathématiques Appliquées de l'Université de Grenoble, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury,

à Monsieur le Professeur BARRA et à Monsieur LAURENT Maître de Conférences, qui m'ont donné l'idée de ces travaux et qui, par leurs conseils et encouragements, m'ont aidé à les mener à bien.

Je tiens à remercier les membres du laboratoire qui m'ont aidé à l'élaboration de ce travail, Mademoiselle BICAIS et le personnel du service tirage qui en ont assuré la réalisation matérielle.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE - I - FORMULATION DU PROBLEME ETUDIE Page

§1 - Le problème du contrôle optimal	I-1
§2 - Les équations du système	I-2
§3 - Les conditions aux limites	I-4
§4 - Deux formulations équivalentes du problème	I-6
§5 - Les différents cas envisagés	I-8

CHAPITRE - II - UTILISATION DU PRINCIPE DU MAXIMUM

A - LE PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN

§1 - Hypothèses et notations utilisées	II-1
§2 - Théorèmes préliminaires	II-3
§3 - Énoncé du principe du maximum	II-5
§4 - Aspect géométrique	II-9

B - RECHERCHE DES POLITIQUES OPTIMALES

§1 - Le système d'équations	II-15
§2 - Domaine atteignable	II-20
§3 - Extrémales et optimales - Existence et unicité.	II-25
§4 - L'Hamiltonien réduit	II-28
§5 - Propriétés de continuité et de dérivabilité en $\Psi(0)$	II-30

CHAPITRE - III - RESOLUTION DES PROBLEMES A UNE DIMENSION

A - PARTICULARITES ET EXPRESSIONS ANALYTIQUES

§1 - Réduction à un type standard	III-1
§2 - Application du principe du maximum	III-3
§3 - Structure des solutions	III-6

B - RESOLUTION NUMERIQUE SUR CALCULATEUR DIGITAL

§1 - Programmes de réduction.....	III-13
§2 - Méthode des courbes de commutation	III-15
§3 - Méthode de tir	III-22
§4 - Résultats et exemples numériques	III-37

C - TRAITEMENT SUR CALCULATEUR ANALOGIQUE

§1 - Mise en équation et câblage	III-41
§2 - Courbes et résultats	III-44

D - ANALYSE DES RESULTATS	III-48
---------------------------------	--------

CHAPITRE IV - LES SYSTEMES A COMMANDE SCALAIRE

§1 - Hypothèses et équations	IV-1
§2 - Domaine atteignable	IV-2
§3 - Méthode itérative	IV-5
§4 - Résultats et exemples numériques	IV-17

CHAPITRE V - LES SYSTEMES VECTORIELS

§1 - Hamiltonien et recherche des commutations	V-1
§2 - Domaine atteignable	V-2
§3 - Méthode itérative	V-2
§4 - Résultats et exemples numériques	V-10

INTRODUCTION

Les problèmes de contrôle optimal sont connus et étudiés depuis longtemps par les mathématiciens, on peut citer par exemple le célèbre problème de navigation de Zermelo ; l'outil utilisé pendant la première moitié de ce siècle était le calcul des variations classique qui ne convient malheureusement qu'à peu de cas pratiques. Les travaux de BELLMAN et la programmation dynamique, puis les travaux de PONTRYAGIN et de son équipe, dont le principe du Maximum prolonge le calcul des variations, proposèrent des outils plus puissants et donnèrent un nouvel essor aux méthodes d'optimisation dynamique, répondant ainsi aux besoins nouveaux des techniques de pointes, de la chimie à l'industrie nucléaire ou aérospatiale ([4], [29]).

Si on utilise le principe du Maximum, et c'est le cas ici, les difficultés rencontrées dans la résolution numérique sont celles que pose un système différentiel avec des conditions aux limites mi-initiales, mi-terminales, auxquelles s'ajoutent les difficultés apportées par la forme de la commande, déterminée à chaque pas de l'intégration, et par l'absence des propriétés habituelles de dérivabilité.

Nous retrouvons ces trois difficultés générales dans le problème particulier, défini au chapitre I, qui fait l'objet de cette étude :

Système à évolution linéaire : $\dot{X} = AX + BU + C$

et critère à minimiser $\int_0^T (X^t \alpha X + u^t \beta u) dt$

$T, X(0)$ et $X(T)$ étant fixés et la commande $U(t)$ appartenant à un polyèdre convexe.

En utilisant le principe du Maximum, nous recherchons au chapitre II les propriétés d'existence et d'unicité de la solution du problème ; nous établissons également des propriétés de dérivabilité qui justifient un algorithme basé sur une méthode de gradient dont on étudie ensuite les possibilités au point de vue numérique.

Sur le problème simple où commande et état sont des scalaires nous étudions au chapitre III des méthodes particulières adaptées à une résolution numérique sur calculateur digital et analogique, et permettant dans certains cas l'obtention directe de la solution ; ces méthodes précises et rapides, axées sur la recherche des instants où la nature de la commande change, ne peuvent malheureusement pas s'étendre au cas général.

Nous développons ensuite des algorithmes et des programmes, d'après l'étude du chapitre II ; une étude expérimentale a permis de faire un certain nombre de choix sur la conduite de l'itération, de préciser les difficultés numériques et enfin d'évaluer les possibilités et les limites du programme obtenu.

On constate que pour des systèmes totalement contrôlables et stables, le faible nombre d'itérations nécessaires permet d'obtenir une précision satisfaisante en un temps acceptable pour des systèmes jusqu'à l'ordre quatre, en revanche, dans les cas moins favorables, l'intervention de l'utilisateur et plusieurs essais seront nécessaires pour obtenir un résultat convenable.

C H A P I T R E - I

FORMULATION DU PROBLEME ETUDIE

On se propose de situer cette étude dans le cadre général des problèmes de contrôle optimal, de donner les définitions et notations de base, de fixer la formulation et enfin de distinguer les différents cas justifiant une étude particularisée en vue d'une résolution numérique.

I - LE PROBLEME DU CONTROLE OPTIMAL

On considère à l'instant t d'un intervalle de temps $[t_0, t_1]$ un système physique ou économique représenté par un vecteur de \mathbb{R}^n (vecteur d'état) soit $x(t)$, de composantes $x^1(t), \dots, x^n(t)$ (variables d'état).

- Le système est soumis à l'instant t à une commande $u(t)$ de \mathbb{R}^r (vecteur de commande ou contrôle) de composantes $u^1(t), \dots, u^r(t)$ qui agit sur l'évolution de l'état suivant certaines règles caractérisant le système.

- $u(t)$ et $x(t)$ sont astreints à vérifier certaines contraintes ; une fonction $u(t)$ telle que ces contraintes soient satisfaites est un contrôle admissible.

- Enfin on définit un critère, fonctionnelle de $u(t)$ et $x(t)$ à valeurs dans \mathbb{R} .

- Le problème du contrôle optimal est la recherche d'un contrôle admissible qui minimise le critère.

- La très grande diversité de ces problèmes nécessite une classification. STEINMETZ [30] en donne une, devenue classique, qui recouvre la majorité des problèmes pratiques, et qui est résumée par le tableau ci-après :

	Problème de temps A- minimal	Problème de contrôle B- terminal	Problème de contrôle à C- intégrale minimale
Temps	non fixé	fixé	peut être ou ne pas être fixé *
Etat terminal	Au moins une composante fixée	Au moins une composante fixée	Peut être ou ne pas être fixé *
Optimisation par rapport :	Au temps	A au moins un état terminal	A une intégrale

- Les exemples les plus classiques des divers types sont :

Type A : Navigation aérienne, destination fixée et durée de vol minimale

Type B : Satellisation, à altitude donnée, maximiser la vitesse horizontale

Type C : Navigation aérienne, minimiser la consommation, destination fixée et temps non limité.

Réaction chimique, maximiser le rendement pour un temps donné.

- Nous nous attacherons à résoudre certains problèmes du type C, qui peuvent se ramener d'ailleurs au type B par des transformations simples.

II - LES EQUATIONS DU SYSTEME

Notation

- Dans ce qui suit et pour alléger l'écriture des diverses relations nous omettrons généralement la variable t dans les fonctions et nous utiliserons une notation matricielle en considérant les vecteurs comme des matrices colonnes.

* Soit le temps, soit au moins un des états terminaux est fixé. L'intégration se fait respectivement sur l'intervalle de temps ou sur les valeurs initiales et finales de la variable d'état.

Evolution

- Le comportement du système est régi par son équation d'évolution, système différentiel linéaire :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu + C \quad (1)$$

A matrice (n,n) d'éléments a_{ij} donnés ($i, j = 1, \dots, n$)

B matrice (n,r) d'éléments b_{ij} donnés ($i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots, r$)

C matrice colonne à n éléments c_i donnés ($i = 1, \dots, n$)

- Pour $t \in]t_0, t_1[$, $x(t)$ est libre dans \mathbb{R}^n ; par contre pour tout $t \in [t_0, t_1]$ $u(t)$ est astreint à demeurer dans le domaine fermé U. U est ici un polyèdre convexe borné invariant dans le temps et défini par :

$$\Lambda u + \mu \geq 0 \quad (2)$$

où Λ est une matrice (p,r) à éléments λ_{ij} donnés ($i = 1, \dots, p ; j = 1, \dots, r$).

μ est une matrice colonne à p éléments μ_i donnés ($i = 1, \dots, p$).

- On exige de plus que $u(t)$ soit continue par morceaux * et pour la cohérence de la définition on supposera la continuité à gauche en définissant u aux points de discontinuité par $u(\theta) = u(\theta-0)$.

Critère

On considère un critère sous forme intégrale défini par

$$I = \int_{t_0}^{t_1} g(x, u) dt \quad (3)$$

Dans tout ce qui suit nous nous intéresserons au cas particulier où g est quadratique et de la forme :

* Définition de la continuité par morceaux.

Si f est une application de \mathbb{R} dans un espace X avec une distance d dans X , on dit que f a une discontinuité simple ou de première espèce en t , si f n'est pas continue en t et si f a à la fois une limite à droite et une limite à gauche, c'est-à-dire qu'il existe $f(t+0)$ et $f(t-0)$.

Une application est continue par morceaux si elle n'a qu'un nombre fini de discontinuités, toutes étant simples (ou de première espèce).

On utilisera ici la distance associée à la norme du maximum.

$$g(x,u) = \frac{1}{2}(x^t \alpha x + u^t \beta u) \quad (4)$$

où α est une matrice (n,n) symétrique définie positive donnée

β est une matrice (r,r) symétrique définie positive donnée.

Dans le cas le plus simple (cas unidimensionnel) on aura :

$$g(x,u) = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta u^2).$$

III - LES CONDITIONS AUX LIMITES

Conditions sur l'état.

Les conditions initiales seront supposées complètement fixées : $x(t_0) = x_0$;
les conditions finales pourront être fixées de façon partielle ou totale, nous supposons
que chaque composante de $x(t_1)$ est fixée ou libre, on pourra écrire ces conditions sous
la forme :

$$x_{t_1}^{i_k} = x_{t_1}^{i_k} \quad \text{pour } k = 1, \dots, s \leq n$$
$$i_k \neq i_{k'}, \text{ si } k \neq k'.$$

Condition sur le temps.

On remarque que le temps n'apparaît que sous forme d'élément différentiel, on
allègera donc les notations en posant par exemple : $t_0 = 0$, $t_1 = T$.
Nous nous trouverons devant des problèmes différents suivant que T est fixé ou non ; dans
le premier cas le système sera défini seulement sur $[0, T]$, dans le second cas il faudra
supposer une définition pour un majorant de T ou même pour $t = +\infty$.

Classification des problèmes.

En fonction des conditions sur l'état final et le temps, on distinguera :

- Pb1 - Temps fixé - Conditions finales complètement fixées.
- Pb2 - Temps libre - Conditions finales complètement fixées.
- Pb3 - Temps fixé - Conditions finales incomplètement fixées.
- Pb4 - Temps libre - Conditions finales incomplètement fixées.
- Pb5 - Temps infini.

Le problème Pb5 pourra se traiter en faisant tendre vers l'infini le temps fixé des Pb1 et Pb3, une condition apparaît alors pour la convergence de l'intégrale : les conditions finales imposées ne doivent pas exclure l'état d'équilibre du système (1).

On remarque que la solution d'un problème en temps non fixé fournissant le temps d'évolution T est également la solution du problème en temps fixé pour ce même T. Ce qui montre que, théoriquement du moins, la résolution du problème en temps fixé permet celle du problème en temps libre en faisant varier le temps fixé et en minimisant le critère.

De même la résolution du problème à conditions finales complètement fixées permet celle du problème à conditions incomplètement fixées. En fait, nous verrons qu'il existe une manière plus directe de procéder (cf. ch. IIB).

Le problème Pb1 sera donc celui que nous nous attacherons à résoudre, les autres problèmes s'y ramenant tous.

Remarque :

On peut échanger les rôles des conditions initiales et finales par le changement de variables suivant : $x \rightarrow \xi$, $u \rightarrow \mu$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = Ax + bu + C \\ x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi}{dt} = -A\xi - B\mu - C \\ \xi(0) = x_T, \quad \xi(T) = x_0 \end{array} \right.$$

Les relations entre les variables d'état et les commandes sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}(t) = \tilde{\xi}(T-t) \\ \tilde{u}(t) = \tilde{\mu}(T-t) \end{array} \right.$$

IV - DEUX FORMULATIONS EQUIVALENTES DU PROBLEME

Définitions

Un contrôle admissible est une fonction vectorielle $u(t)$ continue par morceaux et définie sur $[0, T]$ telle que pour tout $t \in [0, T]$ $u(t)$ appartienne à U , et telle que le système ainsi gouverné passe de l'état x_0 à l'instant 0 à l'état x_T à l'instant T .

Un contrôle admissible $u(t)$ est dit optimal s'il minimise la fonctionnelle (3) avec $g(x, y)$ défini par (4).

Une trajectoire admissible $x(t)$ est associée à un contrôle admissible $u(t)$.

Une trajectoire optimale $\tilde{x}(t)$ est associée à un contrôle optimal $\tilde{u}(t)$.

On se propose d'examiner s'il existe des commandes et trajectoires admissibles, et dans ce cas de trouver une commande optimale et sa trajectoire associée (ou toutes les commandes optimales et les trajectoires associées).

On résume ainsi ce problème fondamental PI :

PI : Existence et détermination de $\tilde{u}(t)$ et $\tilde{x}(t)$ définis pour $t \in [0, T]$

tels que :

- pour tout t $\tilde{u}(t) \in U$, $U = \{u, \Lambda u + \mu \leq 0\}$

- $\tilde{x}(0) = x_0$, $\tilde{x}(T) = x_T$

- \tilde{x} est solution de $\frac{dx}{dt} = Ax + bu + C$ pour $u = \tilde{u}(t)$

- \tilde{u} et \tilde{x} rendent minimum $I = \frac{1}{2} \int_0^T (x^t \alpha x + u^t \beta u) dt$

Cherchons maintenant à formuler un problème du type B (critère final) équivalent au problème PI.

$$\text{On pose : } x^0(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (x^t \alpha x + u^t \beta u) dt \quad (5)$$

Le critère I s'écrit alors :

$$I = x^0(t) + \int_t^T (x^t \alpha x + u^t \beta u) dt = x^0(T) \quad (6)$$

$x^0(t)$ est défini par la condition initiale $x^0(0) = 0$ et l'équation d'évolution :

$$\frac{dx^0}{dt} = \frac{1}{2}(x^t \alpha x + u^t \beta u) \quad (7)$$

On considère alors le nouveau vecteur d'état $X = (x^0, x)$ de R^{n+1} et le système gouverné par la même commande $u(t)$ selon les équations :

$$\begin{cases} \frac{dx^0}{dt} = \frac{1}{2}(x^t \alpha x + u^t \beta u) \\ \frac{dx}{dt} = Ax + Bu + C \end{cases}$$

que l'on notera :

$$\frac{dX}{dt} = F(x, u) \quad \text{ou} \quad \frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u) \quad (8)$$

$i = 0, 1, \dots, n$

On obtient donc le problème à critère final PII équivalent à PI

PII : Existence et détermination de $\tilde{u}(t)$ et $\tilde{X}(t)$ définis pour $t \in [0, T]$

tels que :

- Pour tout t $u(t) \in U$, $U = \{u, \Lambda u + \mu \geq 0\}$.
- $\tilde{X}(0)$ défini par $\tilde{x}^0(0) = 0$, $\tilde{x}^i(0) = x_0^i$ $i = 1, 2, \dots, n$.
- $\tilde{X}(T)$ partiellement défini par $\tilde{x}^i(T) = x_T^i$ $i = 1, 2, \dots, n$.
- \tilde{X} est solution de $\frac{dX}{dt} = F(x, u)$ pour $u = \tilde{u}(t)$.
- \tilde{u} et \tilde{X} rendent minimum $x^0(T)$.

V - LES DIFFERENTS CAS ENVISAGES

Dans le cadre des formulations ci-dessus, on distinguera trois cas de difficulté croissante que l'on traitera séparément.

Problème scalaire (Ch. III)

x et u variables réelles.

- $x(0) = x_0$ et $x(T) = x_T$ sont fixés.

- $u(t) \in [-1, +1]$.

- Critère : $\int_0^T (x^2 + Bu^2) dt$

- Evolution : $\frac{dx}{dt} = x + Bu$

B constante positive donnée

La réduction à ce modèle de tous les types de problème PI scalaire est envisagée au Ch. III. On étudiera des méthodes spécialement adaptées à ce cas simple.

Problème vectoriel à commande scalaire (Ch. IV)

x dans \mathbb{R}^n et u dans \mathbb{R}

- $u(t) \in [-1, +1]$

- Critère : $\int_0^T (x^t \alpha x + u^2) dt$, α est une matrice symétrique définie positive donnée

- Evolution : $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + C$

B est une matrice colonne (r,1)

La réduction à ce modèle de tous les types PI à commande scalaire n'est pas possible. On étudiera le modèle général et l'application la plus classique, c'est-à-dire l'équation différentielle linéaire de degré n :

$$x^{(n)} + ax^{(n-1)} + \dots + kx' + lx + 1 = u$$

Problème vectoriel à commande vectorielle (ch. V)

C'est le cas le plus général, on étudiera également les cas particuliers où U est un hypercube et où les matrices sont diagonales.

CHAPITRE - II

UTILISATION DU PRINCIPE DU MAXIMUM POUR LA RECHERCHE D'UNE POLITIQUE OPTIMALE

Dans une première partie nous allons énoncer le principe du maximum de PONTRYAGIN, en rappelant la démonstration dans un cas particulier et en évoquant son aspect géométrique.

Dans une deuxième partie, à partir du principe du maximum et des particularités de notre problème, nous établirons la base mathématique des algorithmes de résolution développés aux chapitres suivants.

A - LE PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN

Formulé et démontré pour la première fois par PONTRYAGIN [14] le principe du maximum se démontre dans un cadre plus général que celui de notre problème, nous supposerons admis ces résultats établis dans [8], [12].

Nous reprendrons rapidement une démonstration due à PALLU DE LA BARRIERE [13] et adaptée au cas particulier que nous considérons ; nous exposerons ensuite un aspect géométrique simple du principe du maximum à partir des travaux de LEITMANN [9] [11] et BLAQUIERE [11] qui nous sera utile pour la mise en équation du Ch. II-B.

I - HYPOTHESES ET NOTATIONS UTILISEES

On considère le problème à critère final défini au Ch. I-§-4 ; l'évolution du système est donc régie par :

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(x(t), u(t)) \quad (1)$$

avec $X = (x^0, x) \in R^{n+1}$;

et le critère à minimiser est $x^0(T)$.

On rappelle deux propriétés des équations différentielles :

Propriété 1 : Soit l'équation différentielle $\frac{dX(t)}{dt} = G(X(t), t)$ (2)

où G est continue et continuellement dérivable par rapport à X (i.e. G'_X existe et est continue) ; l'application qui à $X(t_0)$ associe $X(t)$ est différentiable et sa dérivée est la résolvante $A[t, t_0]$, de l'équation :

$$\frac{dY(t)}{dt} = G'_X(X(t), t) \cdot Y(t) \quad (3)$$

Propriété 2 : Soient les équations :

$$\frac{dX(t)}{dt} = \phi(t) \circ X(t) \quad (4)$$

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = -\phi^t(t) \circ \Psi(t) \quad (5)$$

où l'opérateur ϕ^t est le transposé de l'opérateur ϕ .

Si l'opérateur $\phi(t)$ est une fonction du temps continuellement dérivable par morceaux, $A(t, t_0)$ et $B(t, t_0)$ étant les résolvantes respectives des équations (4) et (5), alors on a :

$$B(t_0, t) = A^t(t, t_0)$$

Définition

On appelle domaine t -atteignable et on note $D(t)$ pour $t \in [0, T]$ l'ensemble des états $X(t)$ où X est une trajectoire admissible.

Notation

On désignera par u une commande admissible et par X la trajectoire associée avec $X(0) = X_0$. Quand on désirera particulariser une commande et sa trajectoire associée, on les notera \bar{u} et \bar{X} .

II - THEOREMES PRELIMINAIRES

Pour démontrer le principe du maximum, PALLU DE LA BARRIERE [13] considère des petites variations de la commande.

Théorème 1

Soit $h \in \mathbb{R}^{n+1}$; τ réel positif, $\varepsilon(\tau)$ fonction à valeurs dans \mathbb{R}^{n+1} telle que $\lim_{\tau \rightarrow 0} \varepsilon(\tau) = 0$; $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ constantes positives ; u_1, \dots, u_j valeurs du domaine U des $t_0 \in [0, T]$ point de continuité de \tilde{U} .

On pose $\lambda'_j = \lambda_1 + \dots + \lambda_j$, $\lambda'_0 = 0$.

On considère la commande U_τ ainsi définie sur $[0, t_0]$

$$U_\tau(t) = \begin{cases} u_j & \text{pour } t \in [t_0 - \lambda'_j \tau, t_0 - \lambda'_{j-1} \tau] \\ \tilde{U}(t) & \text{partout ailleurs.} \end{cases} \quad (6)$$

et la trajectoire associée X_τ avec la condition initiale $X_\tau(0) = \tilde{X}(0) + \tau h + \tau \varepsilon(\tau)$.

Pour τ suffisamment petit, X_τ est définie sur $[0, t_0]$ et l'on a :

$$X_\tau(t_0) = \tilde{X}(t_0) + \tau A(t_0, 0) h + \tau \sum_{j=1}^J \lambda_j [f(\tilde{X}(t_0), u_j) - f(\tilde{X}(t_0), \tilde{U}(t_0))] \quad (7)$$

$$+ \tau \varepsilon_1(\tau) \quad \text{avec } \lim_{\tau \rightarrow 0} \varepsilon_1(\tau) = 0$$

Ce premier théorème fait intervenir une perturbation de la commande en un point, le théorème suivant le généralise en considérant un nombre fini de points.

Théorème 2

Soit $t_1, \dots, t_i, \dots, t_I \in [0, T]$ une suite croissante de points de continuité distincts de \tilde{U} et pour tout i des valeurs $u_{i,j} \in U$ et $\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}^+$ avec $j \in 1, 2, \dots, J_i$ et avec

$$\sum_{i,j} \lambda_{i,j} = 1.$$

On pose $\lambda'_{i,j} = \sum_{k=1}^j \lambda_{i,k}$ avec $\lambda'_{i,0} = 0$

Soit U_τ la commande définie par $U_\tau = \begin{cases} u_{i,j} & \text{pour } t \in [t_i - \lambda'_{i,j}\tau, t_i - \lambda'_{i,j-1}\tau] \\ \tilde{U} & \text{partout ailleurs.} \end{cases}$ (8)

Alors il existe τ_1 tel que pour $\tau \leq \tau_1$, la trajectoire correspondante soit définie pour la condition initiale $X_\tau(0) = \tilde{X}(0)$ et l'on a :

$$X_\tau(T) = \tilde{X}(T) + \tau \sum_{i,j} \lambda_{i,j} A(T, t_i) [f(\tilde{X}(t_i), u_{i,j}) - f(\tilde{X}(t_i), \tilde{U}(t_i))] + \tau \varepsilon(\tau) \quad (9)$$

$$\text{avec } \lim_{\tau \rightarrow 0} \varepsilon(\tau) = 0$$

De plus les t_i et les $u_{i,j}$ étant fixés, ε_τ tend uniformément vers zéro si les $\lambda_{i,j}$ sont variables.

On introduit alors la notion de contingent vectoriel :

On appelle arc d'origine x tracé dans $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ une fonction dérivable $\xi(\tau)$ d'un segment $[0, \theta]$ dans E telle que $\xi(0) = x$.

On appelle contingent vectoriel de E en x l'ensemble des vecteurs tangents en x à un arc d'origine x tracé dans E .

On déduit du théorème 2 les corollaires suivants :

Corollaire I

Le cône convexe K_T engendré par les vecteurs $A(T, t_0) [f(\tilde{X}(t_0), u) - f(\tilde{X}(t_0), \tilde{U}(t_0))]$ pour $t_0 \in]0, T]$ point de continuité de \tilde{U} et pour $u \in U$, appartient au contingent vectoriel de $D(T)$ en $\tilde{X}(T)$.

Corollaire II

Soit Δ une demi droite ouverte d'origine 0 intérieure à K_T , alors la demi droite $\tilde{X}(T) + \Delta$ coupe $D(T)$

Remarque : Nous admettons ces résultats sans refaire les démonstrations de tous ces théorèmes et corollaires qui se trouvent dans [13], dans un cas plus général que celui qui nous occupe.

III - ENONCE DU PRINCIPE DU MAXIMUM

Appliquons les résultats précédents à la caractérisation d'une commande optimale pour notre problème. L'état initial est fixé ; l'état final appartient à la demi-droite V définie par $x(T) = x_T, x^0(T) > 0$. Le critère final à minimiser est $x^0(T)$ c'est-à-dire que si \tilde{X} est la trajectoire optimale et X une trajectoire admissible quelconque on a : $X(T) = \tilde{X}(T) + v$ avec $v \in V$.

Soit W la demi-droite opposée à V , définie donc par $x(T) = x_T, x^0(T) < 0$, soit \tilde{u} une commande optimale et \tilde{X} la trajectoire associée, on a : $(W + \tilde{X}(T)) \cap R(T) = \emptyset$; par suite d'après le corollaire II $W \cap K_T = \emptyset$.

Il existe donc un hyperplan qui sépare W et K_T au sens large, écrivons son équation $\tilde{\Psi}(T).X = 0$ et supposons que si X appartient à K_T alors $\tilde{\Psi}(T).X \leq 0$.

En tout point de continuité de \tilde{U} on a :

$$\tilde{\Psi}(T).A(T, t) [F(\tilde{X}(t), u) - F(\tilde{X}(t), \tilde{U}(t))] \leq 0 \quad (10)$$

Soit $\tilde{\Psi}(t)$ la solution de l'équation :

$$\frac{d\tilde{\Psi}(t)}{dt} = -F'_X{}^t(\tilde{X}(t), \tilde{u}(t)).\tilde{\Psi}$$

donnant la valeur fixée ci-dessus à $\tilde{\Psi}(T)$.

D'après la propriété 2 : $\tilde{\Psi}(t) = A^t(T, t) \Psi(T)$

D'où :

$$\tilde{\Psi}(t) [F(\tilde{X}(t), u) - F(\tilde{X}(t), \tilde{U}(t))] \leq 0 \quad (11)$$

D'autre part $V \subset K_T$, donc en tout point v de V $\tilde{\Psi}(T) \cdot v \leq 0$; ce qui implique $\tilde{\Psi}^0(T) \leq 0$.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 3

Supposons \tilde{u} optimale pour le critère final $x^0(T)$ parmi les commandes admissibles ; alors il existe $\tilde{\Psi}(t)$ solution de l'équation

$$\frac{d\tilde{\Psi}}{dt} = -F'_x{}^t(\tilde{X}(t), \tilde{u}(t)) \tilde{\Psi}(t) \quad (12)$$

avec la condition $\tilde{\Psi}^0(T) \leq 0$

tel que l'on ait en tout instant de continuité de $\tilde{u}(t)$:

$$\max_{u \in U} (\tilde{\Psi} \cdot f(\tilde{X}(t), u)) = \tilde{\Psi}(t) \cdot f(\tilde{X}(t), \tilde{u}(t)) \quad (13)$$

Nous allons appliquer ce théorème à un système de contrôle dérivé du précédent.

Toute trajectoire $X(t)$ peut se paramétrer par $X = X(\varphi(s))$, $t = \varphi(s)$ où φ est une application dérivable strictement croissante pour $s \in [0, 1]$.

Posons $\chi(s) = X(\varphi(s))$ et $\mathcal{U}(s) = U(\varphi(s))$.

Considérons le système dont l'état est représenté par (χ, t) et la commande par (\cdot, φ') avec la contrainte $\varphi' > 0$ et appliquons le théorème précédent. L'équation adjointe est :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{P}(s)}{ds} = -\mathcal{P}^t(s) F'_x(\chi(s), \mathcal{U}(s)) \varphi'(s) \\ \frac{d\mathcal{Q}}{ds} = 0 \end{array} \right.$$

Pour une trajectoire optimale par rapport au critère $x^0(T) = x^0(1)$, il existe une solution non nulle de l'équation adjointe $(\tilde{\mathcal{P}}(s), \tilde{\mathcal{Q}}(s))$, telle qu'en tout instant de continuité de $\mathcal{U}(s)$ on ait :

$$[\tilde{\mathcal{P}}^t(s) \cdot F(\tilde{\chi}(s), \tilde{\mathcal{U}}(s)) + \tilde{\mathcal{Q}}(s)] \tilde{\Psi}'(s) = \max_{\substack{u \in U \\ v > 0}} ((\tilde{\mathcal{P}}^t(s) \cdot F(\tilde{\chi}(s), u) v). \quad (14)$$

On tire de cette relation :

$$\tilde{\mathcal{P}}^t(s) \cdot F(\tilde{\chi}(s), \tilde{\mathcal{U}}(s)) + \tilde{\mathcal{Q}}(s) = 0$$

et

$$\max_{u \in U} (\tilde{\mathcal{P}}^t(s) \cdot F(\tilde{\chi}(s), u)) = 0$$

En revenant aux notations du système précédent, cette équation donne :

$$\text{Max}\{\tilde{\Psi}^t(t) \cdot F(\tilde{X}(t), u)\} = \tilde{\Psi}^t(t) \cdot F(\tilde{X}(t), \tilde{u}(t)) = 0 \quad (15)$$

Ce résultat, joint au théorème 3, permet d'énoncer le théorème général.

