



**HAL**  
open science

# Sur la modélisation et la commande de suspension de véhicules automobiles

Damien Sammier

► **To cite this version:**

Damien Sammier. Sur la modélisation et la commande de suspension de véhicules automobiles. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2001. Français. NNT : . tel-00198474

**HAL Id: tel-00198474**

**<https://theses.hal.science/tel-00198474>**

Submitted on 17 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

*N° attribué par la bibliothèque*

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**THÈSE**

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'INPG**

***Spécialité : Automatique – Productique***

préparée au

***Laboratoire d'Automatique de Grenoble***

dans le cadre de l'École Doctorale

***Électronique, Électrotechnique, Automatique, Télécommunications, Signal***

présentée et soutenue publiquement par

***Damien SAMMIER***

Vendredi 9 Novembre 2001

**Titre :**

***SUR LA MODÉLISATION ET LA COMMANDE DE  
SUSPENSION DE VÉHICULES AUTOMOBILES***

Directeur de thèse : Luc DUGARD

Co-Encadrant : Olivier SENAME

**JURY**

M. Mohammed M'SAAD	Président, Professeur à l'ENSI Caen
M. Gérard Léon GISSINGER	Rapporteur, Professeur à l'Université de Haute-Alsace (ESSAIM)
M. Gilles DUC	Rapporteur, Professeur à l'École Supérieure d'Électricité
M. Franck GUILLEMARD	Examineur, Ingénieur chez PSA Vélizy
M. Luc DUGARD	Directeur de thèse, Directeur du LAG
M. Olivier SENAME	Co-Encadrant, Maître de conférences à l'ENSIEG - INPG



*à Stéphanie et à notre enfant qu'elle porte*  
*à mes parents, mes frères et soeurs et toute ma nombreuse famille*  
*à tous mes amis de Grenoble et d'ailleurs*



# Remerciements

Ce travail a été conduit au Laboratoire d'Automatique de Grenoble sous la direction conjointe de son Directeur Monsieur Luc DUGARD, et de Monsieur Olivier SENAME, Maître de conférence à l'ENSIEG. Qu'ils soient remerciés pour leur accueil au laboratoire, pour leur rigueur et leurs conseils sur mon travail, ainsi que pour m'avoir envoyé en mission jusqu'au pôle nord...

Je remercie Monsieur Mohammed M'SAAD, Professeur à l'ISMRA de Caen, qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Gilles DUC, Professeur à l'École Supérieure d'Electricité, et Monsieur Gérard Léon GISSINGER, Professeur à l'Université de Haute-Alsace (ESSAIM), d'avoir accepté la lourde tâche de rapporteur. J'ai pu apprécier leur précieux conseils lors de nos rencontres.

J'adresse aussi mes remerciements à Monsieur Franck GUILLEMARD, Ingénieur chez PSA Vélizy, pour sa participation au jury, ainsi qu'à Vincent ABADIE pour la collaboration qui a été initiée entre PSA et le LAG sur la commande de suspension.

Je n'oublie pas Monsieur Jean-Michel DION, responsable de l'équipe SAMUR dont j'ai fait partie durant ces trois années, ainsi que les anges du laboratoire Marie-Thérèse, Isabelle, Marie-Rose, Marielle, Florence et Linda pour leur gentillesse et leur disponibilité.

Un grand merci à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, au bon déroulement de cette thèse.

Merci à Stéphanie pour m'avoir soutenu durant ces trois années de thèse.



# Table des matières

<b>Notations et définitions</b>	<b>19</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>21</b>
<b>1 Sur la modélisation des suspensions</b>	<b>27</b>
1.1 Introduction . . . . .	27
1.2 Modèles de pneumatiques . . . . .	30
1.2.1 Modèle vertical de pneu . . . . .	30
1.2.2 Modèle horizontal de pneu . . . . .	31
1.2.2.1 Définitions des paramètres . . . . .	31
1.2.2.2 Présentation de trois modèles de pneus . . . . .	37
1.2.3 Intégration des modèles de pneu dans un modèle de suspension . . .	45
1.2.4 Conclusion . . . . .	46
1.3 Modèle quart de véhicule ou Monoroue . . . . .	47
1.3.1 Introduction . . . . .	47
1.3.2 Suspension passive, semi-active ou active . . . . .	48
1.3.2.1 Suspension passive . . . . .	48
1.3.2.2 Suspension semi-active . . . . .	49
1.3.2.3 Suspension active . . . . .	50
1.3.2.4 Absorbeur de chocs . . . . .	50
1.3.3 Sollicitations externes . . . . .	51
1.3.4 Description du modèle quart de véhicule . . . . .	52
1.3.5 Conclusion . . . . .	53
1.4 Modèle demi véhicule de type essieu . . . . .	54
1.4.1 Introduction . . . . .	54
1.4.2 Essieu (monobloc ou non) . . . . .	54
1.4.3 Barre anti-roulis . . . . .	55
1.4.4 Modèle demi véhicule essieu . . . . .	55
1.4.5 Équations du modèle demi-véhicule à 6 ddl . . . . .	57
1.4.6 Conclusion . . . . .	59
1.5 Modèle "complet" de véhicule ou modèle 3D . . . . .	60
1.5.1 Introduction . . . . .	60
1.5.2 Modèle complet à 7ddl . . . . .	62
1.5.3 Conclusion . . . . .	65
1.6 Conclusion . . . . .	65

<b>2</b>	<b>Analyse des suspensions automobiles</b>	<b>67</b>
2.1	Introduction . . . . .	67
2.2	Objectifs de performances et de robustesse . . . . .	68
2.2.1	Confort . . . . .	68
2.2.2	Tenue de route . . . . .	69
2.2.3	Butée de suspension . . . . .	71
2.2.4	Coût . . . . .	71
2.2.5	Incertitudes . . . . .	71
2.3	Propriété intrinsèque de la suspension . . . . .	72
2.3.1	Points invariants . . . . .	72
2.3.2	Comportements asymptotiques invariants . . . . .	74
2.3.3	Compromis . . . . .	74
2.4	Critères pour le quart de véhicule . . . . .	74
2.4.1	Critères de PSA . . . . .	75
2.4.2	Critères de la littérature . . . . .	77
2.4.2.1	Confort . . . . .	77
2.4.2.2	Tenue de route . . . . .	78
2.4.2.3	Butée de suspension . . . . .	78
2.5	Critères pour le demi-véhicule . . . . .	79
2.5.1	Confort . . . . .	79
2.5.2	Tenue de route . . . . .	79
2.5.3	Butée de suspension . . . . .	79
2.6	Critères pour le véhicule complet . . . . .	79
2.6.1	Confort . . . . .	79
2.6.2	Tenue de route . . . . .	80
2.6.3	Butée de suspension . . . . .	80
2.7	Conclusion . . . . .	80
<b>3</b>	<b>Rappels sur des méthodologies de commande</b>	<b>81</b>
3.1	Introduction . . . . .	81
3.2	État de l'art . . . . .	81
3.3	Le problème du placement de pôles . . . . .	85
3.4	Découplage et rejet des perturbations simultanés . . . . .	89
3.5	Commande $H_\infty$ . . . . .	91
3.5.1	Formulation du problème $H_\infty$ . . . . .	92
3.5.2	Résolution du problème $H_\infty$ standard par Riccati . . . . .	94
3.5.3	Résolution du problème $H_\infty$ standard par inégalités linéaires ma- tricielles (LMI) . . . . .	95
3.5.4	Le problème de sensibilité mixte . . . . .	96
3.6	$\mu$ -analyse . . . . .	98
3.6.1	Étude de robustesse en stabilité et en performances . . . . .	99
3.6.1.1	Principe . . . . .	99
3.6.1.2	Mise en œuvre . . . . .	101
3.7	Présentation de la commande Skyhook . . . . .	103
3.8	Conclusion . . . . .	106

<b>4</b>	<b>Commande de modèles quart de véhicule</b>	<b>109</b>
4.1	Introduction . . . . .	109
4.2	Suspension passive (boucle ouverte) . . . . .	111
4.2.1	Le modèle quart de véhicule . . . . .	111
4.2.2	Les critères . . . . .	113
4.3	Commande par placement de pôles . . . . .	115
4.3.1	Première synthèse . . . . .	119
4.3.2	Analyse des résultats de la première synthèse . . . . .	128
4.3.3	Deuxième synthèse . . . . .	134
4.3.4	Analyse des résultats de la deuxième synthèse . . . . .	143
4.3.5	Conclusions . . . . .	147
4.4	Commande Skyhook . . . . .	148
4.5	Commande $H_\infty$ . . . . .	150
4.5.1	Mise sous forme standard . . . . .	151
4.5.2	Choix des pondérations . . . . .	154
4.6	Comparaison des performances . . . . .	156
4.6.1	Confort B.F. . . . .	160
4.6.2	Tenue de route (Rebond de roue) . . . . .	161
4.6.3	Confort H.F. (Trépidation) . . . . .	162
4.6.4	Tests Temporels . . . . .	162
4.6.5	Critères de la littérature . . . . .	167
4.6.6	Conclusion . . . . .	167
4.7	$\mu$ -analyse . . . . .	168
4.7.1	Mise sous forme LFT . . . . .	169
4.7.1.1	Définition du système nominal et des performances nominales désirées . . . . .	169
4.7.1.2	Choix et représentation des incertitudes . . . . .	173
4.7.2	Analyse des problèmes NP, RS et RP . . . . .	175
4.7.2.1	Régulateur $H_\infty$ . . . . .	175
4.7.2.2	Régulateur par placement de pôles . . . . .	181
4.7.2.3	Régulateur Skyhook . . . . .	186
4.7.3	Conclusion . . . . .	192
4.8	Prise en compte de l'actionneur réel . . . . .	192
4.8.1	Saturation de la commande . . . . .	193
4.8.2	Non linéarité de l'amortisseur semi-actif . . . . .	195
4.8.2.1	Analyse . . . . .	197
4.8.2.2	Conclusion . . . . .	204
4.9	Conclusions sur le modèle quart de véhicule . . . . .	204
<b>5</b>	<b>Commande de modèles 1/2 véhicule-essieu et 3D</b>	<b>207</b>
5.1	Introduction . . . . .	207
5.2	Commande $H_\infty$ du modèle demi-véhicule de type essieu . . . . .	208
5.2.1	H-infini . . . . .	208
5.2.2	Résultats de simulation . . . . .	211
5.2.3	Intégration du modèle de pneu . . . . .	212
5.2.4	Conclusion sur le modèle demi-véhicule de type essieu . . . . .	214
5.3	Modèle "complet" de véhicule ou modèle 3D . . . . .	217

5.3.1	Application du découplage et rejet au modèle complet de véhicule .	217
5.3.1.1	Mise en forme . . . . .	217
5.3.1.2	Calcul de la loi de commande . . . . .	218
5.3.1.3	Résultat de simulation . . . . .	221
5.3.2	Conclusions sur le modèle "complet" de véhicule ou modèle 3D . . .	223
5.4	Conclusions sur les deux modèles et leurs commandes . . . . .	223
<b>6</b>	<b>Conclusions générales</b>	<b>225</b>
6.1	Conclusions . . . . .	225
6.2	Perspectives . . . . .	227

# Liste des tableaux

1.1	Paramètres physiques du modèle de suspension d'un quart de véhicule . . .	53
1.2	Paramètres physiques du modèle complet de véhicule de Park & Kim (1998)	63
4.1	Critères PSA et fonctions de sensibilité $\mathcal{S}$ , $\mathcal{T}$ et $\mathcal{KS}$ avec un pôle quintuple $p = 106$ , la pulsation $w_n = 90$ rad/s et l'amortissement $\xi = 0.707$ du filtre $F(s)$ . . . . .	134
4.2	Influence du pôle triple $p$ sur les critères PSA et les fonctions de sensibilité $\mathcal{S}$ , $\mathcal{T}$ et $\mathcal{KS}$ . . . . .	142
4.3	Influence de l'amortissement $\xi$ du filtre $F(s)$ pour un pôle triple $p = 74.34$ rad/s sur les critères PSA et les fonctions de sensibilité $\mathcal{S}$ , $\mathcal{T}$ et $\mathcal{KS}$ .	142
4.4	Influence de l'amortissement $\xi$ du filtre $F(s)$ pour un pôle triple $p = 200$ rad/s sur les critères PSA et les fonctions de sensibilité $\mathcal{S}$ , $\mathcal{T}$ et $\mathcal{KS}$ . .	142
4.5	Lien entre le pôle triple $p$ et la pulsation de coupure $w_{KSG_d}$ de $\mathcal{KSG}_d$ . . .	147
4.6	Maxima des majorants des mesure $\mu$ des problèmes NP, RS et RP du système $H_\infty$ avec $\pm 10\%$ sur tous les paramètres. . . . .	177
4.7	Maxima des majorants des mesures $\mu$ des problèmes NP, RS et RP du système $H_\infty$ avec $\pm 30\%$ sur $m_c$ et $\pm 10\%$ sur les autres paramètres. . . . .	179
4.8	Maxima des majorants des mesures $\mu$ des problèmes NP, RS et RP du placement de pôles avec $\pm 10\%$ sur tous les paramètres. . . . .	182
4.9	Maxima des majorants des mesures $\mu$ des problèmes NP, RS et RP du placement de pôles avec $\pm 30\%$ sur $m_c$ et $\pm 10\%$ sur les autres paramètres. .	185
4.10	Maxima des majorants des mesures $\mu$ des problèmes NP, RS et RP du Skyhook avec $\pm 10\%$ sur tous les paramètres. . . . .	187
4.11	Maxima des majorants des mesures $\mu$ des problèmes NP, RS et RP du Skyhook avec $\pm 30\%$ sur $m_c$ et $\pm 10\%$ sur les autres paramètres. . . . .	190
4.12	Comparaison des critères PSA pour les systèmes Placement de pôles semi-actif, Skyhook semi-actif, $H_\infty$ semi-actif et 406 passif . . . . .	203



# Table des figures

1.1	Mouvements linéaires et angulaires du véhicule dans l'espace . . . . .	27
1.2	Modèle vertical du pneu dans un modèle quart de véhicule . . . . .	31
1.3	Le système d'axe du pneu . . . . .	32
1.4	Définition de l'angle de dérive $\alpha$ . . . . .	33
1.5	Définition du glissement longitudinal sans virage . . . . .	34
1.6	Vitesse de rotation et de déplacement de la roue en cas d'accélération ou de freinage en virage . . . . .	35
1.7	Définition de l'angle de carrossage $\gamma$ . . . . .	36
1.8	Forces latérale et longitudinale SANS glissement et dérive combinés . . . .	37
1.9	Forces latérale ( $F_y$ ) et longitudinale ( $F_x$ ) en fonction de l'angle de dérive $\alpha$ et du glissement longitudinal (virage AVEC accélération ou freinage) . . .	37
1.10	Mesures pour le calcul des $C_i$ . . . . .	39
1.11	Courbe produite par la "formule magique" . . . . .	42
1.12	Mesures et courbe de la résultante normalisée $\bar{R}$ en fonction du glissement normalisé $\bar{k}$ . . . . .	45
1.13	Incorporation des modèles de pneu au modèle demi-véhicule de type essieu	46
1.14	Modèles quart de véhicule . . . . .	48
1.15	Modélisation de la suspension par un actionneur commandé en force . . . .	49
1.16	Caractéristique Force-Vitesse d'un amortisseur semi-actif . . . . .	50
1.17	Quart de véhicule avec absorbeur de chocs . . . . .	51
1.18	Ajout d'une force perturbatrice sur la caisse . . . . .	52
1.19	Le modèle quart de véhicule à 2 degrés de liberté. . . . .	53
1.20	Modèle demi véhicule de type essieu . . . . .	56
1.21	Modèle de véhicule complet. . . . .	62
2.1	Modélisation du corps humain par un ensemble de liaisons masse-ressort-amortisseur. . . . .	68
2.2	Relation Force latérale/Force normale en virage . . . . .	70
2.3	Le modèle quart de véhicule à 2 degrés de liberté. . . . .	72
2.4	Critères fréquentiels pour l'amortisseur de la 406-série avec le modèle non-linéaire . . . . .	76
3.1	Placement de pôles structure générale à 1ddl. . . . .	85
3.2	Placement de pôles structure générale à 2ddl. . . . .	85
3.3	Régulateur à 1ddl sans consigne. . . . .	89
3.4	Problème standard . . . . .	92
3.5	Problème standard avec pondérations . . . . .	93
3.6	Problème de sensibilité mixte . . . . .	97

3.7	Représentation par LFT supérieure des incertitudes de modèle . . . . .	99
3.8	Système nominal avec incertitudes fictives et/ou réelles . . . . .	102
3.9	Modèle Skyhook idéal. . . . .	104
4.1	Le modèle quart de véhicule à 2 degrés de liberté. . . . .	111
4.2	Comparaison de la raideur linéaire $k_s=22000$ N/m et non-linéaire de la Peugeot 406 . . . . .	112
4.3	Comparaison de l'amortissement linéaire $c=1500$ N.s/m et non-linéaire de la Peugeot 406 . . . . .	112
4.4	Comparaison des caractéristiques des amortisseurs 406-série (..) et 607-9lois (-) en compression. . . . .	113
4.5	Comparaison des caractéristiques des amortisseurs 406-série (..) et 607-9lois (-) en détente. . . . .	113
4.6	Critères fréquentiels pour l'amortisseur de la 406-série avec le modèle non-linéaire plus réaliste . . . . .	114
4.7	Passage, à 30km/h, sur une barrette $10mm \times 2m$ , pour le système avec amortisseur et raideur non-linéaires de la 406. . . . .	114
4.8	Régulateur à 1ddl sans consigne. . . . .	116
4.9	Régulateur à 1ddl sans consigne. . . . .	118
4.10	Comparaison du transfert $\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)}$ pour différentes valeurs du pôle p de $P''(s) = (s + p)^5$ . . . . .	120
4.11	Comparaison de $K(s)$ pour différentes valeurs du pôle p quintuplé de $P'(s)$ . . . . .	121
4.12	Comparaison de $S(s)$ pour différentes valeurs du pôle p quintuplé de $P'(s)$ . . . . .	121
4.13	Comparaison de $T(s)$ pour différentes valeurs du pôle p quintuplé de $P'(s)$ . . . . .	122
4.14	Comparaison de $KS(s)$ pour différentes valeurs du pôle p quintuplé de $P'(s)$ . . . . .	122
4.15	Comparaison de $SG_d(s)$ pour différentes valeurs du pôle p quintuplé de $P'(s)$ . . . . .	123
4.16	Comparaison de $KSG_d(s)$ pour différentes valeurs du pôle p quintuplé de $P'(s)$ . . . . .	123
4.17	Comparaison du confort ( $z_{caisse}/z_{sol}$ ) pour différentes valeurs du pôle p quintuplé de $P'(s)$ . . . . .	124
4.18	Comparaison du rebond de roue ( $z_{roue}/z_{sol}$ ) pour différentes valeurs du pôle p quintuplé de $P'(s)$ . . . . .	124
4.19	Comparaison de la trépidation ( $\ddot{z}_{caisse}$ ) pour différentes valeurs du pôle p quintuplé de $P'(s)$ . . . . .	125
4.20	Comparaison de $z_{caisse}(t)$ et $z_{sol}(t)$ pour différentes valeurs du pôle p quintuplé de $P'(s)$ . . . . .	126
4.21	Schéma de régulation avec filtre de la commande . . . . .	126
4.22	Comparaison de $\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)}$ pour différentes valeurs de la fréquence de coupure $w_n$ du filtre $F(s)$ avec $\xi=0.7$ . . . . .	127
4.23	Comparaison de $\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)}$ pour différentes valeurs de l'amortissement $\xi$ du filtre $F(s)$ . . . . .	127
4.24	Comparaison de $\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)}$ en boucle ouverte et en boucle fermée avec ou sans le filtre $F(s)$ . . . . .	128
4.25	Comparaison du régulateur $K(s) = \frac{R(s)}{S(s)}$ avec et sans le filtre $F(s)$ . . . . .	129
4.26	Confort basses fréq. . . . .	130
4.27	Rebond de roue . . . . .	130

4.28	Confort en hautes fréquences (Trépidation) . . . . .	130
4.29	Réponses temporelles . . . . .	130
4.30	Fonction de sensibilité $\mathcal{S}(s)$ . . . . .	132
4.31	Fonction de sensibilité complémentaire $\mathcal{T}(s) = y/b$ . . . . .	132
4.32	Fonction de sensibilité $\mathcal{KS}(s) = u/b$ . . . . .	133
4.33	Fonction de sensibilité $\mathcal{KS}(s)G_d(s) = u/d$ . . . . .	133
4.34	Transfert $z_{caisse}/z_{sol}$ pour différentes valeurs du pôle triple $p$ du dénominateur	135
4.35	Comparaison de $K(s)$ pour différentes valeurs du pôle $p$ quintuplé de $P'(s)$	135
4.36	Comparaison de $S(s)$ pour différentes valeurs du pôle $p$ quintuplé de $P'(s)$	136
4.37	Comparaison de $T(s)$ pour différentes valeurs du pôle $p$ quintuplé de $P'(s)$	136
4.38	Comparaison de $KS(s)$ pour différentes valeurs du pôle $p$ quintuplé de $P'(s)$	137
4.39	Comparaison de $SG_d(s)$ pour différentes valeurs du pôle $p$ quintuplé de $P'(s)$	137
4.40	Comparaison de $KSG_d(s)$ pour différentes valeurs du pôle $p$ quintuplé de $P'(s)$ . . . . .	138
4.41	Comparaison du confort ( $z_{caisse}/z_{sol}$ ) pour différentes valeurs du pôle $p$ quintuplé de $P'(s)$ . . . . .	138
4.42	Comparaison du rebond de roue ( $z_{roue}/z_{sol}$ ) pour différentes valeurs du pôle $p$ quintuplé de $P'(s)$ . . . . .	139
4.43	Comparaison de la trépidation ( $\ddot{z}_{caisse}$ ) pour différentes valeurs du pôle $p$ quintuplé de $P'(s)$ . . . . .	139
4.44	Transfert $z_{caisse}/z_{sol}$ pour amortissement $\xi$ du filtre $F(s)$ avec le pôle triple $p = 74.34\text{rad/s}$ . . . . .	141
4.45	Transfert $z_{caisse}/z_{sol}$ pour amortissement $\xi$ du filtre $F(s)$ avec le pôle triple $p = 200\text{rad/s}$ . . . . .	141
4.46	Confort basses fréq. . . . .	144
4.47	Rebond de roue . . . . .	144
4.48	Confort en hautes fréquences (Trépidation) . . . . .	144
4.49	Réponses temporelles . . . . .	144
4.50	Fonction de sensibilité $\mathcal{S}(s)$ . . . . .	145
4.51	Fonction de sensibilité complémentaire $\mathcal{T}(s) = y/b$ . . . . .	145
4.52	Fonction de sensibilité $\mathcal{KS}(s) = u/b$ . . . . .	146
4.53	Fonction de sensibilité $\mathcal{KS}(s)G_d(s) = u/d$ . . . . .	146
4.54	Schéma du système bouclé en cas de mesure de $z_{sol}$ . . . . .	148
4.55	Schéma du système bouclé en cas de mesure de $z_{sol} - z_{caisse}$ . . . . .	148
4.56	Modèle Skyhook idéal. . . . .	149
4.57	Comparaison du "confort BF" en fonction de $c_{sky}$ pour différentes valeurs de $\alpha$ . . . . .	150
4.58	Comparaison du gain maximal de $z_{caisse}/z_{sol}$ en fonction de $c_{sky}$ pour différentes valeurs de $\alpha$ . . . . .	151
4.59	Comparaison du gain maximal de $z_{roue}/z_{sol}$ en fonction de $c_{sky}$ pour différentes valeurs de $\alpha$ . . . . .	152
4.60	Comparaison de la trépidation en fonction de $c_{sky}$ pour différentes valeurs de $\alpha$ . . . . .	152
4.61	Schéma du problème de sensibilité mixte avec les pondérations. . . . .	153
4.62	Pondérations fréquentielles $W_{zc}$ , $W_{zr}$ , $W_{zc2nd}$ et $W_u$ appliquées sur les mouvements de la caisse et de la roue et sur l'accélération de la caisse . . . . .	156

4.63	Comparaison du gabarit $\gamma_{opt}/W_{zc}$ avec le transfert $Z_{caisse}/Z_{sol}$ en BO et en BF . . . . .	157
4.64	Comparaison du gabarit $\gamma_{opt}/W_{zr}$ avec le transfert $Z_{caisse}/Z_{sol}$ en BO et en BF . . . . .	157
4.65	Comparaison du gabarit $\gamma_{opt}/W_{zc2nd}$ avec le transfert $Z_{caisse}/Z_{sol}$ en BO et en BF . . . . .	158
4.66	Comparaison du gabarit $\gamma_{opt}/W_u$ avec le transfert $u/Z_{sol}$ en BF . . . . .	158
4.67	Diagramme de Bode du régulateur $H_\infty$ d'ordre 14, transfert $u/(Z_{sol}-Z_{caisse})$	159
4.68	Réponse fréquentielle du transfert entre le déplacement vertical du sol ( $z_{sol}$ ) et celui de la caisse ( $z_{caisse}$ ) . . . . .	160
4.69	Réponse fréquentielle du transfert entre le déplacement vertical du sol ( $z_{sol}$ ) et celui de la roue ( $z_{roue}$ ) . . . . .	161
4.70	Réponse fréquentielle de l'accélération verticale de la caisse ( $\ddot{z}_{caisse}$ ) en réponse à un déplacement vertical du sol ( $z_{sol}$ ) sinusoïdal de $\pm 1\text{mm}$ . . . . .	163
4.71	Réponses temporelles des systèmes Placement de pôles et boucle ouverte pour une barrette sur le sol ( $z_{sol}$ ) de $10 \times 2000\text{mm}$ . . . . .	164
4.72	Réponses temporelles des systèmes Skyhook et boucle ouverte pour une barrette sur le sol ( $z_{sol}$ ) de $10 \times 2000\text{mm}$ . . . . .	165
4.73	Réponses temporelles des systèmes $H_\infty$ et boucle ouverte pour une barrette sur le sol ( $z_{sol}$ ) de $10 \times 2000\text{mm}$ . . . . .	166
4.74	Représentation par LFT supérieure des incertitudes de modèle . . . . .	168
4.75	Schéma du système nominale avec gabarits fréquentiels. . . . .	169
4.76	Gabarits fréquentiels des transferts $z_{caisse}/z_{sol}$ , $z_{roue}/z_{sol}$ et $\ddot{z}_{caisse}/z_{sol}$ . . . . .	170
4.77	Comparaison du transfert $z_{caisse}/z_{sol}$ avec son gabarit fréquentiel initial. . . . .	171
4.78	Comparaison du transfert $z_{roue}/z_{sol}$ avec son gabarit fréquentiel initial. . . . .	171
4.79	Comparaison du transfert $\ddot{z}_{caisse}/z_{sol}$ avec son gabarit fréquentiel initial. . . . .	172
4.80	Schéma d'application des incertitudes paramétriques. . . . .	173
4.81	Schéma des incertitudes dans le modèle perturbé. . . . .	174
4.82	Schéma des incertitudes regroupées dans $\Delta_r(s)$ hors du modèle nominal. . . . .	174
4.83	Schéma complet des incertitudes réelles et fictives regroupées dans $\Delta(s)$ . . . . .	175
4.84	Majorant et minorant de la mesure $\mu$ des performances nominales (NP) du système avec la commande $H_\infty$ . . . . .	176
4.85	Majorant et minorant de la mesure $\mu$ de la stabilité robustes (RS) du système avec la commande $H_\infty$ avec $\pm 10\%$ pour tous les paramètres . . . . .	177
4.86	Majorant et minorant de la mesure $\mu$ des performances robustes (RP) du système avec la commande $H_\infty$ avec $\pm 10\%$ pour tous les paramètres . . . . .	178
4.87	Majorant et minorant de la mesure $\mu$ de la stabilité robustes (RS) du système avec la commande $H_\infty$ avec $\pm 30\%$ pour $m_c$ et $\pm 10\%$ pour les autres	179
4.88	Majorant et minorant de la mesure $\mu$ des performances robustes (RP) du système avec la commande $H_\infty$ avec $\pm 30\%$ pour $m_c$ et $\pm 10\%$ pour les autres	180
4.89	Comparaison du confort en basses fréquences avec les gabarits des problèmes NP, RP 1 et RP 2 pour le régulateur $H_\infty$ . . . . .	181
4.90	Majorant et minorant de la mesure $\mu$ des performances nominales (NP) du système avec la commande par placement de pôles . . . . .	182
4.91	Majorant et minorant de la mesure $\mu$ de la stabilité robustes (RS) du système avec la commande par placement de pôles avec $\pm 10\%$ pour tous les paramètres . . . . .	183

4.92	Majorant et minorant de la mesure $\mu$ des performances robustes (RP) du système avec la commande par placement de pôles avec $\pm 10\%$ pour tous les paramètres . . . . .	183
4.93	Majorant et minorant de la mesure $\mu$ de la stabilité robustes (RS) du système avec la commande par placement de pôles avec $\pm 30\%$ pour $m_c$ et $\pm 10\%$ pour les autres . . . . .	184
4.94	Majorant et minorant de la mesure $\mu$ des performances robustes (RP) du système avec la commande par placement de pôles avec $\pm 30\%$ pour $m_c$ et $\pm 10\%$ pour les autres . . . . .	185
4.95	Comparaison du confort en basses fréquences avec les gabarits des problèmes NP, RP 1 et RP 2 pour le régulateur par placement de pôles . . . .	187
4.96	Majorant et minorant de la mesure $\mu$ des performances nominales (NP) du système avec la commande Skyhook . . . . .	188
4.97	Majorant et minorant de la mesure $\mu$ de la stabilité robustes (RS) du système avec la commande Skyhook avec $\pm 10\%$ pour tous les paramètres .	188
4.98	Majorant et minorant de la mesure $\mu$ des performances robustes (RP) du système avec la commande Skyhook avec $\pm 10\%$ pour tous les paramètres .	189
4.99	Majorant et minorant de la mesure $\mu$ de la stabilité robustes (RS) du système avec la commande Skyhook avec $\pm 30\%$ pour $m_c$ et $\pm 10\%$ pour les autres . . . . .	190
4.100	Majorant et minorant de la mesure $\mu$ des performances robustes (RP) du système avec la commande Skyhook avec $\pm 30\%$ pour $m_c$ et $\pm 10\%$ pour les autres . . . . .	191
4.101	Comparaison du confort en basses fréquences avec les gabarits des problèmes NP, RP 1 et RP 2 pour le régulateur Skyhook . . . . .	192
4.102	Comparaison BO/BF du déplacement de la caisse lors d'une montée de trottoir . . . . .	193
4.103	Comparaison BO/BF du déplacement de la roue lors d'une montée de trottoir	194
4.104	Comparaison des commandes $u$ , $u_{filtree}$ et $u_{filtree,sat}$ lors d'une montée de trottoir . . . . .	194
4.105	Comparaison BO/BF du déplacement de la caisse sur route chaotique . . .	195
4.106	Comparaison BO/BF du déplacement de la roue sur route chaotique . . . .	196
4.107	Comparaison des commandes $u$ , $u_{filtree}$ et $u_{filtree,sat}$ sur route chaotique . .	196
4.108	Confort BF pour le placement de pôles "idéal", le placement de pôles "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406 . . . . .	197
4.109	Rebond de roue pour le placement de pôles "idéal", le placement de pôles "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406 . . . . .	198
4.110	Accélération verticale de la caisse pour le placement de pôles "idéal", le placement de pôles "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406	198
4.111	Confort BF pour le Skyhook "idéal", le Skyhook "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406 . . . . .	199
4.112	Rebond de roue pour le Skyhook "idéal", le Skyhook "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406 . . . . .	199
4.113	Accélération verticale de la caisse pour le Skyhook "idéal", le Skyhook "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406 . . . . .	200
4.114	Confort BF pour le $H_\infty$ "idéal", le $H_\infty$ "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406 . . . . .	200

4.115	Rebond de roue pour le $H_\infty$ "idéal", le $H_\infty$ "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406 . . . . .	201
4.116	Accélération verticale de la caisse pour le $H_\infty$ "idéal", le $H_\infty$ "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406 . . . . .	201
4.117	Comparaison des forces demandées par les régulateurs Skyhook et $H_\infty$ et des forces disponibles générées par l'actionneur semi-actif à 9lois de la 607 . . . . .	203
5.1	Configuration du problème de sensibilité mixte pour les systèmes dont certaines sorties à commander ne sont pas mesurables . . . . .	209
5.2	Réponses fréquentielles et temporelles de l'accélération verticale de la caisse ( $\ddot{z}_{caisse}$ ) . . . . .	212
5.3	accélération angulaire ( $\ddot{\theta}_s$ ) de la caisse en fonction de l'inclinaison de la route ( $r_\theta$ ) . . . . .	213
5.4	Incorporation des modèles de pneu au modèles demi-véhicule de type essieu	213
5.5	$F_y$ somme des forces définies par le modèle de pneu . . . . .	215
5.6	Sorties $y - y_c$ du modèle demi-véhicule . . . . .	215
5.7	Angle $\theta_s$ défini par le modèle demi-véhicule . . . . .	215
5.8	Charge verticale dynamique sur le pneu gauche $F_{z,dyn,left}$ . . . . .	215
5.9	$\alpha$ et $\lambda$ sont des sinusoïdes . . . . .	215
5.10	$F_y$ somme des forces définies par le modèle de pneu ( $\alpha$ est une sinusoïde et $\lambda$ est nul) . . . . .	216
5.11	Sorties $y - y_c$ du modèle demi-véhicule ( $\alpha$ et $\lambda$ sont des sinusoïdes) . . . . .	216
5.12	Angle $\theta_s$ défini par le modèle demi-véhicule ( $\alpha$ et $\lambda$ sont des sinusoïdes) . . . . .	216
5.13	Charge verticale dynamique sur le pneu gauche $F_{z,dyn,left}$ ( $\alpha$ et $\lambda$ sont des sinusoïdes) . . . . .	216
5.14	Réponse temporelle du déplacement vertical du CdG de la caisse ( $z_c$ ) à un échelon de l'entrée de référence $\bar{u}_1$ . . . . .	221
5.15	Réponse temporelle du roulis ( $\theta$ ) de la caisse ( $z_c$ ) à un échelon de l'entrée de référence $\bar{u}_2$ . . . . .	221
5.16	Réponse temporelle du tangage ( $\phi$ ) de la caisse ( $z_c$ ) à un échelon de l'entrée de référence $\bar{u}_3$ . . . . .	222
5.17	Réponse temporelle du déplacement vertical ( $z_c$ ), du roulis ( $\theta$ ) et du tangage ( $\phi$ ) de la caisse à un échelon du profil de la route sous une roue ( $z_{ri}$ ) . . . . .	222

# Notations et définitions

- $z_{caisse}$  : déplacement vertical de la caisse (masse suspendue) du modèle quart de véhicule, par rapport à sa position d'équilibre statique.
- $z_{roue}$  : déplacement vertical de la roue (masse non-suspendue) du modèle quart de véhicule, par rapport à sa position d'équilibre statique.
- $z_{sol}$  : profil vertical de la route pour le modèle quart de véhicule, par rapport à sa position d'équilibre statique.
- $z_s$  : déplacement vertical du centre de gravité de la masse suspendue (caisse) du modèle demi-véhicule de type essieu par rapport à sa position d'équilibre statique.
- $z_u$  : déplacement vertical du centre de gravité de la masse non-suspendue (essieu) du modèle demi-véhicule de type essieu par rapport à sa position d'équilibre statique.
- $z_r$  : composante vertical du profil de la route pour le modèle demi-véhicule de type essieu, par rapport à sa position d'équilibre statique.
- $z_{si}$  : déplacement vertical du coin  $i$  de la caisse (masse suspendue) du modèle complet de véhicule à 7ddl, par rapport à sa position d'équilibre statique.
- $z_c$  : déplacement vertical du centre de gravité de la masse suspendue (caisse) du modèle complet de véhicule à 7ddl par rapport à sa position d'équilibre statique.
- $\theta$  (**resp.**  $\phi$ ) : roulis (resp. tangage) de la masse suspendue (caisse) du modèle complet de véhicule à 7ddl par rapport à sa position d'équilibre statique.
- $z_{ui}$  : déplacement vertical de la roue  $i$  (masse non-suspendue) du modèle complet de véhicule à 7ddl, par rapport à sa position d'équilibre statique.
- $z_{ri}$  : profil vertical de la route sous la roue  $i$  du complet de véhicule à 7ddl, par rapport à sa position d'équilibre statique.
- $m_c$  : masse du quart de la caisse pour le modèle quart de véhicule (kg).
- $m_r$  : masse de la roue pour le modèle quart de véhicule (kg).
- $m_s$  : masse suspendue (caisse) pour les modèles 1/2 et complet de véhicule (kg).
- $m_u$  : masse non-suspendue (essieu) pour le modèle 1/2 véhicule (kg).
- $m_f$  : masse non-suspendue (roue) avant droite ou gauche pour le modèle complet de véhicule (kg).
- $m_r$  : masse non-suspendue (roue) arrière droite ou gauche pour le modèle complet de véhicule (kg).
- $k$  : raideur de la suspension pour un modèle quart de véhicule.
- $k_l$  (**resp.**  $k_r$ ) : raideur de la suspension gauche (resp. droite) pour un modèle demi véhicule.

$k_f$  : raideur des suspensions avant pour un modèle complet de véhicule.

$k_r$  : raideur des suspensions arrière pour un modèle complet de véhicule.

$c$  : amortissement de la suspension pour un modèle quart de véhicule.

$c_l$  (resp.  $c_r$ ) : amortissement de la suspension gauche (resp. droite) pour un modèle demi véhicule.

$b_f$  : coefficient d'amortissement des suspensions avant pour un modèle complet de véhicule.

$b_r$  : coefficient d'amortissement des suspensions arrières pour un modèle complet de véhicule.

$k_p$  : raideur du pneumatique pour un modèle quart de véhicule.

$k_{pl}$  (resp.  $k_{pr}$ ) : raideur du pneumatique gauche (resp. droit) pour un modèle demi véhicule.

$k_{tf}$  : raideur des pneumatiques avant pour un modèle complet de véhicule.

$k_{tr}$  : raideur des pneumatiques arrière pour un modèle complet de véhicule.

$r_f$  : raideur de la barre anti-roulis avant pour un modèle complet de véhicule.

$r_r$  : raideur de la barre anti-roulis arrière pour un modèle complet de véhicule.

$\bar{\sigma}(T_{ew}(s))$  : valeur singulière maximale de  $T_{ew}(s)$

$\mathcal{RH}_\infty$  : ensemble des fonctions de transfert  $G(s)$  propres et stables.

$\mathcal{RH}_\infty^{k \times k}$  : ensemble des matrices de transfert  $G(s)$  de dimension  $k \times k$ , propres et stables.

# Introduction générale

Après avoir exposé le sujet de cette thèse, nous répondrons à quelques questions concernant les suspensions afin de mieux cerner le sujet, puis nous présenterons l'articulation de ce mémoire de thèse.

L'automobile est un ensemble d'organes composant un système. Ce système est soumis aux sollicitations du conducteur (angle volant, pression sur les pédales) et de l'environnement (profil de route, adhérence, vent, ...). Les position et les vitesses des différents organes évoluent selon ces sollicitations. Le but de l'automatique appliquée à l'automobile est de gérer les relations entre les sollicitations et l'état du système (par ex. entre le profil de route et le confort). La conception des organes du système fait principalement appel aux disciplines que sont la mécanique et la thermique. Mais les progrès techniques et scientifiques ont permis d'introduire de plus en plus d'actionneurs pour les différents organes comme les freins, la direction, la transmission, la suspension, etc... . De plus, la recherche sur les commandes de ces actionneurs, dont certaines se font sans interaction avec le conducteur, permet une amélioration constante du confort et de la sécurité des véhicules à tout niveau. Citons par exemple l'ABS (Anti Blocking System), qui permet de réduire la distance de freinage en évitant un blocage des roues trop prolongé, mais aussi l'ESP (Electronic Stability Program), qui agit indépendamment sur l'effort longitudinal (freinage ou accélération) appliqué à chacun des pneus afin de gérer la direction du véhicule. D'autres axes de recherche sont focalisés sur la direction assistée, la conduite automatique, le contrôle moteur, les moteurs hybrides, etc... Les livres de Gillespie (1992), Wong (1993) et Kiencke & Nielsen (2000) traitent de la modélisation et/ou de la commande de différents éléments d'un véhicule automobile.

La discipline de l'automatique intervient notamment, mais pas seulement, au niveau de la commande de ces actionneurs.

S'inscrivant dans cette recherche globale sur l'amélioration constante du véhicule, notre travail porte sur la modélisation et la commande des organes de suspensions du véhicule. Ainsi l'objet de cette thèse est de proposer une méthodologie pour la commande de suspensions.

Ce travail fait suite d'une part à la thèse de Ramirez-Mendoza (1997) publiée en juillet 1997 sur la modélisation et la commande de véhicule automobile, portant principalement sur le contrôle du comportement latéral du véhicule, et d'autre part au travail effectué par Alvarez-Salas (1998) lors de son DEA sur la modélisation de suspensions automobiles, et notamment le modèle demi-véhicule de type essieu.

Il s'inscrit aussi dans le cadre d'une collaboration contractuelle avec PSA Peugeot-Citroën, où nous avons étudié les commandes  $H_\infty$  et Skyhook pour le contrôle d'un modèle quart de véhicule équipé d'une suspension semi-active à plusieurs lois.

Quelques rappels fondamentaux sont nécessaires avant de détailler la structure de ce mémoire :

- Dans le cas d'un véhicule, la suspension est un ensemble d'éléments, reliant la caisse aux roues, qui ont pour fonction de soutenir la caisse. Ces éléments peuvent être passifs (ressorts, amortisseurs), semi-actifs (amortisseurs pilotés) ou actifs (pompes, pistons).

- La suspension permet de filtrer les vibrations qui sont transmises à la caisse par les roues et ainsi de fournir un certain confort aux passagers. Mais elle influence aussi le comportement des roues et donc la tenue de route du véhicule. Nous verrons par la suite qu'il existe un compromis entre ces deux objectifs.

- Lorsque la suspension est passive, ses caractéristiques sont fixées une fois pour toutes et ne varient qu'avec l'usure des éléments (ressort, amortisseur). La force développée par la suspension dépend alors uniquement du débattement de la suspension et de sa vitesse. Dans ce cas rien n'est commandable, hormis un changement des éléments.

Lorsque la suspension est semi-active, ses caractéristiques peuvent être choisies parmi un éventail discret, ou bien de façon continue, dans un intervalle. Cependant, la force développée dépend toujours du débattement de la suspension et de sa vitesse. Dans la pratique, pour des raisons de coût, seul l'amortisseur est semi-actif (amortisseur piloté). Dans ce cas la force développée peut être commandée dans la limite d'un éventail ou d'un intervalle qui dépend encore de la vitesse de débattement de la suspension.

Dans le cas d'une suspension active, les éléments sont des pompes ou des pistons qui fournissent alors une force indépendante du débattement de la suspension ou de sa vitesse. Mais la bande passante de ces actionneurs est limitée ou bien cela demande beaucoup trop d'énergie pour une voiture de tourisme.

- Initialement, lors de l'invention de la roue, celle-ci était reliée directement au châssis de façon rigide. La suspension n'existait pas et toutes les vibrations de la route étaient transmises au châssis. L'introduction d'un ressort entre la caisse et l'essieu permet de filtrer les vibrations en hautes fréquences qui sont transmises au châssis et fournit ainsi un certain confort. Cependant, cela s'accompagne d'une amplification des vibrations de la route pour les fréquences de résonance. L'utilisation d'un amortisseur permet alors de limiter cette amplification mais cela détériore les capacités de filtrage des vibrations en hautes fréquences. L'apparition des suspensions actives permet de résoudre ces problèmes, mais au prix d'une très forte consommation d'énergie qui n'est acceptable que dans de très rares cas. La suspension semi-active concilie maintenant une consommation d'énergie raisonnable avec un choix de la caractéristique de l'amortisseur. Notons que l'utilisation d'une barre anti-roulis permet d'améliorer le confort et la sécurité en diminuant le roulis de la caisse du véhicule.

- La recherche pour l'amélioration constante des suspensions vise essentiellement à

proposer toujours plus de confort et de sécurité aux passagers du véhicule. La suspension doit gérer des compromis entre les objectifs de confort, de tenue de route, de consommation, d'encombrement, de coût,... tout cela passe par un actionneur performant mais aussi par une commande conciliant ces différents objectifs. Ces objectifs étant plus nombreux et plus précis, la commande utilisée est de plus en plus complexe. Or actuellement les suspensions contrôlées ne sont pas encore totalement démocratisées. Il convient donc de faire avancer la recherche sur ce point et de permettre un transfert plus aisé entre la recherche et l'industrie.

Ce mémoire de thèse se décompose en deux grandes parties.

- Dans la première partie, nous présentons les modèles, les critères d'évaluation et les lois de commande qui nous serviront pour les simulations exposées dans la deuxième partie.

Ainsi, le **premier chapitre** est consacré à la présentation des modèles, utilisés pour représenter la suspension d'un véhicule dans un objectif de commande. Nous commençons tout d'abord par les modèles de pneu. Ils sont de deux types, vertical ou horizontal, afin de simuler respectivement l'écrasement vertical du pneu ou son adhérence horizontale (latérale et/ou longitudinale). Nous présentons trois modèles horizontaux différents disponibles dans la littérature et qui seront incorporés au modèle demi-véhicule de type essieu.

Nous exposons alors les modèles de véhicule (1/4, 1/2 et complet) dans l'ordre croissant du nombre de mouvements pris en compte. Pour chaque type de modèle de véhicule, nous présentons les modèles des éléments qui le constituent, puis nous donnons les équations décrivant un modèle de véhicule du type considéré.

Ainsi, nous détaillons pour le quart de véhicule les différents types de modèles de suspension. La suspension peut être passive, semi-active ou active selon les éléments (ressort, amortisseur, amortisseur piloté, pompe) qui la constituent ; nous donnons ensuite les équations du modèle quart de véhicule à 2 degrés de liberté(ddl).

De même, pour le modèle demi-véhicule de type essieu, nous présentons la barre anti-roulis ainsi que l'essieu, ce dernier pouvant être considéré comme monobloc ou comme deux roues indépendantes. Puis nous détaillons un modèle demi-véhicule de type essieu développé par Dorling (1996) pour les camions et adapté aux véhicules de tourisme par Ramirez-Mendoza et al. (1998).

Pour finir, nous introduisons les différents modèles complets de véhicule avant de décrire le modèle complet à 7ddl utilisé par Park & Kim (1998) pour la synthèse d'une commande  $H_\infty$ , ce modèle incluant la dynamique des actionneurs.

Le **deuxième chapitre** est dédié à l'analyse des suspensions automobiles. Nous nous intéressons principalement aux critères de performances qui sont spécifiques aux suspensions. Nous détaillons dans un premier temps les différents objectifs de performance d'une suspension (confort, tenue de route, ...). Puis nous mettons en évidence certaines propriétés intrinsèques de la suspension, ce qui nous amène d'une part à une certaine limitation des performances, et d'autre part à des compromis notamment entre le confort et la tenue de route.

Nous fournissons ensuite des critères de performance spécifiques pour chaque type de modèle de véhicule (1/4, 1/2, complet). Pour le modèle quart de véhicule, nous proposons

d'une part des critères élaborés en collaboration avec PSA, et d'autre part des critères plus classiques de la littérature. Pour les modèles demi et complet de véhicule, les critères proviennent de la littérature. Ces critères serviront aux chapitres 4 et 5 pour l'analyse et la comparaison des suspensions et de leur commande.

Le **troisième chapitre** est dédié à la présentation des commandes. Tout d'abord, nous donnons un état de l'art non exhaustif des commandes utilisées dans la littérature pour gérer les compromis entre les différents objectifs d'une suspension.

Puis nous fournissons quelques rappels sur les différentes méthodologies de commande que nous appliquons dans les chapitres 4 et 5. Ainsi, nous présentons successivement le problème de la commande par placement de pôles, le problème du découplage ligne par ligne et du rejet des perturbations simultanés et le problème de la commande  $H_\infty$ . Nous détaillons d'avantage la commande  $H_\infty$ , sa résolution et le cas particulier du problème de sensibilité mixte, ayant travaillé principalement sur l'application de cette commande.

De plus, nous donnons quelques rappels sur la  $\mu$ -analyse qui permet d'étudier les problèmes classiques de l'automatique que sont l'analyse de la stabilité nominale (NS), des performances nominales (NP), et de la robustesse en stabilité (RS) et en performances (RP).

Pour finir, nous présentons la commande dite Skyhook qui est spécifique aux suspensions. Ces commandes et outils d'analyses seront utilisés dans la partie suivante.

- La deuxième partie de ce mémoire de thèse expose les applications des commandes présentées précédemment sur les modèles de véhicule introduits au chapitre 1.

Le **quatrième chapitre** concerne l'étude de la commande de modèles quart de véhicule à 2ddl. Nous fournissons tout d'abord un modèle de référence, la suspension passive, et nous rappelons les critères de performances associés au modèle quart de véhicule.

Les commandes par placement de pôles,  $H_\infty$  et Skyhook sont synthétisées et comparées sur un modèle linéaire dans un premier temps. Les comparaisons se font grâce aux critères de performances et à l'outil  $\mu$ -analyse pour l'étude de la robustesse en stabilité et de celle en performance.

Puis dans un second temps, ces commandes sont testées sur des modèles non-linéaires plus réalistes de l'actionneur.

Le **cinquième et dernier chapitre** correspond à l'application de commande sur les modèles demi-véhicule de type essieu d'une part et complet à 7ddl d'autre part.

Nous effectuons la synthèse d'une loi de commande  $H_\infty$  pour le modèle demi-véhicule de type essieu, et testons cette loi de commande sur un modèle demi-véhicule incorporant un modèle non linéaire de l'adhérence des pneus. Les trois modèles de pneus utilisés correspondent à ceux présentés au chapitre 1.

Pour le modèle complet à 7ddl, nous utilisons une méthodologie de commande présentée au chapitre 3 pour résoudre simultanément le problème du découplage ligne par ligne et celui du rejet des perturbations. Les mouvements à découpler sont ceux de la caisse (vertical, roulis, tangage). Les perturbations à rejeter correspondent au profil vertical de la route sous chacune des quatre roues.

Ce travail de thèse a donné lieu aux publications suivantes. Nous décrivons dans (Sam-

mier et al., 1999), présenté en octobre 1999 aux "Journées Automatique et Automobile" à Bordeaux, et dans (Sammier et al., 2000a), présenté en septembre 2000 à la conférence "IEEE Conference on Control Application" à Anchorage (Alaska), la commande  $H_\infty$  d'une suspension active d'un modèle demi-véhicule de type essieu. Dans (Lueders et al., 1999), présenté en novembre 1999 au 14ème congrès annuel de l'IAR à Strasbourg, nous donnons les résultats de l'incorporation d'un modèle horizontal des pneus dans le modèle demi-véhicule de type essieu, dans le but de prendre en compte le couplage entre les mouvements vertical et latéral dû à l'adhérence des pneus. Nous résolvons dans (Sammier et al., 2000b), présenté en septembre 2000 à la première "IFAC Conference on Mechatronic Systems" à Darmstadt (Allemagne), le problème du découplage ligne par ligne et du rejet des perturbations simultanés pour un modèle complet de véhicule à 7ddl. Nous faisons la comparaison des commandes  $H_\infty$  et Skyhook appliquées à un modèle quart de véhicule à 2ddl dans (Sammier et al., 2001a), présenté en mars 2001 à l' "IFAC Workshop on Advances in Automotive Control" à Karlsruhe (Allemagne). Un article en cours de révision dans la revue "Vehicle System Dynamics" traite de la comparaison de ces deux commandes et de leurs applications sur un modèle quart de véhicule incluant un modèle non-linéaire de l'actionneur.



# Chapitre 1

## Sur la modélisation des suspensions

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présenterons différents modèles de suspension de véhicule cités dans la littérature. Certains de ces modèles seront utilisés dans les chapitres suivants pour la synthèse et la validation de lois de commande.

Notre contribution réside dans une méthode de prise en compte du couplage entre les comportements verticaux et latéraux du véhicule. Ce couplage est dû en partie aux dissymétries du véhicule. Il est aussi influencé par le comportement du pneumatique, en particulier son adhérence. Nous avons ainsi ajouté un modèle d'adhérence latérale des pneus à un modèle demi-véhicule de type essieu.

Le choix d'un modèle de suspension de véhicule dépend des mouvements auxquels on s'intéresse. Les principaux mouvements généralement pris en compte sont les déplacements verticaux, latéraux, longitudinaux, le roulis, le lacet et le tangage des différents éléments constituant le système de suspension du véhicule.

Le modèle le plus simple est le modèle dit quart de véhicule, qui ne prend en compte que le mouvement vertical de la caisse. Lorsqu'on s'intéresse au confort, on peut ne prendre en compte que le déplacement vertical de la caisse et pas celui de la roue. Ce modèle, appelé modèle quart de véhicule à un degré de liberté (1ddl), est présenté par Hrovat (1997) comme modèle de référence du comportement désiré pour le châssis du véhicule.

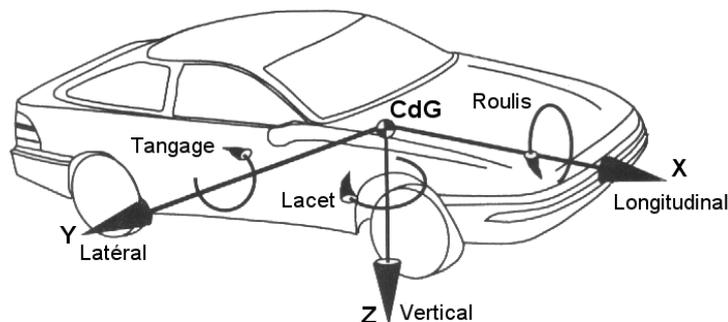


FIG. 1.1: Mouvements linéaires et angulaires du véhicule dans l'espace

Si, de plus, la tenue de route est étudiée, il convient de tenir compte aussi du mouvement vertical de la roue. Ce modèle, appelé modèle quart de véhicule à 2ddl, est décrit par exemple dans (Thompson & Chaplin, 1996). Liberzon et al. (1998) présentent un modèle plus complexe de quart de véhicule non-linéaire d'un véhicule blindé de transport de troupe. La disposition physique des différents éléments les uns par rapport aux autres est considérée. Ainsi, la roue est fixée à l'extrémité d'un bras de suspension. L'autre extrémité est reliée au châssis par un ressort de torsion. L'amortisseur ne se situe pas en position verticale entre le châssis et un point de l'arbre de suspension. La variable utilisée pour définir le mouvement de la roue n'est plus sa position mais l'angle que fait l'arbre de suspension avec le châssis. Ainsi, ce modèle prend en compte l'influence du mouvement longitudinal du châssis sur le comportement vertical.

Si on s'intéresse au mouvement vertical et au tangage, on choisira un modèle demi véhicule de type bicyclette qui permet notamment de visualiser les reports de charge entre le train avant et le train arrière lors d'une accélération, d'un freinage ou du passage sur un nid de poule par exemple. Comme nous ne reviendrons pas sur ce modèle, citons entre autres :

Kitching et al. (1999) modélisent un camion sans remorque par un modèle demi-véhicule de type bicyclette en vue d'une commande à horizon glissant de la suspension arrière.

(Krtolica & Hrovat, 1992) traitent le problème de la commande optimale de suspensions d'un modèle demi véhicule de type bicyclette à 2ddl qui ne prend pas en compte les mouvements des roues.

Alleyne (1997) a associé un modèle demi véhicule à 2ddl de suspension hydraulique active, à un modèle d'un système de freinage anti-blocage (ABS) et un modèle de l'interface pneu-route. Afin de diminuer la distance de freinage, il cherche à augmenter la force de freinage longitudinale en faisant coïncider les oscillations de la charge verticale appliquée sur les pneus et le couple de freinage appliquée par l'ABS.

Oya et al. (1997) se servent d'une représentation d'état du modèle demi-véhicule de type bicyclette à 2ddl qui décrit le déplacement vertical à l'avant et à l'arrière de la caisse, mais pas le déplacement vertical du centre de gravité de la caisse ni le tangage de la caisse. A partir de cette représentation d'état, l'objectif est de générer une commande permettant d'utiliser le débattement de la suspension uniquement pour les sollicitations de la route en hautes fréquences. En effet, pour une bonne performance dynamique du véhicule, il est nécessaire que ce dernier converge rapidement vers sa position d'équilibre. Cette position est généralement considérée comme la position au repos sur une route plate et horizontale. Cependant ce n'est pas toujours le cas et la position d'équilibre dépend du profil de la route. L'objectif est alors de faire en sorte que les suspensions transmettent les basses fréquences du profil de la route à la caisse tout en filtrant les hautes fréquences. Ainsi le débattement de la suspension doit être faible en basses fréquences et important en hautes fréquences d'où le choix de cette représentation d'état.

Choi et al. (1998) prennent en compte le mouvement vertical de chacune des roues et utilisent donc un modèle demi-véhicule de type bicyclette à 4ddl. Ils présentent la synthèse d'une commande résultant d'une commande LQR et d'un placement de pôles.

Si l'étude porte sur le mouvement vertical et sur le roulis, un modèle demi véhicule de type essieu sera utilisé. Ce modèle permet de prendre en compte notamment le roulis de la caisse, la présence d'une barre anti-roulis, et celle d'un essieu monobloc ou bien de deux roues indépendantes. Un modèle de ce type est développé par Dorling (1996) pour

les camions et adapté aux voitures de tourisme par Ramirez-Mendoza et al. (1998). Des hypothèses de symétrie permettent de gérer indépendamment le comportement vertical et le roulis. Watanabe & Sharp (1999) comparent un régulateur proportionnel-dérivé (PD) et un régulateur à base de réseau de neurones. Le modèle considéré est un demi véhicule de type essieu avec deux roues indépendantes. Les suspensions sont à géométrie variable c'est à dire que la roue est reliée au châssis par un arbre de suspension et que l'ensemble ressort-amortisseur est fixé, d'une part au châssis et d'autre part à l'arbre de suspension, en un point dont la position est variable et commandée. En faisant varier cette position, l'effet "bras de levier" est plus ou moins important entre l'ensemble ressort-amortisseur et la roue.

Enfin, dans le cas où le mouvement vertical, le tangage et le roulis sont à étudier ainsi que leur couplage, un modèle complet de véhicule à 7ddl (au minimum) est nécessaire. Prattichizzo et al. (1998) synthétisent une loi de commande permettant le rejet parfait des perturbations de la route agissant sur un modèle complet de véhicule à 7ddl. A partir de ce type de modèle complet de véhicule à 7ddl, Park & Kim (1998) et Esmailzadeh & Fahimi (1997) ont développé respectivement une commande  $H_\infty$  et une commande optimale adaptative par retour d'état complet. Elbeheiry et al. (1996) se servent d'une commande LQG pour contrôler les suspensions d'un modèle complet de véhicule à 7ddl. Une comparaison est faite entre des suspensions passives, semi-actives et actives basées sur un retour d'état complet ou local.

Ces modèles peuvent être complétés par la prise en compte d'autres mouvements comme les mouvements latéraux, longitudinaux et le lacet (rotation autour de l'axe vertical), en particulier si on veut appréhender la dynamique complète du véhicule (freinage, tenue de route). Ainsi, (Gobbi et al., 1999) présentent une méthode pour optimiser un modèle complet de véhicule prenant en compte notamment les modèles de pneus, les couples moteur ou de freinage sur chaque roue, la géométrie des suspensions, le moteur et sa suspension ainsi que le siège du conducteur.

Dans ce chapitre, nous présenterons dans un premier temps la modélisation des pneumatiques, nécessaire pour l'étude de la dynamique verticale d'un véhicule, qui est commune à tous les modèles de véhicule (quart, demi ou complet). Par la suite, nous exposerons les modèles quart de véhicule, demi véhicule de type essieux, et complets sur lesquels nous avons travaillé.

Les modèles sont présentés dans l'ordre croissant de complexité. Les points communs aux différents modèles seront donc détaillés dans le paragraphe traitant du modèle le plus simple, et simplement rappelés dans les autres paragraphes. Ainsi, les différents types de suspension (passif, semi-actif, actif) seront détaillés dans le paragraphe traitant du modèle quart de véhicule, et seulement rappelés dans les paragraphes traitants des modèles demi-véhicules et de véhicule complet.

De plus, pour chaque type de modèle de véhicule, nous utilisons des notations différentes afin de ne pas confondre les différentes variables. Ainsi pour les modèles 1/4, 1/2 et complet de véhicule, le déplacement du centre de gravité de la masse suspendue (caisse) est noté respectivement  $z_{caisse}$ ,  $z_s$  et  $z_c$ . Ces centres de gravité ne correspondent pas tous au même point, il est donc normal de les noter différemment.

## 1.2 Modèles de pneumatiques

Le pneumatique est l'interface entre le véhicule et la route. Il permet de transmettre au véhicule les forces exercées par la route. Celles-ci sont de deux types, vertical ou horizontal. La force verticale permet de soutenir le véhicule tandis que les forces horizontales permettent de le diriger. Le pneu est un élément très complexe qui est soumis à de fortes sollicitations et à de grandes variations de température. Les fabricants de pneumatique utilisent sans doute des modèles plus complets prenant en compte toutes les déformations du pneu. Le but est seulement ici de décrire l'influence du pneu dans le comportement dynamique du véhicule. Nous verrons qu'il existe deux types de modèles de pneus, selon le comportement (vertical et/ou horizontal) que l'on souhaite prendre en compte. Dans le cadre de notre étude, nous présentons de manière découplée les mouvements horizontaux et verticaux.

Nous présenterons tout d'abord le modèle du comportement vertical de pneu, qui est relativement simple. Dans un second temps, nous donnerons les définitions des différents paramètres utilisés pour les modèles du comportement horizontal du pneu. Puis nous présenterons trois de ces modèles horizontaux.

Le modèle vertical donne la force verticale en fonction de l'écrasement du pneu. Lorsqu'il est linéarisé, il peut servir pour la synthèse de loi de commande de suspension.

Le modèle horizontal, non-linéaire, est utilisé pour des simulations plus précises d'études comportementales des pneus ou de validations de loi de commande. Il permet d'obtenir les forces horizontales (latérales et/ou longitudinales), exercées au niveau de la surface de contact entre la roue et la route, en fonction de la force verticale, de l'angle de dérive du pneu, du glissement longitudinal, de l'inclinaison de la roue, des caractéristiques du pneumatique et de l'adhérence entre le pneumatique et la route.

### 1.2.1 Modèle vertical de pneu

Lorsque l'on s'intéresse au comportement vertical du pneumatique en vue d'une étude du confort des passagers et de la tenue de route d'un véhicule de tourisme, le pneumatique peut être modélisé par un simple ressort  $k_p$  en parallèle avec un amortisseur  $c_p$ . En pratique la raideur du ressort est généralement considérée comme constante et son amortissement est souvent négligeable ; c'est pourquoi le pneumatique est souvent modélisé par un simple ressort. En pratique l'amortissement est faible pour éviter l'échauffement du pneumatique mais n'est cependant pas nul.

Ce type de modèle est linéaire et pourra être utilisé dans la synthèse de lois de commande. Cependant, si l'on souhaite obtenir un modèle de simulation plus fin que le modèle de synthèse, on peut envisager de prendre une raideur non-linéaire représentant la caractéristique plastique du ressort.

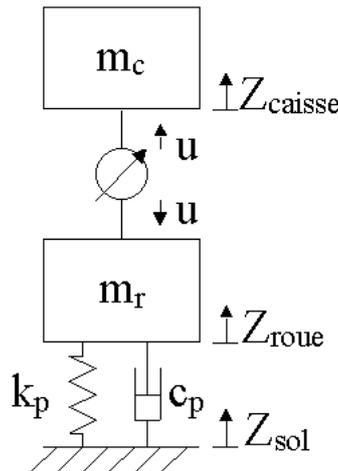


FIG. 1.2: Modèle vertical du pneu dans un modèle quart de véhicule

## 1.2.2 Modèle horizontal de pneu

Après une définition des différents paramètres, nous présenterons trois modèles du comportement latéral et longitudinal d'un pneu.

### 1.2.2.1 Définitions des paramètres

Nous définissons tout d'abord le repère XYZ associé à l'étude du contact entre le pneu et la route. Nous donnons ensuite les définitions des différents termes utilisés. Puis nous détaillons les variables importantes à savoir les angles de dérive et de carrossage, le glissement et les forces horizontales.

#### a) Le repère XYZ

Le système d'axe XYZ du pneu est représenté sur la figure 1.3.

L'axe X correspond à l'intersection entre le plan de la roue et celui de la route. Le sens positif est choisi vers l'avant.

L'axe Z est perpendiculaire au plan de la route avec un sens positif vers le bas.

L'axe Y est dans le plan de la route. Il est choisi de manière à former un repère orthogonal avec les axes X et Z.

#### b) Les termes

Les différents plans, angles, forces et moments représentés sur les figures 1.3 à 1.7 sont définis dans leur ordre d'apparition :

- Surface de contact : ("contact patch" sur fig. 1.4) partie de la bande de roulement du pneu en contact avec la route
- Plan de la roue : ("wheel plan" sur fig. 1.3) plan central de la roue et normal à l'axe de rotation de la roue.
- Centre de la roue : point d'intersection entre l'axe de rotation de la roue et le plan de la roue.
- Centre de la surface de contact : point d'intersection entre le plan de la roue et la projection de l'axe de rotation de la roue sur le plan de la route.

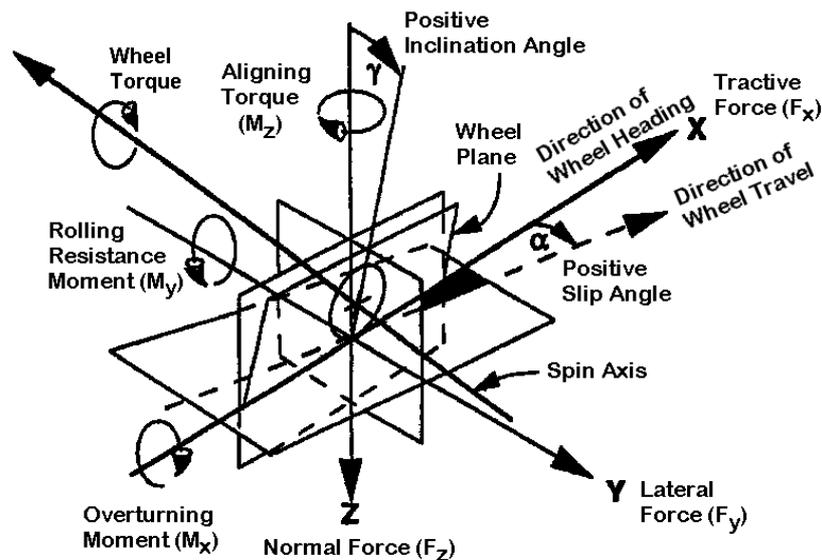


FIG. 1.3: Le système d'axe du pneu

- Rayon de la roue en charge ( $r$ ) : distance, dans le plan de la roue, entre le centre de la surface de contact et le centre de la roue.
- Angle de dérive ( $\alpha$ ) : ("slip angle") angle entre l'orientation de la roue ("direction of heading") et la direction de son déplacement ("direction of travel") (fig.1.4). Un angle de glissement positif correspond à déplacement vers la droite de la roue lorsqu'elle avance.
- Angle de carrossage ( $\gamma$ ) : ("camber angle") angle entre le plan de la roue et l'axe perpendiculaire au plan de la route (fig. 1.7). Un angle de carrossage positif correspond à une roue qui s'incline vers la droite de son orientation.
- Force longitudinale ( $F_x$ ) : composante de la force appliquée par la route sur le pneu, agissant dans le plan de la route et parallèlement à l'intersection entre le plan de la roue et celui de la route. Appelée aussi force de traction.
- Force latérale ( $F_y$ ) : composante de la force appliquée par la route sur le pneu, agissant dans le plan de la route et perpendiculairement à l'intersection entre le plan de la roue et celui de la route.
- Force normale ( $F_z$ ) : composante de la force appliquée par la route sur le pneu, normale au plan de la route.
- Moment de renversement ( $M_x$ ) : ("overturning moment") moment autour de l'axe X exercé par la route sur la roue.
- Moment de résistance au roulement ( $M_y$ ) : ("rolling resistance moment") moment autour de l'axe Y.
- Moment d'auto-alignement ( $M_z$ ) : ("aligning moment") moment autour de l'axe Z.