On écrit l'équation d'évolution et le système adjoint sous la forme détaillée :

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u) \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (16)$$

$$\frac{d\Psi^i}{dt} = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f^\alpha(x, u)}{\partial x^i} \Psi_\alpha \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (17)$$

Ce système est linéaire et homogène en Ψ pour toute condition initiale il admet donc une solution unique $\psi = (\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_n)$

On considère alors la fonction $\mathcal{H}(\psi, X, u)$ ou Hamiltonien qui permet de réécrire commodément les deux systèmes.

$$\mathcal{H}(\psi, X, u) = \langle \psi, F(x, u) \rangle = \sum_{\alpha=0}^n \Psi_\alpha \cdot f^\alpha(x, u) \quad (18)$$

D'où les nouvelles équations d'évolution du système et du système adjoint :

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (19)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (20)$$

Pour des valeurs fixées de X et ψ , \mathcal{H} est une fonction du paramètre $u \in U$. Si \mathcal{H} atteint son maximum sur U , ce maximum est

$$\mathcal{A}(\psi, X) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(\psi, X, u) \quad (21)$$

Nous pouvons alors énoncer le théorème.

Théorème général (PONTYAGIN)

Soit $u(t)$, $t \in [0, T]$ un contrôle admissible tel que la trajectoire correspondante $X(t)$ qui commence en X_0 à l'instant 0 passe en T par un certain point X_T avec $x^i(T) = x_T^i \quad t = 1, 2, \dots, n$.

Pour que la trajectoire $X(t)$ et le contrôle $u(t)$ soit optimaux, il est nécessaire qu'il existe un vecteur fonction $\psi(t)$ non nul correspondant à $X(t)$ et $u(t)$ tel que :

1°) Pour tout t la fonction $\mathcal{H}(\psi(t), X(t), u)$ de la variable u admet son maximum au point $u = u(t)$:

$$\mathcal{H}(\psi(t), X(t), u(t)) = \mathcal{A}(\psi(t), X(t)) \quad (22)$$

2°) A l'instant terminal T les relations

$$\psi_0(T) \leq 0 \quad (23)$$

$$\mathcal{A}(\psi(T), X(T)) = 0 \quad (24)$$

sont vérifiées

De plus si $\psi(t)$, $X(t)$ et $u(t)$ vérifient les relations (19), (20) et (22) les fonctions du temps $\psi_0(t)$ et $\mathcal{A}(\psi(t), X(t))$ sont des constantes. Les conditions (23) et (24) sont donc vérifiées à tout instant.

Remarque : Le principe du Maximum, condition nécessaire d'optimum global, est, comme sa démonstration le montre, une condition suffisante pour un extremum local.

IV - ASPECT GEOMETRIQUE

Nous donnons ici une interprétation purement géométrique du principe du Maximum qui conduit à une autre démonstration, et qui permet de donner un sens précis aux relations (23) et (24).

Nous ne donnons la démonstration que dans le cas des points "réguliers intérieurs" définis ci-dessous, la généralisation du théorème aux points ne vérifiant pas cette hypothèse supplémentaire étant longue et complexe.

Définitions

On note Γ la trajectoire dans R^{n+1} du point (x^0, x) . Sur une trajectoire optimale Γ^* déterminée, on note $V^*(x)$ le coût de transfert de x à x_T .

On note E^* l'ensemble des points de R^n d'où l'on peut atteindre x_T par une trajectoire optimale.

Sur une courbe Γ quelconque on a : $x^0(t) + \int_0^T f^0(x, u) dt = C$.

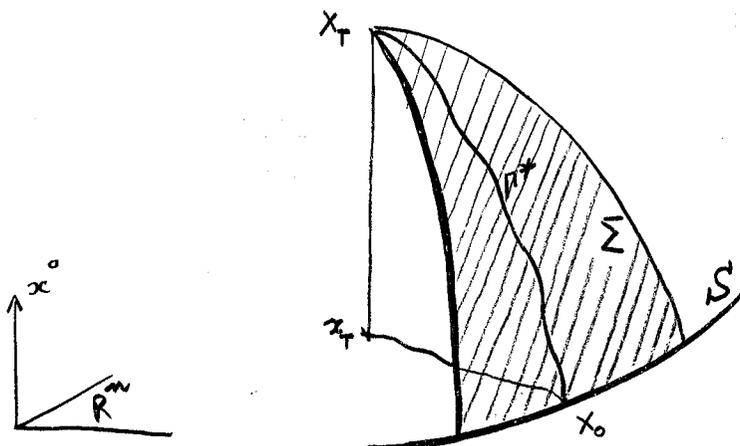
Sur une optimale on a : $x^0 + V^*(x) = C$ (25), C étant une constante; pour l'ensemble des trajectoires Γ^* passant par x_T , (25) est l'équation d'une surface Σ dans R^{n+1} ; la détermination de $V^*(x)$ étant unique Σ est une surface à une nappe.

Σ est appelée surface limite.

En général la fonction $X^0 = C - V^*(x)$ s'annule sur une surface S de R^n d'équation :

$$V^*(x) = C$$

S est appelée isocoût.



Propriétés des surfaces limites

Lemme 1

Toute trajectoire optimale Γ^* qui atteint X_T de \mathbb{R}^{n+1} est toute entière contenue dans la surface limite passant par X_T .

Remarquons que les surfaces limites se déduisent les unes des autres par une translation ΔC parallèle à l'axe Ox^0 .

Lemme 2

Une trajectoire optimale Γ^* avec un point dans une surface limite Σ est entièrement contenue dans Σ .

Les surfaces limites sont les lieux des trajectoires optimales.

Une surface limite donnée sépare $E^* \times x^0$ en deux régions ouvertes :

$$A_\Sigma \equiv \{X = (x^0, x) : x^0 > C-V^*(x)\}$$

$$B_\Sigma \equiv \{X = (x^0, x) : x^0 < C-V^*(x)\}$$

Lemme 3

Il n'existe pas de trajectoire partant d'une surface limite donnée Σ et rencontrant $x_T \times Ox^0$ en un point de B_Σ .

Les lemmes 2 et 3 conduisent au théorème suivant :

Théorème 5

Une trajectoire (optimale ou non optimale) dont le point initial appartient à une surface limite Σ , ne peut pas passer en un point de B_Σ .

En ce sens Σ est une surface limite : c'est la frontière de la région qui contient toutes les trajectoires issues de la surface.

Propriété d'une transformation linéaire

On considère un vecteur η de \mathbb{R}^{n+1} issu du point X d'une trajectoire optimale Γ^* générée par le contrôle $u^*(t)$, $t \in [0, T]$, et dont les composantes $\eta^j = \eta^j(t)$ sont les solutions du système :

$$\frac{d\eta^j}{dt} = \sum_{i=0}^n \left. \frac{\partial f^j(x, u^*(t))}{\partial x^i} \right|_{X=X^*(t)} \times \eta^i \quad (26)$$

$$j = 0, 1, \dots, n$$

avec les conditions initiales $\eta(0) = \eta_0$.

Les équations définissent une transformation linéaire non singulière $A(t_0, t)$ telle que

$$\eta(t) = A(0, t) \eta_0 \quad \text{avec } t \in [0, T] \quad (27)$$

Résumons en les propriétés :

Lemme 4 :

Le transformé $\pi(X^*(t))$ de la variété linéaire $\pi(X^*(\theta))$ contenant le point $X^*(0)$ de Γ , par la transformation linéaire $A(t_0, t)$ a les propriétés suivantes :

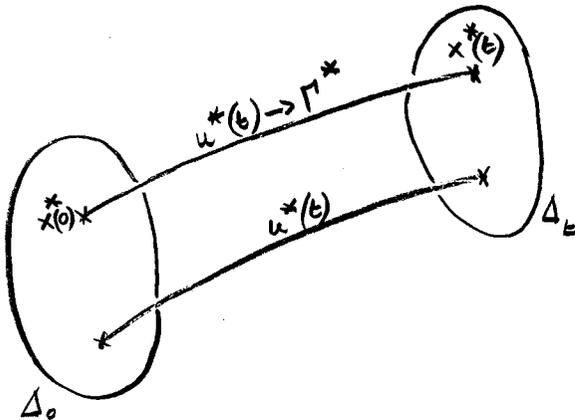
- a) $\pi(X^*(t))$ est défini pour tout $t \in [0, T]$.
- b) $\pi(X^*(t))$ est une variété de même dimension que $\pi(X^*(0))$.
- c) L'orientation de $\pi(X^*(t))$ varie continuellement sur $[0, T]$.

Transformation de l'hyperplan tangent

Soit Γ^* la trajectoire optimale générée par le contrôle $u^*(t)$, $t \in [0, T]$ issue du point initial $X^*(0)$ supposé point intérieur régulier de Σ : intérieur signifiant intérieur à $E^* \times 0x^0$, régulier signifiant que l'hyperplan tangent est défini.

Considérons un voisinage Δ dans Σ du point $X^*(0)$ défini par

$$\begin{aligned} \Delta(X^*(0)) &= \{X : X = X(0) \in \Sigma\} \\ X(0) &= X^*(0) + \varepsilon \phi_0 + o(\varepsilon) \end{aligned} \quad (28)$$



avec :

- ε assez petit pour que $X(0) \in \Sigma$
 - $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$
 - $\phi_0 \in T_{\Delta}(X^*(0))$ hyperplan tangent à $\Delta(X^*(0))$ en $X^*(0)$
- T_{Δ} est aussi hyperplan tangent à Σ

Les équations d'évolution (16) et le contrôle optimal $u^*(t)$ transforment $\Delta(X^*(0))$ en $\Delta(X^*(t))$ tel que :

$$\Delta(X^*(t)) = \{X : X = X(t)\} \quad (29)$$

$$X(t) = X^*(t) + \varepsilon \phi(t) + o(t, \varepsilon)$$

avec

$$- \frac{o(t, \varepsilon)}{\varepsilon} \text{ tend vers zéro uniformément pour tout } t \text{ quand } \varepsilon \text{ tend vers zéro}$$

$$- \phi(t) \text{ solution de (26) avec } \phi(0) = \phi_0.$$

$X(t)$ étant sur une trajectoire issue d'un point de Σ appartient à $A_{\Sigma} \cup \Sigma$ pourvu que $X^*(t)$ soit un point intérieur de Σ et que $|\varepsilon|$ soit assez petit.

Lemme 5

Si les points $X^*(0)$ et $X^*(t)$, $t \in [0, T]$ de la trajectoire optimale Γ^* de la surface Σ , sont des points réguliers, intérieurs de Σ , alors l'hyperplan tangent à Σ en $X^*(0)$ est transformé en hyperplan tangent à Σ en $X^*(t)$ par la transformation linéaire définie par les équations variationnelles (26).

i.e.

$$T_{\Sigma}(X^*(t)) = A(0, t) T_{\Sigma}(X^*(0)) \quad (30)$$

Le principe du Maximum sur une trajectoire optimale régulière.

On dit que Γ^* est une trajectoire optimale régulière si tous ses points sont des points réguliers intérieurs.

Soit X' un point régulier intérieur, soit $\gamma(X')$ le vecteur unité normal à Σ en X' et dirigé vers B_Σ , on a alors :

$$\gamma^0(X') \leq 0 \quad (31)$$

D'après le théorème 5 :

$$\gamma(X').f(X',u) \leq 0 \quad \forall u \in U \quad (32)$$

De plus si $X' = X^*(t')$ appartient à Γ^* , d'après le lemme 2 :

$$\gamma(X^*(t')).f(X^*(t'),u^*(t)) = 0 \quad (33)$$

On considère alors le système adjoint défini en (17) qui admet la solution $\psi(t)$ continue et unique si on donne $\psi(0) = \psi^0$.

On considère un η défini ci-dessus par l'équation (26) § 12, un résultat classique donne alors :

$$\begin{aligned} \psi(t).\eta(t) &= K && K \text{ étant une constante.} \\ \forall t & \in [0,T] \end{aligned} \quad (34)$$

Si $\eta^0 \neq 0 \in T_\Sigma(X^*(0))$ et si $\psi^0 \neq 0 \perp T_\Sigma(X^*(0))$ et dirigé vers B_Σ alors :

$$\psi(t).\eta(t) = 0 \quad \forall t \in [0,T] \quad (35)$$

D'après les relations (32) et (33) :

$$\begin{aligned} \psi(t).f(X^*(t),u) &\leq 0 && \left| \begin{array}{l} \forall u \in U \\ \forall t \in [0,T] \end{array} \right. \end{aligned} \quad (36)$$

et

$$\psi(t).f(X^*(t),u^*(t)) = 0 \quad \forall t \in [0,T] \quad (37)$$

Comme x^0 n'apparaît pas dans l'équation (17) définissant ψ et comme ψ^0 est dirigé vers B_Σ .

On a de plus :

$$\left| \begin{array}{l} \psi_0(t) = \text{constante} \\ \psi_0(t) \leq 0 \end{array} \right. \quad (38)$$

Les relations (36), (37) et (38) sont équivalentes aux propriétés énoncées par le théorème général, on a donc redémontré le théorème pour les points des trajectoires optimales régulières.

L'interprétation de ψ comme un vecteur orthogonal au plan tangent à Σ et de $\frac{dX}{dt}$ comme un vecteur tangent à la trajectoire tracée sur Σ , permet de donner un sens aux expressions (37) et (38) et de justifier les conventions sur la valeur initiale de ψ que nous ferons ci-dessous.

B - RECHERCHE DES POLITIQUES OPTIMALES

Nous étudierons d'abord certaines propriétés du système d'équations d'évolution, puis les propriétés des commandes et trajectoires vérifiant le principe de maximum, nous en déduirons enfin une méthode itérative pour trouver la politique optimale.

§1 - LE SYSTEME D'EQUATIONS

L'évolution du système dans \mathbb{R}^{n+1} est donc décrite par :

$$\begin{cases} \frac{dx^0}{dt} = f^0(x,u) = \frac{1}{2} (x^t \alpha x + u^t \beta u) \\ \frac{dx}{dt} = Ax + Bu + C \end{cases} \quad (39)$$

Le système adjoint dans \mathbb{R}^{n+1} est décrit par :

$$\begin{cases} \frac{d\psi^0}{dt} = 0 \\ \frac{d\psi}{dt} = - \frac{\partial f^0}{\partial x} \psi^0 - A^t \psi = -\psi^0 \alpha x - A^t \psi \end{cases} \quad (40)$$

L'Hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H}(\psi, X, u) = \frac{1}{2} \psi^0 (x^t \alpha x + u^t \beta u) + \psi^t (Ax + Bu + C) \quad (41)$$

Le principe du maximum énonce les propriétés suivantes à vérifier sur une trajectoire optimale $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$.

$$\mathcal{H}(\tilde{\psi}, \tilde{X}, \tilde{u}) = \text{Max}_{u \in U} \mathcal{H}(\tilde{\psi}, \tilde{X}, u) \quad (42)$$

$$\mathcal{H}(\tilde{\psi}, \tilde{X}, \tilde{u}) = 0 \quad (43)$$

$$\psi^0 \leq 0$$

A partir de cette condition nécessaire d'optimalité pour les vecteurs $X(t)$ et $\psi(t)$ de \mathbb{R}^{n+1} et $u(t)$ de \mathbb{R}^r on peut énoncer une condition nécessaire équivalente pour les vecteurs $x(t)$ et $\Psi(t)$ de \mathbb{R}^n et $u(t)$ de \mathbb{R}^r .

La maximisation de l'Hamiltonien $\mathcal{H}(\psi, X, u)$ par rapport à u conduit à considérer séparément les termes contenant u , on définit donc une fonction $h(\psi, X, u)$ ou Hamiltonien réduit :

$$h(\psi, x, u) = \frac{1}{2} \psi_0 u^t \beta u + \psi^t B u \quad (45)$$

ψ_0 et x^0 n'apparaissent nulle part en partie gauche dans les équations d'évolution et seul ψ_0 apparaît dans l'Hamiltonien.

L'étude géométrique faite ci-dessus permet d'interpréter la relation (44) ; d'autre part $\psi = (\psi_0, \psi)$ est défini à une constante multiplicative près, et comme, d'après le principe du maximum, l'Hamiltonien reste constant sur une trajectoire optimale, la relation (43) peut être remplacée par un choix de la constante ψ_0 . La nullité de ψ_0 correspondrait à une dégénérescence du problème, en effet le terme $u^t \beta u$ disparaîtrait. D'après (44) on doit donc donner une valeur négative à ψ_0 et on pose :

$$\psi_0 = -1$$

On écrit alors l'Hamiltonien :

$$h(\psi, x, u) = -\frac{1}{2} u^t \beta u + \psi^t B u \quad (46)$$

Les relations (43) et (44) et l'hypothèse selon laquelle α et β sont définies positives fournissent une relation supplémentaire :

$$\psi^t (Ax + Bu + C) \geq 0 \quad (47)$$

Dans l'interprétation géométrique ceci exprime que ψ est dirigé vers l'intérieur de Σ et cette convention est nécessaire pour que la maximisation de (46) ait un sens.

On écrit donc les équations du système :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + C \quad (48)$$

et du système adjoint :

$$\frac{d\Psi}{dt} = \alpha x - A^t \Psi \quad (49)$$

On peut alors énoncer une proposition appliquant les résultats énoncés par le Principe du Maximum à notre problème.

Proposition 1

Soit $u(t)$, $t \in [0, T]$ un contrôle admissible tel que la trajectoire correspondante $x(t)$ vérifie $x(0) = x_0$ et $x(T) = x_T$; pour que la trajectoire $x(t)$ et le contrôle $u(t)$ réalisent le minimum du critère intégral $\frac{1}{2} \int_0^T (x^t \alpha x + u^t \beta u) dt$, il est nécessaire qu'il existe une fonction vectorielle $\Psi(\Psi_1, \dots, \Psi_n)$ vérifiant (11) et telle qu'à tout instant, pour $h(x, \Psi, u)$ défini par (8) on ait :

$$h(x(t), \Psi(t), u(t)) = \max_{u \in U} h(x(t), \Psi(t), u) \quad (50)$$

et

$$\Psi^t (Ax + Bu + C) \geq 0 \quad (51)$$

Stabilité et controlabilité

On rappelle ici deux notions essentielles de la théorie du contrôle, la première éclaire le comportement au loin et la seconde son comportement au voisinage d'un point.

Définitions [5] [6]

On considère le système homogène associé à l'équation d'évolution (48) :

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

On dit que le système est stable si la norme euclidienne $\|x(t)\|$ est bornée lorsque t tend vers l'infini et pour toute solution $x(t)$.

On dit que le système est strictement stable s'il est stable et si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \quad \text{pour toute solution } x(t).$$

On dit que le système est instable s'il existe une solution $x(t)$ telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty.$$

Critères de stabilité

On désigne par $\lambda_i + j\mu_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) les valeurs propres de la matrice A.

|| Le système est stable si et seulement si $\lambda_i \leq 0$ pour tout i et $\lambda_k < 0$ pour les valeurs propres multiples.

|| Le système est strictement stable si $\lambda_i < 0$ pour tout i .

On remarque que la stabilité stricte du système entraînera l'instabilité du système adjoint et réciproquement [7].

Si l'on étend la notion de stabilité au système de contrôle celui-ci ne pourra être instable si l'équation homogène associée est stable ; on verra ci-dessous que la stabilité du système accélère la convergence de la méthode de résolution utilisée.

Définitions

On considère alors le système d'équations d'évolution (48) et les commandes $u(t)$ intégrables :

- si l'état $x = 0$ est atteignable d'un état \bar{x} , on dit que l'état \bar{x} est controlable
- si tout état est controlable on dit que le système est totalelement controlable.

On trouvera des critères de controlabilité en [15].

On observe que tout état controlable est atteignable de l'origine et qu'il existe toujours une trajectoire du système entre deux états controlables, ce qui résoudrait le problème de l'existence d'une commande admissible en l'absence de contraintes. Dans ce qui suit on s'intéressera plus spécialement aux systèmes totalement controlables dont les propriétés sont plus intéressantes ; c'est ce qu'a fait GAMKRELIDZE ([14], ch. III) en énonçant sa "condition de position" qui est un critère de controlabilité.

Commande admissible et trajectoire associée.

On considère une commande admissible $u(t)$, continue par morceaux sur $[0, T]$ et à valeurs dans le polyèdre convexe borné fermé U de R^r .

On peut exprimer l'état du système commandé par $u(t)$ par l'intégrale bien connue :

$$x(t) = A(t, 0) x(0) + \int_0^t A(t, \tau) B u(\tau) d\tau + C t \quad (52)$$

D'où les propriétés de continuité pour la norme du maximum :

Propriété 1

- Pour $x(0)$ fixé et une commande admissible $u(t)$ fixée $x(t)$ est continue et sa dérivée est continue par morceaux et ses instants de discontinuité sont les instants de discontinuité de $u(t)$.
- Pour $u(t)$ fixée et t fixé, $x(t)$ est continue et dérivable par rapport à $x(0)$.
- Pour $x(0)$ fixé et t fixé, $x(t)$ est continue par rapport à $u(t)$.

De même de (39) on déduit une propriété de continuité pour $\Psi(t)$.

Propriété 2

- Pour $u(t)$ fixé, $\Psi(t)$ est continue et sa dérivée est continue.
- Pour $u(t)$ fixé et t fixé, $\Psi(t)$ est continue et dérivable par rapport à $\Psi(0)$.

§2 - DOMAINE ATTEIGNABLE

Dans ce qui précède on considèrerait uniquement les commandes admissibles continues par morceaux. On peut obtenir des résultats plus généraux en considérant les commandes intégrables au sens de Lebesgue (ou L-commandes) vérifiant $u(t) \in U$.

Définitions :

- Pour t réel positif ou nul, on appelle domaine t -atteignable et on note $D(t)$ l'ensemble des états $x(t)$ pouvant être atteints à l'instant t sous l'effet d'une commande admissible quelconque.
- On appelle domaine atteignable et on note D le domaine $D(T)$.
- Pour t réel positif ou nul, on appelle domaine L - t -atteignable et on note $\Delta(t)$ l'ensemble des états $x(t)$ pouvant être atteints à l'instant t sous l'effet d'une L -commande $u(\tau)$ telle que pour tout $\tau \in [0, t]$: $u(\tau) \in U$.
- On appelle domaine L -atteignable et on note Δ le domaine $\Delta(T)$.
- On note $\delta\Delta$ la frontière de Δ .

Il résulte immédiatement des définitions que $D(t)$ est inclu dans $\Delta(t)$ et D dans Δ ; par ailleurs $D(0)$ et $\Delta(0)$ sont réduits au point x_0 .

Propriété 3

|| Pour t positif, le domaine t -atteignable $D(t)$ est borné, convexe et continu par rapport à t .

On utilise ici l'expression (52) qui définit une application linéaire et bornée, donc continue $\int_0^t A(t, \tau) B u(\tau) d\tau$; une telle application conserve également la convexité.

Propriété 4

|| Pour $t > 0$, le domaine L-t-atteignable $\Delta(t)$ est borné, fermé, convexe et continu en t. Si de plus le système est totalement contrôlable $\Delta(t)$ est d'intérieur non vide.

Pour démontrer que $\Delta(t)$ est borné fermé on doit appliquer le théorème d'Alaoglu (cf. [2]) pour démontrer la compacité de $\Delta(t)$ ce qui dans \mathbb{R}^n est suffisant.

La propriété pour un système totalement contrôlable se démontre aisément par l'inclusion d'une boule fermée dans $\Delta(t)$.

Convexité et continuité se démontrent comme ci-dessus, car les trajectoires associées aux commandes mesurables sont également continues.

Le problème du domaine atteignable renvoie au Problème "Time-Optimal"; en effet l'existence d'une trajectoire admissible est indépendante du critère et le problème le plus simple à été déjà étudié ([20], [27], [28]).

Propriété 5

|| Un L-contrôle ne peut pas conduire en un point de $\delta\Delta$ s'il n'est pas à la frontière de l'ensemble des commandes admissibles, dans le cas d'un système totalement contrôlable.

L'application définie par (52) est continue et linéaire de L_p sur tout l'espace \mathbb{R}^n par suite de la contrôlabilité, elle transforme l'intérieur ouvert de l'ensemble des commandes admissibles en un ouvert de \mathbb{R}^n (voir "Interior Mapping Principle" [2]), qui ne peut avoir de points sur la frontière de Δ , ni extérieurs à Δ .

Donc seuls les points frontières de l'ensemble des commandes fournissent des points de $\delta\Delta$.

Ceci n'implique pas que $u(t)$ est toujours sur la frontière de U mais seulement qu'il y est au moins en un instant de $[0, T]$.

Les propriétés les plus intéressantes se rapportant à Δ et notre étude concernant plus particulièrement D, il est nécessaire d'étudier si tout point de Δ peut être approché arbitrairement près par un point de D. Plus précisément étant donné le point final \hat{x}_T atteint par le système gouverné par la L-commande $\hat{u}(t)$, existe-t-il une commande continue par morceaux $\bar{u}(t)$ conduisant au point final \bar{x}_T tel que l'on ait

$$\|\hat{x}_T - \bar{x}_T\| \leq \epsilon \quad \text{pour tout } \epsilon \text{ positif donné.}$$

En prenant pour norme par exemple la norme du maximum des composantes.

Soit $\hat{u}(t)$ une L-commande quelconque, il existe une suite de Cauchy de fonctions $\bar{u}_k(t)$ constantes par morceaux qui converge presque partout vers $\hat{u}(t)$, ceci entraîne la convergence en moyenne, c'est-à-dire la convergence au sens de la semi-norme

$$\sup_i \int_0^T |\hat{u}^i(t) - \bar{u}_k^i(t)| dt.$$

Pour tout η positif il existe donc $\bar{u}(t)$ constante par morceaux telle que :

$$\sup_i \int_0^T |\hat{u}^i(t) - \bar{u}^i(t)| dt < \eta.$$

d'autre part :

$$\|\hat{x}(t) - \bar{x}(t)\| = \left\| \int_0^t A(t, \tau) B \cdot (\hat{u}(\tau) - \bar{u}(\tau)) d\tau \right\| \quad (53)$$

On peut décomposer le facteur $A(t, \tau)$ en série infinie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^k}{k!} A^k$.

Soient $\|A\|$ et $\|B\|$ les normes des applications linéaires associées aux matrices A et B.

On peut majorer l'expression (53) :

$$\|\hat{x}(t) - \bar{x}(t)\| < \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \frac{(t-\tau)^k}{k!} A^k B (\hat{u}(\tau) - \bar{u}(\tau)) d\tau \right\|$$

$$\|\hat{x}(t) - \bar{x}(t)\| < \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \frac{(t-\tau)^k}{k!} A^k B (\hat{u}(\tau) - \bar{u}(\tau)) \| d\tau$$

$$\|\hat{x}(t) - \bar{x}(t)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} \int_0^t \|A^k \cdot B(\hat{u}(\tau) - \bar{u}(\tau))\| d\tau$$

$$\|\hat{x}(t) - \bar{x}(t)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} \int_0^t \|A\|^k \|B\| \cdot \|\hat{u}(\tau) - \bar{u}(\tau)\| d\tau$$

$$\|\hat{x}(t) - \bar{x}(t)\| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} \|A\|^k \|B\| \right) \cdot \int_0^t \sup_i |\hat{u}(\tau) - \bar{u}(\tau)| d\tau$$

$$\|\hat{x}(t) - \bar{x}(t)\| \leq \|B\| e^{\|A\| \cdot T} \int_0^t \sum_{i=1}^n |\hat{u}^i(\tau) - \bar{u}^i(\tau)| d\tau$$

$$\|\hat{x}(t) - \bar{x}(t)\| \leq \|B\| e^{\|A\| \cdot T} \sum_{i=1}^n \int_0^t |\hat{u}^i(\tau) - \bar{u}^i(\tau)| d\tau$$

$$\|\hat{x}(t) - \bar{x}(t)\| \leq n \cdot \|B\| \cdot e^{\|A\| \cdot T} \sup_i \int_0^t |\hat{u}^i(\tau) - \bar{u}^i(\tau)| d\tau$$

et enfin :

$$\|\hat{x}(t) - \bar{x}(t)\| < n \cdot \|B\| e^{\|A\| T}$$

On a obtenu une majoration uniforme sur $[0, T]$.

D'où :

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_i |\hat{x}^i(t) - \bar{x}^i(t)| < \epsilon$$

Pour tout t de $[0, T]$, $\Delta(t)$ est donc inclu dans l'adhérence de $D(t)$. Mais l'adhérence de $D(t)$ est aussi sa fermeture, et $\Delta(t)$ est un fermé contenant $D(t)$, on peut donc énoncer :

Propriété 6

Pour tout t de $[0, T]$, $\Delta(t)$ est la fermeture de $D(t)$.

Propriétés de la frontière du domaine L-attaireur

On étudie l'aspect du domaine convexe Δ en caractérisant les propriétés de la surface

Définition

Un hyperplan défini par $vx = w$ est un hyperplan d'appui d'un domaine G si pour tout x de G : $vx < w$ et si, pour au moins un x de G : $vx = w$.

Δ étant convexe tout point x de $\delta\Delta$ appartient à au moins un hyperplan d'appui de Δ ; si v est fixé, il existe un seul hyperplan d'appui de Δ défini par une équation $vx = w$ et que l'on notera $S(v)$.

Les points communs à $\delta\Delta$ et $S(v)$ sont les points de Δ les plus éloignés dans la direction de v .

On peut alors classer les points de $\delta\Delta$ comme suit :

- a) Les points réguliers en correspondance biunivoque avec une direction v , v est alors la direction de la normale extérieure est $S(v)$ est l'unique hyperplan tangent.
- b) Les k -angles où v a k degrés de liberté dans un cône à k -dimension. k ne peut être supérieur à n et pour $k = 1$ on trouve un point régulier.
- c) Les points appartenant à un k -plat, alors $S(v)$ a en commun avec Δ plusieurs points, k est la dimension de la variété linéaire de plus petite dimension que les contient. La frontière d'un k -plat peut contenir des points réguliers, des angles ou des k -plats de degré inférieur à k .

Ces notions nous seront utiles dans les problèmes numériques des chapitres suivants.

§3 - EXTREMALES ET OPTIMALE - EXISTENCE ET UNICITE.Définition

On appelle commande extrémale une commande vérifiant les relations (12) et (13) avec une trajectoire associée issue de x_0 . La trajectoire résultant d'une commande extrémale est dite extrémale. Une commande optimale ne peut être qu'une commande extrémale telle que le système passe par l'état x_T à l'instant T .

On remarque que d'après le principe du Maximum si \mathcal{H} est nul à un instant donné sur une trajectoire extrémale, alors \mathcal{H} est nul à tout instant sur cette trajectoire. Il suffit donc de vérifier (51) à un instant quelconque, pour une commande vérifiant (50) à tout instant, pour pouvoir affirmer que la commande est extrémale. La relation (50) conduit à la recherche du maximum d'une forme quadratique strictement convexe sur un polyèdre convexe fermé, le maximum est donc unique et atteint pour une valeur unique de la variable.