Nous détaillons, dans les paragraphes suivants et sur les figures 1.4 à 1.9, les variables nécessaires pour un modèle horizontal de pneu.

### c) Angle de dérive

Lors d'un déplacement longitudinal (pas de virage) du véhicule, les angles de dérive de chaque roue sont nuls. En virage, l'angle de dérive est non nul et découle de la déformation de la surface de contact (fig. 1.4).

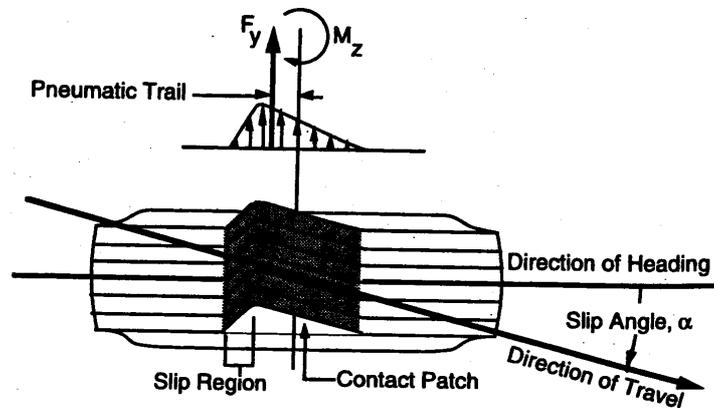


FIG. 1.4: Définition de l'angle de dérive  $\alpha$

#### d) Glissement

Le glissement est défini différemment selon les conditions suivantes :

- l'accélération en ligne droite.
- le freinage en ligne droite.
- l'accélération dans un virage.
- le freinage dans un virage.

Nous détaillons ces quatre cas dans la suite.

#### Accélération ou freinage, sans virage

Lors d'un déplacement longitudinal (sans virage) du véhicule, le glissement longitudinal correspond à la différence entre la vitesse longitudinale du véhicule et la vitesse de rotation de la roue rapportée (en la multipliant par le rayon de la roue) au niveau de la surface de contact (fig.1.5). Cette différence est normalisée par la vitesse la plus grande pour donner le glissement en pourcentage.

On notera  $v$  la vitesse de déplacement de la roue,  $\omega$  la vitesse de rotation de la roue,  $r$  son rayon en charge et  $v_r = r\omega$  la vitesse longitudinale du pneu au niveau de la surface de contact.

Lors d'une accélération (fig 1.5.c), la vitesse de la roue est supérieure à celle du véhicule. Le glissement longitudinal en accélération est défini de la façon suivante :

$$\lambda_A = \frac{v_r - v}{v_r}$$

L'indice  $A$  signifie accélération.

Dans ce cas, le glissement est non nul et peut aller jusqu'à 100%, ce qui correspond à une roue qui patine (fig 1.5.e).

A l'inverse, lors d'un freinage, la vitesse du véhicule est supérieure à celle de la roue (fig 1.5.b) et le glissement est défini par :

$$\lambda_F = \frac{v - v_r}{v}$$

avec l'indice  $F$  pour freinage. Le glissement est alors non nul et peut aller jusqu'à 100%, ce qui correspond à une roue bloquée (fig 1.5.d).

Lorsque la roue est libre, le glissement est nul (fig 1.5.a).

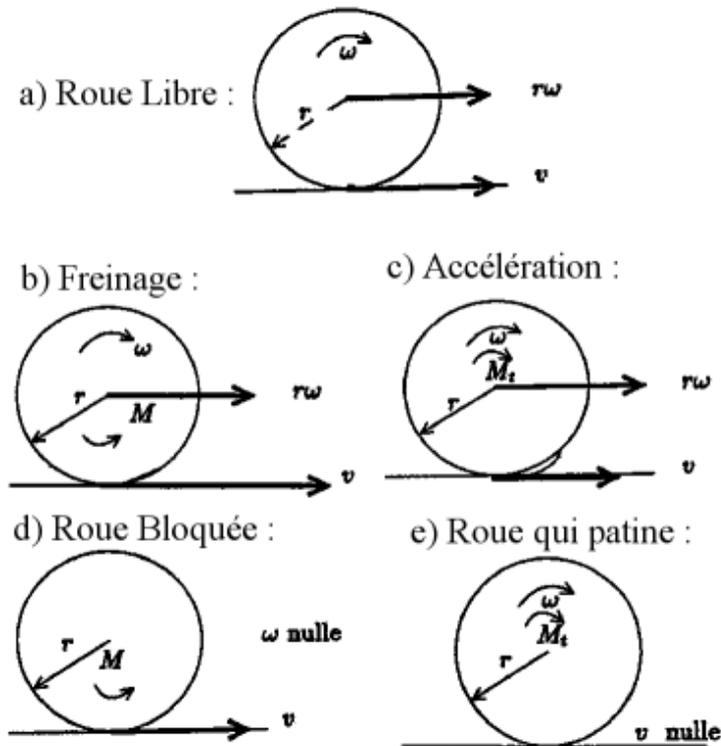


FIG. 1.5: Définition du glissement longitudinal sans virage

### Accélération ou freinage, avec virage

Lorsque l'angle de dérive est non nul, on redéfinit le glissement en cas d'accélération (fig. 1.6(a)) et en cas de freinage (fig. 1.6(b)).

En cas d'accélération (cf. fig. 1.6(a)), la vitesse relative entre le pneu et la route dans la direction longitudinale est

$$\Delta v_{x,A} = v_r \cos \alpha - v$$

et dans la direction latérale

$$\Delta v_A = v_r \sin \alpha$$

Le glissement longitudinal  $\lambda_{x,A}$  ( $x$  pour longitudinal et  $A$  pour accélération) est le suivant :

$$\lambda_{x,A} = \frac{v_r \cdot \cos \alpha - v}{v_r} = \cos \alpha - (1 - \lambda_A)$$

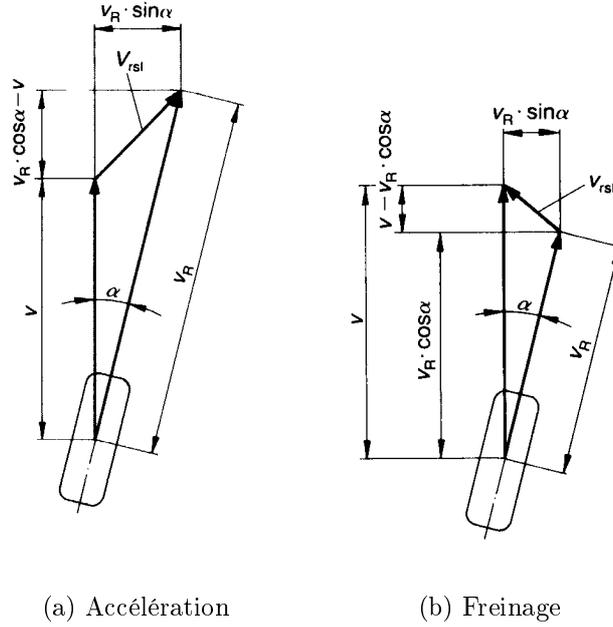


FIG. 1.6: Vitesse de rotation et de déplacement de la roue en cas d'accélération ou de freinage en virage

Dans la direction latérale, le glissement est défini par

$$\lambda_{y,A} = \frac{v_r \cdot \sin \alpha}{v_r} = \sin \alpha$$

Le glissement total en accélération

$$\lambda_{res} = \sqrt{\lambda_{x,A}^2 + \lambda_{y,A}^2},$$

devient alors

$$\lambda_{res} = \sqrt{2 \cdot (1 - \lambda_A) \cdot (1 - \cos \alpha) + \lambda_A^2}$$

En cas de freinage (cf. fig. 1.6(b)), la vitesse relative entre le pneu et la route est définie dans la direction longitudinale par

$$\Delta v_{x,B} = v - v_r \cos \alpha$$

et dans la direction latérale par

$$\Delta v_y = v_r \sin \alpha$$

Le glissement longitudinal  $\lambda_{x,F}$  ( $x$  pour longitudinal et  $F$  pour freinage) est défini sans dimension par

$$\lambda_{x,F} = \frac{v - v_r \cdot \cos \alpha}{v} = 1 - (1 - \lambda_F) \cdot \cos \alpha$$

Le glissement latéral est défini par

$$\lambda_{y,F} = \frac{v_r \cdot \sin \alpha}{v} = (1 - \lambda_F) \cdot \sin \alpha$$

Le glissement total en freinage

$$\lambda_{res} = \sqrt{\lambda_{x,F}^2 + \lambda_{y,F}^2},$$

devient alors

$$\lambda_{res} = \sqrt{2 \cdot (1 - \lambda_F) \cdot (1 - \cos \alpha) + \lambda_F^2}$$

### e) Angle de carrossage

L'angle de carrossage correspond à celui que fait le plan de la roue avec l'axe normal au plan de la route (fig. 1.7). Lorsque cet angle augmente, les efforts horizontaux (longitudinal ou latéral) diminuent.

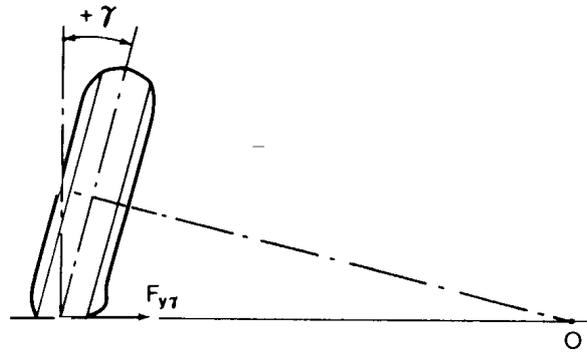


FIG. 1.7: Définition de l'angle de carrossage  $\gamma$

### f) Force normale

La force normale ou force verticale, correspond à la composante verticale de la force appliquée à la surface de contact entre le pneu et la route. Cette force est égale au poids supporté par la roue. A l'arrêt, cette force est équivalente, pour chaque roue, au poids de la roue et du quart du châssis du véhicule ce qui correspond à sa composante statique. En mouvement, il faut rajouter à cette composante statique, les transferts de charges dus aux mouvements de la caisse.

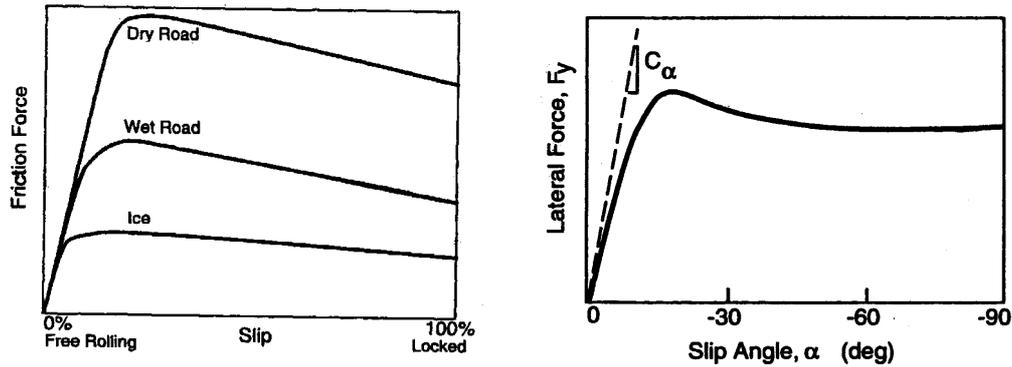
Cette force sera donnée dans nos simulations par le modèle vertical de pneu détaillé au paragraphe 1.2.1.

### g) Force longitudinale produite par un glissement longitudinal seul

Cette force correspond à la composante longitudinale (selon l'axe X) de la force appliquée entre la surface de contact du pneu et la route. Lors d'une accélération ou d'un freinage en ligne droite, la force de traction  $F_x$  dépend du glissement longitudinal  $\lambda$ , comme le montre la figure 1.8(a).

### h) Force latérale produite par un angle de dérive seul

Cette force correspond à la composante latérale (selon l'axe Y) de la force appliquée entre le pneu et le sol au niveau de la surface de contact. Lors d'un virage sans accélération ni freinage, la force latérale  $F_y$  qui s'exerce sur le pneu dépend de l'angle de dérive  $\alpha$  (fig. 1.8(b)).



(a) Force longitudinale en fonction du glissement longitudinal (accélération ou freinage SANS virage)

(b) Force latérale en fonction de l'angle de dérive  $\alpha$  (virage SANS accélération ni freinage)

FIG. 1.8: Forces latérale et longitudinale SANS glissement et dérive combinés

### i) Forces horizontales produites par un glissement combiné à une dérive

Les forces horizontales sont la force longitudinale et la force latérale. Lors d'une accélération ou d'un freinage dans un virage, les forces latérales  $F_y$  et de traction  $F_x$  dépendent principalement des deux variables que sont le glissement longitudinal  $\lambda$  et l'angle de dérive  $\alpha$  (voir figure 1.9). En représentant la force de traction  $F_x$  en fonction de la force latérale  $F_y$ , on obtient une ellipse d'adhérence.

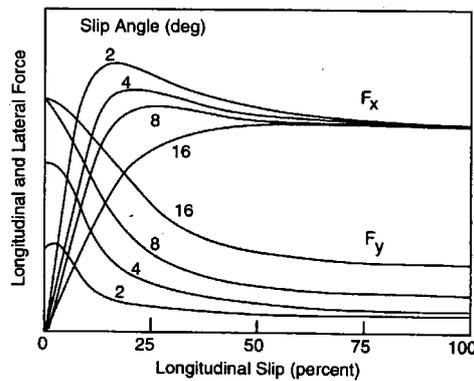


FIG. 1.9: Forces latérale ( $F_y$ ) et longitudinale ( $F_x$ ) en fonction de l'angle de dérive  $\alpha$  et du glissement longitudinal (virage AVEC accélération ou freinage)

#### 1.2.2.2 Présentation de trois modèles de pneus

L'objectif du modèle horizontal de pneu est de fournir les composantes latérale et longitudinale de la force exercée par la route sur le pneu, ceci à partir notamment des variables suivantes que sont l'angle de dérive, le glissement longitudinal, l'angle de carrossage, la force normale et la vitesse de déplacement de la roue. Ces forces (latérale et

longitudinale) servent à diriger le véhicule. Rappelons que nous souhaitons intégrer un modèle horizontal de pneu à un modèle de suspension demi-véhicule de type essieu (voir paragraphe 1.4.4) afin de prendre en compte l'influence de la force latérale transmise par le pneu. Cette force latérale dépend, entre autres, de la force normale exercée par le véhicule sur le pneu. Ainsi le couplage, par le biais des pneus, entre le comportement vertical et le comportement latéral du véhicule est pris en compte.

De nombreux travaux sont consacrés à la modélisation des forces agissant sur un pneu. Différentes approches ont été utilisées parmi lesquelles la description purement mathématique, la représentation physique ou encore la description par éléments finis. Bayle et al. (1993) expliquent les différences entre ces approches et proposent une bibliographie plus approfondie.

La description purement mathématique correspond à une fonction représentant le comportement du pneumatique et qui n'est pas basée sur des équations physiques. Cela permet de réduire grandement le nombre de paramètres requis pour déterminer le comportement d'un pneu et ainsi d'obtenir un temps de simulation relativement court. C'est, de plus, une bonne interface pour les modèles de véhicule. Cela donne un bon aperçu du comportement global des pneus et du véhicule. Cependant, les paramètres utilisés manquent de sens physique.

L'approche physique répond à ce problème car la description du comportement du pneu se fait à l'aide d'un modèle mécanique avec des paramètres physiques significatifs. Cependant, l'utilisation de ce type de modèles pour l'étude d'un modèle de suspension de véhicule est très difficile et engendre des temps de simulation très importants. De plus, cela nécessite une connaissance précise des différents éléments du pneu (motif de la bande de roulement, ...) ce qui n'est pas toujours facile à déterminer.

On peut aussi représenter le pneu à l'aide d'une méthode par éléments finis qui permet à l'utilisateur de définir un pneu à partir de son profil, son architecture et sa bande de roulement, puis de calculer les propriétés spécifiques du pneu. Des essais expérimentaux permettent de valider cette description par éléments finis. Cela peut être fait sans connaissance a priori des valeurs des paramètres recherchés. Ce sont plus des modèles d'étude de la structure des pneus que des modèles de comportement dynamique.

Nous nous intéressons dans cette étude aux modèles purement mathématiques. Le comportement du pneu est généralement décrit au moyen de la "formule magique" proposée par Pacejka & Bakker (1993) (voir aussi (Pacejka & Besselink, 1997) pour la prise en compte du comportement transitoire). C'est le cas des modèles de Bayle et al. (1993) et de Milliken & Milliken (1995) que nous présentons par la suite et qui sont tout deux définis à partir de la "formule magique". Cette "formule magique" est basée sur l'utilisation de fonctions arc-tangente. D'autres modèles, comme celui de Burckhardt (1993), se servent des fonctions exponentielles pour représenter le comportement du pneu. Nous verrons que le modèle de Burckhardt (1993) est relativement simple puisqu'il nécessite peu de paramètres de réglage. Cependant, ce modèle ne prend pas en compte toutes les variables agissant sur l'adhérence du pneu. Le modèle développé par Bayle et al. (1993) est plus complet mais aussi plus lourd puisqu'il nécessite beaucoup plus de paramètres. Pour finir nous présentons le modèle de Milliken & Milliken (1995) qui est moins lourd que le précédent et qui a l'avantage d'être valable pour les trois cas de figure que sont un freinage (ou une accélération) en ligne droite, un virage à vitesse constante et un frei-

nage (ou une accélération) en virage. Par la suite nous intégrons successivement ces trois modèles de pneu au modèle demi-véhicule de type essieu afin de prendre en compte le couplage entre le mouvement vertical et le mouvement latéral.

Le but de ces modèles de pneu est d'obtenir une formule permettant d'approcher les courbes reliant les variables d'entrées (glissement longitudinal, angle de dérive, angle de carrossage, vitesse du véhicule, et force normale) aux sorties (forces latérales et longitudinales). Attention, en pratique, ces courbes ne sont plus valides au delà de 25 à 30% de glissement.

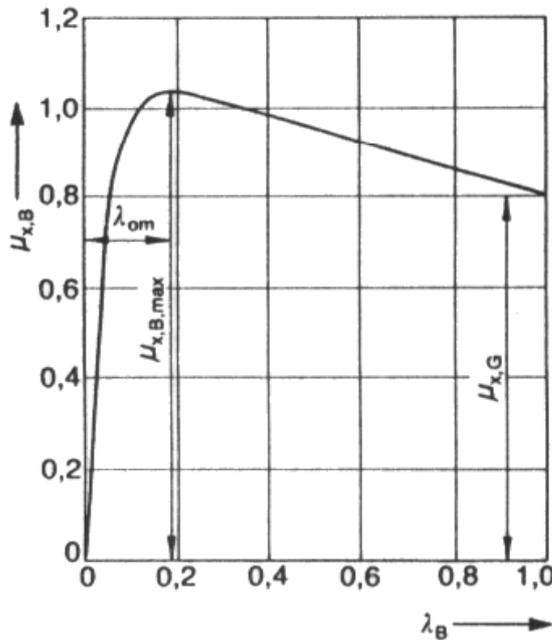
### a) Modèle de Burckhardt (1993)

Il permet de représenter la relation entre la force normale, la vitesse longitudinale du véhicule et le glissement longitudinal d'une part et la force longitudinale d'autre part.

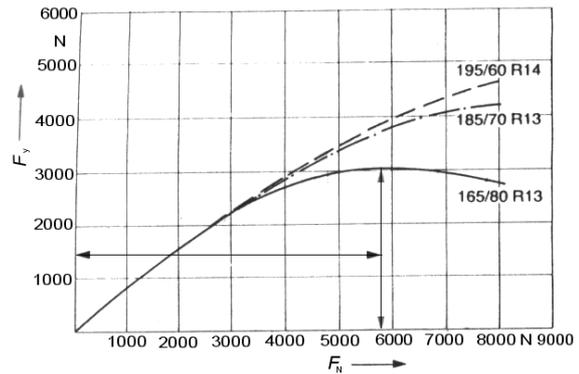
Burckhardt (1993) utilise cinq paramètres pour son modèle de pneumatique.

Le coefficient de frottement longitudinal  $\mu_x$  est fonction du glissement longitudinal  $\lambda$  et de la vitesse du véhicule  $v$  :

$$\mu_x = [C_1(1 - \exp(-C_2\lambda)) - C_3\lambda] \exp(-C_4\lambda v)$$



(a) Coefficient de frottement longitudinal en freinage, en fonction du glissement longitudinal



(b) Force latérale en fonction de la force normale pour différents types de pneus

FIG. 1.10: Mesures pour le calcul des  $C_i$

Les paramètres  $C_1, C_2, C_3$  se rapportent aux caractéristiques du pneumatique. Ces paramètres s'obtiennent à partir de la mesure du coefficient de frottement maximal et du glissement correspondant ainsi que celle du coefficient de frottement pour un glissement

de 100% (voir fig. 1.10(a)). Le paramètre  $C_4$  définit les conditions d'adhérence de la route. Burckhardt (1993) présente plusieurs méthodes pour identifier ce paramètre  $C_4$ .

La force longitudinale  $F_x$  dépend du coefficient de frottement et de la force normale  $F_n$  :

$$F_x = \mu_x k_n F_n$$

Le coefficient  $k_n$  permet, par l'intermédiaire d'un paramètre  $C_5$ , d'exprimer la non-linéarité de la force longitudinale en fonction de la force normale :

$$k_n = 1 - C_5 F_n^2$$

Le paramètre  $C_5$  est obtenu à partir des mesures de la force longitudinale maximale et de la force normale associée (voir fig. 1.10(b)).

Ce modèle peut être utilisé en cas de glissement longitudinal (accélération ou freinage) et/ou dans le cas d'un angle de dérive non-nul (virage). En cas de glissements combinés (longitudinal et latéral), Burckhardt (1993) utilise un coefficient de frottement global et un glissement global.

Ce modèle utilise peu de paramètres et est relativement simple à mettre en oeuvre. De plus, Burckhardt (1993) détaille précisément les méthodes d'identification des paramètres que nous ne présenterons pas ici. Cependant ce modèle ne tient pas compte de l'angle de carrossage (inclinaison du pneu par rapport à sa position verticale).

### b) Modèle de Bayle et al. (1993)

Le modèle de pneu utilisé par Bayle et al. (1993) est basé sur la "formule magique" développée par Pacejka & Sharp (1991) (Pacejka & Bakker, 1993; Pacejka & Besselink, 1997).

Cette formule magique, représentée sur la figure 1.11, permet d'approcher les courbes 1.8(a) et 1.8(b) reliant les forces longitudinale et latérale respectivement au glissement longitudinal et à l'angle de dérive. Elle est donnée par :

$$Y(X) = y(x) + S_v \tag{1.1}$$

avec

$$y(x) = D \cdot \sin(C \cdot \arctan(B \cdot x - E \cdot (B \cdot x - \arctan(B \cdot x))))$$

$$x = X + S_h$$

Les paramètres utilisés pour définir la formule magique sont les suivants :

- $B$  : facteur d'amortissement
- $C$  : facteur de forme
- $D$  : valeur du pic
- $E$  : facteur de courbure
- $S_h$  : décalage horizontal
- $S_v$  : décalage vertical

Le coefficient  $D$  représente la valeur du pic de  $y(x)$ , et le terme  $BCD$  ( $= B.C.D$ ) correspond à la pente à l'origine.

Le facteur  $C$  contrôle les limites de l'intervalle de variation de  $y(x)$ .

Le coefficient  $B$  est dédié au choix de la pente à l'origine, il est donc appelé coefficient d'amortissement.

Le coefficient  $E$  influence la courbure autour du pic de  $y(x)$  ainsi que la valeur  $x_m$  à laquelle ce pic apparaît (si il existe).

Voyons comment obtenir les coefficients  $B, C, D, E, S_h$  et  $S_v$  à partir d'une courbe expérimentale :

- Les valeurs de  $BCD, D, S_v, S_h, y_s$  et  $x_m$  peuvent être lues directement sur la courbe (cf. fig. 1.11).  $y_s$  est la valeur vers laquelle tend  $y$  pour des glissement  $x$  importants.

- Les deux équations suivantes fournissent des valeurs initiales pour  $C$  puis pour  $E$  :

$$y_s = D \sin\left(\frac{\pi}{2}C\right) \quad (1.2)$$

$$E = \frac{Bx_m - \tan\left(\frac{\pi}{2}C\right)}{Bx_m - \arctan(Bx_m)} \quad (1.3)$$

- Une procédure par moindres carrés fournit ensuite une valeur optimale de  $C$  et  $E$  afin de faire coïncider la courbe donnée par la "formule magique" avec les courbes expérimentales.

Par identification avec les courbes 1.8(a) et 1.8(b), cette équation  $Y(X)$  permet d'exprimer d'une part la force de frottement longitudinale  $F_{x0}$  en fonction du glissement longitudinal  $F_{x0}(\lambda)$ , et d'autre part la force de frottement latérale  $F_{y0}$  en fonction de l'angle de dérive  $F_{y0}(\alpha)$ . L'indice  $_0$  de  $F_{x0}$  et  $F_{y0}$  signifie qu'il n'y a pas de glissement combiné (longitudinal et latéral). Pour cela il faut déterminer les paramètres ( $B, C, D, E, S_h$  et  $S_v$ ) présents dans 1.1 pour chacun des deux cas. Par la suite, ces paramètres sont définis par des fonctions afin d'exprimer leur dépendance par rapport à la force normale  $F_n$  et à l'angle de carrossage  $\gamma$ . Les constantes  $a_i, b_j$  qui apparaissent dans ces fonctions sont les paramètres ultimes de ce modèle, qui, finalement, définit la force de frottement longitudinale  $F_{x0}$  (resp. latérale  $F_{y0}$ ) en fonction du glissement longitudinal  $F_{x0}(\lambda)$  (resp. l'angle de dérive  $F_{y0}(\alpha)$ ), de la force normale  $F_n$  et de l'angle de carrossage  $\gamma$ .

### Force longitudinale

La force longitudinale  $F_{x0}$  dépend du glissement longitudinal  $\lambda$  et de la force normale  $F_n$ .

Les coefficients  $B, C, D, E, S_h$  et  $S_v$  sont donnés par les équations suivantes :

$$BCD = (b_3.F_n + b_4).F_n \cdot \exp(-b_5.F_n)$$

$$C = b_0$$

$$D = (b_1.F_n + b_2).F_n$$

$$B = BCD/(C.D)$$

$$E = b_6.F_n^2 + b_7.F_n + b_8$$

$$S_h = b_9.F_n + b_{10}$$

$$S_v = 0$$

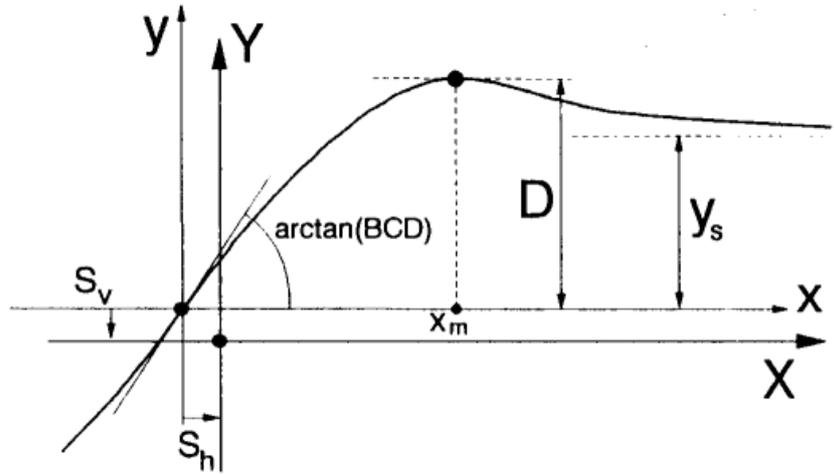


FIG. 1.11: Courbe produite par la "formule magique"

Dans le cas d'un glissement combiné (accélération en virage par exemple), on a

$$S_v = b_{11}.F_n + b_{12}$$

### Force latérale

La force latérale  $F_{y0}$  dépend de l'angle de dérive  $\alpha$ , de l'angle de carrossage  $\gamma$  et de la force normale  $F_n$ .

Les coefficients  $B, C$  et  $D$  sont identiques au cas longitudinal. Les paramètres  $BCD, E, S_h$  et  $S_v$  sont donnés par équations suivantes :

$$BCD = a_3. \sin(2. \arctan(F_n/a_4)).(1 - a_5.\gamma)$$

$$E = a_6.F_n + a_7$$

$$S_h = a_8.\gamma + a_9.F_n + a_{10}$$

$$S_v = (a_{112}.F_n + a_{112}).F_n.\gamma + a_{12}.F_n + a_{13}$$

### Forces latérale et longitudinale combinées

Dans le cas de frottements combinés (accélération en virage par exemple), les forces longitudinales et latérales sont définies de la manière suivante.

- Force longitudinale

$$F_x = \frac{F_{x0} \cdot \cos(b_{m0} \cdot \arctan((\alpha - b_{m1}) \cdot BD))}{\cos(a_{m0} \cdot \arctan(-b_{m1} \cdot BD))}$$

Le paramètre  $b_{m1}$  assure que le maximum de  $F_x$  a lieu pour un angle de dérive non-nul. Le coefficient  $BD$  dépend seulement du glissement longitudinal  $\lambda$  :

$$BD(\lambda) = b_{m2} \cdot \cos(\arctan(b_{m3} \cdot \lambda))$$

- Force latérale

$$F_y = \frac{F_{y0} \cdot \cos(a_{m0} \cdot \arctan(BG \cdot \lambda \cdot a_{m1}))}{\cos(a_{m0} \cdot \arctan(-BG \cdot a_{m1}))} + F_{yx}$$

Le terme  $F_{yx}$  décrit la dissymétrie entre le glissement en accélération et celui en freinage :

$$F_{yx} = a_{m5} \cdot F_n \cdot (\gamma - G_{a0}) \cdot F_{yxgli} \cdot F_{yxdel}$$

avec

$$F_{yxgli} = \sin(1.9 \arctan(a_{m8} \cdot \lambda))$$

$$F_{yxdel} = \cos(\arctan(a_{m9} \cdot \alpha))$$

$$G_{a0} = a_{m6} \cdot F_n + a_{m7}$$

Le coefficient  $BG$  dépend seulement de l'angle de dérive  $\alpha$  :

$$BG(\alpha) = a_{m2} \cdot \cos(\arctan(a_{m3} \cdot (\alpha - a_{m4})))$$

L'identification de certains paramètres comme  $D$ ,  $BCD$ ,  $S_v$  et  $S_h$  se fait directement à partir des relevés 1.8(a) et 1.8(b) (cf. Fig. 1.11). Cependant, dans le cas d'un glissement longitudinal pur, tous les paramètres  $b_0$  à  $b_{12}$  sont à identifier à partir des relevés de mesure du glissement longitudinal et de la force longitudinale. De la même façon, dans le cas d'un angle de dérive pur, les mesures de l'angle de dérive et de la force latérale permettent d'identifier les paramètres  $a_0$  à  $a_{13}$ . L'identification des 42 paramètres permet de relier les entrées aux sorties dans le cas d'un glissement combiné à un angle de dérive, à partir des mesures des différentes entrées et sorties. Bayle et al. (1993) ont développé un algorithme permettant d'identifier les paramètres de ces modèles à l'aide de quatre optimisations non-linéaires basées sur une méthode présentée par Marquardt (1963).

Ce modèle prend en compte l'angle de carrossage du pneu ainsi que les non-linéarités des forces longitudinales et latérales en fonction de la charge. L'inconvénient de ce modèle réside dans son grand nombre de paramètres. En effet, dans le cas d'une accélération ou d'un freinage sans virage, 13 paramètres sont nécessaires pour donner la force longitudinale appliquée à la surface de contact entre le pneu et la route. Dans le cas d'un virage sans accélération ni freinage, 15 paramètres sont utilisés pour obtenir la force latérale. Dans le cas d'un virage avec freinage ou accélération, il faut 42 paramètres pour définir les forces latérales et longitudinales.

### c) Modèle de Milliken & Milliken (1995)

Milliken & Milliken (1995) s'intéressent à la limitation du nombre de paramètres pour les modèles de pneu, en utilisant des données normalisées de manière à ce que toutes les courbes reliant les différentes données normalisées soient confondues. Ainsi un seul modèle suffit pour obtenir les forces latérales et/ou longitudinales. Cependant le modèle qu'ils utilisent, même s'il est fondé sur une "formule magique", ne prend pas en compte l'angle de carrossage.

## Force longitudinale

Dans le cas d'une accélération ou d'un freinage sans virage et sans angle de carrossage, la force longitudinale normalisée est définie par :

$$\overline{F}_x = \frac{F_x}{\mu_x \cdot F_n}$$

et le glissement longitudinal normalisé est le suivant :

$$\overline{\lambda} = \frac{k_x \cdot \lambda}{\mu_x \cdot F_n}$$

$k_x$  est la pente initiale de la force longitudinale en fonction de  $\lambda$ . La relation entre le glissement normalisé et la force normalisée est obtenue par la "Formule magique" :

$$\overline{F}_x(\overline{\lambda}) = D' \cdot \sin(C' \cdot \arctan(B' \cdot [(1 - E') \cdot \overline{\lambda} + \frac{E'}{B'} \cdot \arctan(B' \cdot \overline{\lambda})]))$$

### Force latérale

Dans le cas de virage à vitesse constante (pas d'accélération ni de freinage) et sans angle de carrossage, la force latérale normalisée est définie par :

$$\overline{F}_y = \frac{F_y}{\mu_y \cdot F_n}$$

et l'angle de dérive normalisé est le suivant :

$$\overline{\alpha} = \frac{C_1 \cdot \tan(\alpha)}{\mu_y \cdot F_n}$$

$C_1$  est la raideur de virage.

L'intérêt de cette normalisation est que les fonctions  $\overline{F}_x(\overline{\lambda})$  et  $\overline{F}_y(\overline{\alpha})$  sont identiques (même équation et mêmes paramètres) et indépendantes de la force normale  $F_n$ . Ainsi il suffit d'une seule équation avec un seul jeu de paramètres pour définir  $\overline{F}_x$  et  $\overline{F}_y$ , contrairement au modèle de Bayle pour lequel une équation et deux jeux de paramètres sont nécessaires pour définir les forces latérale et longitudinale.

### Force latérale et longitudinale combinées

En cas d'accélération (ou de freinage) dans un virage, un glissement combiné normalisé  $\overline{k}$  est défini :

$$\overline{k} = \sqrt{\overline{\lambda}^2 + \overline{\alpha}^2}$$

ainsi qu'une force résultante normalisée  $\overline{R}$  :

$$\overline{R}(\overline{k}) = \sqrt{\overline{F}_y^2 + \overline{F}_x^2}$$

De cette manière, la fonction  $\overline{R}(\overline{k})$  est définie par la même courbe (cf. fig. 1.12) que  $\overline{F}_x(\overline{\lambda})$  et que  $\overline{F}_y(\overline{\alpha})$ .

Ainsi, il suffit d'une seule équation et d'un seul jeu de paramètres pour définir les forces latérale et longitudinale et ceci même dans le cas d'un glissement combiné à un angle de dérive. Pour la comparaison, le modèle de Bayle utilise trois équations et trois

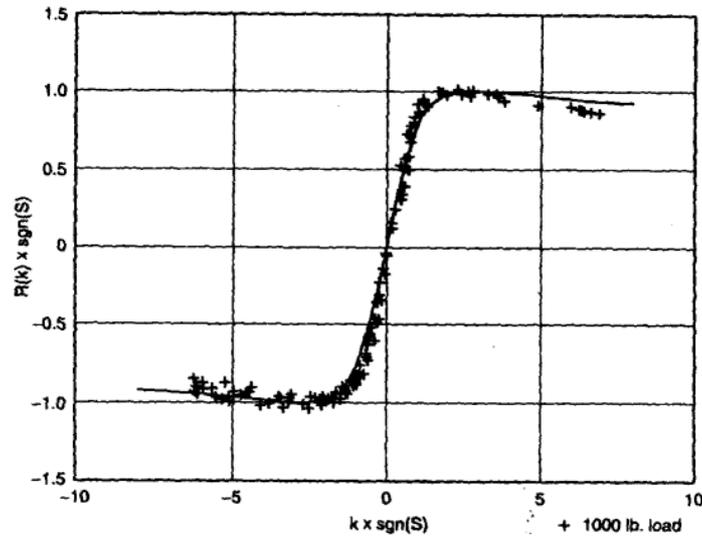


FIG. 1.12: Mesures et courbe de la résultante normalisée  $\bar{R}$  en fonction du glissement normalisé  $\bar{k}$

jeux de paramètres pour définir les forces latérale et longitudinale dans les trois cas de glissement pur, d'angle de dérive pur et de glissement combiné à un angle de dérive.

Les forces longitudinales et latérales normalisées sont alors :

$$\bar{F}_y = \eta(\bar{k}) \cdot \bar{R}(\bar{k}) \cdot \left[ \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2 \cdot \tan^2(\alpha)}} \right]$$

$$\bar{F}_x = \bar{R}(\bar{k}) \cdot \left[ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2 \cdot \tan^2(\alpha)}} \right]$$

avec

$$\eta(\bar{k}) = 0,5 \cdot (1 + \eta_0) - 0,5 \cdot (1 - \eta_0) \cdot \cos(\bar{k}/2) \text{ pour } |\bar{k}| \neq 2\pi$$

$$\eta(\bar{k}) = 1 \text{ pour } |\bar{k}| > 2\pi$$

### 1.2.3 Intégration des modèles de pneu dans un modèle de suspension

Ces modèles du comportement horizontal du pneumatique dépendent de grandeurs telles que le glissement longitudinal, l'angle de carrossage, l'angle de dérive et la force normale, grandeurs qui dépendent du comportement spatial du reste du véhicule.

Notre contribution réside dans l'intégration de ces modèles dans un modèle de suspension de type demi-véhicule essieu. Ceci permet de simuler le comportement de la suspension dans des conditions plus réalistes, prenant en compte en particulier l'influence du comportement latéral du pneu sur la suspension (le roulis). Ce travail a donné lieu à une publication (Lueders et al., 1999).

La figure 1.13 représente l'incorporation du modèle de chacun des pneus au modèle demi-véhicule de type essieu. Le modèle du pneu droit (resp. gauche) définit la force

latérale  $F_{yd}$  (resp.  $F_{yg}$ ) à partir du glissement longitudinal  $\lambda_d$  (resp.  $\lambda_g$ ), de l'angle de carrossage  $\gamma_d$  (resp.  $\gamma_g$ ), de l'angle de dérive  $\alpha_d$  (resp.  $\alpha_g$ ) et de la force normale  $F_{nd}$  (resp.  $F_{ng}$ ). La force latérale totale  $F_{yp} = F_{yd} + F_{yg}$  est utilisée comme entrée de perturbation du modèle demi-véhicule. Ce dernier détermine entre autres la force normale ( $F_{ng}$  et  $F_{nd}$ ) appliquée sur chacun des pneus. Ainsi le couplage entre le comportement vertical et latéral est pris en compte.

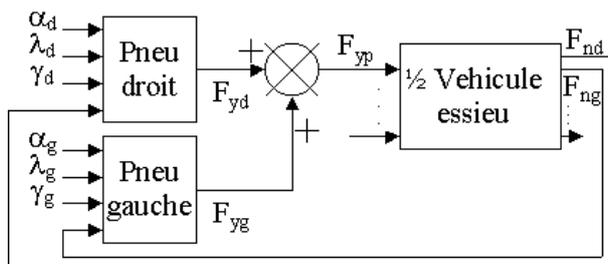


FIG. 1.13: Incorporation des modèles de pneu au modèle demi-véhicule de type essieu

Notons toutefois que le glissement ainsi que les angles de dérive et de carrossage ne peuvent en réalité pas être choisis librement car ils dépendent d'autres variables. Seule l'utilisation d'un modèle complet de véhicule, qui prend en compte l'angle volant, les positions des pédales d'accélération et de freinage et les conditions d'adhérence de la route, peut permettre de définir le glissement et les angles de dérive et de carrossage pour chacun des pneus. Dans le cas plus simple du modèle demi-véhicule de type essieu, ces paramètres ont été choisis indépendants.

## 1.2.4 Conclusion

Nous avons vu que le modèle vertical de pneu, nécessaire à l'étude des suspensions, est très simple et permet d'obtenir la force verticale appliquée à la surface de contact entre le pneu et la route.

Le modèle horizontal de pneu est beaucoup plus compliqué et n'est utilisé que pour les simulations plus réalistes, entre autres, pour la validation de lois de commande.

Les trois modèles que nous avons présentés sont :

- modèle de Burckhardt (1993) : Il n'utilise que 5 paramètres pour représenter les liens entre les entrées (force normale, vitesse longitudinale, glissement longitudinal et angle de dérive) et les sorties (force longitudinale et force latérale), mais il ne tient pas compte de l'angle de carrossage.
- modèle de Bayle et al. (1993) : Il prend en compte l'angle de carrossage du pneu ainsi que les non-linéarités des forces longitudinales et latérales en fonction de la charge. L'inconvénient de ce modèle réside dans son grand nombre de paramètres.
- modèle de Milliken & Milliken (1995) : Il utilise des variables normalisées de manière à ce que toutes les courbes reliant ces variables soient confondues. Ainsi un modèle unique suffit pour obtenir les forces latérales et/ou longitudinales. Cependant le modèle utilisé

ne prend pas en compte l'angle de carrossage  $\gamma$ .

Dans la suite, les modèles de suspension destinés à la synthèse de lois de commande ne prendront en compte que le modèle vertical de pneu. Les modèles horizontaux de pneus ont été incorporés à un modèle demi-véhicule de type essieu pour prendre en compte le couplage entre le comportement vertical de la suspension et le comportement latéral et en roulis (Lueders et al., 1999).

## 1.3 Modèle quart de véhicule ou Monoroue

### 1.3.1 Introduction

Différents modèles quart de véhicule peuvent être définis, selon le but recherché (confort seul ou confort et tenue de route) et selon le type (passif, semi-actif, actif) de suspension. Le modèle le plus simple est le modèle quart de véhicule à un degré de liberté. Il ne concerne que le mouvement vertical de la caisse du véhicule et pas celui de la roue. Ce modèle est constitué d'une masse suspendue, représentant le quart de la masse de la caisse du véhicule, reliée au sol par une suspension (fig. 1.14.a). Si l'on ne s'intéresse qu'au confort des passagers et pas à la tenue de route, ce modèle peut suffire car le mode oscillant dû à la caisse est le mode prédominant pour le confort. En pratique, cela se justifie car les déplacements de la roue sont beaucoup plus rapides que ceux de la caisse. Ce modèle inclut un ressort  $k$  et un amortisseur  $c$  qui peuvent représenter différents types (passif, semi-actif, actif) de suspension que nous présenterons au paragraphe 1.3.2.

Le modèle quart de véhicule à deux degrés de liberté permet de prendre en compte le mouvement vertical de la caisse ainsi que celui de la roue. La masse suspendue (caisse) repose, par l'intermédiaire de la suspension, sur la masse non-suspendue (roue) qui repose elle-même sur le sol par l'intermédiaire du pneumatique (fig. 1.14.b,c,d).

Les figures 1.14.b,c et d correspondent à des modèles quart de véhicule à deux degrés de liberté avec une suspension respectivement de type passif, semi-actif et actif.

Toutes ces représentations considèrent un modèle du comportement vertical du pneumatique comme présenté au paragraphe 1.2.

Sur les figures 1.14, on note :

- $m_c$  : la masse de la caisse (kg)
- $m_r$  : la masse de la roue (kg)
- $k$  : la raideur de la suspension (N/m)
- $c$  : l'amortissement de la suspension (N.s/m)
- $k_p$  : la raideur du pneumatique (N/m)
- $c_p$  : l'amortissement du pneumatique (N.s/m)

Dans tout ce qui suit, aucun frottement sec n'est considéré.

Notons aussi que, pour chaque type de suspension, on disposera de modèles linéaires utilisés lors de la synthèse de lois de commande, et de modèles plus réalistes (non-linéaires,...) utilisés lors des simulations pour valider les commandes mises en oeuvre.

Pour obtenir un modèle linéaire, on choisit des valeurs constantes des raideurs et des amortissements de la suspension et du pneumatique, on ne sature pas la commande, on néglige les frottements secs.

Pour le modèle réaliste, la raideur et l'amortissement de la suspension sont donnés par leur caractéristique statique. On peut prendre en compte les limitations de la commande ainsi que les frottements secs et les variations de la masse de la caisse.

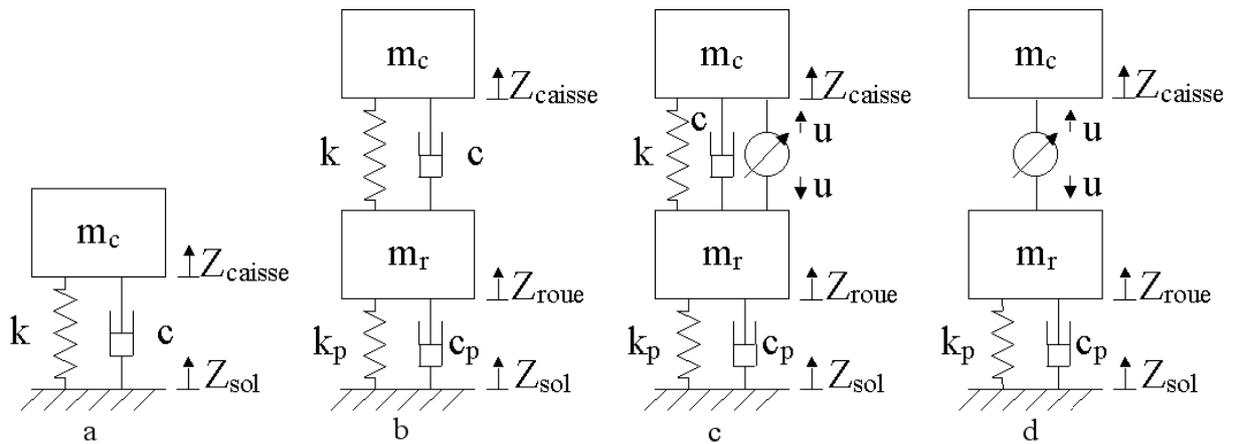


FIG. 1.14: Modèles quart de véhicule

### 1.3.2 Suspension passive, semi-active ou active

L'élément de suspension doit gérer le compromis entre l'isolation vibratoire de la caisse (confort) et l'écrasement du pneu (tenue de route).

Tout d'abord, distinguons les suspensions "classiques" des suspensions avec absorbeurs de chocs. En effet, les suspensions "classiques" appliquent la même force, au signe près, sur la caisse et sur la roue. La suspension "classique" peut être modélisée par un actionneur commandé en force (fig. 1.15).

Ce n'est pas le cas des suspensions avec absorbeur de choc qui permettent d'exercer des forces différentes sur la caisse et sur la roue comme nous le verrons un peu plus loin.

Dans le cadre des suspensions "classiques", nous distinguons trois types :

- passif
- semi-actif
- actif

La définition de ces trois types de suspension est précisée dans ce qui suit.

#### 1.3.2.1 Suspension passive

Une suspension passive est généralement équipée d'un ressort et d'un amortisseur.

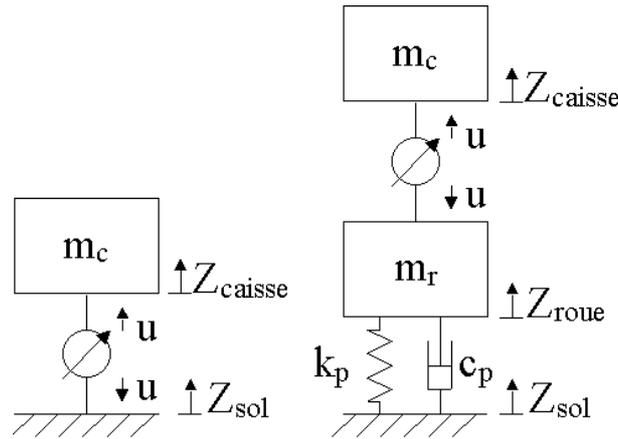


FIG. 1.15: Modélisation de la suspension par un actionneur commandé en force

Le ressort est défini par sa caractéristique Force/Position. Il fournit une force qui dépend de l'écart de position entre la caisse et la roue.

La force développée par l'amortisseur dépend de sa caractéristique Force/Vitesse.

Dans le cas d'un amortissement passif, la force  $u$  générée par l'amortisseur doit simplement être remplacée par :

$$u = c(\dot{z}_{roue} - \dot{z}_{caisse}) \quad (1.4)$$

où  $c$  est une fonction non-linéaire donnée par la caractéristique de l'amortisseur. Cette fonction ne peut donc être choisie qu'à chaque changement d'amortisseur.

Un modèle linéaire de la caractéristique Force/Vitesse de l'amortisseur est :

$$u = c.(\dot{z}_{roue} - \dot{z}_{caisse})$$

où  $c$  est le coefficient d'amortissement supposé constant.

### 1.3.2.2 Suspension semi-active

Une suspension semi-active est généralement constituée d'un élément passif, assimilable à un ressort, et d'un amortisseur semi-actif.

Un amortisseur semi-actif, tout comme l'amortisseur passif, ne peut que dissiper de l'énergie en produisant une force qui s'oppose à la vitesse relative entre la caisse et la roue. Mais contrairement à un amortisseur passif, cette force est modulable, d'où le nom "semi-actif".

Le choix de cette force peut se faire de façon continue ou quantique. Dans le cas continu, la force délivrée peut être choisie librement dans un intervalle dont les limites varient en fonction de la vitesse relative entre la caisse et la roue. Dans le cas quantique, l'amortisseur dispose d'un certain nombre de lois pour sa caractéristique Force-Vitesse. Ainsi le nombre de valeurs possibles, pour la force développée par l'amortisseur, est fixe et égale au nombre de lois (cf. fig. 1.16). C'est dans ce dernier cadre que nous avons travaillé avec PSA.

Notons que certains auteurs utilisent le terme "pilotée" pour parler d'une suspension semi-active constituée d'un amortisseur dont le coefficient d'amortissement peut être piloté dans une certaine plage.

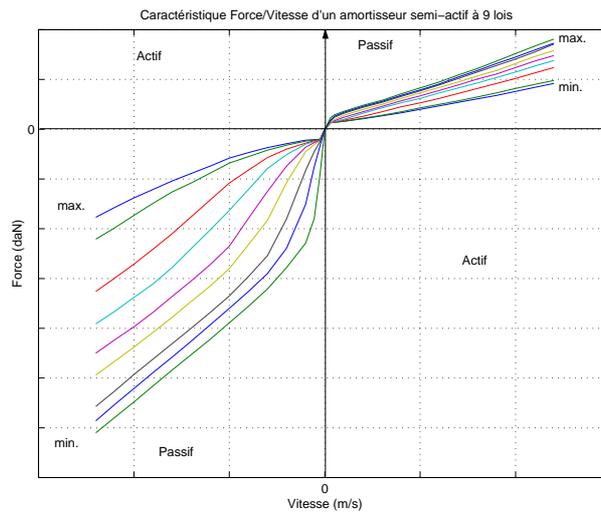


FIG. 1.16: Caractéristique Force-Vitesse d'un amortisseur semi-actif

### 1.3.2.3 Suspension active

Les suspensions passives et semi-actives produisent des forces qui sont limitées par les positions et les vitesses relatives entre la caisse et la roue et qui ne peuvent que dissiper de l'énergie.

Les suspensions actives sont des solutions qui permettent de dépasser ces limitations.

La suspension hydractive (Citroën) par exemple permet, en faisant varier à l'aide d'une pompe, la pression du fluide dans la suspension hydraulique, de générer une force indépendante des positions relatives de la caisse et de la roue.

Cependant, ces suspensions actives consomment de l'énergie. Et elles en consomment d'autant plus que la bande passante de ces suspensions est élevée.

Il existe donc un compromis entre la bande passante de la suspension active et sa consommation d'énergie.

Ainsi pour des véhicules de tourisme, une suspension active lente est utilisée comme c'est le cas de la suspension hydractive de PSA. L'accent est alors mis sur une faible consommation d'énergie.

A l'inverse, pour des véhicules tout terrain comme ceux des militaires, des suspensions actives plus "rapides" constituées de vérins hydrauliques sont préférées. Le besoin en énergie est alors beaucoup plus grand.

### 1.3.2.4 Absorbeur de chocs

Comme nous l'avons vu, les suspensions "classiques" sans absorbeur de chocs appliquent le même effort, au signe près, sur la caisse et sur la roue. Cela implique une limitation des possibilités de ces suspensions comme on le verra au paragraphe 2.3 traitant des propriétés intrinsèques de ces suspensions.

Une idée consiste à ajouter des absorbeurs de chocs (cf. fig. 1.17) qui peuvent, en s'appuyant sur une masse supplémentaire ( $m_a$ ), générer un effort ( $v$ ) qui ne dépendra plus ni de la position ni de la vitesse de la caisse.

Il est ainsi possible, en théorie, d'annuler les mouvements de la roue et de se rapprocher du comportement d'un modèle quart de véhicule à un seul degré de liberté (Hrovat, 1997).

Cependant cette solution n'est, à notre connaissance, pas très répandue sur les véhicules de tourisme. Cela est sûrement dû au fait qu'en pratique, l'effort  $v$  est limité par la masse  $m_a$ . Pour avoir un effort  $v$  important, afin de stabiliser la roue, il faut une masse  $m_a$  importante et cela entraîne un encombrement important.

Cette solution semble donc réservée à la suspension active de masses moins importantes comme par exemple le siège des conducteurs de poids lourds.

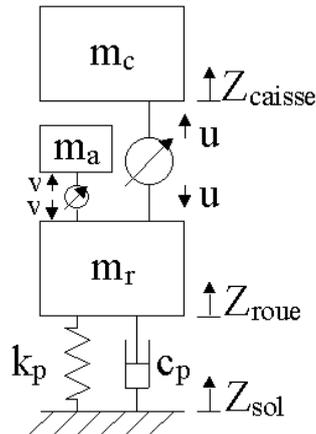


FIG. 1.17: Quart de véhicule avec absorbeur de chocs

### 1.3.3 Sollicitations externes

La sollicitation principale pour les suspensions d'un véhicule est le profil vertical de la route. Nous présentons ici un modèle de ce profil de route apparaissant sous une roue (1/4 de véhicule). Pour les modèles demi-véhicule et complet, ce modèle de profil de route peut être dupliqué et utilisé pour chacune des roues de manière indépendante ou non.

Ce profil de route peut être défini analytiquement de multiples façons qui peuvent être classées comme chocs ou comme vibrations. Un choc est un événement discret de courte durée et d'amplitude relativement importante qui a lieu sur une route lisse par ailleurs. A l'inverse, une vibration est caractérisée par une excitation prolongée due à une route dite rugueuse. Afin de caractériser le profil de la route, Hrovat (1997) utilise la densité spectrale de la route qui dépend du type de route (chemin de terre, route, autoroute,...) et de la fréquence spatiale  $\Omega$  :

$$S(\Omega) = A\Omega^n$$

De plus, la sollicitation du profil de la route dépend de ce profil mais aussi de la vitesse longitudinale du véhicule.

Notons aussi que la sollicitation affectant les roues avant, affecte les roues arrières avec un retard qui dépend de la vitesse du véhicule. Il est donc théoriquement possible de se servir de la sollicitation agissant sur les roues avant pour prédire celle qui va affecter les roues arrières.

Cependant, le profil de la route n'est pas la seule perturbation agissant sur le système. Les forces aérodynamiques, les vibrations du moteur, les mouvements des passagers, les reports de charges lors du freinage ou de l'accélération, sont autant de forces qui agissent plus ou moins directement sur la caisse. Le modèle le plus simple de ces perturbations est l'ajout d'une force agissant directement sur la caisse. Cette force n'ayant pas une direction

fixée, elle est souvent décomposée en plusieurs forces agissant chacune dans une direction différente. Dans le cas d'un modèle quart de véhicule, on rajoute alors une force verticale affectant directement l'accélération la caisse (cf. fig. 1.18).

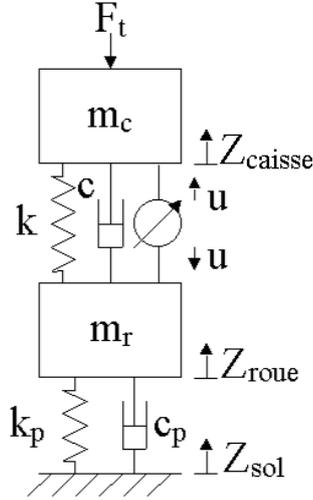


FIG. 1.18: Ajout d'une force perturbatrice sur la caisse

### 1.3.4 Description du modèle quart de véhicule

Dans cette partie, le modèle quart de véhicule considéré prend en compte le mouvement vertical de la caisse ( $Z_{caisse}$ ) ainsi que celui de la roue ( $Z_{roue}$ ). C'est donc un modèle quart de véhicule à 2 degrés de liberté.

La roue est représentée par un simple ressort  $k_p$ . La suspension est modélisée par un ressort  $k$  en parallèle avec un amortisseur. Afin de donner un modèle linéaire et commandable pour ce système, l'amortisseur sera remplacé par un actionneur actif (cf. figure 1.19) pouvant générer une force  $u$ .

**Remarque 1** Selon la forme de  $u$ , cette représentation permet en outre de prendre en compte les différents cas détaillés au paragraphe 1.3.2, c.a.d. que  $u$  peut être générée par un élément purement actif, semi-actif ou purement passif. Ainsi dans le cas d'une suspension passive,  $u$  prendra la forme (1.4).

Après application des équations de Lagrange au modèle quart de véhicule considéré (fig. 1.19) et après linéarisation de ces équations autour du point d'équilibre statique, en considérant des petits déplacements et des petits angles, on obtient les équations suivantes :

$$m_c \ddot{z}_{caisse} = k(z_{roue} - z_{caisse}) + u \quad (1.5)$$

$$m_r \ddot{z}_{roue} = k(z_{caisse} - z_{roue}) - u + k_p(z_{sol} - z_{roue}) \quad (1.6)$$

avec :

$k$  : la raideur de la suspension.

$k_p$  : la raideur du pneumatique.

$u$  : la force produite par l'actionneur.

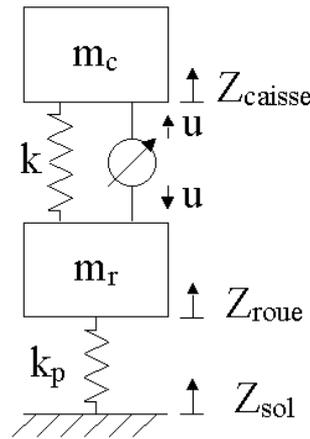


FIG. 1.19: Le modèle quart de véhicule à 2 degrés de liberté.

$m_c$	415kg	masse de la caisse (1/4)
$m_r$	52kg	masse de la roue
$k$	22000N/m	raideur de la suspension
$k_p$	270000N/m	raideur du pneu

TAB. 1.1: Paramètres physiques du modèle de suspension d'un quart de véhicule

Les différents paramètres qui apparaissent dans les équations précédentes sont définis dans la table 1.1.

La représentation d'état associée aux équations (1.5), (1.6) est donc la suivante :

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_r z_{sol} \quad (1.7)$$

avec l'état  $x = [z_{caisse} \quad z_{roue} \quad \dot{z}_{caisse} \quad \dot{z}_{roue}]^t$  et les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_c & k/m_c & 0 & 0 \\ k/m_r & -(k+k_p)/m_r & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_p/m_r \end{bmatrix}$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_c \\ -1/m_r \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'un modèle quart de véhicule à 1 degré de liberté, le système obtenu correspond à celui donné par l'équation (1.7) avec l'état  $x = [z_{caisse} \quad \dot{z}_{caisse}]^t$  et les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m_c & 0 \end{bmatrix}; B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ k/m_c \end{bmatrix}; B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m_c \end{bmatrix}$$

### 1.3.5 Conclusion

Les modèles quart de véhicule sont les plus simples. Ils permettent de simuler le comportement vertical des suspensions.

Nous étudierons l'apport de lois de commandes de type placement de pôles, Skyhook ou  $H_\infty$  sur la commande de la suspension d'un modèle quart de véhicule à 2ddl. La force  $u$  sera remplacée par un retour d'état partiel à 2 paramètres de réglage dans le cas du Skyhook, par un placement de pôles ou par un retour d'état obtenu par une optimisation  $H_\infty$  dans le cas de l'approche  $H_\infty$ . Ces approches sont présentées au chapitre 3.

D'autre part, nous donnerons au chapitre 2, les critères qui seront appelés à juger la qualité d'une suspension puis les spécifications requises en conséquence.

## 1.4 Modèle demi véhicule de type essieu

### 1.4.1 Introduction

Les modèles demi-véhicule de type essieu sont utilisés pour prendre en compte, en plus des mouvements verticaux, les mouvements de roulis de la caisse et de l'essieu (dans le cas d'un essieu monobloc 1.4.2). Ces modèles sont assez peu représentés dans la littérature contrairement aux modèles demi-véhicule de type bicyclette. Citons par exemple le modèle de Watanabe & Sharp (1999), qui se servent d'un modèle demi véhicule de type essieu un peu particulier avec deux roues indépendantes et des suspensions à géométrie variable. La roue est reliée au châssis par un arbre de suspension et l'ensemble ressort-amortisseur est fixé, d'une part au châssis et d'autre part à l'arbre de suspension, en un point dont la position est variable et commandée. En faisant varier cette position, l'effet "bras de levier" est plus ou moins important entre l'ensemble ressort-amortisseur et la roue.

Nous présenterons ici un modèle initialement développé par Dorling (1996) pour les camions. Ce modèle a été adapté aux véhicules de tourisme par Ramirez-Mendoza et al. (1998). En particulier, des hypothèses de symétrie permettent de gérer indépendamment le comportement vertical et le roulis.

Ces modèles de suspension de véhicule disposent en entrée d'une force latérale transmise par les pneus. Pour définir cette force on fait appel au modèle de pneu déjà présenté au paragraphe 1.2.

Nous présentons tout d'abord les éléments nouveaux (essieu et barre anti-roulis) par rapport au modèle quart de véhicule, avant d'introduire le modèle demi-véhicule de type essieu que nous utilisons. Ce modèle reprend en grande partie celui défini par Ramirez-Mendoza et al. (1998).

### 1.4.2 Essieu (monobloc ou non)

Les essieux peuvent être modélisés de façon monobloc ou non selon que les roues gauche et droite sont considérées reliées ou indépendantes. Un couple de roues servant uniquement à la sustentation du véhicule (comme c'est le cas pour les essieux des remorques des camions ou bien pour les essieux arrière d'une voiture à traction avant) sera modélisé de préférence par un essieu monobloc. Pour un couple de roues qui ne sont pas reliées entre elles par un essieu on préférera un modèle où les roues sont indépendantes. C'est le cas d'un couple de roues servant à la direction, de même pour un couple de roues servant à la propulsion puisqu'un différentiel sépare les deux morceaux de l'essieu.

Pour un modèle d'essieu monobloc, les mouvements considérés sont généralement le

déplacement vertical et angulaire (roulis) de l'essieu, alors que dans le cas de roue indépendantes, le mouvement considéré est le déplacement vertical de chacune des roues.

### 1.4.3 Barre anti-roulis

Lorsque l'on souhaite réduire l'amplitude des mouvements de roulis de la caisse, une première solution consiste à d'augmenter la raideur des suspensions gauche et droite. Cependant cela influence aussi le comportement vertical des suspensions et modifie ainsi le compromis entre confort et tenue de route. L'utilisation d'une barre anti-roulis permet d'agir sur le comportement en roulis de la caisse et de l'essieu sans modifier la raideur des suspensions et donc sans toucher au comportement vertical des différents éléments.

Ainsi la barre anti-roulis génère, au niveau du point de rotation entre la caisse et l'essieu, un couple  $M_b = k_b(\theta_u - \theta_s)$  qui dépend de l'écart angulaire entre la caisse et l'essieu ( $\theta_s - \theta_u$ ) et de la raideur angulaire ( $k_b$ ) de la barre anti-roulis. Il est possible de représenter ce couple par deux forces  $f_{br}$  et  $f_{bl}$  de même amplitude et appliquées sur la caisse au niveau des suspensions respectivement de droite et de gauche.

$$M_b = d_s(f_{br} - f_{bl})$$

ou bien

$$f_{br} = \frac{M_b}{2d_s} = \frac{k_b}{2d_s}(\theta_u - \theta_s) ; f_{bl} = -\frac{M_b}{2d_s} = -\frac{k_b}{2d_s}(\theta_u - \theta_s)$$

### 1.4.4 Modèle demi véhicule essieu

Le modèle présenté ici (fig. 1.20) est issu d'un modèle développé pour les camions par Dorling (1996).

Si le modèle de Dorling (1996) est dédié aux camions, c'est à notre connaissance le seul modèle demi-véhicule de type essieu disponible dans la littérature.

Ce modèle a donc été adapté aux véhicules de tourisme par Ramirez-Mendoza et al. (1998), et complété en rajoutant des éléments passifs aux suspensions (raideur, amortissement et barre anti-roulis).

Il contient une masse suspendue ( $m_s$  égale à la moitié de la masse de la caisse) et une masse non suspendue ( $m_u$  égale à la masse de l'essieu) reliées entre elles par une rotule qui donne le centre de roulis de la caisse par rapport à l'essieu. Cette rotule est utilisée initialement pour un modèle de camion, mais elle peut aussi convenir à une voiture. La hauteur de ce centre de rotation est définie par la géométrie des suspensions. Dans le cas d'une voiture, ce centre de rotation est, le plus souvent, plus bas pour une suspension avant que pour une suspension arrière. Cela signifie que l'axe de roulis est incliné vers l'avant du véhicule. On utilise un modèle vertical (ressort  $k_u$  et amortisseur  $c_u$  en parallèle) de chaque pneu et un seul modèle latéral (ressort  $2k_l$  et amortisseur  $2c_l$  en parallèle) pour les deux pneus. Ce modèle latéral définit la force latérale appliquée sur l'essieu à partir de la somme  $F_{yp}$  des forces latérales appliquées sur les pneus par le sol, au niveau de la surface de contact. Il est donc possible de connecter un modèle de pneu, tel que ceux présentés au paragraphe 1.2.2, définissant ces forces latérales à partir notamment de la force normale appliquée sur chaque pneu, du glissement et de l'angle de dérive.