D'où :

Propriété 7

Si x^* appartient à une trajectoire extrémale et si ψ^* est la variable adjointe associée, il existe une commande extrémale u^* unique définie par

$$u^* = \underset{u \in U}{\text{Max}}^{-1} (h(\psi^*, x^*, u)) \quad (14).$$

Les équations différentielles (10) et (11) déterminent donc de façon unique l'évolution du système et du système adjoint.

D'où :

Propriété 8

Pour $x(0)$ donné, $\psi(0)$ donné tel que $u(0)$ solution de (14), $x(0)$ et $\psi(0)$ vérifient (13), il existe une trajectoire extrémale unique $x(t)$ telle que pour $t \in [0, T]$ $x(t)$, $\psi(t)$ et $u(t)$ vérifient (10) (11) et (12).

Le principe du Maximum démontré ci-dessus pour des commandes continues par morceaux est démontré dans le cas plus général de commande mesurables ([12], [14]). On examinera donc également le cas des L-commandes extrémales qui vérifient les deux propriétés ci-dessus.

Existence d'une L-commande optimale.

Propriété 9

|| Si X_T appartient à Δ , il existe une L-commande optimale.
On suit ici la démonstration donnée en [16].

$u(t)$ appartient à l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur $[0, T]$ soit \mathcal{H} .

$x(t)$ appartient à l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ soit \mathcal{C}

Soit φ l'application qui à $u(t)$ fait correspondre $x(t)$ pour \mathcal{H} muni de la topologie forte et \mathcal{C} muni de la topologie de la convergence uniforme φ est continue.

Soit $J(u)$ l'application qui à $u(t)$ fait correspondre la valeur du critère, $J(u)$ est strictement convexe et continue pour la topologie forte, pour la topologie faible elle est semi-continue inférieurement.

$u(t)$ appartient à un domaine faiblement fermé, convexe et borné donc faiblement compact.

$J(u)$ fonction faiblement semi-continue sur un faiblement compact atteint donc son minimum.

(Q.E.D.)

Unicité de la commande optimale.Propriété 10

Deux L-commandes optimales sont identiques à un ensemble de mesure nulle près.

En effet le critère est strictement convexe et les équations d'évolution sont linéaires. Soient $u_1(t)$ et $u_2(t)$ des L-commandes optimales distinctes sur un ensemble de mesure non nulle ; considérons la L-commande $\frac{u_1(t)+u_2(t)}{2}$, l'état associé est $\frac{x_1(t)+x_2(t)}{2}$ et on a :

$$\frac{u_1^t \beta u_1 + u_2^t \beta u_2}{2} \geq \left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)^t \beta \left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)$$

avec inégalité stricte sur un ensemble de mesure non nulle.

D'autre part :

$$\frac{x_1^t \alpha x_1 + x_2^t \alpha x_2}{2} \geq \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^t \alpha \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

$\frac{u_1(t)+u_2(t)}{2}$ donnerait au critère une valeur plus petite que celle fournie par $u_1(t)$ et $u_2(t)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Existence et unicité de l'extrémale admissible.

Nous avons vu que le principe du Maximum, condition nécessaire d'extrémum global, était aussi une condition suffisante d'extrémum global. Toute optimale est donc extrémale et admissible, ce qui résout le problème de l'existence d'une extrémale admissible.

S'il existait deux L-commandes extrémales admissibles distinctes sur un ensemble de mesure non nulle, $u_1(t)$ et $u_2(t)$, toute combinaison convexe $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2$ avec $\lambda \in]0,1[$ donnerait au critère une valeur inférieure à celle obtenue par une des commandes u_1 ou u_2 , ce qui impliquerait que u_1 ou u_2 ne fournit pas d'extrémum local.

Deux L-commandes extrémales admissibles sont donc égales à un ensemble de mesure nulle près ; la trajectoire optimale est donc unique.

Propriété 11

Si X_T appartient à Δ alors il existe une trajectoire optimale unique, obtenue par toutes les L-commandes admissibles et vérifiant le principe du Maximum, qui sont égales à un ensemble de mesure nulle près.

On déduit de la démonstration de cette propriété, un corollaire sur le domaine atteignable pour une valeur donnée du critère.

Propriété 12

Le domaine atteignable par des politiques extrémales conduisant à un critère inférieur ou égal à une valeur donnée est convexe.

§4 - L'HAMILTONIEN REDUIT

Le maximum absolu de $h(\Psi, x, u)$ en l'absence de contraintes est obtenu lorsque la dérivée par rapport à u est nulle.

Pour la commande extrémale on a : $-u^t \beta + \Psi^t B = 0$.

On est assuré de l'existence de β^{-1} matrice symétrique et inverse de la matrice symétrique définie positive :

$$u^t = \Psi^t B \beta^{-1}$$

ou

$$u = \beta^{-1} B^t \Psi$$

Posons $\omega = \beta^{-1} B^t \Psi$.

- si ω appartient à U alors la commande extrémale u^* est dite libre et on a :

$$u^* = \omega$$

- si ω n'appartient pas à U alors la commande extrémale u^* est dite saturée et a une valeur sur la frontière de U .

Pour étudier les discontinuités de la commande $u(t)$ il est nécessaire d'introduire la notion plus approfondie de type de la commande.

Définition

On dit que deux commandes u_1 et u_2 de U sont de même type si la face de U de codimension maximale contenant u_1 est aussi la face de codimension maximale contenant u_2 .

On a donc correspondance biunivoque entre les types de commande et les faces du polyèdre U .

Définition

Si la commande $u(t)$ change de type à l'instant t , c'est-à-dire si $u(t-0)$ et $u(t+0)$ ne sont pas de même type, on dit qu'il y a commutation à l'instant t pour $u(t)$.

Définition

On dit que le point (x, t) de $R^n \times [0, T]$ est un point de commutation pour le problème de contrôle si la commande extrémale $u^*(t)$ conduisant le système de l'état x_0 à l'instant initial à l'état x à l'instant t à une commutation à l'instant t .

La commande extrémale $u^*(t)$ pour t fixé ne dépend que de γ , fonction continue de t et à dérivée continue.

Sur un intervalle où $u^*(t)$ ne change pas de type, u^* réalise le maximum de l'hamiltonien sur une variété linéaire fixée. $u^*(t)$ est donc continue à dérivée continue sur chaque intervalle de temps où u^* ne change pas de type.

Si le nombre de changement de type est fini $u^*(t)$ sera continue par morceaux.

Continuité de u par rapport à t pour $\Psi(0)$ fixé.

La matrice β symétrique définie positive est équivalente à I, supposons effectué le changement de base convenable.

On a alors : $h(\Psi, 0-x, u) = -\frac{1}{2} u^t \cdot u + \omega^t u$

ou

$$h(\Psi, x, u) = -\frac{1}{2} (u-2\omega)^t \cdot u$$

Maximiser $h(\Psi, x, u)$ est donc équivalent à minimiser $(u-\omega)^2$ donc à chercher le point du polyèdre U le plus près du point ω avec la distance euclidienne dans R^r .

$\omega(t)$ est une fonction continue, la distance de $\omega(t)$ au domaine convexe U est donc continue.

Propriété 13

|| Pour $\Psi(0)$ fixé, $u^*(t)$ est une fonction continue de $\Psi(t)$ et de t ; sa dérivée est continue sauf peut être aux instants de commutation.

Remarquons que ceci n'implique pas que tout point du domaine atteignable D peut être atteint par une commande continue, en effet nous supposons ici que $\Psi(0)$ est fixé donc borné.

§5 - PROPRIETES DE CONTINUITÉ ET DE DERIVABILITE EN $\Psi(0)$.

Pour $u^*(t)$ commande extrémale déterminée par un $\Psi(0)$ donné, on peut écrire le système (48) (49) sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = k_1(x, \Psi) \end{array} \right. \quad (53)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Psi}{dt} = k_2(x, \Psi) \end{array} \right. \quad (54)$$

ou plus généralement en posant $\chi = (x, \Psi)$

$$\frac{d\chi}{dt} = K(\chi) \quad (55)$$

K est une fonction continue par rapport à χ et satisfaisant à une condition de Lipschitz, on peut donc appliquer les théorèmes de continuité des solutions d'une équation différentielle [3].

Propriété 14

La solution $\chi = (x, \Psi)$ est une fonction continue des conditions initiales $\chi(0) = (x(0), \Psi(0))$.

On remarque que u n'étant pas une fonction continuellement différentiable de Ψ on ne peut pas appliquer directement un théorème de différentiabilité des solutions.

Dérivabilité de $x(t)$ par rapport à $\Psi(0)$.

Pour tout t , $x(t)$ et $\Psi(t)$ sont des fonctions continues de $\Psi(0)$, donc d'après l'équation adjointe (11), $\Psi(t)$ est continuellement dérivable par rapport à $\Psi(0)$. Sur un intervalle ouvert $]t_i, t_{i+1}[$ où la commande ne change pas de type $u^*(t)$ est donc continuellement dérivable par rapport à $\Psi(0)$.

Si le nombre α d'instants de commutation t_i est fini sur $[0, t]$, on peut poser $t_0 = 0$ et $t_{\alpha+1} = t$. On pourra écrire l'expression (14) sous la forme :

$$\begin{aligned} X_{\Psi_0}(t) = & A(t, 0) x(0) + \sum_{i=0}^{\alpha-1} \int_{t_i+\varepsilon}^{t_{i+1}-\varepsilon} A(t, \tau) Bu(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{\alpha} \int_{t_i-\varepsilon}^{t_i+\varepsilon} A(t, \tau) Bu(\tau) d\tau \\ & + \int_0^{t_1-\varepsilon} A(t, \tau) Bu(\tau) d\tau + \int_{t_{\alpha}+\varepsilon}^t A(t, \tau) Bu(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (56)$$

Les termes de la deuxième somme ont un intégrant majoré et continu par rapport à $\Psi(0)$, lorsque ε tend vers zéro l'intervalle d'intégration devient infiniment petit, mais par suite de la continuité de $u^*(t)$ par rapport à $\Psi(0)$, il existe η tel que si $\|\delta\Psi(0)\| < \eta$ les points de commutation de la commande associée à $\Psi(0) + \delta\Psi(0)$ restent dans les intervalles $]t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon[$; la variation de ces termes est donc un infiniment petit du deuxième ordre.

Les autres termes vérifient les conditions de dérivabilité d'une intégrale par rapport à un paramètre.

Propriété 15

Pour t fixé de $[0, T]$, l'état du système $X(t)$ atteint sous l'effet d'une commande extrémale est une fonction continuellement dérivable de $\Psi(0)$ et sa dérivée est :

$$\frac{dX(t)}{d\Psi(0)} = \sum_{i=0}^{\alpha} \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(t, \tau) B \frac{d}{d\Psi(0)} u(\tau) d\tau \quad (57)$$

Les dérivées de $u(\tau)$ étant prises sur l'ouvert $]t_i, t_{i+1}[$.

On remarque que pour un système totalement contrôlable et au voisinage d'un point X_F intérieur à Δ , la continuité de X_F par rapport à $\Psi(0)$ et la possibilité d'atteindre tous les points d'un voisinage de X_F entraîne qu'un accroissement arbitrairement petit $\Delta\Psi(0)$ de $\Psi(0)$ peut donner à X_F un accroissement de direction donnée ΔX_F .

On énoncera donc :

Propriété 16

Si le système est totalement contrôlable, pour $\Psi(0)$ et X_F fixés pour tout ε positif et pour tout vecteur V de \mathbb{R}^n , il existe un $\Delta\Psi(0)$ avec $\|\Delta\Psi(0)\| < \varepsilon$ tel que ΔX_F soit orienté comme V .

Recherche de l'extrémale conduisant au point X_T .

La connaissance de $\frac{dx}{d\Psi(0)}$ peut conduire à une méthode itérative permettant de trouver la valeur de $\Psi(0)$ fournissant la trajectoire optimale.

On considère une fonction scalaire $Q(x)$ définie positive et nulle seulement pour $x = X_T$.

On peut alors écrire :

$$\frac{\partial Q}{\partial \Psi_j(0)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \Psi_j(0)}$$

ou

$$\frac{\partial Q}{\partial \Psi(0)} = (\text{grad } Q)^t \cdot \frac{\partial x}{\partial \Psi(0)}$$

avec :
$$\frac{\partial Q}{\partial \Psi(0)} = \frac{\partial Q}{\partial \Psi_1(0)}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial \Psi_n(0)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \Psi_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \Psi_1(0)} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial \Psi_n(0)} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \Psi_1(0)} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial \Psi_n(0)} \end{pmatrix}$$

On prend alors une itération du type :

$$\Psi(0)^{(k+1)} = \Psi(0)^{(k)} - \lambda \frac{\partial Q}{\partial \Psi(0)}(k)$$

où λ est une matrice (n,n) à coefficients positifs.

On pose :

$$\Delta \Psi(0)^{(k+1)} = - \lambda \frac{\partial Q}{\partial \Psi(0)}(k)$$

$$\Delta Q^{(k+1)} = Q^{(k+1)} - Q^{(k)}$$

Pour un choix convenable des coefficients de λ , la fonction $\Delta Q^{(k)}$ est définie négative et le procédé converge si $\frac{\partial Q}{\partial \Psi_0}(k)$ n'est pas nul.

Une telle méthode a déjà été employée dans les problèmes sans contraintes et on a envisagé sa généralisation aux problèmes "bang-bang" [32].

Dans le cas qui nous intéresse, la fonction $Q(x)$, la plus simple est le carré de la distance euclidienne au point terminal X_T fixé :

$$Q(x) = \|x_T - x\|^2$$

On obtient alors une expression simple de $\frac{\partial Q}{\partial x}$ et de $\frac{\partial Q}{\partial \Psi(0)}$ en fonction de $\frac{dx_F}{d\Psi(0)}$; on remarque que $\frac{\partial Q}{\partial \Psi_0}$ ne s'annule qu'à l'optimum ou si $\frac{dx_F}{d\Psi(0)}$ s'annule aussi.

On envisagera dans la partie numérique les différentes possibilités de calcul de $\frac{dx_F}{d\Psi(0)}$ et le choix des coefficients de λ donnant au procédé la convergence la plus rapide possible.

On remarque que la même méthode permet de traiter un problème sans conditions finales imposées ; on sait que sur la trajectoire optimale on a alors $\Psi(T) = 0$; on considère alors la fonction scalaire $R(\Psi)$ ainsi définie :

$$R(\Psi) = \sum_{i=1}^n \Psi_i^2$$

et la même méthode converge et fournit la politique optimale.

CHAPITRE - III

RESOLUTION DES PROBLEMES A UNE DIMENSION

On se propose d'appliquer les résultats précédents à ce cas simple, de pousser plus loin l'emploi d'expressions analytiques, pour mettre en oeuvre les méthodes digitales ou analogiques les mieux adaptées suivant l'angle sous lequel on aborde le problème.

Dans ce chapitre et les chapitres suivants, les programmes de résolution sur machine digitale sont écrits en langage ALGOL pour le compilateur ALGØL de l'ordinateur IBM-7044 de l'Institut de Mathématiques Appliquées de l'Université de GRENOBLE. Les instructions d'entrée-sortie, l'utilisation de paquets de cartes binaires, les évaluations de durée et de précision des calculs sont donc liés à cette machine et à ce compilateur.

A - REDUCTION ET ETUDE ANALYTIQUE

I - Réduction à un type standard.

On considère le problème scalaire le plus général entrant dans le cadre de la formulation PI du chapitre I- §4 et par des changements de variable on tente de le ramener à un type standard équivalent défini ci-dessus au chapitre I-§5.

Soit donc un système S_0 ainsi défini :

$$S_0 \left\{ \begin{array}{l} \text{Le processus se déroule dans l'intervalle de temps } \tau \in [0, \theta]. \\ \xi \text{ variable d'état : } \xi(0) = \xi_0, \xi(\theta) = \xi_\theta, \xi_0 \text{ et } \xi_\theta \text{ sont fixés.} \\ \mu \text{ variable de commande : } \mu(\tau) \in [M_0, N_0]. \\ \text{Evolution : } \frac{d\xi}{d\tau} = A_0 \xi + B_0 \mu + C_0 \quad A_0, B_0, C_0 \text{ donnés} \\ \text{Critère : } I_0 = \frac{1}{2} \int_0^\theta (\alpha_0 \xi^2 + \beta_0 \mu^2) d\tau \quad \alpha_0 \text{ et } \beta_0 \text{ positifs donnés.} \end{array} \right.$$

On remarque qu'il est facile de ramener à ce type les problèmes avec un critère de la forme $\int_0^{\theta} (\alpha_0 \xi^2 + k_1 \xi + \beta_0 \mu^2 + k_2 \mu) dt$. Nous allons faire deux hypothèses simplificatrices, dont nous montrerons ci-dessous qu'elles ne dénaturent pas le problème, tout en permettant des calculs et une présentation des résultats plus simples.

Hypothèse 1 - $M_0 = -N_0$.

Hypothèse 2 - $C_0 = 0$

On cherche à obtenir un type standard comportant le plus petit nombre de paramètres possible, c'est-à-dire à obtenir :

$$\begin{cases} A = \alpha = N = 1 \\ \beta = B \end{cases}$$

On pose :

$$\begin{cases} \tau = A_0 t \\ \mu = N_0 u \end{cases} \quad (1)$$

On a alors :

$$\begin{cases} t \in [0, T] \text{ avec } T = \frac{\theta}{A_0} \\ u \in [-1, +1]. \end{cases}$$

Dans la nouvelle équation d'évolution $A = 1$.

Enfin pour donner la même valeur à B et β on doit poser :

$$\xi_0 = \varepsilon \frac{\beta_0}{\alpha_0} \frac{A_0}{B_0} N_0 x \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1 \quad (2)$$

On obtient le système réduit S_R ainsi défini :

$$S_R \left\{ \begin{array}{l} \text{Le processus se déroule dans l'intervalle de temps } t \in [0, T]. \\ x \text{ variable d'état : } x(0) = x_0 \text{ et } x(T) = x_T \text{ sont fixés.} \\ u \text{ variable de commande : } u(t) \in [-1, +1]. \\ \text{Evolution : } \frac{dx}{dt} = x + Bu \\ \text{Critère : } I = \frac{1}{2} \int_0^T (x^2 + Bu^2) dt \end{array} \right.$$

Les expressions (1) et (2) permettent la mise sous forme réduite du système et le retour à la forme initiale, on a :

$$B = \frac{\alpha_0}{\beta_0} \frac{B_0}{A_0} N_0^2$$

La constante B est donc toujours positive ; par contre si A_0 est négatif, le changement de variable a permuté l'état initial et l'état final, les valeurs de x_0 et x_T se calculent par l'expression (2).

Remarque.

Dans cette réduction le choix de ϵ est arbitraire, on le choisira par exemple pour obtenir X_T positif et dans tout ce qui suit nous supposons que c'est le choix effectué.

II - Application du principe du Maximum

Le système des équations de Pontryagin S_p correspondant à S_R s'écrit :

$$S_p \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + Bu \\ \frac{d\psi}{dt} = -x - \psi \end{cases} \quad (3)$$

u est choisi pour maximiser à tout instant l'Hamiltonien réduit :

$$h(\psi, x, u) = -\frac{1}{2} B u^2 + \psi B u \quad (4)$$

Le maximum de l'expression (4) est donné par :

$$\begin{cases} u = \psi & \text{si } |\psi| \leq 1 \\ u = \text{signe}(\psi) & \text{si } |\psi| > 1 \end{cases}$$

Soit l'expression de u sur une extrémale :

$$u = \text{signe}(\psi) \cdot \min(1, |\psi|).$$

On distingue alors deux types d'arcs de solution :

- a) si, dans un voisinage de t, $u = \psi$ (commande non saturée ou commande libre) on résout le système (NS) :

$$(NS) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + B\Psi \\ \frac{d\Psi}{dt} = x - \Psi \end{array} \right. \quad \text{avec } |\Psi| \leq 1 \quad (6)$$

b) si, dans un voisinage de t , $u = \varepsilon = \text{signe}(\Psi)$ (commande saturée) on résout le système (S ε) :

$$(S\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + \varepsilon B \\ \frac{d\Psi}{dt} = x - \Psi \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{avec } |\Psi| > 1 \\ \varepsilon = \text{signe}(\Psi) \end{array} \quad (7)$$

Sur une trajectoire extrémale les arcs de solution de type (NS) et les arcs de type (S ε) sont séparés par les points de commutation.

Expression analytique des arcs de trajectoire extrémale

La résolution du système NS (6) donne la solution $x(t)$, $u(t) = \Psi(t)$ à l'instant t d'après l'état du système à l'instant t_0 , soit :

$$x(t_0) = x_{t_0} \quad \text{et} \quad u(t_0) = \Psi(t_0) = \Psi_{t_0}$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{NS}(t ; x_{t_0}, \Psi_{t_0}, t_0) = K(1+\sqrt{1+B}) \exp((t-t_0)\sqrt{1+B}) + K'(1-\sqrt{1+B}) \exp((t_0-t)\sqrt{1+B}). \\ \Psi_{NS}(t ; x_{t_0}, \Psi_{t_0}, t_0) = K \exp((t-t_0)\sqrt{1+B}) + K' \exp((t_0-t)\sqrt{1+B}). \\ \text{avec } K = \frac{1}{2} \left(\Psi_{t_0} + \frac{x_{t_0} - \Psi_{t_0}}{\sqrt{1+B}} \right) \\ K' = \frac{1}{2} \left(\Psi_{t_0} - \frac{x_{t_0} - \Psi_{t_0}}{\sqrt{1+B}} \right) \end{array} \right.$$

De même la résolution du système S_ε (7) donne la solution à l'instant t , soit $x(t)$, $u(t) = \text{signe}(\psi(t))$ en fonction de $x(t_0) = x_{t_0}$, $\psi(t_0) = \psi_{t_0}$, $u(t_0) = \varepsilon = \text{signe}(\psi_{t_0})$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{S_\varepsilon}(t; x_{t_0}, \psi_{t_0}, t_0) = -B\varepsilon + (x_{t_0} + B\varepsilon)e^{t-t_0} \\ \psi_{S_\varepsilon}(t; x_{t_0}, \psi_{t_0}, t) = \psi_{t_0} e^{t_0-t} - B\varepsilon + \frac{1}{2}(x_{t_0} + B\varepsilon)e^{t-t_0} - \frac{1}{2}(x_{t_0} - B\varepsilon)e^{t_0-t} \\ u_{S_\varepsilon} = \varepsilon \end{array} \right.$$

Recherche du domaine atteignant

On fait ici le choix de donner un rôle fondamental au point final x_T , et de considérer que le point initial x_0 peut varier, c'est-à-dire que l'on cherchera à résoudre le problème pour tout x_0 . On remplace donc la notion de domaine atteignable à partir du point initial, par celle de domaine d'où l'on peut atteindre le point final ou domaine atteignant. Le domaine atteignant possède évidemment les mêmes propriétés que le domaine atteignable ; on est assuré de la convexité et de la continuité.

Notons $R(t; X_T, T)$ le domaine atteignant de X_T ; la frontière du domaine est atteinte pour des trajectoires toujours saturées ; soient SP et SM ces deux trajectoires respectivement pour $\varepsilon = +1$ et $\varepsilon = -1$; leurs équations sont donc :

$$\underline{SP} : \quad x(t) = -B + (x_T + B)e^{t-T} \quad (10)$$

$$\underline{SM} : \quad x(t) = B + (x_T - B)e^{t-T} \quad (11)$$

Il est à remarquer que lorsque t tend vers moins l'infini, ces courbes $x(t)$ ont les asymptotes $x = -B$ et $x = +B$; tandis que le domaine atteignable devient infiniment grand quand t augmente indéfiniment. Du point de vue numérique il est toujours avantageux de travailler dans le sens où le processus est stable.

Les courbes SP et SM sont des extrémales, en effet la seule trajectoire admissible à partir d'un point d'une de ces courbes est la courbe elle-même.

III - Structure de la solution

On remarque une propriété simple du système d'équations de PONTYAGIN :
Supposons qu'à l'instant $t_1 \in [0, T]$ commence un arc saturé donc

$$\Psi(t_1) = \varepsilon \quad \text{et} \quad |\Psi(t_1-0)| < 1 \quad |\Psi(t_1+0)| > 1 ;$$

ceci entraîne que $\varepsilon \Psi(t)$ est une fonction croissante au voisinage de t_1 .

$$\text{Sur l'arc saturé } S\varepsilon : \begin{cases} \frac{d\Psi}{dt} = -\Psi + x \\ \frac{dx}{dt} = x + \varepsilon B \end{cases}$$

La première équation entraîne qu'en t_1 $\varepsilon x > 1$.

La deuxième entraîne que εx est une fonction croissante.

Il est clair qu'une autre commutation est alors impossible car $\varepsilon \Psi$ reste une fonction croissante. On peut donc énoncer ce résultat :

Propriété

Il ne peut exister de solution présentant un arc à commande saturée entre deux arcs à commande non saturée.

Ceci permet de donner les seuls types possible de solutions optimales :

- I - $u = \varepsilon$;
- II - $u = \varepsilon$, puis $u = \Psi$;
- III - $u = \Psi$;
- IV - $u = \Psi$, puis $u = \varepsilon$;
- V - $u = \varepsilon$, puis $u = \Psi$, puis $u = \varepsilon$;
- VI - $u = \varepsilon$, puis $u = \Psi$, puis $u = -\varepsilon$;

Courbes de commutation non limites

Les courbes SP et SM sont des lieux de points de commutation, ou courbes de commutation ; en effet les trajectoires des types IV, V, et VI ont leur dernier arc porté par SP ou SM.

Cherchons l'équation du lieu des points de commutation où une commande $u = \epsilon$ précède une commande $u = \Psi$, par suite de la continuité de x et Ψ par rapport aux conditions initiales, on doit obtenir des courbes continues.

On examine les trajectoires extrémales arrivant en x_T à l'instant T avec $\Psi_T = \pm 1$; ce qui correspondrait à une commutation fictive à l'instant terminal.

Deux cas se présentent alors :

a) $x_T < 1$ (on a supposé ci-dessus $x_T \geq 0$).

$\frac{d\Psi}{dt}$ a le signe de $-\Psi$ et la commutation fictive est du type $u = \epsilon$ puis $u = \Psi$. La trajectoire est donc confondue avec SP ou SM et on a solution du type I ; mis à part ce type qui est le seul permettant ici une arrivée en x_T avec commande saturée, les types de commande possibles sont dans l'ordre des x_0 décroissantes :

$$\left| \begin{array}{l} u = -1 ; \text{ puis } u = \Psi ; \text{ (type II-)} \\ u = \Psi ; \text{ (type III)} \\ u = +1 ; \text{ puis } u = \Psi ; \text{ (type II+)} \end{array} \right.$$

On obtient les courbes de commutation NSP et NSM correspondant respectivement aux solutions du type II+ et du type II- en portant dans (8) : $t_0 = T$,

$x_{t_0} = x_T$, $\Psi_{NS}(t) = \pm 1$. L'élimination de Ψ_{t_0} fournit $x_{NS}(t)$ équation d'une courbe de commutation.