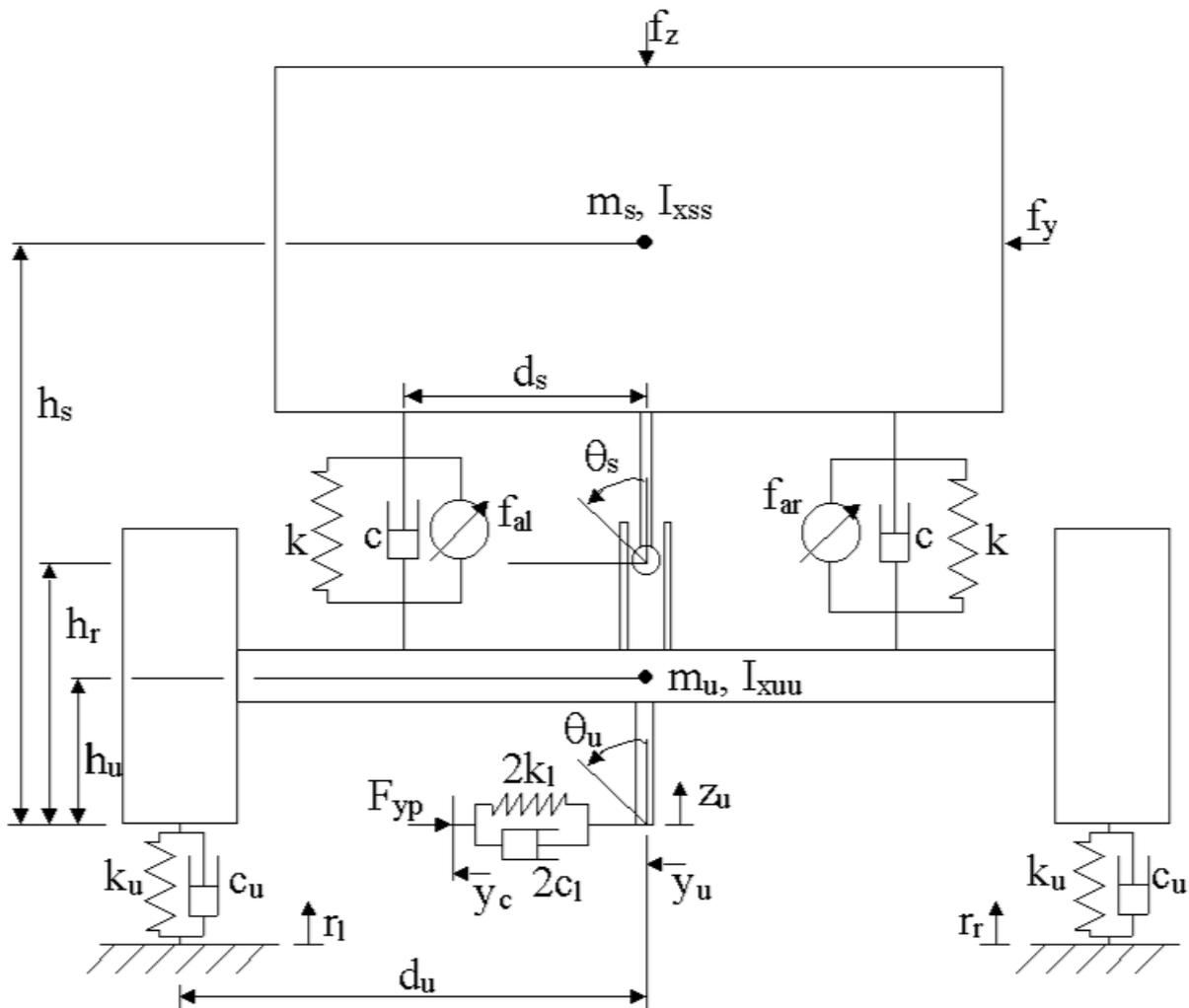


FIG. 1.20: Modèle demi véhicule de type essieu

Les suspensions situées entre le châssis et l'essieu, sont modélisées chacune par un ressort  $k$ , un amortisseur  $c$  et un actionneur en parallèle. Une barre anti-roulis de raideur angulaire  $k_b$  permet de diminuer le roulis sans influencer le comportement vertical. L'essieu est modélisé par un seul bloc puisque l'on considère que les roues ne sont pas indépendantes. Ce modèle prend en compte les principales dynamiques verticales et de roulis.

Certaines hypothèses sont faites pour obtenir un modèle linéaire en vue de son utilisation pour la synthèse d'un régulateur :

- Le modèle est considéré symétrique par rapport au plan vertical.
- La vitesse longitudinale du véhicule est supposée constante.
- Le mouvement de roulis de la caisse se fait autour du centre de roulis lié à l'essieu.
- Les mouvements de tangage (rotation autour de l'axe latéral) et de lacet (rotation autour de l'axe vertical) ne sont pas pris en compte.
- Les angles de roulis de la caisse et de l'essieu sont supposés suffisamment petits.

Notons qu'en pratique ces hypothèses ne sont pas toujours vérifiées. La symétrie de la masse suspendue dépend par exemple de la répartition des passagers et du chargement.

Ainsi selon que les hypothèses sont plus ou moins bien respectées, le comportement du modèle réel est plus ou moins proche de celui du modèle linéaire.

Les différents paramètres du modèle représenté sur la figure 1.20 sont les suivants :

- $m_s$  (resp.  $m_u$ ) : masse de la caisse (resp. de l'essieu) ( $kg$ )
- $I_{xss}$  (resp.  $I_{xuu}$ ) : inertie en roulis de la caisse (resp. de l'essieu) ( $N.m.s^2/rad$ )
- $h_r$  : hauteur de l'axe de rotation de la caisse par rapport à l'essieu ( $m$ )
- $h_s$  (resp.  $h_u$ ) : hauteur du Centre de Gravité (CdG) de la caisse (resp. de l'essieu) ( $m$ )
- $d_s$  : distance latérale entre le point d'attache d'une suspension et l'axe de rotation ( $m$ )
- $d_u$  : distance latérale entre un pneu et l'axe de rotation ( $m$ )
- $k_u$  (resp.  $k_l$ ) : raideur verticale (resp. latérale) d'un pneu ( $N/m$ )
- $c_u$  (resp.  $c_l$ ) : amortissement vertical (resp. latéral) d'un pneu ( $N.s/m$ )
- $k$  : raideur de la suspension ( $N/m$ )
- $c$  : amortissement de la suspension ( $N.s/m$ )
- $k_b$  : raideur angulaire de la barre anti-roulis ( $N.m/rad$ ).

### 1.4.5 Équations du modèle demi-véhicule à 6 ddl

Le modèle considéré dispose de six degrés de liberté :  $z_s$  (resp.  $z_u$ ) le déplacement vertical du centre de gravité de la caisse (resp. de l'essieu),  $\theta_s$  (resp.  $\theta_u$ ) l'inclinaison de la caisse (resp. de l'essieu) et  $y_u$  (resp.  $y_c$ ) le déplacement latéral de l'essieu (resp. de la surface de contact entre le pneu et la route).

Les conditions de route sont spécifiées par les cinq entrées suivantes :

- $r_l$  et  $r_r$  les déplacements verticaux de la route au niveau des roues gauche et droite.
- $f_y$  et  $f_z$  les forces latérales et verticales exercées sur la caisse (entre autres aérodynamiques).
- $F_{yp}$  représente la somme des forces latérales appliquées sur les surfaces de contact entre les pneus et la route (pour un véhicule neutre-vireur, c'est à dire ni sur-vireur ni sous-vireur,  $F_{yp}$  peut être relié à l'angle volant).

Les entrées de ces modèles latéraux de pneus sont l'angle de dérive, le glissement, l'angle de carrossage et la force normale (= verticale) qui est donnée par l'écrasement des pneus. De cette manière, on peut incorporer le modèle de pneu latéral dans le modèle demi-véhicule de type essieu.

Les forces verticales  $u_r$  et  $u_l$  respectivement exercées par les suspensions de droite et de gauche, incluant les éléments passifs (ressorts, amortisseurs et barre anti-roulis) et actifs, peuvent être caractérisées par les équations suivantes :

$$u_r = f_{br} + f_{pr} + f_{ar}, \quad u_l = f_{bl} + f_{pl} + f_{al} \quad (1.8)$$

avec

$$f_{br} = \frac{M_b}{2d_s} = \frac{k_b}{2d_s}(\theta_u - \theta_s) \quad f_{bl} = -\frac{M_b}{2d_s} = -\frac{k_b}{2d_s}(\theta_u - \theta_s)$$

$$\begin{aligned} f_{pr} &= -k[(z_s - z_u) + d_s(\theta_s - \theta_u)] - c[(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + d_s(\dot{\theta}_s - \dot{\theta}_u)] \\ f_{pl} &= -k[(z_s - z_u) - d_s(\theta_s - \theta_u)] - c[(\dot{z}_s - \dot{z}_u) - d_s(\dot{\theta}_s - \dot{\theta}_u)] \end{aligned}$$

où  $f_{br}$  et  $f_{bl}$  représentent les forces générées par la barre anti-roulis reportée respectivement sur les cotés gauche et droit,  $f_{pr}$  et  $f_{pl}$  dénotent respectivement les forces générées par les autres éléments passifs (ressorts et amortisseurs),  $f_{ar}$  et  $f_{al}$  sont les forces générées respectivement par les actionneurs de droite et de gauche. Ces deux forces  $f_{ar}$  et  $f_{al}$  sont des entrées du système et l'on suppose donc pour l'instant que les actionneurs sont actifs dans le sens où ils ne sont pas limités en force.

Avec cette représentation, Ramirez-Mendoza et al. (1998) ont montré qu'il est possible d'obtenir deux sous-systèmes indépendants, l'un définissant le comportement vertical du véhicule, l'autre le comportement en roulis. Pour ce faire, il est nécessaire de redéfinir de nouvelles entrées n'affectant qu'un seul des deux sous-systèmes. A partir des combinaisons linéaires suivantes des forces engendrées par les suspensions de droite et de gauche, il est possible de faire ressortir la composante verticale et celle de roulis :

$$u_z = u_r + u_l = 2k(z_u - z_s) + 2c(\dot{z}_u - \dot{z}_s) + f_{az} \quad (1.9)$$

$$u_\theta = d_s(u_r - u_l) = k_b(\theta_u - \theta_s) + 2kd_s^2(\theta_u - \theta_s) + 2cd_s^2(\dot{\theta}_u - \dot{\theta}_s) + f_{a\theta} \quad (1.10)$$

avec  $f_{az} = f_{ar} + f_{al}$  et  $f_{a\theta} = d_s(f_{ar} - f_{al})$ ,

où  $u_z$  et  $u_\theta$  (resp.  $f_{az}$  et  $f_{a\theta}$ ) représentent respectivement la force verticale et le moment de roulis générés par la suspension (resp. par les actionneurs actifs).

Pour compléter cette décomposition des mouvements, les entrées de perturbations dues au profil de la route sont exprimées par une perturbation verticale et une perturbation de roulis de la façon suivante :

$$r_z = \frac{r_r + r_l}{2}, \quad r_\theta = \frac{r_r - r_l}{2d_u} \quad (1.11)$$

En appliquant les transformations précédentes, les équations physiques sont les suivantes :

$$m_s \ddot{z}_s - u_z + f_z = 0 \quad (1.12)$$

$$m_u \ddot{z}_u + 2k_u(z_u - r_z) + 2c_u(\dot{z}_u - \dot{r}_z) + u_z = 0 \quad (1.13)$$

$$I_{xs} \ddot{\theta}_s + m_{s\theta} h_r \ddot{\theta}_u + m_{s\theta} \ddot{y} - m_{s\theta} g \theta_s - u_\theta - h_{sr} f_y = 0 \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} m_{s\theta} h_r \ddot{\theta}_s + I_{xu} \ddot{\theta}_u + m_{u\theta} \ddot{y}_u + (k_{u\theta} - m_{u\theta} g) \theta_u \\ + u_\theta - k_{u\theta} r_\theta + c_{u\theta} (\dot{\theta}_u - \dot{r}_\theta) - h_r f_y = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$m_{s\theta} \ddot{\theta}_s + m_{u\theta} \ddot{\theta}_u + m_t \ddot{y}_u + k_{lr}(y_u - y_c) + c_{lr}(\dot{y}_u - \dot{y}_c) - f_y = 0 \quad (1.16)$$

$$m_c \ddot{y}_c - F_{yp} - k_{lr}(y_u - y_c) - c_{lr}(\dot{y}_u - \dot{y}_c) = 0 \quad (1.17)$$

avec

$$I_{xs} = I_{xss} + m_s h_{sr}^2, \quad I_{xu} = I_{xuu} + m_u h_u^2 + m_s h_r^2,$$

$$m_{s\theta} = m_s h_{sr}, \quad m_{u\theta} = m_u h_u + m_s h_r, \quad m_t = m_s + m_u,$$

$$c_{lr} = 2c_l, \quad k_{lr} = 2k_l, \quad k_{u\theta} = 2k_u w_u^2, \quad c_{u\theta} = 2c_u w_u^2$$

Ce modèle demi véhicule peut donc être réécrit de la façon suivante dans l'espace d'état :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t), \text{ i.e} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_v(t) \\ \dot{x}_r(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_v & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} B_v & 0 \\ 0 & B_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{az}(t) \\ f_{a\theta}(t) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} E_v & 0 \\ 0 & E_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_v(t) \\ w_r(t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

avec

$$\begin{aligned}
x_v(t) &= [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T, \\
x_r(t) &= [x_5(t) \ x_6(t) \ x_7(t) \ x_8(t) \ x_9(t) \ x_{10}(t)]^T \\
w_v(t) &= \begin{bmatrix} f_z(t) \\ \dot{r}_z(t) \end{bmatrix}, \quad w_r(t) = \begin{bmatrix} f_y(t) \\ \dot{r}_\theta(t) \\ F_{yp}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.20}$$

où les variables d'état sont les suivantes :

- $x_1 = z_s - z_u$  : débattement vertical des suspensions,
- $x_2 = \dot{z}_s$  (resp.  $x_4 = \dot{z}_u$ ) : vitesse de déplacement vertical de la caisse (resp. de l'essieu),
- $x_3 = z_u - r_z$  : écrasement vertical des pneus,
- $x_5 = \theta_s - \theta_u$  : débattement angulaire des suspensions,
- $x_6 = \dot{\theta}_s$  (resp.  $x_8 = \dot{\theta}_u$ ) : vitesse angulaire de la caisse (resp. de l'essieu),
- $x_7 = \theta_u - r_\theta$  : écrasement angulaire des pneus,
- $x_9 = y_u - y_c$  (et  $x_{10} = \dot{y}_u - \dot{y}_c$ ) : débattement latéral du pneu (et sa vitesse).

Le vecteur de commande  $u(t) = [f_{az} \ f_{a\theta}]^T$  est constitué des composantes verticales et angulaires des forces actives, et le vecteur des entrées exogènes  $w(t) = [f_z \ \dot{r}_z \ f_y \ \dot{r}_\theta \ F_{yp}]^T$  regroupe respectivement, la force aérodynamique verticale, la dérivée du profil de route vertical, la force aérodynamique latérale, la dérivée de la composante angulaire du profil de route et la somme des forces latérales appliquées sur les surfaces de contact entre les pneus et la route.

### 1.4.6 Conclusion

Le modèle demi-véhicule de type essieu prend en compte le mouvement vertical et le roulis du châssis ainsi que le mouvement des roues.

Notons que le découplage est possible grâce aux hypothèses de symétrie du véhicule et aux hypothèses de petits angles. Si la symétrie du véhicule n'est pas réalisée, on observe des couplages entre les mouvements verticaux et de roulis. Ces couplages sont d'autant plus importants que la dissymétrie est importante, par exemple, lorsque le centre de gravité est décalé par l'ajout de masses supplémentaires sur la caisse. Dorling (1996) considère ces couplages comme des perturbations à rejeter.

Ce modèle demi-véhicule, même s'il n'est pas complet, comprend 6 degrés de liberté. Il représente donc relativement bien le mouvement vertical et le roulis du véhicule. D'autre

part, il inclut l'influence du comportement latéral du véhicule à travers l'entrée  $F_{yp}$ .

Rappelons aussi que ce modèle comporte une liaison rotule-glissière entre la caisse et l'essieu qui permet de limiter le mouvement de roulis entre ces deux éléments. Cela est plus spécifique aux camions qu'aux voitures. Mais il constitue une bonne approche du comportement en roulis des véhicules.

Au chapitre 5, la synthèse d'un régulateur  $H_\infty$  est faite afin d'atténuer, de façon robuste, les influences des perturbations sur ce système.

## 1.5 Modèle "complet" de véhicule ou modèle 3D

### 1.5.1 Introduction

Différents modèles peuvent être développés pour simuler le comportement de l'ensemble des suspensions du véhicule selon la complexité et le réalisme souhaités. Généralement, pour simplifier l'étude des suspensions, seuls les débattements verticaux des suspensions sont pris en compte et pas les débattements latéraux. Le modèle complet à 7ddl, présenté au paragraphe suivant, est le plus simple. Seuls le mouvement vertical, le roulis et le tangage sont pris en compte car ils engendrent directement un débattement vertical des suspensions. Nous considérons dans notre cas ces trois mouvements de la caisse ainsi que le déplacement vertical de chacune des quatre roues.

Ce modèle peut être complété en tenant compte des 3 déplacements (vertical, latéral et longitudinal) et des 3 rotations (roulis, tangage et lacet) possibles pour chaque élément. De nouvelles entrées sont alors à considérer notamment l'angle du volant, la position de la pédale d'accélération et la pression sur la pédale de frein.

Il existe aussi des modèles plus réalistes des suspensions qui représentent les différents bras d'attache d'une suspension et l'inclinaison des amortisseurs et des ressorts qui diffère selon l'avant ou l'arrière du véhicule. De plus, on peut aussi compléter un modèle par l'ajout de la suspension du moteur et de celle des sièges des passagers. Cependant ces modèles deviennent rapidement très complexes à utiliser pour la synthèse de lois de commande pour les suspensions, à cause des non-linéarités, des couplages entre les différents mouvements et de la taille des systèmes étudiés.

Comme pour les modèles quart de véhicule et demi-véhicule, il est possible de modéliser des suspensions passives, semi-actives à plusieurs lois, semi-actives continûment variable ou bien actives à bande de fréquence limitée ou non. Il est aussi possible de tenir compte des forces aérodynamiques, agissant principalement sur la caisse. De plus, les différents modèles de pneumatiques sont incorporables dans les modèles complets de véhicules puisque ces derniers peuvent simuler les comportements horizontaux du véhicule ainsi que le glissement et l'angle de dérive qui dépendent notamment de l'angle du volant et du couple d'accélération ou de freinage sur chaque roue. Chaque train de roues peut être modélisé par un essieu monobloc ou par deux roues indépendantes.

Voici à titre d'exemple quelques références utilisant différents modèles plus ou moins complets de véhicule.

Hrovat (1997) présente un modèle complet de véhicule à 3ddl. Les mouvements des roues sont négligés et les seuls mouvements pris en compte sont le déplacement vertical du centre de gravité du châssis, ainsi que le roulis et le tangage du châssis. Hrovat (1997) montre que sous certaines hypothèses de symétrie, ce modèle complet de véhicule peut être décomposé en trois sous-systèmes indépendants, l'un concernant le roulis et les deux autres correspondant à un modèle quart de véhicule à 1ddl.

Elbeheiry et al. (1996), Esmailzadeh & Fahimi (1997), Prattichizzo et al. (1998) et Park & Kim (1999) synthétisent tous une loi de commande en utilisant le modèle complet de véhicule à 7ddl. Ces 7ddl sont le déplacement vertical, le roulis et le tangage de la caisse, ainsi que le déplacement vertical de chacune des quatre roues.

Ainsi, Elbeheiry et al. (1996) proposent une méthode de synthèse de loi de commande optimale appliquée sur un modèle complet de véhicule à 7ddl. Ce modèle est utilisé pour comparer les performances de commandes globales d'une part et de commandes décentralisées d'autre part.

Esmailzadeh & Fahimi (1997) utilisent un modèle complet de véhicule à 7ddl équipé de suspensions actives. Ils décrivent une méthode pour synthétiser une commande optimale adaptative de ce modèle à 7ddl.

Prattichizzo et al. (1998) montrent que lors de l'utilisation d'un modèle complet de véhicule à 7ddl, le rejet parfait des perturbations (profil de la route sous chaque roue), agissant sur les différents mouvements (vertical, roulis, tangage) de la caisse, est toujours possible.

Park & Kim (1999) ont effectué une synthèse d'un régulateur  $H_\infty$  sur le modèle complet à 7ddl, afin de garantir la robustesse vis-à-vis des incertitudes sur les paramètres et afin de minimiser l'influence du profil de la route sur les mouvements du châssis.

Cooke et al. (1997) font la combinaison d'un modèle de conduite de véhicule comprenant 4ddl (le déplacement latéral, le lacet et roulis du véhicule plus un système de direction) et du modèle complet de suspension de véhicule à 7ddl (le déplacement vertical, le roulis et le tangage de la caisse ainsi que le déplacement vertical de chaque roue). A ce modèle viennent se greffer notamment les modèles des pneus et des actionneurs actifs de la suspension. Un retour d'état partiel permet de gérer le compromis entre le débattement des suspensions, l'accélération de la caisse, l'écrasement des pneus et les commandes. Puis un modèle de conducteur est utilisé pour diriger le véhicule et effectuer des manœuvres de test.

Enfin, Gobbi et al. (1999) présentent une méthode pour optimiser un modèle complet de véhicule prenant en compte notamment les modèles de pneus, les couples moteur ou de freinage sur chaque roue, la géométrie des suspensions, le moteur et sa suspension ainsi que le siège du conducteur. La méthode permet de modifier les paramètres du modèle (la cinématique des suspensions, les raideurs les amortissements, la pression des pneus, etc...) de façon à obtenir le comportement désiré pour toutes les situations de conduite (virage à 90°, changement de voie, route lisse/rugueuse et mouillée/sèche). Cela fournit ainsi un modèle précis de simulation. Ce modèle est ensuite approché au mieux par un modèle

numérique à base de réseau de neurones qui permet de réduire le temps de simulation de manière très importante.

Au paragraphe suivant, on se limite au modèle complet de véhicule présenté par Park & Kim (1998) puisqu'il prend en compte les sept degrés de liberté représentatifs de la suspension c'est à dire le déplacement vertical, le roulis et le tangage de la caisse et le déplacement vertical des quatre roues indépendantes.

### 1.5.2 Modèle complet à 7ddl

Nous considérons dans notre étude un modèle développé par Park & Kim (1998, 1999).

Ce modèle complet de véhicule comprend trois mouvements (vertical ( $z_c$ ), roulis ( $\theta$ ), tangage ( $\phi$ )) de la caisse et les déplacements verticaux ( $z_{ui}$ ) de chacune des quatre roues indépendantes. Le châssis est supposé rigide. Chaque suspension relie une des quatre roues indépendantes à l'un des quatre coins du châssis (voir fig. 1.21). Une suspension est constituée d'un ressort, d'un amortisseur (tous deux linéaires) et d'un actionneur qui produit une force verticale ( $f_{ai}$ ) entre la roue et le coin du châssis. Deux barres anti-roulis, placées à l'avant et à l'arrière, servent à réduire l'angle de roulis de la caisse.

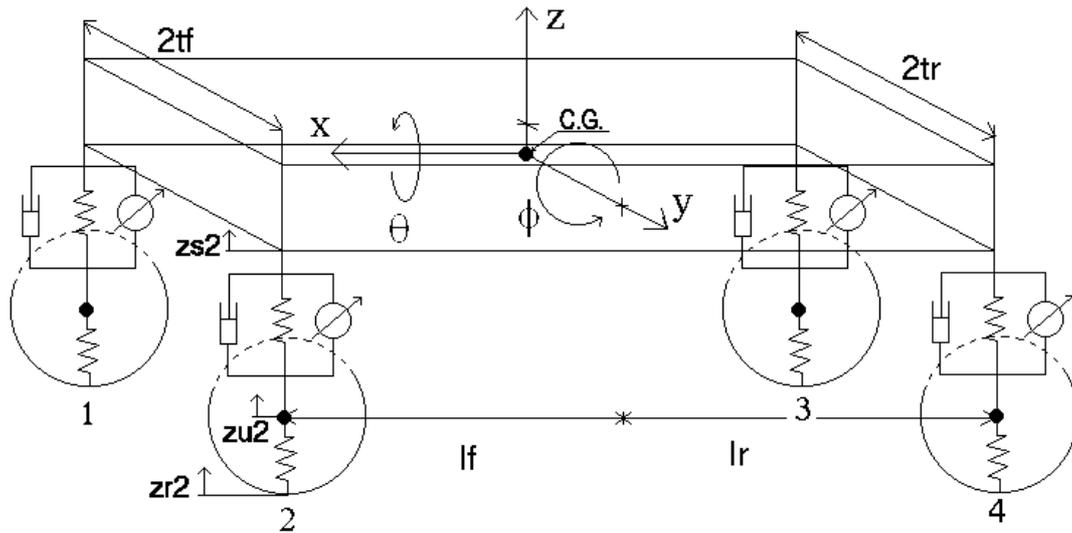


FIG. 1.21: Modèle de véhicule complet.

Sous les hypothèses suivantes :

- un châssis rigide
- des caractéristiques linéaires pour les ressorts et les amortisseurs
- des petits déplacements autour du point d'équilibre,

le modèle proposé par Park & Kim (1999) est linéaire et donné par :

$$M_s \ddot{q} = TB_s(\dot{z}_u - \dot{z}_s) + TK_{sr}(z_u - z_s) + Tf_a \quad (1.21)$$

$$M_u \ddot{z}_u = B_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + K_{ss}(z_s - z_u) + K_t(z_r - z_u) - f_a \quad (1.22)$$

avec :

- $q = [z_c, \theta, \phi]^t$  : le déplacement vertical, le roulis et le tangage du châssis.
- $z_u = [z_{u1}, z_{u2}, z_{u3}, z_{u4}]^t$  : le déplacement vertical de chaque roue (ou masse non-suspendue).
- $z_s = [z_{s1}, z_{s2}, z_{s3}, z_{s4}]^t$  : le déplacement vertical de chaque coin du châssis (ou masse suspendue).
- $z_r = [z_r, z_{r2}, z_{r3}, z_{r4}]^t$  : le profil de la route sous chaque roue.
- $f_a = [f_{a1}, f_{a2}, f_{a3}, f_{a4}]^t$  : les forces produites par chaque actionneur.

Les matrices utilisées dans les équations (1.21) et (1.22) sont les suivantes :

$$M_s = \text{diag}(m_s, i_\theta, i_\phi);$$

$$M_u = \text{diag}(m_f, m_f, m_r, m_r);$$

$$B_s = \text{diag}(b_f, b_f, b_r, b_r);$$

$$K_{ss} = \text{diag}(k_f, k_f, k_r, k_r);$$

$$K_t = \text{diag}(k_{tf}, k_{tf}, k_{tr}, k_{tr})$$

$$K_{sr} = \begin{bmatrix} k_f + r_f/2 & -r_f/2 & 0 & 0 \\ -r_f/2 & k_f + r_f/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_r + r_r/2 & -r_r/2 \\ 0 & 0 & -r_r/2 & k_r + r_r/2 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -t_f & t_f & -t_r & t_r \\ -l_f & -l_f & l_r & l_r \end{bmatrix}$$

Les différents paramètres qui apparaissent dans les équations précédentes, sont définis dans la table 1.2.

$m_s$	1460kg	masse suspendue
$m_f$	40kg	masse non-suspendue avant
$m_r$	35.5kg	masse non-suspendue arrière
$i_\theta$	460kgm <sup>2</sup>	moment d'inertie de roulis de la masse suspendue
$i_\phi$	2460kgm <sup>2</sup>	moment d'inertie de tangage de la masse suspendue
$b_f$	1290Ns/m	coefficient d'amortissement des suspensions avant
$b_r$	1620Ns/m	coefficient d'amortissement des suspensions arrières
$k_f$	19960N/m	raideur des suspensions avant
$k_r$	17500N/m	raideur des suspensions arrière
$r_f$	19200Nrad/m	raideur de la barre anti-roulis avant
$r_r$	9600Nrad/m	raideur de la barre anti-roulis arrière
$k_{tf}$	175500N/m	raideur des pneumatiques avant
$k_{tr}$	175500N/m	raideur des pneumatiques arrière
$t_f$	0.761m	moitié de la voie avant
$t_r$	0.755m	moitié de la voie arrière
$l_f$	1.011m	distance entre le CdG du châssis et l'essieu avant
$l_r$	1.803m	distance entre le CdG du châssis et l'essieu arrière

TAB. 1.2: Paramètres physiques du modèle complet de véhicule de Park & Kim (1998)

Dans la suite nous noterons,  $X_{n \times m}$  une matrice à  $n$  lignes et  $m$  colonnes.

Le vecteur  $q$  représente la position verticale du centre de gravité et les inclinaisons du châssis, Le vecteur  $z_s$  représente la position de chaque coin du châssis. Le châssis étant supposé rigide, les vecteurs  $q$  et  $z_s$  sont reliés par l'équation suivante linéarisée à l'ordre 1 :

$$z_s = T^t q \quad (1.23)$$

En notant  $z = [q^t \ z_u^t]^t$  et en remplaçant l'équation (1.23) dans les équations (1.21) et (1.22), on obtient

$$M_z \ddot{z} + B_z \dot{z} + K_z z = K_r z_r + T_a f_a \quad (1.24)$$

avec :

$$\begin{aligned} M_z &= \begin{bmatrix} M_s & 0_{4 \times 4} \\ 0_{4 \times 4} & M_u \end{bmatrix}; B_z = \begin{bmatrix} T B_s T^t & -T B_s \\ -B_s T^t & B_s \end{bmatrix}; \\ K_z &= \begin{bmatrix} T K_{sr} T^t & -T K_{sr} \\ -K_{ss} T^t & K_t + K_{ss} \end{bmatrix} \\ K_r &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 4} \\ K_t \end{bmatrix}; T_a = \begin{bmatrix} T \\ -I_{4 \times 4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les équations (1.24) peuvent être mises sous forme de la représentation d'état suivante :

$$\ddot{x}_v = A_v x_v + B_v f_a + F_v z_r \quad (1.25)$$

avec l'état  $x_v = [z^t \ \dot{z}^t]^t$  et les matrices :

$$\begin{aligned} A_v &= \begin{bmatrix} 0_{7 \times 7} & I_{7 \times 7} \\ -M_z^{-1} K_z & -M_z^{-1} B_z \end{bmatrix}; B_v = \begin{bmatrix} 0_{7 \times 4} \\ M_z^{-1} T_a \end{bmatrix} \\ F_v &= \begin{bmatrix} 0_{7 \times 4} \\ M_z^{-1} K_r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'autre part, Park & Kim (1998) ont inclus dans leur modèle la dynamique des actionneurs. Ainsi celle reliant l'entrée de commande du  $i^{\text{ème}}$  actionneur, notée  $u_i$ , à la force ( $f_{ai}$ ) qu'il développe, est caractérisée par la fonction de transfert suivante :

$$f_{ai}(s)/u_i(s) = \frac{1}{(1 + 0.04s)} \quad (1.26)$$

dont une représentation d'état est :

$$\begin{cases} \dot{x}_{ai} = a_a x_{ai} + b_a u_i \\ f_{ai} = c_a x_{ai} + d_a u_i \end{cases} \quad (1.27)$$

Ceci correspond à un temps de réponse de 120ms pour l'actionneur  $i$ . La représentation d'état suivante correspond à l'ensemble des quatre actionneurs :

$$\begin{cases} \dot{x}_a = A_a x_a + B_a u \\ f_a = C_a x_a + D_a u \end{cases} \quad (1.28)$$

avec

$$A_a = a_a I_{4 \times 4}; B_a = b_a I_{4 \times 4}; C_a = c_a I_{4 \times 4}; D_a = d_a I_{4 \times 4};$$

Notons  $x_p = [x_v^t \ x_a^t]$  l'état augmenté. La représentation complète, dans l'espace d'état, du système incluant les dynamiques des actionneurs est alors la suivante :

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_{p1} z_r + B_{p2} u \quad (1.29)$$

avec

$$A_p = \begin{bmatrix} A_v & B_v C_a \\ 0_{4 \times 14} & A_a \end{bmatrix}; B_{p1} = \begin{bmatrix} F_v \\ 0_{4 \times 1} \end{bmatrix}; B_{p2} = \begin{bmatrix} B_v D_a \\ B_a \end{bmatrix}$$

Dans le chapitre 5, nous appliquerons une procédure de découplage ligne par ligne et de rejet simultané de perturbation pour ce modèle.

### 1.5.3 Conclusion

Le modèle que nous avons présenté est destiné à la synthèse de loi de commande de suspension. Il a donc été linéarisé grâce notamment à des hypothèses de petits angles et de symétrie des parties gauche et droite du véhicule.

Ce modèle ne prend finalement en compte que 7 degrés de liberté et semble suffisant pour l'étude des suspensions. Ces 7 degrés de liberté sont les trois mouvements de la caisse (vertical, roulis, tangage) et le mouvement vertical de chacune des quatre roues.

Cependant, ce modèle pourrait être augmenté en rajoutant :

- le moteur et sa suspension,
- la transmission,
- les sièges,
- les comportements latéraux et longitudinaux du véhicule,
- les modèles d'adhérence des pneus,
- l'angle volant et la position des pédales d'accélération et de freinage comme nouvelles entrées de commande.
- etc ...

Ces modèles complets de véhicule étant plus réalistes mais aussi plus complexes que les modèles quart ou demi véhicule, ils sont donc plus utilisés, dans un premier temps, pour la simulation et la validation de lois de commande que pour leur synthèse.

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons tout d'abord présenté les modèles de pneus et particulièrement les modèles horizontaux de pneu qui définissent l'adhérence d'un pneu en fonction de la force verticale supportée par le pneu, du glissement longitudinal et des angles de dérive et de carrossage.

Par la suite, nous avons introduit différents modèles de véhicule à savoir les modèles quart de véhicule, demi-véhicule de type essieu et complet. Pour chaque type de modèle

de véhicule, nous avons donné les éléments le constituant ainsi que les équations décrivant un modèle du type considéré. Ainsi, nous décrivons les équations du modèle quart de véhicule à 2ddl, celles du modèle demi-véhicule de type essieu développé par Dorling (1996) pour les camions et adapté aux véhicule de tourisme par Ramirez-Mendoza et al. (1998) et pour finir celles du modèle complet de véhicule à 7ddl présenté par Park & Kim (1998).

Ces modèles ne sont pas nouveaux. Rappelons que notre contribution correspond ici à l'ajout successif, au modèle demi-véhicule de type essieu, des trois modèles horizontaux de pneus. Cette réunion est illustrée au début du chapitre 5 tandis le modèle quart de véhicule et le modèle complet à 7ddl, serviront pour les simulations aux chapitre 4 et à la fin du chapitre 5 respectivement.

Le chapitre suivant est consacré aux critères de performances et de robustesse qui permettent de juger le comportement d'une suspension.

# Chapitre 2

## Analyse des suspensions automobiles

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons pour chaque type de suspensions les critères qui seront utilisés aux chapitres 4 et 5 pour analyser les performances des suspensions. Notre objectif est de présenter ici des critères qui sont adaptés à l'étude des propriétés d'une commande de suspensions automobiles, sans pour autant étudier de façon parfaite les propriétés du confort et de la tenue de route qui font appel à des mesures très complexes. On se focalisera donc principalement sur des critères physiques plutôt que sur des critères classiques génériques d'un automaticien, même si la démarche d'analyse suit celle habituellement utilisée en commande robuste.

Afin de déterminer la qualité d'une suspension, il est nécessaire de définir des critères. Ces critères sont de deux types : les critères de performances, permettant de caractériser les performances de la suspension, et les critères de robustesse, permettant d'apprécier la satisfaction des performances en présence d'incertitudes et de perturbations exogènes.

Avant tout, la démarche automatique consiste à vérifier la stabilité du système nominal appelée stabilité nominale (NS). Ceci n'est pas spécifique aux suspensions. De plus, la suspension est un système stable en boucle ouverte (c.a.d. la suspension passive). Ce critère est donc immédiatement rempli.

Les critères de performance sont spécifiques aux suspensions et concernent principalement le confort, la tenue de route et le débattement des suspensions. Nous présenterons dans ce chapitre des critères usuels de la littérature ainsi que des critères utilisés dans le cadre de la collaboration avec PSA portant sur l'étude d'un modèle quart de véhicule à 2ddl équipé d'une suspension semi-active non-linéaire. Ils permettent de définir les performances nominales (NP) du système, i.e., les performances obtenues pour un système nominal sans incertitudes.

Les critères de robustesse ne sont pas spécifiques aux suspensions. Ils concernent les incertitudes de modèle (dynamique négligée, retard, déphasage et gain des actionneurs, des capteurs mal connus) et les incertitudes paramétriques (variation de masse, raideur et amortissement mal connus, ...). On vérifie tout d'abord le critère de stabilité robuste (RS) permettant d'apprécier la stabilité du système soumis à des incertitudes. Puis, grâce au critère de performances robustes (RP), il est possible de vérifier si le système, soumis

aux incertitudes, conserve les performances requises. Le critère de performances robustes (RP) est plus difficile à satisfaire que le critère de stabilité robuste (RS).

Nous allons, dans un premier temps, introduire les différents objectifs de performance et de robustesse. Puis nous parlerons du problème des points invariants qui limitent les performances que l'on peut atteindre. Enfin, nous détaillerons pour chaque type de suspension les critères de performance associés aux objectifs ainsi que leurs spécifications.

## 2.2 Objectifs de performances et de robustesse

Nous présentons tout d'abord les problèmes de performances (confort, tenue de route, débatement de la suspension, bruit de mesure) puis ceux de robustesse (incertitudes).

La suspension d'un véhicule a pour rôle principal d'assurer le confort des passagers et la tenue de route du véhicule.

### 2.2.1 Confort

La notion de confort est associée au bien-être des passagers dans le véhicule. Or le corps humain est sensible à l'accélération. En effet, à vitesse constante (accélération nulle) le corps humain ne ressent aucune force agissant sur lui.

Selon l'accélération à laquelle est soumis le passager, ce dernier peut ressentir des malaises. Par exemple, lorsque l'accélération varie à une certaine fréquence, des malaises, dus aux vibrations de certains organes du corps humain, peuvent être ressentis. Les différents organes ne vibrent pas tous à la même fréquence (cf. fig. 2.1). De plus, l'allongement de la durée d'exposition aux vibrations augmente la sensibilité du corps humain.

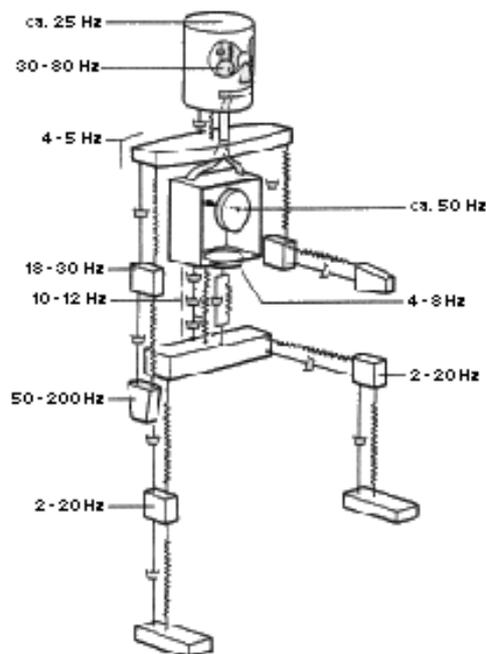


FIG. 2.1: Modélisation du corps humain par un ensemble de liaisons masse-ressort-amortisseur.

Certaines normes ISO (ISO2631-1978, E) (voir Wong (1993)) définissent des seuils de tolérance du corps humain aux vibrations en fonction de l'amplitude, de la fréquence et de la durée des perturbations. Ainsi l'objectif du confort est de réduire entre autres l'accélération verticale de la caisse du véhicule dans la bande de fréquences (entre 1 et 8Hz environ) de sensibilité des passagers.

Le passager perçoit aussi, grâce à son oreille interne, les mouvements de roulis et de tangage. Ces mouvements sont aussi sources de malaise pour les passagers. Ainsi pour les modèles de véhicules (demi-véhicule et véhicule complet) permettant la prise en compte de ces mouvements de roulis et de tangage, la recherche du confort des passagers passera par la diminution de ces mouvements de la caisse.

### 2.2.2 Tenue de route

La tenue de route caractérise la capacité du véhicule à adhérer à la route et donc à répondre aux sollicitations du conducteur. Effectivement, lorsque les roues adhèrent mal à la route, le conducteur contrôle difficilement son véhicule.

Ainsi la tenue de route est liée à la capacité du système à fournir une force longitudinale (en cas d'accélération ou de freinage) et/ou latérale (en cas de virage) entre le pneu et la route. Cette force d'adhérence au sol dépend de plusieurs facteurs qui ne sont pas tous contrôlables :

- le type de surface : il est défini par la route et ne peut être pas être choisi par le conducteur (sauf en changeant de route bien sûr).
- les caractéristiques des pneus : elles sont fixées par le choix des pneus, même si elles évoluent au cours du temps à cause de l'usure.
- les angles de dérive et de carrossage des roues : ils dépendent de la dynamique du véhicule et du type d'accrochage des roues. Ils peuvent être pris en compte dans des modèles complets de véhicule mais dépendent peu de la suspension.
- la charge des pneus : elle dépend directement de l'écrasement de ces derniers. Cet écrasement est très lié au comportement de la suspension et représente donc un critère pour évaluer la capacité du système à produire une force d'adhérence au sol.

Nous avons dit que la force horizontale développée par un pneu dépend de la charge des pneus. En effet plus un pneu est chargé plus il peut produire une force horizontale. Nous pouvons donc nous demander si le report de charge qui a lieu, lors d'un freinage, d'une accélération ou d'un virage, va affecter la force horizontale totale qui correspond à la somme des forces horizontales de chaque pneu. En effet, certains pneus seront moins chargés et d'autre seront surchargés. Que se passe-t-il globalement ?

Pour des conditions de routes fixées (angle de dérive, type de surface, etc...), la force horizontale développée par un pneu ne dépend pas linéairement de la force normale (charge). Ainsi, une augmentation de la charge engendre une augmentation de la force horizontale, mais pour une charge trop importante, on observe une diminution de la force latérale.

Dans le cas d'un essieu, lors d'un virage, l'augmentation de la charge, que l'on observe sur la roue extérieure, correspond à une diminution de la charge sur la roue intérieure. Et, comme cela est illustré dans l'exemple de la figure 2.2, la perte de force latérale sur la roue moins chargée n'est pas compensée par l'augmentation de celle sur la roue

surchargée. Dans cet exemple (Motorlegend, 2001), la charge totale supportée par l'essieu est de  $400\text{kg}$ . Cette charge se répartit de façon équitable ( $200\text{kg}$  sur chaque pneu) si le véhicule ne subit pas de roulis. Cela correspond à une force latérale totale de  $260\text{kg}$  ( $= 130 + 130$ ). Dans le cas où le roulis n'est pas nul (dérive de  $3^\circ$ ), il y a un report de charge (ici de  $100\text{kg}$ ) du côté intérieur du virage vers le côté extérieur. Ainsi la roue intérieure produit une force latérale plus faible ( $80\text{kg}$ ) et la roue extérieure une force plus importante ( $140\text{kg}$ ). Globalement, la force développée est moindre ( $140 + 80 = 220 < 260$ ) dans le cas où les roues ne sont pas chargées de manière identique.

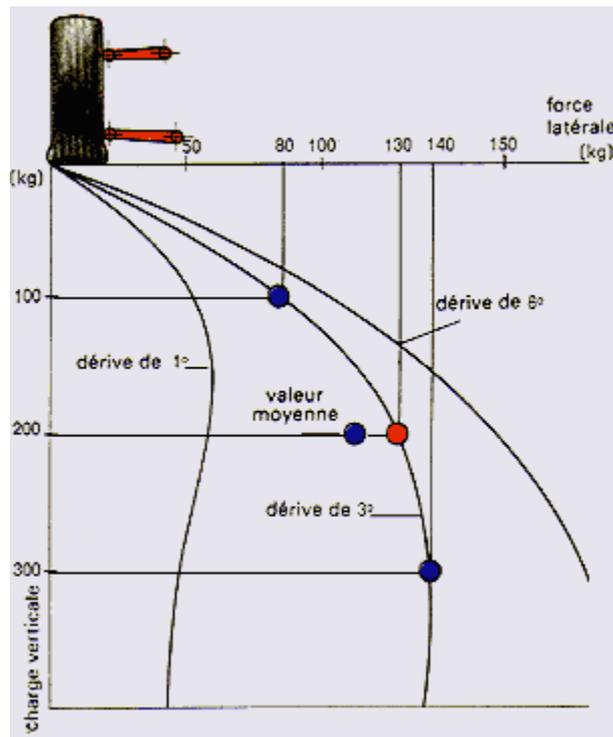


FIG. 2.2: Relation Force latérale/Force normale en virage

Cet exemple indique qu'il est préférable de maintenir une charge identiquement répartie sur les différentes roues. Ainsi un écrasement des pneus, identique au cas statique, sera recherché.

Pour le cas du modèle quart de véhicule présenté au chapitre précédent, il n'y a qu'une seule roue et cela revient donc à vouloir que la masse non-suspendue (roue) suive le profil de la route ( $z_{roue} - z_{sol} = 0$ ).

Dans le cas d'un modèle demi-véhicule de type essieu, les composantes angulaires ( $\theta_u - r_\theta$ ) et verticales ( $z_u - r_z$ ) de la variation de l'écrasement des pneus devront être limitées.

Dans le cas du modèle complet de véhicule détaillé au paragraphe 1.5.2, on s'intéressera à obtenir un écrasement des différents pneus identique au cas statique ( $z_{ui} - z_{ri} = 0$  pour  $i = 1$  à 4).

Selon la complexité du modèle complet, on cherchera, en plus de la limitation de la variation de l'écrasement des quatre pneus, à réduire si possible les angles de carrossage des pneus.

### 2.2.3 Butée de suspension

En pratique, les éléments constituant la suspension du véhicule disposent d'un débattement limité. Il est donc important de prendre en compte le débattement maximal des suspensions dans la synthèse d'une loi de commande afin d'éviter les chocs qui surviennent lorsque la suspension arrive en fin de course. Cependant, le débattement est nécessaire pour réaliser l'objectif de confort de la caisse. Le but est donc uniquement de le contraindre à rester dans un certain intervalle.

### 2.2.4 Coût

A ces critères de performances de la suspension, s'ajoutent des critères de coût financier incontournables dans un contexte industriel. Ceux-ci ne sont généralement pas pris en compte lors de la synthèse d'un régulateur mais ils influent sur le choix des capteurs et des actionneurs. Ainsi en théorie on suppose souvent dans un premier temps que toutes les variables sont mesurables, mais cela n'est pas le cas en pratique où souvent seul le débattement des suspensions est mesurable à faible coût. Cependant, certaines commandes nécessitent aussi une mesure de l'accélération de la caisse et de celles des roues. En pratique, un capteur d'accélération est plus cher qu'un capteur de débattement de la suspension. Ainsi contrairement à un prototype, dans le cadre d'une production en série l'on préférera souvent un nombre moindre de capteurs, cela limitant en outre la maintenance du véhicule.

Ajoutons qu'il est important, lors de la synthèse d'une loi de commande, de prendre en compte le bruit de mesure inhérent à tout capteur.

### 2.2.5 Incertitudes

En pratique, les paramètres d'un véhicule ne sont connus qu'avec une marge d'erreur due à la fabrication en série. De plus, ils peuvent varier en fonction de l'usure du véhicule ou des conditions de fonctionnement (température, pression, ...). Il est évidemment important que le comportement du système bouclé respecte le cahier des charges malgré les incertitudes sur les paramètres. La prise en compte de ces incertitudes lors de la synthèse de la commande est donc importante. La certification de la stabilité (RS) du véhicule et de ses performances (RP) malgré la présence d'incertitudes paramétriques est donc cruciale.

D'autre part, les modèles utilisés pour la synthèse des régulateurs sont généralement simplifiés. Les non-linéarités (frottements,...) ne sont pas prises en compte. Les dynamiques très rapides des différents éléments (actionneurs, capteurs, véhicule) sont négligées car ce sont des phénomènes haute-fréquence difficiles à modéliser. Ainsi il est important que le régulateur soit peu sensible à ces dynamiques négligées. Cela se traduira par une volonté de ne pas solliciter le régulateur en hautes fréquences. De même, les non-linéarités peuvent être prises en compte en considérant un modèle moyen linéaire soumis à des incertitudes.

La stabilité robuste (RS) et les performances robustes (RP) s'étudient par le biais de la mesure  $\mu$  comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

## 2.3 Propriété intrinsèque de la suspension

Les suspensions (passives, semi-actives ou actives) qui ne sont pas équipées d'absorbeurs de chocs, agissent avec la même force sur la caisse et sur la roue, ce qui entraîne une limitation de leurs possibilités.

Ceci se caractérise par la présence de points invariants dans les réponses fréquentielles des transferts entre les perturbations du sol et certaines variables d'importance comme l'accélération de la caisse, le débattement de la suspension et l'écrasement du pneu.

Nous décrivons ces points invariants sur l'exemple simple du modèle quart de véhicule.

**Remarque 2** *Les points invariants théoriques sont illustrés, pour simplifier, uniquement sur le modèle quart de véhicule. Mais ils peuvent être obtenus pour les autres modèles après un changement de base.*

Reprenons la représentation et les équations du modèle quart de véhicule :

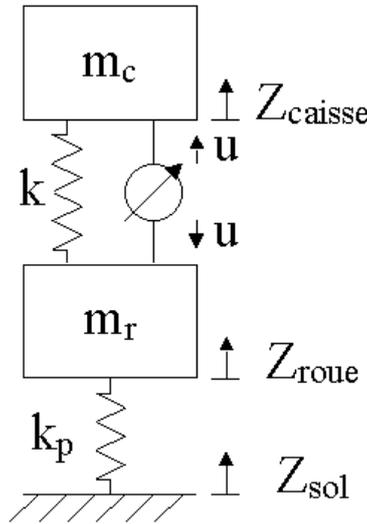


FIG. 2.3: Le modèle quart de véhicule à 2 degrés de liberté.

$$m_c \ddot{z}_{\text{caisse}} = k(z_{\text{roue}} - z_{\text{caisse}}) + u \quad (2.1)$$

$$m_r \ddot{z}_{\text{roue}} = k(z_{\text{caisse}} - z_{\text{roue}}) - u + k_p(z_{\text{sol}} - z_{\text{roue}}) \quad (2.2)$$

### 2.3.1 Points invariants

En additionnant les deux équations précédentes on obtient :

$$m_c \ddot{z}_{\text{caisse}} + m_r \ddot{z}_{\text{roue}} = k_p(z_{\text{sol}} - z_{\text{roue}})$$

Aucun terme n'est contrôlable dans cette équation. En utilisant la transformation de Laplace, on obtient, sous conditions initiale nulles :

$$m_c p^2 Z_{\text{caisse}} + (m_r p^2 + k_p) Z_{\text{roue}} = k_p Z_{\text{sol}} \quad (2.3)$$

d'où pour la fréquence  $w_1 = \sqrt{k_p/m_r}$ , on a :

$$\left. \frac{\ddot{Z}_{caisse}}{Z_{sol}} \right|_{w_1} = \frac{k_p}{m_c}$$

On peut aussi montrer que :

$$((m_c + m_r)p^2 + k_p)Z_{caisse} - (m_r p^2 + k_p)(Z_{caisse} - Z_{roue}) = k_p Z_{sol} \quad (2.4)$$

Ainsi pour  $w = w_2 = \sqrt{k_p/(m_r + m_c)}$  on obtient :

$$\left. \frac{Z_{caisse} - Z_{roue}}{Z_{sol}} \right|_{w_2} = \frac{m_c + m_r}{m_c}$$

Ainsi lorsque la raideur du pneu  $k_p$  et les masses de la caisse  $m_c$  et de la roue  $m_r$  sont déterminées, les points invariants de l'accélération de la caisse et du débattement de la suspension sont fixés et ceci quelle que soit la suspension choisie, dans la mesure où cette suspension applique la même force sur la caisse que sur la roue.

Cependant, si l'on rajoute au modèle du pneu un amortisseur en parallèle avec le ressort de raideur  $k_p$ , alors les équations (2.3) et (2.4) deviennent respectivement :

$$m_c p^2 Z_{caisse} + (m_r p^2 + c_p p + k_p) Z_{roue} = (c_p p + k_p) Z_{sol} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} ((m_c + m_r)p^2 + c_p p + k_p)Z_{caisse} - (m_r p^2 + c_p p + k_p)(Z_{caisse} - Z_{roue}) \\ = (c_p p + k_p)Z_{sol} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ainsi il n'existe plus de fréquence  $w$  réelle permettant d'annuler les termes  $((m_c + m_r)p^2 + c_p p + k_p)$  ou  $(m_r p^2 + c_p p + k_p)$ . La prise en compte d'un amortissement non-nul pour le modèle vertical de pneu entraîne donc une disparition des points invariants. Cependant, l'amortissement d'un pneu étant généralement très faible en pratique, les points invariants théoriques, pour les gains des transferts  $(z_{caisse} - z_{roue})/\dot{z}_{sol}$  et  $\ddot{z}_{caisse}/\dot{z}_{sol}$ , se traduisent par des comportements invariants autour des fréquences calculées en théorie pour ces points invariants.

De même, si la raideur  $k_p$  du pneu n'est pas linéaire, alors l'équation 2.3 devient :

$$m_c p^2 Z_{caisse} + m_r p^2 Z_{roue} = F_{k_p}(Z_{sol} - Z_{roue}) \quad (2.7)$$

Il n'est alors plus possible de décomposer la force générée par la raideur du pneu et on ne peut donc pas faire disparaître le terme en  $Z_{roue}$  pour une certaine fréquence  $w$ . Le point invariant ne peut donc plus être déterminé théoriquement.

Dans le cas d'un modèle complet de véhicule à 7 degrés de liberté et sans amortisseur dans le modèle vertical des pneus, on obtient l'équation suivante, en additionnant les équations de l'accélération verticale du centre de gravité de la caisse, et celle de chaque roue :

$$\begin{aligned} m_c p^2 Z_{caisse} &+ (m_{r1} p^2 + k_{p1}) Z_{roue1} + (m_{r2} p^2 + k_{p2}) Z_{roue2} \\ &+ (m_{r3} p^2 + k_{p3}) Z_{roue3} + (m_{r4} p^2 + k_{p4}) Z_{roue4} \\ &= k_{p1} Z_{sol1} + k_{p2} Z_{sol2} + k_{p3} Z_{sol3} + k_{p4} Z_{sol4} \end{aligned} \quad (2.8)$$

avec  $m_c$  la masse de la caisse,

$m_{ri}$  la masse de la roue  $i$ ,

$k_{pi}$  la raideur verticale du pneu  $i$ ,

$Z_{caisse}$  le déplacement vertical du centre de gravité de la caisse,

$Z_{rouei}$  le déplacement vertical de la roue  $i$ ,

$Z_{soli}$  le déplacement vertical du sol sous la roue  $i$ .

Il existe un point invariant de l'accélération verticale du centre de gravité de la caisse  $\ddot{Z}_{caisse}$  si et seulement si il existe une fréquence  $w$  pour laquelle tous les termes  $(m_{ri}p^2 + k_{pi})$  sont nuls, i.e. si tous les rapports  $k_{pi}/m_{ri}$  sont égaux. La fréquence est alors  $w = \sqrt{k_{pi}/m_{ri}}$ . En pratique il y a peu de chance que tous ces rapports  $k_{pi}/m_{ri}$  soient égaux. Mais même si les rapports sont différents, les gains des transferts  $\ddot{z}_{caisse}/z_{soli}$  varient peu au voisinage des fréquences  $w = \sqrt{k_{pi}/m_{ri}}$  qui annulent les termes  $(m_{ri}p^2 + k_{pi})$ .

### 2.3.2 Comportements asymptotiques invariants

En reprenant le modèle de suspension quart de véhicule avec 2 ddl et un modèle de pneu sans amortisseur, on s'aperçoit qu'en plus des points invariants, on obtient à très basses ou très hautes fréquences des comportements asymptotiques invariants pour certains transferts (voir équations (2.3) et (2.4)). Ainsi, le choix de la suspension n'a aucune influence en basses fréquences sur les transferts  $\ddot{z}_{caisse}/z_{sol}$  et  $(z_{roue} - z_{sol})/z_{sol}$  et en hautes fréquences sur les transferts  $(z_{caisse} - z_{roue})/z_{sol}$  et  $(z_{roue} - z_{sol})/z_{sol}$ . Pour ces deux domaines, il n'est pas utile de chercher à modifier les comportements de  $\ddot{z}_{caisse}/z_{sol}$ ,  $(z_{roue} - z_{sol})/z_{sol}$  et  $(z_{caisse} - z_{roue})/z_{sol}$  en agissant uniquement sur la suspension.

### 2.3.3 Compromis

Les équations (2.3) et (2.4) permettent de mettre en évidence des compromis.

- Le compromis entre l'accélération de la caisse (confort) et l'écrasement du pneu (tenue de route). En effet, Yue et al. (1989) ont montré que pour les hautes fréquences, le confort et la tenue de route ne peuvent pas être améliorés simultanément. Cependant, en basses fréquences et notamment au voisinage de la fréquence propre de la caisse, ces deux objectifs peuvent être atteints simultanément et ne constituent donc plus un compromis.
- Le compromis entre le débattement de la suspension (contrainte technologique) et l'écrasement du pneu (tenue de route). En effet, l'amélioration de la tenue de route entraîne une augmentation du débattement de la suspension et donc un risque d'atteindre les butées des suspensions et de provoquer des chocs.
- Le compromis entre l'accélération de la caisse (confort) et le débattement de la suspension. De la même façon, une amélioration du confort s'accompagne d'une augmentation du débattement de la suspension.

## 2.4 Critères pour le quart de véhicule

Voyons tout d'abord les critères ainsi que les spécifications associées, fournis par PSA pour l'étude du quart de véhicule.

### 2.4.1 Critères de PSA

Dans le cadre de la collaboration avec PSA, trois critères nous ont été donnés. La seule entrée de perturbation considérée est le profil vertical  $z_{sol}$  de la route.

Le principal critère est le confort en basses fréquences, étudié à partir du déplacement vertical de la caisse  $z_{caisse}$ .

Le deuxième critère concerne le rebond de roue défini par le déplacement vertical de la roue  $z_{roue}$ .

Enfin, comme son nom l'indique, la trépidation caractérise le confort en hautes fréquences et concerne l'accélération verticale de la caisse  $\ddot{z}_{caisse}$ . Elle est égale à :

$$\sqrt{\int_4^{30} (\ddot{z}_{caisse}(f))^2 df}$$

Les spécifications associées à ces critères sont définies par des limites imposées aux transferts  $z_{caisse}/z_{sol}$ ,  $z_{roue}/z_{sol}$  et  $\ddot{z}_{caisse}/z_{sol}$  entre la perturbation  $z_{sol}$  et les sorties représentant les critères.

Ces limites sont :

- Pour le confort en basses fréquences ( $z_{caisse}/z_{sol}$ ) :

Dans ce cas, le système est soumis à une oscillation sinusoïdale du sol d'amplitude  $\pm 15\text{mm}$  et de fréquence variable. On doit vérifier :

- un gain maximal  $|z_{caisse}/z_{sol}|$  inférieur à 1.8
- une fréquence propre inférieure à  $1.3Hz$
- un "Confort-BF" minimal et inférieur à celui d'une suspension passive (la boucle ouverte). Le "Confort-BF" est une fonction fournie par PSA qui rend compte du filtrage de  $z_{caisse}/z_{sol}$  entre 0.5 et  $5Hz$ . La précision de ce calcul dépend du pas de fréquence qui est dans ce cas de  $0.05Hz$ .

- Pour le rebond de roue ( $z_{roue}/z_{sol}$ ) :

Pour le test du rebond de roue et de la trépidation (confort en hautes fréquences), l'amplitude de la sinusoïde est de  $\pm 1\text{mm}$ .

- un gain maximal  $|z_{roue}/z_{sol}|$  inférieur à 1.8

- Pour le confort en hautes fréquences ( $\ddot{z}_{caisse}$ ) :

- une valeur de la trépidation à comparer à celle de la boucle ouverte. La précision de ce calcul dépend aussi du pas de fréquence qui est dans ce cas de  $0.5Hz$ .

La figure 2.4 représente les résultats des tests fréquentiels pour le cas du modèle non-linéaire de référence. La limite représentée est relative aux critères de la littérature (voir plus loin).

Le tableau suivant récapitule les différentes spécifications associées aux critères fréquentiels.

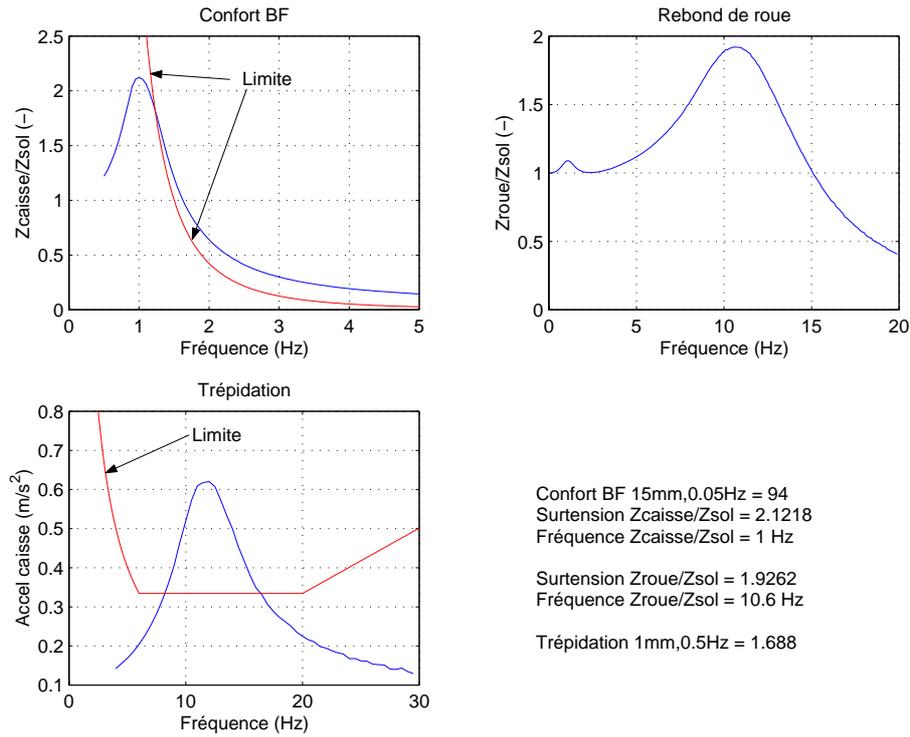


FIG. 2.4: Critères fréquentiels pour l'amortisseur de la 406-série avec le modèle non-linéaire

Spécifications	
"Confort-BF"	à minimiser et $< 94$ (cas passif 406)
Gain max. de $z_{caisse}/z_{sol}$	$< 1.8$
Fréquence associée (Hz)	$< 1.3$
Gain max. de $z_{roue}/z_{sol}$	$< 1.8$
Fréquence associée (Hz)	-
Trépidation	à comparer à 1.69 (cas passif 406)
Accélération max. ( $m/s^2$ )	-
Fréquence associée (Hz)	-

Notons que ces critères concernant le confort en basses fréquences ( $z_{caisse}/z_{sol}$ ) et le rebond de roue ( $z_{roue}/z_{sol}$ ) ne correspondent pas exactement à ceux que l'on utilise dans la littérature. En effet, comme on le verra au paragraphe suivant, le confort et la tenue de route sont, dans la littérature, traduits respectivement par l'accélération de la caisse ( $\ddot{z}_{caisse}$ ) et par l'écrasement du pneu ( $(z_{roue} - z_{sol})/z_{sol}$ ).

Cependant, on peut relier facilement ces critères entre eux puisque  $\ddot{z}_{caisse}$  est la dérivée seconde de  $z_{caisse}$ , et puisque  $(z_{roue} - z_{sol})/z_{sol} = z_{roue}/z_{sol} - 1$ .

Ainsi les critères choisis par PSA ne sont pas décorrélés de ceux de la littérature.

De plus, contrairement au critère du confort en basse fréquences, précédent, on ne cherche pas spécialement à garder une bonne capacité de filtrage en hautes fréquences pour le rebond de roue et la trépidation. Cela est dû au fait que le modèle de simulation est très simple et ne représente pas fidèlement le comportement du système réel en hautes fréquences. En effet, celui-ci sera plus atténué que le modèle de simulation. On ne s'inquiète donc pas d'une détérioration de la capacité de filtrage de ces transferts ( $z_{roue}/z_{sol}$  et  $\ddot{z}_{caisse}/z_{sol}$ ) en hautes fréquences.

## 2.4.2 Critères de la littérature

A travers toutes les études sur la commande de suspensions automobiles, on peut dégager un certain nombre de critères caractérisant le confort ou la tenue de route des véhicules.

Sans en faire une revue exhaustive, nous présentons, rapidement ici, les idées essentielles de l'analyse du confort et de la tenue de route des véhicules automobiles.

Dans sa thèse Moreau (1995) fait référence à Verriest (1988), Bonnardel (1988) et Donati & Boulanger (1988) respectivement à propos du confort postural, de la modélisation du corps par des systèmes masse-ressort (cf. fig. 2.1) et à propos de la dispersion de la sensibilité du corps humain aux vibrations.

### 2.4.2.1 Confort

En général, le confort, souvent étudié par l'accélération, est un critère difficile à mesurer car tous les passagers n'ont pas la même sensibilité aux vibrations. La zone de sensibilité se situe environ entre une petite dizaine et une douzaine de hertz (Gissinger, 2001). Plusieurs recherches (Deusen, 1968; Lee & Pradko, 1968) ont été effectuées de façon à donner des limites aux variables représentant le confort.

Pour le confort des passagers, Wong (1993) donne une limite de l'amplitude du déplacement vertical de la caisse  $z_{caisse}$ , en citant (Janeway, 1965). Cette limite, représentée sur la figure 2.4, correspond à une excitation sinusoïdale du profil de la route et dépend de la zone de fréquence.

Dans la zone de 1 à 6Hz, le jerk (c.a.d. la dérivée de l'accélération) est limité par une constante égale à  $12.6m/s^3$ . Cela se traduit pour l'accélération par la limite suivante dépendant de la fréquence  $f$  :

$$12.6/(2\pi f) \text{ en } m/s^2$$

L'amplitude du déplacement de la caisse est limité par :

$$12.6/(2\pi f)^3 \text{ en } m$$

qui est par exemple de  $0.0508m = 12.6m.s^{-3}/(2\pi s^{-1})^3$  à 1Hz.

De 6 à 20Hz, l'accélération de la caisse  $\ddot{z}_{caisse}$  est limitée par une constante égale à  $0.33m/s^2$ . Notons que c'est généralement dans cette zone de fréquence, dans notre cas à 11.45Hz ( $\sim \sqrt{k_p/m_r}/2\pi$ ), que se situe le point invariant du gain du transfert entre le profil de la route et l'accélération de la caisse. Rappelons que ce point invariant ne dépend pas de la suspension du véhicule mais uniquement des deux masses  $m_c$ ,  $m_r$  et de la raideur du pneu  $k_p$ . Ainsi, pour un profil de route sinusoïdal dont l'amplitude est fixée, nous avons un point invariant de l'accélération de la caisse, et si ce point invariant dépasse la limite proposée, cette dernière ne sera pas respectée quelle que soit la suspension utilisée.

De 20 à 60Hz, la vitesse est limitée par une constante égale à  $2.7mm/s$ , ce qui correspond pour l'accélération à la limite suivante :

$$0.0027 * (2\pi f) \text{ en } m/s^2$$

Cependant cette limite concerne une vibration verticale qui n'est composée que d'une seule fréquence ce qui ne représente pas tout les profils de route possibles. De plus cette

limite ne dépend pas de la durée d'exposition. Enfin, les malaises ressentis à très basses fréquences ( $< 1Hz$ ), dus à la cinétose, ne sont pas pris en compte car la zone de fréquence étudiée est entre 1 et 60Hz.

Wong (1993) cite aussi un standard international ISO 2631 (ISO2631-1978, E) qui recommande de ne pas dépasser certaines limites d'accélération verticale  $\ddot{z}_{caisse}$ , longitudinale  $\ddot{x}_{caisse}$  et latérale  $\ddot{y}_{caisse}$  de la caisse. Ces limites définissent un confort et dépendent des fréquences des vibrations (de 1 à 80Hz) et de la durée d'exposition à ces vibrations (de 1mn à 8h). Ces limites concernent l'amplitude de la racine de la moyenne de la densité spectrale de l'accélération (verticale ou latérale) (rms : Root-Mean-Square). La moyenne se fait sur un tiers d'octave avec comme fréquence centrale  $f_c$ . L'accélération rms est donc

$$\sqrt{\int_{0.89f_c}^{1.12f_c} S_v(f)df}$$

où  $S_v$  est la densité spectrale de la variable étudiée, dans notre cas l'accélération verticale ou latérale.

D'après Wong (1993), la puissance absorbée est un autre critère, choisi par l'armée américaine, comme paramètre pour évaluer la réponse du corps humain aux vibrations (Lee & Pradko, 1968; Murphy et al., 1975). Cette puissance absorbée correspond au produit de la force et de la vitesse de la vibration transmise au passager. La limite utilisée est alors fixée à 6 Watts. La vitesse limite de confort correspond à la vitesse pour laquelle la moyenne de la puissance absorbée, sur le temps total de l'essai, atteint la limite des 6W.

#### 2.4.2.2 Tenue de route

Une bonne tenue de route permet une bonne conduite du véhicule. La tenue de route est caractérisée de la même façon pour les différents modèles de véhicule (quart, demi ou complet).

Comme le montre l'exemple donné au paragraphe 2.2.2, celle-ci passe par la minimisation de la composante dynamique de l'écrasement du pneu. Ainsi quel que soit le modèle de véhicule, on cherchera à annuler l'écart  $z_{roue} - z_{sol}$  entre le déplacement du sol et celui de la roue, et ceci pour chaque roue.

#### 2.4.2.3 Butée de suspension

Le problème des butées de suspension est identique pour les trois modèles de véhicules. Il est lié au fait que le débattement de la suspension est limité technologiquement. Pour le cas du modèle quart de véhicule à 2ddl, ce problème se traduit en termes de limitations du débattement  $z_{caisse} - z_{roue}$  de la suspension.

Le problème consiste à maintenir ce débattement dans des limites telles que les butées ne soient pas atteintes.

## 2.5 Critères pour le demi-véhicule

### 2.5.1 Confort

Dans le cas des modèles demi-véhicule de type essieu, le confort passe par la limitation de l'accélération des mouvements de la caisse à savoir l'accélération verticale  $\ddot{z}_{caisse}$  et celle de roulis  $\ddot{\theta}_{caisse}$ .

De la même manière, dans le cas des modèles demi-véhicule de type bicyclette, le confort passe par la limitation de l'accélération verticale  $\ddot{z}_{caisse}$  et celle de tangage  $\ddot{\phi}_{caisse}$ .

Les critères sont alors, sauf les variables considérées, similaire à ceux donnés au paragraphe 2.4.2.1.

### 2.5.2 Tenue de route

Une tenue de route idéale correspond à un écart nul entre le déplacement vertical de la roue et du sol et ceci pour chaque roue.

Ainsi pour un modèle de type bicyclette, on cherchera à minimiser ces écarts pour les roues avant ( $z_{roue_f} - z_{sol_f}$ ) et arrière ( $z_{roue_r} - z_{sol_r}$ ).

Pour un modèle de type essieu, nous avons deux solutions.

Dans le cas de deux roues indépendantes, on peut choisir de minimiser l'écart vertical pour les roues gauche ( $z_{roue_g} - z_{sol_g}$ ) et droite ( $z_{roue_d} - z_{sol_d}$ ).

Dans le cas d'un essieu monobloc, on peut choisir de minimiser l'écart vertical ( $z_{roue} - z_{sol}$ ) et angulaire ( $\theta_{roue} - \theta_{sol}$ ) entre l'essieu et le sol.

### 2.5.3 Butée de suspension

Comme pour la tenue de route, le débattement de la suspension est limité de façon différente selon le type de modèle demi-véhicule utilisé.

Dans le cas du modèle bicyclette, les roues avant et arrière étant indépendantes, le débattement vertical de la suspension avant ( $z_{caisse_f} - z_{roue_f}$ ) et arrière ( $z_{caisse_r} - z_{roue_r}$ ) est limité.

Dans le cas du modèle essieu, si les roues sont indépendantes, les débattements verticaux des roues gauche ( $z_{caisse_g} - z_{roue_g}$ ) et droite ( $z_{caisse_d} - z_{roue_d}$ ) sont limités. Si l'essieu est monobloc, les débattements verticaux ( $z_{caisse} - z_{roue}$ ) et angulaires ( $\theta_{caisse} - \theta_{roue}$ ) des suspensions peuvent être limités.

## 2.6 Critères pour le véhicule complet

### 2.6.1 Confort

Dans le cas d'un modèle complet de véhicule à 7ddl prenant en compte le mouvement vertical, le roulis et le tangage de la caisse, le confort du passager est obtenu par la limitation de l'accélération verticale ( $\ddot{z}_{caisse}$ ), de celle de roulis ( $\ddot{\theta}_{caisse}$ ) et de celle de tangage ( $\ddot{\phi}_{caisse}$ ).

Cependant, les limites fixées par la norme ISO 2631 (ISO2631-1978, E) concernent les accélérations verticales et horizontales, pas celles de roulis ou de tangage. Un moyen peut être de les comparer aux accélérations de référence, obtenues généralement pour la suspension passive.

### 2.6.2 Tenue de route

La tenue de route d'un modèle complet de véhicule est caractérisée par l'écrasement de chaque pneumatique.

Cet écrasement ne doit pas avoir de composante dynamique et l'on cherche donc à annuler l'écart entre le déplacement du sol et celui de la roue, ceci pour les quatre roues ( $z_{roue_i} - z_{sol_i}$  pour  $i = 1$  à 4).

### 2.6.3 Butée de suspension

De la même façon, le débattement de chaque suspension ( $z_{caisse_i} - z_{roue_i}$  pour  $i = 1$  à 4) sera limité afin de ne pas atteindre les butées de suspension.

## 2.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre des critères d'analyse de la performance des suspensions. Certains d'entre eux proviennent de la collaboration avec PSA, d'autres de la littérature. Ces critères ont été détaillés selon le modèle (1/4, 1/2, complet) considéré pour la suspensions.

Rappelons que le choix des critères et des spécifications est une étape très importante de la synthèse d'une loi de commande.

Pour résumer, on dispose de critères tels que les accélérations de la caisse pour le confort, les écrasements des pneus pour la tenue de route, les débattements des suspensions pour les contraintes mécaniques, le choix des capteurs et actionneurs pour le coût financier. Mais les spécifications associées ne sont pas toujours bien définies. D'autre part plus le modèle de véhicule est complexe (par exemple en prenant en compte les mouvements angulaires et leurs couplages) plus on manque de spécifications précises concernant les nouveaux mouvements pris en compte.

Cela entraînera donc plus d'itérations lors de la synthèse de lois de commande, car ces dernières requerront plus de paramètres de réglages pour répondre à l'augmentation du nombre de critères.

Enfin, la robustesse vis-a-vis des variations paramétriques est un critère important qui n'est pas toujours évident à prendre en compte lors de la synthèse de la commande.

Au chapitre suivant, nous allons donner un état de l'art des différents commandes de suspension de véhicule, et nous présenterons quelques rappels sur les méthodologies des commandes que nous appliquerons par la suite.

# Chapitre 3

## Rappels sur des méthodologies de commande

### 3.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre quelques rappels sur les différentes lois de commande mises en œuvre durant la thèse. Les applications sont détaillées dans les deux chapitres suivants.

Nous faisons tout d'abord un rapide tour d'horizon au paragraphe 3.2 de différentes commandes appliquées dans la littérature. Cette liste ne prétend pas être complète tant le nombre d'étude portant sur la commande des suspensions est élevé.

Puis nous présentons les méthodologies de synthèse de lois de commande génériques qui seront utilisées aux chapitres 4 et 5, avec dans l'ordre :

- la commande par placement de pôles, au paragraphe 3.3,
- la commande par retour d'état théorique pour résoudre le problème du découplage et du rejet de perturbations simultané, au paragraphe 3.4,
- la commande  $H_\infty$ , au paragraphe 3.5. Ayant travaillé principalement sur cette commande, nous détaillons successivement la formulation du problème  $H_\infty$ , sa résolution par les équations de Riccati ou par les LMI et le cas particulier du problème de sensibilité mixte.

Nous proposons ensuite, au paragraphe 3.6 quelques rappels sur le principe et l'utilisation de l'outil d'analyse de robustesse en stabilité et en performances qu'est la  $\mu$ -analyse.

Pour finir, nous présentons, au paragraphe 3.7 la commande Skyhook qui est spécifiques aux suspensions contrairement aux commandes précédentes.

### 3.2 État de l'art

Dans la littérature, on retrouve différents types de commandes utilisées pour le contrôle des suspensions ou d'autres éléments d'un véhicule automobile :

- les contrôleurs de type P, PI, PID

- la commande par placement de pôles
- la commande LQG optimale
- la commande résolvant le problème du rejet de perturbation
- la commande par logique floue
- la commande par réseaux de neurones
- la commande à horizon glissant
- la commande non linéaire
- la commande dite Skyhook
- la commande adaptative
- la commande  $H_\infty$
- la commande CRONE.

Outre notre contribution, voici quelques références de la littérature concernant ces différents types de commande. Nous reviendrons plus en détail sur certaines d'entre elles dans le chapitre suivant.

Placement de pôles :

-Richard et al. (1999) proposent une méthode par placement de pôles pour résoudre le problème de la commande des oscillations longitudinales d'un véhicule. L'approche est intéressante même si ce travail ne concerne pas les suspensions.

Commande LQG optimale :

-Thompson & Chaplin (1996) synthétisent un régulateur LQR pour la commande de suspensions actives d'un modèle quart de véhicule. La commande est ensuite testée sur le modèle non-linéaire de l'actionneur actif de la suspension.

-Elbeheiry et al. (1996) ont développé une commande LQG pour contrôler les suspensions d'un modèle complet de véhicule à 7ddl. Une comparaison est faite entre des suspensions passives, semi-actives et actives basées soit sur un retour d'état complet, soit sur une commande locale pour chaque suspension (quatre 1/4 de véhicule).

- Dans sa thèse sur la modélisation et la commande de véhicules automobiles, Ramirez-Mendoza (1997) utilise la commande LQG pour le contrôle d'un modèle de suspension d'un quart de véhicule à 2ddl prenant en compte l'amortissement du pneu.

Commande par retour d'état pour le rejet de perturbation :

-Prattichizzo et al. (1998) montrent que pour un modèle complet de véhicule équipé de suspensions actives, le rejet parfait de perturbation est toujours possible.

Commande par logique floue :

- Cherry & Jones (1995) appliquent les techniques de commandes par logique floue au contrôle d'un amortisseur continûment variable d'un système de suspension. Le modèle quart de véhicule utilisé n'est pas seulement formé d'éléments masse-ressort mais incorpore aussi des éléments tels que le triangle de suspension, etc...

-Titli & Boverie (1995) synthétisent un régulateur, composé de deux "sous-régulateurs" et d'un superviseur, à base de logique floue afin de contrôler un modèle quart de véhicule. Puis ils optimisent ce régulateur par une méthode de gradient. Pour finir, ils étudient la robustesse et l'adaptabilité d'un réseau de neurones reproduisant le comportement du régulateur par logique floue.

Régulation à l'aide de réseau de neurone :

- Chang & Wu (1997) contrôlent un modèle quart de véhicule à 2ddl à l'aide d'un régulateur basé sur un modèle biologique d'un membre humain tel qu'une jambe ou un bras.
- Watanabe & Sharp (1999) comparent les performances d'un régulateur PD et d'un régulateur à base de réseau de neurones. Ces deux régulateurs sont appliqués sur un modèle demi véhicule de type essieu avec des suspensions actives à géométrie variable.

Commande par horizon glissant :

- Hac (1995) découple selon les fréquences un modèle de suspension active d'un quart de véhicule à 2ddl en deux sous-systèmes correspondant l'un au mode lent de la caisse et l'autre au mode rapide de la roue. Pour chacun de ces sous-systèmes, il synthétise un régulateur à horizon glissant. Les performances de cet ensemble sont comparées à celles d'un régulateur à horizon glissant utilisant un modèle non découplé de quart de véhicule.
- Aa et al. (1997) testent une commande à horizon glissant sur une suspension semi-active d'un modèle quart de véhicule d'un camion. Le but est de minimiser l'accélération de la caisse sous des contraintes concernant le débattement maximal de la suspension et la force d'écrasement du pneu.
- Kitching et al. (1999) implémentent une loi de commande à horizon glissant, calculée à partir d'un modèle demi-véhicule de type bicyclette, sur la suspension arrière d'un camion. Un modèle prédictif est utilisé pour compenser le retard dû à l'amortisseur semi-actif.

Commande non-linéaire :

- Fialho & Balas (2000) utilisent des techniques de séquençement de gains pour synthétiser un correcteur non-linéaire qui, selon si l'écrasement de la suspension est proche de ses limites ou non, s'intéresse soit au débattement de la suspension, soit au confort du passager. La prise en compte de la tenue de route ainsi que l'utilisation d'une commande adaptative, sont discutées mais non traitées dans cet article.

Commande Skyhook :

- Emura et al. (1994) présentent la commande Skyhook appliquée à un amortisseur semi-actif d'une suspension d'un modèle quart de véhicule à 3ddl (la caisse, la roue et une masse supplémentaire entre la roue et la caisse). Différentes contraintes liées à l'amortisseur semi-actif sont prises en compte.
- Moline et al. (1994) comparent les comportements de modèles quart de véhicule équipés d'une suspension passive, d'une suspension de type Skyhook idéale ou approchée par un amortisseur semi-actif à deux lois ou par un amortisseur semi-actif continûment variable.
- Autran et al. (1995) présentent des familles de lois de commande Skyhook. Ces lois de commande utilisent des suspensions actives, des amortisseurs continûment variables ou bien à plusieurs lois, pour réguler un modèle quart de véhicule à 1ddl ou bien un modèle complet de véhicule à 3ddl (les mouvements des roues sont négligés).

Commande adaptative :

- Giua et al. (1999) proposent d'approcher le comportement d'une commande LQR avec contrainte sur la norme de la commande, par une famille de retour d'état constant. Chaque retour d'état constant correspond à un compromis entre performances et limitation de la commande. Le choix du retour d'état constant se fait en fonction de l'éloignement du sys-

tème par rapport à sa position d'origine. Ainsi, les performances sont privilégiées lorsque le système est proche de sa position d'équilibre, et dans le cas contraire, l'accent est mis sur la limitation de la commande. La synthèse des régulateurs se fait sur un modèle quart de véhicule avec un actionneur actif. Puis un amortisseur semi-actif est utilisé pour approcher au mieux le comportement de l'actionneur actif.

-Yu & Crolla (1998) utilisent une commande LQG pour commander la suspension active d'un modèle quart de véhicule à 2ddl. Les pondérations de cette commande LQG sont remises à jour pour permettre une adaptation aux variations du système.

-Fialho & Balas (1998) utilisent une méthode de variation linéaire de paramètres (LPV) afin de concevoir une suspension adaptative d'un modèle quart de véhicule. Cette suspension privilégie l'atténuation de l'accélération du châssis (le confort) ou bien l'atténuation du débattement de la suspension (contrainte matérielle) selon que ce débattement est proche ou non de ses limites. De plus, la frontière entre ces objectifs est déplacée en fonction de l'état de la route. Sur autoroute, le confort est privilégié sauf si le débattement est très proche de ses limites. Au contraire, sur une route cabossée, le débattement est pris en compte de façon plus progressive à mesure qu'il se rapproche de ses limites.

-Esmailzadeh & Fahimi (1997) utilisent une commande optimale adaptative pour contrôler la suspension active d'un modèle complet de véhicule à 7ddl.

Commande  $H_\infty$  :

-Yamashita et al. (1990) proposent un régulateur  $H_\infty$  permettant d'atténuer uniquement l'accélération verticale du châssis d'un modèle quart de véhicule. La robustesse vis-à-vis d'une variation de la masse du châssis est testée après coup.

-Yamashita et al. (1994) s'intéressent à la commande  $H_\infty$  d'un modèle complet de véhicule. Cette fois-ci, en plus des accélérations verticales et angulaires (tangage et roulis), les débattements verticaux et angulaires de la suspension sont pris en compte. Le but est d'obtenir des performances robustes vis-à-vis d'incertitudes en entrée du système. Cependant la tenue de route, qui est généralement estimée par l'écrasement des pneus, n'est pas prise en compte dans cette étude.

-Park & Kim (1999) utilisent ce type de commande pour contrôler un modèle complet de véhicule. Les résultats sont comparés avec ceux d'une commande LQG.

Commande CRONE :

-Moreau (1995) présente dans sa thèse la commande CRONE appliquée au contrôle de suspension d'un quart de suspension. Il fournit aussi un grand nombre de références sur la commande CRONE. D'autre part, des études plus récentes Moreau et al. (1999, 1998) s'intéressent respectivement à la commande CRONE d'un modèle demi-véhicule de type bicyclette, et à la comparaison des commandes CRONE et Skyhook.

Citons, de plus, le très bon état de l'art sur la commande des suspensions présenté par Hrovat (1997).

Enfin la thèse de Gay (2000), qui porte sur le contrôle global de châssis à l'aide de suspensions actives, fait appel au contrôle d'état standard qui est une méthodologie de conception de loi de commande utilisant une technique de commande sophistiquée qu'est la commande  $H_2$  (cf. (DeLarminat, 1993)). Les matrices de pondérations de la commande

$H_2$  sont obtenues à partir de paramètres de réglage de haut niveau.

Les applications des commandes  $H_\infty$ , Skyhook, découplantes et du rejet de perturbations, ont donné lieu dans cette thèse à plusieurs publications qui apparaissent aux chapitre 4 et 5.

Les paragraphes suivants sont consacrés à la présentation de quelques lois de commandes appliquées sur des modèles de suspension de véhicule dans le cadre de la thèse.

### 3.3 Le problème du placement de pôles

Il consiste à trouver un régulateur stable qui permet de choisir librement les pôles du système en boucle fermée.

La structure générale de la boucle fermée pour un régulateur à un ou à deux degrés de liberté (ddl) correspond au schéma donné respectivement par les figures 3.1 et 3.2.

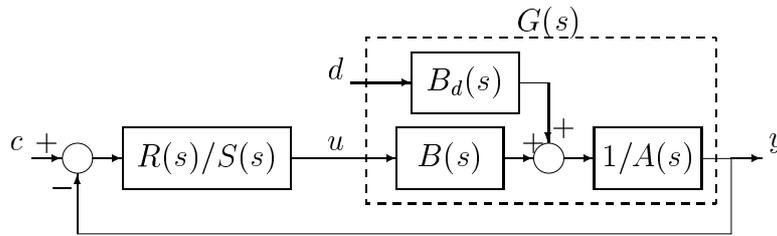


FIG. 3.1: Placement de pôles structure générale à 1ddl.

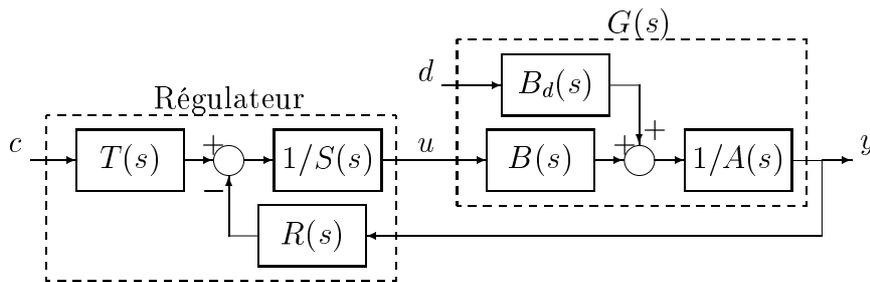


FIG. 3.2: Placement de pôles structure générale à 2ddl.

où  $u$  est la commande appliquée par le régulateur à 1 ou 2ddl au système à commander  $G(s)$ ,  $y$  est la sortie à réguler,  $c$  est la consigne et  $d$  la perturbation,  $A(s)$ ,  $B(s)$ ,  $B_d(s)$ ,  $R(s)$ ,  $S(s)$ ,  $T(s)$  sont des polynômes en  $s$ , de degrés respectifs  $n_a$ ,  $n_b$ ,  $n_{bd}$ ,  $n_r$ ,  $n_s$ ,  $n_t$ .

Dans la suite nous ne présenterons que le cas du régulateur à 2ddl. Dans ce cas, la sortie  $y$  est donnée en boucle fermée par :

$$y = \frac{B(s)T(s)}{A(s)S(s) + B(s)R(s)}c + \frac{B_d(s)S(s)}{A(s)S(s) + B(s)R(s)}d \quad (3.1)$$

Le problème du placement de pôles consiste, étant donné un polynôme  $P(s)$  stable, à trouver des polynômes  $S(s)$  et  $R(s)$  tels que le dénominateur de la fonction de transfert de la boucle fermée  $A(s)S(s) + B(s)R(s)$  soit égale au polynôme  $P(s)$  dont on choisit librement les racines pour imposer la dynamique désirée en boucle fermée.

$$A(s)S(s) + B(s)R(s) = P(s) \quad (3.2)$$

Cette équation est appelée équation diophantienne ou encore équation de Bezout.

Si on ajoute comme objectif le rejet asymptotique de perturbation constante, il est nécessaire que la fonction de transfert entre la perturbation  $d$  et la sortie  $y$  soit nulle à la fréquence nulle :

$$\begin{aligned} \frac{B_d(0)S(0)}{A(0)S(0) + B(0)R(0)} &= 0 \\ \text{soit } S(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Cela s'exprime par le choix d'un intégrateur pour le polynôme  $S(s)$  :

$$S(s) = sS'(s) \quad (3.4)$$

De plus, pour faire de la poursuite de consigne il est nécessaire que le gain statique de la fonction de transfert entre la consigne  $c$  et la sortie  $y$  soit unitaire :

$$\frac{B(0)T(0)}{A(0)S(0) + B(0)R(0)} = 1 \quad (3.5)$$

Puisque que l'on a déjà  $S(0) = 0$  on obtient la condition suivante :

$$T(0) = R(0) \quad (3.6)$$

Or la fonction de transfert entre la consigne  $c$  et la sortie  $y$  est :

$$\frac{B(s)T(s)}{A(s)S(s) + B(s)R(s)} = \frac{B(s)T(s)}{P(s)} \quad (3.7)$$

où le polynôme  $T(s)$  est choisi librement. Cependant, le numérateur n'est pas toujours libre car il n'est pas possible, pour les systèmes avec des zéros instables, de compenser  $B(s)$  par  $P(s)$  puisque  $P(s)$  doit être stable. Il est cependant possible de décomposer  $B(s)$  :

$$B(s) = B^+(s)B^-(s) \quad (3.8)$$

où  $B^+(s)$  et  $B^-(s)$  regroupent respectivement les zéros instables et stables de  $B(s)$ . Il est ainsi possible de choisir  $P(s)$  et  $T(s)$  tels que :

$$P(s) = B^-(s)T(s)P'(s) \quad (3.9)$$

Ainsi la fonction de transfert entre la consigne  $c$  et la sortie  $y$  est :

$$\frac{B^+(s)}{P'(s)} \quad (3.10)$$

De même, en régulation, le numérateur  $B_d(s)S(s)$  de la fonction de transfert entre la perturbation  $d$  et la sortie  $y$  n'est pas libre. En effet, d'une part le numérateur  $B_d(s)$  peut avoir des zéros instables et d'autre part le polynôme  $S(s)$  résulte de la solution de l'équation de bezout.

Le choix des pôles définissant  $P(s)$  (ou  $P'(s)$ ) est donc délicat et l'influence de  $P(s)$  sur le compromis performance-robustesse-sollicitation de la commande-sensibilité aux bruits reste à éclaircir.

Parmi les études connues de ce problème, Astrom & Wittenmark (1997) donnent des conseils pertinents pour placer les pôles. DeLarminat (1993) présente une stratégie de placement de pôles robuste à l'aide de deux paramètres de synthèse (horizon de commande et horizon de filtrage).

Étudions maintenant la résolution de l'équation de Bezout d'un point de vue mathématique. L'équation (3.2) a une solution si et seulement si le plus grand commun diviseur de  $A(s)$  et de  $B(s)$  est un facteur de  $P(s)$  DeLarminat (1993).

Le processus  $\frac{B(s)}{A(s)}$  et le régulateur  $\frac{R(s)}{S(s)}$  étant propres, le degré de  $P(s) = A(s)S(s) + B(s)R(s)$  est donc déterminé par celui du produit  $A(s)S(s)$  :

$$\deg(P(s)) = \deg(A(s)) + \deg(S(s)) \quad (3.11)$$

Il est alors possible d'aborder la résolution de l'équation de Bezout (3.2) comme la résolution d'un système d'équations linéaires. Le nombre d'équations est de :

$$\deg(P(s)) + 1 \quad (3.12)$$

Pour qu'il existe une solution à l'équation de Bezout quel que soit  $P(s)$ , il est nécessaire d'avoir au moins autant de degrés de liberté que d'équations. On dispose de :

$$\begin{aligned} &\deg(R(s)) + 1 \text{ coefficients pour } R(s) \\ &\deg(S(s)) + 1 \text{ coefficients pour } S(s) \\ &-1 \text{ en raison de la contrainte } S(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Le nombre total de degrés de liberté doit être supérieur ou égal au nombre d'équations :

$$\begin{aligned} &\deg(R(s)) + \deg(S(s)) + 1 \geq \deg(P(s)) + 1 = \deg(A(s)) + \deg(S(s)) + 1 \\ \text{soit} & \quad \deg(R(s)) \geq \deg(A(s)) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Si l'on veut que la solution du système soit unique il faut :

$$\deg(R(s)) = \deg(A(s)) \quad (3.15)$$

Ainsi pour un régulateur propre :

$$\deg(S(s)) = \deg(R(s)) = \deg(A(s)) \quad (3.16)$$

$$\deg(P(s)) = 2\deg(A(s)) \quad (3.17)$$

et pour un régulateur strictement propre :

$$\deg(S(s)) = \deg(A(s)) + 1 \quad (3.18)$$

$$\deg(R(s)) = \deg(A(s)) \quad (3.19)$$

$$\deg(P(s)) = 2\deg(A(s)) + 1 \quad (3.20)$$

Soit  $n$  le degré de  $A(s)$ . Dans le cas d'un régulateur strictement propre on obtient :

$$\begin{aligned} A(s) &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0 \\ B(s) &= b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0 \\ S(s) &= s_{n+1}s^{n+1} + s_n s^n + \dots + s_1 s \quad (s_0 = S(0) = 0) \\ R(s) &= r_n s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \dots + r_0 \\ P(s) &= p_{2n+1}s^{2n+1} + p_{2n}s^{2n} + \dots + p_0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$(3.22)$$

L'égalité des coefficients des puissance de  $s$  dans chacun des deux membres de l'équation de bezout se traduit par le système de Sylvester suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \ddots & \vdots & b_n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & b_{m-1} & b_m & \ddots & \vdots \\ a_0 & & \ddots & 1 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & a_0 & & a_{n-1} & b_0 & & \ddots & b_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & b_0 & & b_{n-1} \\ \vdots & & \ddots & a_0 & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{s_1}{r_n} \\ \vdots \\ \vdots \\ r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{2n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{p_{n+1}}{p_n} \\ \vdots \\ \vdots \\ p_0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Ce système possède une solution si et seulement si  $A(s)$  et  $B(s)$  sont premiers entre eux.

Dans le cas d'une suspension, il n'y a pas de consigne à suivre pour la position de la caisse (voir fig.3.3). Ainsi il n'est pas possible d'avoir un régulateur à 2ddl. De plus, La perturbation correspond au profil de la route. Cependant on ne souhaite pas filtrer totalement les perturbations. En effet, on verra que la position de la caisse doit suivre les basses fréquences du profil de la route (par exemple un trottoir). Dans ce cas, on cherche à obtenir une fonction de transfert entre le profil de la route ( $z_{sol}$ ) et le déplacement de la caisse ( $z_{caisse}$ ) qui corresponde à un filtre passe-bas.

$$T_{yd}(s) = \frac{B_d(s)S(s)}{P(s)}$$

La difficulté du réglage de ce correcteur  $K(s) = R(s)/S(s)$  réside dans le fait que l'on ne maîtrise pas le numérateur puisque  $S(s)$  apparaît au numérateur et est la solution de l'équation de Bezout  $P(s) = A(s)S(s) + B(s)R(s)$  (voir 3.1).

Cette méthode est illustrée au chapitre 4.

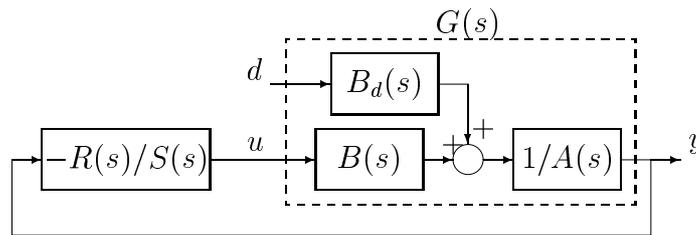


FIG. 3.3: Régulateur à 1ddl sans consigne.

### 3.4 Découplage et rejet des perturbations simultanés

Nous présentons ici brièvement quelques résultats principaux sur ce problème de commande bien connu pour les systèmes linéaires. Nous verrons dans le chapitre 5 que nous nous sommes intéressés à ce problème, dans le cadre des suspensions du véhicule complet, dans le but de découpler le mouvement vertical, le roulis et le tangage de la caisse du véhicule tout en minimisant l'influence du profil du sol sous chacune des quatre roues.

Dans un premier temps traitons le problème du découplage ligne par ligne. Dans ce cas, le système considéré n'est pas perturbé. Le but de ce problème est de faire en sorte que chaque sortie  $y_i$  puisse être pilotée indépendamment des autres sorties par une entrée de consigne correspondante  $v_i$ .

Le problème de découplage ligne par ligne peut être résolu de différentes façons. Une approche géométrique est utilisée par Descusse et al. (1988), tandis que Descusse & Dion (1982) et Dion & Commault (1993) résolvent ce problème par une approche structurale. Nous avons quant à nous utilisé une approche matricielle qui provient de (Falb & Wolovich, 1967), et qui permet de calculer explicitement une loi de commande solution du problème.

Considérons maintenant le problème du rejet de perturbations. L'objectif est d'annuler les effets des perturbations sur les sorties.

Ce problème est résolu par une approche "matrice de transfert" par Commault et al. (1984). Une approche par les graphes est utilisée par van der Woude (1993) et Commault et al. (1993). Malabre & del Muro Cuellar (1996) utilisent une approche structurale pour résoudre ce problème tandis que Wonham (1974) donne des conditions géométriques de résolution du problème.

Dans le cas du problème simultané du découplage ligne par ligne et du rejet de perturbations, Commault et al. (1994) et Malabre & Martinez-Garcia (1995) proposent une approche, respectivement structurale ou géométrique. Cependant ces contributions n'apportent que des conditions nécessaires et suffisantes pour la solvabilité de ce problème de découplage et de rejet simultané. Aucune méthode de calcul permettant de trouver les solutions de ce problème n'est présentée.

L'approche que nous avons adoptée (voir chapitre 5) pour résoudre le problème de découplage et de rejet simultané, consiste à résoudre tout d'abord le problème du découplage ligne par ligne. Une loi de commande assurant le rejet de perturbations, doit alors être trouvée parmi l'ensemble des solutions du découplage ligne par ligne.

L'objectif est, rappelons-le, d'annuler les effets des perturbations sur les sorties et, dans le même temps, de faire en sorte que chaque sortie soit commandée, indépendamment des autres sorties, par une seule nouvelle entrée  $v_i$ .

Considérons le système stationnaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ed \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.24)$$

où l'état ( $x$ ) est un vecteur de dimension  $n$ , les entrées de commande ( $u$ ) un vecteur de dimension  $m$ , les entrées de perturbations ( $d$ ) un vecteur de dimension  $q$  et les sorties ( $y$ ) un vecteur de dimension  $m$ . Il est nécessaire d'avoir au moins autant d'entrées de commande  $u$  que de sorties à découpler  $y$ . Les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $E$  sont respectivement de dimension  $n \times n$ ,  $m \times n$ ,  $n \times m$  et  $q \times n$ .

La loi de commande considérée est un retour d'état statique régulier défini par :

$$u = Fx + Gv + Hd \quad (3.25)$$

où  $G$  est une matrice carrée non-singulière.

Notons que lorsque les perturbations ne sont pas mesurables, on considère  $H$  nulle.

Le système bouclé est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BF)x + BGv + (E + BH)d \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.26)$$

où les nouvelles entrées de commande  $v$  sont regroupées dans un vecteur de dimension  $m$ .

Le problème simultané du découplage et du rejet de perturbations consiste à trouver une loi de commande (3.25) telle que la matrice de transfert du système en boucle fermée soit :

$$\begin{aligned} T &= [C(sI - A - BF)^{-1}BG, \dots \\ &\quad C(sI - A - BF)^{-1}(E + BH)] \\ &= [diag(w_i(s)), 0] \end{aligned} \quad (3.27)$$

où  $w_i(s)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sont des fonctions de transfert scalaires.

Pour que le système découplé soit non-dégénéré, il est nécessaire d'avoir :  $w_i(s) \neq 0$  pour tout  $i$ .

Une méthode pour obtenir une loi de commande (3.25) qui découple le système (3.24) est donnée par Falb & Wolovich (1967) (dans ce cas  $H = 0$ ). Soit  $n_i$  l'ordre du zéro à l'infini de la ligne  $i$ , défini par :

$$\begin{aligned} n_i &= \min \{j : C_i A^{j-1} B \neq 0, j = 0, 1, \dots, n-1\} \\ n_i &= n \quad \text{si } C_i A^{j-1} B = 0 \quad \text{pour tout } j \end{aligned} \quad (3.28)$$

Soit  $D^*$  la matrice définie ligne par ligne par

$$D_i^* = C_i A^{n_i-1} B \quad i = 1, \dots, m \quad (3.29)$$

Le problème du découplage ligne par ligne est alors résolu dans le théorème suivant.

**Théorème 1** (Falb & Wolovich, 1967) *Soit un système linéaire (3.24) sans perturbations. Il existe une paire de matrices  $F$  et  $G$  telles que le système (3.26) est découplable ligne par ligne, si et seulement si*

$$\det D^* \neq 0 \quad (3.30)$$

□

L'ensemble des lois de commande qui découplent ce système est alors donné par

$$\begin{aligned} F &= -(D^*)^{-1} (A^* + A^{**}) \\ G &= (D^*)^{-1} L \end{aligned} \quad (3.31)$$

où  $A^*$  et  $A^{**}$  sont des matrices définies, ligne par ligne, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A_i^* &= C_i A_i^n \\ A_i^{**} &= \sum_{j=0}^{n_i-1} e_{i,j} C_i A_i^j \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.32)$$

et

$$L = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \quad (3.33)$$

où  $\lambda_i$  et  $e_{i,j}$  sont des paramètres réels.

Dans ce cas, la fonction de transfert  $w_i(s)$  entre la  $i^{\text{ème}}$  nouvelle entrée de commande et la  $i^{\text{ème}}$  sortie, est :

$$w_i(s) = \frac{\lambda_i}{s^{n_i} + \sum_{j=0}^{n_i-1} e_{i,j} s^j} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.34)$$

Les matrices  $F$  et  $G$  sont alors fixées par le choix des paramètres  $\lambda_i$  et  $e_{i,j}$ .

Pour le problème de rejet des perturbations, la matrice  $H$  doit être choisie de façon à annuler, si possible, la fonction de transfert entre les perturbations et les sorties.

## 3.5 Commande $H_\infty$

D'après Duc & Font (1998), la commande  $H_\infty$  "est née d'essais de prise en compte a priori d'objectifs de robustesse lors de la synthèse. (...) Elle permet de modéliser différents transferts du système asservi, de garantir des marges de stabilité, et d'assurer la robustesse aux dynamiques négligées, par un retour dynamique de sortie."

Rappelons que la norme  $H_\infty$  d'une matrice de transfert d'un système, correspond au pire cas de l'amplification des signaux d'entrée, c'est à dire le cas où l'amplification est maximale.

Le principal avantage de la commande  $H_\infty$  est que l'on peut spécifier dans le domaine fréquentiel d'une part le niveau des incertitudes du modèle et d'autre part le gain du signal entre les entrées de perturbations et les sorties contrôlées.

De plus, la théorie  $H_\infty$  est appropriée aussi bien pour les systèmes mono-entrée mono-sortie (SISO) que pour les systèmes multi-entrées multi-sorties (MIMO).

La première méthode de résolution du problème  $H_\infty$  standard fait appel aux équations de Riccati. Cette méthode, aussi connue sous le nom d'algorithme de Glover-Doyle, est apparue à la fin des années 80 (Glover & Doyle, 1988; Doyle et al., 1989). La synthèse en temps discret a été envisagée notamment par Limebeer et al. (1989); Iglesias & Glover

(1991) ou encore Stoorvogel (1992).

Plus récemment, la synthèse du problème  $H_\infty$  standard par inégalités matricielles affines (LMI) est présenté par Iwasaki & Skelton (1994) et Gahinet & Apkarian (1994). Cette méthode est plus générale dans la mesure où certaines hypothèses, nécessaires à la résolution par les équations de Riccati, sont relaxées.

De nombreux détails sur la méthodologie de la commande  $H_\infty$  peuvent être trouvés dans l'article de Doyle et al. (1989) ou les livres (Skogestad & Postlethwaite, 1996; Zhou, 1998) ou encore (Duc & Font, 1998). En particulier, Zhou et al. (1996) proposent un historique détaillé de la commande  $H_\infty$ .

Nous présentons tout d'abord la formulation de problème  $H_\infty$  standard, puis sa résolution par les équations de Riccati et par les LMI.

### 3.5.1 Formulation du problème $H_\infty$

Toute méthodologie de commande avancée consiste à trouver un régulateur  $K(s)$  pour un système de telle sorte que le système en boucle fermée ait de bonnes propriétés de performances et de robustesse.

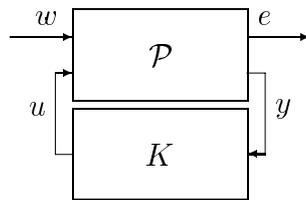


FIG. 3.4: Problème standard

Tout problème de commande peut ainsi être reformulé comme sur la figure 3.4 où  $\mathcal{P}(s)$  est un système linéaire représentant le transfert entre les entrées (extérieures et de commande) du système et les sorties (contrôlées et mesurées) :

$$\begin{pmatrix} e \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11}(s) & \mathcal{P}_{12}(s) \\ \mathcal{P}_{21}(s) & \mathcal{P}_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

N'importe quelle méthodologie de commande consiste alors à trouver un régulateur  $K(s)$  pour un système généralisé  $\mathcal{P}(s)$  de telle sorte que, à l'aide des informations données par la mesure  $y$ , la commande  $u$  compense l'influence des entrées exogènes  $w$  sur les sorties à commander  $e$ , en minimisant la norme du transfert en boucle fermée entre les entrées exogènes ( $w$ ) et les sorties à commander ( $e$ ) (voir figure 3.4).

D'un point de vue plus mathématique, le problème de commande  $H_\infty$  sous-optimal est de concevoir un régulateur qui stabilise de manière interne le système en boucle fermée et qui assure :

$$\|T_{ew}(s)\|_\infty \leq \gamma \quad (3.36)$$

où  $\gamma$  est un niveau d'atténuation prédéfini et  $T_{ew}(s)$  est la matrice de transfert en boucle fermée entre  $w$  et  $e$  définie par :

$$T_{ew}(s) := \mathcal{P}_{12}(s)K(s)(I - \mathcal{P}_{22}(s)K(s))^{-1}\mathcal{P}_{21}(s) + \mathcal{P}_{11}(s) \quad (3.37)$$

Un moyen usuel de résoudre ce problème de commande  $H_\infty$  est fondé sur la résolution des équations de Riccati. Cela aboutit à la synthèse d'une loi de commande  $u$  qui résout le problème sous-optimal (3.36). Le problème  $H_\infty$  optimal correspond à la minimisation de  $\gamma$ . Cette valeur minimale, notée  $\gamma_{opt}$ , peut être approchée par dichotomie comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

Dans la pratique, le système généralisé  $\mathcal{P}$  est en fait constitué du système étudié  $G(s)$  et des pondérations  $W_w(s)$  et  $W_e(s)$  associées respectivement aux entrées exogènes  $w$  et aux sorties commandées  $e$ , représentant les spécifications de performance.

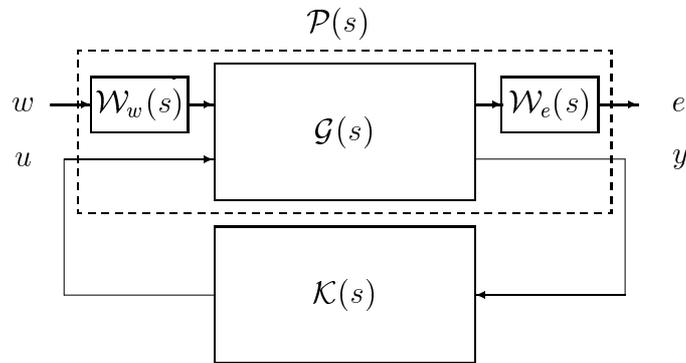


FIG. 3.5: Problème standard avec pondérations

Ces pondérations fréquentielles permettent de privilégier certains transferts pour certains domaines fréquentiels. Il est ainsi possible d'exprimer des gabarits fréquentiels, équivalant à l'inverse des pondérations fréquentielles, pour les différents transferts étudiés. Un cas particulier est celui où les transferts étudiés sont les fonctions de sensibilité usuelles. L'utilisation des pondérations permet de fixer un gabarit pour ces fonctions de sensibilité, et donc de spécifier les performances du système comme le rejet des perturbations et du bruit de mesure, et le suivi de consigne (voir § 3.5.4).

L'inconvénient majeur de la commande  $H_\infty$  est en général la taille du régulateur obtenu, dont l'ordre correspond à celui du système étudié augmenté des pondérations et des modèles des perturbations.

Un moyen de pallier cet inconvénient est proposé par Valentin-Charbonnel (1998), où une méthode de synthèse  $H_\infty$  avec contrainte d'ordre sur le régulateur est présentée.

La partie suivante présente la résolution du problème  $H_\infty$  standard par les équations de Riccati. Quelques éléments sont ensuite donnés pour la résolution par LMI. Nous terminons par le problème de sensibilité mixte, sous-cas du problème  $H_\infty$ . Il permet de gérer les compromis des objectifs de performances par une analyse fréquentielle des fonctions de sensibilité.

### 3.5.2 Résolution du problème $H_\infty$ standard par Riccati

Dans ce paragraphe nous allons rappeler brièvement les deux théorèmes qui résolvent ce problème. Considérons le problème standard  $\mathcal{P}$  donné par :

$$\mathcal{P} \begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ e &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{cases} \quad (3.38)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ ,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $e \in \mathbb{R}^{n_e}$  et  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ . Les matrices  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{21}$  et  $D_{22}$  sont de dimensions appropriées.

Considérons les matrices symétriques  $P = P^T$  et  $Q = Q^T$  ayant les mêmes dimensions que la matrice  $A$  et notons

$$X = Ric \left( \begin{array}{cc} A & -P \\ -Q & -A^T \end{array} \right) \quad (3.39)$$

la solution, si elle existe, de l'équation de Riccati :

$$XA + A^T X - XPX + Q = 0 \quad (3.40)$$

de telle sorte que les valeurs singulières de  $A - PX$  ont une partie réelle strictement négative.

Pour la résolution du problème  $H_\infty$ , les hypothèses usuelles suivantes sont requises (Zhou, 1998) :

**H1**  $(A, B_2)$  est stabilisable et  $(C_2, A)$  est détectable.

**H2**  $\text{rang}(D_{12}) = n_u$  et  $\text{rang}(D_{21}) = n_y$

**H3**  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ ,  $\text{rang} \left( \begin{array}{cc} A - j\omega I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{array} \right) = n + n_u$

**H4**  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ ,  $\text{rang} \left( \begin{array}{cc} A - j\omega I_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{array} \right) = n + n_y$

H1 est l'hypothèse classique de toute méthode de synthèse utilisant les variables d'état : elle est nécessaire pour obtenir la stabilité du système bouclé.

H2 est une condition suffisante pour que la matrice de transfert du correcteur soit propre.

H3 entraîne que la matrice de transfert entre les entrées de commandes et les sorties à réguler n'a pas de zéros sur l'axe imaginaire (Cependant la réciproque n'est pas vrai si la représentation d'état n'est pas minimale).

De même pour H4 et la matrice de transfert entre les entrées exogènes et les sorties mesurées.

**Remarque 3** *Contrairement à l'hypothèse H1, qui est nécessaire, les hypothèses H2, H3 et H4 sont propres à cette méthode de résolution.*

Le théorème suivant donne les conditions nécessaires et suffisantes pour résoudre le problème de commande  $H_\infty$ . Ces conditions correspondent à un cas simplifié pour lequel les formules sont plus simples. Cependant, ce cas n'est restrictif et des formules plus générales sont données par Zhou et al. (1996) et Glover & Doyle (1988).

**Théorème 2** (Zhou, 1998; Skogestad & Postlethwaite, 1996) *Sous les hypothèses H1–H4 et les conditions*

$$\begin{aligned} D_{11} &= 0 & D_{12}^T(C_1 \ D_{12}) &= (0 \ I_{n_u}) \\ D_{22} &= 0 & \begin{pmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{pmatrix} D_{21}^T &= \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n_y} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.41)$$

le problème de commande  $H_\infty$  a une solution si et seulement si les cinq conditions suivantes sont remplies :

- i**  $H_\infty = \begin{pmatrix} A & \gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T \\ -C_1C_1^T & -A^T \end{pmatrix}$  n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.
- ii** il existe une matrice  $X_\infty = Ric(H_\infty) \geq 0$
- iii**  $J_\infty = \begin{pmatrix} A^T & \gamma^{-2}C_1^TC_1 - C_2^TC_2 \\ -B_1B_1^T & -A \end{pmatrix}$  n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.
- iv** il existe une matrice  $Y_\infty = Ric(J_\infty) \geq 0$
- v**  $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$

où  $\rho()$  représente le module la valeur propre maximale.

Le théorème suivant permet, alors, de calculer la solution du problème de commande  $H_\infty$ .

**Théorème 3** (Zhou, 1998) *Sous les conditions du théorème 2, un régulateur  $K(s)$  stabilisant le système et satisfaisant  $\|F_l(P(s), K(s))\|_\infty < \gamma$  est donné par :*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_c(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_2^T \\ -B_2^T X_\infty & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{A}_\infty &= A + \gamma^{-2}B_1B_1^T X_\infty - B_2B_2^T X_\infty - Z_\infty Y_\infty C_2^T C_2 \\ Z_\infty &= (I_n - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1} \end{aligned} \quad (3.43)$$

La première étape de cette méthode de synthèse d'une solution pour le problème de commande  $H_\infty$  est de tester la solvabilité de ce problème en utilisant le théorème 2 de façon à estimer la valeur minimale du niveau d'atténuation  $\gamma$ . Cela se fait en utilisant l'algorithme de dichotomie. La deuxième étape est de calculer le régulateur central en utilisant le théorème 3 et la valeur  $\gamma$  obtenue précédemment.

### 3.5.3 Résolution du problème $H_\infty$ standard par inégalités linéaires matricielles (LMI)

L'utilisation des inégalités matricielles affines pour résoudre le problème  $H_\infty$  standard permet de se passer des hypothèses H2 à H4 (l'hypothèse H1 reste bien sûr nécessaire). De plus, la valeur optimale  $\gamma_{opt}$  peut être recherchée directement sans passer par une procédure itérative comme précédemment.

**Théorème 4** *Le problème  $H_\infty$  sous-optimal admet une solution si et seulement si il existe deux matrices symétriques  $R$  et  $S$  de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  satisfaisant le système LMI suivant :*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_1^T & B_1 \\ C_1 R & -\gamma I_{n_e} & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.44)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_S & 0 \\ 0 & I_{n_e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & SB_1 & C_1^T \\ B_1^T S & -\gamma I_{n_w} & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I_{n_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_S & 0 \\ 0 & I_{n_e} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.45)$$

$$\begin{bmatrix} R & I_n \\ I_n & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.46)$$

où  $\mathcal{N}_R$  et  $\mathcal{N}_S$  constituent des bases des noyaux de  $\begin{bmatrix} B_2^T & D_{12}^T \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$  respectivement.

Ces trois inégalités sont affines en les variables  $R$ ,  $S$  et  $\gamma$ . Le niveau  $H_\infty$  optimal noté  $\gamma_{opt}$  est donc solution du problème d'optimisation suivant :

$$\left[ \min_{\gamma, R=R^T, S=S^T} \gamma \right]$$

sous les contraintes (3.44) à (3.46) qui est un problème de minimisation d'un objectif linéaire sous contraintes LMI.

Les correcteurs solutions du problème  $H_\infty$  standard sont obtenus à partir des solutions  $R$  et  $S$  du problème d'optimisation précédent (Gahinet & Apkarian, 1994; Iwasaki & Skelton, 1994; Valentin-Charbonnel, 1998).

Ce problème  $H_\infty$  formulé par les LMI est plus complexe à résoudre que celui avec les équations de Riccati. Cependant, l'utilisation des LMI permet de prendre en compte d'autres contraintes comme des contraintes sur l'ordre du régulateur à obtenir (Valentin-Charbonnel, 1998), des contraintes de norme  $H_2$ , placement de pôles, ... . Ces problèmes multi-contraintes n'ont pas de solutions analytiques mais, grâce au formalisme LMI, ils peuvent être abordés par des méthodes d'optimisation convexe.

### 3.5.4 Le problème de sensibilité mixte

Dans ce paragraphe nous présentons le problème de sensibilité mixte qui est un cas particulier du problème de commande  $H_\infty$ .

La figure 3.6 représente la structure du procédé ( $G(s)$ ) et de son régulateur ( $K(s)$ ).  $u_p$  représente les entrées de commande,  $y$  les sorties,  $r$  les références,  $n$  les bruits dus aux mesures et  $d_y$  les perturbations agissant sur les sorties contrôlées. Dans ce cas, les sorties contrôlées sont toutes supposées mesurables ce qui n'est pas toujours le cas en pratique.

Définissons tout d'abord les fonctions de sensibilité usuelles :

$$\begin{cases} S_y = (I + GK)^{-1} \\ T_y = (I + GK)^{-1} GK \end{cases} \quad \begin{cases} S_u = (I + KG)^{-1} \\ T_u = (I + KG)^{-1} KG \end{cases} \quad (3.47)$$

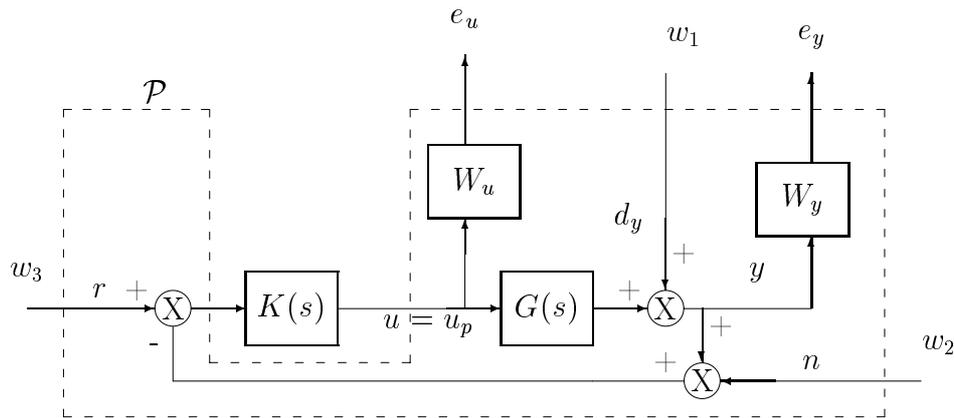


FIG. 3.6: Problème de sensibilité mixte

Nous avons alors les fonctions de transfert en boucle fermée :

$$y = S_y d_y - T_y n + T_y r \quad (3.48)$$

$$u_p = -K S_y d_y - K S_y n + K S_y r \quad (3.49)$$

Déterminons le problème  $H_\infty$  associé à la figure 3.6. En effet, en considérant la forme standard  $\mathcal{P}(s)$  du modèle du système  $G(s)$ , le problème de commande  $H_\infty$  (3.36, 3.37) consiste à trouver un régulateur  $K(s)$  tel que le système en boucle fermée soit stable et que :

$$\left\| \begin{array}{ccc} W_y S_y & W_y T_y & W_y T_y \\ W_u K S_y & W_u K S_y & W_u K S_y \end{array} \right\|_\infty \leq \gamma \quad (3.50)$$

Ce problème est un problème de sensibilité mixte dans le sens où on veut minimiser la norme de plusieurs fonctions de sensibilité. Il permet de gérer les objectifs de performances par une analyse fréquentielle des fonctions de sensibilité. Ainsi le rejet des perturbations ( $d_y$ ) implique que les fonctions de sensibilité  $S_y$  et  $K S_y$  soient faibles. Pour un bon rejet des bruits de mesure ( $n$ ), les fonctions  $T_y$  et  $K S_y$  doivent être faibles. Enfin si le but est que la sortie ( $y$ ) suive la référence ( $r$ ), la fonction  $T_y$  doit être égale à la matrice identité.

Notons qu'en pratique, un problème de sensibilité mixte simplifié est souvent considéré, comme par exemple :

$$\left\| \begin{array}{c} W_y S_y \\ W_u K S_y \end{array} \right\|_\infty \leq \gamma \quad (3.51)$$

qui permet de prendre en compte les objectifs de performances du système en boucle fermée ainsi que les contraintes liées aux actionneurs.

Cependant, ces buts sont à atteindre pour des domaines de fréquences différents. Le choix des pondérations se fait alors d'une part à partir des spécifications de performance sur les fonctions de sensibilité et d'autre part à partir des limitations de performances. La relation la plus connue concernant les limitations des performances est la suivante :

$$S_y(jw) + T_y(jw) = 1 \quad \forall w \in \mathbb{R} \quad (3.52)$$

ainsi

$$\|S_y(jw)\|_\infty + \|T_y(jw)\|_\infty \geq 1 \quad \forall w \in \mathbb{R} \quad (3.53)$$

Il est donc impossible, pour une fréquence  $w_0$  donnée, d'avoir  $\|S_y(jw_0)\|_\infty \ll 1$  et  $\|T_y(jw_0)\|_\infty \ll 1$

Cela implique, en terme de performances, qu'il n'est pas possible d'obtenir un bon rejet des perturbations et une bonne atténuation des bruits de mesure dans la même bande de fréquence. Cette relation amène au choix classique des objectifs de commande :

- Le rejet des perturbations ( $\|S_y(jw)\|_\infty \ll 1$ ) et le suivi de référence ( $\|T_y(jw)\|_\infty \simeq 1$ ) en basses fréquences où le gain de la boucle fermée est élevé

$$\|GK(jw)\|_\infty \gg 1 \quad \forall w \in [0, w_1] \quad (3.54)$$

- L'atténuation des bruits de mesure ( $\|T_y(jw)\|_\infty \ll 1$  et  $\|S_y(jw)\|_\infty \simeq 1$ ) en hautes fréquences où le gain de la boucle fermée est faible

$$\|GK(jw)\|_\infty \ll 1 \quad \forall w \in [w_2, \infty] \quad (3.55)$$

avec  $w_2 > w_1$ .

De plus, on demande en général que le gain maximal de  $\|KS_y(jw)\|$  soit limité par le coût de la commande et les saturations de l'actionneur.

De la même façon, le gain maximal de  $\|S_y(jw)\|$  est limité afin d'obtenir une bonne marge de robustesse, celui-ci étant égal à l'inverse de la marge de module (pour un système SISO).

### 3.6 $\mu$ -analyse

Les modèles utilisés pour la commande sont obtenus soit par identification soit par la connaissance des lois physiques qui gèrent le système. Cependant les paramètres du système réel ne sont pas toujours bien identifiés et peuvent varier au court du temps. De plus, les modèles, pour des soucis de simplicité mathématique et de temps de calcul, ne prennent pas en compte toutes les dynamiques du système. Ainsi le comportement du système en hautes fréquences est souvent mal identifié.

Il est donc important de garantir que, malgré toutes ces incertitudes dans la connaissance du modèle, la commande, conçue à partir de ce modèle, conserve de bonnes propriétés lorsqu'on l'applique au système. La principale propriété est la stabilité du système en boucle fermée. On veut généralement que, même lorsqu'on lui rajoute des incertitudes concernant les paramètres ou les dynamiques négligées, le système reste stable en boucle fermée. On cherche donc à connaître la robustesse en stabilité du modèle.

Pour cela, des outils sont disponibles pour mesurer la robustesse en stabilité d'un modèle perturbé par des incertitudes.

Plus encore que la stabilité robuste, on souhaite que le modèle perturbé garde les mêmes performances en boucle fermée que le modèle non perturbé. On verra qu'il est possible de mettre certaines exigences de performances, sous la forme d'incertitudes perturbant le modèle. Ainsi en étudiant la robustesse en stabilité vis à vis de certaines formes

d'incertitudes, on pourra analyser la robustesse en performance du modèle perturbé.

D'un point de vue plus mathématique, la robustesse en stabilité s'étudie en mesurant la plus petite incertitude qui déstabilise le système. Pour la quantifier, on utilise différentes normes ou mesures plus ou moins pessimistes et plus ou moins rapides à calculer.

La plus simple correspond à l'utilisation du théorème du petit gain (Zhou et al., 1996). Ce théorème permet, en mesurant la norme  $H_\infty$  de certaines fonctions de sensibilité, de quantifier la norme  $H_\infty$  des incertitudes maximales admissibles, pour les types d'incertitudes additifs ou multiplicatifs, en entrée ou en sortie, inverse ou non. Nous ne reviendrons pas sur ces résultats connus dont le détail se trouvent par exemple dans (Duc & Font, 1998; Zhou et al., 1996; Skogestad & Postlethwaite, 1996).

La  $\mu$ -analyse est un outil qui permet l'étude de la robustesse de la stabilité d'un système incertain. Elle utilise la mesure  $\mu$ , ou valeur singulière structurée.

L'avantage de la mesure  $\mu$  d'une matrice est qu'elle prend en compte la structure de la matrice et elle est donc moins pessimiste (moins conservatrice) que la norme  $H_\infty$  pour donner une idée de son "gain" maximal. Elle conduit donc à des intervalles de tolérances plus grands pour les incertitudes.

Son inconvénient est que l'on ne peut pas la calculer analytiquement. Cependant, on peut calculer, plus ou moins rapidement, des majorants et des minorants de  $\mu$  plus ou moins précis. Un majorant de  $\mu$  rapide à calculer mais aussi assez pessimiste, est la norme  $H_\infty$ .

### 3.6.1 Étude de robustesse en stabilité et en performances

Un moyen intéressant de représenter les incertitudes est la Transformation Linéaire Fractionnaire ou LFT (Linear Fractional Transformation). Cela permet d'exprimer les incertitudes sur les paramètres et sur les dynamiques du modèle sous la forme d'un bloc séparé du système.

#### 3.6.1.1 Principe

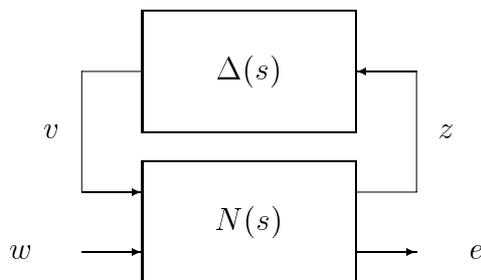


FIG. 3.7: Représentation par LFT supérieure des incertitudes de modèle

La représentation par LFT supérieure des incertitudes de modèle est donnée par la figure 3.7, où  $N(s)$  est telle que le modèle perturbé reliant les entrées  $w$  aux sorties  $e$  est :

$$T_{ew}(s) = N_{ew}(s) + N_{ev}(s)\Delta(s)(I - N_{zv}(s))^{-1}N_{zw}(s)$$

où

$$N(s) = \begin{bmatrix} N_{zv}(s) & N_{zw}(s) \\ N_{ev}(s) & N_{ew}(s) \end{bmatrix}$$

et  $\Delta(s)$  regroupe toutes les incertitudes prises en compte pour l'analyse de la stabilité du système bouclé et a la structure suivante :

$$\Delta(s) = \text{diag} \{ \Delta_1(s), \dots, \Delta_q(s), \delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_r I_{r_r}, \epsilon_1 I_{c_1}, \dots, \epsilon_c I_{c_c} \} \quad (3.56)$$

$$\Delta_i(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{k_i \times k_i} \quad \delta_i \in \mathbb{R} \quad \epsilon_i \in \mathbb{C}$$

$\Delta(s)$  regroupe donc  $q$  matrices de transfert quelconques,  $r$  blocs réels appelés aussi "scalaire réel répété" (chaque bloc réel contenant un réel  $\delta_i$  répété  $r_i$  fois) et  $c$  scalaires complexes  $\epsilon_i$  répétés  $c_i$  fois.

Ainsi, les incertitudes paramétriques sont souvent représentées par des blocs de scalaires réels répétés. Les incertitudes de modèles comme les dynamiques négligées sont souvent représentées par des matrices de transfert quelconques. De même, si l'on souhaite prendre en compte une incertitude conjointe sur le gain et la phase d'un capteur, on utilisera généralement un scalaire complexe. Pour plus d'exemples concernant la représentation des incertitudes sous forme de LFT, le lecteur pourra se référer à Duc & Font (1998); Zhou (1998); Skogestad & Postlethwaite (1996).

**Remarque 4** Notons que dans le cas de la norme  $H_\infty$ , cette structure n'est pas prise en compte et la matrice  $\Delta(s)$  est quelconque et complexe.

La première étape consiste à réaliser une mise à l'échelle, afin de normaliser  $\Delta(s)$  de la façon suivante :

$$\|\Delta_i(s)\|_\infty < 1 \quad \delta_i \in ]-1; +1[ \quad |\epsilon_i| < 1 \quad (3.57)$$

Définissons maintenant l'ensemble  $\underline{\Delta}$  des matrices complexes présentant la même structure que  $\Delta(s)$  :

$$\underline{\Delta} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta = \text{diag} \{ \Delta_1, \dots, \Delta_q, \delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_r I_{r_r}, \epsilon_1 I_{c_1}, \dots, \epsilon_c I_{c_c} \} \in \mathbb{C}^{k \times k} \\ \Delta_i \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i} \quad \delta_i \in \mathbb{R} \quad \epsilon_i \in \mathbb{C} \end{array} \right\} \quad (3.58)$$

Soit  $P \in \mathbb{C}^{k \times k}$  une matrice de même dimension que  $\Delta(s)$ . On définit la mesure  $\mu$  (ou valeur singulière structurée) de la matrice  $P$  relativement à l'ensemble  $\underline{\Delta}$  par :

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{\Delta}}(P) &= (\inf_{\Delta \in \underline{\Delta}} \{ \bar{\sigma}(\Delta) \text{ tel que } \det(I - \Delta P) = 0 \})^{-1} \\ \mu_{\underline{\Delta}}(P) &= 0 \text{ si } \forall \Delta \in \underline{\Delta}, \det(I - \Delta P) \neq 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

D'après cette définition,  $\mu_{\underline{\Delta}}(P)$  est alors la valeur minimale de la norme de la matrice  $\Delta$  qui rend  $I - \Delta P$  singulière.

Ainsi, pour chaque pulsation donnée  $\omega$ , il est possible de rechercher la mesure  $\mu$  de  $N(j\omega)$  relativement à l'ensemble  $\underline{\Delta}$  en remplaçant  $P$  par  $N(j\omega)$  dans ce qui précède.

Le théorème suivant généralise le théorème du petit gain et fournit donc une limite pour la plus petite incertitude qui déstabilise le système.

**Théorème 5** Soit un système  $N(s)$  et des incertitudes  $\Delta(s)$  appartenant à  $\mathcal{RH}_\infty$ , le système de la figure 3.7 est stable pour tout  $\Delta(s)$  de type (3.56) et vérifiant (3.57) si et seulement si :

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) \leq 1, \text{ avec } M(s) := N_{zv}(s)$$

Plus généralement, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- Pour  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}$ ,  $N(s)$  et  $\Delta(s)$  appartiennent à  $\mathcal{RH}_\infty$ , et

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) \leq \bar{\mu}$$

- le système de la figure 3.7 est stable pour toute incertitude  $\Delta(s)$  de type (3.56) telle que :

$$\|\Delta(s)\|_\infty < 1/\bar{\mu}$$

Comme on ne peut pas calculer  $\mu$  explicitement, le principe de la  $\mu$ -analyse est de trouver un majorant  $\bar{\mu}$  de  $\mu_{\underline{\Delta}}(M(s))$  le plus petit possible. Pour cela, on choisit un ensemble de fréquences  $\omega$  "suffisamment dense" et on calcule un majorant de  $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega))$  pour chaque fréquence. Le majorant recherché  $\bar{\mu}$  correspond alors au plus grand des majorants calculés pour chaque fréquence.

Ainsi la robustesse en stabilité est assurée pour tout  $\Delta(s)$  de norme inférieure ou égale à  $\bar{\mu}^{-1}$ . Lorsque des incertitudes réelles  $\delta_i$  sont prises en compte, le système reste stable pour tout  $\delta_i$  inférieur ou égal en valeur absolue à  $1/\bar{\mu}$ . On en déduit un intervalle admissible pour chaque paramètre.

L'inconvénient de cette méthode réside dans le terme "suffisamment dense". En effet, la fonction  $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega))$  n'est pas toujours continue et présente parfois des pics très serrés entre deux fréquences choisies. Ainsi cette méthode peut amener à faire des conclusions erronées quant aux incertitudes admissibles. Dans sa thèse, Valentin-Charbonnel (1998) présente une méthode permettant de se passer de ce découpage en fréquence et donc d'assurer la stabilité pour toute fréquence comprise dans un intervalle  $[f_{min}, f_{max}]$ .

Cependant, nous verrons que pour l'application étudiée (suspension), la méthode par découpage en fréquence est suffisante car les systèmes de suspension comportent des pics qui ne sont pas très serrés et l'on sait a priori dans quels domaines de fréquences se trouvent ces pics. En effet, la connaissance du modèle de suspension nous donne les fréquences de résonance de chaque pôle ainsi que l'amortissement associé. La présence, entre le châssis et la roue, d'un amortisseur non négligeable, permet de dire qu'il n'y a pas de pic de résonance très serré.

### 3.6.1.2 Mise en œuvre

Nous présentons maintenant rapidement la démarche d'analyse de la robustesse en performances. L'outil  $\mu$ -analyse est utilisé pour l'analyse de la robustesse en stabilité (RS) comme nous venons de l'expliquer, mais aussi pour l'analyse des performances nominales (NP) ou de la robustesse en performance (RP) comme nous allons le voir.

Rappelons les formulations de ces problèmes :

- La stabilité nominale (NS) s'obtient si le système nominal  $N$  est stable de manière interne.

- Les performances nominales (NP) sont obtenues si les performances du système nominal respectent les gabarits fixés et si la stabilité nominale (NS) est obtenue.
- La robustesse en stabilité (RS) est obtenue si le système perturbé est stable pour toute incertitude  $\Delta_r(s)$  appartenant à la famille  $\underline{\Delta}_r$  d'incertitude considérée et si la stabilité nominale (NS) est obtenue.
- La robustesse en performance (RP) correspond à la stabilité nominale (NS) et au respect, par les performances du système perturbé, des gabarits fixés pour les performances nominales, et ceci pour toute incertitude  $\Delta_r$  appartenant à la famille  $\Delta_r(s)$  d'incertitudes considérée.

L'analyse des problèmes de stabilité nominale (NS), de performances nominales (NP), de stabilité robuste (RS) et de performances robustes (RP) se fait à partir de la mesure  $\mu$  de différentes matrices de transfert. La figure 3.8 représente la matrice de transfert  $N(s)$  du système nominal ainsi que la matrice d'incertitudes  $\Delta_r(s)$ . Cette matrice d'incertitudes regroupe les incertitudes de modèles, les incertitudes paramétriques et les incertitudes plus globales portant sur le gain, le déphasage et le retard des signaux d'entrée et/ou de sortie du système nominal. La matrice de transfert  $N(s)$  est décomposée de la façon suivante :

$$N(s) = \begin{pmatrix} N_{zv}(s) & N_{zw}(s) \\ N_{ev}(s) & N_{ew}(s) \end{pmatrix}$$

$w$  et  $e$  représentent respectivement les entrées exogènes et les sorties à réguler du système nominal. La matrice  $\Delta_f(s)$  représente un bloc d'incertitudes fictives reliant les sorties à réguler  $e$  aux entrées exogènes  $w$ .