Posons alors : $\sqrt{1+B} = R$. On a :

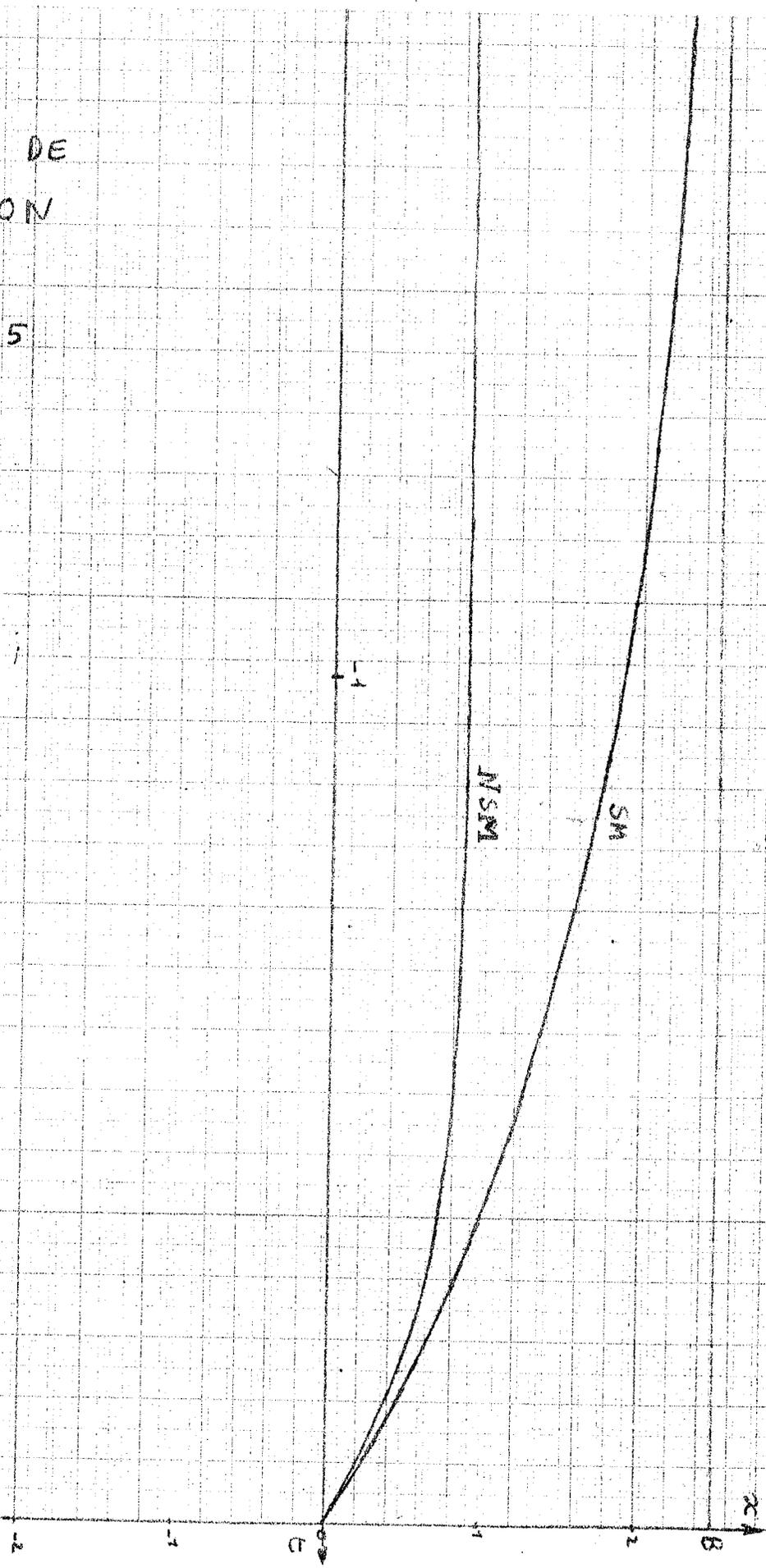
$$(10) \text{ NSP : } x(t) = B(e^{R(T-t)} - e^{R(t-T)}) - 2Rx_T / ((1-R)e^{R(t-T)} - (1+R)e^{R(T-t)}).$$

$$(11) \text{ NSM : } x(t) = -B(e^{R(T-t)} - e^{R(t-T)}) - 2Rx_T / ((1-R)e^{R(t-T)} - (1+R)e^{R(T-t)}).$$

COURBES DE COMMUTATION

$$B = 2,5$$

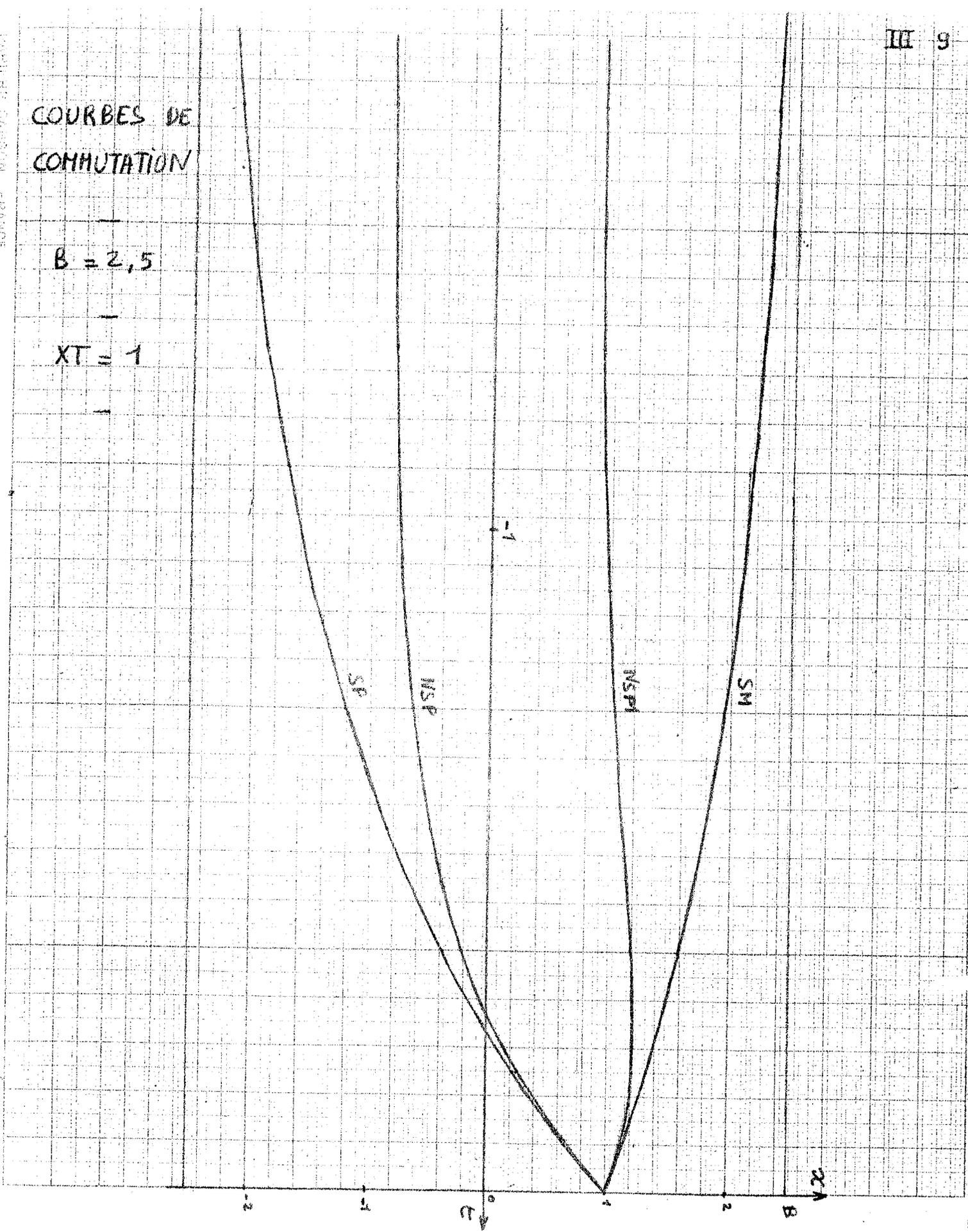
$$X_T = 0$$



COURBES DE COMMUTATION

$B = 2,5$

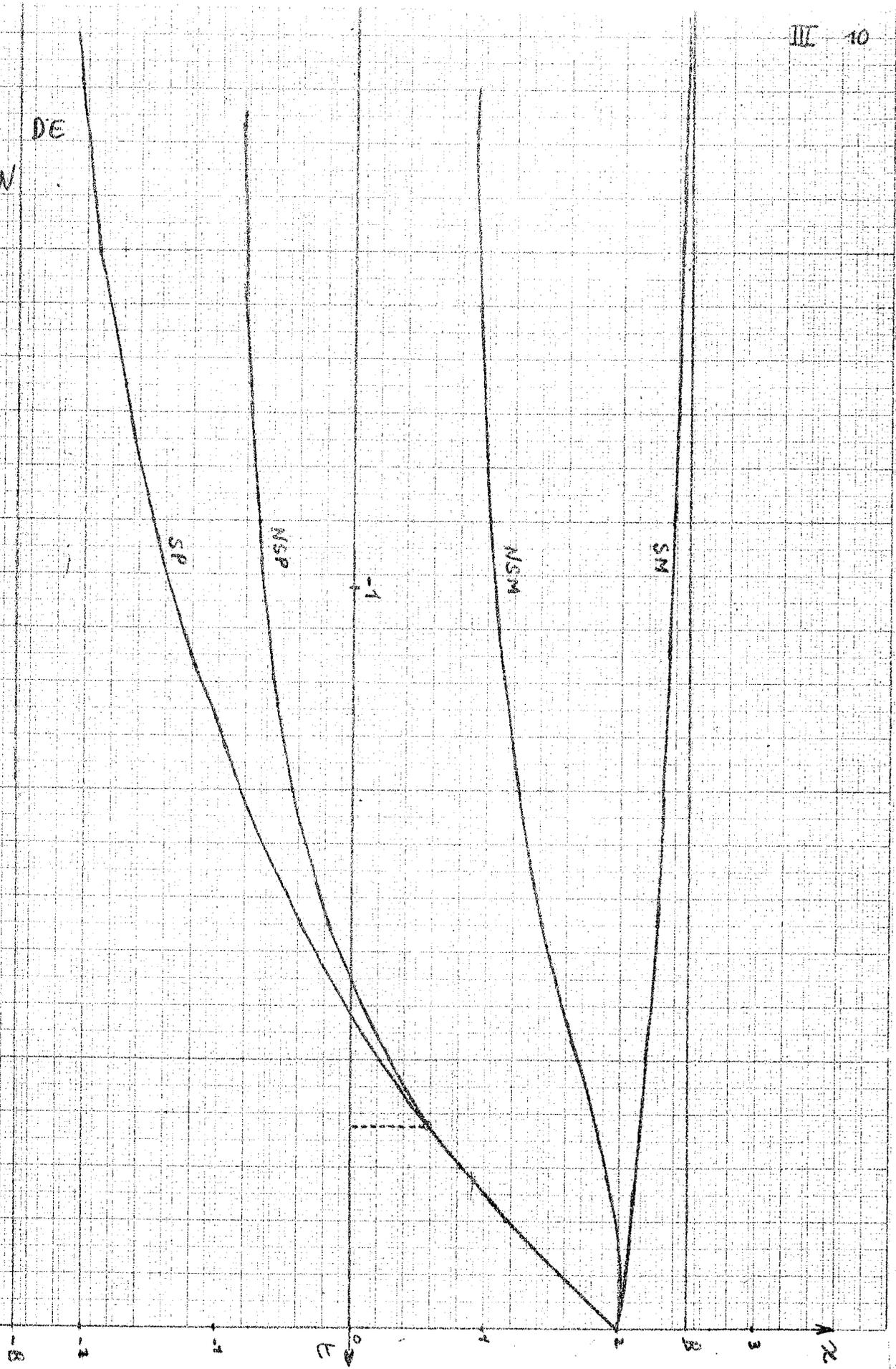
$XT = 1$



COURBES DE COMMUTATION

$B = 2,5$

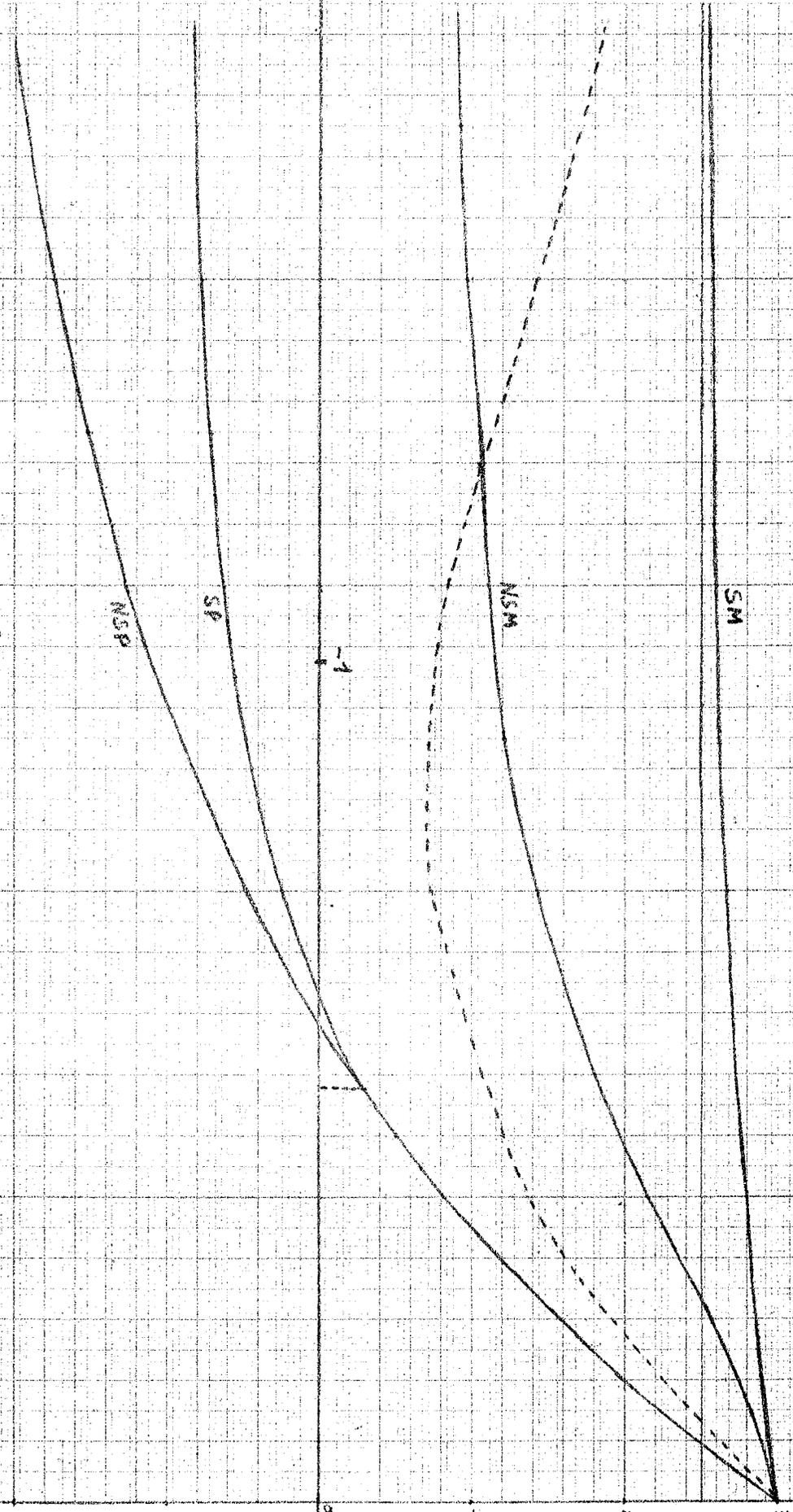
$X_T = 2$



COURBES DE
COMMUTATION

$B = 2,5$

$X_T = 3$



DC

b) $x_T > 1$

Pour $\psi_T = +1$, $\frac{d\psi}{dt}$ est positif et la commutation fictive est du type $u = \psi$ puis $u = +1$ pour $\psi_T = +1$ et du type $u = -1$, puis $u = \psi$ pour $\psi_T = -1$ (trajectoire sur SM). Le premier cas seul est intéressant car il montre qu'il peut exister des commandes des types V et VI avec deux commutations ; c'est un cas que les calculs de NSM et NSP, effectués ci-dessus, n'envisageaient pas ; l'évaluation des courbes de commutation n'est donc valable que dans la partie du plan où les trajectoires n'ont qu'une commutation, c'est-à-dire au dessus de la trajectoire optimale (CL) correspondant à $\psi_T = +1$.

Etude de la courbe (CL)

Sur la trajectoire (CL) la deuxième commutation est fictive et a lieu pour $t = T$; le type de la première commutation est donné par l'étude dans (8) du signe de K' pour $t_0 = T$, $x_{t_0} = x_T$ et $\psi_{t_0} = +1$.

Si $x_T \leq R + 1$ alors $u = +1$ avant la commutation.

Une partie de la courbe NSP (10) doit être recalculée

Si $x_T > R + 1$ alors $u = -1$ avant la commutation.

Une partie de la courbe NSM (10) et la totalité de la courbe NSP (11) doivent être recalculées.

Le calcul ne conduirait pas à des équations que l'on sait résoudre explicitement, on l'affectera donc dans la partie numérique.

Justification des hypothèses H1 et H2

A la lumière de ces calculs on voit que si H1 et H2 ne sont pas vérifiées, la forme des arcs de solution et des courbes de commutation est très légèrement modifiée mais la structure de la solution reste la même ; la même étude peut donc être faite et conduit seulement à des expressions analytiques plus compliquées, les difficultés de résolution numérique seront strictement les mêmes.

En particulier si H1 est vérifiée et si H2 ne l'est pas, il apparait une constante C dans l'équation d'évolution (3) et les arcs de solution sont de la forme :

$$(8') \quad \begin{cases} x_{NS} = K_1(1+R) \exp((t-t_0)\sqrt{1+B}) + K'_1(1-R) \exp((t_0-t)\sqrt{1+B}) - \frac{C}{1+B} \\ \psi_{NS} = K_1 \exp((t-t_0)\sqrt{1+B}) + K'_1 \exp((t_0-t)\sqrt{1+B}) - \frac{C}{1+B} \end{cases}$$

$$(9') \quad \begin{cases} x_{S\varepsilon} = -(B\varepsilon+C) + (x_{t_0} + B\varepsilon+C)e^{t-t_0} \\ \psi_{S\varepsilon} = \psi_{t_0} e^{t_0-t} - (B\varepsilon+C) + \frac{1}{2}(x_{t_0} + B\varepsilon+C)e^{t-t_0} - \frac{1}{2}(x_{t_0} - B\varepsilon-C)e^{t_0-t} \end{cases}$$

B - RESOLUTION NUMERIQUE SUR CALCULATEUR DIGITAL

On se propose de mettre en oeuvre et de comparer une méthode issue du calcul des courbes de commutation et une méthode utilisant les bases de la méthode générale définie au Ch. II-B, mais très simplifiée et adaptée à ce cas simple.

I - Programmes de réduction

Le problème étant donné sous la forme S_0 , avec les hypothèses H1 et H2, il est nécessaire d'écrire les programmes de transformation des données et des variables pour pouvoir le résoudre sous la forme S_R .

Les données de S_0 sont : $A_0, B_0, N_0, \alpha_0, \beta_0, \xi_0, \xi_\theta, \theta$.

Les données de S_R sont : B, x_0, x_T, T .

La procédure REDUC calcule les données de S_R à partir de celles de S_0 et tient compte de la convention faite : x_T est positif.

Les procédures réelles RETX, RETU et RETT permettent de retrouver les valeurs des variables de S_0 après résolution de S_R .

PROGRAMMES DE REDUCTION

```

PROCEDURE REDUC(AO,BO,ALP,BET,NO,KSO,KST,TET)RESULTATS:(B,XO,XT,T) ;
REEL AO,BO,ALP,BET,NO,KSO,KST,TET,B,XO,XT,T ;
DEBUT
  B:=ALP*BO**2*NO**2/(BET*AO**2) ;
  T:=TET/AO ;
  XO:=BET*AO*NO*KSO/(ALP*BO) ;
  XT:=BET*AO*NO*KST/(ALP*BO) ;
  SI XT < 0 ALORS DEBUT XT:=-XT ; XO:=-XO FIN ;
FIN ;

```

```

REEL PROCEDURE RETX(AO,BO,ALP,BET,NO,KST,X) ;
REEL (AO,BO,ALP,BET,NO,KST,X) ;
RETX:= SI AO*KSO > 0 ALORS
  ALP*BO*X/(BET*AO*NO)
  SINON -ALP*BO*X/(BET*AO*NO) ;

```

```

REEL PROCEDURE RETU(AO,NO,KSO,U) ;
REEL AO,NO,KSO,U ;
RETU:= SI AO*KSO > 0 ALORS U/NO SINON -U/NO ;

```

```

REEL PROCEDURE RETT(AO,TET,TEM) ;
REEL AO,TET,TEM ;
RETT:= SI AO > 0 ALORS AO*TEM
  SINON TET-AO*TEM ;

```

La correspondance entre les variables du problème et les identificateurs ALGØL est :

A_0 : AØ ; B_0 : BØ ; α_0 : ALP ; β_0 : BET ; ξ_0 : KSØ ; ξ_θ : KST ; θ : TET ;

N_0 = NØ ; B = B ; x_0 : XØ ; x_T : XT ; T : T ;

x : X ; u : U ; t : TEM.

II - Méthode des courbes de commutation

Le programme exposé en détail concerne le problème mis au préalable sous forme réduite S_R et sort également des résultats sous cette forme. C'est le programme de base dont on donnera ensuite des versions modifiées plus adaptées aux différents cas particuliers.

On peut diviser ce programme en quatre parties

- Déclarations et procédures auxiliaires.
- Etablissement des courbes limites.
- Traitement du problème grâce aux courbes limites.
- Edition des résultats.

On choisit un pas et on discrétise le problème ; l'intervalle $[0, T]$ est divisé en M parties égales ; les points de la grille ainsi définie sont numérotés de 1 (instant initial) à M+1 (instant terminal). Les trajectoires, les commandes et les courbes de commutation sont définies par des tableaux $[1 : M+1]$. Les seuls autres instants où l'état et la commande sont calculés sont les points de commutation.

III-16
ORGANIGRAMME

début

DECLARATIONS.

PROCÉDURES AUXILIAIRES.

INTERP

NEWTON

BISSECTION

REV

REW

FM

FP

TIREP

TIREM

COURBES LIMITES

* SP.

* SM.

* PREMIERE EVALUATION DE NSP ET NSM.

* TEST DE POSSIBILITE : SEQUENCE OU SORTIE SUR IMPØSS.

* TEST DE POINT FINAL : SEQUENCE OU SORTIE SUR RECTIF.

* TEST DE POINT DE DEPART : SORTIE SUR L'UN DES DYPES DE TRAITEMENT.

* RECTIF, CORRECTION DE NSM ET NSP : SEQUENCE OU DIAGNOSTIC D'ERREUR.

* TEST DU POINT DE DEPART : SORTIE SUR L'UN DES TYPES DE TRAITEMENT.

TRAITEMENT

* DESAM	}	DIAGNOSTIC D'ERREUR OU SORTIE
* DESAP		SUR <u>EDITION.</u>
* DELIB		

EDITION DES RESULTATS : SORTIE SUR FIN.

DIAGNOSTIC D'ERREUR ET D'IMPOSSIBILITE : SORTIE SUR FIN.

fin

Procédures auxiliaires

INTERP et NEWTON permettent l'interpolation à partir d'une table. Le commentaire des procédures a été conservé pour en expliquer l'emploi.

BISSECTION est une procédure classique de recherche du zéro d'une fonction par bisection de l'intervalle. Les procédures suivantes du type réel procédure sont utilisées dans bisection.

REV et REW évaluent la variable adjointe plus ou moins un, à un instant fixé en fonction d'un instant de commutation ($u = \Psi$, puis $u = +1$) fixé. Elles sont utilisées à la réévaluation de NSM et NSP.

FM et FP calculent la distance entre NSM (ou NSP) et la trajectoire saturée issue du point initial. Elles sont utilisées dans DESAM et DESAP.

TIREM et TIREP calculent la distance entre le point initial et une trajectoire optimale à arrivée saturée en fonction de l'instant de commutation. Elles sont utilisées dans DELIB.

Courbes limites

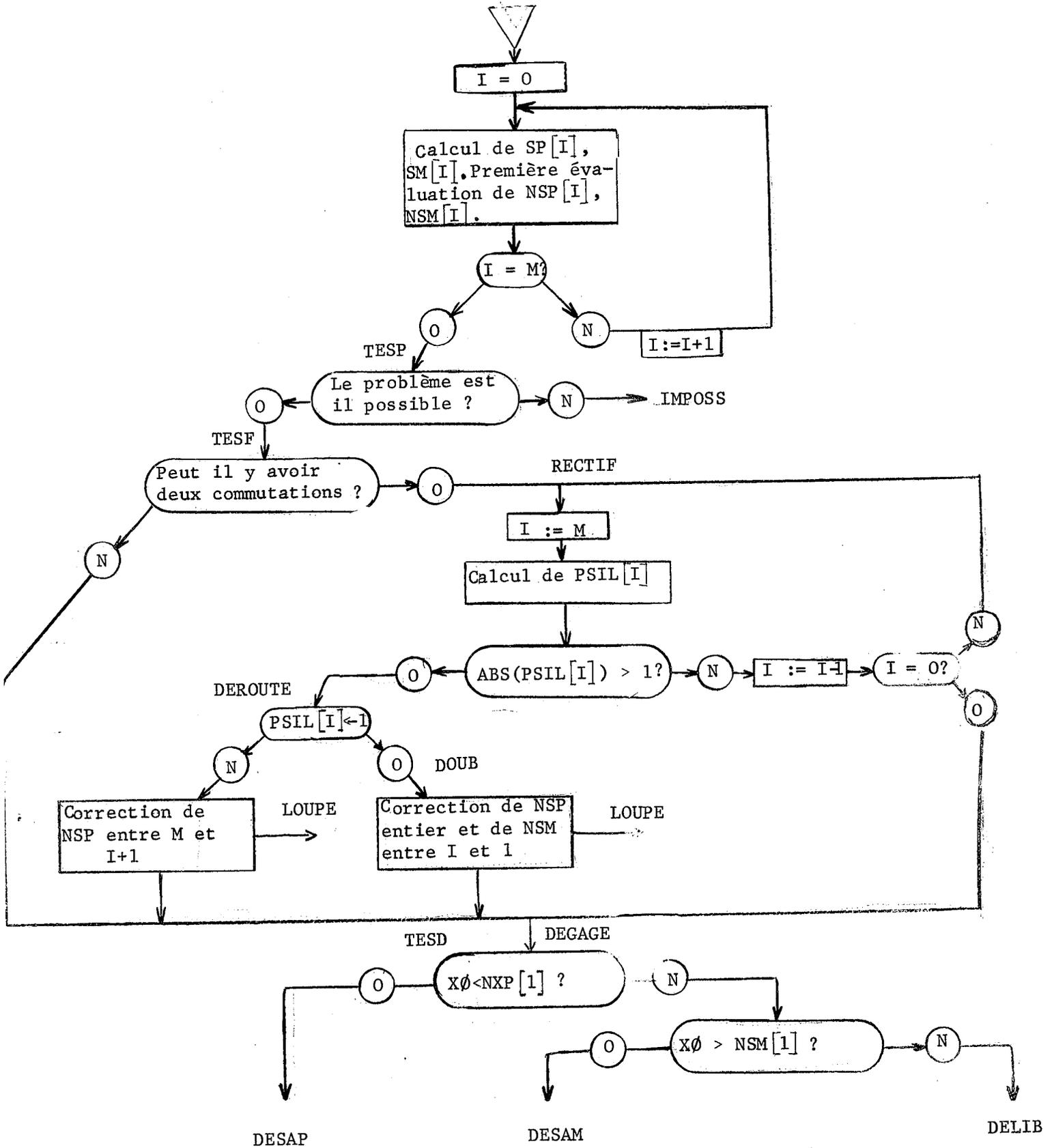
Le calcul de $SP[I]$ et de $SM[I]$ s'effectue par la formule du § III A 2 ; de même la première évaluation de $NSP[I]$ et $NSM[I]$ d'après le § III A 3.

On effectue ensuite le test de possibilité du problème ("TESP"), l'étiquette "IMPØSS" renvoie à la fin du programme.

On examine ensuite la valeur de XT pour connaître le nombre maximum de commutations possibles (Cf. III A 8) ("TESF").

Si une seule commutation est possible le calcul de NSP et NSM effectué est correct, les courbes limites sont déjà tracées et on passe à l'étiquette "DEGAGE" qui choisit le type de traitement.

COURBES LIMITES



Si deux commutations sont possibles il faut corriger l'évaluation de NSM et NSP ("RECTIF"). On doit construire la trajectoire optimale (CL) correspondant à $\psi_T = +1$. En fait il suffit de calculer $PSIL[I]$ et de chercher la commutation. Suivant le signe on effectue la correction sur une partie de NSP ou sur NSP entier et une partie de NSM. La correction se fait en cherchant par BISSECTIØN le zéro de la fonction $REV(X)$ ou $REW(X)$; X est le dernier instant de commutation avant le point final ; REV et REW sont proportionnels à la variable adjointe diminuée ou augmentée de 1 au point K de la grille sur la trajectoire optimale correspondant à la commutation en X.

On situe ensuite X_0 par rapport à $NSP[1]$ et $NSM[1]$ ("DEGAGE") et on choisit donc le type de traitement : "DESAP" "DESAM" "DELIB".

Traitement

Dans le cas où on est assuré d'un départ avec commande saturée on utilise le traitement "DESAP" (saturé $u = +1$) ou "DESAM" (saturé $u = -1$) ; ces deux types de traitement sont presque identiques, on peut examiner l'organigramme de "DESAM".

"BOUM" calcule la trajectoire saturée pas par pas en vérifiant la position par rapport à NSM.

"AFFIM" calcule avec précision l'instant de commutation TC par la 'PROCEDURE' BISSECTIØN et la 'REEL' 'PROCEDURE' FM calculant la distance de la trajectoire saturée à la courbe NSM ; on utilise pour cela une interpolation sur la table $NSM[K]$.

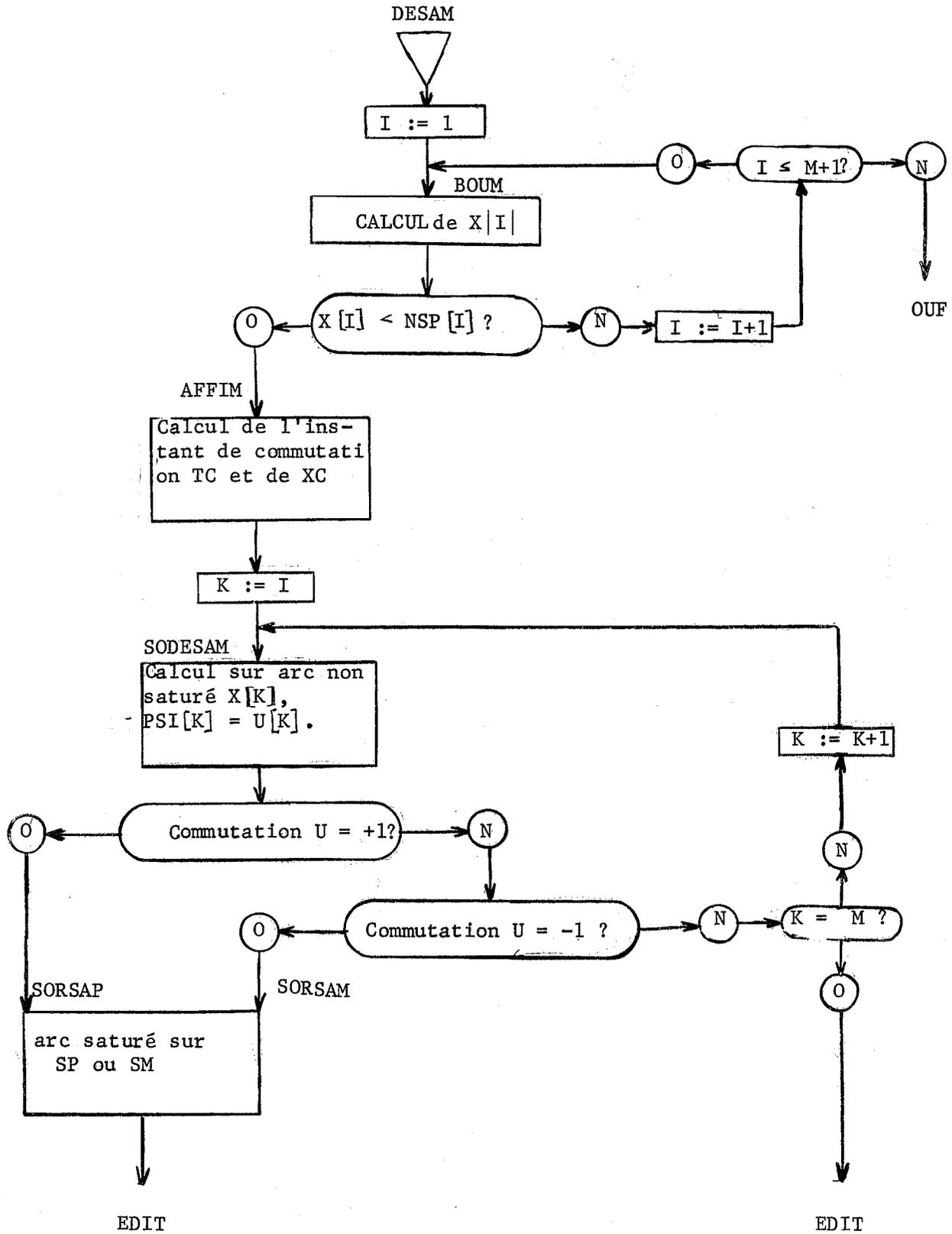
Dans le cas d'un départ avec commande libre $u = \psi$ on utilise le traitement "DELIB". XLP est l'état initial d'un système sans contrainte atteignant l'état final avec une variable adjointe égale à +1.

On compare cette valeur à $NSP[1]$ pour savoir si les contraintes interviennent.