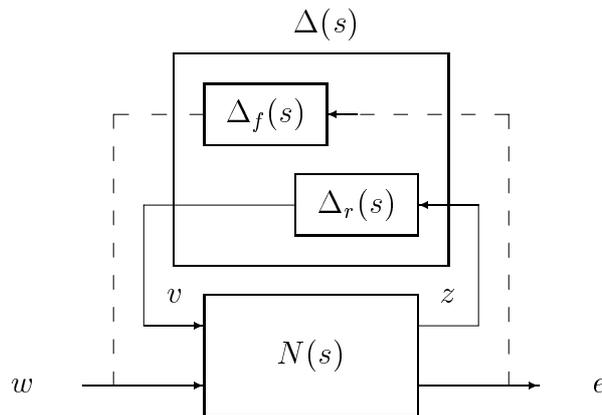


FIG. 3.8: Système nominal avec incertitudes fictives et/ou réelles

L'analyse des performances du système nominal (NP) se fait par une  $\mu$ -analyse de la stabilité du système en ne considérant que les incertitudes fictives  $\Delta_f(s)$  (Skogestad & Postlethwaite, 1996; Zhou, 1998). La mesure  $\mu$  de la matrice de transfert  $N_{ew}(s)$  nous informe alors sur les performances nominales (NP) du système.

La stabilité du système incertain est testée par la  $\mu$ -analyse de la stabilité du système en ne considérant que les incertitudes réelles  $\Delta_r(s)$ . Si la mesure  $\mu$  de  $N_{zv}(s)$  est inférieure à 1 alors la stabilité robuste (RS) est assurée jusqu'à une certaine tailles des incertitudes réelles. On obtient ainsi des marges de robustesse en stabilité pour chaque incertitude réelle considérée (marges de gain, de phase, de retard, intervalle de tolérance pour les paramètres physiques et pour les dynamiques négligées).

Les performances robustes s'étudient en prenant en compte les incertitudes réelles  $\Delta_r(s)$  et fictives  $\Delta_f(s)$ . Ces matrices sont regroupées dans la matrice  $\Delta(s)$ . Ainsi la  $\mu$ -analyse de la stabilité du système en considérant les incertitudes  $\Delta(s)$  nous fournit la mesure  $\mu$  de la matrice de transfert  $N(s)$ . Cette mesure nous informe sur les performances robustes (RP) c'est à dire sur la satisfaction des performances malgré la présence d'incertitudes réelles.

En considérant que le bloc diagonal des perturbations  $\Delta(s)$  satisfait  $\|\Delta(s)\|_\infty < 1$  et que les performances nominales requises correspondent à

$$\|T_{ew}(s)\|_\infty = \|N_{ew}(s) + N_{ev}(s)\Delta(s)(I - N_{zv}(s)\Delta(s))^{-1}N_{zw}(s)\|_\infty \leq 1$$

pour toutes les perturbations considérées, alors nous avons :

$$\text{NS} \Leftrightarrow N \text{ est stable de manière interne} \quad (3.60)$$

$$\text{NP} \Leftrightarrow \bar{\sigma}(N_{ew}) = \mu_{\Delta_f}(N_{ew}) < 1, \forall \omega, \text{ et NS} \quad (3.61)$$

$$\text{RS} \Leftrightarrow \mu_{\Delta_r}(N_{zv}) < 1, \forall \omega, \text{ et NS} \quad (3.62)$$

$$\text{RP} \Leftrightarrow \mu_{\Delta}(N) < 1, \forall \omega, \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_f & 0 \\ 0 & \Delta_r \end{bmatrix}, \text{ et NS} \quad (3.63)$$

Nous avons donc vu que, selon les incertitudes prises en compte ( $\Delta_f$ ,  $\Delta_r$  ou  $\Delta$ ), la  $\mu$ -analyse de la stabilité vis-à-vis de ces incertitudes nous permet d'étudier soit les performances nominales (NP) soit la stabilité robuste (RS) soit les performances robustes (RP).

## 3.7 Présentation de la commande Skyhook

Le principe de cette commande, spécifique au type de systèmes étudié, est d'obtenir un comportement de la suspension identique à celui d'un système fictif dans lequel la caisse serait "accrochée au ciel" par un amortisseur.

La commande Skyhook proposée par Karnopp et al. (1974) pour un modèle quart de véhicule à 1ddl équipé d'une suspension active, consiste à enlever l'amortisseur qui se trouve entre la roue et la caisse et à introduire un amortisseur entre la caisse et un point fixe du ciel.

Emura et al. (1994) appliquent cette commande, sur un modèle quart de véhicule à 3ddl (une masse non-suspendue et deux masses suspendues l'une sur l'autre), puis ils testent différents actionneurs semi-actifs approchant cette suspension active.

Moline et al. (1994) utilisent le même type de commande Skyhook sur un modèle quart de véhicule à 2ddl à suspension active. Ils approchent alors ce système avec un modèle à suspension semi-active à deux lois ou bien continue mais bornée.

Autran et al. (1995) et Lévine (1999) reprennent cette commande Skyhook pour un modèle quart de véhicule à 1ddl, puis l'adaptent pour faire de la commande Skyhook généralisée sur un modèle complet de véhicule à 6ddl (trois translations et trois rotations de la caisse). De plus, ils utilisent une suspension semi-active pour approcher le comportement du Skyhook et ils proposent de compenser partiellement le ressort de suspension par le biais d'un piston supplémentaire entre la caisse et la roue. L'inconvénient de cette commande Skyhook est qu'elle ne considère pas les mouvements de la roue. Or cette dernière n'est plus amortie puisque l'amortisseur de la suspension est enlevé.

Enfin, Sohn et al. (2000) proposent donc une commande Skyhook modifiée en rajoutant un degré de liberté. Cela correspond à laisser un amortisseur entre la caisse et la roue et un autre entre la caisse et le ciel.

Nous utilisons le même genre de suspension Skyhook modifiée.

Ce modèle fictif permet de régler indépendamment l'amortissement du mouvement vertical de la caisse et de celui de la roue. La figure 3.9 représente le modèle de la suspension désirée.

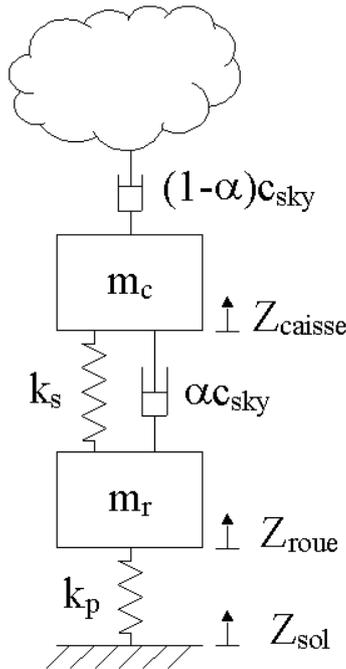


FIG. 3.9: Modèle Skyhook idéal.

Les équations qui régissent les mouvements de ce modèle sont les suivantes :

$$m_c \ddot{z}_{caisse} = k(z_{roue} - z_{caisse}) + c_{sky}(-\dot{z}_{caisse}) + \alpha c_{sky} \dot{z}_{roue} \quad (3.64)$$

$$m_r \ddot{z}_{roue} = k(z_{caisse} - z_{roue}) + k_p(z_{sol} - z_{roue}) + \alpha c_{sky}(\dot{z}_{caisse} - \dot{z}_{roue}) \quad (3.65)$$

avec :

$c_{sky}$  : amortissement de la liaison au ciel.

$\alpha$  : pourcentage de l'amortissement  $c_{sky}$  utilisé pour la suspension entre la caisse et la roue.

La représentation de ce système sous forme d'état est la suivante :

$$\dot{x} = A_{sky-d}x + B_r z_{sol} \quad (3.66)$$

$$y = C_{sky-d}x \quad (3.67)$$

avec les matrices :

$$A_{sky-d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_c & k/m_c & -c_{sky}/m_c & \alpha c_{sky}/m_c \\ k/m_r & -(k+k_p)/m_r & \alpha c_{sky}/m_r & -\alpha c_{sky}/m_r \end{bmatrix};$$

$$C_{sky-d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k/m_c & k/m_c & -c_{sky}/m_c & \alpha c_{sky}/m_c \end{bmatrix}$$

Il est important de noter que l'on ne peut pas réaliser ce système exactement à partir du modèle, défini par (1.5,1.6), représentant le système quart de véhicule. En effet, sur le système (1.5,1.6), la même force est appliquée sur la caisse et sur la roue, ce qui n'est pas le cas du système Skyhook.

Dans ce cas la force  $\alpha c_{sky} \dot{z}_{roue} - c_{sky} \dot{z}_{caisse}$  est appliquée sur la caisse (cf. équation (3.64)) et la force  $\alpha c_{sky} (\dot{z}_{roue} - \dot{z}_{caisse})$  est appliquée sur la roue (cf. équation (3.65)), ce qui ne peut pas être réalisé par le modèle défini par les équations (1.5) et (1.6). Cependant nous choisirons la loi de commande suivante qui permet d'approcher le comportement du système Skyhook :

$$\begin{aligned} u &= -c_{sky} \dot{z}_{caisse} + \alpha c_{sky} \dot{z}_{roue} \\ &= c_{sky} (\dot{z}_{roue} - \dot{z}_{caisse}) - (1 - \alpha) c_{sky} \dot{z}_{roue} \end{aligned}$$

où  $c_{sky} (\dot{z}_{roue} - \dot{z}_{caisse})$  et  $-(1 - \alpha) c_{sky} \dot{z}_{roue}$  correspondent à l'action de la partie passive et active de l'amortissement respectivement.

Les équations du système défini par (1.5) et (1.6) deviennent avec la commande Skyhook (approchée) :

$$m_c \ddot{z}_{caisse} = k(z_{roue} - z_{caisse}) + c_{sky}(-\dot{z}_{caisse}) + \alpha c_{sky} \dot{z}_{roue} \quad (3.68)$$

$$m_r \ddot{z}_{roue} = k(z_{caisse} - z_{roue}) + k_p(z_{sol} - z_{roue}) + c_{sky} \dot{z}_{caisse} - \alpha c_{sky} \dot{z}_{roue} \quad (3.69)$$

Le système en boucle fermée (3.68, 3.69) est alors similaire à (3.66, 3.67) pour lequel  $A_{sky-d}$  est remplacé par  $A_{sky}$  :

$$A_{sky} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_c & k/m_c & -c_{sky}/m_c & \alpha c_{sky}/m_c \\ k/m_r & -(k+k_p)/m_r & c_{sky}/m_r & -\alpha c_{sky}/m_r \end{bmatrix}$$

Le choix de  $c_{sky}$  et de  $\alpha$  détermine alors la suspension Skyhook. Pour  $\alpha = 0$ , la force  $u$  est indépendante du déplacement vertical de la roue. Cela implique une oscillation du déplacement vertical de la roue ( $z_{roue}$ ). Pour  $c_{sky} = 0$ , aucun des deux mouvements (caisse et roue) n'est amorti.

Avec  $c_{sky} \neq 0$ , l'amortissement du déplacement vertical de la caisse peut être contrôlé. Le choix de  $\alpha$  permet alors de choisir l'amortissement du déplacement vertical de la roue.

Le fait d'augmenter le coefficient d'amortissement, dans un système ressort-amortisseur, améliore le pic de résonance mais cela diminue les capacités de filtrage du système.

Cette commande sera illustrée, au chapitre 4, sur un modèle quart de véhicule.

## 3.8 Conclusion

Nous concluons maintenant sur chaque type de commande.

Placement de pôles :

Cette méthode permet de choisir explicitement le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée d'un système mono-variable. L'ordre du régulateur peut être choisi a priori, en fonction du nombre de pôles à placer. Lorsqu'elle est utilisée sur un modèle quart de véhicule pour assurer une certaine fonction de transfert entre le profil de la route et le déplacement de la caisse, cette méthode présente certains inconvénients. Comme nous l'avons vu, elle ne permet pas de spécifier le numérateur de la fonction de transfert car aucun précompensateur ne peut être appliqué puisqu'il n'y a pas de consigne. Ceci entraîne un compromis entre l'atténuation du pic de résonance et le filtrage du déplacement de la caisse.

Découplage et rejet de perturbations :

Nous avons présenté une condition nécessaire est suffisante pour savoir si le problème du découplage ligne par ligne a une solution. De plus, une méthode permet d'obtenir la famille des lois de commande découplantes. La commande permettant le rejet de perturbations est alors recherchée parmi cette famille. Au chapitre 5 nous présentons l'application, sur le modèle complet de véhicule à 7ddl, de cette commande découplante et rejetant les perturbations.

Commande optimale LQG :

Cette commande est très répandue pour la régulation de suspension. L'inconvénient de cette méthode est que le critère est peu sensible aux pics de forte amplitude et de faible durée. Cette méthode est donc plus adaptée pour des profils de route peu chaotiques comme les autoroutes.

Suspension Skyhook :

Cette commande est spécifique aux suspensions. Elle dispose de peu de paramètres de réglage. C'est un avantage pour la rapidité de la synthèse de la loi de commande. Mais c'est un inconvénient pour la gestion du compromis entre atténuation et filtrage du déplacement de la caisse. Elle est donc plus indiquée pour une première approche simple de la commande de suspension. Notons qu'il existe aussi un concept de "Groundhook" (Sohn et al., 2000) qui cherche à relier directement la caisse et le profil de la route par un amortisseur afin de retrouver le comportement d'un modèle quart de véhicule à un seul degré de liberté.

Commande  $H_\infty$  :

Contrairement à la suspension Skyhook, la commande  $H_\infty$  dispose d'un nombre non fixé de paramètres de réglage. Ces paramètres correspondent en fait aux pondérations appliquées aux différents signaux. Cependant, l'ordre du régulateur augmente avec l'ordre des pondérations. Cela rend la synthèse plus difficile à résoudre et plus longue. La commande  $H_\infty$  permet d'outrepasser le compromis entre l'atténuation et le filtrage du déplacement de la caisse. Elle permet en outre de traiter des systèmes multi-variables. La commande  $H_\infty$  donne la possibilité de limiter le pire des cas c'est à dire le gain du plus grand pic en fréquence. Cette commande est donc appropriée pour des routes chaotiques. Cela peut être un inconvénient si l'on désire améliorer le comportement moyen d'une suspension au détriment des cas singuliers.

Pour résoudre le problème  $H_\infty$ , on utilise les équations de Riccati ou bien les LMI. L'utilisation des équations de Riccati ne fait appel qu'à une seule recherche par dichotomie pour trouver une solution, cependant elle est plus restrictive puisqu'elle nécessite plus d'hypothèses (H1 à H4) que les LMI (H1 uniquement). L'utilisation des LMI permet de relaxer certaines conditions nécessaires à la résolution des équations de Riccati mais demande un volume de calcul plus important.

la  $\mu$ -analyse :

Cette analyse permet de traiter la stabilité nominale, les performances nominales, la robustesse en stabilité et la robustesse en performance. Appliquée sur un système en boucle fermée, elle permet de vérifier a posteriori la robustesse en stabilité et en performances vis à vis d'erreurs de modèles. Si l'analyse n'est pas concluante, on itère sur la synthèse du régulateur. Notons pour finir que la mesure  $\mu$ , utilisée dans la  $\mu$ -analyse, est majorée généralement pour un nombre fini de fréquences. La finesse du découpage en fréquence influence bien sûr la détermination de  $\mu$ . Une autre méthode peut consister à modifier le système en faisant ressortir un intervalle d'incertitude sur la fréquence et à effectuer le calcul de  $\mu$  à l'aide de LMI.

L'approche utilisée ici consiste tout d'abord à générer un régulateur à l'aide d'une méthodologie de commande (placement de pôles,  $H_\infty$ , Skyhook), puis à tester a posteriori la robustesse en stabilité (RS) et en performances (RP), à l'aide de la  $\mu$ -analyse. Bien que nous ne l'ayons pas abordée, citons la  $\mu$ -synthèse, dont la démarche consiste à prendre en compte les spécifications sur la robustesse en stabilité et en performance, au moment de la synthèse du régulateur (Skogestad & Postlethwaite, 1996; Zhou, 1998; Duc & Font, 1998).

Les chapitres suivants traitent de l'application de certaines de ces méthodes de commande aux modèles de suspension précédemment décrits dans le chapitre 1.



# Chapitre 4

## Commande de modèles quart de véhicule

### 4.1 Introduction

Ce chapitre représente la majeure partie de notre contribution. Il est consacré à l'application de certaines méthodologies de commande, décrites dans le chapitre précédent, à des modèles quart de véhicule.

Une grande partie de ce travail provient de l'étude réalisée dans le cadre d'une collaboration contractuelle avec PSA (Sammier et al., 2000c,d).

Ce travail de thèse a donné lieu à la publication de plusieurs articles. Nous faisons la comparaison des commandes  $H_\infty$  et Skyhook appliquées à un modèle quart de véhicule à 2ddl dans (Sammier et al., 2001a), présenté en mars 2001 à l' "IFAC Workshop on Advances in Automotive Control" à Karlsruhe (Allemagne). Un article en révision dans la revue "Vehicle System Dynamics" traite de la comparaison de ces deux commandes et de leurs applications sur un modèle quart de véhicule incluant un modèle non-linéaire de l'actionneur.

Le lecteur se reportera au chapitre 1 pour le développement des modèles quart de véhicule. De même, les méthodologies de commandes Skyhook,  $H_\infty$  et par placement de pôles ont été présentées au chapitre 3.

Dans ce chapitre, un modèle quart de véhicule de la suspension avant d'une Peugeot 406 sera considéré comme système de référence. Cette suspension ne peut pas être contrôlée et servira de base pour la comparaison des résultats de notre étude avec un véhicule standard. Ce modèle, dont les caractéristiques sont présentées au paragraphe 4.2.1, prend en compte la non-linéarité de la caractéristique Force/Vitesse de l'amortisseur passif de la 406 ainsi que la non-linéarité de la raideur de la suspension. Le système, utilisé dans le cadre d'applications de lois de commande, est un modèle quart de véhicule de la suspension avant d'une Peugeot 607. Ce modèle est équipé d'un amortisseur semi-actif à neuf lois c'est à dire que l'on dispose de neuf caractéristiques différentes pour la relation Force/Vitesse de l'amortisseur. Ainsi, appliquer une commande implique le choix de l'amortissement de la suspension de la 607. Ces neuf caractéristiques sont non-linéaires ainsi que la raideur de la suspension.

Pour concevoir une commande de l'amortissement de cette suspension nous utilisons un modèle linéaire, présenté au paragraphe 4.2.1. La commande conçue sera ensuite validée sur le modèle non-linéaire plus réaliste de la 607 avant d'être comparée au système de référence.

Cette comparaison s'appuiera sur les critères présentés au chapitre 2. Rappelons que ces critères sont de deux types : des critères de performance spécifiques aux suspensions et définis par PSA, et les critères de sensibilité et de robustesse applicables à toute commande linéaire.

Les différentes commandes que nous avons appliquées sont : la commande par placement de pôles, la commande  $H_\infty$  et la commande Skyhook. Les deux premières reconnues dans le domaine de l'Automatique, ont été présentées dans le chapitre précédent. La commande Skyhook, de structure simple, est spécifique aux suspensions et permet d'obtenir des résultats sans connaissance particulière en Automatique. La comparaison des commandes Skyhook et  $H_\infty$  fait partie d'une étude réalisée pour PSA. Cette étude portait sur l'utilisation de ces deux commandes pour le contrôle d'une suspension avant de la 607.

Nous présentons dans un premier temps, au paragraphe 4.2, les caractéristiques du modèle non-linéaire de référence en boucle ouverte de la 406 avec lequel nous ferons des comparaisons, ainsi que le modèle linéaire équipé d'un actionneur actif utilisé pour la synthèse de loi de commande, et le modèle non-linéaire de la 607 à commander.

La synthèse de la loi de commande par placement de pôles (resp. des lois de commande Skyhook et  $H_\infty$ ) est présentée au paragraphe 4.3 (resp. 4.4 et 4.5). Pour la commande par placement de pôles, nous effectuons deux synthèses différentes dont nous comparons les résultats afin d'en choisir une à opposer aux commandes Skyhook et  $H_\infty$ . En ce qui concerne la commande Skyhook, nous donnons simplement les valeurs des deux paramètres de réglages et nous représentons leurs influences sur les critères de performances. Pour la commande  $H_\infty$ , nous définissons le problème sous forme standard, puis nous détaillons les pondérations choisies.

Nous comparons alors, au paragraphe 4.6, les performances des systèmes bouclés par ces différentes commandes en étudiant les réponses fréquentielles du confort en basses fréquences, de la tenue de route et du confort en hautes fréquences ainsi que les réponses temporelles.

En plus de l'analyse des performances de ces systèmes bouclés, nous allons faire l'analyse de la robustesse, et nous faisons, pour cela, appel à la  $\mu$ -analyse. Celle-ci permet tout d'abord de quantifier le respect de gabarits pour les performances nominales (NP). C'est à dire que, pour chaque gabarit de performances que l'on fixe pour le système bouclé non-perturbé, on peut savoir si le gabarit est dépassé, de quel pourcentage et dans quelle bande de fréquences. De plus, pour le système bouclé perturbé, la  $\mu$ -analyse permet aussi d'obtenir des intervalles de confiance admissibles pour chaque paramètre incertain, afin de garantir la stabilité robuste (RS) du système bouclé. La  $\mu$ -analyse permet en outre de calculer les intervalles admissibles permettant de garantir le respect, par le système perturbé, des gabarits de performances, pour obtenir la robustesse en performances (RP).

Pour finir nous nous intéresserons à l'utilisation des commandes sur un modèle non-linéaire plus réaliste au paragraphe 4.8.

## 4.2 Suspension passive (boucle ouverte)

Le paragraphe 4.2.1 présente les trois modèles quart de véhicule utilisés dans cette étude, à savoir le modèle de référence passif et non-linéaire de la 406, le modèle à commander non-linéaire et semi-actif de la 607, et le modèle linéaire et actif utilisé pour la synthèse des lois de commande. Les performances du modèle non-linéaire de référence sont exprimées, au paragraphe 4.2.2, selon les critères de PSA. Ces performances serviront de référence pour celles des systèmes bouclés par les différentes commandes.

### 4.2.1 Le modèle quart de véhicule

Reprenons tout d'abord le modèle quart de véhicule décrit dans le paragraphe 1.3.4 (voir fig. 1.19) :

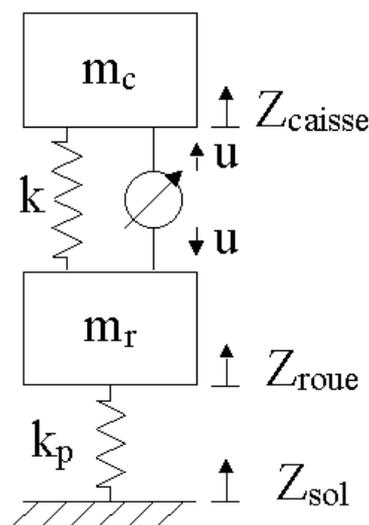


FIG. 4.1: Le modèle quart de véhicule à 2 degrés de liberté.

$$m_c \ddot{z}_{\text{caisse}} = k(z_{\text{roue}} - z_{\text{caisse}}) + u \quad (4.1)$$

$$m_r \ddot{z}_{\text{roue}} = k(z_{\text{caisse}} - z_{\text{roue}}) - u + k_p(z_{\text{sol}} - z_{\text{roue}}) \quad (4.2)$$

Dans le cas d'un amortisseur passif,  $u$  est la force passive donnée par :

$$u = c(\dot{z}_{\text{roue}} - \dot{z}_{\text{caisse}}) \quad (4.3)$$

Lors de l'étude réalisée pour PSA, le modèle considéré est constitué d'une masse suspendue  $m_c$  (caisse) reliée à une masse non-suspendue  $m_r$  (roue) par une suspension. La masse non-suspendue reposant sur le sol par l'intermédiaire du pneumatique. Le pneumatique est modélisé par une raideur linéaire  $k_p$ . L'amortissement du pneumatique est négligé. La suspension est constituée d'une raideur et d'un amortisseur. Selon les cas, la raideur est linéaire ( $k$ ) ou non-linéaire (raideur de la Peugeot 406, voir figure 4.2). De la même façon, on utilise soit un amortisseur linéaire ( $c$ ), soit l'amortisseur non-linéaire de la 406, voir figure 4.3. Les éléments non-linéaires sont décrits sous forme de caractéristiques statiques. Les valeurs des paramètres constant sont les suivantes :

$$m_c = 415 \text{ kg} ; m_r = 52 \text{ kg} ; k_p = 270000 \text{ N/s} ; k = 22000 \text{ N/m} ; c = 1500 \text{ N.s/m} \quad (4.4)$$

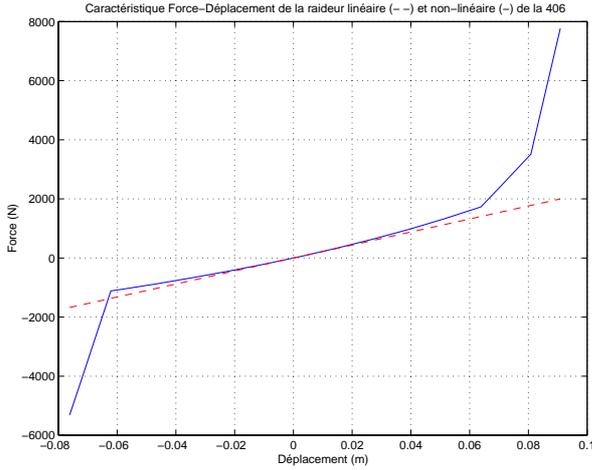


FIG. 4.2: Comparaison de la raideur linéaire  $k_s=22000$  N/m et non-linéaire de la Peugeot 406

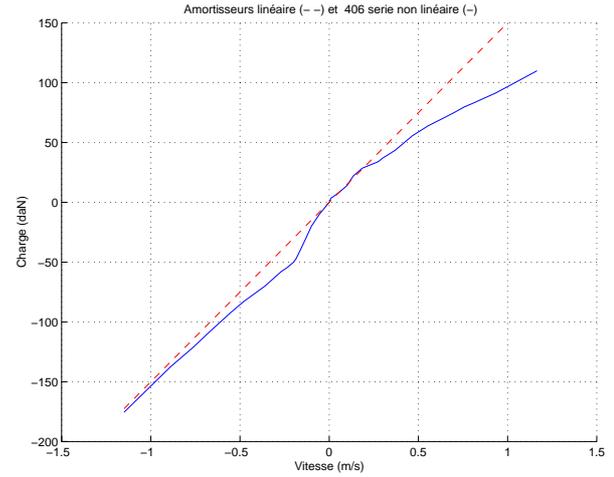


FIG. 4.3: Comparaison de l'amortissement linéaire  $c=1500$  N.s/m et non-linéaire de la Peugeot 406

Dans la suite du chapitre ;  $u$  sera considéré comme la force générée par un amortisseur actif. Les commandes seront ensuite appliquées à un modèle non-linéaire de suspension semi-active plus réaliste d'un quart de véhicule avant d'une Peugeot 607. Les caractéristiques des modèles non-linéaires des amortisseurs sont définis par PSA, voir figures 4.4 et 4.5.

Dans l'étude réalisée en collaboration avec PSA, nous avons considéré comme vecteur des sorties à contrôler :

$$y = [z_{caisse}, z_{roue}, \ddot{z}_{caisse}]$$

Le déplacement vertical de la caisse ( $z_{caisse}$ ) ainsi que son accélération ( $\ddot{z}_{caisse}$ ) sont étudiés afin d'estimer le confort. Le déplacement vertical de la roue ( $z_{roue}$ ) permet d'apprécier la tenue de route.

La représentation d'état associée aux équations (4.1), (4.2) du modèle linéaire est donc la suivante :

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_r z_{sol} \quad (4.5)$$

$$y = Cx + D_u u \quad (4.6)$$

avec l'état  $x = [z_{caisse} \quad z_{roue} \quad \dot{z}_{caisse} \quad \dot{z}_{roue}]^t$  et les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_c & k/m_c & 0 & 0 \\ k/m_r & -(k+k_p)/m_r & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_p/m_r \end{bmatrix}$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_c \\ -1/m_r \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k/m_c & k/m_c & 0 & 0 \end{bmatrix}; D_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_c \end{bmatrix};$$

Dans le cas d'un modèle quart de véhicule à 1 degré de liberté, le système obtenu correspond à celui donné par les équations (4.5) et (4.6) avec l'état  $x = [z_{caisse} \quad \dot{z}_{caisse}]^t$ ,

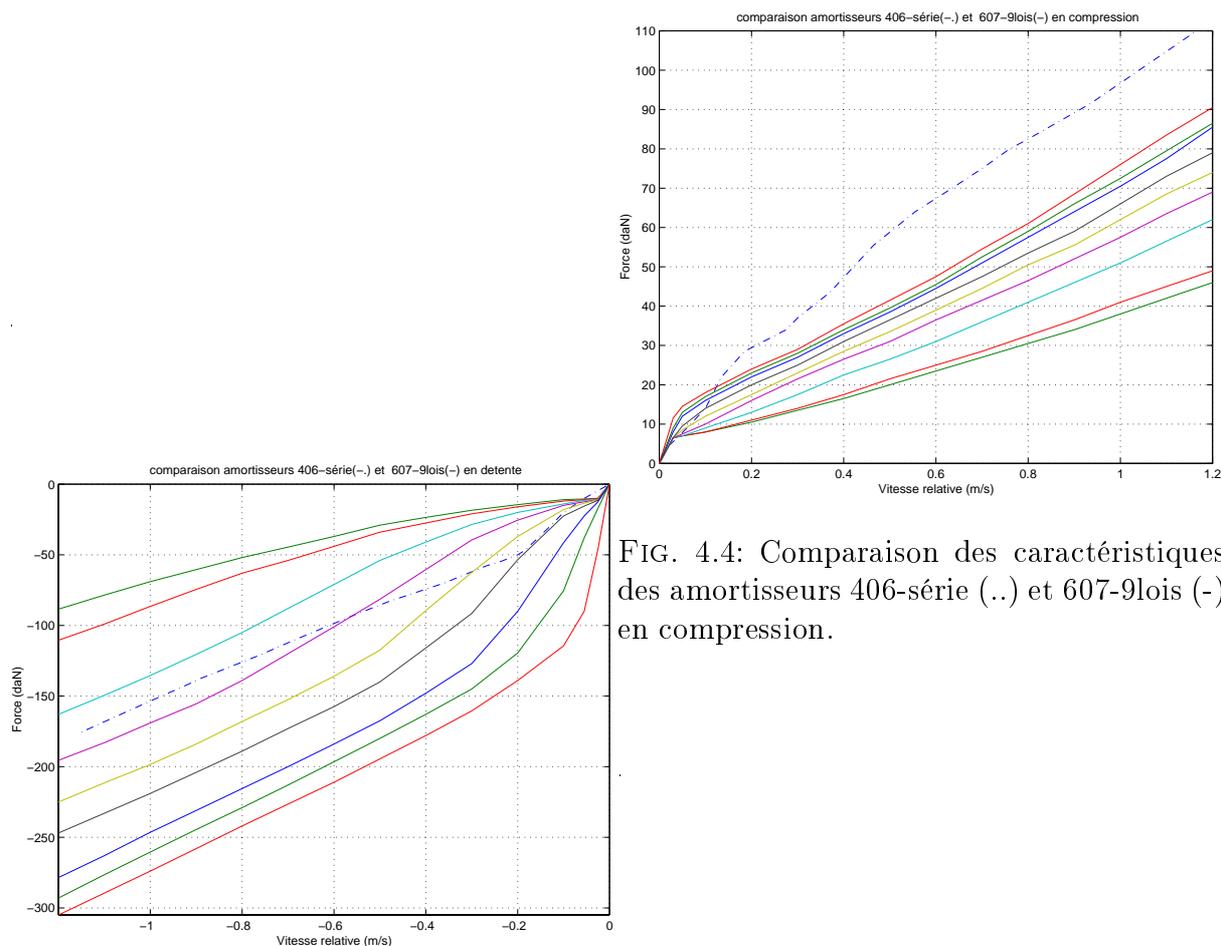


FIG. 4.4: Comparaison des caractéristiques des amortisseurs 406-série (..) et 607-9lois (-) en compression.

FIG. 4.5: Comparaison des caractéristiques des amortisseurs 406-série (..) et 607-9lois (-) en détente.

les sorties  $y = [z_{caisse} \quad \ddot{z}_{caisse}]^t$  et les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m_c & 0 \end{bmatrix}; B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ k/m_c \end{bmatrix}$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m_c \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k/m_c & 0 \end{bmatrix}; D_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m_c \end{bmatrix};$$

### 4.2.2 Les critères

Comme nous l'avons vu au chapitre 2 (paragraphe 2.4.2), nous devons surveiller  $\ddot{z}_{caisse}$  l'accélération verticale de la caisse,  $z_{caisse} - z_{roue}$  le débattement de la suspension et  $z_{roue} - z_{sol}$  l'écrasement du pneu. On s'intéresse aussi à la commande  $u$  en vérifiant qu'elle satisfait les contraintes technologiques de l'actionneur.

La figure 4.6 représente les tests des critères fréquentiels pour le cas de la suspension avant non-linéaire de la Peugeot 406. Un test temporel simulant le passage sur une bosse de  $10mm \times 2m$  complète ces résultats (voir figure 4.7).

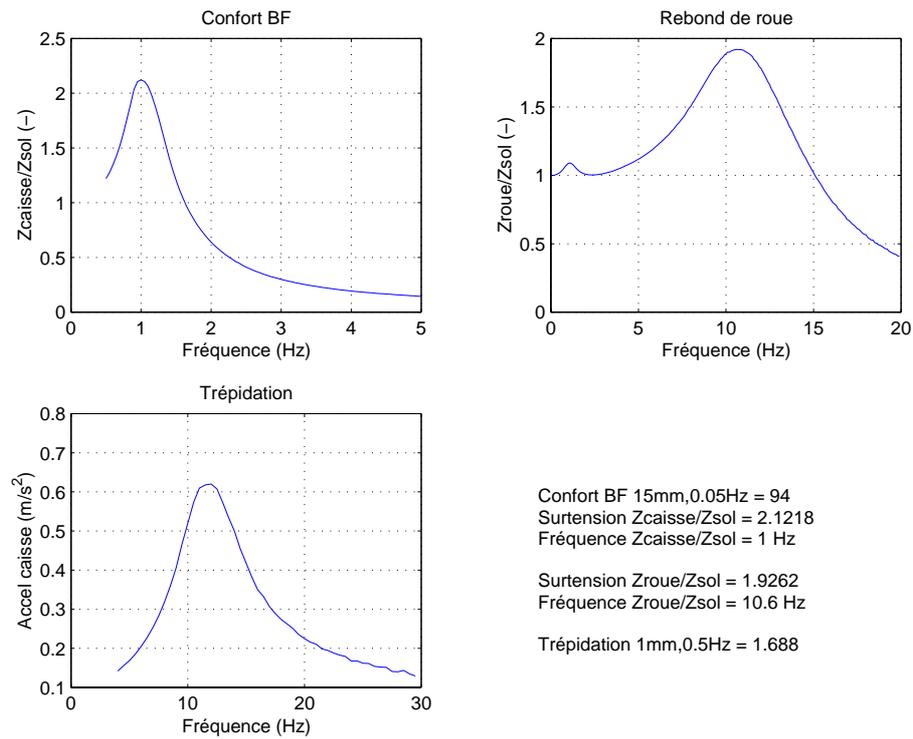


FIG. 4.6: Critères fréquentiels pour l'amortisseur de la 406-série avec le modèle non-linéaire plus réaliste

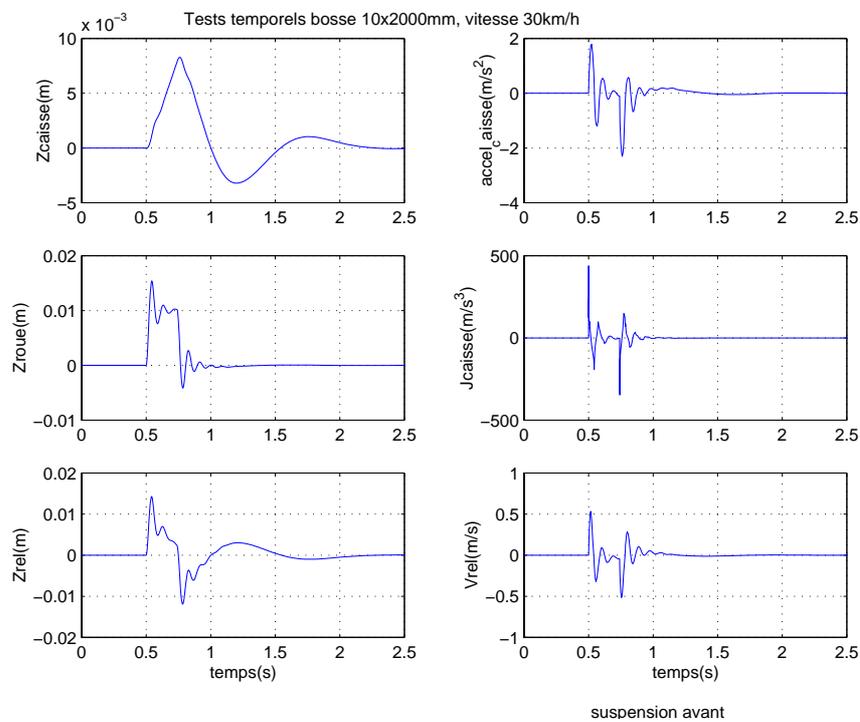


FIG. 4.7: Passage, à 30km/h, sur une barrette 10mm × 2m, pour le système avec amortisseur et raideur non-linéaires de la 406.

Rappelons que pour le test du confort en basses fréquences, le système est soumis à une perturbation sinusoïdale du sol d'amplitude  $\pm 15\text{mm}$  et de fréquence variable.

Pour les tests du rebond de roue et de la trépidation (confort en hautes fréquences), l'amplitude de la sinusoïde est de  $\pm 1\text{mm}$  (voir chapitre 2).

Le tableau suivant rappelle les différentes spécifications associées aux critères fréquentiels.

	Spécifications
"Confort-BF"	à minimiser et $< 94$ (cas passif 406)
Gain max. de $z_{caisse}/z_{sol}$	$< 1.8$
Fréquence associée (Hz)	$< 1.3$
Gain max. de $z_{roue}/z_{sol}$	$< 1.8$
Fréquence associée (Hz)	-
Trépidation	à comparer à $1.69$ (cas passif 406)
Accélération max. ( $m/s^2$ )	-
Fréquence associée (Hz)	-

Ceux-ci seront comparés avec ceux des systèmes (linéaire ou non-linéaire) en boucle fermée.

Dans les paragraphes 4.3 et 4.4, la synthèse des commandes est faite sur un modèle linéaire de suspension de quart de véhicule. Les simulations sont faites en appliquant ces commandes sur ce même système linéaire. On suppose donc que l'on dispose d'un actionneur commandé en force qui n'est pas limité et qui correspond donc à un actionneur actif.

### 4.3 Commande par placement de pôles

Nous présentons ici deux réglages obtenus à partir de deux réflexions différentes quant au placement des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée. Nous verrons que le deuxième réglage, préconisé par DeLarminat (1993), permet de moins solliciter la commande que le premier tout en procurant de bonnes performances. Afin d'évaluer les capacités de ces commandes, les performances selon les critères de PSA sont données. En outre, les fonctions de sensibilités sont évaluées pour permettre une analyse de la robustesse et des performances de la boucle fermée.

La commande par placement de pôles, présentée au paragraphe 3.3, permet de choisir indépendamment le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert entre la consigne et la sortie à contrôler. Cependant, seul le dénominateur de la fonction de transfert entre la perturbation et la sortie à contrôler peut être fixé. Le numérateur dépend lui d'une part du numérateur de la boucle ouverte et d'autre part du choix du dénominateur de la boucle fermée.

Dans notre cas, le profil de la route  $z_{sol}$  et le déplacement vertical de la caisse  $z_{caisse}$  correspondent respectivement à la perturbation et à la sortie à commander. Nous ne disposons pas vraiment, dans ce cas, d'une consigne. En effet, nous désirons d'une part que la caisse suive le profil basses fréquences de la route (cas d'un trottoir, d'une pente, etc...), et d'autre part que les hautes fréquences du profil de route ne soient pas transmises

à la caisse pour un meilleur confort ; ce sont des perturbations à rejeter. Cependant on ne peut pas considérer les basses fréquences de ce profil comme une consigne car une consigne est choisi librement ce qui n'est pas le cas ici. N'ayant pas de consigne, nous perdons un degré de liberté et la commande par placement de pôles ne nous permet donc de choisir que le dénominateur de la fonction de transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$  en boucle fermée entre le profil de la route  $z_{sol}$  et le déplacement vertical de la caisse  $z_{caisse}$ .

Nous cherchons donc d'une part à placer les pôles du dénominateur afin de filtrer les hautes fréquences, et d'autre part à garantir un gain unitaire en basses fréquences.

Notons que, dans le cas de la commande par placement de pôles d'un modèle quart de véhicule à 2ddl, nous utilisons la mesure de la position de la caisse  $z_{caisse}$  car cela correspond à la variable à commander.

En utilisant le modèle quart de véhicule à 2ddl de la figure 4.1, avec les paramètres définis précédemment, le déplacement vertical de la caisse  $z_{caisse}$  satisfait :

$$z_{caisse}(s) = \frac{B_d(s)}{A(s)}z_{sol}(s) + \frac{B(s)}{A(s)}u(s) \quad (4.7)$$

où  $B(s) = b_2s^2 + b_1s + b_0$ ,  $B_d(s) = b_{d1}s + b_{d0}$ ,  $A(s) = a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$

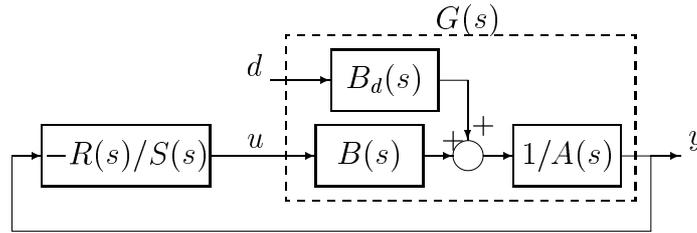


FIG. 4.8: Régulateur à 1ddl sans consigne.

En utilisant la commande  $u$  correspondant au retour de sortie suivant :

$$u(s) = -\frac{R(s)}{S(s)}y(s), \quad (4.8)$$

la fonction de transfert en boucle fermée entre le profil de la route et le déplacement vertical de la caisse ( $z_{caisse}/z_{sol}$ ) devient :

$$\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)} = \frac{B_d(s)S(s)}{A(s)S(s) + B(s)R(s)} \quad (4.9)$$

Si  $P(s)$  est le polynôme désiré (dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée), il faut trouver  $R(s)$  et  $S(s)$  tels que l'équation de Bezout soit satisfaite :

$$A(s)S(s) + B(s)R(s) = P(s) \quad (4.10)$$

Cependant, nous voulons aussi obtenir un gain statique unitaire :

$$\frac{z_{caisse}(0)}{z_{sol}(0)} = \frac{B_d(0)S(0)}{A(0)S(0) + B(0)R(0)} = 1 \quad (4.11)$$

Or en boucle ouverte, le gain statique du transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$  est déjà unitaire :

$$\frac{z_{caisse}(0)}{z_{sol}(0)} = \frac{B_d(0)}{A(0)} = 1 \quad (4.12)$$

Ainsi l'équation 4.11 est équivalente à :

$$R(0) = 0 ; S(0) \neq 0 \quad (4.13)$$

L'équation de Bezout est donc à résoudre sous la contrainte (4.13).

Dans notre application, les polynômes  $A(s)$ ,  $B(s)$ ,  $B_d(s)$  sont respectivement de degrés 4, 2 et 1.

Pour un régulateur propre, nous avons donc :

$$\deg(S(s)) = \deg(R(s)) = \deg(A(s)) = 4 \quad (4.14)$$

$$\deg(P(s)) = 2\deg(A(s)) = 8 \quad (4.15)$$

L'équation de Bezout se traduit par un système de Sylvester de 9 équations à 10 inconnues. Mais il faut aussi tenir compte de la contrainte  $R(0) = r_0 = 0$ . En tenant compte de cette contrainte, il reste alors un système de 9 équations à 9 inconnues :

$$M_e = \begin{bmatrix} a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} s_4 \\ s_3 \\ s_2 \\ s_1 \\ s_0 \\ r_4 \\ r_3 \\ r_2 \\ r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_8 \\ p_7 \\ p_6 \\ p_5 \\ p_4 \\ p_3 \\ p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

avec :

$$\begin{aligned} S(s) &= s_4 s^4 + s_3 s^3 + s_2 s^2 + s_1 s + s_0 \\ R(s) &= r_4 s^4 + r_3 s^3 + r_2 s^2 + r_1 s \quad (r_0 = 0) \\ A(s) &= a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \\ B(s) &= b_2 s^2 + b_1 s + b_0 \\ P(s) &= p_8 s^8 + p_7 s^7 + p_6 s^6 + p_5 s^5 + p_4 s^4 + p_3 s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

**Remarque 5** En général,  $S$  est choisi unitaire ( $s_n = 1$ ) de même que  $A$  et  $P$ .

En pratique, nous avons en boucle ouverte :

$$\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)} = \frac{18767.3772(s + 14.67)}{(s^2 + 3.131s + 49.8)(s^2 + 29.33s + 5527)} \quad (4.18)$$

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, il est possible de placer une partie des pôles de la boucle fermée afin de compenser les zéros stables de la boucle ouverte. Dans

notre cas, le zéro du numérateur  $B_d(s)$  de la boucle ouverte est stable ( $s + 14.67$ ). On choisit donc

$$P(s) = B_d(s)P'(s)$$

afin d'obtenir la fonction de transfert suivante :

$$\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)} = \frac{B_d(s)S(s)}{A(s)S(s) + B(s)R(s)} = \frac{S(s)}{P'(s)} \quad (4.19)$$

Nous nous intéressons aussi aux fonctions de sensibilité du système bouclé. Mettons tout d'abord en évidence les fonctions de sensibilité concernées : à partir de la figure 4.8, et en notant  $K(s) = \frac{R(s)}{S(s)}$ ,  $G_d(s) = \frac{B_d(s)}{A(s)}$  et  $G_u(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ , on obtient la figure 4.9. Un bruit de mesure  $b$  est rajouté.

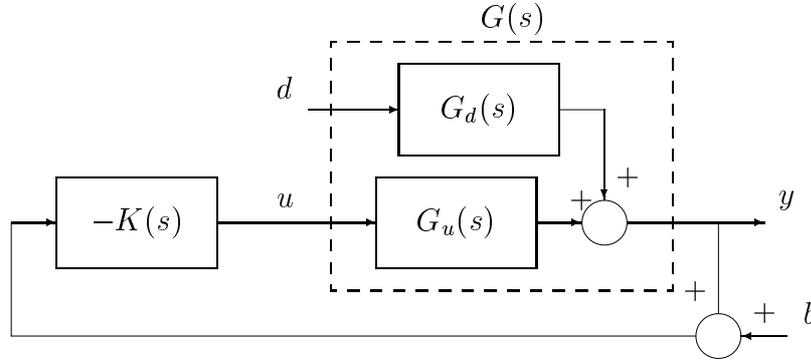


FIG. 4.9: Régulateur à 1ddl sans consigne.

La sortie  $y = z_{caisse}$  et la commande  $u$  sont alors reliées à la perturbation  $d = z_{sol}$  et aux bruits de mesures  $b$  de la façon suivante :

$$y(s) = z_{caisse}(s) = \mathcal{S}(s)G_d(s)z_{sol}(s) + \mathcal{T}(s)b(s) \quad (4.20)$$

$$u(s) = \mathcal{K}\mathcal{S}(s)G_d(s)z_{sol}(s) + \mathcal{K}\mathcal{S}(s)b(s) \quad (4.21)$$

où les fonctions de sensibilité de ce système sont données par les figures 4.30 à 4.33.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(s) &= \frac{1}{1 + G_u(s)K(s)} \\ \mathcal{T}(s) &= \frac{G_u(s)K(s)}{1 + G_u(s)K(s)} \\ \mathcal{K}\mathcal{S}(s) &= \frac{K(s)}{1 + G_u(s)K(s)} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dans le cas général où l'on dispose d'une consigne, on désire une fonction de sensibilité  $\mathcal{S}$  nulle pour que la fonction de sensibilité complémentaire  $\mathcal{T}$  soit unitaire afin d'assurer une bonne précision pour le suivi de référence. Mais dans notre cas, nous n'avons pas de consigne à suivre. Nous voulons que la sortie suive les basses fréquences de la perturbation tout en filtrant les hautes fréquences. Nous souhaitons donc que la fonction  $\mathcal{S}G_d$  soit

unitaire en basses fréquences et négligeable en hautes fréquences. Or la boucle ouverte  $G_d(s)$  a déjà ces caractéristiques. Ainsi nous recherchons une fonction de sensibilité  $\mathcal{S}$  qui soit unitaire en hautes et en basses fréquences. La fonction de sensibilité complémentaire  $\mathcal{T}$  doit donc être nulle pour ces fréquences là.

Dans ce qui suit, pour simplifier le problème, nous ne faisons la synthèse que sur un seul transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$ , et nous analysons a posteriori les résultats.

### 4.3.1 Première synthèse

Nous effectuons un premier choix pour le placement des sept derniers pôles du système en boucle fermée (le premier pôle servant à compenser le zéro stable de  $B(s)$ ). Nous voulons filtrer la perturbation (profil de la route) de manière à ce que la caisse suive uniquement les basses fréquences. La limite choisie pour distinguer les basses des hautes fréquences est généralement autour de 1Hz (ex :  $f < 1.3Hz$  pour PSA). De plus, nous souhaitons que la perturbation ne soit pas trop amplifiée, l'idéal étant qu'il n'y ait pas de pic de résonance. Nous utilisons donc deux autres pôles de la boucle fermée pour filtrer les hautes fréquences. Le choix d'un pôle double à 1Hz permet d'éviter les dépassements :

$$\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)} = \frac{S(s)}{(s + 2\pi)^2 P''(s)} \quad (4.23)$$

Les cinq pôles libres restant à placer sont tous choisis identiques et réels pour éviter les dépassements :

$$P''(s) = (s + p)^5 \quad (4.24)$$

La figure 4.10 montre la réponse fréquentielle de  $\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)}$  pour plusieurs valeurs des pôles de  $P''(s)$ . Il apparaît qu'il existe un compromis entre l'atténuation du pic de résonance de  $\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)}$  et le filtrage de  $\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)}$ .

Le point invariant de la réponse fréquentielle du transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$  est visible sur la figure 4.10. Cela concorde avec les équations des coordonnées de ce point données au chapitre 2 :

$$f = \frac{w}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{k_p}{m_r}}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{270000}{52}}}{2\pi} \simeq 11.45Hz$$

$$\left| \frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)} \right| = \left| \frac{1}{s^2} \frac{\ddot{z}_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)} \right| = \left| \frac{1}{(jw)^2} \frac{k_p}{m_c} \right| = \frac{m_r}{m_c} = \frac{52}{415} \simeq 0.1253 \simeq -18dB$$

D'après la figure 4.10, le comportement idéal correspondrait à suivre celui du cas  $p = 1000$  jusqu'au point invariant, puis celui du système en boucle ouverte (sans commande). Pour cela, nous pouvons choisir le pôle  $p$  quintuple à 1000 et placer un filtre d'ordre quatre sur la commande (fig. 4.21) afin d'annuler cette dernière en hautes fréquences. Cependant, en pratique, la matrice de Sylvester est mal conditionnée ce qui peut provoquer des erreurs de calcul importantes et en effet, les choix  $p = 400$  à  $p = 1000$  nous amènent à un régulateur  $R(s)/S(s)$  instable. Nous choisissons donc de prendre  $p$  plus petit.

Afin de distinguer les différents comportements et pour faire un choix entre différentes valeurs de  $p$ , nous traçons les réponses fréquentielles du régulateur  $K$  (fig. 4.11), des

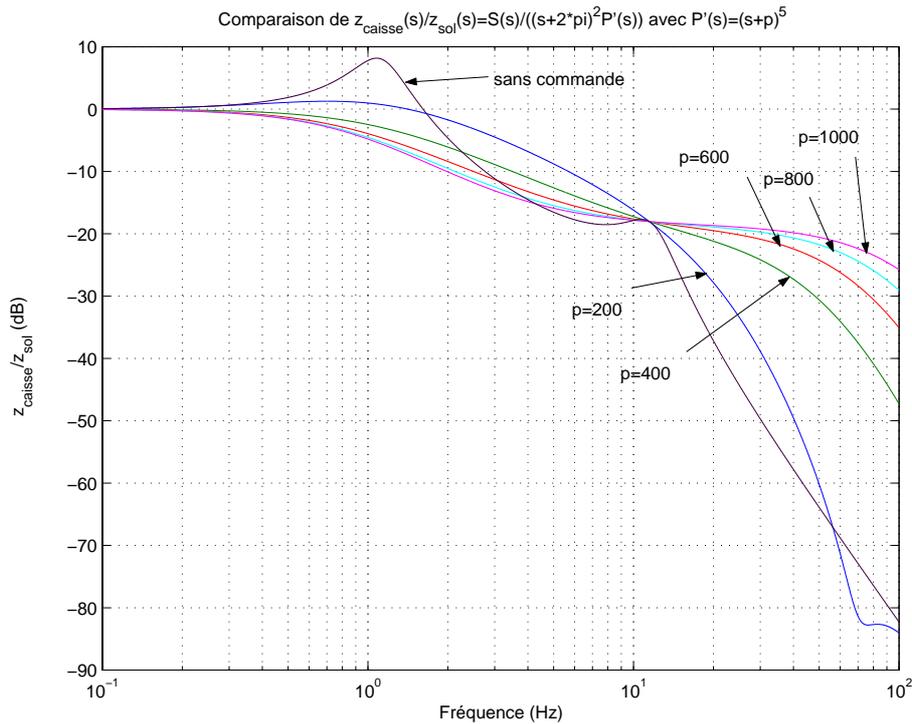


FIG. 4.10: Comparaison du transfert  $\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)}$  pour différentes valeurs du pôle  $p$  de  $P''(s) = (s + p)^5$

fonctions de sensibilité  $S$ ,  $T = y/b$ ,  $KS = u/b$ ,  $SG_d = y/d$  et  $KSG_d = u/d$  (fig. 4.12 à 4.16) et des critères de PSA (fig. 4.17 à 4.19), ainsi que la réponse temporelle à un échelon (voir figure 4.20).

Sur ces figures, la commande n'est pas encore filtrée, et les huit pôles du système bouclé sont :

$$14.67, 2\pi, 2\pi, p, p, p, p, p$$

avec  $p \in \{90, 100, 106, 115, 130\} \text{rad/s}$ . Les flèches indiquent le sens de déformation des courbes lorsque la valeur de  $p$  croît de 90 à 130 rad/s.

Sur ces figures, nous pouvons mettre en évidence certains compromis. En effet, lorsque le confort en basses fréquences  $z_{caisse}/z_{sol}$  est amélioré pour de petites valeurs de  $p$  (fig. 4.17), le rebond de roue  $z_{roue}/z_{sol}$  est accentué (fig. 4.17). De même, si l'on compare le système bouclé et celui en boucle ouverte, on remarque que d'un côté le rebond de roue est amélioré et de l'autre la trépidation est détériorée.

En ce qui concerne les fonctions de sensibilité le choix de  $p = 90 \text{rad/s}$  paraît intéressant puisqu'il allie :

- un correcteur  $K$  moins sensible, en hautes fréquences, aux bruits de mesure (fig. 4.11) et aux perturbations (fig. 4.16),
- un transfert  $y/d = SG_d$  sans pic de résonance et plus proche de la boucle ouverte (fig. 4.15),
- moins d'oscillations dans le rejet des perturbations en sorties et une meilleure marge de module puisque le maximum de  $S$  est plus petit (fig. 4.12) - et un meilleur rejet des bruits

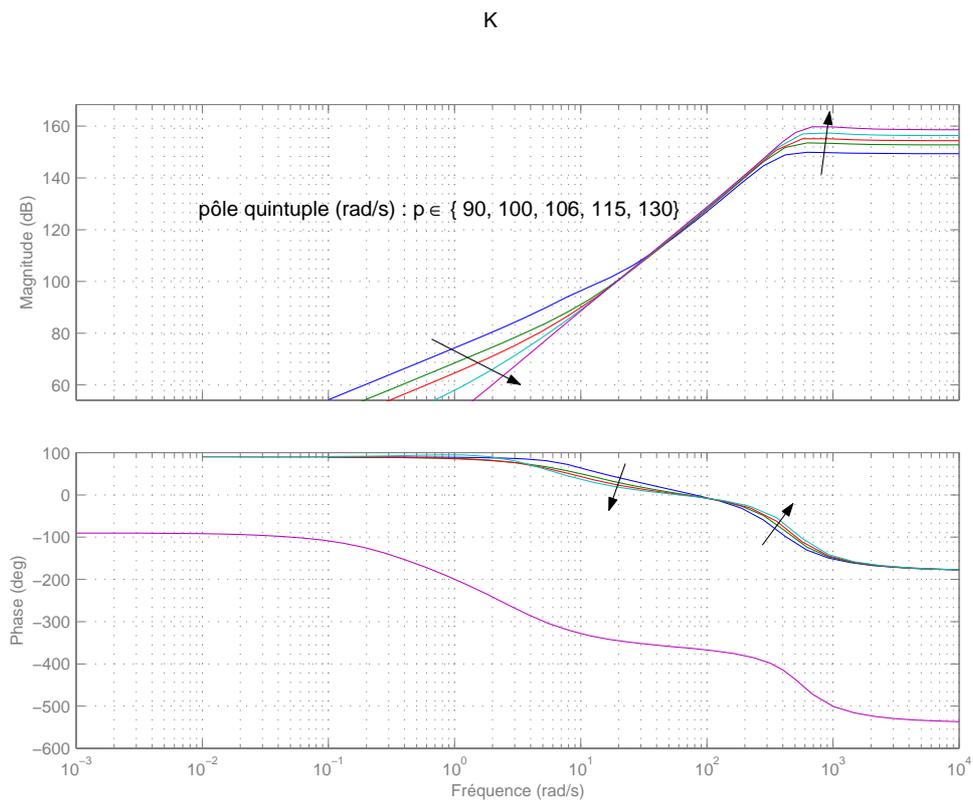


FIG. 4.11: Comparaison de  $K(s)$  pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$

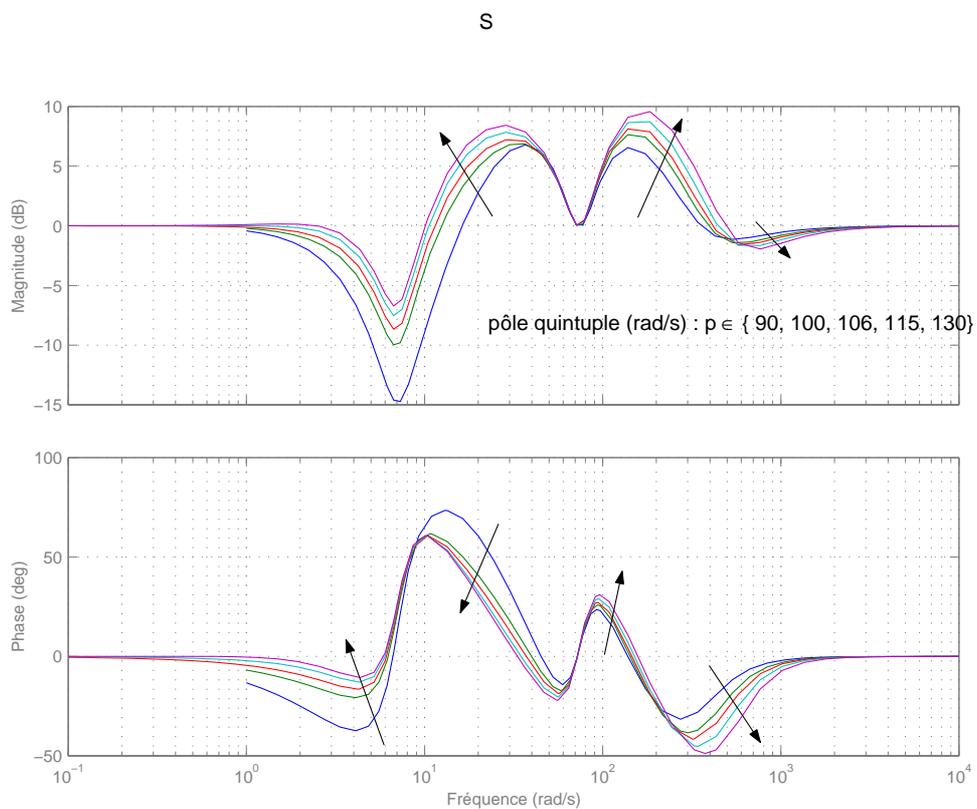
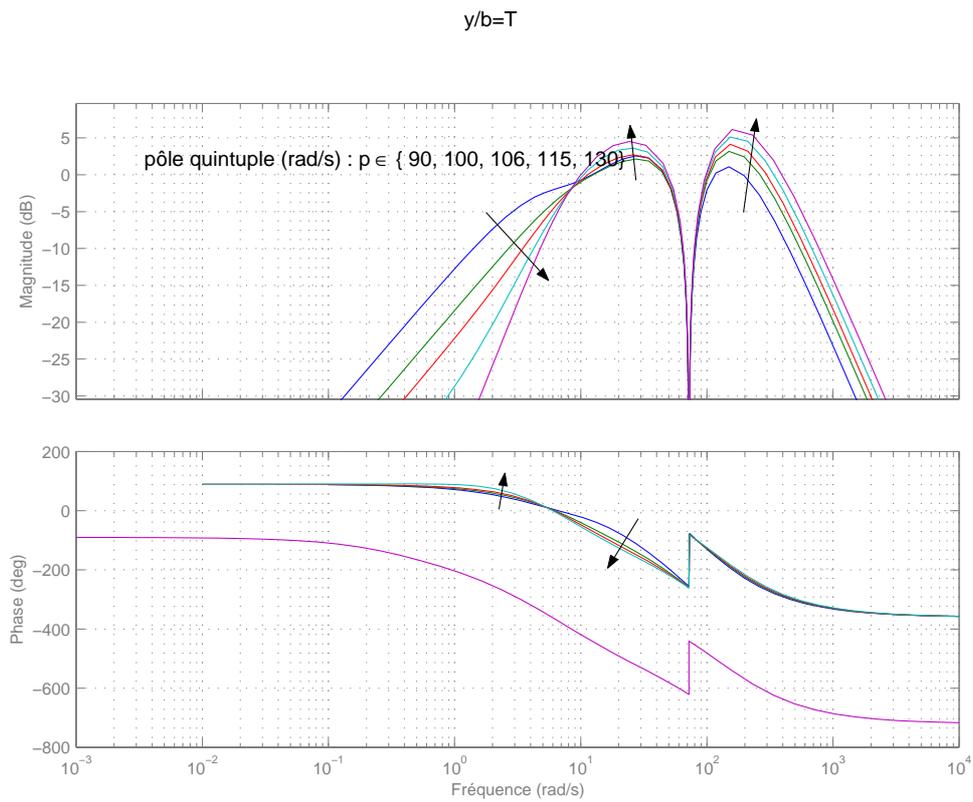
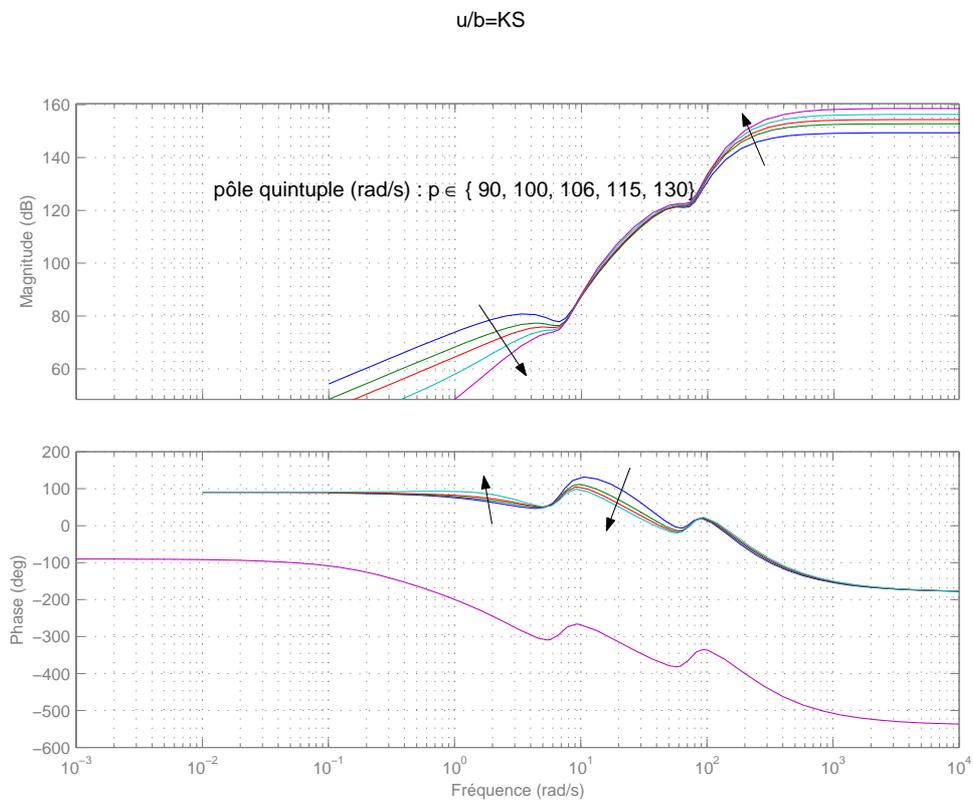


FIG. 4.12: Comparaison de  $S(s)$  pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$

FIG. 4.13: Comparaison de  $T(s)$  pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$ FIG. 4.14: Comparaison de  $KS(s)$  pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$

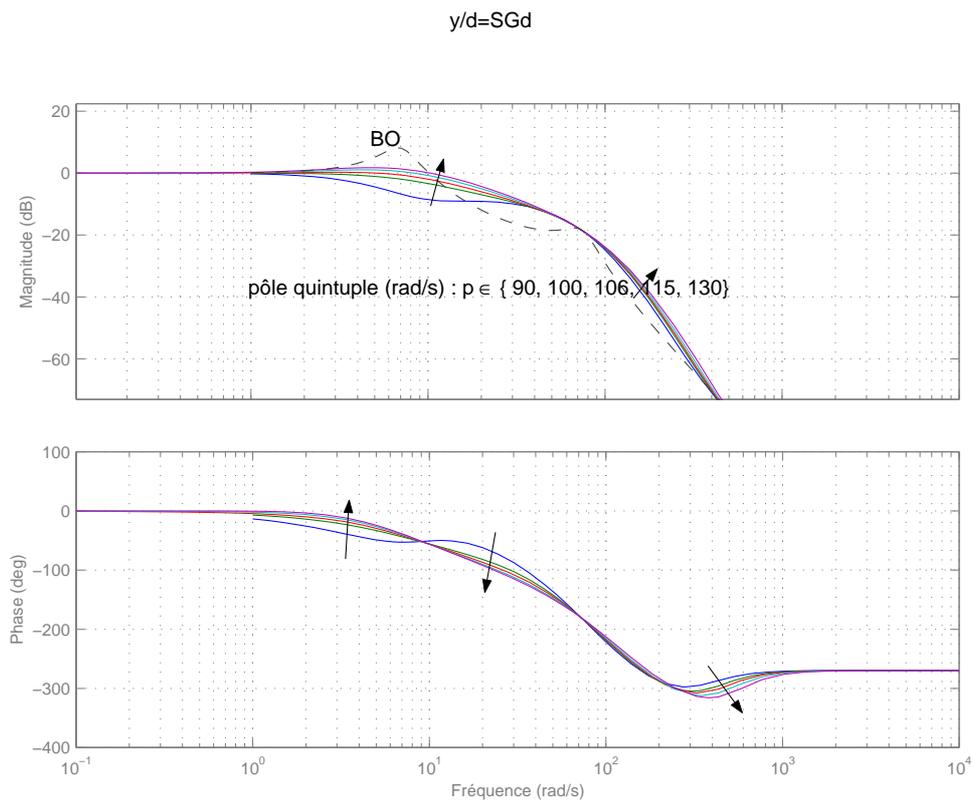


FIG. 4.15: Comparaison de  $SG_d(s)$  pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$

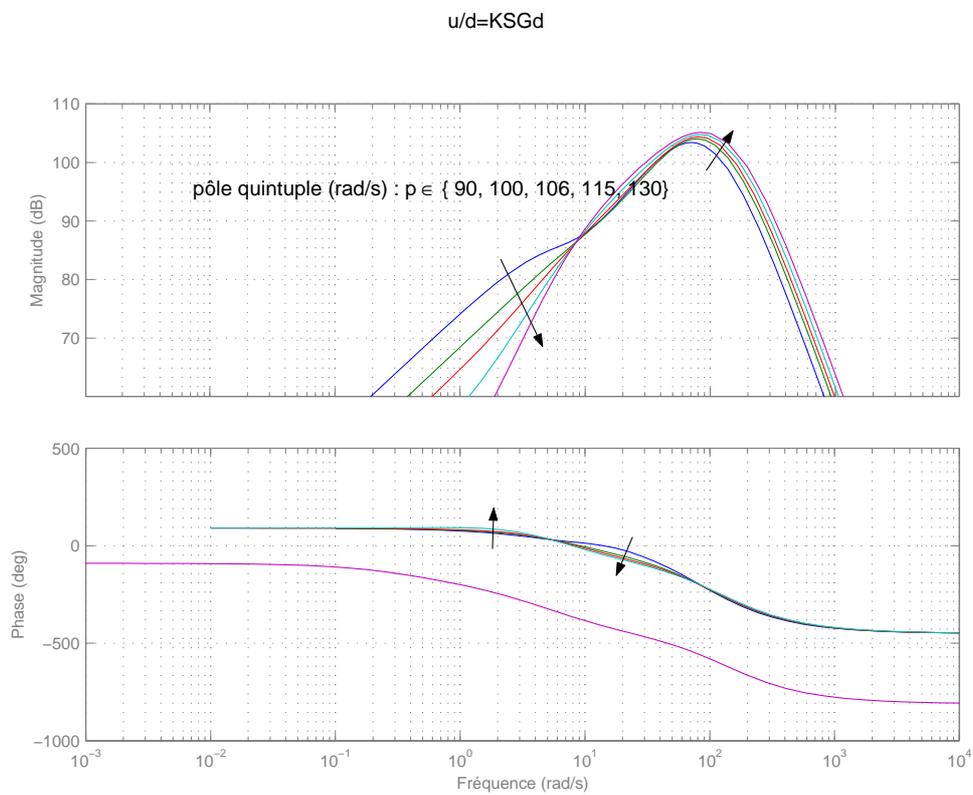


FIG. 4.16: Comparaison de  $KSG_d(s)$  pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$

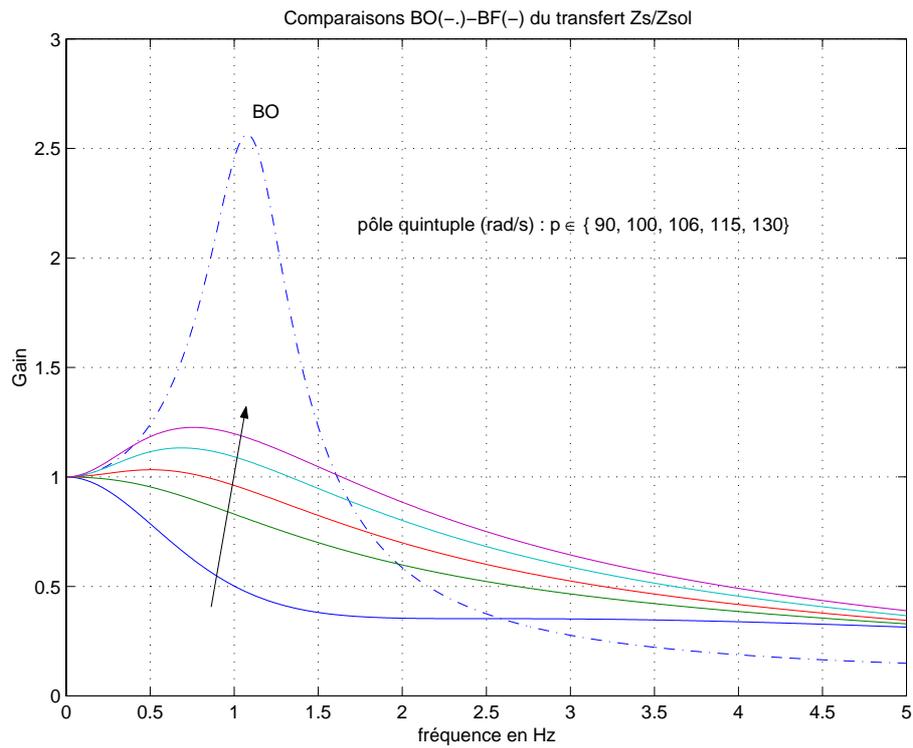


FIG. 4.17: Comparaison du confort ( $z_{caisse}/z_{sol}$ ) pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$

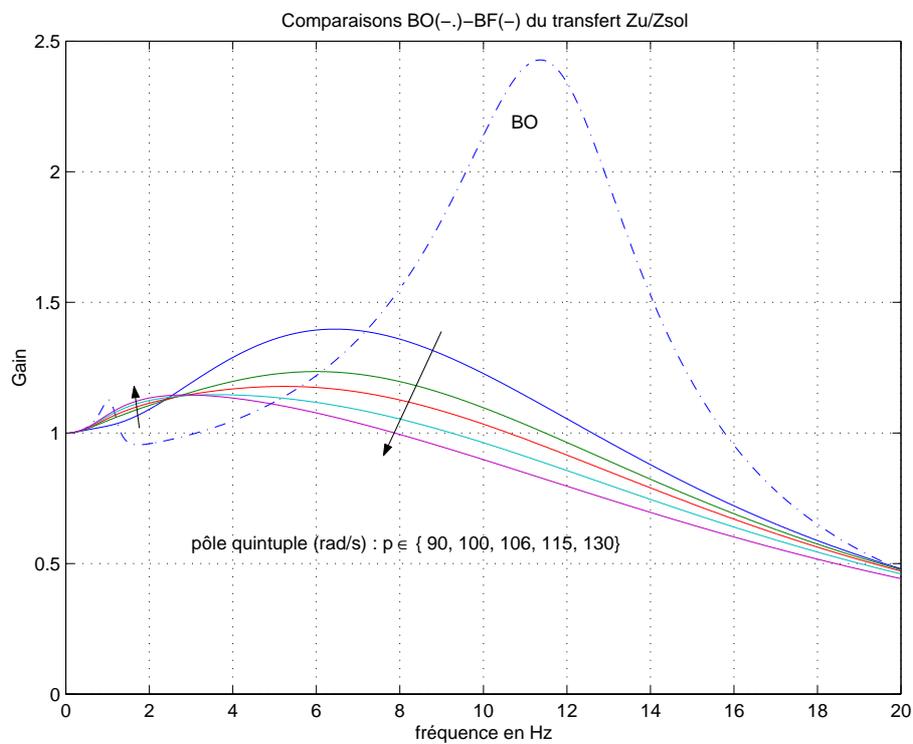


FIG. 4.18: Comparaison du rebond de roue ( $z_{roue}/z_{sol}$ ) pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$

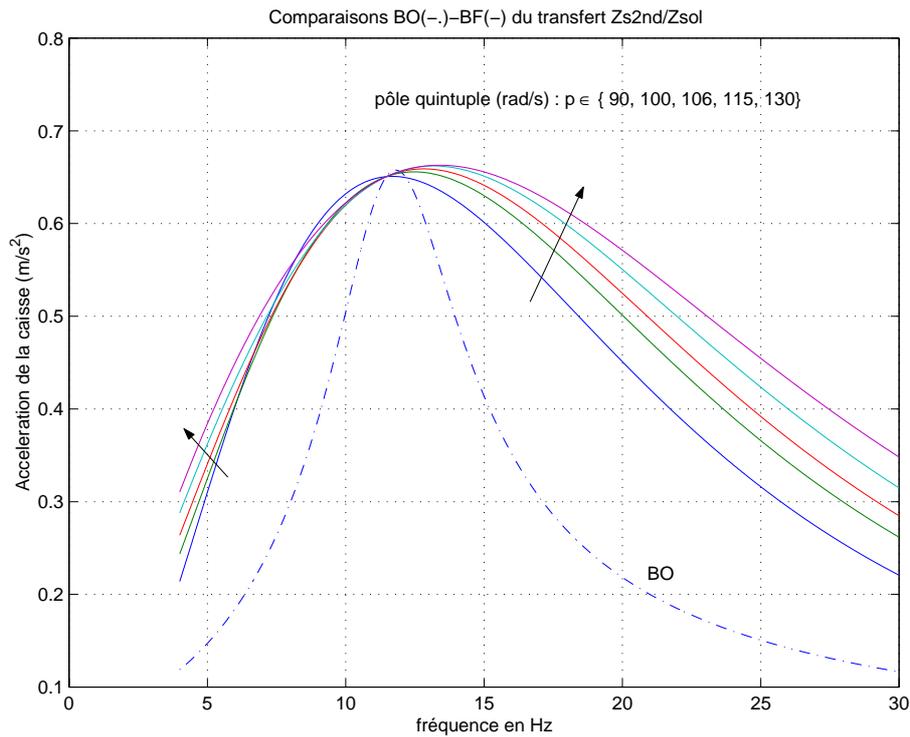


FIG. 4.19: Comparaison de la trépidation ( $\ddot{z}_{caisse}$ ) pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$

de mesure  $b$  sur la sortie  $y$  en hautes fréquences puisque la fonction de sensibilité  $T$  est diminuée (fig. 4.13).

D'après la figure 4.20, le choix de  $P'(s) = (s + 106)^5$  permet d'obtenir une réponse indicielle dont le premier dépassement reste dans la bande des 5%, ce qui correspond à un temps de réponse très rapide. On remarque cependant une détérioration du filtrage de  $\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)}$  au delà de 2Hz sauf au niveau du point invariant, par rapport au système en boucle ouverte (sans commande) (voir figures 4.15 et 4.24).

Une solution pour éviter la détérioration du filtrage, dû à la diminution du pic de résonance, consiste à filtrer la commande en hautes fréquences.

L'ajout d'un filtre (fig. 4.21) passe-bas

$$F(s) = w_n^2 / (s^2 + 2\xi w_n \times s + w_n) \quad (4.25)$$

du second ordre en aval du correcteur  $K$  permet d'éviter la détérioration du filtrage entre 12 et 65Hz. Le compromis diminution du pic de résonance/filtrage n'est pas atteignable sans filtre.

Afin d'illustrer les effets du filtre, nous représentons sur les figures 4.22 et 4.23 les réponses fréquentielles de  $\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)}$  pour différentes valeurs de l'amortissement  $\xi$  et de la pulsation de coupure  $w_n$ .

Les influences des paramètres  $\xi$  et  $w_n$  du filtre  $F$  sont les suivantes :

- Si  $w_n$  augmente, l'amplitude du pic de résonance diminue et sa fréquence augmente.

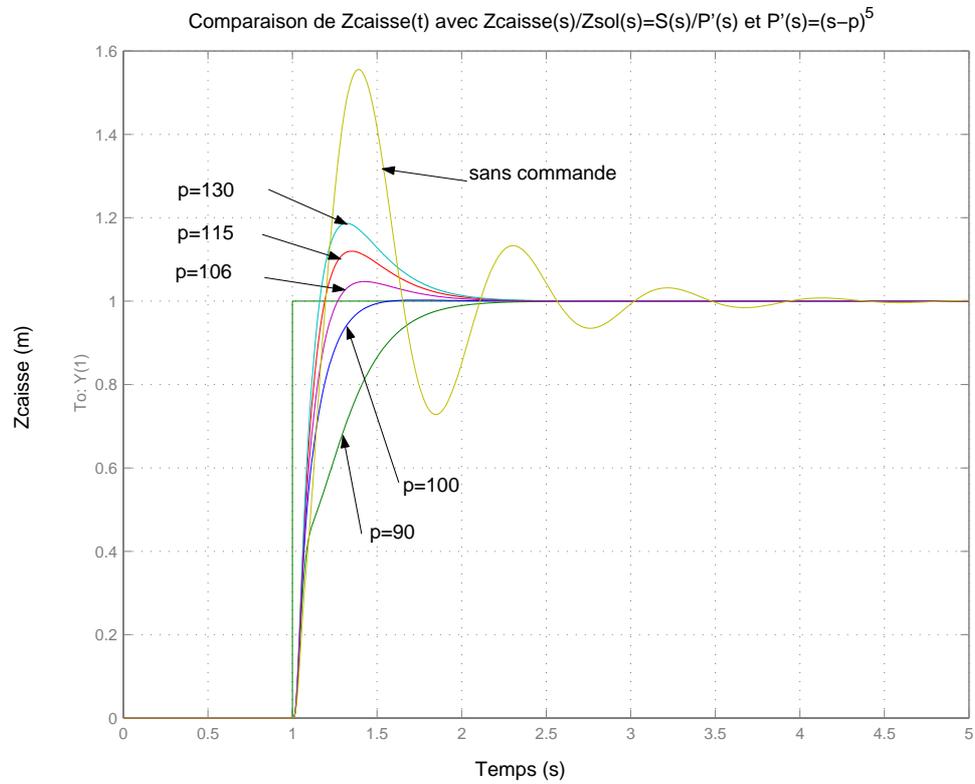


FIG. 4.20: Comparaison de  $z_{casse}(t)$  et  $z_{sol}(t)$  pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$

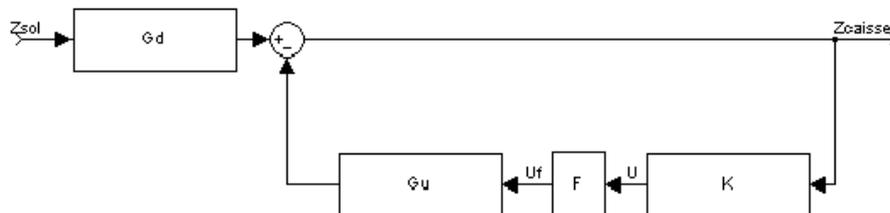


FIG. 4.21: Schéma de régulation avec filtre de la commande

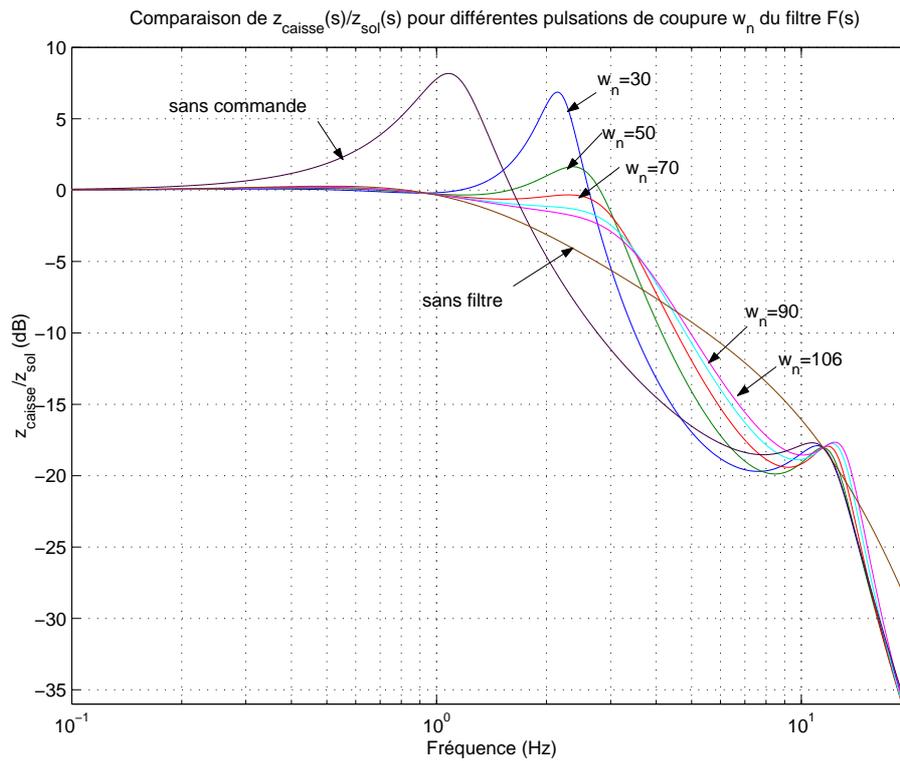


FIG. 4.22: Comparaison de  $\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)}$  pour différentes valeurs de la fréquence de coupure  $w_n$  du filtre  $F(s)$  avec  $\xi=0.7$

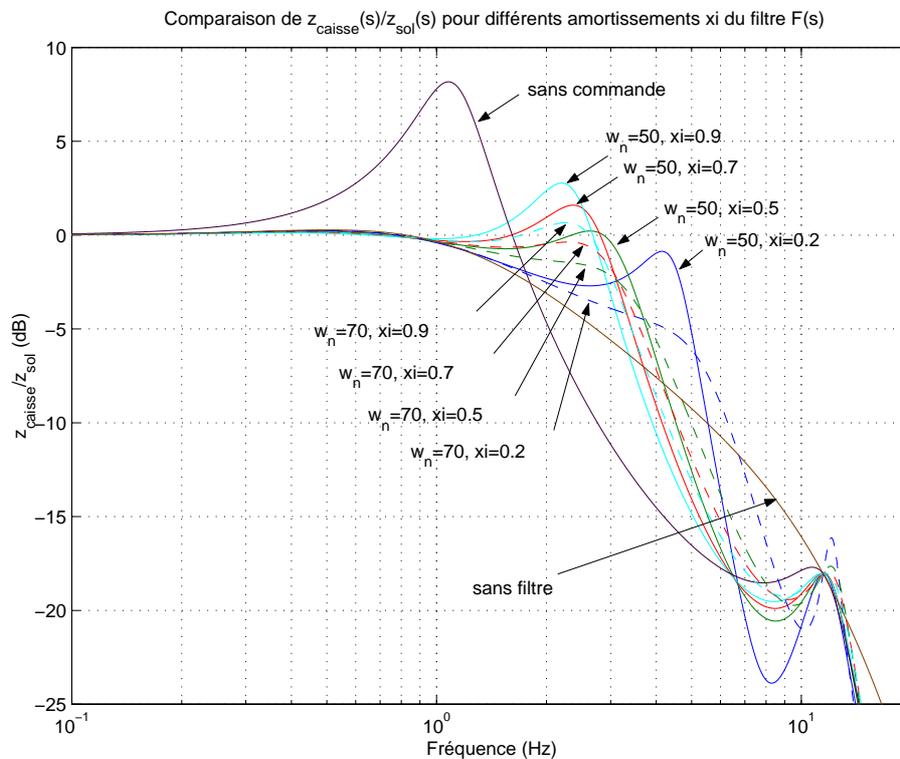


FIG. 4.23: Comparaison de  $\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)}$  pour différentes valeurs de l'amortissement  $\xi$  du filtre  $F(s)$

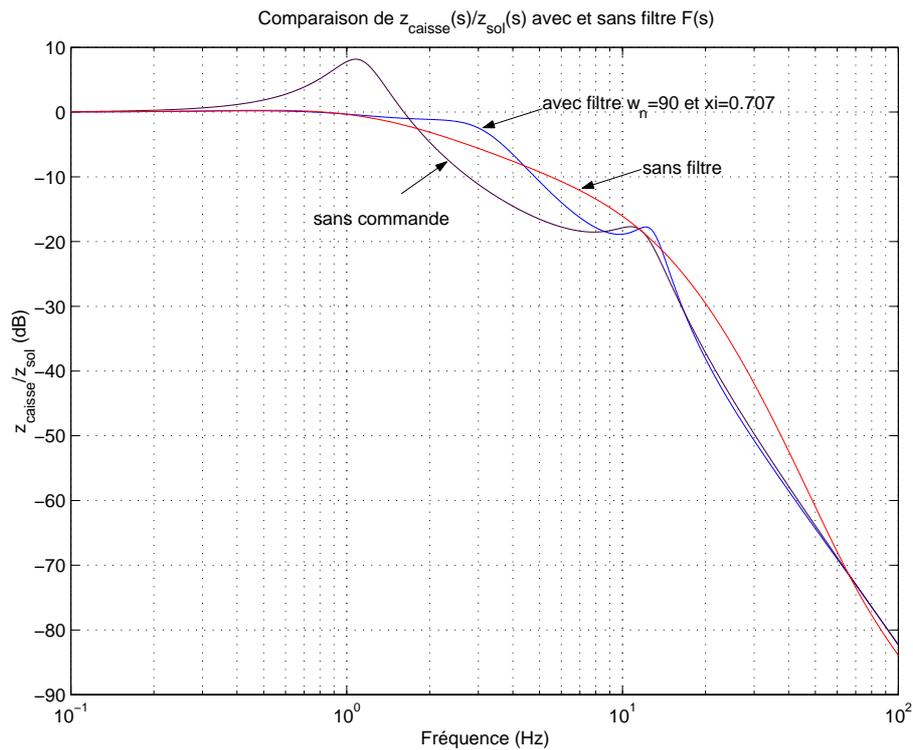


FIG. 4.24: Comparaison de  $\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)}$  en boucle ouverte et en boucle fermée avec ou sans le filtre  $F(s)$

- Si  $w_n$  diminue, le filtrage des fréquences supérieures au pic se rapproche du cas sans commande.
- Si  $\xi$  augmente, l'amplitude du pic de résonance augmente légèrement et sa fréquence diminue légèrement.
- Si  $\xi$  diminue, les pics autour de 10Hz sont plus prononcés.

Notre choix du filtre est alors le suivant :  $w = 90 \text{ rad/s}$  et  $\xi = 0.707$  car il permet, en filtrant la commande en hautes fréquences, de se rapprocher du comportement de la boucle ouverte, sans détériorer les performances en basses fréquences. En effet, en basses fréquences le transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$  ne présente plus de pic de résonance. La figure 4.24 compare les réponses fréquentielles de  $\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)}$  en boucle ouverte, en boucle fermée sans filtre et avec filtre.

Le diagramme de Bode du régulateur avec et sans filtre est représenté sur la figure 4.25. Le filtre empêche le régulateur d'agir en hautes fréquences, évitant ainsi de détériorer le filtrage de la fonction de transfert entre le profil de la route et le déplacement vertical de la caisse. Cela permet aussi d'avoir une moindre sensibilité aux bruits de mesures en hautes fréquences.

### 4.3.2 Analyse des résultats de la première synthèse

Nous nous intéressons tout d'abord aux critères de PSA avant de parler des critères de la littérature. Pour finir nous étudions les fonctions de sensibilités du système bouclé.

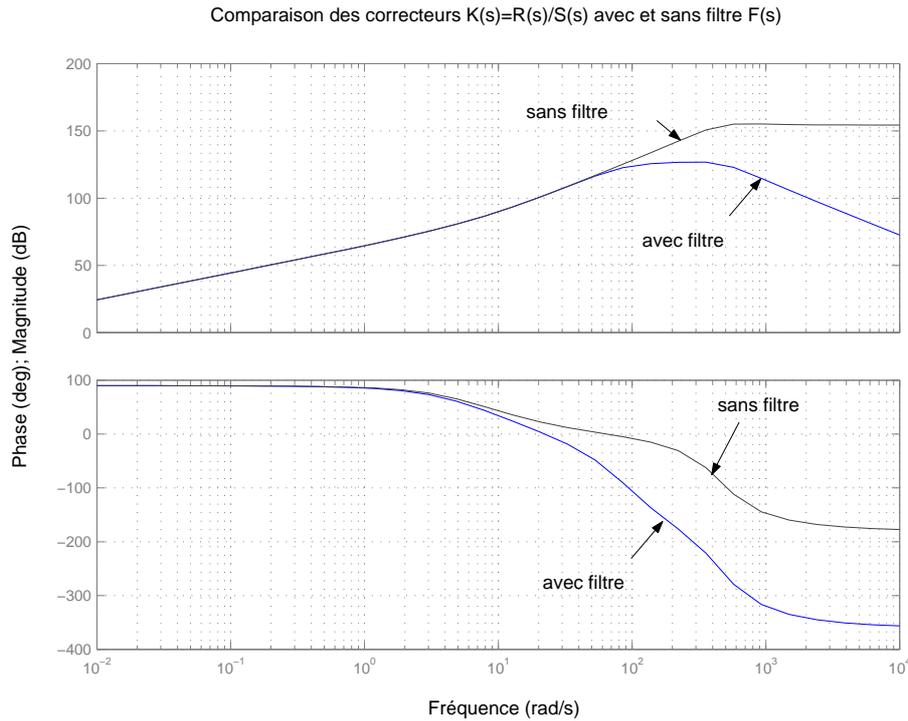


FIG. 4.25: Comparaison du régulateur  $K(s) = \frac{R(s)}{S(s)}$  avec et sans le filtre  $F(s)$

#### a) Critères de PSA

Les figures 4.26 à 4.28 correspondent respectivement aux réponses fréquentielles des fonctions de transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$ ,  $z_{roue}/z_{sol}$  et à l'accélération de la caisse  $\ddot{z}_{caisse}$ . La réponse temporelle est donnée par la figure 4.29. Ces critères, définis au chapitre 2, traduisent respectivement le confort en basses fréquences, le rebond de roue et à la trépidation. Les courbes notées "limite" sont relative aux critères de la littérature (cf. paragraphe suivant).

Même si le "confort BF" est augmenté par rapport au système en boucle ouverte (voir table 4.1), le pic de résonance du confort en basses fréquences est atténué ce qui est le principal objectif. Le rebond de roue et la trépidation sont cependant détériorés. Cette commande paraît donc peu acceptable.

#### b) Critères de la littérature

Contrairement aux critères de PSA, qui concernent le gain de fonctions de transfert ( $z_{caisse}/z_{sol}$ ,  $z_{roue}/z_{sol}$ ), les critères de confort de la littérature concernent des variables de la caisse comme l'accélération, le jerk, etc... . De plus, ces critères ne sont pas définis pour une amplitude spécifique du signal d'entrée et leur satisfaction dépendant donc fortement du signal d'entrée choisi. Dans notre cas, le modèle utilisé pour le profil de la route est simpliste, puisque l'amplitude de la sinusoïde est constante et donc indépendante de la fréquence.

Le critère de confort proposé par (Janeway, 1965) (cf. (Wong, 1993)) recommande de limiter le jerk de la caisse à  $12.6m/s^3$  entre 1 et 6Hz. Cette limite correspond pour l'accélération à une amplitude maximale de  $12.6/(2 * \pi f)$  et pour le déplacement de la

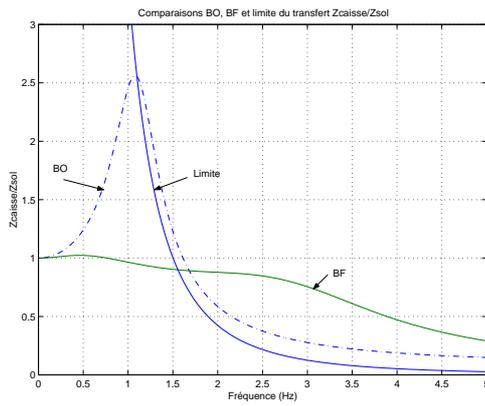


FIG. 4.26: Confort basses fréq.

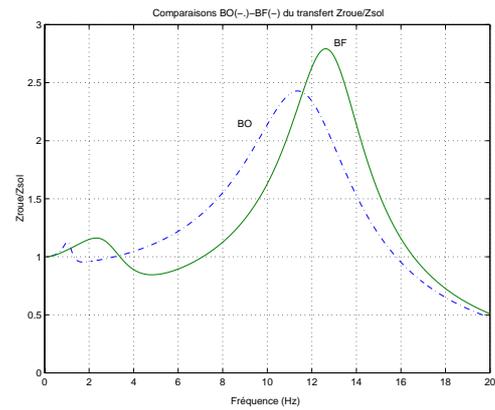


FIG. 4.27: Rebond de roue

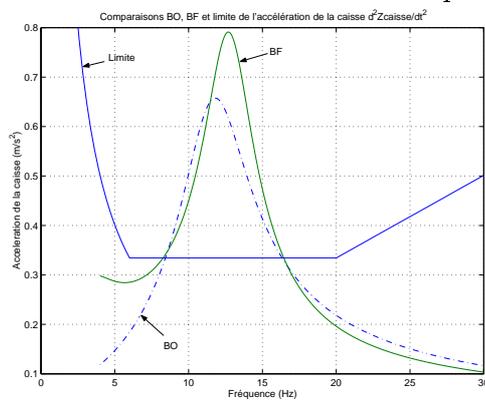


FIG. 4.28: Confort en hautes fréquences (Trépidation)

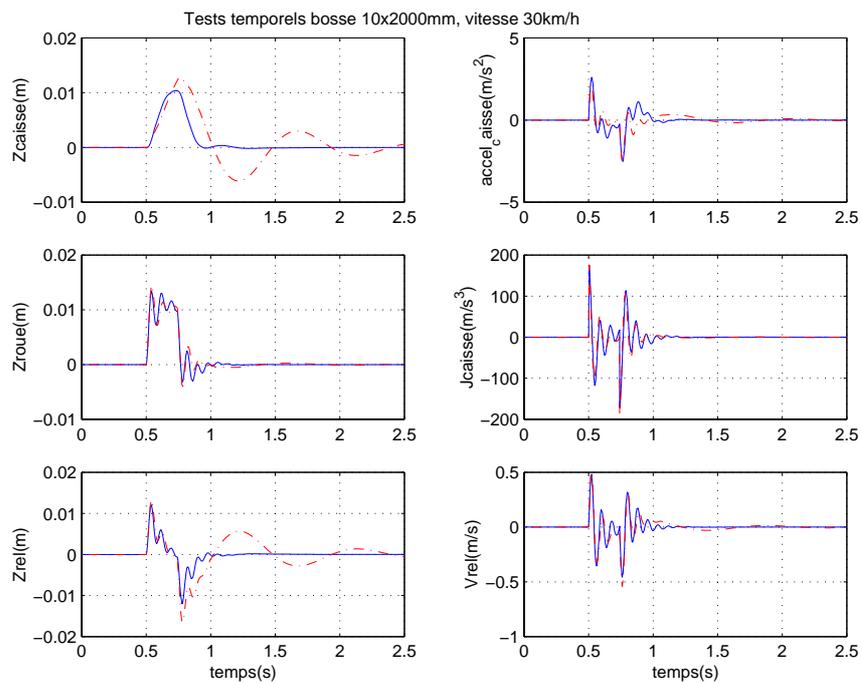


FIG. 4.29: Réponses temporelles

caisse à une amplitude maximale de  $12.6/(2\pi f)^3$  soit 5cm à 1Hz et 0.235mm à 6Hz. Or pour le test fréquentiel de PSA concernant le confort, le sol est modélisé par une sinusoïde d'amplitude 15mm. Dans ce cas, le gain de la fonction de transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$  doit être limité à  $12.6/((2\pi f)^3 \cdot 0.015)$  soit 3.3864 ( $\sim 10.6dB$ ) à 1Hz et 0.0157 ( $\sim -36.1dB$ ) à 6Hz, ce qui n'est pas le cas de la figure 4.24. En boucle ouverte, le pic de résonance étant important, la limite fixée est dépassée à partir de 1.1Hz. Cependant, le comportement du système ne s'éloigne pas trop de la limite. En boucle fermée le pic de résonance est atténué, ce qui permet de respecter la limite jusqu'à 1.5Hz, mais le filtrage est détérioré, par rapport à la boucle ouverte, à partir de 1.7Hz et s'écarte beaucoup de la limite fixée.

De même, entre 6 et 20hz, la limite proposée pour l'accélération est de  $0.33m/s^2$ . Cette limite n'est pas respectée entre 8 et 16Hz, que se soit pour le système en boucle ouverte ou en boucle fermée (voir fig. 4.28). Notons que, l'amplitude du profil de la route étant de 1mm, le point invariant de l'accélération de la caisse de  $0.65m/s^2$  ( $= 0.001 * k_p/m_c$ ) à 11.45Hz ( $= \sqrt{(k_p/m_r)}/2\pi$ ) se situe au dessus de la limite proposée. Cette limite ne peut être respectée que si l'amplitude du profil de la route est diminué de moitié ou bien si les paramètres  $k_p$ ,  $m_c$ ,  $m_r$  sont modifiés.

Entre 20 et 60Hz, la vitesse est limitée à  $2.7mm/s$ , ce qui correspond à limiter l'accélération par  $0.0027 * (2\pi f)$  qui correspond à une droite passant par les points ( $0.33m/s^2$ , 20Hz) et ( $0.0027(2\pi 60) = 1.02m/s^2$ , 60Hz). Cette limite est respectée pour les deux systèmes (voir fig. 4.28).

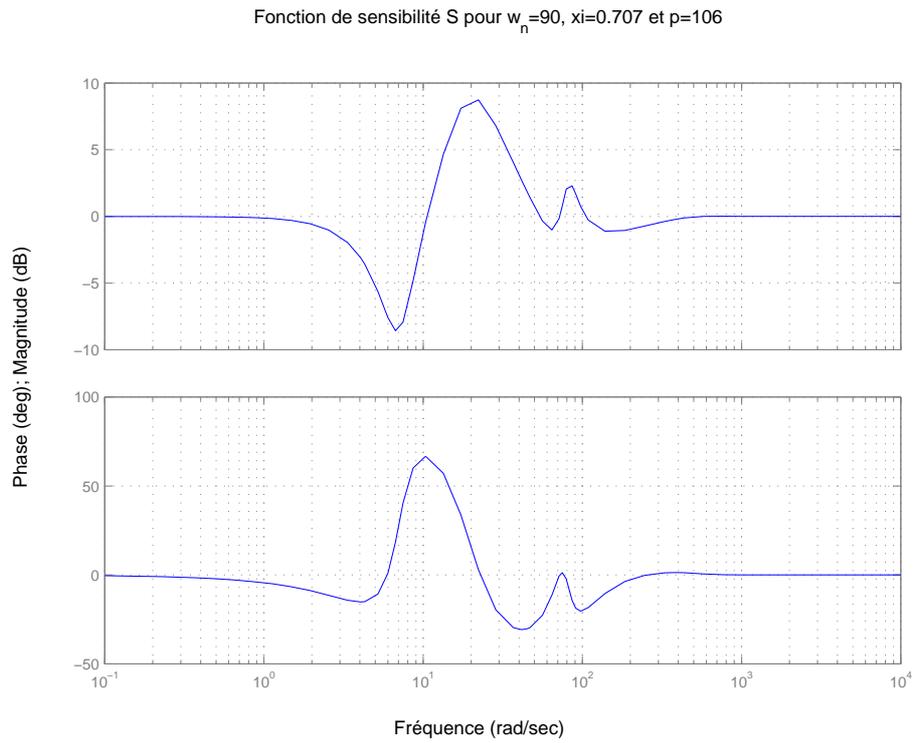
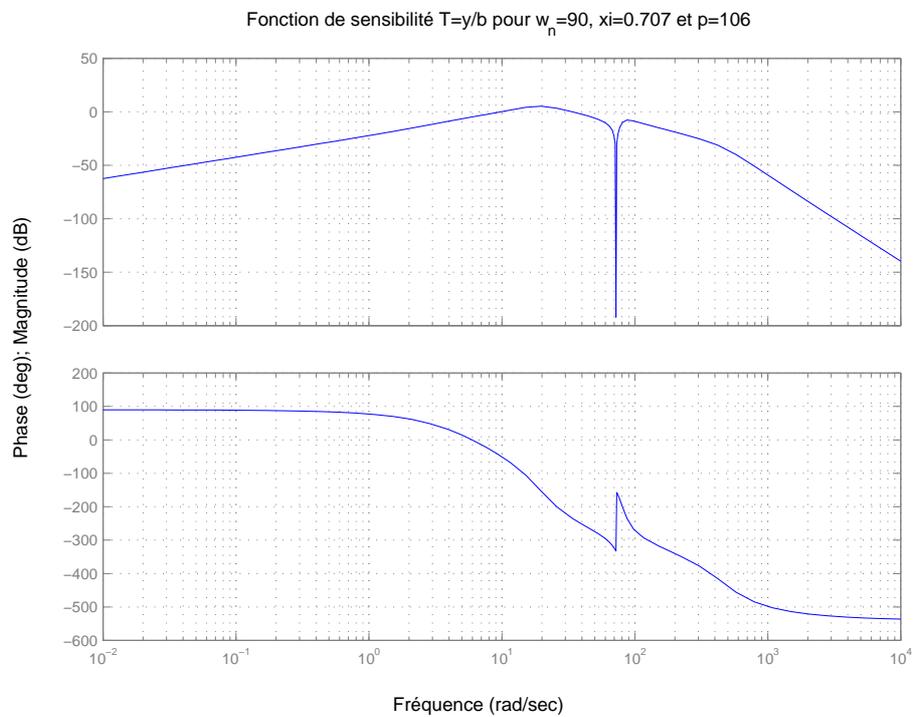
Les limites de confort ne sont donc pas toutes respectées pour les simulations effectuées, mais rappelons que ces dernières dépendent fortement de l'amplitude choisie pour le profil de la route. Pour utiliser les critères de la littérature, il conviendra donc d'utiliser un modèle plus réaliste du profil de la route.

### c) Fonctions de sensibilité

Nous vérifions sur les figures 4.30 et 4.31 que la fonction de sensibilité  $\mathcal{S}$  est bien unitaire en hautes et en basses fréquences et que  $\mathcal{T}$  est donc nul pour ces fréquences.

De plus, afin de garantir une certaine robustesse et une bonne marge de module, les maxima  $M_S$  et  $M_T$  des fonctions de sensibilité  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  doivent classiquement être inférieurs à 6dB (ou 3dB pour une commande plus prudente). Le maximum de la fonction de sensibilité  $\mathcal{S}$  est supérieur à 6dB (8.7dB) ce qui signifie que nous avons un comportement oscillatoire dans le rejet des perturbations de sortie (profil de route) et une marge de module "moyenne" et que la robustesse en stabilité, vis-à-vis des incertitudes non-structurées de forme multiplicative inverse, n'est pas assurée. Le maximum de la fonction de sensibilité complémentaire  $\mathcal{T}$  est légèrement inférieur à 6dB. Cela indique que cette suspension a une certaine robustesse en stabilité vis à vis des incertitudes non-structurées de forme multiplicative directe (Zhou et al., 1996). Le tableau 4.1 récapitule les performances de cette suspension réglée par une commande par placement de pôles.

Nous avons pu voir qu'il n'est pas évident de trouver l'équilibre entre les différents compromis en utilisant la commande par placement de pôles. Une approche plus systématique est maintenant abordée.

FIG. 4.30: Fonction de sensibilité  $\mathcal{S}(s)$ FIG. 4.31: Fonction de sensibilité complémentaire  $\mathcal{T}(s) = y/b$

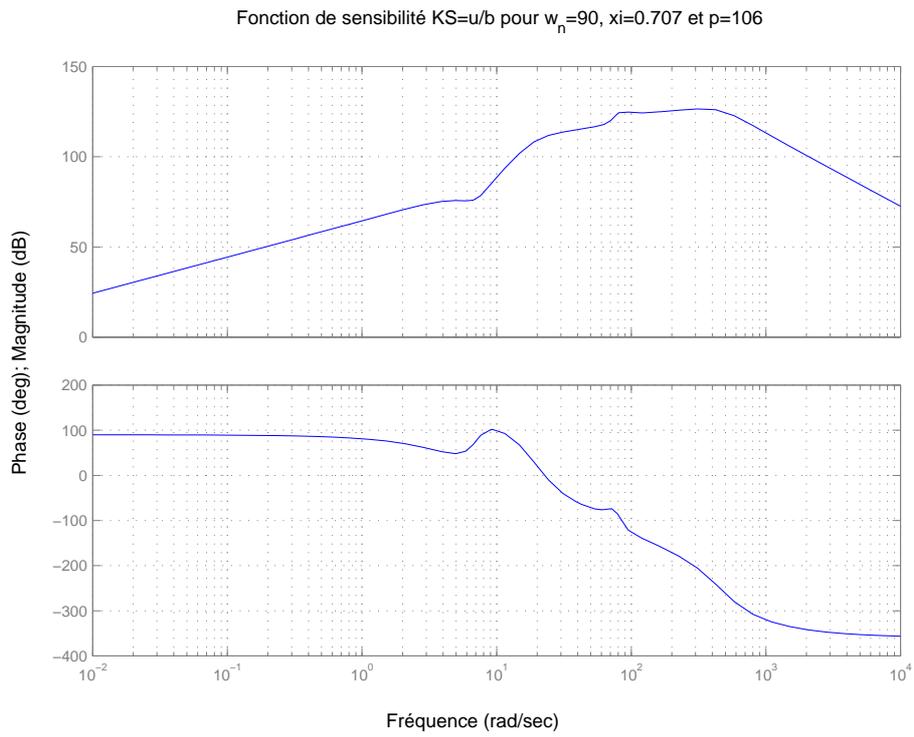


FIG. 4.32: Fonction de sensibilité  $\mathcal{KS}(s) = u/b$

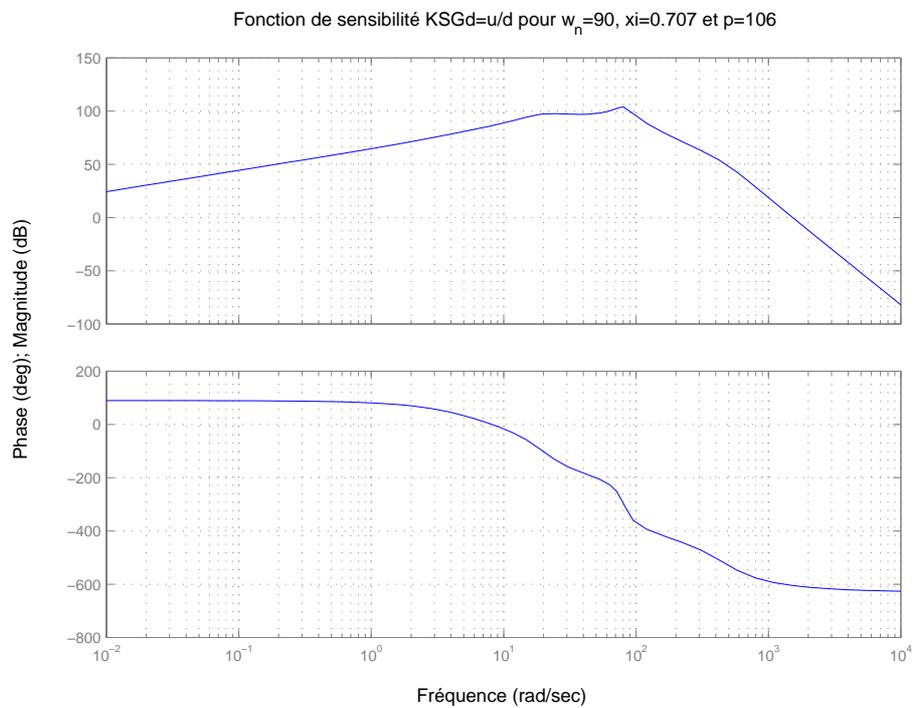


FIG. 4.33: Fonction de sensibilité  $\mathcal{KS}(s)G_d(s) = u/d$

$p$ (rad/s)	106
$w_n$ (rad/s)	90
$\xi$	0.707
"confort BF"	276
$\text{Max.}(\frac{z_{caisse}}{z_{sol}})$	1.02
$\text{Max.}(\frac{z_{roue}}{z_{sol}})$	2.792
Trépidation	1.843
$\text{Max.}(\mathcal{S})$	$2.737 \simeq 8.7\text{dB}$
$\text{Max.}(\mathcal{T})$	$1.842 \simeq 5.3\text{dB}$
$\text{Max.}(\mathcal{KS})$	$2.11\text{e}6 \simeq 126\text{dB}$
$\text{Max.}(\mathcal{KSG}_d)$	$1.57\text{e}5 \simeq 104\text{dB}$
$w_{\mathcal{KSG}_d}$ (rad/s)	327

TAB. 4.1: Critères PSA et fonctions de sensibilité  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{KS}$  avec un pôle quintuple  $p = 106$ , la pulsation  $w_n = 90$  rad/s et l'amortissement  $\xi = 0.707$  du filtre  $F(s)$

### 4.3.3 Deuxième synthèse

Un autre choix est préconisé par DeLarminat (1993), pour le placement des pôles de la boucle fermée. Il s'agit de choisir les pôles de la boucle fermée identiques à ceux de la boucle ouverte mais avec un amortissement plus important.

Ainsi, les quatre premiers pôles de la boucle fermée sont les quatre pôles correspondant aux fréquences de ceux de la boucle ouverte mais avec un amortissement plus important. Le cinquième pôle est choisi pour compenser le zéro du numérateur  $B_d(s)$  et les trois derniers pôles sont à placer de la même façon que précédemment, i.e. sous la forme d'un pôle triple  $p$ .

La figure 4.34 nous montre l'influence du placement des 3 derniers pôles sur la réponse fréquentielle de la fonction de transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$ . De même, nous traçons les réponses fréquentielles du régulateur  $K$  (fig. 4.35), des fonctions de sensibilité  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{T} = y/b$ ,  $\mathcal{KS} = u/b$ ,  $\mathcal{SG}_d = y/d$  et  $\mathcal{KSG}_d = u/d$  (fig. 4.36 à 4.40), et des critères de PSA (fig. 4.41 à 4.43). Sur ces figures, le filtre  $F(s)$ , présenté un peu plus loin, n'est pas pris en compte. Il sera placé en aval du régulateur  $K(s)$  pour filtrer la commande.

Lorsque l'on augmente la valeur du pôle triple de 74.34 à 1000rad/s, on apporte certaines améliorations :

- Le "confort BF" diminue, puisque le filtrage de  $z_{caisse}/z_{sol}$  est amélioré (fig. 4.41)
  - la trépidation diminue légèrement (fig. 4.43),
  - le maximum de la fonction de sensibilité  $\mathcal{S}(s)$  diminue jusqu'à  $p = 200\text{rad/s}$ , puis réaugmente jusqu'à  $p = 1000\text{rad/s}$  (fig. 4.36) et donc le rejet des perturbations de sortie est moins oscillant et la marge de module ( $2.93 = 1/\max(\mathcal{S}(s))$ ) meilleure, pour le choix  $p = 200\text{rad/s}$
  - le maximum de la fonction de sensibilité  $\mathcal{T}(s) = y/b$  (fig. 4.37) reste inférieur à 0dB ce qui donne une bonne robustesse en stabilité
- mais aussi certaines détériorations :
- le pic de résonance du transfert  $z_{roue}/z_{sol}$  augmente (fig. 4.42),
  - la commande est beaucoup plus sensible aux bruits de mesure en hautes fréquences, puisque le maximum de la fonction  $\mathcal{KS}(s) = u/b$  augmente fortement (fig. 4.38),
  - la commande est beaucoup plus sollicitée en hautes fréquences pour répondre aux per-

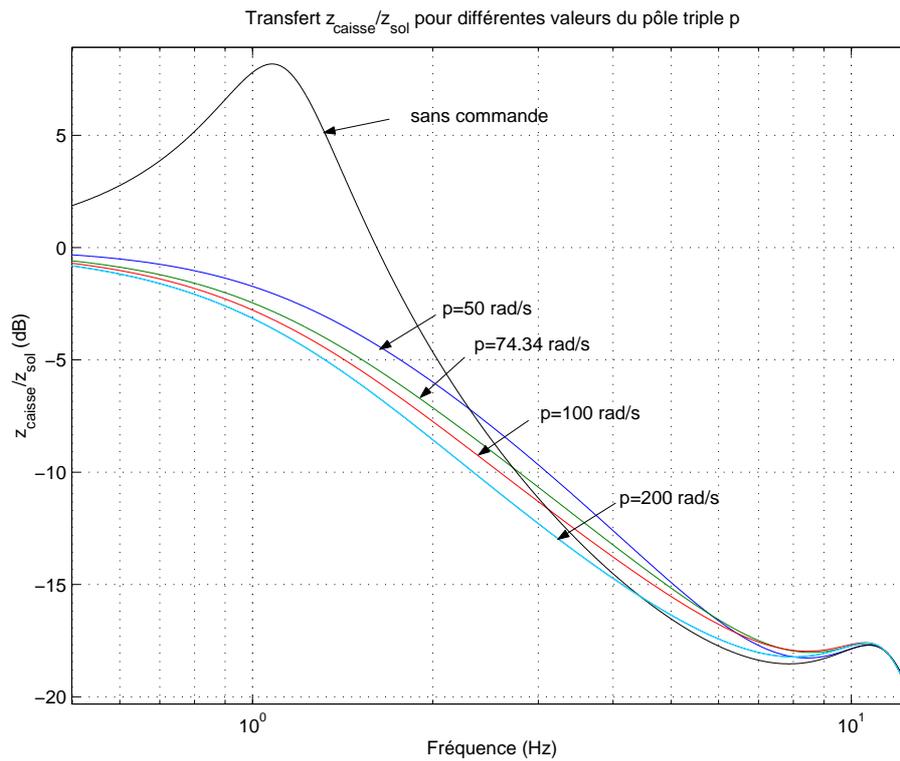


FIG. 4.34: Transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$  pour différentes valeurs du pôle triple  $p$  du dénominateur

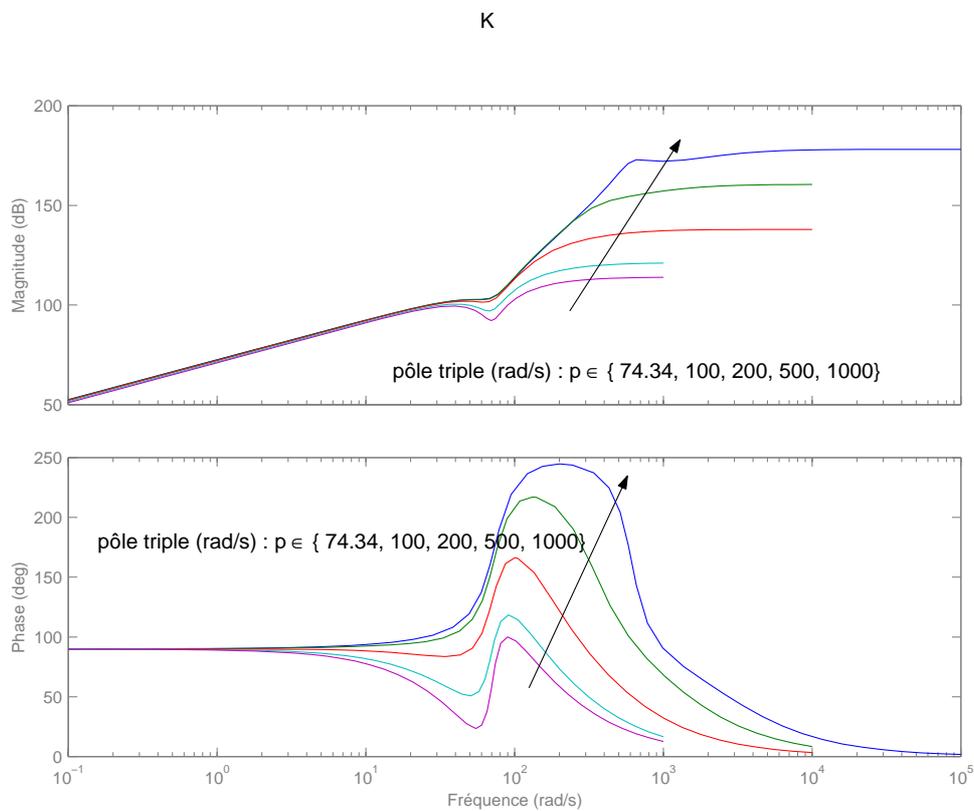
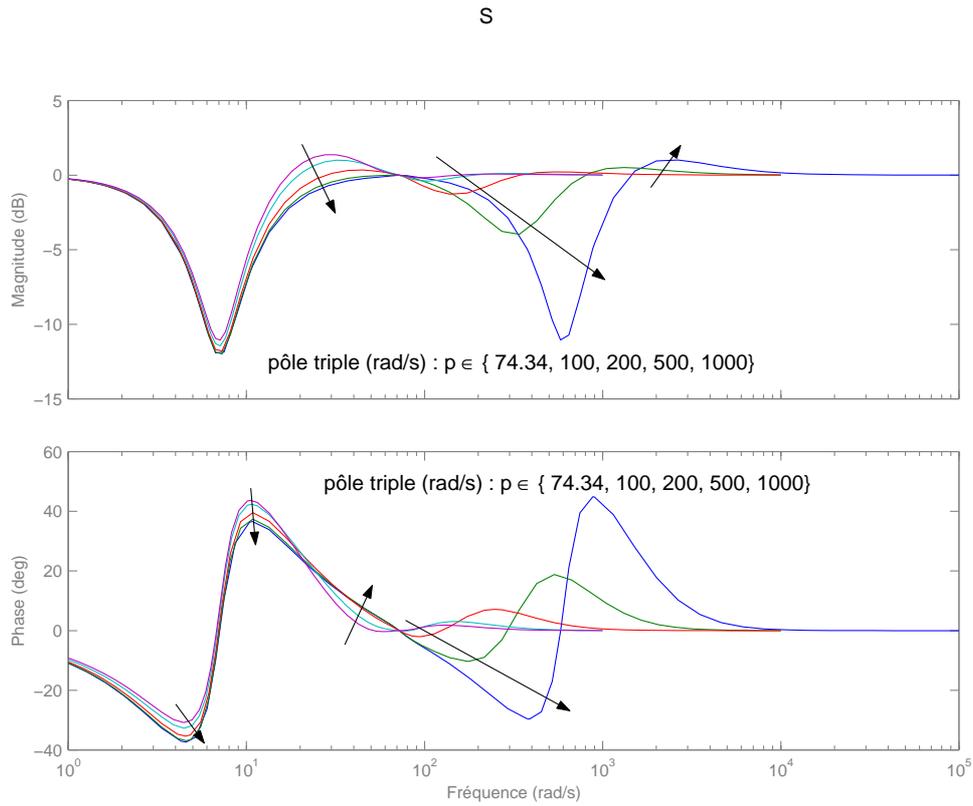
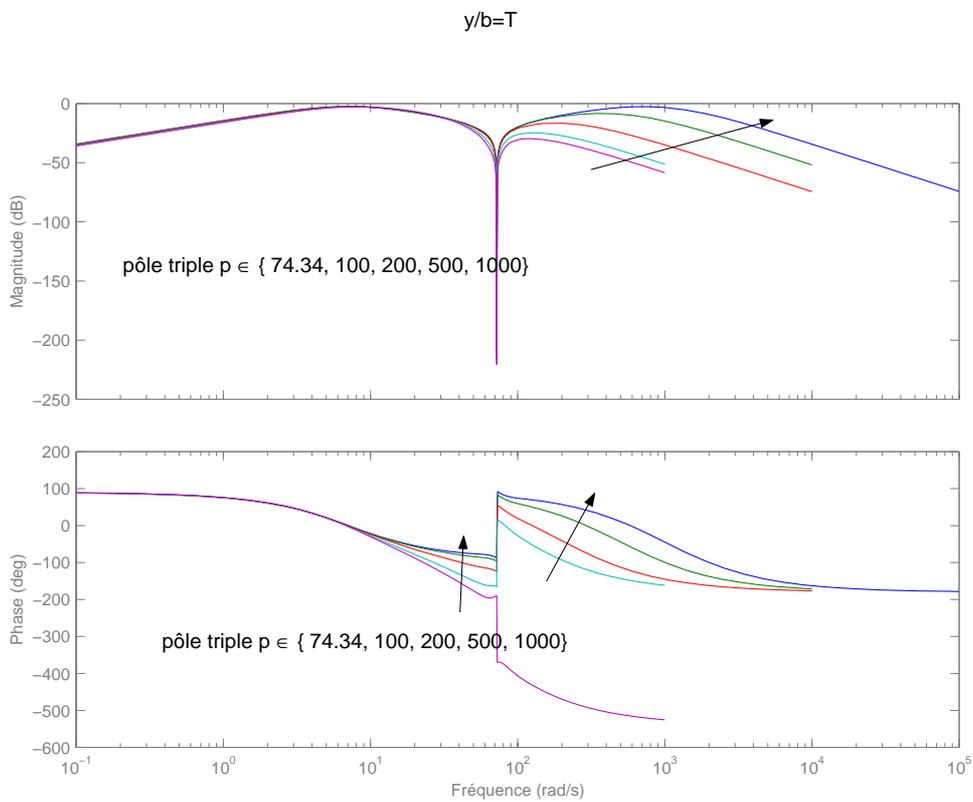


FIG. 4.35: Comparaison de  $K(s)$  pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$

FIG. 4.36: Comparaison de  $S(s)$  pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$ FIG. 4.37: Comparaison de  $T(s)$  pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$

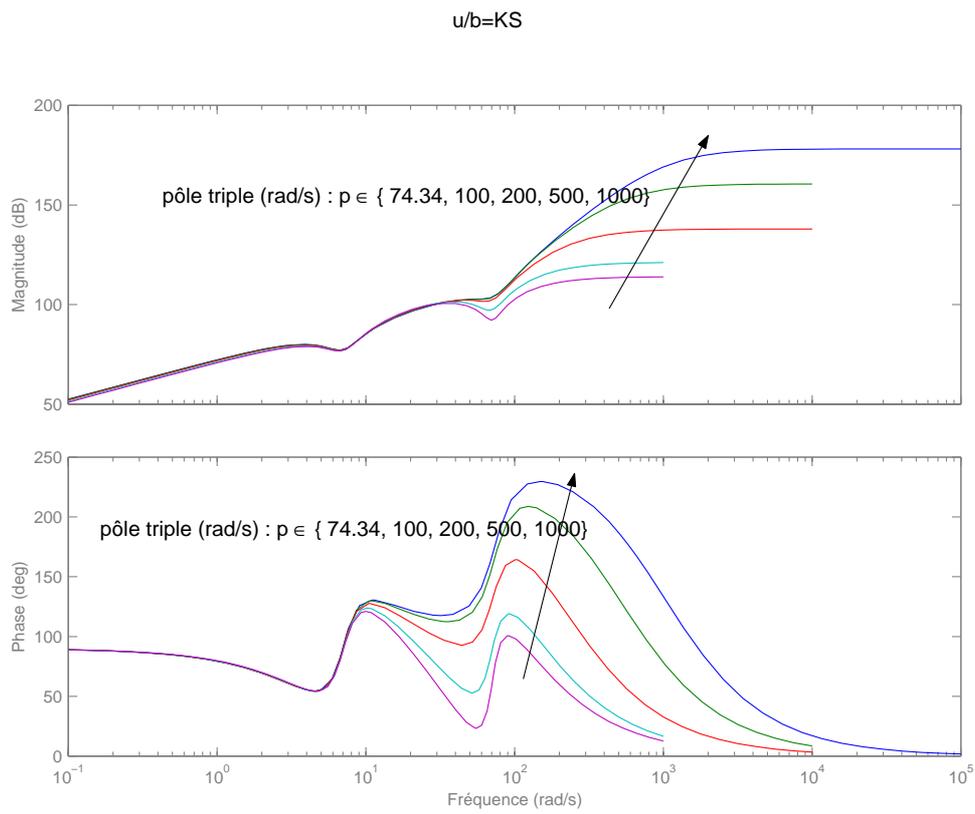


FIG. 4.38: Comparaison de  $KS(s)$  pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$

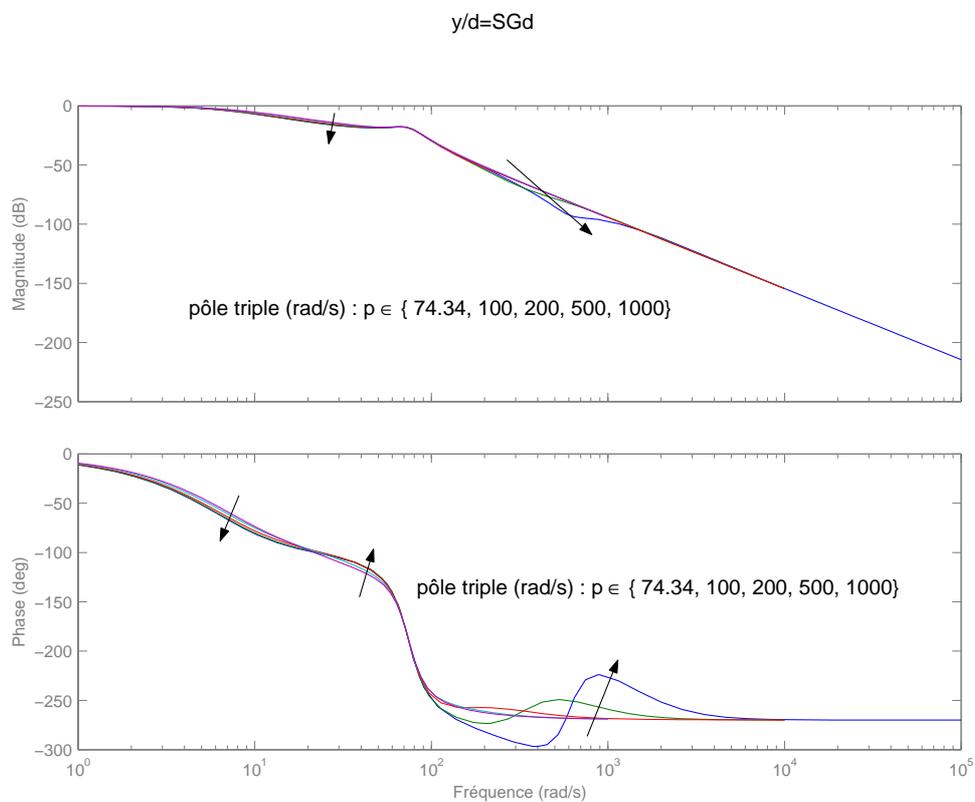
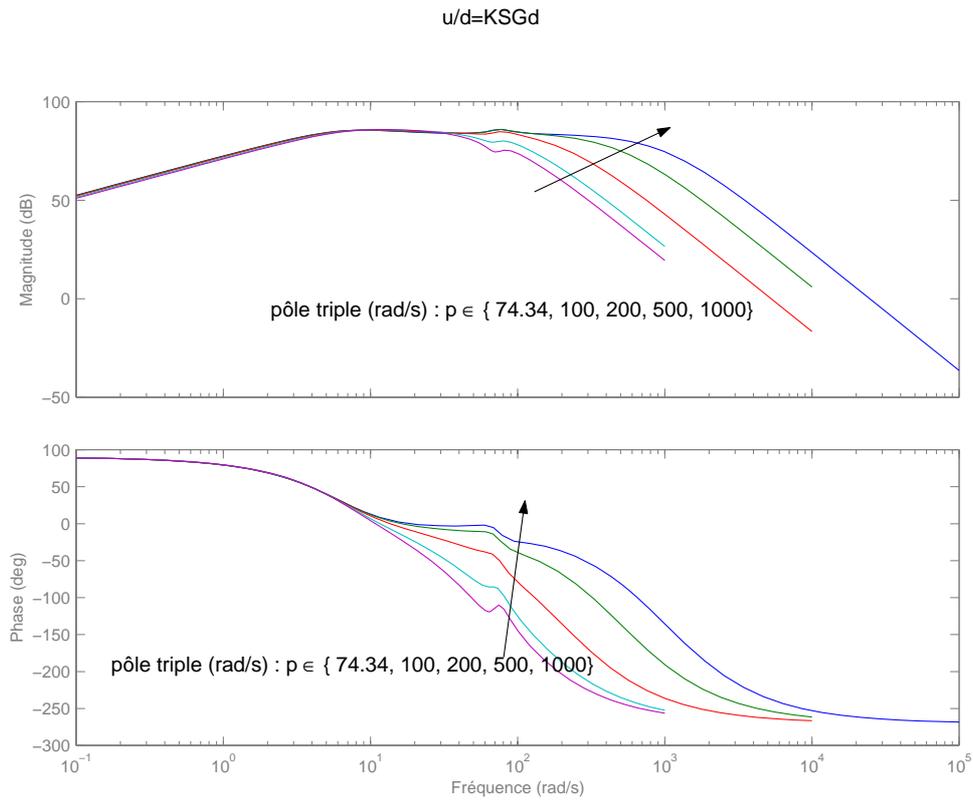
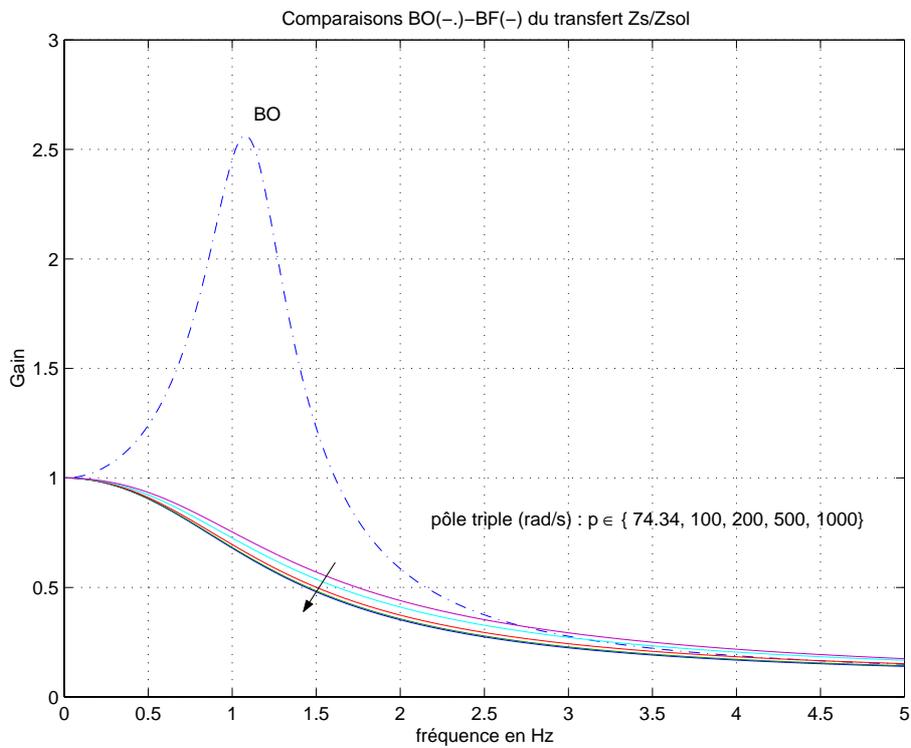


FIG. 4.39: Comparaison de  $SG_d(s)$  pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$

FIG. 4.40: Comparaison de  $KSG_d(s)$  pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$ FIG. 4.41: Comparaison du confort ( $z_{caisse}/z_{sol}$ ) pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$

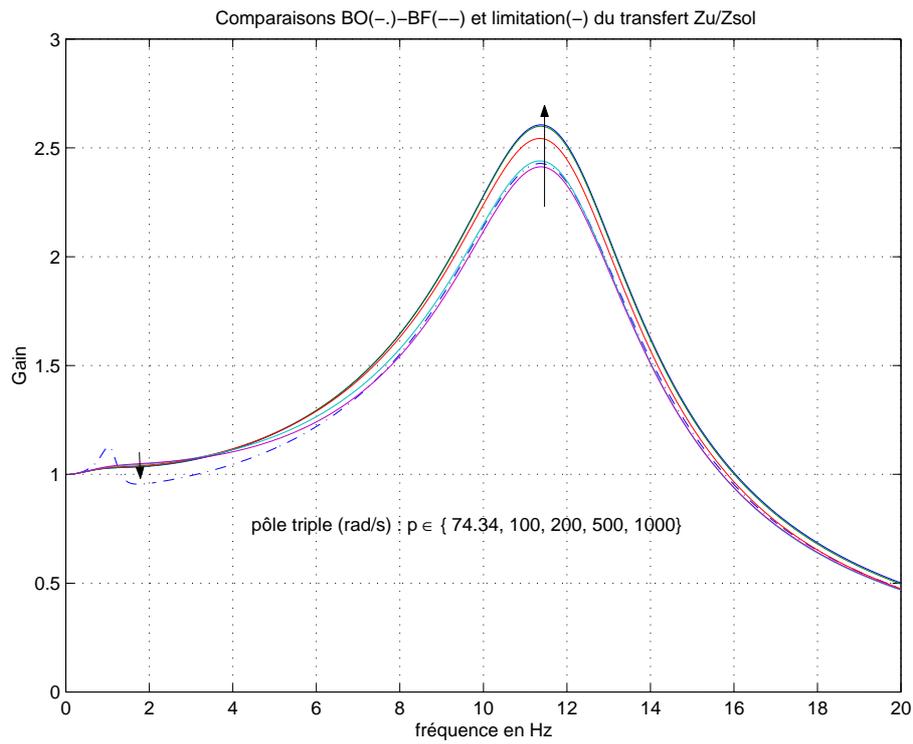


FIG. 4.42: Comparaison du rebond de roue ( $z_{roue}/z_{sol}$ ) pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$

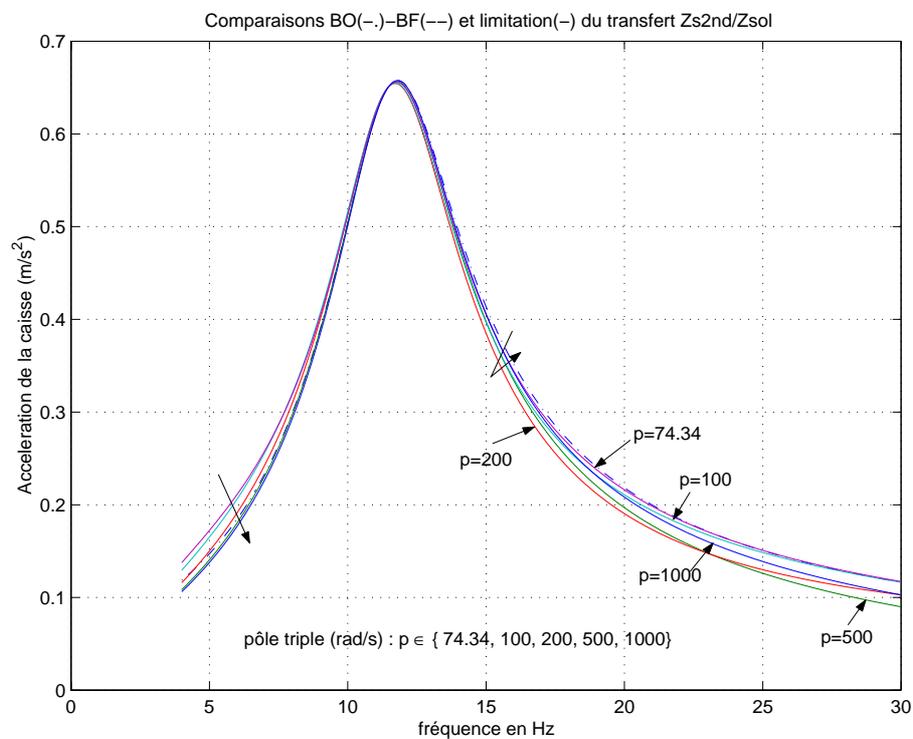


FIG. 4.43: Comparaison de la trépidation ( $\ddot{z}_{caisse}$ ) pour différentes valeurs du pôle  $p$  quintuplé de  $P'(s)$

turbations, la bande passante de la fonction de sensibilité  $\mathcal{KS}(s)G_d(s) = u/d$  augmente très rapidement,

En passant de  $p = 74.34$  à  $1000\text{rad/s}$ , nous voyons apparaître le compromis confort/tenue de route, puisque le confort en basses fréquences est amélioré (fig. 4.41), et le pic de résonance du rebond de roue est augmenté (fig. 4.42).