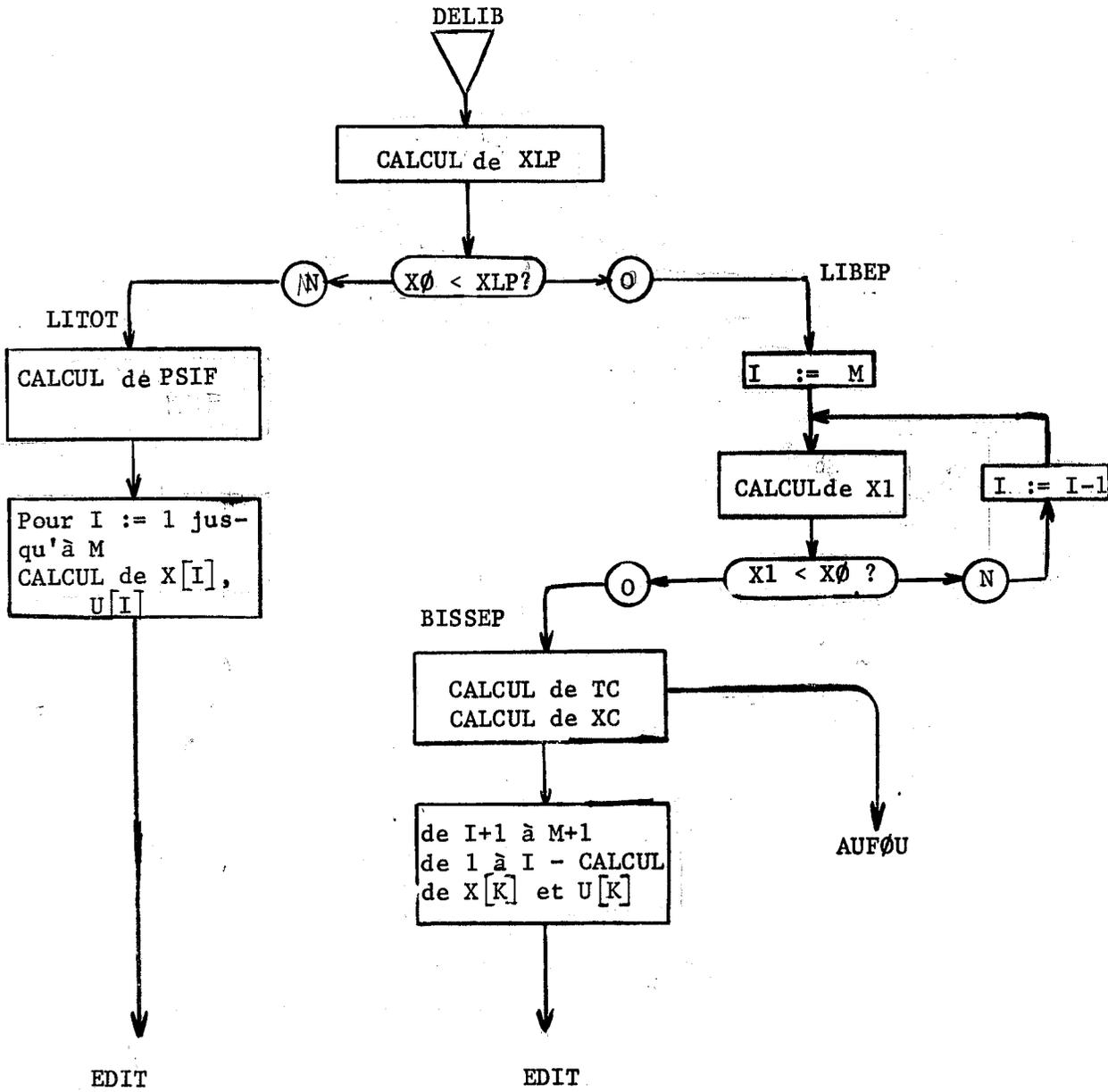
Le test de la position de l'état initial par rapport à la valeur XLP détermine le type de traitement "LIBEP" et "LITØT".

"LITØT" détermine directement la variable adjointe dans le cas d'une commande complètement libre.

TRAITEMENT AVEC DEPART SATURE



TRAITEMENT AVEC DEPART LIBRE



"LIBEP" recherche entre quels points de la grille se trouve le point de commutation, avant de déterminer avec précision ce point de commutation ("BISSEP") ; on utilise la 'PROCEDURE' BISSECTION et la 'REEL' 'PROCEDURE' TIREP qui calcule la distance de X_0 au point initial correspondant à la commutation à l'instant X . On construit ensuite la trajectoire point par point.

La discrétisation s'effectue ici au niveau des courbes de commutation ; le programme étant exposé ici sous sa forme la plus complexe. Dans le cas où $XT < 1$ on pourra remplacer la discrétisation des courbes et l'interpolation par une procédure calculant en continu les courbes de commutation par leur expression analytique ; les résultats seront alors bien meilleurs tant au point de vue temps que précision.

III - Méthode de tir

On applique les résultats énoncés au Ch. II B § 5 dans le cas général, pour construire une suite de trajectoires extrémales en modifiant à chaque essai $\Psi(0)$ pour obtenir une valeur $x^{(k)}(T)$ plus proche de x_T que $x^{(k-1)}(T)$:

C'est le programme TRACOP-BUT.

La procédure PONT(PSI) calcule la trajectoire extrémale correspondant à la valeur initiale PSI de la variable adjointe ; elle utilise les expressions analytiques des arcs de trajectoire déterminées ci-dessus en Ch. III A. Les instants de commutation sont recherchés avec une grande précision par la méthode de bisection (Procédure auxiliaire BISSECTION). On a également écrit la procédure DITRAC (PSI) effectuant le même travail mais par intégration numérique des équations différentielles (Procédure auxiliaire RESYDIF).

La procédure BUT effectue les itérations. Plusieurs méthodes sont possibles, la convergence ne posant ici aucun problème :

- on peut calculer un gradient et la dérivée $\frac{dX}{d\Psi} F$.
- on peut encadrer la valeur optimale de Ψ_0 et réduire l'intervalle, soit par bisection, soit par une méthode d'interpolation.

METHODE DES COURBES DE COMMUTATION

DEBUT

REEL B, XO, XT, PA;
 ENTIER M;
 LIRE(B, XO, XT, PA, M);
 DEBUT

ENTIER I, K, L;
 REEL R, XC, XC1, XC2, TC, TC1, TC2, XLP, XLM, XOC, PSIF, X1, X2,
 RESU, RESO;
 REEL TABLEAU SP, SM, NSP, NSM, X, U, XL, PSIL[1:M+1];
 XC:=0.0;
 R:=RAC2(1+B);
 PROCEDURE INTERP(TAB, NO, N, A, B, EPS, X) RESULTATS:(F) ;
 VALEUR NO, N, A, B, X, EPS;
 REEL TABLEAU TAB;
 ENTIER NO, N;
 REEL A, B, X, F, EPS;
 COMMENTAIRE INTERP DETERMINE SI L'ON DOIT UTILISER UNE
 FORMULE D'INTERPOLATION DE NEWTON ASCENDANTE OU
 DESCENDANTE ET EFFECTUE CETTE INTERPOLATION(OU
 EXTRAPOLATION) DE LA FONCTION F POUR LA VALEUR X A
 PARTIR DES VALEURS DE F TABULEE EN TAB(I), I=NO, N.
 F(A)=TAB(NO), F(B)=TAB(N) LA TOLERANCE D'UTILISATION DES
 FORMULES DE NEWTON EST EPS .;
 DEBUT

ENTIER K, S, KP, NP;
 REEL P;
 P:=(B-A)/(N-NO);
 SI ABS(X-A) < EPS ALORS
 DEBUT

F:=TAB[NO];
 ALLERA TERMIN

FIN
 SINON
 SI X < A ALORS
 DEBUT

S:=+1;
 KP:=NO;
 NP:=N;
 ALLERA INTER1

FIN
 SINON
 DEBUT

K:=0;
 SI X > A+K*P ALORS
 DEBUT

K:=K+1;
 SI K > N-NO ALORS
 DEBUT

KP:=N;
 NP:=NO;
 S:=-1;
 ALLERA INTER1

FIN
 SINON ALLERA INTER2

FIN

INTER2:

```

SINON
SI ABS(X-(A+K*P)) < EPS ALORS
DEBUT
    F:=TAB[N0+K];
    ALLERA TERMIN
FIN
SINON
SI K < (N-N0)/2 ALORS
DEBUT
    S:=+1;
    KP:=N0+K-1;
    NP:=N;
    ALLERA INTER1
FIN
SINON
DEBUT
    S:=-1;
    KP:=N0+K;
    NP:=N0;
    ALLERA INTER1
FIN

```

```

FIN ;
NEWTON(TAB,KP,NP,EPS,A+KP*P,P,X,S,F);

```

INTER1:
TERMIN:

```

FIN ;
PROCEDURE NEWTON(YK,K,NP,EPS,XK,H,X,S)RESULTATS:(Y) ;
VALEUR K,NP,EPS,XK,H,X;
REEL TABLEAU YK;
REEL EPS,XK,H,X,Y;
ENTIER K,S,NP;
COMMENTAIRE NEWTON DONNE LA VALEUR Y DE LA FONCTION
TABULEE EN YK POUR LA VALEUR X DE LA VARIABLE EN
UTILISANT LA FORMULE DE NEWTON ASCENDANTE(S=-1) OU
DESCENDANTE(S=+1) DELTA(I) EST LA DIFFERENCE FINIE
D'ORDRE I RELATIVE AU PAS H. YK(K) EST LA VALEUR
CORRESPONDANT A XK QUI EST LA VALEUR DE X PAR
DEFAULT(S=+1) OU PAR EXCES(S=-1)(POUR LES
INTERPOLATIONS) LA TABLE EST SUPPOSEE ETABLIE A EPS PRES
ET LA PRECISION SUR Y PEUT ETRE SUPERIEURE. ELLE N'EST
LIMITEE QUE :1 LORSQUE L'ORDRE DES DIFFERENCES FINIES
DEVENANT TROP GRAND,LEUR VALEUR N'EST PLUS SIGNIFICATIVE
OU 2 LORSQUE L'ETENDUE DE LA TABLE LIMITE L'ORDRE DE CES
DIFFERENCES.;
DEBUT

```

NEWT01:

```

REEL TABLEAU
DELTA[1]:( SI S=+1 ALORS (NP-K) SINON K);
REEL A,NU,NF,DA,DAP,AP;
ENTIER M,J,I,L;
M:=1;
DELTA[M]:=1.0;
POUR L:=M TANTQUE (
SI S=1 ALORS ((K+M) < NP)
SINON ((K-M) > NP)) FAIRE
DEBUT
    DELTA[L]:=YK[

```

```

SI S=+1 ALORS (K+L)
SINON K];
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA L FAIRE
DEBUT
    A:=1.0;
    POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA I FAIRE
    A:=A*(L-J+1)/J;
    A:=((-1)**I)*A*YK[
    SI S=+1 ALORS (K+L-1)
    SINON (K-1)];
    DELTA[L]:=DELTA[L]+A
FIN ;
SI ABS(DELTA[M]) < (2**(M-1))*EPS
ALORS
DEBUT
    NF:=M-1;
    ALLERA NEWTO2
FIN
SINON
DEBUT
    M:=M+1;
    ALLERA NEWTO1
FIN ;

```

```

FIN DU CALCUL DES DIFFERENCES ;
NF:=M-1;
Y:=YK[K];
NU:=S*(X-XK)/H;
DA:=0.0;
A:=1.0;
POUR M:=1 PAS 1 JUSQUA NF FAIRE
DEBUT

```

```

    AP:=A;
    A:=1.0;
    DAP:=DA;
    POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
    A:=A*(NU-I+1)/I;

```

```

FIN ;
    A:=(S**M)*A*DELTA[M];
    DA:=ABS(AP-A);
    SI M > 2 ET DA > 2.0*DAP ALORS
    ALLERA TERMIN
    SINON Y:=Y+A;

```

TERMIN:

```

FIN ;
PROCEDURE BISSECTION(F,Y1,Y2,EPS,ETA,X,PASDERACINE);
VALEUR Y1,Y2;
REEL PROCEDURE F;
REEL Y1,Y2,EPS,ETA,X;
ETIQUETTE PASDERACINE;
DEBUT
    ENTIER I,J,K;
    REEL G,G1;
    I:=J:=K:=1;

```

NEWTO2:

ALPHA:

```

X:=Y2;
G:=F(X);
SI ABS(G) < EPS ALORS ALLERA TERM;
SI I=1 ALORS
DEBUT
    I:=2;
    G1:=G;
    X:=Y1;
    ALLERA ALPHA
FIN ;
SI SIGN(G)=SIGN(G1) ALORS
DEBUT
    SI J=1 ALORS ALLERA PASDERACINE;
    Y2:=X;
    ALLERA TEST
FIN ;
SI K=1 ALORS
DEBUT
    J:=K:=2;
    ALLERA MILIEU

```

TEST:
MILIEU:

```

FIN ;
Y1:=X;
SI ABS(Y1-Y2) < ETA ALORS ALLERA TERM;
X:=(Y1+Y2)/2.0;
ALLERA ALPHA;

```

TERM:

```

FIN PROCEDURE BISSECTION ;
REEL PROCEDURE REV(X) ;
VALEUR X;
REEL X;
DEBUT
    REEL XC;
    XC:=-B+(B+XT)*EXP(-X*PA);
    REV:=(1+(XC-1)/R)*EXP((K+X-M-1)*PA)+(1-(XC-1)/R)*
    EXP((M+1-X-K)*PA)-2.0;

```

```

FIN ;
REEL PROCEDURE REW(X) ;
VALEUR X;
REEL X;
DEBUT
    REEL XC;
    XC:=-B+(B+XT)*EXP(-X*PA);
    REW:=(1+(XC-1)/R)*EXP((K+X-M-1)*PA)+(1-(XC-1)/R)*
    EXP((M+1-X-K)*PA)+2.0;

```

```

FIN ;
REEL PROCEDURE FM(X) ;
VALEUR X;
REEL X;
DEBUT
    REEL Y;
    INTERP(NSM,1,M+1,1.0,M+1.0,-7,X,Y);
    FM:=B+(XO-B)*EXP((X-1)*PA)-Y;

```

```

FIN ;
REEL PROCEDURE FP(X) ;
VALEUR X;
REEL X;
DEBUT
    REEL Y;
    INTERP(NSP,1,M+1,1.0,M+1.0,Δ-7,X,Y);
    FP:=-B+(XO-B)*EXP((X-1)*PA)-Y;

```

```

FIN ;
REEL PROCEDURE TIREP(TOC) ;
VALEUR TOC;
REEL TOC;
DEBUT
    XOC:=-B+(B+XT)*EXP((TOC-M-1)*PA);
    TIREP:=0.5*(1.0+(XOC-1.0)/R)*(1+R)*EXP((1.0-TOC)*
    R*PA)+0.5*(1.0-(XOC-1.0)/R)*(1-R)*EXP((TOC-1.0)*R*
    PA)-XO;

```

```

FIN ;
COURBESLIMITES:
POUR I:=0 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
DEBUT
    SP[M-I+1]:=-B+(B+XT)*EXP(-I*PA);
    SM[M-I+1]:=B+(XT-B)*EXP(-I*PA);
    NSP[M-I+1]:=((R-1)*(R+1)*(EXP(R*I*PA)-EXP(-R*I*
    PA))-2*XT*R)/((1-R)*EXP(-I*PA*R)-(1+R)*EXP(I*PA*
    R));
    NSM[M-I+1]:=((1-R)*(R+1)*(EXP(R*I*PA)-EXP(-R*I*
    PA))-2*XT*R)/((1-R)*EXP(-I*PA*R)-(1+R)*EXP(I*PA*
    R));
    SI NSP[M-I+1] < SP[M-I+1] ALORS NSP[M-I+
    1]:=SP[M-I+1];
    SI NSM[M-I+1] > SM[M-I+1] ALORS NSM[M-I+
    1]:=SM[M-I+1];

```

```

FIN ;
TESP:
SI XO > SM[1] ALORS ALLERA IMPOSS;
SI XO < SP[1] ALORS ALLERA IMPOSS;
TESF:
SI XT > 1 ALORS ALLERA RECTIF;
ALLERA DEGAGE;
RECTIF:
POUR I:=M PAS -1 JUSQUA 1 FAIRE
DEBUT
    XL[I]:=0.5*(1+R)*(1+(XT-1)/R)*EXP(-(M+1-I)*R*
    PA)+0.5*(1-R)*(1-(XT-1)/R)*EXP((M+1-I)*R*PA);
    PSIL[I]:=0.5*(1+(XT-1)/R)*EXP(-(M+1-I)*R*PA)+
    0.5*(1-(XT-1)/R)*EXP((M+1-I)*R*PA);
    SI ABS(PSIL[I]) > 1.0 ALORS ALLERA
    DEROUTE;

```

```

FIN ;
ALLERA DEGAGE;
DEROUTE:
SI PSIL[I] < -1 ALORS ALLERA DOUB;
POUR K:=M PAS -1 JUSQUA I+1 FAIRE
DEBUT

```

```

BISSECTION(REV,0.0,M+1.0-K,Δ-7,Δ-7,RESU,LOUPE);
RESO:=-B+(B+XT)*EXP(-RESU*PA);
NSP[K]:=0.5*(1+R)*(1+(RESO-1)/R)*EXP((K+RESU-M-2)*PA)+0.5*(1-R)*(1-(RESO-1)/R)*EXP((M+2-K-RESU)*PA);

```

```

FIN ;
ALLERA DEGAGE;
POUR K:=M PAS -1 JUSQUA 1 FAIRE
DEBUT

```

DOUB:

```

BISSECTION(REV,0.0,M+1.0-K,Δ-7,Δ-7,RESU,LOUPE);
RESO:=-B+(B+XT)*EXP(-RESU*PA);
NSP[K]:=0.5*(1+R)*(1+(RESO-1)/R)*EXP((K+RESU-M-2)*PA)+0.5*(1-R)*(1-(RESO-1)/R)*EXP((M+2-K-RESU)*PA);

```

```

FIN ;
POUR K:=I PAS -1 JUSQUA 1 FAIRE
DEBUT

```

```

BISSECTION(REV,0.0,M+1.0-K,Δ-7,Δ-7,RESU,LOUPE);
RESO:=-B+(B+XT)*EXP(-RESU*PA);
NSM[K]:=0.5*(1+R)*(1+(RESO-1)/R)*(EXP((K+RESU-M-2)*PA)+0.5*(1-R)*(1-(RESO-1)/R)*EXP((M+2-K-RESU)*PA));

```

```

FIN ;
ALLERA DEGAGE;
ECRIRE( " LOUPE " );
ALLERA TILT;

```

LOUPE:

DEGAGE:

```

;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
ECRIRE(I,SP[I],SM[I],NSP[I],NSM[I]);
SI XO > NSM[I] ALORS ALLERA DESAM;
SI XO < NSP[I] ALORS ALLERA DESAP;
ALLERA DELIB;

```

TESD:

DESAM:

BOUM:

```

I:=1;
X[I]:=B+(XO-B)*EXP((I-1)*PA);
SI X[I] < NSM[I] ALORS ALLERA AFFIM;
U[I]:=-1.0;
I:=I+1;
SI I < M+1 ALORS ALLERA BOUM;
ALLERA OUF;

```

AFFIM:

DEBUT

SODESAM:

```

BISSECTION(FM,I-1.0,I-0.0,Δ-7,Δ-7,TC,AUFOU);
XC:=B+(XO-B)*EXP((TC-1)*PA);
ECRIRE( " DEPART SATURE " , " PSI NEGATIF " );
ECRIRE( " COMMUTATION EN " ,TC, " POUR LA VALEUR " ,XC);
POUR K:=I PAS 1 JUSQUA M+1 FAIRE
DEBUT

```

```

X[K]:=0.5*((XC+1.0)/R-1.0)*(1+R)*EXP(R*(K-TC)*PA)-0.5*(1.0+(XC+1.0)/R)*(1-R)*EXP(R*(TC-K)*PA);
U[K]:=0.5*((XC+1.0)/R-1.0)*EXP(R*(K-TC)*PA)-0.5*(1.0+(XC+1.0)/R)*EXP(R*(TC-K)*PA);

```

```

SI X[K] < SP[K] ALORS ALLERA
SORSAP;
SI X[K] > SM[K] ALORS ALLERA
SORSAM;
SI U[K] > 1.0 ALORS ALLERA SORSAP;
SI U[K] < -1.0 ALORS ALLERA
SORSAM;

```

FIN ;

```

FIN ;
ALLERA EDIT;

```

DESAP:
BOUP:

```

I:=1;
X[I]:=-B+(X0+B)*EXP((I-1)*PA);
SI X[I] > NSP[I] ALORS ALLERA AFFIP;
U[I]:=+1.0;
I:=I+1;

```

AFFIP:

```

SI I < M+1 ALORS ALLERA BOUP;
ALLERA OUF;
DEBUT

```

CODESAP:

```

BISSECTION(FP, I-1.0, I-0.0, Δ-7, Δ-7, TC, AUFOU);
XC:=-B+(X0+B)*EXP((TC-1)*PA);
ECRIRE( " DEPART SATURE " , " PSI POSITIF " );
ECRIRE( " COMMUTATION EN " , TC,
" POUR LA VALEUR " , XC);
POUR K:=I PAS 1 JUSQUA M+1 FAIRE
DEBUT

```

```

X[K]:=0.5*((XC-1.0)/R+1.0)*(1+R)*EXP(R*
(K-TC)*PA)-0.5*((XC-1.0)/R-1.0)*(1-R)*
EXP(R*(TC-K)*PA);
U[K]:=0.5*((XC-1.0)/R+1.0)*EXP(R*(K-TC)*
PA)-0.5*((XC-1.0)/R-1.0)*EXP(R*(TC-K)*PA);
SI X[K] < SP[K] ALORS ALLERA
SORSAP;
SI X[K] > SM[K] ALORS ALLERA
SORSAM;
SI U[K] > 1.0 ALORS ALLERA SORSAP;
SI U[K] < -1.0 ALORS ALLERA
SORSAM;

```

FIN ;

```

FIN ;
ALLERA EDIT;

```

DELIB:

```

ECRIRE( " DEPART LIBRE " );
XLP:=0.5*((1+(XT-1)/R)*(1+R)*EXP(-M*R*PA)+(1-(XT-1)/R)*
(1-R)*EXP(M*R*PA));

```

LITOT:

```

SI XLP < NSP[1] ALORS XLP:=NSP[1];
SI X0 < XLP ALORS ALLERA LIBEP;
PSIF:=(2*X0*R-XT*((1+R)*EXP(-R*M*PA)-(1-R)*EXP(R*M*PA)))/
((R+1)*(R-1)*(EXP(-R*M*PA)-EXP(R*M*PA)));
POUR I:=0 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
DEBUT

```

```

X[M-I+1]:=0.5*(PSIF+(XT-PSIF)/R)*(1+R)*EXP(-R*I*
PA)+0.5*(PSIF-(XT-PSIF)/R)*(1-R)*EXP(R*I*PA);

```

$U[M-I+1] := 0.5 * (PSIF + (XT - PSIF) / R) * \exp(-R * I * PA) +$
 $0.5 * (PSIF - (XT - PSIF) / R) * \exp(R * I * PA);$

LIBEP: FIN ;
 ALLERA EDIT;
 ECRIRE(" LIBEP ");
 DEBUT

POUR I:=M PAS -1 JUSQUA 1 FAIRE
 DEBUT

$X1 := 0.5 * (1.0 + (NSP[I] - 1.0) / R) * \exp(-PA * R *$
 $(I - 1)) * (1 + R) + 0.5 * (1.0 - (NSP[I] - 1.0) / R) *$
 $\exp(PA * (I - 1) * R) * (1 - R);$
 SI X1 < X0 ALORS ALLERA BISSEP;

BISSEP: FIN ;
 BISSECTION(TIREP, I-0.0, I+1.0, Δ-7, Δ-7, TC, AUFU);
 XC:=XOC;
 ECRIRE(" XOC= " , XOC);
 POUR K:=I+1 PAS 1 JUSQUA M+1 FAIRE
 DEBUT

X[K]:=SP[K];
 U[K]:=1.0;

FIN ;
 POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA I FAIRE
 DEBUT

$X[K] := 0.5 * (1.0 + (XC - 1.0) / R) * (1 + R) * \exp(R *$
 $PA * (K - TC)) + 0.5 * (1.0 - (XC - 1.0) / R) * (1 - R) *$
 $\exp(R * PA * (TC - K));$
 $U[K] := 0.5 * (1.0 + (XC - 1.0) / R) * \exp(R * PA * (K -$
 $TC)) + 0.5 * (1.0 - (XC - 1.0) / R) * \exp(R * PA * (TC -$
 $K));$

FIN ;
 ECRIRE(" COMMUTATION EN " , TC,
 " POUR LA VALEUR " , XC);
 ALLERA EDIT;

IMPOSS: FIN ;
 ECRIRE(XO, " N EST PAS DANS " , SP[1], SM[1]);
 ALLERA TILT;
 AUFU: ECRIRE(" ERREUR A LA BIS " , " SECTION ");
 ALLERA TILT;
 SORSAM: POUR L:=K PAS 1 JUSQUA M+1 FAIRE
 DEBUT

X[L]:=SM[L];
 U[L]:=-1.0

SORSAP: FIN ;
 ALLERA EDIT;
 POUR L:=K PAS 1 JUSQUA M+1 FAIRE
 DEBUT

X[L]:=SP[L];
 U[L]:=+1.0

FIN ;
 ALLERA EDIT;

```
EDIT:      POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M+1 FAIRE
           ECRIRE(I,,X[I],,U[I]);
           XOC:=0.0;
           POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
           XOC:=XOC+(X[I]*X[I]+B*U[I]*U[I]);
           ECRIRE( " FONCTION ECONO " ,XOC);
TILT:      ;
           HEURE;
FIN ;
```

METHODE DE TIR

DEBUT

```

REEL XO, XF, T, B, EPS;
ENTIER M;
LIRE (XO, XF, T, B, EPS, M);
DEBUT

```

```

REEL TABLEAU X, U[1:M+1];
REEL PA, PSI, TC1, XC1, PSIC1, TC2, XC2, R, XT;
ENTIER K;
PROCEDURE BISSECTION(F, Y1, Y2, EPS, ETA, X, PASDERACINE);
VALEUR Y1, Y2;
REEL PROCEDURE F;
REEL Y1, Y2, EPS, ETA, X;
ETIQUETTE PASDERACINE;
DEBUT

```

ALPHA:

```

ENTIER I, J, K;
REEL G, G1;
I:=J:=K:=1;
X:=Y2;
G:=F(X);
SI ABS(G) < EPS ALORS ALLERA TERM;
SI I=1 ALORS
DEBUT

```

```

I:=2;
G1:=G;
X:=Y1;
ALLERA ALPHA

```

```

FIN ;
SI SIGN(G)=SIGN(G1) ALORS
DEBUT

```

```

SI J=1 ALORS ALLERA PASDERACINE;
Y2:=X;
ALLERA TEST

```

```

FIN ;
SI K=1 ALORS
DEBUT

```

```

J:=K:=2;
ALLERA MILIEU

```

```

FIN ;
Y1:=X;
SI ABS(Y1-Y2) < ETA ALORS ALLERA TERM;
X:=(Y1+Y2)/2.0;
ALLERA ALPHA;

```

TEST:
MILIEU:

TERM:

```

FIN PROCEDURE BISSECTION ;
PROCEDURE BUT(XO, XF, T, B, EPS, PSI) ;
REEL XO, XF, T, B, EPS, PSI;
DEBUT

```

```

REEL I, J, Y, Z;
REEL PROCEDURE TIR(X) ;
REEL X;
TIR:=PONT(X)-XF;
Y:=PONT(0.1);
I:=-0.9;
J:=1.1;
SI Y > XF ALORS ALLERA BOUD;

```

```

POUR I:=I+1.0 TANTQUE Y < XF FAIRE
DEBUT
    J:=I+1.0;
    Z:=PONT(J);
    SI ABS(Y-Z) < EPS ALORS ALLERA SORT
    SINON Y:=Z
FIN ;
XT:=Y;
I:=J-1.0;
ALLERA BIS;
BOUD: POUR J:=J-1.0 TANTQUE Y > XF FAIRE
DEBUT
    I:=J-1.0;
    Z:=PONT(I);
    SI ABS(Y-Z) < EPS ALORS ALLERA SORT
    SINON Y:=Z
FIN ;
XT:=Y;
J:=I+1.0;
BIS: BISSECTION(TIR,I,J,Δ-7,Δ-7,PSI,SORT);
    ECRIRE( " POUR XO = " ,XO, " XF = " ,XF, " PSI = " ,
    PSI);
    ECRIRE( " ON TROUVE " , " XT = " ,XT);
SORT: ECRIRE( " TERMINE " );

```

```

FIN ;
REEL PROCEDURE PONT(PSI) ;
REEL PSI;
DEBUT

```

```

    REEL R,DELT,SOL;
    R:=RAC2(1.0+B);
    TC1:=0.0;
    XC1:=XO;
    PSIC1:=PSI;
    TC2:=T;
    XC2:=XT;
    SI PSI > 1.0 ALORS ALLERA DESAP;
    SI PSI < -1.0 ALORS ALLERA DESAM;
LIB:  DELT:=1.0+(XC1-PSIC1)*(XC1-PSIC1)/(1.0+B)-PSIC1+
    PSIC1;
    SI PSIC1*(R-1.0)+XC1 < 0.0 ALORS ALLERA
LIBEM;
LIBEP: SOL:=(1.0+RAC2(DELT)*SIGNE(PSIC1+(XC1-PSIC1)/R))/
    (PSIC1+(XC1-PSIC1)/R);
    TC2:=LN(SOL)/R;
    XC2:=0.5*(PSIC1+(XC1-PSIC1)/R)*(1.0+R)*SOL+0.5*
    (PSIC1-(XC1-PSIC1)/R)*(1.0-R)/SOL;
    SI TC1+TC2 < T ALORS XT:=-B+(XC2+B)*EXP(T-
    TC1-TC2)
    SINON XT:=0.5*(PSIC1+(XC1-PSIC1)/R)*(1.0+R)*
    EXP((T-TC1)*R)+0.5*(PSIC1-(XC1-PSIC1)/R)*(1.0-R)/
    EXP((T-TC1)*R);
    ALLERA TILT;
LIBEM: SOL:=- (1.0+RAC2(DELT)*SIGNE(PSIC1+(XC1-PSIC1)/R))/
    (PSIC1+(XC1-PSIC1)/R);