Nous choisissons  $p = 74.34\text{rad/s}$  ce qui permet de ne pas trop détériorer le rebond de roue ni la trépidation et qui fournit un confort basses fréquences tout à fait acceptable comparé au système en boucle ouverte. De plus, ce choix évite que le régulateur ne soit trop sollicité en hautes fréquences et la marge de module (donnée par l'inverse du maximum de la fonction de sensibilité  $S(s)$ ) reste très bonne puisque  $S(s)$  est inférieure à 2dB.

Nous illustrons aussi, à titre d'exemple, le cas  $p = 200\text{rad/s}$ , qui ne convient pas pour plusieurs raisons comme nous allons le voir.

De la même façon que précédemment, un filtre  $F(s)$  du second ordre est utilisé en aval du correcteur  $K(s) = \frac{R(s)}{S(s)}$ . Ceci dans le but de ne pas solliciter l'actionneur en hautes fréquences. Nous souhaitons que le comportement de la fonction de transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$ , après le deuxième pic de résonance à  $74.34\text{ rad/s}$  ( $=11.83\text{Hz}$ ), soit le même pour la boucle fermée que pour la boucle ouverte. Ainsi nous choisissons de filtrer la commande à partir de cette pulsation  $w_n = 74.34\text{rad/s}$ . Les figures 4.44 et 4.45 représentent l'influence de l'amortissement  $\xi$  du filtre  $F(s)$  sur la réponse fréquentielle de la fonction de transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$ .

Lorsque l'on diminue l'amortissement  $\xi$  du filtre  $F(s)$ , on améliore certaines caractéristiques :

- le "confort BF" diminue,
  - le pic de résonance du transfert  $z_{roue}/z_{sol}$  diminue,
  - les maxima des fonctions de sensibilité  $\mathcal{S}(s)$  et  $\mathcal{T}(s) = y/b$  diminuent et donc la marge de module ( $= 1/\max(\mathcal{S}(s))$ ) augmente
- et on en détériore d'autres :
- la trépidation augmente,
  - le maximum de la fonction de sensibilité  $\mathcal{KS}(s) = u/b$  augmente.

On peut relier le gain de  $\mathcal{KS}(s)$ , entre la mesure bruitée  $y + b$  et la commande en force  $u$ , à la saturation de la commande à  $2000\text{N}$  que nous simulons au paragraphe 4.8.1. En effet, si l'on considère un bruit d'amplitude  $1\text{mm}$  (égale à 10% de la mesure de  $z_{caisse}$ , cette dernière étant pour nos essais d'environ  $10\text{mm}$ ) alors le gain de  $\mathcal{KS}(s)$  nécessaire pour que la commande sature est de  $2000\text{N}/(10\text{mm}+1\text{mm}) = 1.8\text{e}5\text{ N/m}$ . Cette limite, si elle n'est pas dépassée pour les cas où  $p = 74.34\text{rad/s}$ , elle l'est pour tous les cas où  $p = 200\text{rad/s}$  quelque soit l'amortissement  $\xi$  du filtre  $F(s)$  (voir les tables suivantes). Cependant, rappelons que cette saturation n'est pas un modèle très précis des limites de l'actionneur.

Les tables 4.2 à 4.4 permettent de visualiser les différentes influences de l'amortissement  $\xi$  du filtre  $F(s)$  et du pôle triple  $p$ .

En présence du filtre  $F(s)$ , le choix du pôle triple  $p$  à  $74.34\text{ rad/s}$  ( $=11.83\text{Hz}$ ), par rapport au choix  $p = 200\text{ rad/s}$ , fournit un "confort BF" moins bon mais sollicite moins

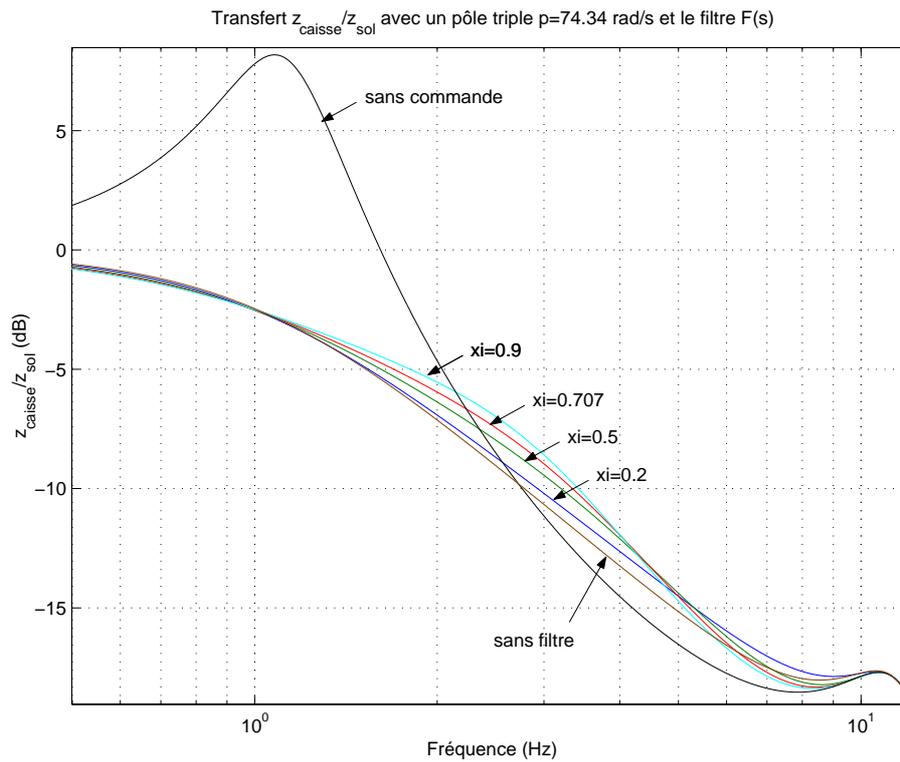


FIG. 4.44: Transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$  pour amortissement  $\xi$  du filtre  $F(s)$  avec le pôle triple  $p = 74.34$  rad/s

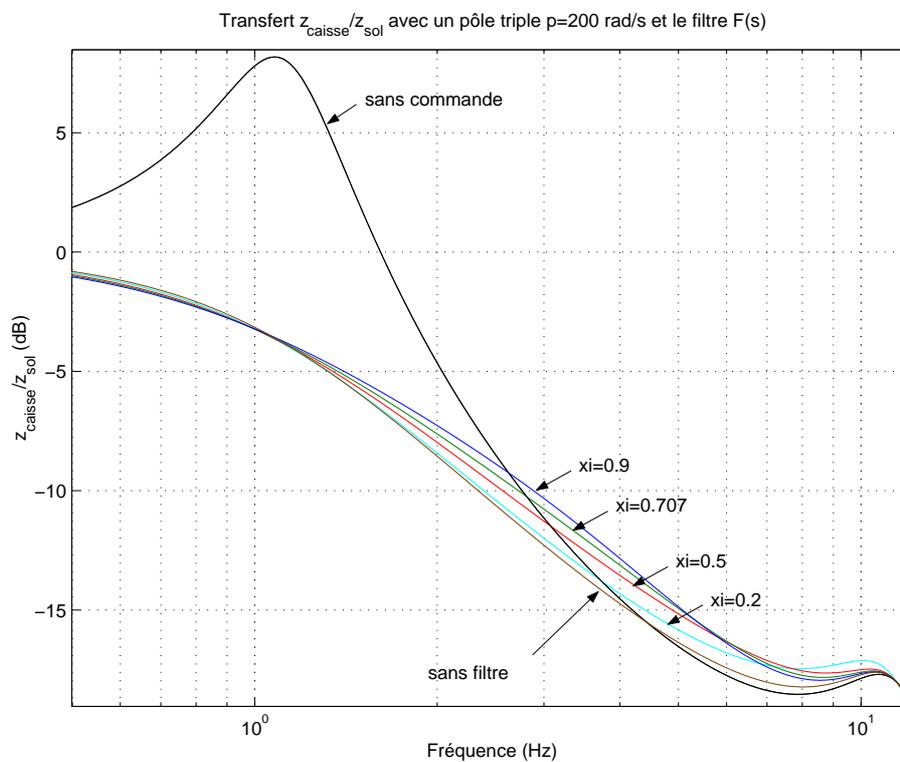


FIG. 4.45: Transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$  pour amortissement  $\xi$  du filtre  $F(s)$  avec le pôle triple  $p = 200$  rad/s

$p$ (rad/s)	74.34	100	200	500	1000
$w_n$ (rad/s)	74.34	74.34	74.34	74.34	74.34
$\xi$	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
"confort BF"	81	73	60	53	51
Max. $\left(\frac{z_{roue}}{z_{sol}}\right)$	2.394	2.365	2.360	2.407	2.428
Trépidation	1.699	1.708	1.707	1.681	1.672
Max. $(\mathcal{S})$ (dB)	2.62	2.25	1.60	1.09	0.92
Max. $(\mathcal{T})$ (dB)	-2.28	-2.32	-2.38	-2.42	-2.41
Max. $(\mathcal{KS})$ (dB)	101.06	102.73	112.08	103.05	135.76

TAB. 4.2: Influence du pôle triple  $p$  sur les critères PSA et les fonctions de sensibilité  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{KS}$

$p$ (rad/s)	74.34	74.34	74.34	74.34	74.34	74.34
$w_n$ (rad/s)	74.34	74.34	74.34	74.34	74.34	74.34
$\xi$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
"confort BF"	68	71	74	77	79	81
Max. $\left(\frac{z_{roue}}{z_{sol}}\right)$	2.308	2.348	2.368	2.381	2.389	2.394
Trépidation	1.725	1.716	1.710	1.705	1.702	1.699
Max. $(\mathcal{S})$ (dB)	2.01	2.18	2.31	2.39	2.52	2.62
Max. $(\mathcal{T})$ (dB)	-2.60	-2.53	-2.48	-2.41	-2.35	-2.28
Max. $(\mathcal{KS})$ (dB)	103.81	103.23	102.54	102.01	101.58	101.06

TAB. 4.3: Influence de l'amortissement  $\xi$  du filtre  $F(s)$  pour un pôle triple  $p = 74.34\text{rad/s}$  sur les critères PSA et les fonctions de sensibilité  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{KS}$

$p$ (rad/s)	200	200	200	200	200	200
$w_n$ (rad/s)	74.34	74.34	74.34	74.34	74.34	74.34
$\xi$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
"confort BF"	48	51	53	56	58	60
Max. $\left(\frac{z_{roue}}{z_{sol}}\right)$	2.30	2.30	2.32	2.34	2.35	2.36
Trépidation	1.742	1.730	1.722	1.716	1.712	1.708
Max. $(\mathcal{S})$ (dB)	1.06	1.21	1.32	1.42	1.47	1.59
Max. $(\mathcal{T})$ (dB)	-2.50	-2.49	-2.48	-2.46	-2.43	-2.39
Max. $(\mathcal{KS})$ (dB)	114.58	114.07	113.42	112.89	112.51	112.11

TAB. 4.4: Influence de l'amortissement  $\xi$  du filtre  $F(s)$  pour un pôle triple  $p = 200\text{rad/s}$  sur les critères PSA et les fonctions de sensibilité  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{KS}$

l'actionneur en hautes fréquences. En effet la pulsation de coupure est de 104 rad/s au lieu de 213 rad/s. Le choix d'un filtre  $F(s)$ , ayant comme amortissement  $\xi = 0.2$  et comme pulsation propre  $w_n = 74.34$  rad/s pour couper juste après le deuxième pic de résonance, permet finalement de diminuer le "confort BF" et le rebond de roue sans trop détériorer la trépidation. Les compromis sont donc mieux respectés.

#### 4.3.4 Analyse des résultats de la deuxième synthèse

Nous nous intéressons tout d'abord aux critères de PSA avant de parler des critères de la littérature. Pour finir nous étudions les fonctions de sensibilités du système bouclé.

##### a) Critères de PSA

Les figures 4.46 à 4.48 représentent les critères de confort en BF, de rebond de roue et de trépidation. Les valeurs du "confort BF", de la trépidation se trouvent dans la table 4.3. La réponse temporelle de ce système est donné par la figure 4.49. Comme vu lors de la synthèse, la commande améliore principalement le confort en basses fréquences. Le pic de résonance de  $z_{caisse}/z_{sol}$  est éliminé et contrairement à la synthèse précédente, le filtrage est peu détérioré comparé au système en boucle ouverte. Cette détérioration a lieu à partir de 2.5Hz. Concernant le rebond de roue, le pic de résonance est légèrement diminué ( $\sim 2.3$ ) mais, de même que pour la synthèse précédente, ce n'est pas suffisant pour respecter la spécification ( $< 1.8$ ). Quand à la trépidation, elle n'est quasiment pas détériorée puisqu'elle passe de 1.688 en boucle ouverte à 1.725. Lors de la simulation temporelle, la caisse s'éloigne moins de sa position d'équilibre mais y reviens plus lentement que pour le cas de la synthèse précédente. De même, si les amplitudes maximales des autres variables (accélération et jerk de la caisse, déplacement de la roue, débattement et vitesse relative de la suspension) sont les mêmes, ces dernières sont moins oscillantes.

##### b) Critères de la littérature

Comme précédemment, les limites de confort citée par Wong (1993) ne sont pas toutes respectées pour les simulations effectuées (fig. 4.46 et 4.48). Cette fois-ci la limite fixée pour le transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$  n'est dépassée qu'à partir de 1.9Hz. Ce dépassement est moins important que pour la synthèse précédente. Nous ne revenons pas sur le calcul de ces limites qui est détaillé lors de l'analyse de la synthèse précédente. Mais rappelons tout de même que ces limites dépendent fortement de l'amplitude choisie pour le profil de la route. De plus, n'ayant pas un modèle très fin du profil de la route, nous nous intéressons plutôt aux gains des différents transferts qu'aux valeurs des différentes variables concernant la caisse (accélération, jerk).

##### c) Fonctions de sensibilité

Pour finir, les fonctions de sensibilité de ce système en boucle fermée avec le filtre sélectionné précédemment sont données par les figures 4.50 à 4.53.

Selon les différents choix du pôle triple et du filtre nous obtenons différentes valeurs mais, nous avons toujours :

$$M_T \simeq 0.75 \simeq -2.5dB < 0dB \quad (4.26)$$

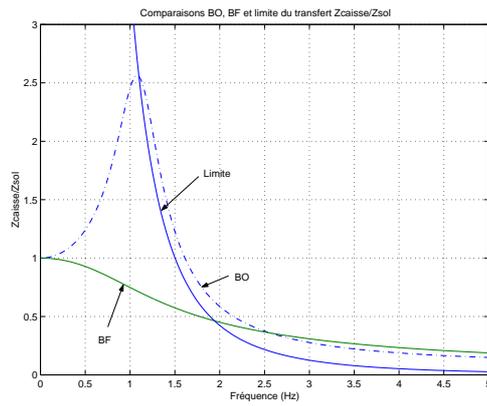


FIG. 4.46: Confort basses fréq.

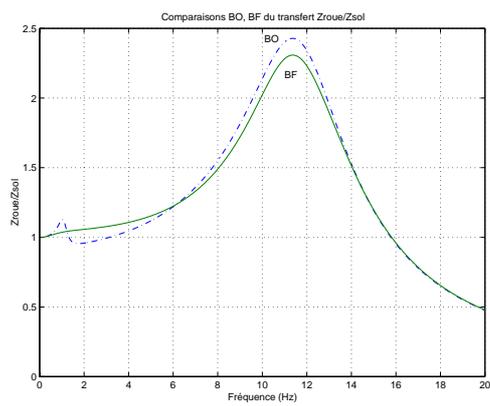


FIG. 4.47: Rebond de roue

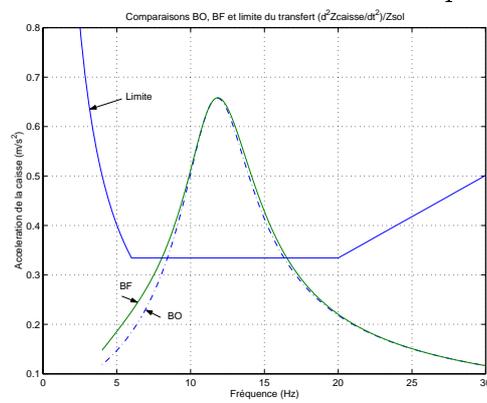


FIG. 4.48: Confort en hautes fréquences (Trépidation)

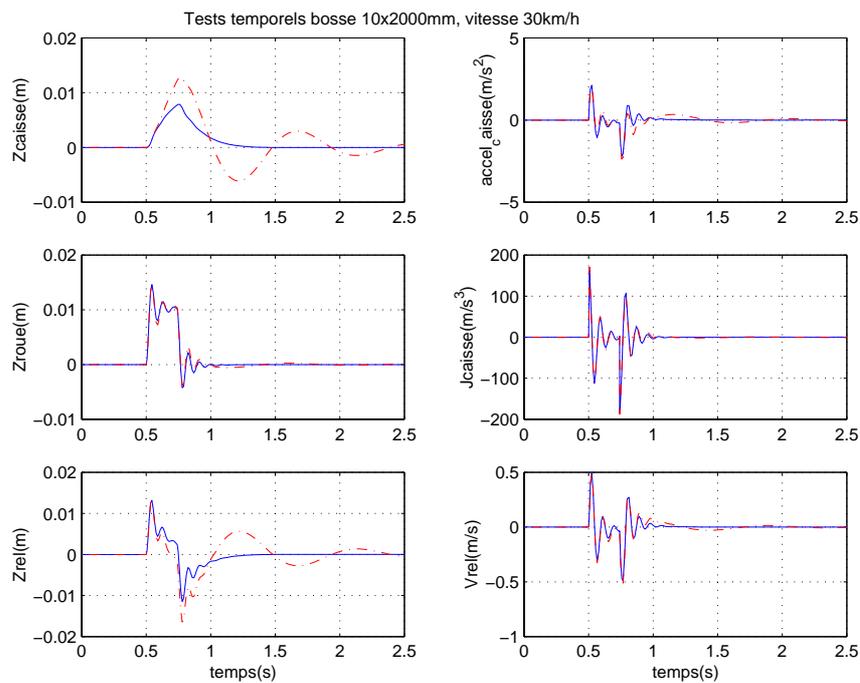


FIG. 4.49: Réponses temporelles

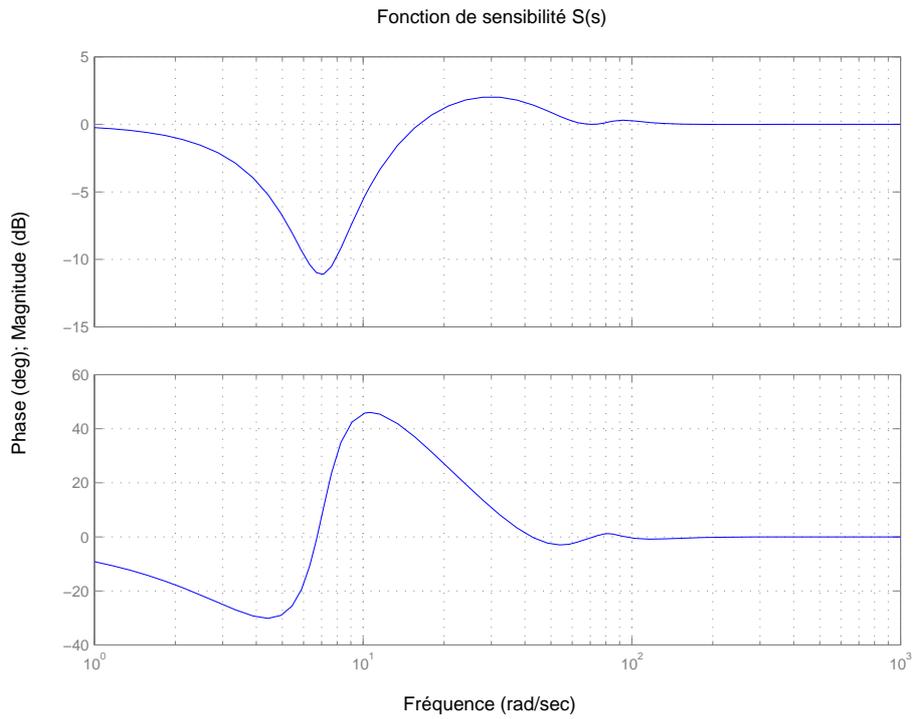


FIG. 4.50: Fonction de sensibilité  $\mathcal{S}(s)$

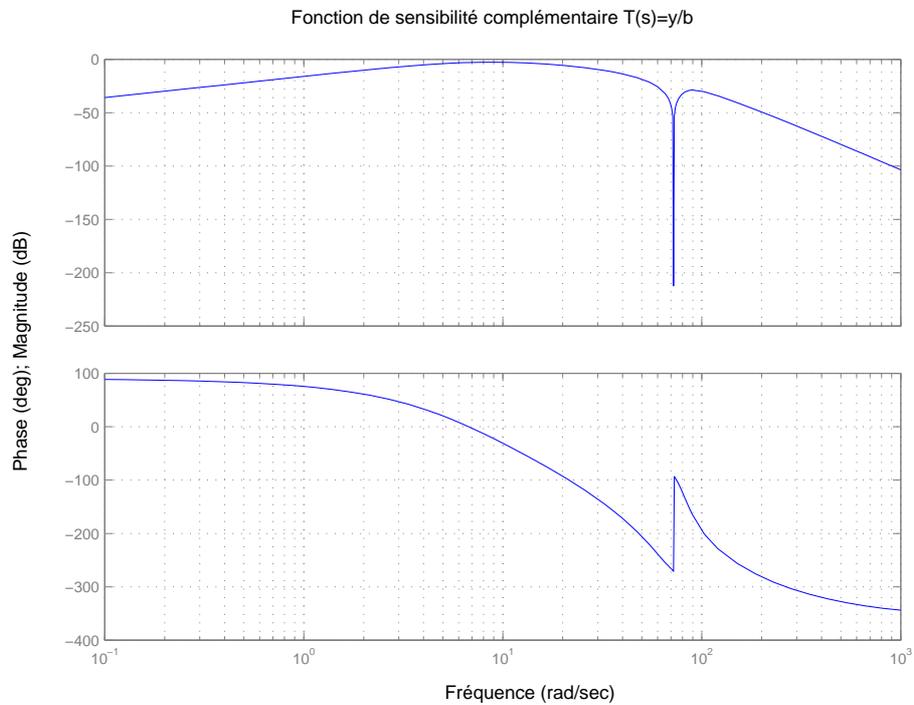
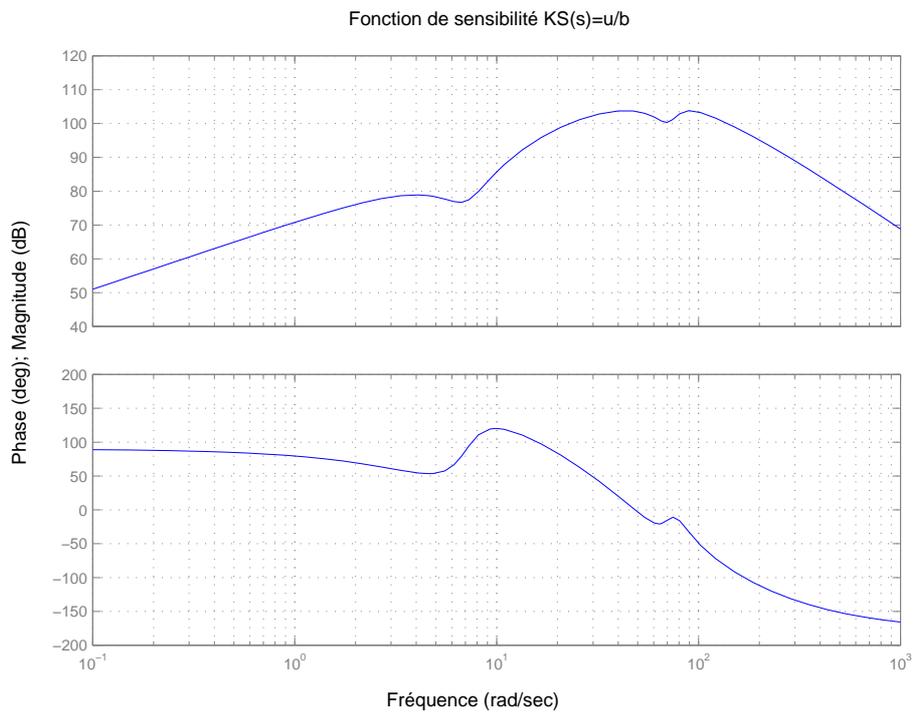
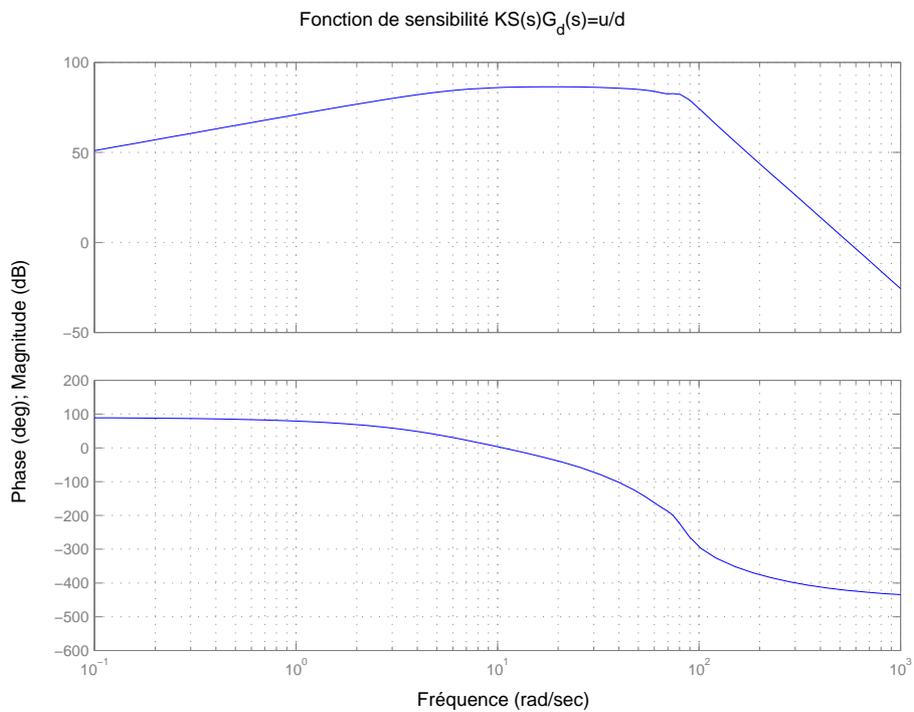


FIG. 4.51: Fonction de sensibilité complémentaire  $\mathcal{T}(s) = y/b$

FIG. 4.52: Fonction de sensibilité  $\mathcal{KS}(s) = u/b$ FIG. 4.53: Fonction de sensibilité  $\mathcal{KS}(s)G_d(s) = u/d$

$p$ (rad/s)	74.34	100	200	500	1000
$w_{KSG_d}$ (rad/s)	104	126	213	289	540

TAB. 4.5: Lien entre le pôle triple  $p$  et la pulsation de coupure  $w_{KSG_d}$  de  $KSG_d$ 

$$M_S \in [1.11 \ 1.33] \simeq [0.9 \ 2.6]dB < 3dB \quad (4.27)$$

De ce point de vue là, le placement de pôles donne donc de bons résultats.

Cependant, les fonctions de sensibilité  $\mathcal{KS}$  et  $\mathcal{KSG}_d$ , ayant toutes deux un grand gain et une large bande passante, nous en concluons que la commande  $u$  risque d'être très sensible aux bruits de mesure  $b$ , bien que cela dépende de leur fréquence, et à la perturbation  $d$ . La bande passante de  $\mathcal{KSG}_d$  peut être limitée en choisissant un pôle triple proche de la pulsation du pic de résonance des roues (à 74.34rad/s). La table 4.5 donne une idée de la pulsation de coupure  $w_{KSG_d}$  de  $\mathcal{KSG}_d$  selon le choix du pôle triple  $p$ .

### 4.3.5 Conclusions

En conclusion, le deuxième réglage, pour lequel les pôles de la boucle fermée correspondent à ceux de la boucle ouverte avec un meilleur amortissement, est préférable au premier réglage où les pôles sont tous réels. En effet, la commande est moins sollicitée et les performances sont globalement meilleures. Notons aussi que nous avons utilisé, dans le cas de la commande par placement de pôles, la mesure de la position de la caisse  $z_{caisse}$  car c'est la variable à réguler. Nous avons illustré sur ces deux synthèses, différents compromis (confort/tenue de route, ...) qui ne sont pas facilement réglables avec la commande par placement de pôles, contrairement à la commande  $H_\infty$  comme nous le verrons plus tard. Notons aussi que le filtre  $F$ , utilisé au deuxième réglage, déplace légèrement les pôles choisis. Nous pourrions envisager d'augmenter, dès le début, le degré de  $S(s)$ , pour faire office de filtre. Mais cela imposerait deux pôles supplémentaires à placer.

Pour finir, nous présentons deux cas théoriques pour lesquels nous disposerions d'une autre mesure en plus de celle de la position de la caisse  $z_{caisse}$ .

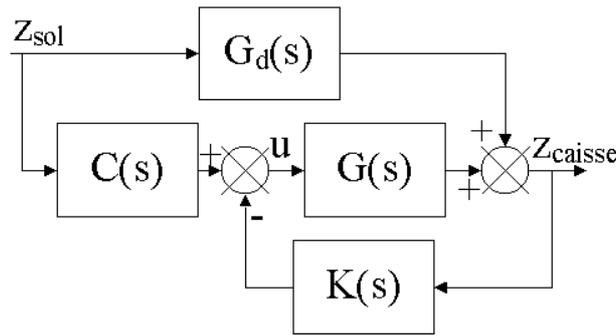
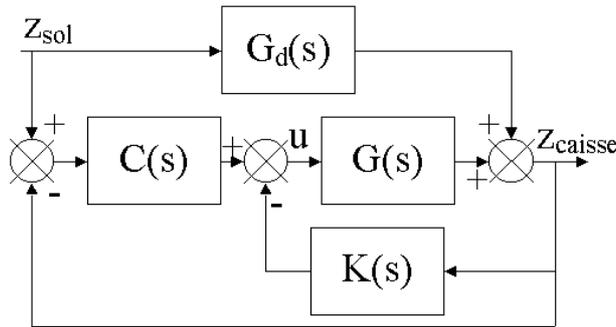
Notons que dans l'hypothèse où la mesure de  $z_{sol}$  est disponible, on peut lui appliquer un précompensateur  $C(s) = T(s)/S(s)$  (voir figure 4.54), ce qui permet d'obtenir la fonction de transfert en boucle fermée suivante entre le profil de la route ( $z_{sol}$ ) et le déplacement de la caisse ( $z_{caisse}$ ) :

$$\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)} = \frac{T(s)B(s) + B_d(s)S(s)}{A(s)S(s) + B(s)R(s)} \quad (4.28)$$

Et en choisissant  $S(s) = B(s)S'(s)$ , on obtient :

$$\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)} = \frac{T(s) + B_d(s)S'(s)}{A(s)S'(s) + R(s)} \quad (4.29)$$

Ainsi les pôles de la fonction de transfert sont choisis librement et déterminent le choix de  $S(s)$  et  $R(s)$ , tandis que  $T(s)$  permet de choisir librement les zéros de cette fonction de transfert. Cependant, l'hypothèse de la disponibilité de la mesure de  $z_{sol}$  n'est pas réaliste.

FIG. 4.54: Schéma du système bouclé en cas de mesure de  $z_{sol}$ FIG. 4.55: Schéma du système bouclé en cas de mesure de  $z_{sol} - z_{caisse}$ 

On peut envisager l'utilisation plus réaliste d'un capteur optique permettant de mesurer  $z_{sol} - z_{caisse}$  la distance entre la caisse et la route (voir fig. 4.55). Mais dans ce cas la fonction de transfert est plus complexe :

$$\frac{z_{caisse}(s)}{z_{sol}(s)} = \frac{T(s)B(s)}{A(s)S(s) + B(s)R(s) + T(s)B(s)} + \frac{B_d(s)S(s)}{A(s)S(s) + B(s)R(s)} \quad (4.30)$$

En prenant  $T(0) = 0$ , on retrouve un gain statique unitaire. Mais il reste à trouver une méthode pour déterminer  $R(s)$ ,  $S(s)$  et  $T(s)$  pour obtenir la fonction de transfert souhaitée.

De plus, ce type de capteur est moins utilisé que les capteurs d'accélération et les capteurs de débattement de la suspension car il est plus cher.

## 4.4 Commande Skyhook

La commande Skyhook comme nous l'avons vu au chapitre 3 est spécifique aux suspensions.

La première version de la commande Skyhook, proposée par Karnopp et al. (1974), consiste à enlever l'amortisseur de la suspension et à en ajouter un autre entre la caisse et le ciel (un point d'altitude fixée et se déplaçant à la même vitesse horizontale que le véhicule), de manière à ce que l'amortissement de la caisse ne dépende que de la vitesse de déplacement de la caisse et pas de celle de la roue. C'est cette version de la commande qu'utilisent Emura et al. (1994), Moline et al. (1994), Autran et al. (1995) et Lévine

(1999) sur des modèles quart de véhicule à 1, 2 ou 3ddl. L'inconvénient de cette première version de la commande Skyhook, est qu'en enlevant l'amortisseur de la suspension, le déplacement de la roue n'est plus amorti. Et lorsque l'on considère ce déplacement, ce qui n'est pas toujours le cas dans les articles cités à l'instant, on observe des oscillations de la roue qui sont transmises à la caisse par le ressort de la suspension.

Une deuxième version de la commande Skyhook, consiste à placer un amortisseur entre la caisse et le ciel tout en gardant un amortisseur entre la caisse et la roue. On dispose donc d'un degré de liberté supplémentaire. C'est cette méthode qu'utilisent Sohn et al. (2000).

Dans notre cas, nous faisons appel à la deuxième version de la commande Skyhook, et, contrairement à Autran et al. (1995) et Lévine (1999), nous considérons le mouvement de la roue en utilisant un modèle quart de véhicule à 2ddl.

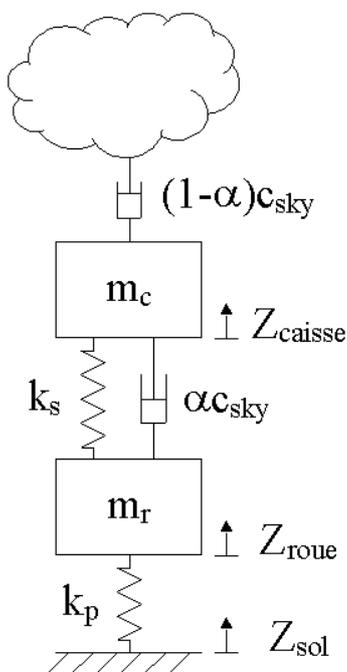


FIG. 4.56: Modèle Skyhook idéal.

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, nous appliquons la commande suivante au système défini par les équations (4.1-4.2) (fig. 4.1) afin de se rapprocher du comportement du modèle fictif de la figure 4.56 :

$$\begin{aligned} u &= -c_{sky}\dot{z}_{caisse} + \alpha c_{sky}\dot{z}_{roue} \\ &= c_{sky}(\dot{z}_{roue} - \dot{z}_{caisse}) - (1 - \alpha)c_{sky}\dot{z}_{roue} \end{aligned}$$

Il est à noter que pour  $\alpha < 1$ , on donne la priorité à l'amortissement de la caisse.

Nous représentons sur les figures 4.57 à 4.60, l'influence des paramètres  $\alpha$  et  $c_{sky}$  sur les valeurs du "confort BF", du gain maximal de  $z_{caisse}/z_{sol}$  et de  $z_{roue}/z_{sol}$ , et de la

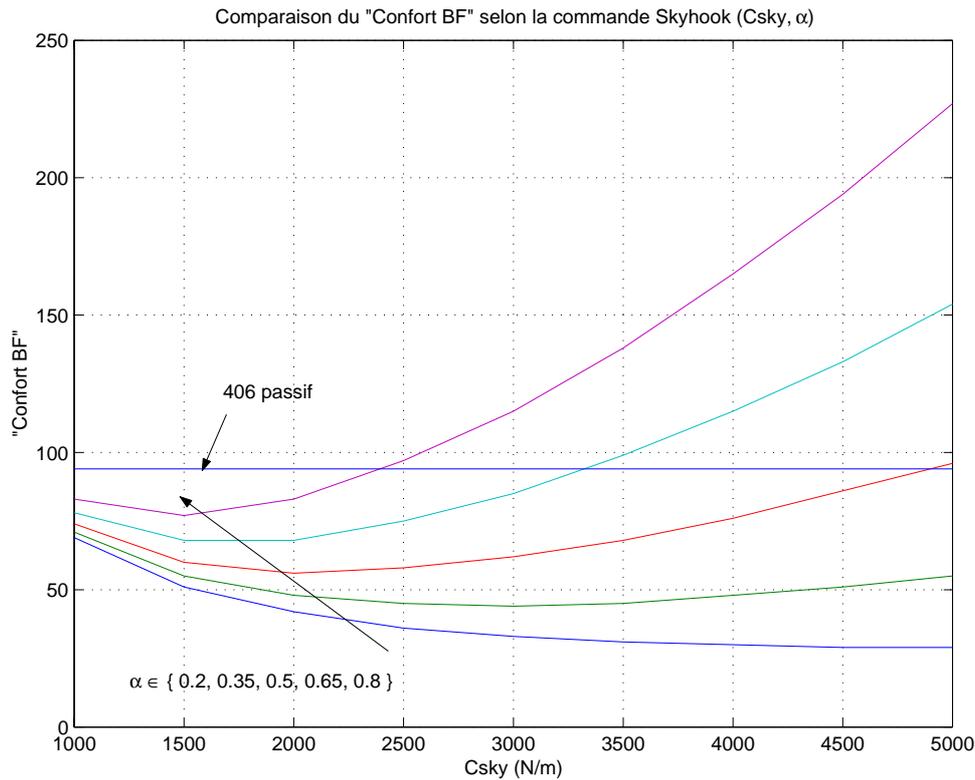


FIG. 4.57: Comparaison du "confort BF" en fonction de  $c_{sky}$  pour différentes valeurs de  $\alpha$

trépidation. Sur chacune de ces figures nous avons tracé les valeurs correspondantes au système de référence (la 406) ainsi que les limites fixées lorsqu'elles ne sont pas confondues.

Nous pouvons voir qu'il n'est pas possible, en n'utilisant que les paramètres de réglages  $\alpha$  et  $c_{sky}$ , de satisfaire tout les critères de performances en même temps. En choisissant  $\alpha = 0.5$  et  $c_{sky} = 4400 \text{Ns/m}$ , nous privilégions le "confort BF", et les maxima des transferts  $z_{caise}/z_{sol}$  et  $z_{roue}/z_{sol}$ , au détriment de la trépidation.

## 4.5 Commande $H_\infty$

La formulation du problème  $H_\infty$  ainsi que sa résolution et le cas particulier du problème de sensibilité mixte sont présentés au chapitre 3.

Rappelons quelques contributions sur cette approche.

-Yamashita et al. (1990) proposent un régulateur  $H_\infty$  permettant d'atténuer uniquement l'accélération verticale du châssis d'un modèle quart de véhicule. La robustesse vis-à-vis d'une variation de la masse du châssis est testée à posteriori.

-Yamashita et al. (1994) s'intéressent à la commande  $H_\infty$  d'un modèle complet de véhicule. Cette fois-ci, en plus des accélérations verticales et angulaires (tangage et roulis), les débattements verticaux et angulaires de la suspension sont pris en compte. Le but est d'obtenir des performances robustes vis-à-vis d'incertitudes en entrée du système. Cependant la tenue de route, qui est généralement estimée par l'écrasement des pneus, n'est pas prise en compte dans cette étude.

-Park & Kim (1999) utilisent ce type de commande pour contrôler un modèle complet de véhicule. Les résultats sont comparés avec ceux d'une commande LQG.

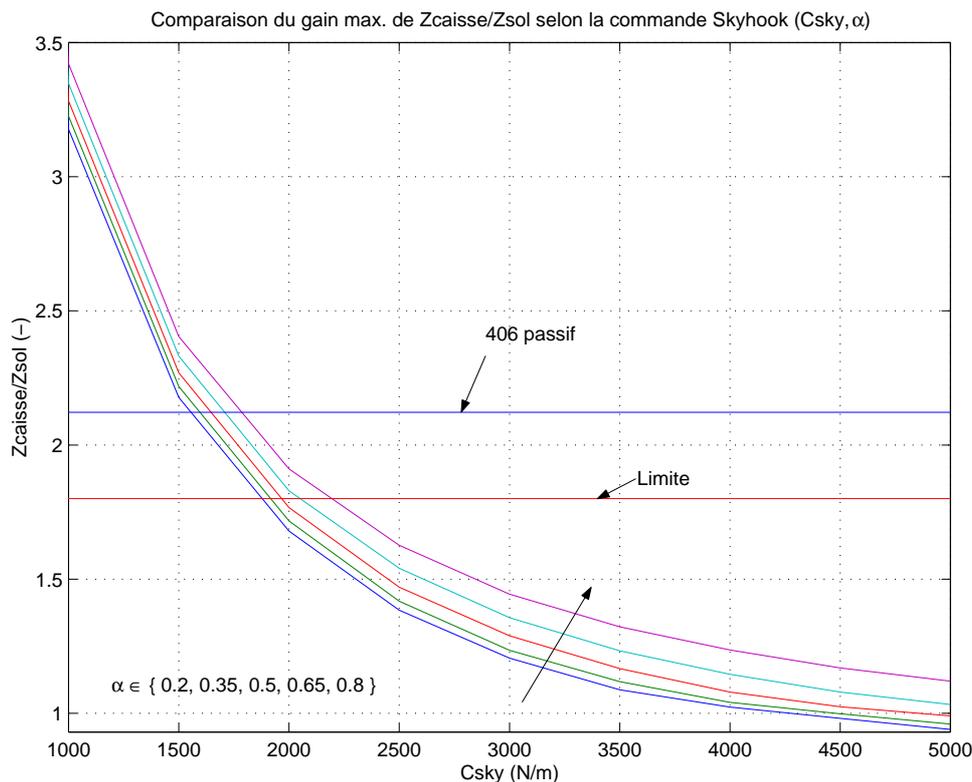


FIG. 4.58: Comparaison du gain maximal de  $z_{caisse}/z_{sol}$  en fonction de  $c_{sky}$  pour différentes valeurs de  $\alpha$

Nous nous proposons pour notre part, de synthétiser une commande  $H_\infty$  permettant, sur un modèle quart de véhicule à 2ddl, d'atténuer le pic de résonance du transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$  sans détériorer son filtrage (pour un bon confort en basses fréquences), de diminuer le pic de résonance du transfert  $z_{roue}/z_{sol}$  (pour une bonne tenue de route) et de limiter l'accélération de la caisse (pour un bon confort en hautes fréquences), et la commande en force de l'actionneur (afin de ne pas trop le solliciter en hautes fréquences). Pour cela, l'unique mesure dont nous disposons est celle du débattement ( $z_{caisse}^r - z_{oue}$ ) de la suspension. La robustesse en stabilité et en performances est testée a posteriori par la  $\mu$ -analyse (paragraphe 4.7).

#### 4.5.1 Mise sous forme standard

Pour pouvoir synthétiser une commande  $H_\infty$  résolvant un problème de sensibilité mixte, il faut au préalable mettre le système considéré sous forme standard. Pour cela il faut déterminer quelles sont les entrées exogènes  $w$ , les entrées de commande  $u$ , les sorties à contrôler  $e$  et les sorties mesurées  $y$ . Comme nous venons de le voir la seule mesure disponible est le débattement de la caisse. Les entrées exogènes sont le bruit de mesure d'une part et le profil de la route  $z_{sol}$  d'autre part. La seule entrée de commande correspond à  $u$  la commande en force de l'actionneur actif (voir fig. 4.1). Pour finir, dans le cas général, nous cherchons à limiter la commande  $u$ , l'accélération de la caisse  $\ddot{z}_{caisse}$ , le déplacement

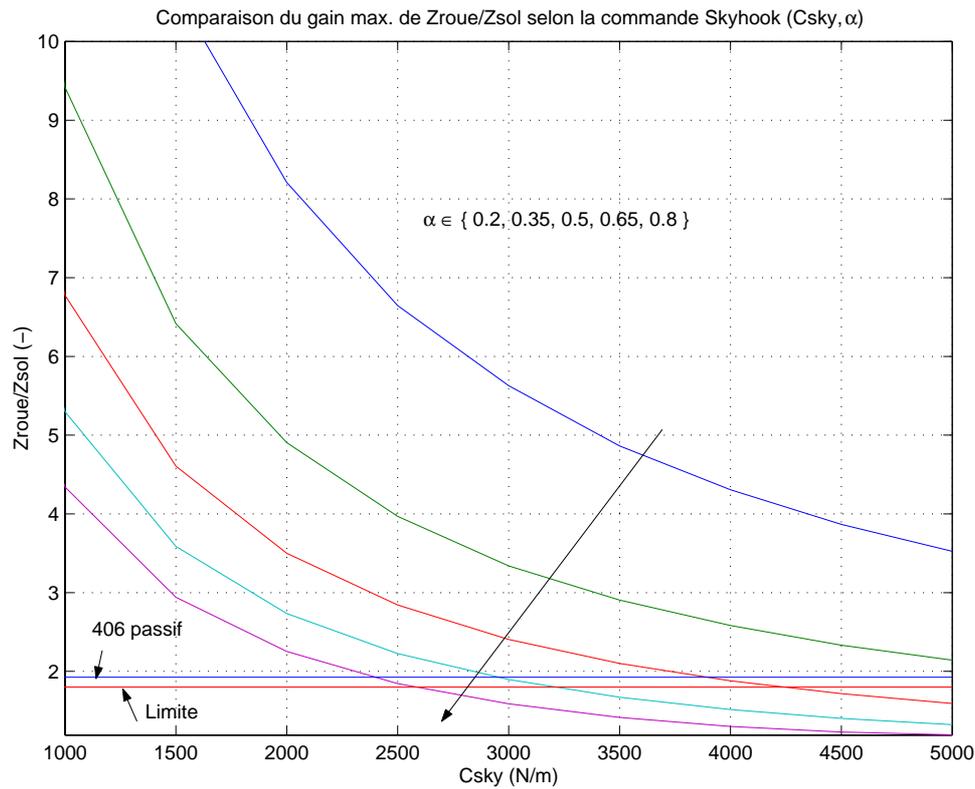


FIG. 4.59: Comparaison du gain maximal de  $z_{roue}/z_{sol}$  en fonction de  $c_{sky}$  pour différentes valeurs de  $\alpha$

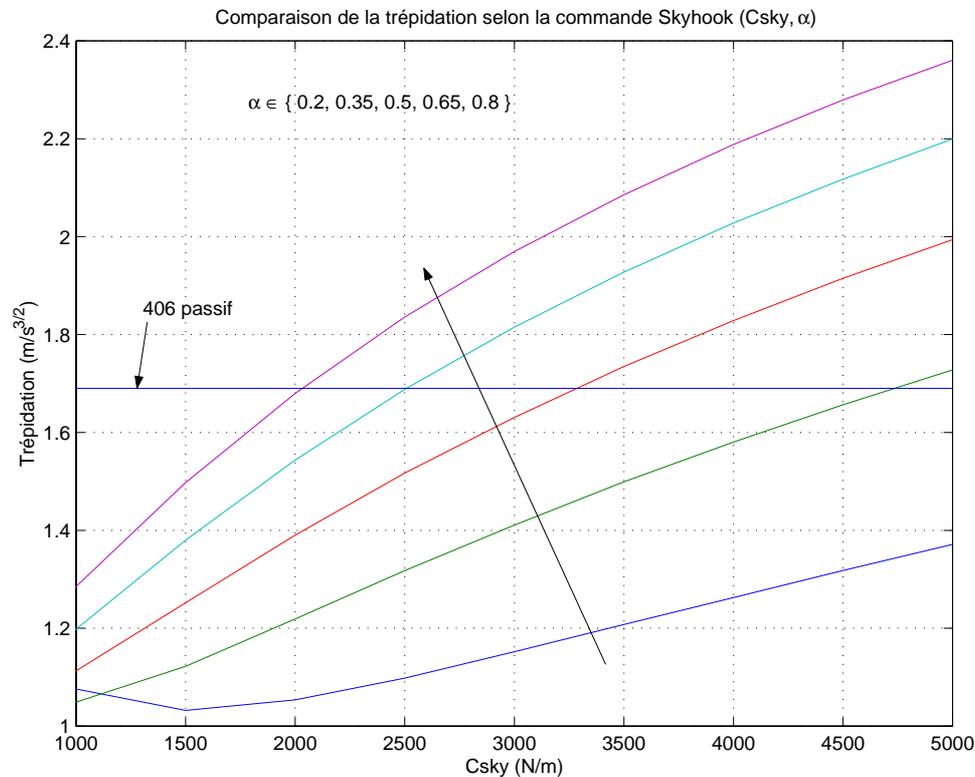


FIG. 4.60: Comparaison de la trépidation en fonction de  $c_{sky}$  pour différentes valeurs de  $\alpha$



la boucle fermée et :

$$\|T_{ew}\|_{\infty} = \left\| \begin{array}{cc} -W_u K S_y W_b & -W_u K S_y G_{21} \\ -W_z G_{12} S_u K W_b & W_z (G_{11} - G_{12} S_u K G_{21}) \\ -W_y T_y W_b & W_y S_y G_{21} \end{array} \right\|_{\infty} < \gamma \quad (4.32)$$

Dans notre cas, comme nous le verrons dans le choix des pondérations, nous avons choisi de ne pas pondérer le débattement de la suspension ( $y_{nb}$ ), afin de ne pas augmenter l'ordre du régulateur. En effet, l'ordre du régulateur est égale à celui du système pondéré, ainsi pour chaque pondération fréquentielle rajoutée, on augmente l'ordre du régulateur. Ainsi,  $W_y = 0$  et l'on recherche  $K(s)$  tel que :

$$\|T_{ew}\|_{\infty} = \left\| \begin{array}{cc} -W_u K S_y W_b & -W_u K S_y G_{21} \\ -W_z G_{12} S_u K W_b & W_z (G_{11} - G_{12} S_u K G_{21}) \end{array} \right\|_{\infty} < \gamma \quad (4.33)$$

Nous avons cependant laissé  $W_y$  dans la figure précédente car cela correspond au cas général où, parmi les sorties à contrôler nous avons des sorties mesurées et des sorties non-mesurées. De plus, il sera possible, en perspective, de tenir compte du débattement de la suspension lors de la synthèse, en choisissant  $W_y$  non-nul. Nous détaillons et motivons maintenant le choix des pondérations.

#### 4.5.2 Choix des pondérations

L'objectif principal est de réduire le mouvement de la caisse ( $z_{caisse}$ ) puis celui de la roue ( $z_{roue}$ ) et finalement l'accélération de la caisse ( $\ddot{z}_{caisse}$ ). Un premier choix de pondérations constantes ( $w_u, w_{zc2nd}, w_{zc}, w_{zr}, w_{bruit}$ ) permet de faire une mise à l'échelle et de déterminer quels sont les objectifs prépondérants par rapport aux autres. Le filtrage du bruit de mesure n'étant pas notre principal objectif, la pondération  $w_{bruit}$  est très faible.

Puis, selon les domaines de fréquences auxquels on s'intéresse, des pondérations fréquentielles sont appliquées.

Dans tout les cas, la pondération  $W_y$  affectant la mesure non bruitée est nulle, de telle sorte que l'on ne cherche pas à limiter le débattement de la suspension et une pondération constante  $w_{zc2nd}$  est choisie pour l'accélération de la caisse, ainsi que pour le bruit de mesure ( $w_{bruit}$ ).

Les pondérations fréquentielles  $W_{zc}$  et  $W_{zr}$ , agissant sur  $z_{caisse}$  et  $z_{roue}$  respectivement, sont choisies de manière à s'intéresser plus particulièrement aux zones de fréquences 1 à 10Hz et 8 à 14Hz respectivement.

La pondération  $W_{zc}$  ne présente pas de pic vers le bas à 1Hz (fig. 4.62) car, l'inverse de cette pondération servant de gabarits au transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$ , cela permettra d'éliminer le pic de résonance de ce transfert (fig. 4.68). Ce pic de résonance à  $\sim 1$ Hz du système en boucle ouverte correspond à un second ordre mal amorti. Ainsi, nous choisissons cette pondération de telle sorte que le gabarit associé présente un second ordre mieux amorti ( $\xi_{c2} = 0.9$ ) à cette fréquence ( $f_{c2} = 1$ ). Étant donné la présence du point invariant de ce transfert à 11.45Hz, il n'est pas utile de continuer à "creuser" ce transfert avec une pente de -20dB/dec. En effet, lorsque l'on "creuse" ce transfert avant le point invariant, ce transfert est détérioré après ce point. Cela aura une répercussion négative sur l'accélération

de la caisse. Finalement, après plusieurs essais, nous choisissons un gabarit présentant un plateau à partir de 2.5Hz.

La pondération  $W_{zc}$  nous permet de "modeler" le transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$  jusqu'à 15Hz par son gabarit  $\gamma_{opt}/W_{zc}$ , où  $\gamma_{opt}$  est le  $\gamma$  optimal obtenu lors de la synthèse  $H_\infty$  (cf. chapitre 3).

À l'inverse, le pic autour de 10Hz de  $W_{zr}$  est plus pointu que celui de  $W_{zc}$  car nous cherchons à limiter le rebond de roue  $z_{roue}/z_{sol}$  uniquement dans la bande de fréquence de son pic de résonance. Cette bande étant très étroite, nous utilisons des filtres du second ordre peu amortis ( $\xi_{r1} = 0.4$  et  $\xi_{r3} = 0.6$ ) afin d'obtenir un pic de résonance étroit pour cette pondération.

Afin de ne pas solliciter des performances en hautes fréquences, nous choisissons un ordre deux pour que les pondérations  $W_{zc}$  et  $W_{zr}$  décroissent rapidement à partir de 10 et 14Hz respectivement. De plus, en pondérant la commande  $u$  par un filtre passe-haut ( $W_u$ ), nous imposons une moindre sollicitation de la commande, peu après ( $f_{u1} = 20$ Hz) le point invariant qui se situe à 11.45Hz.

Les gabarits fréquentiels, imposés aux différentes fonctions de transferts considérées (par exemple fig. 4.63 à 4.66), correspondent à l'inverse des pondérations fréquentielles présentées ci-dessus. Les hypothèses du théorème permettant de résoudre le problème  $H_\infty$  par les équation de Riccati, imposent que les pondérations soient propres. De plus, pour pouvoir tracer les gabarits, ils doivent être propres. Les pondérations doivent donc être strictement propres, d'où l'utilisation du filtre  $W_{propre}$  d'ordre deux.

Les pondérations choisies sont les suivantes :

$$\begin{aligned} W_u &= W_{fz} \\ W_z &= \text{diag}(W_{zc2nd}, W_{zc}, W_{zr}) \\ W_y &= W_{zc-zr} = 0 \\ W_b &= W_{bruit} \end{aligned} \quad (4.34)$$

avec

$$W_{fz} = \frac{w_u(s^2 + 2 \times \xi_{u1} \times w_{nu1}s + w_{nu1}^2)}{s^2 + 2 \times \xi_{u2} \times w_{nu2}s + w_{nu2}^2} \quad (4.35)$$

$$f_{u1} = 20 ; w_{nu1} = 2\pi f_{u1} ; \xi_{u1} = 0.7$$

$$f_{u2} = 1000 ; w_{nu2} = 2\pi f_{u2} ; \xi_{u2} = 0.7$$

$$W_{zc2nd} = w_{zc2nd} \quad (4.36)$$

$$W_{zc} = \frac{w_{zc} w_{nc1}^2 w_{nc3}^2 (s^2 + 2 \times \xi_{c2} \times w_{nc2}s + w_{nc2}^2)}{w_{nc2}^2 (s^2 + 2 \times \xi_{c1} \times w_{nc1}s + w_{nc1}^2) (s^2 + 2 \times \xi_{c3} \times w_{nc3}s + w_{nc3}^2)} W_{propre} \quad (4.37)$$

$$f_{c1} = 10 ; w_{nc1} = 2\pi f_{c1} ; \xi_{c1} = 0.7$$

$$f_{c2} = 1 ; w_{nc2} = 2\pi f_{c2} ; \xi_{c2} = 0.9$$

$$f_{c3} = 2.5 ; w_{nc3} = 2\pi f_{c3} ; \xi_{c3} = 0.7$$

$$W_{zr} = \frac{w_{zr} w_{nr1}^2 w_{nr3}^2 (s^2 + 2 \times \xi_{r2} \times w_{nr2}s + w_{nr2}^2)}{w_{nr2}^2 (s^2 + 2 \times \xi_{r1} \times w_{nr1}s + w_{nr1}^2) (s^2 + 2 \times \xi_{r3} \times w_{nr3}s + w_{nr3}^2)} W_{propre} \quad (4.38)$$

$$f_{r1} = 14 ; w_{nr1} = 2\pi f_{r1} ; \xi_{r1} = 0.4$$

$$f_{r2} = 8 ; w_{nr2} = 2\pi f_{r2} ; \xi_{r2} = 0.9$$

$$f_{r3} = 12.5 ; w_{nr3} = 2\pi f_{r3} ; \xi_{r3} = 0.6$$

$$W_{bruit} = w_{bruit} \quad (4.39)$$

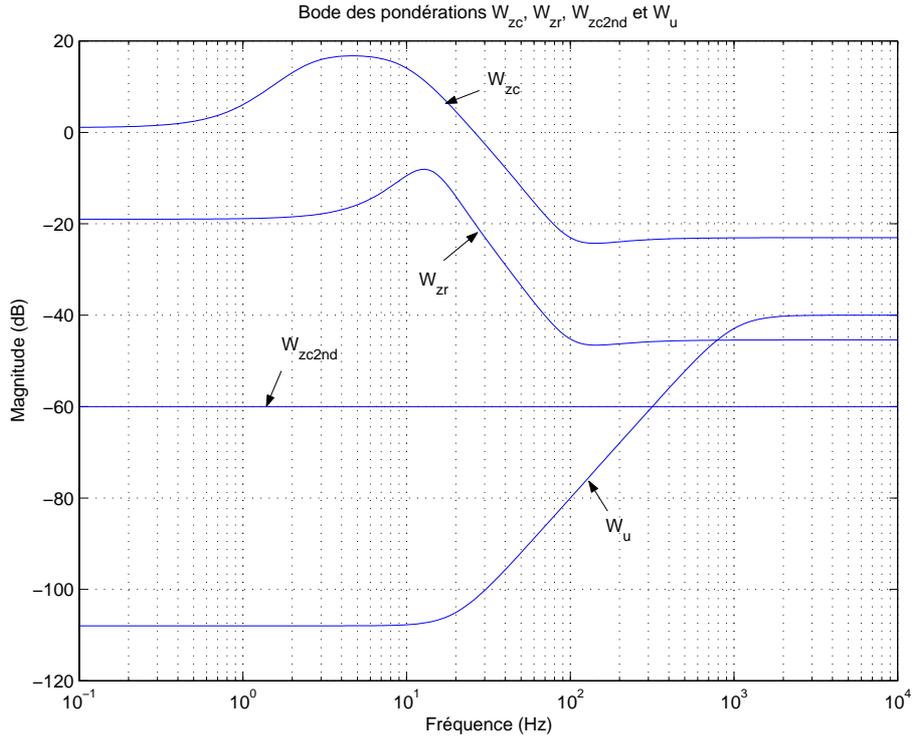


FIG. 4.62: Pondérations fréquentielles  $W_{zc}$ ,  $W_{zr}$ ,  $W_{zc2nd}$  et  $W_u$  appliquées sur les mouvements de la caisse et de la roue et sur l'accélération de la caisse

et

$$W_{propre} = \frac{s^2 + 2 \times \xi_{propre} \times w_{npropre} s + w_{npropre}^2}{w_{npropre}^2} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} f_{propre} &= 100 ; w_{npropre} = 2\pi f_{propre} ; \xi_{propre} = 0.5 \\ w_u &= 10^{-2} ; w_{zc2nd} = 10^{-3} ; w_{zc} = 1.1288 \\ w_{zr} &= 1.1222 * 10^{-1} ; w_{bruit} = 10^{-6} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Les pondérations fréquentielles sur le mouvement de la caisse, sur celui de la roue et sur l'accélération de la caisse sont représentées sur la figure 4.62.

Les figures 4.63 à 4.66 permettent de comparer le système en boucle ouverte, en boucle fermée et les gabarits fréquentiels choisis pour les transferts  $z_{caisse}/z_{sol}$ ,  $z_{roue}/z_{sol}$  et  $\ddot{z}_{caisse}/z_{sol}$  respectivement. Nous ne présentons pas ici tous les résultats de cette synthèse  $H_\infty$ , puisqu'elle sera comparée aux autres (placement de pôles et Skyhook) au paragraphe suivant. Notons simplement que le régulateur est d'ordre 14 (cf. fig. 4.67). Nous avons tenté de réduire l'ordre, en choisissant les pôles à enlever à l'aide du grammien global ou bien en enlevant le pôle double situé à  $10^4$  Hz, mais le système bouclé devient rapidement instable. Dans ce qui suit, nous utiliserons donc, comme régulateur  $H_\infty$ , celui d'ordre 14.