```

```

TC2:=LN(SOL)/R;
XC2:=0.5*(PSIC1+(XC1-PSIC1)/R)*(1.0+R)*SOL+0.5*
(PSIC1-(XC1-PSIC1)/R)*(1.0-R)/SOL;
SI TC1+TC2 < T ALORS XT:=B+(XC2-B)*EXP(T-TC1-
TC2)
SINON XT:=0.5*(PSIC1+(XC1-PSIC1)/R)*(1.0+R)*
EXP(T-TC1)+0.5*(PSIC1-(XC1-PSIC1)/R)*(1.0-R)/
EXP(T-TC1);
ALLERA TILT;
DESAP: DELT:=(1.0+B)*(1.0+B)+(XO+B)*(XO-B-PSI*2.0);
SI DELT < 0.0 ALORS ALLERA SAP;
SOL:=(1.0+B-RAC2(DELT)*SIGNE(XO+B))/(XO+B);
SI SOL < 1.0 ALORS SOL:=(1.0+B+RAC2(DELT)*
SIGNE(XO+B))/(XO+B);
SI SOL < 1.0 ALORS ALLERA SAP;
TC1:=LN(SOL);
SI TC1 > T ALORS ALLERA SAP;
XC1:=-B+(XO+B)*EXP(TC1);
PSIC1:=1.0;
ALLERA LIB;
SAP: XT:=-B+(XO+B)*EXP(T);
ALLERA TILT;
DESAM: DELT:=(1.0+B)*(1.0+B)+(XO-B)*(XO+B-2.0*PSI);
SI DELT < 0.0 ALORS ALLERA SAM;
SOL:=(1.0+B+RAC2(DELT)*SIGNE(XO-B))/(B-XO);
SI SOL < 1.0 ALORS SOL:=(1.0+B+RAC2(DELT)*
SIGNE(XO-B))/(B-XO);
SI SOL < 1.0 ALORS ALLERA SAM;
TC1:=LN(SOL);
SI TC1 > T ALORS ALLERA SAM;
XC1:=B+(XO-B)*EXP(TC1);
PSIC1:=-1.0;
ALLERA LIB;
SAM: XT:=B+(XO-B)*EXP(T);
ALLERA TILT;
TILT: PONT:=XT;
Ecrire( " POUR PSI " ,PSI, " ETAT FINAL " ,XT);

```

```

FIN ;
HEURE;
BUT(XO, XF, T, B, EPS, PSI);
SAUTLIGNE;
Ecrire( " C1 " , " TEMPS " ,TC1, " ETAT " ,XC1, " CONTROLE " ,
PSIC1);
Ecrire( " C2 " , " TEMPS " ,TC2, " ETAT " ,XC2);
SAUTLIGNE;
HEURE;
SAUTLIGNE;
PA:=T/M;
R:=RAC2(1+B);
K:=0;
POUR K:=K+1 TANTQUE K*PA < TC1 FAIRE
SI PSIC1 > 0.0 ALORS
DEBUT
X[K]:=-B+(XO+B)*EXP((K-1)*PA);

```

```

                U[K]:=1.0
FIN
SINON
DEBUT
                X[K]:=B+(X0-B)*EXP((K-1)*PA);
                U[K]:=-1.0
FIN ;
K:=ENTIER(TC1/PA);
POUR K:=K+1 TANTQUE K*PA < TC1+TC2 FAIRE
SI K > M ALORS ALLERA STOP
SINON
DEBUT
                X[K]:=0.5*(PSIC1+(XC1-PSIC1)/R)*(R+1.0)*EXP(R*
                (K*PA-TC1))+0.5*(PSIC1-(XC1-PSIC1)/R)*(1.0-R)*
                EXP(-R*(K*PA-TC1));
                U[K]:=0.5*(PSIC1+(XC1-PSIC1)/R)*EXP(R*(K*PA-
                TC1))+0.5*(PSIC1-(XC1-PSIC1)/R)*EXP(-R*(K*PA-
                TC1));

FIN ;
POUR K:=ENTIER((TC1+TC2)/PA)+1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
SI XT > 0.0 ALORS
DEBUT
                X[K]:=-B+(XC2+B)*EXP((K-1)*PA-TC2);
                U[K]:=1.0;

FIN
SINON
DEBUT
                X[K]:=B+(XC2-B)*EXP((K-1)*PA-TC2);
                U[K]:=-1.0;

FIN ;
STOP:
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
ECRIRE( " PAS " ,K, " ETAT " ,X[K], " CONTROLE " ,U[K]);
TC1:=0.0;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
TC1:=TC1+(X[K]*X[K]+B*U[K]*U[K]);
SAUTLIGNE;
ECRIRE( " COUT " ,TC1);

FIN
FIN ;

```

```

PROCEDURE DITRAC(B,TO,XO,PSO,PA,H,M,X,PSI) ;
VALEUR B,TO,XO,PSO,PA,H,M ;
ENTIER M ;
REEL B,TO,XO,PSO,PA,H ;
TABLEAU X,PSI ;
DEBUT
  PROCEDURE RESYDIF(FONCT,XD,YD,H,N,XF,YF);
  VALEUR XD,H,N ;
  PROCEDURE FONCT ; REEL XD,H,XF ; ENTIER N ; TABLEAU
  YD,YF ;
  DEBUT TABLEAU A[1:5],Z,W[1:N] ; ENTIER K,J ;
  A[1]:=A[2]:=A[5]:=H/2.0 ; A[3]:=A[4]:=H ;
  XF:=XD ; POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE YF[K]:=W[K]:=
  YD[K] ;
  J:=1 ;
  ITER:FONCT(XF,W,Z) ;
  POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE YF[K]:=YF[K]+A[J+1]*
  Z[K]/3.0 ;
  SI J=4 ALORS ALLERA TERM ;
  POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE W[K]:=YD[K]+A[J]*
  Z[K] ;
  XF:=XD+A[J] ; J:=J+1 ; ALLERA ITER ;
  TERM: FIN ;
  PROCEDURE FONCTO(X,Y,DY) ;
  REEL X ; TABLEAU Y,DY ;
  DEBUT DY[1]:=Y[1]+B*Y[2] ;
  DY[2]:=Y[1]-Y[2] ; FIN ;
  REEL XD,XF ;
  ENTIER K,L,N ;
  TABLEAU YF[1:2],YD[1:2] ;
  K:=0 ; N:=2 ; XD:=TO ; YD[1]:=XO ; YD[2]:=PSO ;
  STAR: XF:=XD-PA ; K:=K+1 ;
  RESYDIF(FONCTO,XD,YD,H,N,XF,YF) ;
  X[K]:=YF[1] ; PSI[K]:=YF[2] ;
  SI K > M ALORS ALLERA TILT ;
  SI PSI[K] > 1.0 ALORS ALLERA RUPT ;
  SI PSI[K] < -1.0 ALORS ALLERA RUPT ;
  XD:=XF ; YD[1]:=YF[1] ; YD[2]:=YF[2] ;
  ALLERA STAR ;
  RUPT: POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA K FAIRE
  ECRIRE(L,,X[L],,PSI[L]) ;
  POUR L:=K PAS 1 JUSQUA M-1 FAIRE
  X[L+1]:=B*SIGNE(PSI[K])*(EXP(PA)-1)+X[L]*EXP(PA) ;
  POUR L:=K+1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
  ECRIRE(L,,X[L]) ;
  ALLERA SORT ;
  TILT: POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA M FAIRE
  ECRIRE(L,,X[L],,PSI[L]) ;
  SORT: ;
  FIN DITRAC ;

```

Nous donnons ici la méthode la plus simple, celle de la bisection ; BUT recherche donc un encadrement du point final par une variation à pas constant de ψ_0 , puis utilise la procédure BISSECTIØN pour les valeurs de ψ_0 ainsi obtenues.

On a adjoint à l'ensemble un programme permettant de sortir les résultats sur une grille de points et de calculer la valeur du critère. La discrétisation n'a donc lieu véritablement qu'à la sortie des résultats, l'ensemble du calcul ayant lieu en continu avec seulement une discrétisation auxiliaire pour effectuer les tests.

IV - Résultats et exemples numériques

La difficulté principale du problème peut résider dans la divergence rapide de deux exponentielles voisines, la réduction du problème et la résolution dans le sens rétrograde permettent de s'en affranchir.

Les essais ont été effectués de manière à tester les différentes méthodes et variantes tant au point de vue durée du calcul que précision des résultats. Les mesures de temps sont faites sur la procédure HEURE, ce sont des moyennes pour les durées inférieures à la seconde, elles donnent le cas le plus défavorable; pour les durées supérieures à la seconde. Les précisions sont obtenues, si cela est possible, par le calcul direct dans un cas particulier, sinon elles sont estimées par la méthode de division du pas et comparaison des résultats obtenus par différentes méthodes ; on considèrera comme exact un résultat dont l'erreur relative est inférieure à 10^{-7} .

a) Méthode de courbes de commutation

	Avec discrétisation de NSP et NSM	Avec expression analytique de NSP et NSM
Unités syntaxiques	4350	2550
Temps (s)		
Compilation	26	18
Assemblage	62	30
Chargement	28	22
Pour $M \leq 200$ temps (s)		
- Calcul des courbes de commutation	2 à 5	
- Calcul de l'optimale	0,0 à 2	0,0 à 0,4
- Sortie des résultats	1 à 3	1 à 3
- Temps total maximum observé	9	3
Précision		
Sur l'état au voisinage de T	10^{-2} à 10^{-6}	10^{-6} à 0
Sur le critère	10^{-4} à 10^{-6}	10^{-6}

Remarquons que dans le cas de discrétisation des courbes, on adoptera une interpolation très simple si la grille est suffisamment dense ; la procédure complexe et coûteuse d'interpolation ne prendra toute sa valeur que sur les grilles de points très laches. L'allure régulière des courbes de commutation observées expérimentalement justifie ce procédé d'interpolation.

La précision varie énormément en fonction du type de commande et de la durée du processus ; au delà d'une certaine durée la précision sur la variable d'état et la commande devient médiocre, mais la précision sur le critère reste généralement satisfaisante ; on a corrigé la variable d'état au voisinage du point final en prévoyant une arrivée sur SP ou SM.

b) Méthode de tir

On a utilisé ici la procédure auxiliaire PONT (PSI)

Dimensions du programme

Unités syntaxiques : 2016
 Compilation : 15 s
 Assemblage : 24 s
 Chargement : 19 s

Performances (grille de 200 points)

Calcul : 1 à 2 s
 Sortie des résultats : 2 à 3 s
 Temps total maximum : 5 s

Le calcul des valeurs de la variable d'état et de la commande sur une grille de points n'étant pas prévu par la méthode, il est assez coûteux, mais il est nécessaire pour étudier la précision au voisinage des points de commutation, et pour calculer le critère.

Précision

Au voisinage du point final : 10^{-6}
 Sur le critère : meilleure que 10^{-4}
 Sur les instants de commutation : 10^{-5}

La détermination d'une courbe ne faisant appel qu'à des calculs simples il est donc possible de rechercher la précision maximum permise par la machine, la propagation des erreurs n'étant pas gênante.

EXEMPLES NUMERIQUES

VARIABLE	EXEMPLE 1		EXEMPLE 2	
X \emptyset	2,0		1,0	
XT	2,0		2,0	
T	2,0		2,0	
B	3,5		3,5	
METHODE	COMMUTATIONS	TIR	COMMUTATIONS	TIR
PSI \emptyset ou U \emptyset	-1	-2,3648638	-0,85721207	-0,85683429
XC1	1,21148143	1,2148157		
TC1	0,42175781	0,42098156		
X(T/4)	1,0319052	1,03119052	0,41877382	0,41877374
U(T/4)	-0,81954947	-0,81954941	-0,27354785	-0,27354774
X(T/2)	0,57047645	0,56847028	0,35452541	0,35452544
U(T/2)	-0,22398255	-0,21608768	-0,27579602	-0,27579548
X(3T/4)	0,79470459	0,80681428	0,72794011	0,72794032
U(3T/4)	0,11377729	0,12061291	0,18434151	0,18434159
XF	2,0	2,00000011	2,0	2,00000005
UF	0,59173552	0,59199634	0,62383299	0,62383317
2 \times CRITERE	5,0306689	5,0331250	2,0962419	2,0966445

C - TRAITEMENT SUR CALCULATEUR ANALOGIQUE

La faible dimension du problème permet de le traiter sur un petit calculateur analogique tel que le TR-10 ou le TR-48 du Laboratoire de Calcul de l'Université de Grenoble.

Le TR-48 avec des comparateurs à palettes doubles permettant un tracé par points des courbes de commutation a été choisi.

I - Mise en équation et câblage

Soit donc le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + Bu \\ \frac{d\Psi}{dt} = x - \Psi \\ u = \text{sgn}(\Psi) * \min(1, |\Psi|). \end{cases}$$

Nous allons tracer les courbes de commutation relatives au point final, il faut donc mécaniser sur le calculateur analogique, un système à évolution rétrograde soit :

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = -x - Bu \\ \frac{d\Psi}{dt} = -x + \Psi \end{cases}$$

On pourra rétablir le sens de variation du temps en inversant la base de temps en traçant les courbes.

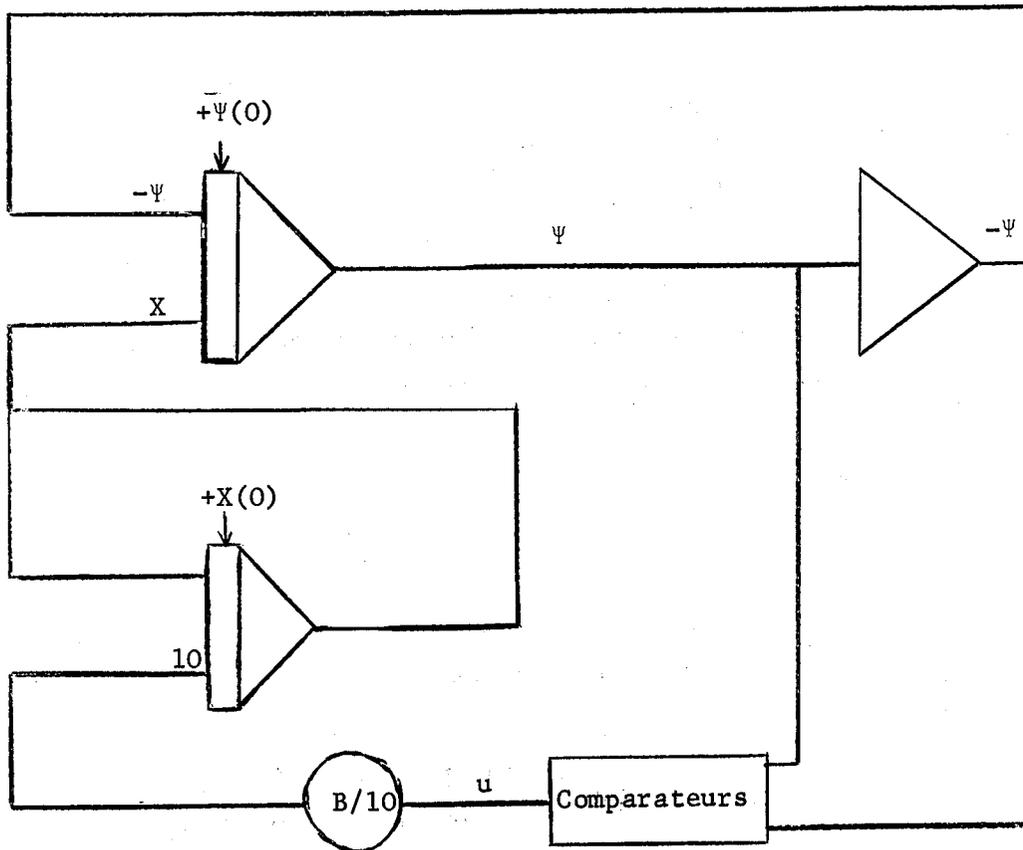
On obtiendra aisément SP et SM en prenant la condition initiale XT et en faisant $u = \pm 1$. Il suffira de déplacer une connexion. On obtiendra NSP et NSM en utilisant les doubles palettes du comparateur et en traçant x si $|\Psi| < 1$.

Enfin on effectuera la résolution en ajustant manuellement la valeur initiale de la variable adjointe.

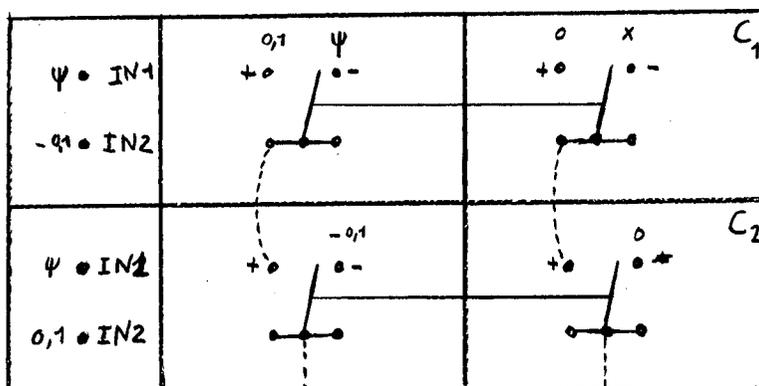
Les trois parties du câblage sont :

- a) Mécanisation de l'équation d'évolution.
- b) Mécanisation de l'expression de u maximisant l'Hamiltonien.
- c) Mécanisation de l'équation adjointe.

Schéma de câblage



Bloc de comparaison



Le calculateur PACE TR-48 (EAI) est un calculateur analogique transcritisé dont la tension de référence est ± 10 V.

Le montage principal utilise six amplificateurs dont trois intégrateurs et jusqu'à huit potentiomètres, on utilise également un bloc de comparaison à doubles palettes (2 comparateurs doubles).

Les autres amplificateurs et potentiomètres pourront être utilisés à des montages calculant les courbes SM et SP sans saturation de l'amplificateur calculant la variable adjointe Ψ .

Le câblage d'un amplificateur en intégrateur est assuré par des cavaliers fixes.

Les comparateurs testent le signe de la somme algébrique des tensions d'entrée et commandent chacun deux palettes.

Pour tracer les courbes de commutation non limitées NSP et NSM on utilisera une méthode par points ; les entrées des comparateurs permettent de tester si $|\Psi|$ est plus petit que 1, la première série de palettes permet de calculer u, on a choisi d'utiliser la seconde série pour ne tracer x que si $|\Psi| < 1$; les points de NSP et NSM sont les sommets des pics formés par l'arc non saturé de la trajectoire et l'arc de retour au zéro du traçeur.

Pour le tracé des courbes on a construit une base de temps rétrograde.

II - Courbes et résultats

L'affichage des potentiomètres peut se faire avec une précision de l'ordre de 10^{-4} volts sur un voltmètre numérique donnant 5 chiffres.

Le comparateur par contre introduit une imprécision qu'il est difficile de chiffrer, le déplacement de la palette ne se faisant que lorsque la différence des tensions à mesurer dépasse un certain seuil ; ceci pose également un problème pour l'affichage des valeurs initiales.

De toute façon la précision des calculs reste meilleure que celle de la table traçante EAI Variplotter connectée. Les courbes seront donc établies à 10^{-2} près (ce qui est vérifié par comparaison avec les résultats du calcul digital).

Il a été toutefois possible de faire des mesures en position HOLD en divers points des courbes pour obtenir des résultats à 2×10^{-3} près, la précision pouvant d'ailleurs être légèrement améliorée par le choix d'une base de temps à évolution lente et l'utilisation systématique de tout le domaine de travail du calculateur (± 10 V.).

Cependant le calcul analogique est surtout utilisé à la construction graphique des trajectoires sans recherche de la plus grande précision possible.

La figure 1 donne les trajectoires dans le cas $XT = 2$, $B = 3,5$; ce cas est l'un de ceux qui a permis de tester les méthodes digitales, les résultats ont pu être vérifiés.

La figure 2 permet une construction des courbes de commutations non limitées NSM et NSP dans la même application. La concordance des résultats est très bonne.

La figure 3 envisage le cas où $XT = 0$, le phénomène étant symétrique on a construit les trajectoires pour $X < 0$ et la courbe de commutation pour $X > 0$.

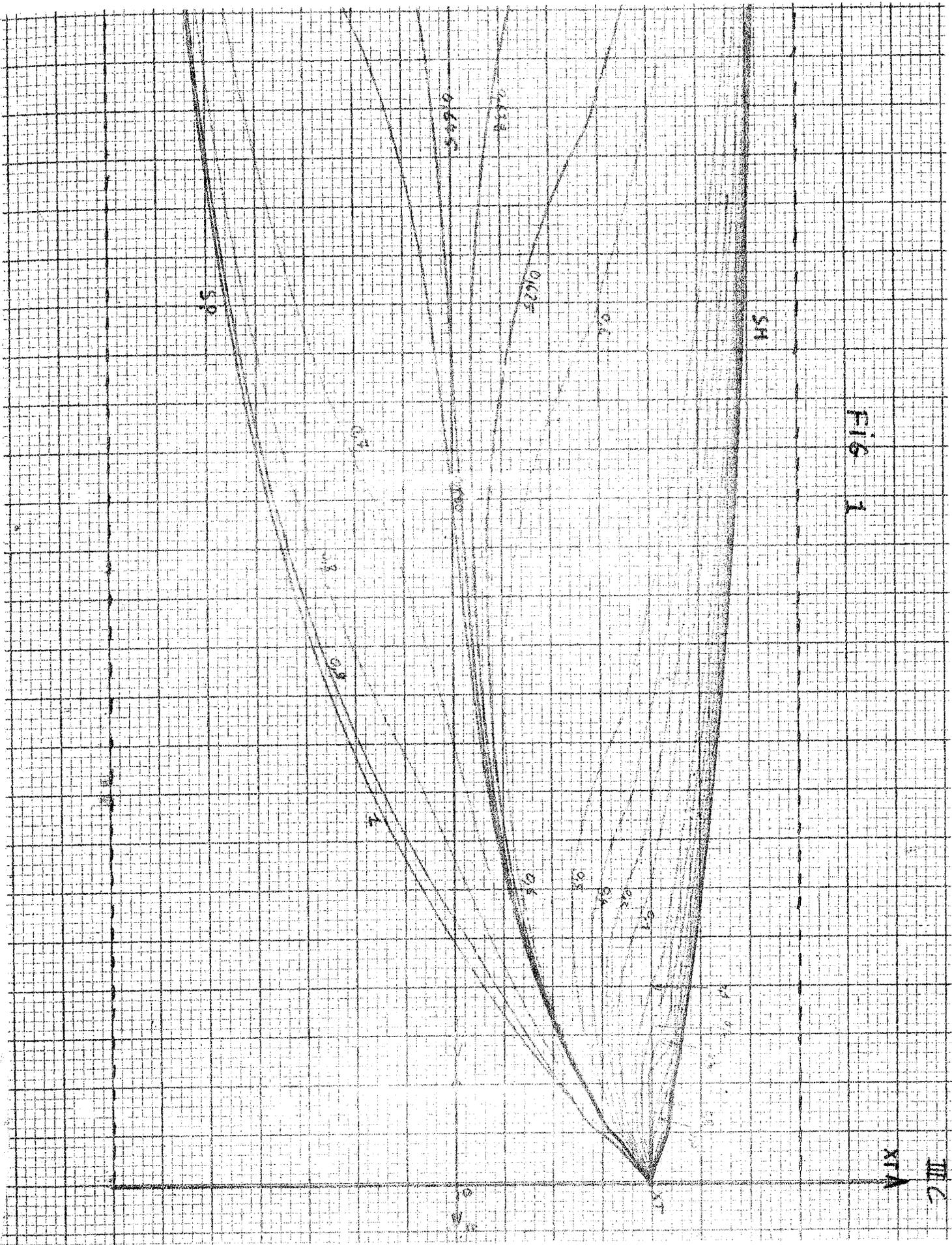


Fig 1

III
XTA

SR

MSM

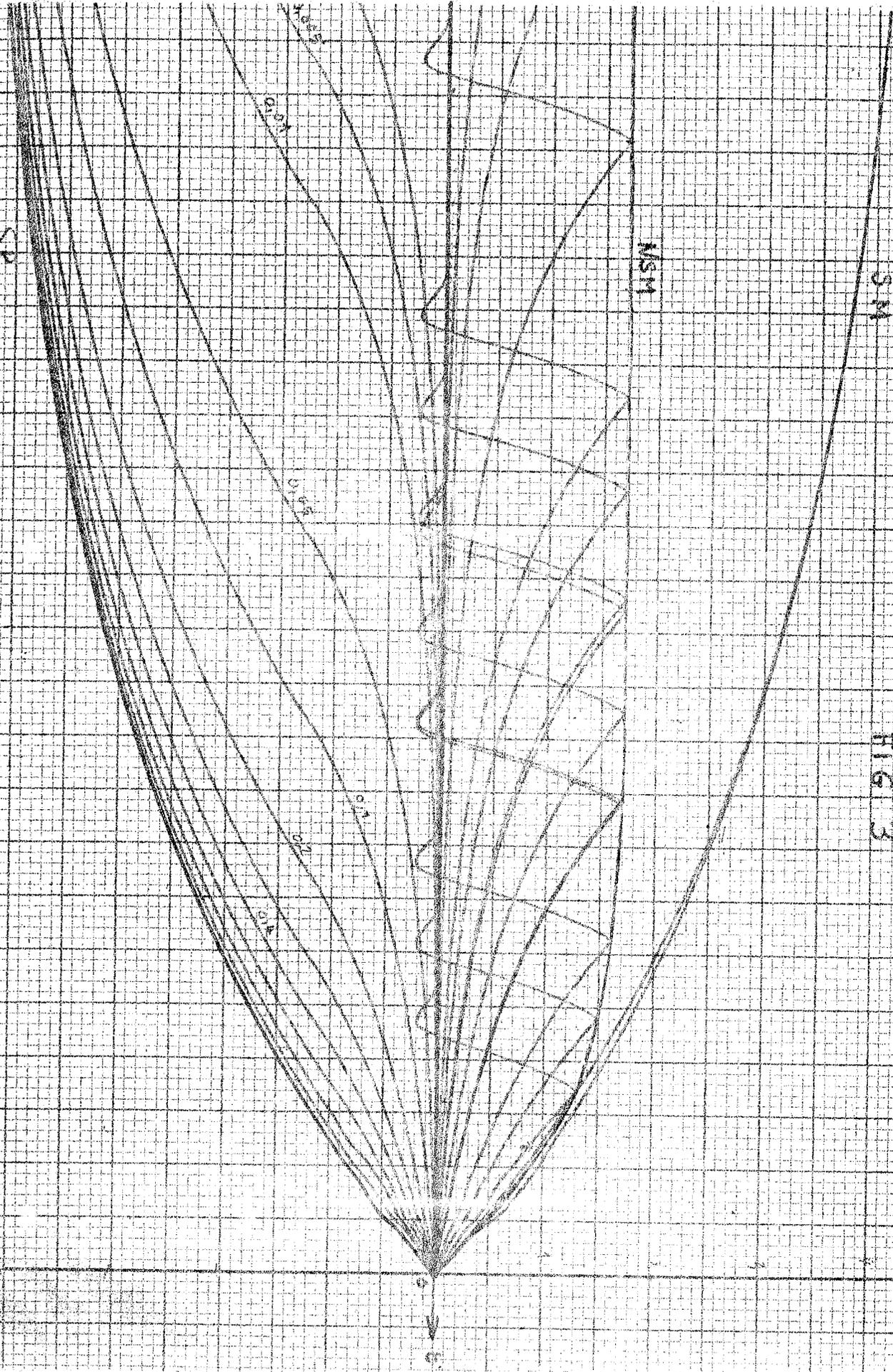
SM

FIG 3

A
Xr

III C

0.50
0.55
0.60
0.65
0.70



D - ANALYSE DES RESULTATS

La méthode analogique permet un tracé rapide et peu coûteux, avec une précision de l'ordre de 10^{-2} , des trajectoires, des commandes et des courbes de commutation. Elle permet également la construction des abaques permettant une résolution graphique du problème.

La recherche d'une précision plus grande impose les méthodes digitales. Le procédé du tir est le plus rapide pour la construction d'une optimale isolée ; par contre, l'utilisation des courbes de commutation permet, après un calcul préliminaire légèrement plus long, de traiter le problème pour toute condition initiale x_0 en un temps inférieur à celui de l'autre méthode ; les courbes de commutations permettent également une construction graphique de la solution pour toute valeur de x_0 .

Les méthodes présentent donc un égal intérêt, mais il apparaît immédiatement que l'extension de la méthode des courbes de commutation aux problèmes vectoriels ne sera possible que dans des cas très particuliers, les méthodes de tir sur calculateur analogique ou digital restant les seules générales.

CHAPITRE - IV

LES SYSTEMES A COMMANDE SCALAIRE

On considère ici le cas particulier le plus souvent rencontré, le cas absolument général pouvant s'en déduire par quelques modifications où se traiter avec le chapitre V.

On étudie d'abord les particularités des équations et du domaine atteignable, on expose ensuite un algorithme basé sur les propriétés démontrées au Ch. II-B- §5, on donne enfin exemples et applications.

§1 - HYPOTHESES ET NOTATIONS

On fait à nouveau l'hypothèse H1 du Chapitre III, c'est-à-dire que l'on suppose U symétrique par rapport à l'origine ; il est alors facile de se ramener à la formulation du Chapitre I-§5.

Soit donc la contrainte $|u(t)| < 1$
et le critère $\frac{1}{2} \int_0^T (x^t \alpha x + u^2) dt.$

l'équation d'évolution est : $\frac{dx}{dt} = Ax + B.u + C$ (1)

et l'équation adjointe est : $\frac{d\Psi}{dt} = -A^t \Psi - \alpha x$ (2)

avec $A(n,n)$, B , $C(1,n)$ et $\alpha(n,n)$ symétrique définie positive.

L'Hamiltonien est :

$$\mathcal{H} = -x^t \alpha x - u^2 + \Psi^t (Ax + Bu + C)$$

et l'Hamiltonien réduit :

$$h = -u^2 + \Psi^t B u$$

La commande extrémale est donc :

§2 - DOMAINE ATTEIGNABLE

On se ramène au problème de temps minimum (time-optimal) et à l'étude des points de $\delta\Delta$. On peut faire un changement de variable en retranchant à $x(t)$ $A(t,0)x_0 + \int_0^t A(t,\tau)C d\tau$; on a alors $x(0) = 0$ et C est nul dans la nouvelle équation d'évolution.