## 4.6 Comparaison des performances

La comparaison des trois commandes se fait à partir des critères de PSA présentés au paragraphe 2.4.1. Ainsi, afin de comparer les résultats des lois de commandes par place-

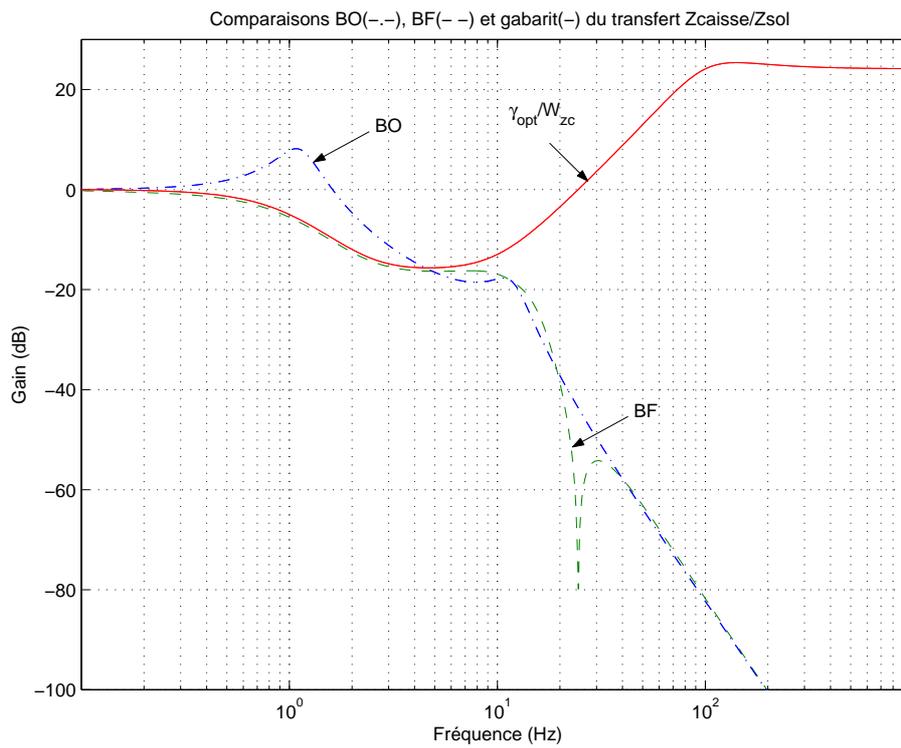


FIG. 4.63: Comparaison du gabarit  $\gamma_{opt}/W_{zc}$  avec le transfert Zcasse/Zsol en BO et en BF

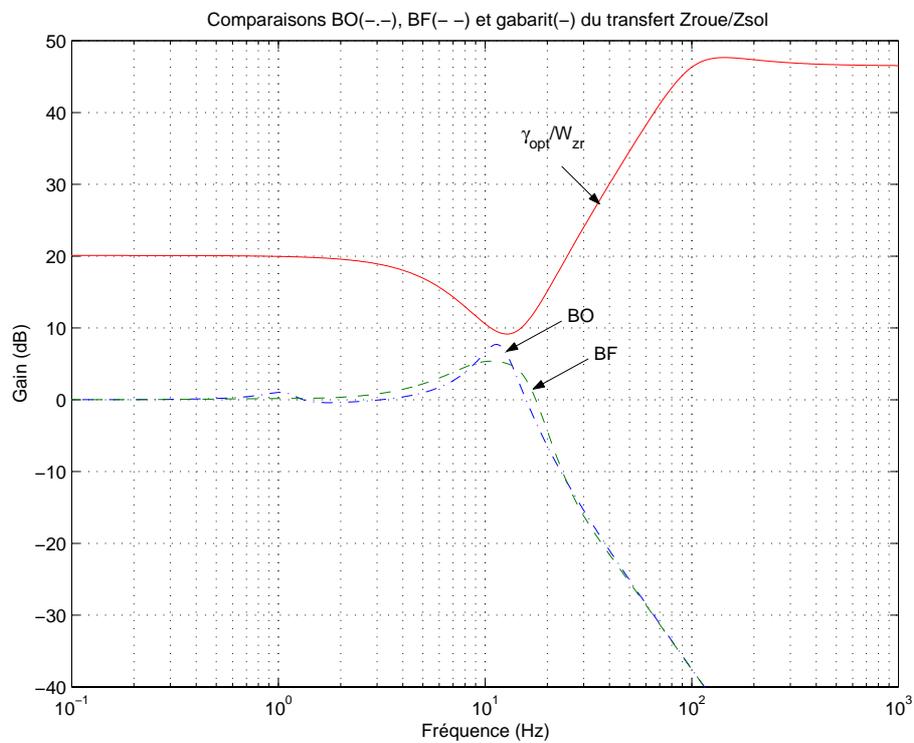


FIG. 4.64: Comparaison du gabarit  $\gamma_{opt}/W_{zr}$  avec le transfert Zcasse/Zsol en BO et en BF

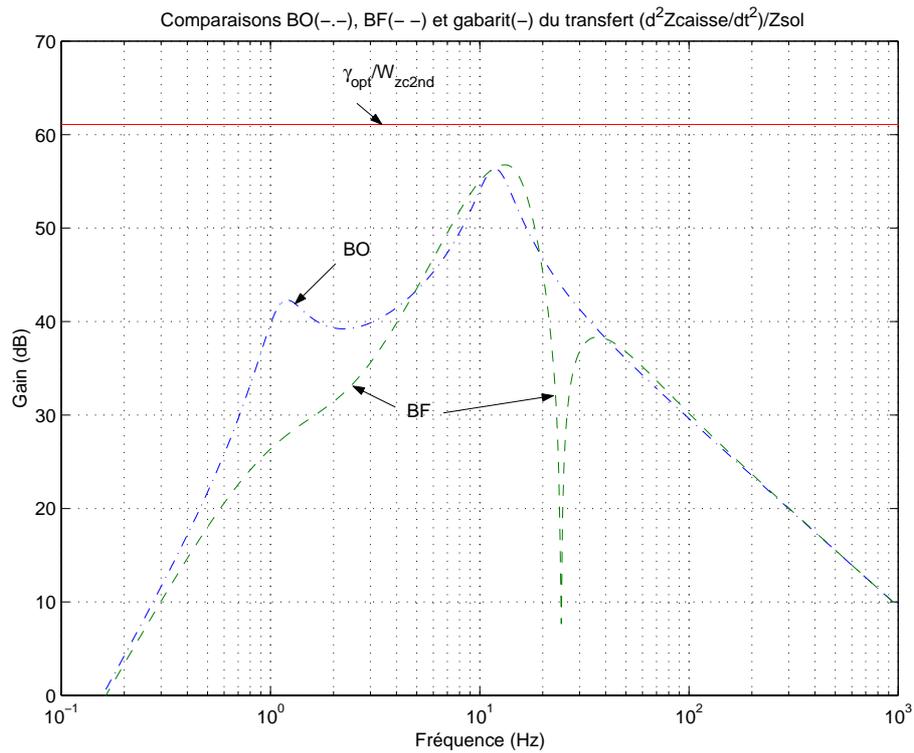


FIG. 4.65: Comparaison du gabarit  $\gamma_{opt}/W_{zc2nd}$  avec le transfert  $Z_{casse}/Z_{sol}$  en BO et en BF

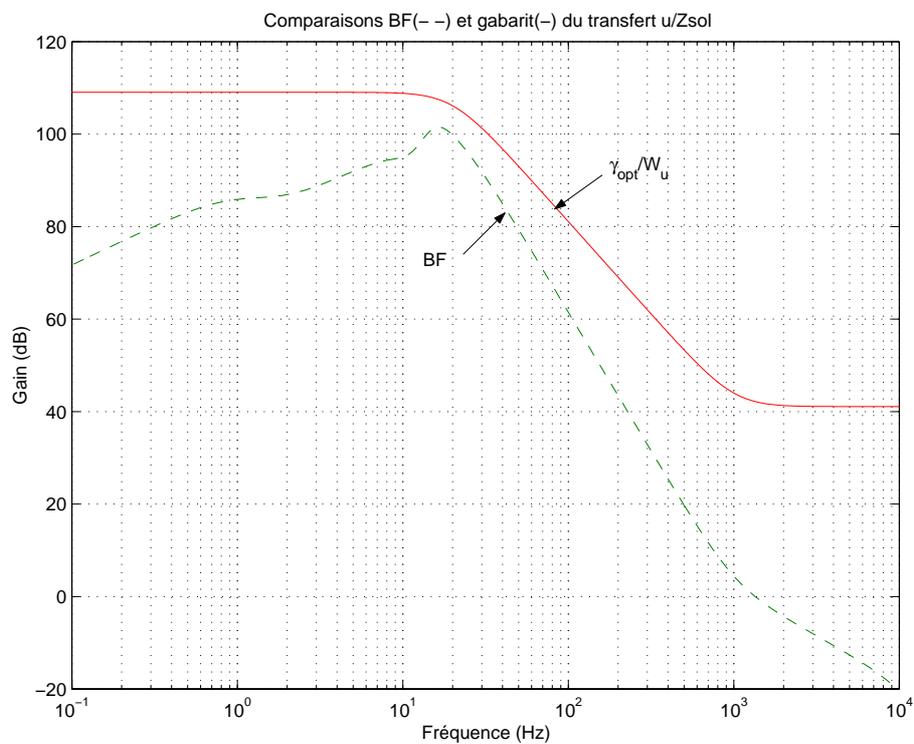


FIG. 4.66: Comparaison du gabarit  $\gamma_{opt}/W_u$  avec le transfert  $u/Z_{sol}$  en BF

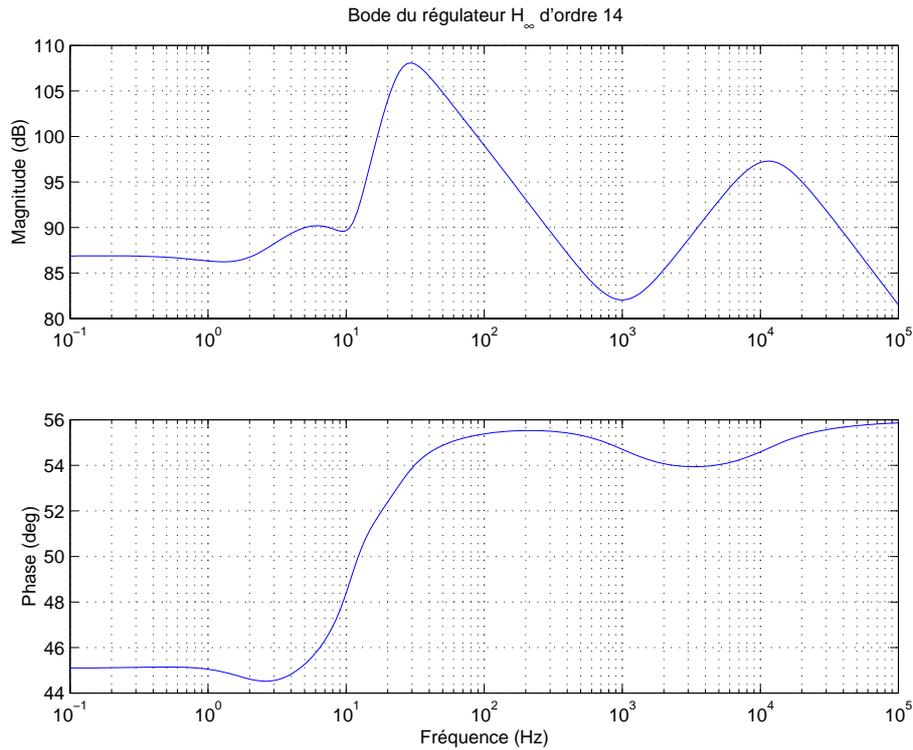


FIG. 4.67: Diagramme de Bode du régulateur  $H_\infty$  d'ordre 14, transfert  $u/(Z_{sol}-Z_{caisse})$

ment de pôles, Skyhook et  $H_\infty$ , nous étudions les réponses fréquentielles des fonctions de transfert entre le mouvement du sol ( $z_{sol}$ ) d'une part et celui de la caisse ( $z_{caisse}$ ) (confort en basse fréquence), de la roue ( $z_{roue}$ ) (tenue de route ou rebond de roue) et l'accélération de la caisse ( $\ddot{z}_{caisse}$ ) (confort hautes fréquences ou trépidation) d'autre part. Les réponses temporelles du système en réponse à une sollicitation du sol ( $z_{sol}$ ) servent aussi à évaluer les lois de commandes.

Afin d'apprécier l'amélioration apportée par les lois de commandes, on compare ces dernières avec le cas passif théorique (qu'on appelle aussi boucle ouverte) c'est à dire le cas où la suspension est purement passive ( $u = c \cdot (\dot{z}_{roue} - \dot{z}_{caisse})$  dans les équations (2.1) et (2.2)). Le coefficient d'amortissement est, dans ce cas,  $c = 1500 N s/m$ . Sur les figures suivantes, les courbes en trait plein (-) correspondent à la commande Skyhook, les traits en tirets (- -) à la commande  $H_\infty$ , les traits en pointillés (..) à la commande par placement de pôles et les traits alternés (-.) au système en boucle ouverte c'est à dire sans loi de commande.

Par la suite, nous utilisons le terme "idéal", pour signifier l'utilisation d'un actionneur actif idéal c'est à dire sans limitation aucune, et ceci afin d'éviter toute confusion avec les résultats obtenus lors de l'utilisation d'un modèle plus réaliste de l'amortisseur à 9 lois de la 607. Dans la suite, nous comparons les systèmes utilisant un actionneur actif idéal avec le système passif linéaire d'où le terme "passif idéal". À l'inverse, les systèmes utilisant l'actionneur non-linéaire de la 607 seront comparés avec le système passif non-linéaire de la 406, renommé parfois "passif 406".

La limite représentée sur les figures 4.68 et 4.70 est relative aux critères de la littérature

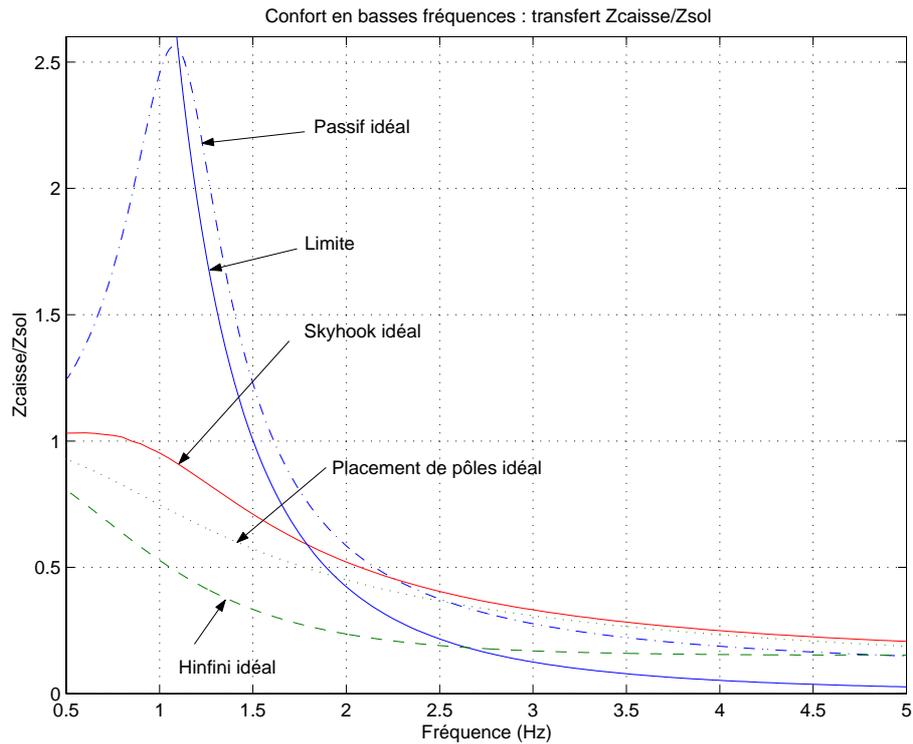


FIG. 4.68: Réponse fréquentielle du transfert entre le déplacement vertical du sol ( $z_{sol}$ ) et celui de la caisse ( $z_{caisse}$ )

étudié au paragraphe 4.6.5.

#### 4.6.1 Confort B.F.

Les réponses fréquentielles des fonctions de transfert entre le sol et la caisse, pour les systèmes avec commande par placement de pôles, Skyhook et  $H_\infty$  et sans commande, sont comparées sur la figure 4.68. Ce transfert représente le confort en basses fréquences. L'objectif est de diminuer le pic de résonance de ce transfert sans détériorer le filtrage des hautes fréquences. Les commandes par placement de pôles et Skyhook améliorent effectivement le pic de résonance, mais cela se fait au détriment de la capacité de filtrage pour les fréquences au-delà de  $2.3\text{Hz}$ . La commande  $H_\infty$  élimine complètement le pic de résonance, sans pour autant affecter les capacités de filtrage en hautes fréquences.

On retrouve dans le tableau suivant les valeurs du "Confort-BF" ainsi que du gain maximal et de la fréquence à laquelle il a lieu et ceci pour les quatre cas.

	Placement pôles idéal	Skyhook idéal	$H_\infty$ idéal	Passif idéal
"Confort-BF"	68	84	29	95
Gain max.	0.9278	1.0327	0.8062	2.5628
Fréquence du gain max. (Hz)	0.5	0.6	0.5	1.1

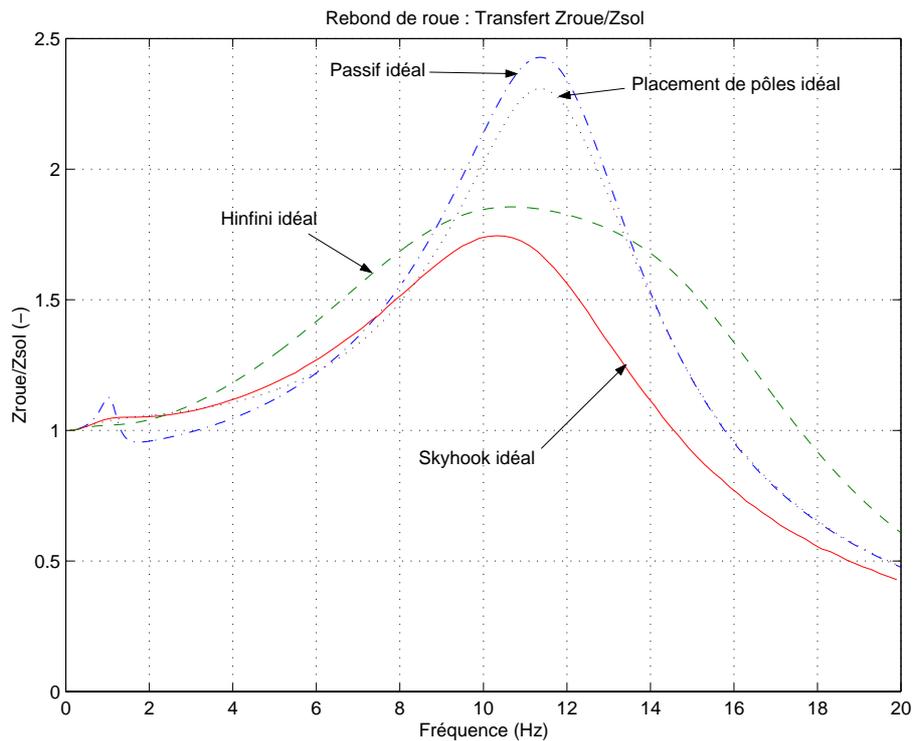


FIG. 4.69: Réponse fréquentielle du transfert entre le déplacement vertical du sol ( $z_{sol}$ ) et celui de la roue ( $z_{roue}$ )

#### 4.6.2 Tenue de route (Rebond de roue)

On compare maintenant, figure 4.69, les lois de commandes sur le critère de tenue de route. Il est donc important de réduire le pic de résonance. Cependant, contrairement au critère précédent, on ne cherche pas spécialement à garder une bonne capacité de filtrage en hautes fréquences. Cela est dû au fait que le modèle de simulation est très simple et ne représente pas fidèlement le comportement du système réel en hautes fréquences. En effet, celui-ci sera plus atténué que le modèle de simulation à cause du pneu et de l'actionneur. On ne s'inquiète donc pas d'une détérioration de la capacité de filtrage de ce transfert en hautes fréquences. Contrairement à la commande par placement de pôles, qui améliore à peine le pic de résonance, les commandes Skyhook et  $H_\infty$  le diminuent plus nettement toutes les deux, ce qui est le but principal pour ce transfert. Ces commandes diminuent aussi toutes les trois le petit pic autour de 1Hz mais amplifient ce transfert entre 2 et 6 ou 8Hz ce qui n'est pas un bon point.

Le tableau ci-dessous récapitule le gain maximal et la fréquence du transfert  $Z_{caisse}/Z_{sol}$  pour chaque cas (Placement pôles idéal, Skyhook idéal,  $H_\infty$  idéal et passif idéal).

	Placement pôles idéal	Skyhook idéal	$H_\infty$ idéal	Passif idéal
Gain max.	2.31	1.7449	1.8557	2.4283
Fréquence du gain max. (Hz)	11.4	10.3	10.7	11.4

### 4.6.3 Confort H.F. (Trépidation)

L'accélération verticale de la caisse des systèmes régulés par les commandes par placement de pôles, Skyhook et  $H_\infty$  est représentée sur la figure 4.70. Ce critère représente le confort en hautes fréquences. Il est moins important que les deux premiers critères car l'accélération réelle de la caisse est plus atténuée que lors de la simulation. Cela est dû à la simplicité du modèle utilisé.

Pour les deux lois de commandes, les résultats concernant l'accélération ne sont pas meilleurs que celui du système en boucle ouverte.

Cependant le but de ces commandes est de gérer le compromis entre les différents critères. Ainsi il est préférable d'améliorer le mouvement de la caisse au détriment de son accélération, plutôt que l'inverse.

Pour les paramètres choisis, la commande  $H_\infty$  augmente plus l'accélération de la caisse que ne le fait la commande Skyhook. Étant filtrée en hautes fréquences, la commande par placement de pôles n'agit quant à elle presque pas, ni sur le rebond de roue qu'elle améliore à peine comme nous venons de le voir au paragraphe précédent, ni sur l'accélération de la caisse qu'elle détériore peu.

Le tableau suivant donne les valeurs de la trépidation, de l'accélération maximale et de la fréquence associée :

	Placement pôles idéal	Skyhook idéal	$H_\infty$ idéal	Passif idéal
Trépidation	1.7252	1.8988	1.9461	1.6776
Accélération max. ( $m/s^2$ )	0.6583	0.6378	0.6895	0.6576
Fréquence du gain max.(Hz)	11.8	11.5	13.2	11.8

### 4.6.4 Tests Temporels

Quelques réponses temporelles des quatre systèmes en réaction au passage à  $30\text{km/h}$  sur une barrette de  $10 \times 2000\text{mm}$  placée sur le sol, sont représentées sur les figures 4.71 à 4.73.

Les trois figures représentent le mouvement vertical de la caisse ( $z_{caisse}$ ), le mouvement vertical de la roue ( $z_{roue}$ ), le débattement de la suspension ( $z_{roue} - z_{caisse}$ ), l'accélération verticale de la caisse ( $\ddot{z}_{caisse}$ ), le jerk de la caisse ( $d(\ddot{z}_{caisse})/dt$ ) et la vitesse relative entre la caisse et la roue ( $\dot{z}_{roue} - \dot{z}_{caisse}$ ). Ces figures sont organisées de la façon suivante :

mouvement de la caisse	accélération de la caisse
mouvement de la roue	jerk de la caisse
débattement de la suspension	vitesse de débattement de la suspension

Les mouvements de la caisse et de la roue sont tracés afin de pouvoir les comparer avec d'autres essais. Le débattement de la suspension est tracé de façon à vérifier qu'il reste entre les butées de la suspension. Cela permet aussi de voir la forme de la force engendrée par le ressort qui est égale au débattement de la suspension multiplié par la raideur du ressort qui est supposée constante en théorie. On trace la vitesse de débattement de la suspension, qui donne la forme de la force engendrée par l'amortisseur idéal. L'accélération

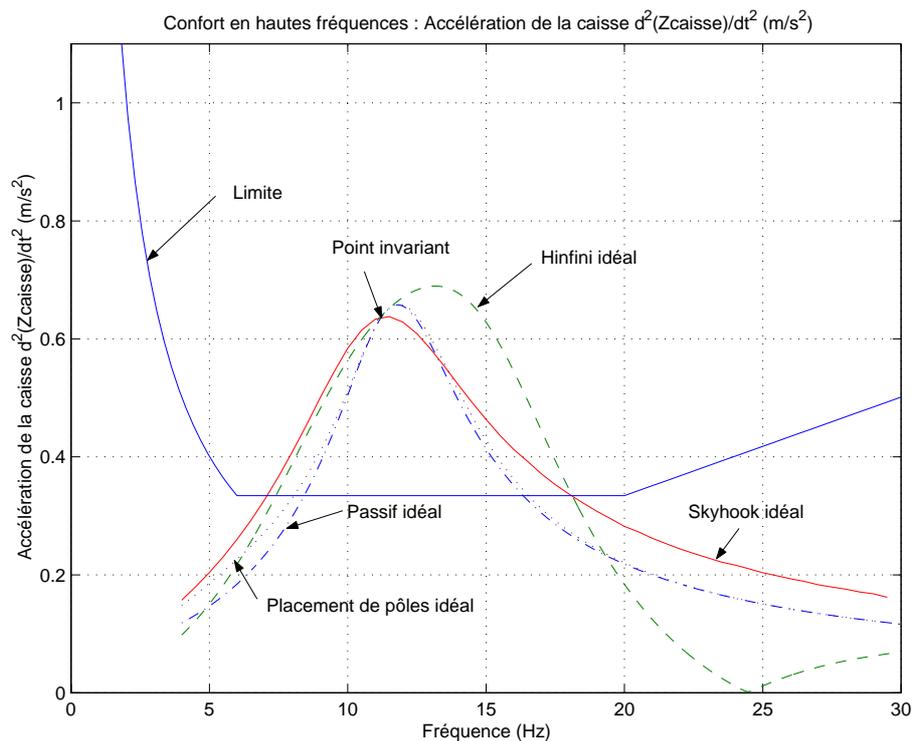


FIG. 4.70: Réponse fréquentielle de l'accélération verticale de la caisse ( $\ddot{z}_{caisse}$ ) en réponse à un déplacement vertical du sol ( $z_{sol}$ ) sinusoïdal de  $\pm 1\text{mm}$

et le jerk de la caisse sont tracés de manière à voir leurs évolutions lorsque l'on minimise le mouvement de la caisse.

Les réponses temporelles confirment le fait que la commande  $H_\infty$  améliore plus le mouvement de la caisse que ne le fait la commande par placement de pôles, qui donne elle même un meilleur résultat que la commande Skyhook.

Nous voyons aussi que la roue se stabilise plus rapidement en utilisant la commande  $H_\infty$ , que les autres commandes. La commande par placement de pôles n'agit effectivement pas ou peu sur le rebond de roue. L'amplitude du débattement de la suspension est à peu près le même pour tout commande et elle est diminuée par rapport au système en boucle ouverte.

L'accélération de la caisse n'est pas amplifiée et se stabilise plus rapidement pour le système avec la commande par placement de pôles que pour le système en boucle ouverte. Les commandes Skyhook et  $H_\infty$  stabilisent aussi plus rapidement l'accélération de la caisse mais elles en amplifient les pics.

Le jerk de la caisse est le même en boucle ouverte qu'avec la commande par placement de pôles. La commande  $H_\infty$  l'amplifie mais moins que ne le fait la commande Skyhook.

La commande par placement de pôles n'amplifie pas la vitesse relative entre la caisse et la roue, même si elle la stabilise légèrement plus rapidement qu'en boucle ouverte. Les commandes Skyhook et  $H_\infty$  ne l'amplifient pas non plus et la stabilise encore plus rapidement.

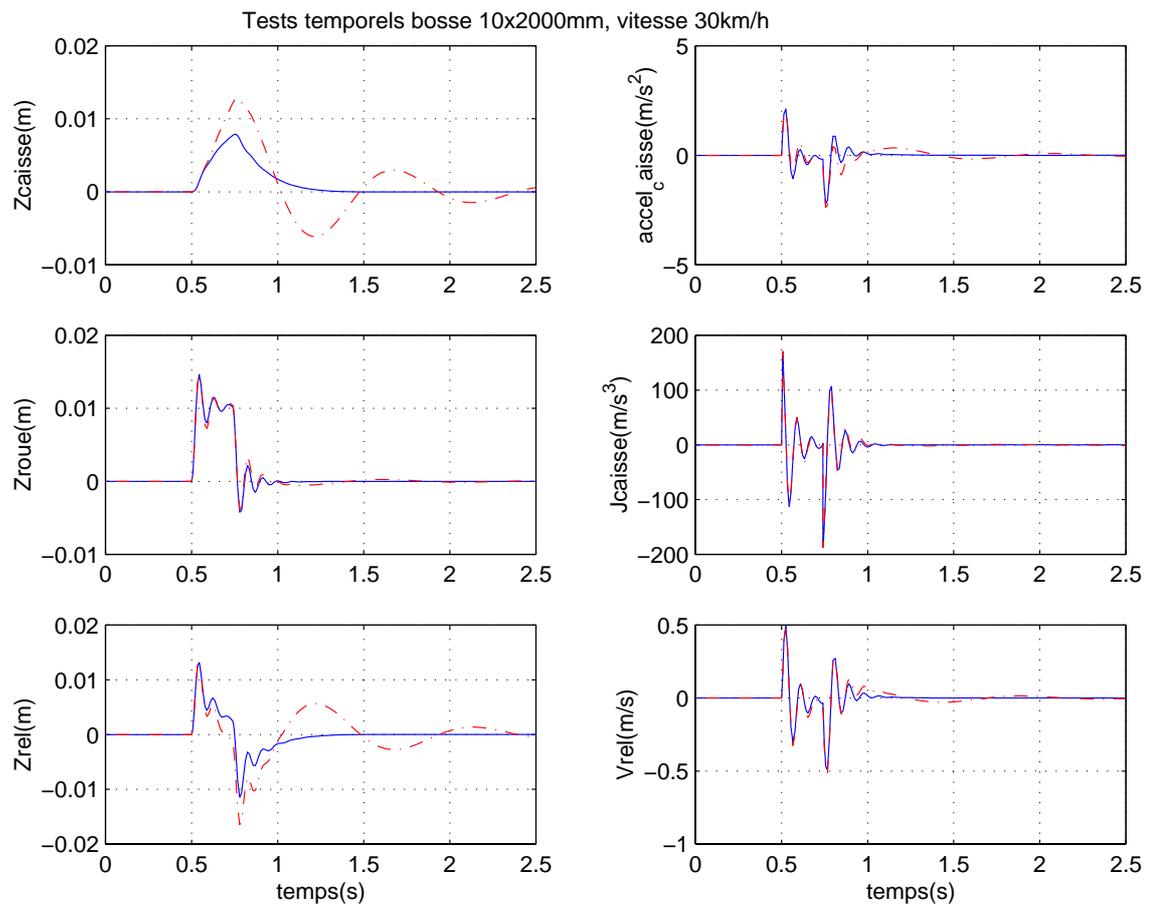


FIG. 4.71: Réponses temporelles des systèmes Placement de pôles et boucle ouverte pour une barrette sur le sol ( $z_{sol}$ ) de  $10 \times 2000mm$

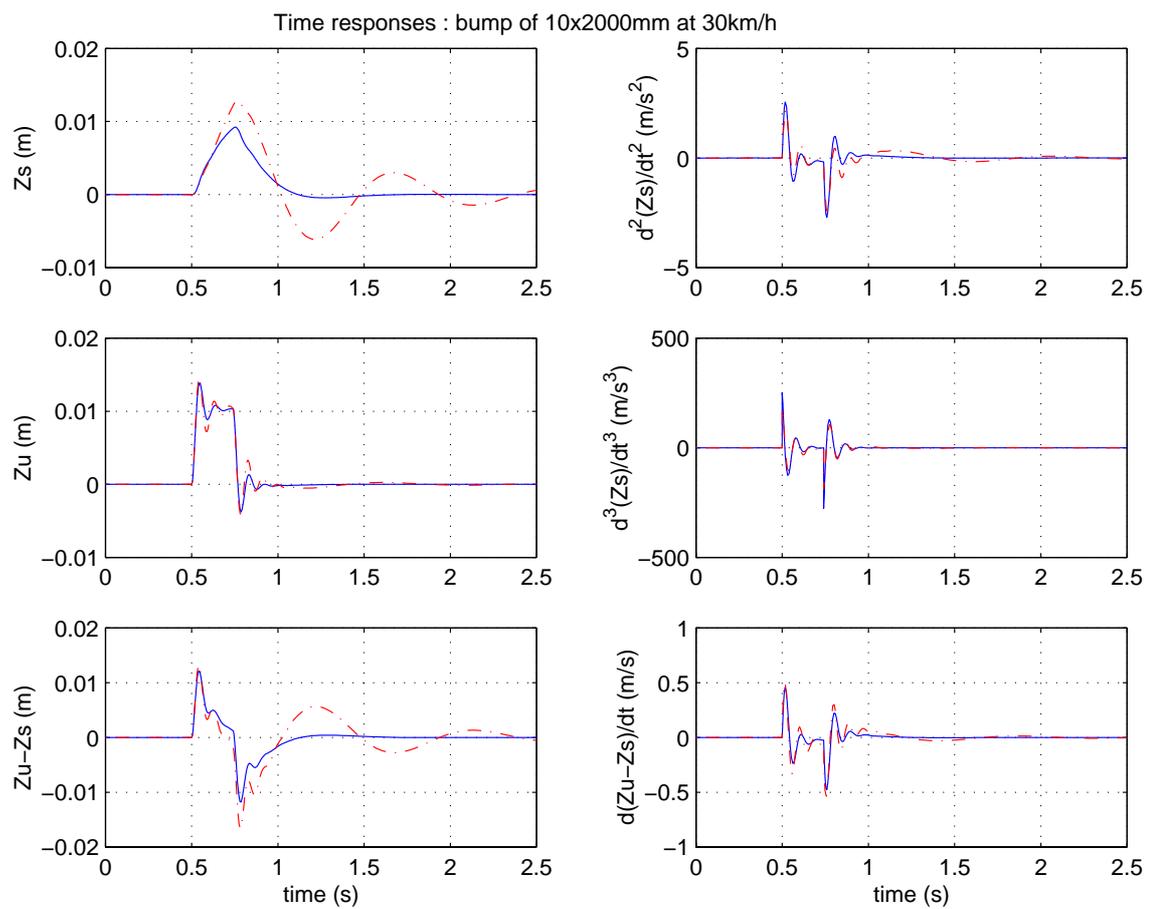


FIG. 4.72: Réponses temporelles des systèmes Skyhook et boucle ouverte pour une barrette sur le sol ( $z_{sol}$ ) de  $10 \times 2000mm$

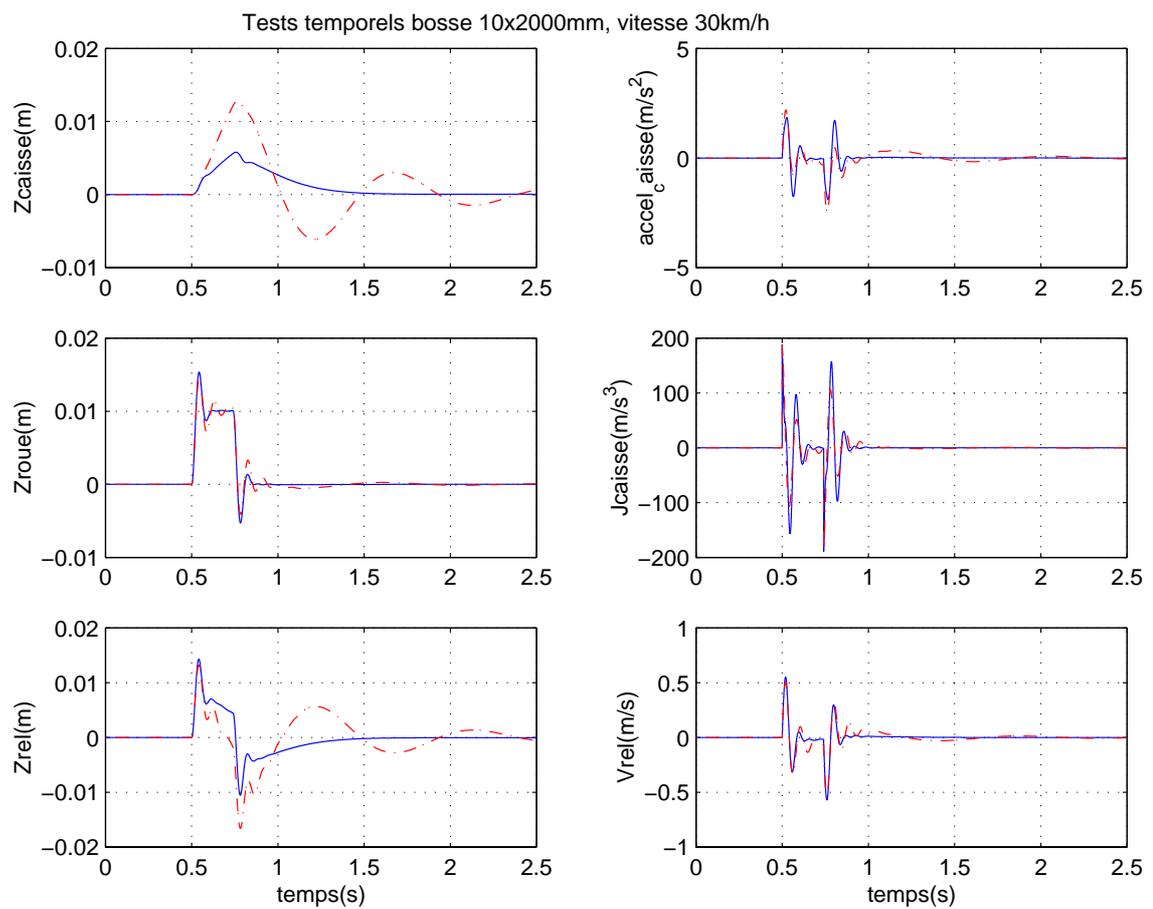


FIG. 4.73: Réponses temporelles des systèmes  $H_\infty$  et boucle ouverte pour une barrette sur le sol ( $z_{sol}$ ) de  $10 \times 2000mm$

### 4.6.5 Critères de la littérature

Comme lors de la synthèse du régulateur par placement de pôles, nous comparons les performances des systèmes bouclés avec le critère cité par Wong (1993) concernant la limitation du mouvement vertical de la caisse. Ces limitations constantes du jerk, de l'accélération et de la vitesse dans des bandes de fréquences distinctes, se traduisent par des limitations de l'amplitude du déplacement et de l'accélération verticale de la caisse en fonction de la fréquence. Ces limites sont tracées sur les figures 4.68 et 4.70.

Nous voyons qu'aucun système ne répond à ces exigences. En effet, la limite du gain du transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$  est dépassée successivement par le système en boucle ouverte à 1.1Hz, et les systèmes Skyhook, par placement de pôles et  $H_\infty$  à 1.79Hz, 1.94Hz et 2.65Hz respectivement. Le système  $H_\infty$  est celui qui dépasse le moins cette limite. Rappelons tout de même que notre modèle du profil de route est simpliste puisque l'amplitude de la sinusoïde est constante quelque soit la fréquence.

Sur la figure 4.70 nous voyons que la limitation de l'accélération n'est respectée par aucun système même en boucle fermée. Cela est dû, comme nous l'avons déjà précisé, à la présence du point invariant à 11.45Hz. Les masses et la raideur du pneu étant fixés, cette limite ne sera respectée que si l'amplitude du profil de route est diminué environ de moitié. Comme pour la limite du transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$ , le modèle du profil de route est trop simpliste pour rendre réellement compte du confort défini par cette limite.

### 4.6.6 Conclusion

Dans cette partie, nous avons comparé trois types de commandes.

La commande Skyhook, de structure simple, est spécifique aux suspensions et permet d'obtenir des résultats intéressants sans connaissances particulières en Automatique.

La commande par placement de pôles est générique et permet de fixer facilement les dynamiques (pôles) du système en boucle fermée.

La commande  $H_\infty$  est, elle, reconnue dans le domaine de l'Automatique pour son potentiel à prendre en compte les spécifications de performances dans le domaine fréquentiel, et la robustesse de la loi de commande.

De cette première approche, on peut conclure que la commande Skyhook permet de réduire efficacement le pic de résonance du transfert  $Z_{caisse}/Z_{sol}$ , mais détériore le filtrage au dessus de 2.2Hz. Le pic de résonance du transfert  $Z_{roue}/Z_{sol}$  est aussi diminué, mais au détriment de l'accélération de la caisse et de la trépidation qui sont légèrement augmentées. La commande par placement de pôles améliore un peu le transfert  $Z_{caisse}/Z_{sol}$ , mais le filtrage est tout de même détérioré à partir de 2.5Hz. De plus, le rebond de roue n'est pratiquement pas amélioré et ne satisfait pas la spécification ( $< 1.8$ ), mais la trépidation n'est du coup que peu détériorée. La commande  $H_\infty$  permet d'améliorer le confort sans détériorer le filtrage pour les hautes fréquences (2-5Hz). Le pic de résonance du rebond de roue est aussi atténué de façon à peu près équivalente à la commande Skyhook. Cependant, l'accélération de la caisse est dégradée entre 10 et 18Hz et améliorée au delà de 18Hz. Notons qu'à ces fréquences là, le modèle de l'amortisseur n'est pas très juste et que la force fournie par l'actionneur sera filtrée par la dynamique réelle de l'amortisseur. Cela aura pour conséquence une augmentation de l'accélération pour les hautes fréquences lors de l'utilisation d'un amortisseur réel. Ceci est étudié dans le chapitre suivant avec l'utilisation d'un modèle beaucoup plus réaliste de l'amortisseur semi-actif réel de la 607.

Plusieurs compromis sont possibles entre les critères. Les commandes sont donc aussi jugées sur leur capacité à gérer ces compromis. La commande Skyhook a seulement deux paramètres de réglage ( $\alpha$  and  $C_{sky}$ ) sur lesquels il est possible de jouer. C'est un avantage si l'on cherche à résoudre rapidement la gestion des compromis entre les critères. C'est un inconvénient pour gérer les compromis différemment selon les fréquences. La commande par placement de pôles dispose de plus de paramètre de réglages que la commande Skyhook, mais ces derniers ne sont pas faciles à relier aux critères de performances. La commande  $H_\infty$  est plus longue et plus difficile à obtenir que les précédentes, mais elle permet d'agir sur les critères dans des bandes de fréquences particulières.

Dans notre cas, un réglage privilégiant volontairement le confort B.F. a été choisi. Il est clair que de nombreux réglages de ce type de commande peuvent être réalisés. Le choix des spécifications de performances dépend alors d'un dialogue efficace entre l'automaticien et l'ingénieur afin d'évaluer au mieux les compromis choisis parmi l'ensemble des compromis possibles.

## 4.7 $\mu$ -analyse

Dans ce paragraphe, nous présentons une analyse des performances nominales (NP), de la stabilité robuste (RS) et des performances robustes (RP) d'un modèle quart de véhicule à 2ddl avec une suspension active contrôlée par une loi de commande  $H_\infty$ .

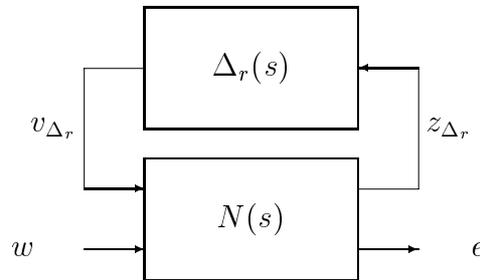


FIG. 4.74: Représentation par LFT supérieure des incertitudes de modèle

La figure 4.74 représente les incertitudes de modèles mises sous forme LFT supérieure, où  $N(s)$  est tel que le modèle perturbé reliant les entrées  $w$  aux sorties  $e$  est :

$$T_{ew}(s) = N_{ew}(s) + N_{ev}(s)\Delta(s)(I - N_{zv}(s))^{-1}N_{zw}(s)$$

où

$$N(s) = \begin{bmatrix} N_{zv}(s) & N_{zw}(s) \\ N_{ev}(s) & N_{ew}(s) \end{bmatrix}$$

et  $\Delta_r(s)$  regroupe toutes les incertitudes prises en compte pour l'analyse de la stabilité du système bouclé et a la structure suivante :

$$\Delta_r(s) = \text{diag} \{ \Delta_1(s), \dots, \Delta_q(s), \delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_r I_{r_r}, \epsilon_1 I_{c_1}, \dots, \epsilon_c I_{c_c} \} \quad (4.42)$$

$$\Delta_i(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{k_i \times k_i} \quad \delta_i \in \mathbb{R} \quad \epsilon_i \in \mathbb{C}$$

Le principe de la  $\mu$ -analyse, est décrit au paragraphe 3.6. Dans notre cas nous souhaitons obtenir des intervalles de confiance, pour les différents paramètres physiques (masses, raideurs) du système, pour lesquels la stabilité robuste ou les performances robustes sont assurées. Pour cela, nous devons tout d'abord déterminer les incertitudes considérées. A partir du choix des incertitudes, nous obtenons la matrice  $N(s)$  et la structure des incertitudes  $\Delta_r(s)$ . Cela permet de calculer un majorant de la mesure  $\mu$  du problème considéré (NP, RS ou RP). Ce majorant indique alors les intervalles de confiance admissibles pour chacune des incertitudes sur les paramètres (paragraphe 4.7.2).

### 4.7.1 Mise sous forme LFT

Avant de choisir les incertitudes auxquelles nous nous intéressons, la première étape consiste à définir le système nominal et les performances nominales désirée. Ceci fait, nous pouvons choisir les incertitudes, puis les représenter sous forme d'une LFT, afin de faire ressortir la structure de la matrice d'incertitudes  $\Delta(s)$  ainsi que les matrices  $N_{11}(s) = N_{zv}(s)$ ,  $N_{22}(s) = N_{ew}(s)$  et  $N(s)$  représentatives des problèmes NP, RS et RP respectivement.

#### 4.7.1.1 Définition du système nominal et des performances nominales désirées

Dans le cas général, nous avons un système nominal  $H(s)$  dont nous voulons étudier les performances nominales. Dans notre cas ce système correspond au système quart de véhicule à 2ddl  $G(s)$  bouclé par le régulateur  $K(s)$ .

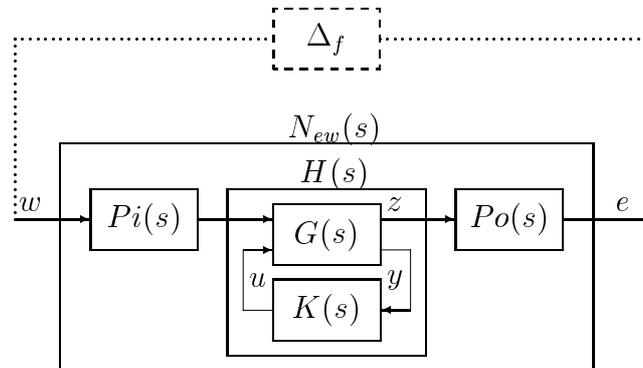


FIG. 4.75: Schéma du système nominale avec gabarits fréquentiels.

A l'aide des pondérations  $Pi(s)$  et  $Po(s)$  sur les entrées et les sorties de ce système  $H(s)$  (fig. 4.75), nous définissons des gabarits fréquentiels correspondant aux performances nominales désirées pour le système  $H(s)$ . Ces pondérations correspondent à l'inverse des gabarits fréquentiels, de telle sorte que la norme  $H_\infty$  du transfert  $Po(s)H(s)Pi(s)$ , entre les entrées exogènes  $w$  et les sorties à contrôler  $e$ , soit égale à 1 si et seulement si les performances désirées sont atteintes.

Dans notre cas, nous prenons comme pondérations  $Pi(s)$  et  $Po(s)$ , celles que nous avons utilisées pour la synthèse de la commande  $H_\infty$ , et qui représentent les performances,

c'est à dire  $W_b(s)$  pour le bruit  $b$  et  $diag(W_{zc2nd}(s), W_{zc}(s), W_{zr}(s))$  pour les sorties  $z = [\ddot{z}_{caisse}, z_{caisse}, z_{roue}]^t$ , mais pas  $W_u(s)$ . De plus, nous divisons les pondérations de sorties par le  $\gamma$  optimal ( $\gamma_{opt}$ ) obtenu lors de cette synthèse, afin d'obtenir, lorsque le régulateur  $H_\infty$  est utilisé :

$$\|N_{ew}\|_\infty = \|Po(s)H(s)Pi(s)\|_\infty = 1$$

Nous avons d'une part les entrées exogènes  $w = [b, z_{sol}]^t$  qui sont pondérées par  $Pi(s) = diag(W_b, 1)$ , et d'autre part les sorties à contrôler  $e$  qui correspondent aux sorties  $z$  pondérées par  $Po(s) = W_z/\gamma_{opt}$ . Ainsi les performances désirées pour le système nominal  $H(s)$  sont celles obtenues avec le régulateur  $H_\infty$ . Les gabarits fréquentiels sont représentés sur la figure 4.76.

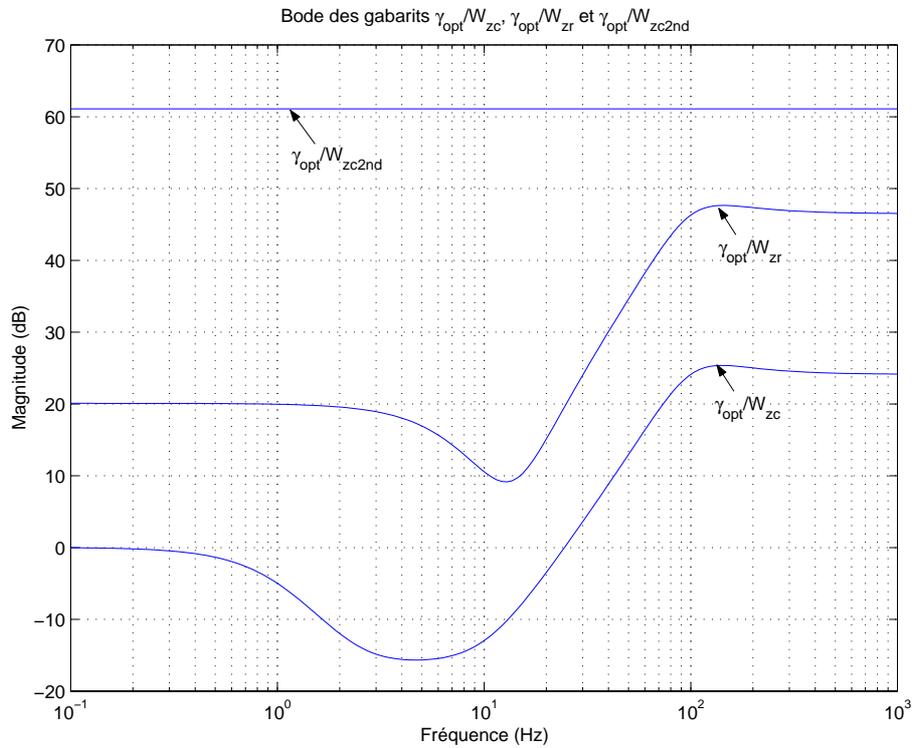
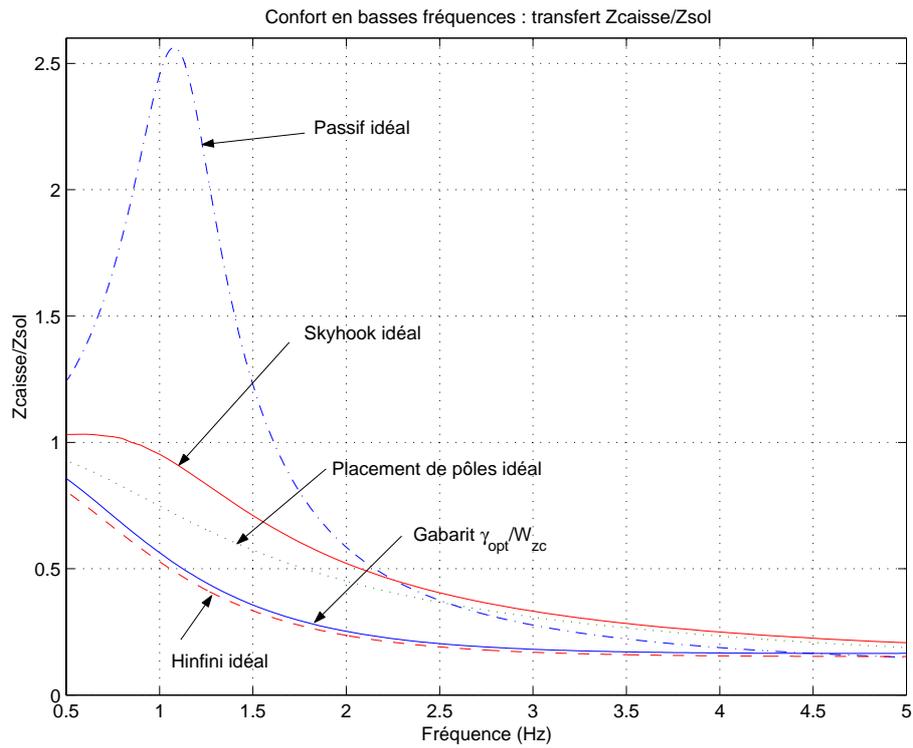
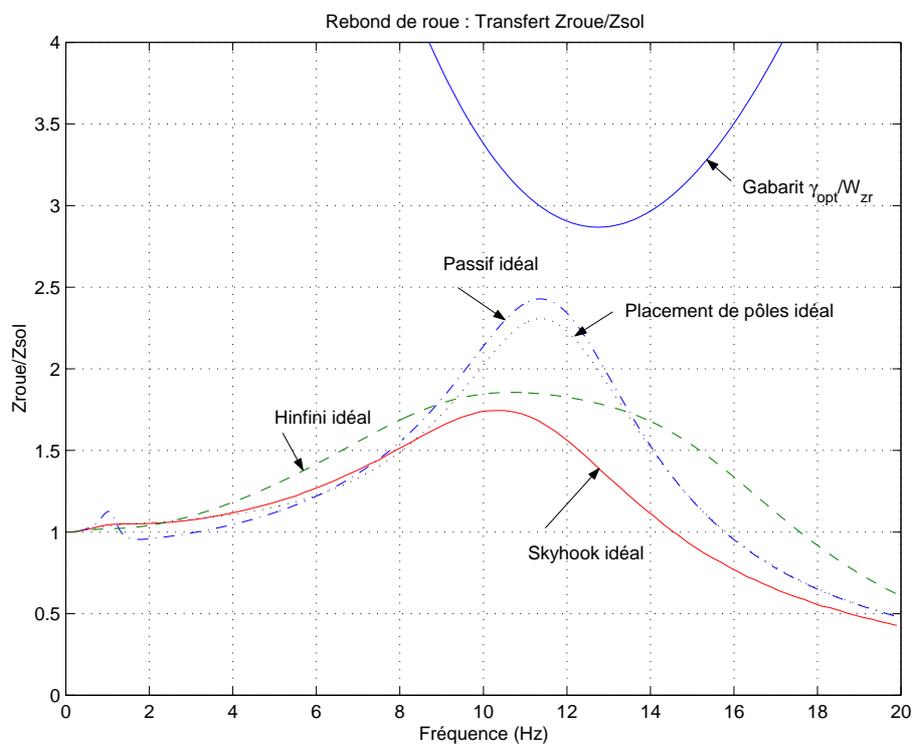


FIG. 4.76: Gabarits fréquentiels des transferts  $z_{caisse}/z_{sol}$ ,  $z_{roue}/z_{sol}$  et  $\ddot{z}_{caisse}/z_{sol}$

Les figures 4.77 à 4.79 permettent de comparer ces gabarits avec les transferts  $z_{caisse}/z_{sol}$ ,  $z_{roue}/z_{sol}$  et  $\ddot{z}_{caisse}/z_{sol}$  du système passif idéal et des systèmes bouclés (placement de pôles, Skyhook et  $H_\infty$ ). Attention aux échelles de la figure 4.76 qui permettent une vue d'ensemble des gabarits mais ne sont pas similaires à celles des figures 4.77 à 4.79.

Dans le cas général, il faut tout d'abord déterminer les gabarits pour chaque transfert entre  $w$  et  $e$ , puis les normaliser de manière à ce que la valeur 1, pour la norme  $H_\infty$  du transfert  $N_{ew}$ , corresponde aux performances nominales désirées.

Notons qu'ici les pondérations n'affectent pas le régulateur puisque ce dernier est déjà déterminé. Il n'est donc plus nécessaire de les choisir de manière à ne pas solliciter le régulateur en hautes fréquences, comme c'est le cas lors de la synthèse  $H_\infty$ . C'est pourquoi nous n'avons pas utilisé la pondération  $W_u(s)$ . Cependant, nous avons gardé les

FIG. 4.77: Comparaison du transfert  $z_{casse}/z_{sol}$  avec son gabarit fréquentiel initial.FIG. 4.78: Comparaison du transfert  $z_{roue}/z_{sol}$  avec son gabarit fréquentiel initial.

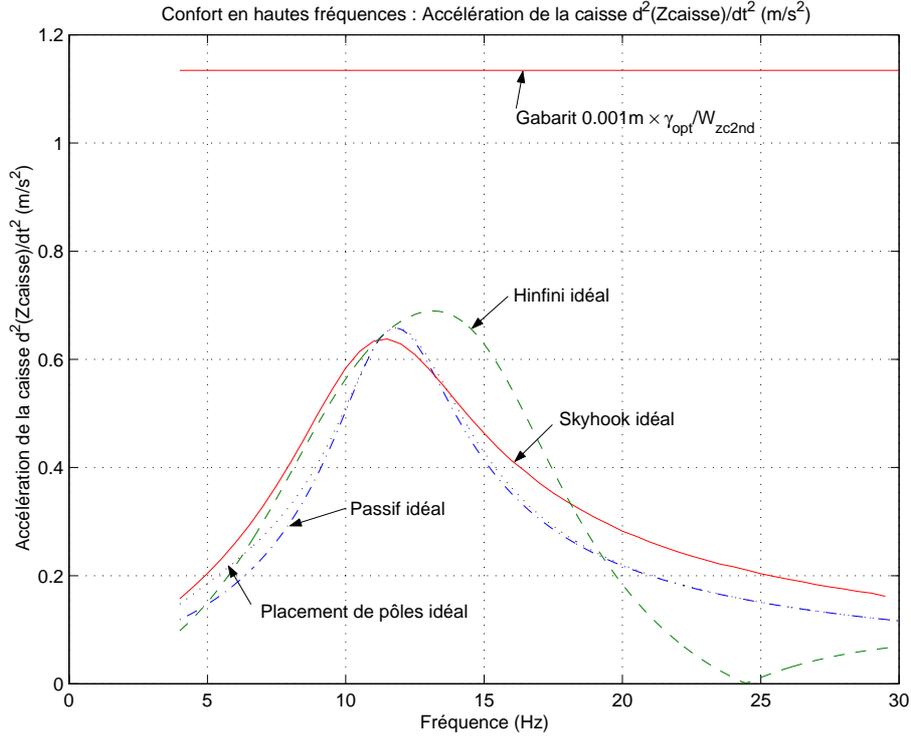


FIG. 4.79: Comparaison du transfert  $\ddot{z}_{caisse}/z_{sol}$  avec son gabarit fréquentiel initial.

pondérations relatives aux performances et utilisées lors de la synthèse  $H_\infty$ , afin d'éviter une nouvelle étape de détermination et de normalisation des gabarits. Le vecteur  $w$  est donc, dans notre cas, le même que celui utilisé lors de la synthèse  $H_\infty$ . Le vecteur  $e$  est, par contre, constitué uniquement de  $e = [\ddot{W}_{zc2nd} \cdot z_{caisse}, W_{zc} \cdot z_{caisse}, W_{zr} \cdot z_{roue}]^t$ .

Voyons maintenant la mise sous forme LFT du problème des performances nominales en vue de l'utilisation de la  $\mu$ -analyse. En définissant les sorties à contrôler  $e$  en fonction des entrées exogènes  $w$ , nous obtenons une matrice de transfert notée  $N_{22}(s) = N_{ew}(s)$ , qui correspond au système nominal avec les gabarits de performances.

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, nous utilisons une matrice d'incertitudes fictives  $\Delta_f(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{2 \times 3}$  reliant  $e$  (de dimension 3) à  $w$  (de dimension 2). L'ensemble des matrices complexes qui ont la même structure que la matrice d'incertitudes fictives  $\Delta_f(s)$ , est noté  $\underline{\Delta}_f$  :

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_f &= \text{diag} \{ \Delta_1 \} \\ \Delta_1 &\in \mathcal{C}^{2 \times 3} \end{aligned} \quad (4.43)$$

La mesure  $\mu_{\underline{\Delta}_f}(N_{22}(s))$  permet de vérifier si les performances nominales (NP) sont atteintes. Dans notre cas, étant donné que nous avons choisi, comme performances nominales, celles obtenues avec ce régulateur  $H_\infty$ , le maximum de cette mesure est égale à 1 pour le système bouclé par ce régulateur. Comme nous le verrons plus loin, ce n'est pas le cas pour les systèmes bouclés avec les autres régulateurs.

### 4.7.1.2 Choix et représentation des incertitudes

Voyons maintenant quelles sont les incertitudes prises en compte et comment les représenter sous forme LFT de manière à pouvoir utiliser la  $\mu$ -analyse. Dans notre cas, nous ne considérons que des incertitudes paramétriques. Cependant Duc & Font (1998); Zhou (1998) et Skogestad & Postlethwaite (1996) expliquent comment représenter d'autres types d'incertitudes.

Nous considérons des variations de 10% sur chacun des paramètres physiques (masses, raideurs) du système. Notons que le paramètre  $c$  correspond à l'amortissement de la suspension passive et n'est donc pas pris en compte pour l'étude des incertitudes du système avec la suspension active. Ainsi les valeurs réelles des 4 paramètres sont :

$$\bar{k} = k(1 + p_k \delta_k), \text{ avec } p_k = 10\% = 0.1 \text{ et } \delta_k \in [-1; 1] \quad (4.44)$$

$$\bar{k}_p = k_p(1 + p_{k_p} \delta_{k_p}), \quad p_{k_p} = 10\% = 0.1, \quad \delta_{k_p} \in [-1; 1] \quad (4.45)$$

$$\bar{m}_c = m_c(1 + p_{m_c} \delta_{m_c}), \quad p_{m_c} = 10\% = 0.1, \quad \delta_{m_c} \in [-1; 1] \quad (4.46)$$

$$\bar{m}_r = m_r(1 + p_{m_r} \delta_{m_r}), \quad p_{m_r} = 10\% = 0.1, \quad \delta_{m_r} \in [-1; 1] \quad (4.47)$$

Dans ce système, les masses interviennent par leur inverse.

$$\frac{1}{\bar{m}_c} = \frac{1}{m_c(1 + p_{m_c} \delta_{m_c})} = \frac{1}{m_c} - \frac{p_{m_c}}{m_c} \delta_{m_c} (1 + p_{m_c} \delta_{m_c})^{-1} = \mathcal{F}_l(M_c, \delta_{m_c}) \quad (4.48)$$

$$\frac{1}{\bar{m}_r} = \frac{1}{m_r(1 + p_{m_r} \delta_{m_r})} = \frac{1}{m_r} - \frac{p_{m_r}}{m_r} \delta_{m_r} (1 + p_{m_r} \delta_{m_r})^{-1} = \mathcal{F}_l(M_r, \delta_{m_r}) \quad (4.49)$$

avec

$$M_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_c} & -\frac{p_{m_c}}{m_c} \\ 1 & -p_{m_c} \end{bmatrix}; \quad M_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_r} & -\frac{p_{m_r}}{m_r} \\ 1 & -p_{m_r} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Le schéma 4.80 montre comment remplacer les paramètres réels par leur valeur moyenne avec une incertitude, pour obtenir la figure 4.81.

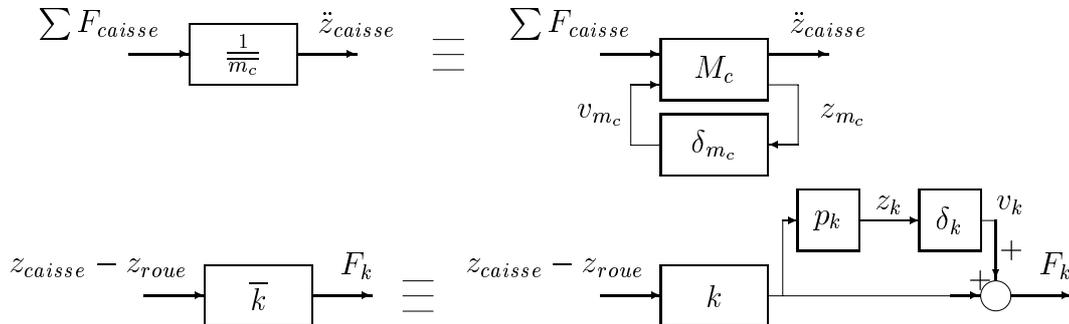


FIG. 4.80: Schéma d'application des incertitudes paramétriques.

où :

- $\sum F_{caisse}$  (resp.  $\sum F_{roue}$ ) est la somme des forces agissant sur la caisse (resp. roue),

- $\ddot{z}_{caisse}$  (resp.  $\ddot{z}_{roue}$ ) l'accélération verticale de la caisse (resp. roue),
- $F_k$  (resp.  $F_{k_p}$ ) la force développée par la raideur de la suspension (resp. du pneu),
- $\mathcal{F}_l(M_c, \delta_{m_c})$  la transformation linéaire fractionnaire (LFT) inférieure de  $M_c$  avec  $\delta_{m_c}$  comme paramètre.

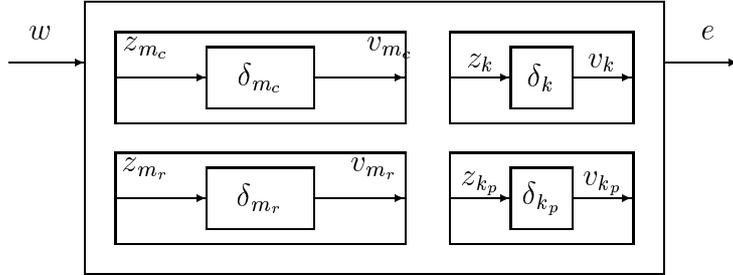
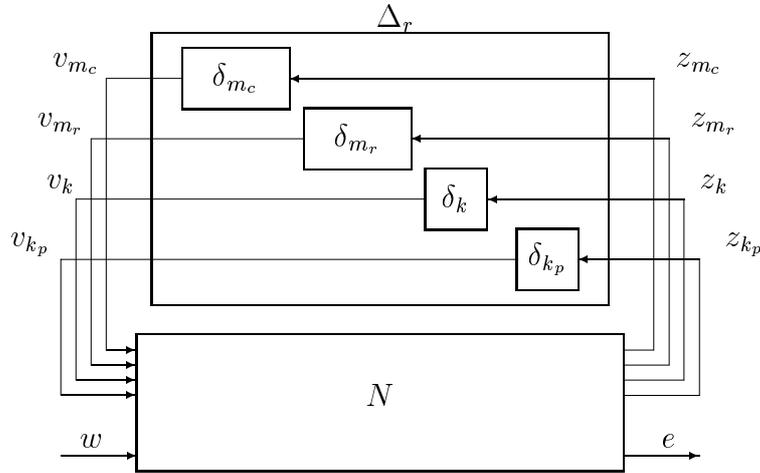


FIG. 4.81: Schéma des incertitudes dans le modèle perturbé.

Nous passons du schéma de la figure 4.81 à celui de la figure 4.82 en regroupant les incertitudes paramétriques  $\delta_{m_c}$ ,  $\delta_{m_r}$ ,  $\delta_k$ ,  $\delta_{k_p}$  dans le bloc d'incertitudes réelles  $\Delta_r(s) = \text{diag}(\delta_{m_c}, \delta_{m_r}, \delta_k, \delta_{k_p})$ , hors du modèle nominal.

FIG. 4.82: Schéma des incertitudes regroupées dans  $\Delta_r(s)$  hors du modèle nominal.

L'ensemble des matrices complexes ayant la même structure que  $\Delta_r(s)$  est :

$$\underline{\Delta}_r = \text{diag} \{ \delta_1, \dots, \delta_4 \} \quad (4.51)$$

$$\delta_i \in \mathbb{R}$$

De la même façon qu'au paragraphe précédent, en décrivant les sorties

$$z_{\Delta_r} = [z_{m_c}, z_{m_r}, z_k, z_{k_p}]^t$$

en fonction des entrées

$$v_{\Delta_r} = [v_{m_c}, v_{m_r}, v_k, v_{k_p}]^t$$

nous obtenons une matrice de transfert que nous notons  $N_{11}(s)$  et dont le majorant de la mesure  $\mu_{\underline{\Delta}}(N_{11}(s))$  permet de statuer sur la stabilité robuste (RS) du système vis à vis des incertitudes paramétriques.

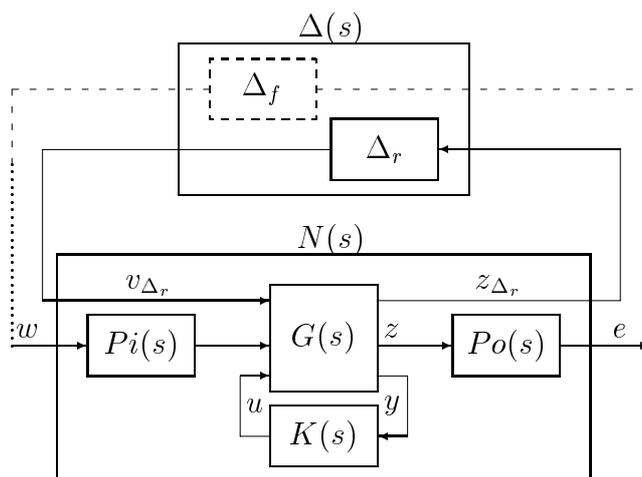


FIG. 4.83: Schéma complet des incertitudes réelles et fictives regroupées dans  $\Delta(s)$ .

La matrice de transfert  $N(s)$  relie les entrées  $w$  et  $v_{\Delta_r}$  aux sorties  $e$  et  $z_{\Delta_r}$  (cf. fig. 4.83). Nous regroupons les matrices  $\Delta_r(s)$  et  $\Delta_f(s)$  dans la matrice  $\Delta(s) = \text{diag}(\Delta_r(s), \Delta_f(s))$ . L'ensemble  $\underline{\Delta}$  des matrices complexes présentant la même structure que  $\Delta(s)$  est défini par :

$$\underline{\Delta} = \text{diag} \{ \delta_1, \dots, \delta_4, \