On peut alors écrire :

$$x(T) = \int_0^T A(T,\tau) Bu(\tau) d\tau \quad (4)$$

La commande constamment nulle est admissible (elle est même extrémale), l'origine appartient donc à D et Δ , par suite de la contrôlabilité c'est même un point intérieur de D et Δ . On considère alors un point $X(T)$ de $\delta\Delta$, une direction v telle que $S(v)$ soit un hyperplan d'appui de Δ passant par $X(T)$; alors pour tout X de Δ on a :

$$v \cdot X \leq v \cdot X(T)$$

Propriété 1

Une condition nécessaire et suffisante pour que le contrôle admissible $u(t)$ soit time-optimal, ou plus précisément, pour atteindre tous les points de $S(v) \cap \delta\Delta$ est que u maximise

$$v \cdot X(T) = \int_0^T v \cdot A(T,\tau) Bu(\tau) d\tau \quad (5)$$

Par définition $v \cdot X(T)$ est positif et on peut écrire les inégalités suivantes :

$$v \cdot X(T) = \left| \int_0^T v \cdot A(T,\tau) Bu(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^T |v \cdot A(T,\tau) Bu(\tau)| d\tau \quad (6)$$

d'où :

$$v \cdot X(T) \leq \int_0^T |v \cdot A(T,\tau) Bu(\tau)| d\tau \leq \int_0^T |v \cdot A(T,\tau) B| d\tau \quad (7)$$

Le maximum sera atteint si et seulement si les deux inégalités (7) sont des égalités. La première inégalité entraîne :

$$\text{signe } u(\tau) = \text{signe } (\lambda \cdot A(T, \tau)B)$$

La deuxième inégalité entraîne :

$$|u(\tau)| = 1.$$

Une commande prenant alternativement deux valeurs est dite "bang-bang".

Propriété 2

|| Un point de $\delta\Delta$ ne peut être atteint que par une commande "bang-bang".

Il faut alors caractériser les commandes 'bang-bang' extrémales, il est clair qu'elles ne peuvent être fournies que par un Ψ de module infiniment grand, on remplace alors l'équation adjointe (2) par :

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -A^t \theta \quad (8)$$

et la commande est donnée par : $u = \text{signe } (\theta^t B)$.

Les instants de commutation sont alors parmi les racines de : $\theta^t \cdot B = 0$ (9)

On sait alors calculer $\theta(t)$ en fonction des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A. L'étude de l'équation (9), pour un $\theta(0)$ donné fournit le nombre de commutations ; dans le cas où A à toutes ses valeurs propres réelles, on montre la propriété suivante [14] :

Propriété 3

|| Si A n'a que des valeurs propres réelles, alors une commande 'time-optimal' n'a pas plus de n-1 commutations.

Il est également intéressant, dans le but d'écrire un algorithme bien adapté au problème, de savoir si un point de la frontière $\delta\Delta$ est un angle et de quel degré, ou si c'est un point régulier, ou s'il appartient à une partie plate. Pour les propriétés des points des parties plates, on peut se reporter à KREINDLER [20] qui démontre en particulier, l'unicité de la commande.

Il est aisé de voir que si une des composantes de $A(T, \tau)B$ ne s'annule pas pour $t \in]0, T[$, il existe un vecteur v à n degrés de liberté dans un cône et tel que $v \cdot A(T, \tau)B$ garde un signe constant, la commande constante $u = \pm 1$ correspondante fournit donc un n -angle.

De même si $v \cdot A(T, \tau)B$ a $n-1$ changements de signe ou davantage sur $]0, T[$ aux instants τ_i ($i = 1, 2, \dots, n-1, \dots$), il existe une solution non triviale \tilde{v} définie à un coefficient multiplicatif près au système :

$$\begin{aligned} v \cdot A(T, \tau_i)B &= 0 \\ i &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Dans ce cas, à la direction de \tilde{v} correspond un hyperplan d'appui tangent en un point régulier à $\delta\Delta$.

Propriété 4

|| Une condition suffisante pour l'existence de deux n -angles, correspondant respectivement à $u = +1$ et $u = -1$, est qu'une des composantes de $A(T, \tau)B$ ne s'annule pas pour $\tau \in]0, T[$.

Propriété 5

|| Une condition nécessaire pour qu'un point de $\delta\Delta$ soit régulier est qu'il soit atteint grâce à une commande ayant au moins $n-1$ commutations.

Du point de vue pratique, on pourra retenir que si les valeurs propres de A sont toutes réelles, il y aura des k-angles sur le domaine atteignable ; par contre si les valeurs propres de A sont complexes et si l'intervalle de temps est suffisamment grand, il y aura de fortes chances pour que l'on ait un domaine complètement régulier.

L'algorithme, pour être général devra envisager le cas le plus défavorable, c'est-à-dire, celui des n-angles où $\frac{dX_T}{d\Psi}$ peut s'annuler, et les divers cas de points anguleux ou réguliers où les composantes de $\frac{dX_T}{d\Psi_0}$ ne sont pas linéairement indépendantes.

Pour un problème donné, il serait intéressant de déterminer, comme au chapitre précédent, si le problème est possible avant de chercher à le résoudre. En fait cela n'est réalisable que dans les cas simples (ordre du système très petit) et particuliers, par exemple si les valeurs propres sont toutes réelles, on peut obtenir l'équation de $\delta\Delta$ obtenue par les commandes 'bang-bang' avec au plus n-1 commutations.

§3 - METHODE ITERATIVE

La convergence de la méthode n'est assurée que si l'itération ne conduit pas à un p-ième itéré $\Psi^{(k)}(0)$ tel que $\frac{dX_F^{(k)}}{d\Psi(0)}$ soit nul.

En un point de $\delta\Delta$ et pour Ψ_0 donné trois cas peuvent se présenter :

- $\frac{dX_F}{d\Psi(0)}$ est nul : cas d'un n-angle.

- $\frac{dX_F}{d\Psi(0)}$ génère une variété linéaire de dimension inférieure à n-1 :
cas d'un k-angle avec $k < n$.

- $\frac{dX_F}{d\Psi(0)}$ génère un hyperplan : cas d'un point régulier.

La continuation de l'itération, dans les deux derniers cas, nous conduira sans doute à un n-angle s'il y en a un, ou peut être au point final le plus proche de X_T sur $\delta\Delta$ ou sur un k-angle ; mais, même dans ce cas, la valeur de $\Psi(0)$ trouvée sera très mauvaise ; en effet les points de la frontière sont atteints pour des valeurs élevées du module de $\Psi(0)$ et cette valeur risque de croître à chaque itération. Pour cette raison on choisit de ne pas faire d'itération sur la frontière de Δ , et on utilise un artifice de calcul permettant de prendre pour nouveau départ de l'itération un point intérieur de Δ et d'assurer la convergence de la méthode.

Outre les procédures auxiliaires de résolution de système différentiel et de résolution de système linéaire, la partie active du programme comprend deux parties principales :

- la procédure de calcul des extrémales.
- la boucle d'itération.

Calcul des extrémales.

La procédure PONG réalise l'intégration du système d'équations d'évolution et du système adjoint en fonction des conditions initiales PSI et X_0 elle fournit l'état du système et la variable adjointe à l'instant T. On utilise la procédure auxiliaire d'intégration RESYDIF ; le sous programme FONCT calculant à chaque pas la différentielle fait intervenir le type de la commande qui est réévalué à chaque pas ; pour obtenir une précision convenable, on effectue une recherche systématique de l'instant de commutation par division du pas avec la précision EPS.

Boucle d'itération.

On définit ici la boucle d'itération pour un système totalement contrôlable et quelques modifications devraient être faites pour traiter les problèmes ne vérifiant pas cette hypothèse.

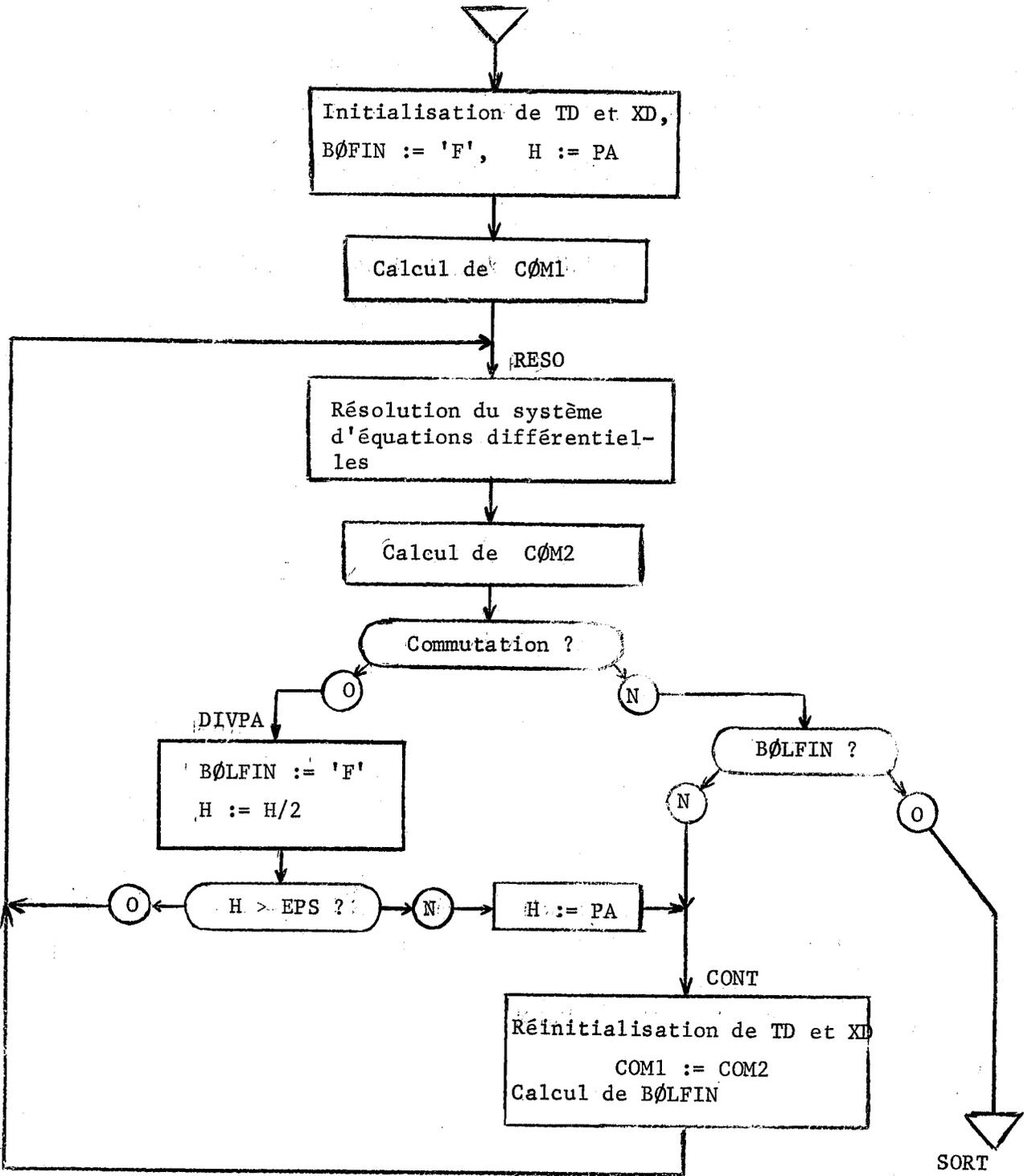
Le calcul direct et formel de $\frac{dX_F}{d\Psi(0)}$ imposerait la résolution d'un système différentiel dans R^{n^2} , il a semblé plus économique d'utiliser à nouveau le programme de trajectoire extrémale en donnant à $\Psi(0)$ un petit accroissement $\Delta\Psi(0)$ successivement sur les n axes de coordonnées, ce qui conduit à résoudre n systèmes différentiels dans R^n

L'itération prend $\Psi(0) = 0$ pour valeur de départ ; on obtient un point final X_F intérieur à Δ . Il existe donc une dérivée non dégénérée $\frac{dX_F}{d\Psi(0)}$ et on effectue son calcul approché (DELTX) ; on exprime le gradient de $(X_T - X_F)^2$; on cherche donc une direction de $\Delta\Psi(0)$ dans laquelle $\frac{dX_F}{d\Psi}$ est dirigée comme $X_T - X_F$; on choisit le module $\Delta\Psi(0)$ pour obtenir, si cela est possible, une diminution de moitié de la distance, sinon on essaie d'obtenir la diminution maximale dans un cône déterminé par :

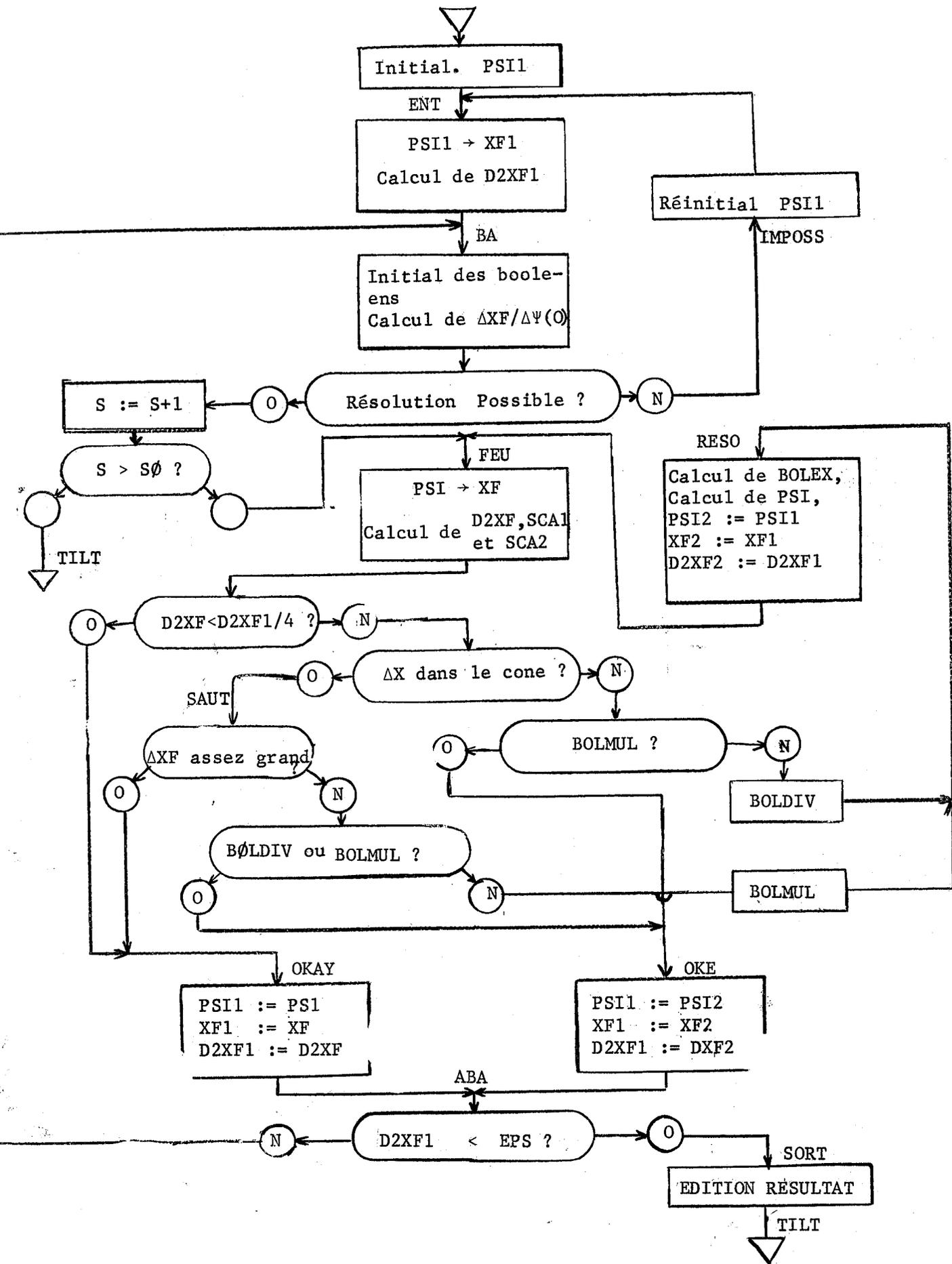
$$(X_F^{(k+1)} - X_F^{(k)}) (X_T - X_F^{(k)}) / \sqrt{(X_F^{(k+1)} - X_F^{(k)})^2 (X_T - X_F^{(k)})^2} > K.$$

L'arrêt du programme se fait lorsque la distance de X_F à X_T pour la norme du maximum, est inférieure à une valeur fixée à l'avance.

ORGANIGRAMME DE PONG



IV-9
ORGANIGRAMME DE L'ITERATION



Choix de $\Delta^{(k)}\Psi(0)$

On a choisi la direction de $\Delta^{(k)}\Psi(0)$ et on fera successivement divers essais pour trouver son module, par division ou multiplication de la valeur précédemment utilisée. Ici se pose le problème de la valeur à donner à $\Delta^{(k)}\Psi(0)$ au premier essai. Pour des systèmes stables ou oscillants on pourra sans inconvénient utiliser CØEF, solution du système linéaire :

$$\frac{\Delta X_F}{\Delta \Psi(0)} \cdot X = x_T - x_F$$

Pour les systèmes instables ceci rendrait très grand le nombre des essais à effectuer, on a donc choisi de ne donner qu'un très petit accroissement au début et de le faire croître à chaque itération pour n'utiliser CØEF qu'après un nombre déterminé d'itérations. C'est le rôle de la constante SØ définie en début de programme.

Cas des points de $\delta\Delta$

Si le système linéaire devant calculer CØEF n'a pas de solution, l'itération nous a conduit à un $x_F^{(k+1)}$ point frontière de Δ , on choisit de s'en écarter en divisant $\Delta^{(k)}\Psi(0)$.

La condition de convergence de l'algorithme n'est pas affectée, mais, on introduit ici un nouveau paramètre, les expériences numériques n'ont pas montré l'intérêt de le faire varier, on divisera donc toujours $\Delta^{(k)}\Psi(0)$ par 4 pour retrouver un point intérieur.

Ceci laisse prévoir les difficultés numériques auxquelles nous nous heurterons si x_T est voisin de $\delta\Delta$.

Choix des coefficients

Le programme présenté est adapté au cas des systèmes instables, il met donc la constante SØ à la portée des utilisateurs.

Il faut également faire un choix du pas d'intégration (PA), de l'écart toléré sur les instants de commutation et le point final (EPS), sur la variation $\Delta\Psi(0)$ pour le calcul de la dérivée (MØD).

Il serait raisonnable pour obtenir une bonne précision pour un temps de calcul acceptable de faire plusieurs passages en rentrant une valeur initiale de Ψ s'améliorant et un pas et un écart toléré diminuant.

EBUT

```

ENTIER N,SO;
REEL T,PA,EPS,MOD;
LIRE(N,T,PA);
LIRE(SO,EPS,MOD);
DEBUT

```

```

REEL TABLEAU A,DELTX[1:N,1:N],PSI1,PSI2,ECA,COEF,C,PSI,
XO,XT[1:N],M[1:2*N,1:2*N],XF,COS,B,XF1,XF2[1:2*N];
ENTIER S,K,L;
BOOLEEN BOLMUL,BOLDIV,BOLEX,BOLRES;
REEL H,SCA1,SCA2,D2XF,D2XF1,D2XF2;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
A[K,L]:=RDONNEE;
POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
B[L]:=RDONNEE;
POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
C[L]:=RDONNEE;
POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
XT[L]:=RDONNEE;
POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
XO[L]:=RDONNEE;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
PSI2[K]:=RDONNEE;
POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
COS[L]:=RDONNEE;
POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT

```

```

M[L,K]:=A[L,K];
M[L+N,K+N]:=-A[K,L]

```

```

FIN ;
POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
M[L+N,L]:=2*C[L];
S:=0;
BOLRES:= FAUX ;
DEBUT

```

```

PROCEDURE GRESOLSYSLINE(A,B,X,N,IMPOSSIBLE);
TABLEAU A,B,X;
ENTIER N;
ETIQUETTE IMPOSSIBLE;
DEBUT

```

TRIANGULARISATION: DEBUT

```

ENTIER I,J,K;
REEL R;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N-1 FAIRE
DEBUT

```

DEBUT

```

SI ABS(A[K,K])=0 ALORS ALLERA
ECHANGEDELIGNES;
POUR I:=K+1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT

```

```

R:=A[I,K]/A[K,K];
POUR J:=K+1 PAS 1 JUSQUA N
FAIRE

```



```

SI J=4 ALORS ALLERA TERM;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
W[K]:=YD[K]+A[J]*Z[K];
XF:=XD+A[J];
J:=J+1;
ALLERA ITER;

```

```
FIN ;
```

```

PROCEDURE PONG(PSI,XO,PA,EPS,XF) ;
REEL PA, EPS;
TABLEAU PSI,XO,XF;
DEBUT

```

```

ENTIER I,K;
REEL TD,TF,SICO,COM1,COM2;
BOOLEEN BOL1,BOL2,BOLFIN;
REEL TABLEAU XD[1:2*N];
PROCEDURE FONCT(TET,Y,DY) ;
REEL TET;
TABLEAU Y,DY;
DEBUT

```

```

ENTIER I,J;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA 2*N FAIRE
DEBUT

```

```

DY[I]:=COS[I]+B[I]*COM1;
POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA 2*N FAIRE
DY[J]:=DY[J]+M[I,J]*Y[J];

```

```
FIN ;
```

```

FIN ;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
ECRIRE( " PSI " , I , PSI[I]);
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT

```

```

XD[I]:=XO[I];
XD[N+I]:=PSI[I]

```

```

FIN ;
TD:=0.0;
SICO:=0.0;
BOLFIN:= FAUX ;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
SICO:=SICO+B[I]*PSI[I];
COM1:=SIGNE(SICO)*( SI 1.0 < ABS(SICO) ALORS
1.0
SINON ABS(SICO));
BOL1:= SI ABS(ABS(COM1)-1.0) < EPS ALORS VRAI
SINON FAUX ;
H:=PA;

```

```
RESYDIF(FONCT,TD,XD,H,2*N,TF,XF);
```

```

SI BOLRES ALORS
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
ECRIRE( , K , XF[K]);
SICO:=0.0;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
SICO:=SICO+B[I]*XF[N+I];
COM2:=SIGNE(SICO)*( SI 1.0 < ABS(SICO) ALORS
1.0
SINON ABS(SICO));

```

TE-115

RESO:

```

CONT:      BOL2:= SI ABS(ABS(COM2)-1.0) < EPS ALORS VRAI
           SINON FAUX ;
           SI BOL2 ET NON BOL1 OU BOL1 ET NON BOL2 ALORS
           ALLERA DIVPA;
           SI BOLFIN ALORS ALLERA SORT;
           TD:=TF;
           POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA 2*N FAIRE
           XD[I]:=XF[I];
           COM1:=COM2;
           BOL1:=BOL2;
           SI PA > T-TD ALORS
           DEBUT
             H:=T-TD;
             BOLFIN:= VRAI
           FIN ;
           ALLERA RESO;
           BOLFIN:= FAUX ;
           SI H > EPS ALORS
           DEBUT
             H:=H/2;
             ALLERA RESO;
           FIN ;
           H:=PA;
           ALLERA CONT;
SORT: ECRIRE( " SORT " );
       SAUTLIGNE;
       POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
       ECRIRE( ,,K,,XF[K]);
       FIN ;
       POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
       PS11[K]:=PS12[K];
ENT: PONG(PS11,XO,PA,EPS,XF1);
      D2XF1:=0.0;
      POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      D2XF1:=D2XF1+(XT[K]-XF1[K])*(XT[K]-XF1[K]);
BA:  BOLDIV:=BOLMUL:= FAUX ;
      POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      DEBUT
        POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
        PSI[L]:=PS11[L]+(
          SI K=L ALORS 1.0
          SINON 0.0)*MOD;
        PONG(PSI,XO,PA,EPS,XF);
        POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
        DELTX[L,K]:=XF[L]-XF1[L];
        ECA[K]:=XT[K]-XF1[K];
      FIN ;
      GRESOLSYSLINE(DELTX,ECA,COEF,N,IMPOSSIBLE);
      ECRIRE( " GRESO " ,MOD);
      S:=S+1;
      SI S > SO ALORS ALLERA TILT;
      POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      PSI[L]:=PS11[L]+MOD*COEF[L]/(2**((SO-S)));
FEU: PONG(PSI,XO,PA,EPS,XF);
      BOLEX:= VRAI ;

```

```

D2XF:=0.0;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
D2XF:=D2XF+(XT[K]-XF[K])*(XT[K]-XF[K]);
SI D2XF < D2XF1/4 ALORS ALLERA OKAY;
SCA1:=SCA2:=0.0;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT
    SCA1:=SCA1+(XF[K]-XF1[K])*(XT[K]-XF1[K]);
    SCA2:=SCA2+(XF[K]-XF1[K])*(XF[K]-XF1[K]);
FIN ;
SI SCA1/RAC2(SCA2*D2XF1) > RAC2(0.75) ET SCA1/D2XF1
< 1.0 ALORS ALLERA SAUT;
SI BOLMUL ALORS ALLERA OKE;
ECRIRE( "      DIV      " );
BOLDIV:= VRAI ;
ALLERA RECO;
SAUT: SI SCA1/D2XF1 > 0.5 ALORS ALLERA OKAY;
SI BOLDIV ALORS ALLERA OKE;
SI BOLMUL ALORS ALLERA OKE;
BOLMUL:= VRAI ;
ECRIRE( "      MUL      " );
RECO: POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT
    PSI2[K]:=PSI[K];
    SI ABS(XF2[K]-XF[K]) > EPS ALORS BOLEX:=
    FAUX ;
    XF2[K]:=XF[K];
    PSI[K]:=
    SI BOLMUL ALORS 2*PSI2[K]-PSI1[K]
    SINON (PSI1[K]+PSI2[K])/2;
FIN ;
D2XF2:=D2XF;
SI BOLEX ALORS
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
PSI[K]:=0.5*(PSI1[K]+PSI2[K]);
ALLERA FEU;
OKAY: POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT
    PSI1[K]:=PSI[K];
    XF1[K]:=XF[K];
FIN ;
D2XF1:=D2XF;
ALLERA ABA;
OKE: POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT
    PSI1[K]:=PSI2[K];
    XF1[K]:=XF2[K];
FIN ;
D2XF1:=D2XF2;
ALLERA ABA;
ABA: SI D2XF1 < EPS ALORS ALLERA SORT;
ALLERA BA;
IMPOSSIBLE: ECRIRE( " IMPOSSIBLE " );
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
PSI1[K]:=(PSI1[K]*3.0+PSI2[K])/(4*(SO-S));

```

```
ALLERA ENT;
SORT: ECRIRE( " PROBLEME " , " RESOLU " );
      SAUTLIGNE;
      SAUTLIGNE;
      POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      ECRIRE( " PSI " , K , PSI[K]);
      BOLRES:= VRAI ;
      PONG(PSI , XO , PA , EPS , XF);
TILT: FIN ;
      FIN ;
FIN ;
```

§4 - RESULTATS ET EXEMPLES NUMERIQUES

Etendue du programme.

Unités syntaxiques	2400.
Temps de - Compilation :	19".
- Assemblage :	33".
- Chargement :	21".

Performances

Il est possible d'utiliser ce programme pour traiter des problèmes de degré élevé mais les problèmes pratiques correspondent à $N=2$ ou à $N=3$; nous donnerons des exemples de ces dimensions.

Pour $N = 3$.

Avec 200 points, calcul d'une trajectoire en	:	15".
Avec 20 points, calcul d'une trajectoire en	:	2".
Avec 200 points, une itération dure de	:	60" à 120".
Avec 20 points, une itération dure de	:	8" à 15".

Pour un problème stable on a obtenu des précisions de l'ordre de 10^{-8} sur l'état et la commande en 340" de calcul et en trois boucles d'itération.

Causes de difficultés de la méthode

Si le point final X_T est très voisin de la frontière du domaine atteignable on doit effectuer le calcul approché de la dérivée sur un petit accroissement, donc avec une grande précision, et conditionner la boucle d'itération pour obtenir un $\Delta\Psi(0)$ très petit. Il sera nécessaire de disposer d'une bonne valeur de départ.

Si le problème est très instable, sans autre difficulté, il n'y a pas à proprement parler de problème de convergence mais celle-ci sera plus longue à obtenir.

Si les composantes de $\frac{dX_F}{d\psi^0}$ ne sont pas linéairement indépendantes en un point intérieur, ou sont très proches de ne pas l'être (seul cas se présentant en pratique) alors une précision très grande est nécessaire pour le calcul des trajectoires, en effet une erreur conduit à diviser $\Delta\psi(0)$ sans jamais obtenir une valeur satisfaisante.

Conclusion

Dans tous les cas, l'examen des libellés du programme permet d'apporter les remèdes nécessaires pour obtenir la solution après quelques essais.

Si le problème est impossible, l'itération convergera toujours vers la même valeur sur la frontière de $\delta\Delta$.

L'expérience montre qu'il est généralement moins coûteux de passer plusieurs fois le programme en modifiant les paramètres que d'exiger au départ la précision que l'on veut atteindre.

Exemple 1

Etude de la précision sur un système à solution connue $X = 0$, $u = 0$.

$$N = 3 \quad T = 1.0 \quad PA = 0.005 \quad S\phi = 3 \quad EPS = 10^{-6} \quad M\phi D = 10^{-4}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1.0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -2.0 & 0 \\ -1.0 & 0.5 & -3.0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

Evolution par $\frac{dX}{dt} = Ax + Bu$ et minimiser $\int_0^T (x^2 + u^2) dt$.

On donne naturellement une valeur de départ $\Psi(0)$ non nulle :

$$\Psi_{(0)}^{(0)} = (5 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-3})$$

on a alors :

$$\Psi_{(0)}^{(1)} = (0.47 \times 10^{-3}, 0.47 \times 10^{-3}, 0.47 \times 10^{-3})$$

$$\Psi_{(0)}^{(2)} = (0.23 \times 10^{-3}, 0.23 \times 10^{-3}, 0.23 \times 10^{-3})$$

$$\Psi_{(0)}^{(3)} = (0.90 \times 10^{-6}, 0.17 \times 10^{-5}, 0.12 \times 10^{-6})$$

Cette dernière valeur de $\Psi(0)$ donne à X les valeurs suivantes :

t	x^1	x^2	x^3
0	0	0	0
0,25	$.541\ 274\ 44 \times 10^{-7}$	$-.243\ 831\ 67 \times 10^{-7}$	$.134\ 248\ 63 \times 10^{-7}$
0,5	$.434\ 470\ 84 \times 10^{-7}$	$-.159\ 641\ 50 \times 10^{-7}$	$-.423\ 023\ 03 \times 10^{-7}$
0,75	$-.778\ 493\ 02 \times 10^{-8}$	$.891\ 925\ 07 \times 10^{-8}$	$-.218\ 330\ 65 \times 10^{-7}$
1,0	$.109\ 582\ 51 \times 10^{-7}$	$-.332\ 413\ 97 \times 10^{-8}$	$.236\ 020\ 40 \times 10^{-8}$

Exemple 2

On considère le problème pratique suivant :

Soit l'équation différentielle linéaire :

$$x'' - 2x' + x + u(t) = 0$$

avec

$$\begin{cases} x(0) = 0.2 \\ x'(0) = 0.4 \\ x(1) = 0.5 \\ x'(1) = 0.5 \end{cases}$$

et soit à minimiser $\int_0^1 (x^2 + u^2) dt$ pour $|u(t)| \leq 1$

On pose :

$$\begin{cases} x^1 = x \\ x^2 = x' \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \frac{dx^1}{dt} = x^2 \\ \frac{dx^2}{dt} = -x^1 + 2x^2 - u. \end{cases}$$

Le programme effectue alors les itérations suivantes :

Itération	$\psi^1(0)$	$\psi^2(0)$	$x^1(1)$	$x^2(1)$
0	-9.0	-5.0	.698 493 84	.127 075 74 $\times 10^1$
1	-.899 998 19 $\times 10$	-4.99 999 02 $\times 10$.698 493 79	.127 075 73 $\times 10^1$
2	-.485 264 90	-.128 467 57 $\times 10^1$.503 938 22	.388 903 59
3	-.972 624 12	-.150 361 10 $\times 10^1$.503 975 45	.450 478 63
4	-.150 634 32 $\times 10^1$	-.179 494 44 $\times 10^1$.499 756 84	.501 158 56

CHAPITRE - 5LES SYSTEMES VECTORIELS

On considère ici le problème le plus général dans le cadre de notre étude, nous aurons donc peu de particularités à faire intervenir, par rapport à l'étude faite au chapitre II.

Nous utilisons un algorithme voisin de celui utilisé au chapitre précédent et nous nous attacherons surtout à montrer leurs différences.

§1 - HAMILTONIEN ET RECHERCHE DES COMMUTATIONS

La maximisation de $h(\psi, x, u)$ conduit à rechercher le maximum d'une forme quadratique sur un polyèdre convexe ; différentes méthodes peuvent être envisagées, la plus simple étant l'optimisation par résolution à chaque pas du problème semi-quadratique.

Il est également possible de tenir compte de la continuité de $u(t)$ en construisant à chaque pas la commande extrémale à partir de sa valeur au pas précédent et avec recherche des points de commutation.

Une autre méthode possible consiste en une réduction du problème comme au chapitre II-B §4 et à la projection du vecteur ω sur les faces du polyèdre.

Dans le cas particulier fréquent où U est un hyperparallélépipède défini par :

$$u_i \in [m_i, M_i] \quad i = 1, \dots, q.$$

cette méthode se réduira au calcul de ω
et on prendra :

$$\left| \begin{array}{l} u_i = \sup (\inf (\omega_i, M_i), m_i) \\ i = 1, \dots, q. \end{array} \right.$$

§2 - DOMAINE ATTEIGNABLE

Les propriétés du domaine atteignable se déduisent des propriétés énoncées au chapitre précédent.

Si les u_i sont contraints individuellement la linéarité des équations d'évolution permet la décomposition du domaine atteignable grace aux domaines atteignables D_i relatifs à chaque composante de u_i . Des points anguleux peuvent alors apparaître sur D pour la direction v si tous les D_i ont un point anguleux dans la direction v et si les cônes correspondants ont une intersection non vide.

Si les u_i ne sont pas contraints individuellement KREINDLER, [20], a démontré qu'il ne pouvait y avoir de points anguleux sur D .

§3 - METHODE ITERATIVE

Nous reprenons ici la même boucle d'itération et une procédure de résolution des systèmes différentiels identique à celle du chapitre précédent, la seule différence porte donc sur le calcul de la commande extrémale à chaque pas.

Nous donnons ici le programme général comportant le calcul de la commande par résolution d'un programme semi-quadratique, ØPQUS fait référence à une procédure en code figurant dans un paquet binaire joint au programme ALGØL. Nous ne donnons pas le listage de cette procédure qui n'est qu'une variante du programme semi-quadratique donné en [23].

Nous avons également utilisé un programme plus simple relatif au cas particulier, cité ci-dessus, des commandes contraintes individuellement.

Procédure \emptyset PQUS (M,N,H,MATC \emptyset ,C \emptyset ,SME,VECOU,MATFO,XOPT)

Problème :

$$\text{Minimiser } c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x \quad \left| \begin{array}{l} \leq \\ Ax = b \\ \geq \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

M : nombre de contraintes.

N : nombre de variables.

H : nombre d'itérations maximum demandé.

MATC \emptyset : matrice des contraintes (M \times N).

C \emptyset : matrice colonne à éléments pris dans {1,0,-1} de dimension M.

$$C\emptyset[I] := \begin{cases} + 1 & \text{si la } i^{\text{ème}} \text{ contrainte est du type } \leq \\ 0 & \text{-----} = \\ - 1 & \text{-----} \geq \end{cases}$$

SME : matrice colonne de dimension M représentant le vecteur second membre (b)

VECOU : matrice colonne (1 \times N) représentant le vecteur "coût" (c).

MATFO : MATRICE SYMETRIQUE DEFINIE POSITIVE de taille N \times N (Q).

XOPT : Résultat : Vecteur optimal solution du problème taille N

DEBUT

```

ENTIER N,R,P,SO;
REEL T,PA,EPS,MOD;
LIRE(N,R,P,T,PA);
LIRE(SO,EPS,MOD);
DEBUT

```

```

REEL TABLEAU A,DELTX,ALP[1:N,1:N],XO,XT,PSI,PSI1,PSI2,C,
ECA,COEF,COS[1:N],XF,XF1,XF2[1:2*N],COM,U[1:R],
B[1:N,1:R],BET[1:R,1:R],LAMB[1:P,1:R],MU[1:P];
REEL H,SCA1,SCA2,D2XF,D2XF1,D2XF2;
ENTIER S,K,L;
BOOLEEN BOLDIV,BOLMUL,BOLRES;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
A[K,L]:=RDONNEE;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
ALP[K,L]:=RDONNEE;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA R FAIRE
POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA R FAIRE
BET[K,L]:=RDONNEE;
POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
XO[L]:=RDONNEE;
POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
XT[L]:=RDONNEE;
POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
COS[L]:=RDONNEE;
POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA R FAIRE
B[L,K]:=RDONNEE;
POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA P FAIRE
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA R FAIRE
LAMB[L,K]:=RDONNEE;
POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA P FAIRE
MU[L]:=RDONNEE;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
PSI2[K]:=RDONNEE;
BOLRES:= FAUX ;
DEBUT

```

```

PROCEDURE GRESOLSYSLINE(A,B,X,N,IMPOSSIBLE);
TABLEAU A,B,X;
ENTIER N;
ETIQUETTE IMPOSSIBLE;
DEBUT

```

TRIANGULARISATION: DEBUT

```

ENTIER I,J,K;
REEL R;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N-1 FAIRE
DEBUT

```

NORMAL:

DEBUT

```

SI ABS(A[K,K])=0 ALORS ALLERA
ECHANGEDELIGNES;
POUR I:=K+1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT
R:=A[I,K]/A[K,K];

```

```
POUR J:=K+1 PAS 1 JUSQUA N
FAIRE
A[I,J]:=A[I,J]-R*A[K,J];
B[I]:=B[I]-R*B[K]
```

```
FIN
```

```
FIN ;
ALLERA RETOUR;
DEBUT
```

ECHANGEDELIGNES:

```
ENTIER M;
M:=K+1;
SI ABS(A[M,K])=0 ALORS M:=M+1
SINON ALLERA CONT;
SI M=N+1 ALORS ALLERA IMPOSSIBLE
SINON ALLERA RET;
POUR J:=K PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT
```

RET:

```
R:=A[K,J];
A[K,J]:=A[M,J];
A[M,J]:=R
```

CONT:

```
FIN ;
R:=B[K];
B[K]:=B[M];
B[M]:=R;
ALLERA NORMAL
```

```
FIN ;
```

RETOUR:

```
FIN
FIN TRIANGULARISATION ;
DEBUT
```

RESSYSTRI:

```
ENTIER I,J;
REEL TX;
POUR I:=N PAS -1 JUSQUA 1 FAIRE
DEBUT
TX:=0;
POUR J:=N PAS -1 JUSQUA I+1 FAIRE
TX:=TX-X[J]*A[I,J];
SI A[I,I]=0 ALORS ALLERA IMPOSSIBLE;
X[I]:=(B[I]+TX)/A[I,I]
```

```
FIN
```

```
FIN GRESOLSYSLINE;
PROCEDURE RESYDIF(FONCT,XD,YD,H,N,XF,YF);
VALEUR XD,H,N;
PROCEDURE FONCT ;
REEL XD,H,XF;
ENTIER N;
TABLEAU YD,YF;
DEBUT
```

```
TABLEAU A[1:5],Z,W[1:N];
ENTIER K,J;
A[1]:=A[2]:=A[5]:=H/2.0;
A[3]:=A[4]:=H;
XF:=XD;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
YF[K]:=W[K]:=YD[K];
J:=1;
FONCT(XF,W,Z);
```

ITER:

TERM:

```

POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
YF[K]:=YF[K]+A[J+1]*Z[K]/3.0;
SI J=4 ALORS ALLERA TERM;
POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
W[K]:=YD[K]+A[J]*Z[K];
XF:=XD+A[J];
J:=J+1;
ALLERA ITER;

FIN ;
PROCEDURE PONG(PSI,XO,PA,EPS,XF) ;
REEL PA,EPS;
TABLEAU PSI,XO,XF;
DEBUT
  ENTIER I,J,TEM;
  REEL TD,TF,HYP;
  TABLEAU XD[1:2*N],COM,COM1,VECOU[1:R],
  MATFO[1:R,1:R];
  ENTIER TABLEAU CO[1:P];
  BOOLEEN BOLFIN,BOL1,BOL2;
  PROCEDURE FONCT(TET,Y,DY) ;
  REEL TET;
  TABLEAU Y,DY;
  DEBUT
    ENTIER I,J;
    POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
    DEBUT
      DY[I]:=COS[I];
      POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA R FAIRE
      DY[I]:=DY[I]+B[I,J]*COM[J];
      POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      DY[I]:=DY[I]+A[I,J]*Y[J];
      DY[I+N]:=0.0;
      POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      DY[I+N]:=DY[I+N]-A[J,I]*Y[J+N]+
      ALP[I,J]*Y[J];
    FIN ;
  FIN FONCT ;
  POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
  ECRIRE( " PSI " ,I,PSI[I]);
  POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
  DEBUT
    XD[I]:=XO[I];
    XD[N+I]:=PSI[I];
  FIN ;
  POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA P FAIRE
  CO[I]:=1;
  TD:=0.0;
  BOLFIN:= FAUX ;
  POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA R FAIRE
  DEBUT
    VECOU[I]:=0.0;
    POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
    VECOU[I]:=VECOU[I]-PSI[J]*B[J,I];
  FIN ;
  ALGOL( " OPQUS " ,P,R,9,LAMB,CO,MU,VECOU,BET,COM);

```

```

TEM:=0;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA P FAIRE
DEBUT
  HYP:=-MU[I];
  POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA R FAIRE
  DEBUT
    HYP:=HYP+LAMB[I,J]*U[J];
    SI ABS(HYP) < EPS ALORS TEM:=TEM+1;
  FIN ;
FIN ;
BOL1:= SI TEM > 0 ALORS VRAI
SINON FAUX ;
H:=PA;
RESO: RESYDIF(FONCT,TD,XD,H,2*N,TF,XF);
SI BOLRES ALORS ECRIRE(TF,,XF[1],XF[2],
XF[3],XF[4]);
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA R FAIRE
DEBUT
  VECOU[I]:=0.0;
  POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
  VECOU[I]:=VECOU[I]-XF[N+J]*B[J,I];
FIN ;
ALGOL( " OPQUS " ,P,R,9,LAMB,CO,MU,VECOU,BET,COM1);
TEM:=0;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA P FAIRE
DEBUT
  HYP:=-MU[I];
  POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA R FAIRE
  DEBUT
    HYP:=HYP+LAMB[I,J]*U[J];
    SI ABS(HYP) < EPS ALORS TEM:=TEM+1;
  FIN ;
FIN ;
BOL2:= SI TEM > 0 ALORS VRAI
SINON FAUX
SI BOL2 ET NON BOL1 OU BOL1 ET NON BOL2 ALORS
ALLERA DIVPA;
SI BOLFIN ALORS ALLERA SORT;
TD:=TF;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA 2*N FAIRE
XD[I]:=XF[I];
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA R FAIRE
COM[I]:=COM1[I];
BOL1:=BOL2;
SI PA > T-TD ALORS
DEBUT
  H:=T-TD;
  BOLFIN:= VRAI
FIN ;
ALLERA RESO;
BOLFIN:= FAUX ;
SI H > EPS ALORS
DEBUT
  H:=H/2;
  ALLERA RESO;

```

RESO:

CONT:

DIVPA:

```

                FIN ;
                H:=PA;
                ALLERA CONT;
SORT: ECRIRE( " SORT " );
                SAUTLIGNE;
                ECRIRE(XF[1],XF[2],XF[3],XF[4]);
                SAUTLIGNE;
                FIN PONT ;
                POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                PSI1[K]:=PSI2[K];
ENT: PONG(PSI1,XO,PA,EPS,XF1);
                D2XF1:=0.0;
                POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                D2XF1:=D2XF1+(XT[K]-XF1[K])*(XT[K]-XF1[K]);
BA: BOLDIV:=BOLMUL:= FAUX ;
                POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                DEBUT
                POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                PSI[L]:=PSI1[L]+(
                SI K=L ALORS 1.0
                SINON 0.0)*MOD;
                PONG(PSI,XO,PA,EPS,XF);
                POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                DELTX[L,K]:=XF[L]-XF1[L];
                ECA[K]:=XT[K]-XF1[K];
                FIN ;
                GRESOLSYSLINE(DELTX,ECA,COEF,N,IMPOSSIBLE);
                ECRIRE( " GRESO " ,MOD);
                SAUTLIGNE;
                S:=S+1;
                SI S > SO ALORS ALLERA TILT;
                POUR L:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                PSI[L]:=PSI1[L]+MOD*COEF[L]/4.0;
FEU: PONG(PSI,XO,PA,EPS,XF);
                D2XF:=0.0;
                POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                D2XF:=D2XF+(XT[K]-XF[K])*(XT[K]-XF[K]);
                SI D2XF < D2XF1/4 ALORS ALLERA OKAY;
                SCA1:=SCA2:=0.0;
                POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                DEBUT
                SCA1:=SCA1+(XF[K]-XF1[K])*(XT[K]-XF1[K]);
                SCA2:=SCA2+(XF[K]-XF1[K])*(XF[K]-XF1[K]);
                FIN ;
                SI SCA1/RAC2(SCA2*D2XF1) > RAC2(0.75) ET SCA1/D2XF1
                < 1.0 ALORS ALLERA SAUT;
                SI BOLMUL ALORS ALLERA OKE;
                BOLDIV:= VRAI ;
                ALLERA RECO;
SAUT: SI SCA1/D2XF1 > 0.5 ALORS ALLERA OKAY;
                SI BOLDIV ALORS ALLERA OKE;
                BOLMUL:= VRAI ;
RECO: POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                DEBUT
                PSI2[K]:=PSI1[K];

```

```

        XF2[K]:=XF[K];
        PSI[K]:=
        SI BOLMU ALORS 2*PSI2[K]-PSI1[K]
        SINON (PSI1[K]+PSI2[K])/2;
OKAY:  FIN ;
        D2XF2:=D2XF;
        ALLERA FEU;
        POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
        DEBUT
            PSI1[K]:=PSI[K];
            XF1[K]:=XF[K];
        FIN ;
        D2XF1:=D2XF;
        ALLERA ABA;
OKE:   POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
        DEBUT
            PSI1[K]:=PSI2[K];
            XF1[K]:=XF2[K]
        FIN ;
        D2XF1:=D2XF2;
        ALLERA ABA;
ABA:   SI D2XF1 < EPS ALORS ALLERA SORT;
        ALLERA BA;
IMPOSSIBLE: ECRIRE( " IMPOSSIBLE " );
        POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
        PSI[K]:=(PSI1[K]*3.0+PSI2[K])/4.0;
        ALLERA ENT;
SORT:  ECRIRE( " PROBLEME " , " RESOLU " );
        SAUTLIGNE;
        BOLRES:= VRAI ;
        SAUTLIGNE;
        SAUTLIGNE;
        PONG(PSI , XO , PA , EPS , XF);
TILT:  FIN ;
        FIN ;
FIN ;

```

§4 - RESULTATS ET EXEMPLES NUMERIQUES

Etendue du programme

- Paquet ØPQUS 3000 Unités syntaxiques
- Paquet TRAMU 2600 Unités syntaxiques.

Temps de Compilation : 21"

Assemblage : 38"

Chargement : 34"

Performances

Dans le cas particulier cité ci-dessus les performances sont celles enregistrées au chapitre précédent ; avec le programme ØPQUS elles sont nettement inférieures, nous avons testé des exemples de dimension supérieure mais nous donnons seulement des exemples avec $N = 2$ et $N = 3$.

Pour $N = 2$

Avec 20 points 14" pour une trajectoire
Avec 200 points 135" pour une trajectoire

Pour $N = 3$

Avec 20 points 16" pour une trajectoire
Avec 200 points 150" pour une trajectoire.

Le temps de calcul ne varie pas beaucoup en fonction de l'ordre des systèmes d'équations mais surtout en fonction du nombre de faces du polyèdre U, la très grande augmentation du temps de calcul est due au programme ØPQUS.

Avec une grille de 20 points il faut donc compter de 60" à 120" pour une itération et il n'est guère possible d'utiliser des grilles de 200 points dans ces conditions.

La perte de précision sera due simultanément à OPQUS et au petit nombre de pas, on ne peut pas obtenir mieux que 10^{-5} avec un problème en simple précision.

Conduite des essais numériques.

Les difficultés numériques sont les mêmes que celles rencontrées au chapitre précédent avec cette propriété, que le fait de disposer de plusieurs commandes pour diriger le système rend moins fréquentes les difficultés avec l'indépendance linéaire des composantes de $dX_F/d\Psi(0)$; les exigences de précision pour assurer la convergence sont donc moins fortes et on obtient souvent le résultat dès le premier essai.

Les conclusions du chapitre précédent relatives à l'intérêt de ne pas exiger au départ une grande précision restent vraies et sont d'autant plus justifiées que chaque trajectoire avec un grand nombre de pas est très coûteuse.

Exemple 1

$$N = 3 ; R = 3 ; P = 1 ; T = 1.0 ; PA = 0.05 ;$$

$$S\emptyset = 3 ; EPS = 10^{-5} ; M\emptyset D = 10^{-5} ;$$

$$A = \begin{pmatrix} -1.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & -2.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & -3.0 \end{pmatrix}$$

$$ALP = BET = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$$X\emptyset = (1.0, 1.0, 1.0)$$

$$COS = (0.0, 0.0, 0.0)$$

$$XT = (0.6, 0.12, 0.13)$$

$$B = \begin{pmatrix} -3.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 \end{pmatrix}$$

$$LAMB = (1.0, 1.0, 1.0)$$

$$MU = 1.0$$

Après un premier essai donnant une valeur approchée le deuxième essai donne :

	$\Psi_1(0)$	$\Psi_2(0)$	$\Psi_3(0)$	$X^1(T)$	$X^2(T)$	$X^3(T)$
0	-0.15	-0.07	-0.02	0.565	0.132	0.134
1	-0.137	-0.120	-0.196	0.574	0.127	0.133
2	-0.1191	-0.1666	-0.1908	0.5871	0.1154	0.1316
2'	-0.1129	-0.1629	-0.1890	0.5914	0.1169	0.1310
2''	-0.1066	-0.1556	-0.1853	0.5984	0.1192	0.1297

Le résultat de 2'' étant jugé satisfaisant on trace les trajectoires :

	$X^1(t)$	$X^2(t)$	$X^3(t)$
0.0	1.0	1.0	1.0
0.2	0.909 227 81	0.601 135 43	0.667 269 41
0.4	0.846 623 79	0.395 959 88	0.483 274 42
0.6	0.769 247 00	0.265 419 92	0.366 622 63
0.8	0.686 794 64	0.177 916 34	0.264 758 63
1.0	0.598 446 51	0.119 260 91	0.129 664 75

Exemple 2

Problème de Navigation dans un courant variable.

On considère le demi-plan H de (Ox_1, Ox_2) défini par $x_1 \leq 1.0$ et dans H le mouvement d'un mobile décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = u_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + u_2 - 1.0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x_1(0) = x_2(0) = 0.0 \\ x_1(T) = x_2(T) = 1.0 \end{array} \right.$$

Dans le problème de navigation, la frontière de H représente le rivage et dans la deuxième équation $x_1 - 1$ représente le courant. u_1 et u_2 sont les composantes de la vitesse apparente du navire, on remplace ici la conditions $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$ par les trois conditions :

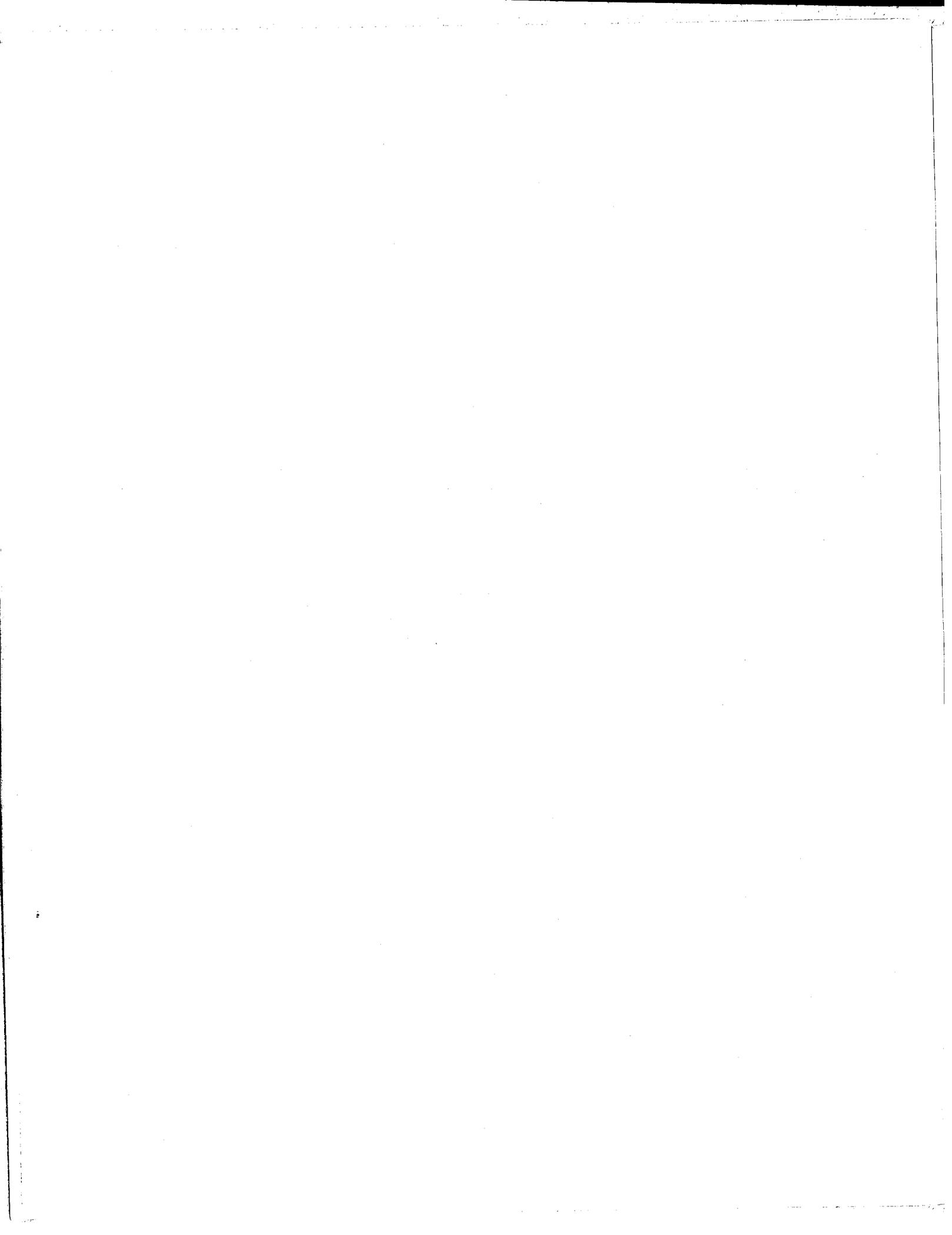
$$\begin{cases} u_1 \leq 1 \\ u_2 \leq 1 \\ u_1 + u_2 \leq 1,5 \end{cases}$$

En effet dans le problème posé u_1 et u_2 sont positifs et la portion d'octogone ainsi définie est une approximation du quart de cercle. Prenons un critère à minimiser tel que $\int_0^T (x^2 + u^2) dt$ et $T = 2$; la résolution sur une grille de 20 points donne les résultats suivants :

Itération	$\psi_1(0)$	$\psi_2(0)$	$X^1(T)$	$X^2(T)$
0	0	0	0.623 264 91	-1.750 043 2
1	0.871 100 64	1.134 410 3	0.453 436 09	0.751 237 00
2	0.764 206 17	0.845 464 69	0.535 583 36	0.606 418 35
3	0.854 020 44	0.807 603 47	0.887 725 10	0.836 134 09
4	0.881 179 06	0.816 876 10	0.944 405 44	0.918 011 81
5	0.909 387 67	0.827 573 22	0.999 947 46	0.999 809 11

D'où la trajectoire :

t	$X^1(t)$	$X^2(t)$
0.0	0	0
0.2	0.174 058 98	-0.016 759 56
0.4	0.320 303 24	-0.002 108 23
0.8	0.553 157 66	0.105 084 02
1.2	0.735 236 41	0.309 463 22
1.6	0.885 083 23	0.621 417 40
2.0	0.999 947 46	0.999 809 11



B I B L I O G R A P H I EOUVRAGES GENERAUX

- [1] DIEUDONNE J.- Fondements de l'Analyse Moderne.
Gauthier-Villars - Paris 1965.
- [2] DUNFORD N., SCHWARTZ J.T. - Linear Operators.
Tome 1 - Interscience Pub. New York 1958.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET STABILITE

- [3] CARTAN H.- Calcul différentiel.
Hermann Paris 1967.
- [4] HERMES - Controlability and the singular Problem.
Martin Company SR. 0520-60 Octobre 1963.
- [5] LA SALLE - Stability and Control.
Journal SIAM Control. V.1 - N° 1 1962.
- [6] LEFSCHETZ S.- Liapunov Stability and Control.
Journal SIAM Control V.3 N° 1 - 1963
- [7] ZADEH L., DESOER C.A. - Linear Systems Theory .
Mc. Graw Hill - New York 1963.

CALCUL DES VARIATIONS ET PRINCIPE DU MAXIMUM

- [8] BARRA J.R.- Problèmes d'extrema sous contraintes .
Séminaire d'Analyse Fonctionnelle - Faculté des Sciences de
Grenoble 1966.
- [9] BLAQUIERE A., LEITMAN G. - Principe du maximum .
Ecole d'été EDF-CEA- Juillet 1966.
- [10] GELFAND I.M., FOMIN S.V. - Calculus of variations (2ème Edition)
Prentice Hall New York 1963.
- [11] LEITMANN G. - An introduction to optimal control
Mc. Graw Hill - New York 1966
- [12] LOBRY C. - Etude géométrique des problèmes d'optimisation en présence de
contraintes.
Thèse de 3ème Cycle - Faculté des Sciences de Grenoble -1967.
- [13] PALLU DE LA BARRIERE R. - Le principe de Pontryagin .
Faculté des Sciences de Caen - 1964.
- [14] PONTRYAGIN L.S., BOLTYANSKII V.G., GAMKRELIDZE R.V., MISCHENKO E.F. -
The Mathematical theory of optimal Processes.
en russe Fitzmagiz Moscou 1961
en anglais Interscience Publishers 1962.

THEORIE DU CONTROLE

- [15] ATHANS A., FALB P. - Optimal Control.
Mac Graw Hill - New York 1966.
- [16] AUSLENDER A., BRODEAU F. - Convergence d'un algorithme de Frank et Wolfe appliqué à un problème de contrôle.
A paraître dans R.I.R.O.
- [17] DUBOVITSKI, MILYUTIN - Certain Optimality Problems for linear systems.
Automation and Remote Control V. 24 1963.
- [18] FALB P. - Infinite dimension Control Problems.
Journal of Mathematical Analysis and Applications V. 9 n°1 1964.
- [19] KIRILLOVA - On the continuous dependance on the initial date and parameters of the solution of an optimal control problem.
Uspehi Mat. Nauk. V. 17 1962.
- [20] KREINDLER E. - Contributions to the Theory of Time Optimal Control.
Journal of Franklin Institut - Avril 1963.
- [21] KREINDLER E. - Reciprocal Optimal Control Problems.
Journal of Mathematical Analysis and Applications V. 14 N°1 1966.

PROGRAMMATION LINEAIRE ET CONVEXE

- [22] BARRA J.R., LEMARIE J.M. - Polyèdres convexes.
Faculté des Sciences de Grenoble - 1965.
- [23] LEMARIE J.M. - Prevision et décision en programmation linéaire stochastique.
Thèse de 3ème Cycle - Faculté des Sciences de Grenoble 1967.

PROBLEMES PRATIQUES D'OPTIMISATION

- [24] ANALAC - Etude de l'optimisation d'un processus.
Contrat D.G.R.S.T. - 63-00-204 00212 75 01.
- [25] ANDERSON, GUPTA - Analog Computer Solution of a third order Pontryagin Optimum Control Problem.
SIMULATION V. 5 N° 4 Octobre 1965.
- [26] DREYFUS S. - Numerical Solution of Variational Problems.
Journal of Mathematical Analysis and Applications V. 5 1962.
- [27] EATON J.H. - An interative Solution to Time Optimal Control.
Journal of Mathematical Analysis and Applications V.5 - 1962.
- [28] HARVEY C.A. - Determining the Switching Criterion for Time Optimal Control.
Journal of Mathematical Analysis and Applications V.5. 1962

- [29] LEITMANN G. - Topics in Optimisation.
Accademic Press - New York - 1966.
- [30] STEINMETZ - Using Pontryagin's Maximum Principle to Solve One dimensional
Optimisation Problems.
SIMULATION V. 4 - N° 6 - Juin 1965.
- [31] WILSON - Computation of Optimal Control.
Journal of Mathematical Analysis and Applications V. 14 N° 1
1966.
- [32] SIDAR - Sur le calcul et la détermination des trajectoires optimales.
Comptes rendus Acad. Sci. Paris T. 262 - Mai 1966

VU

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU, et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE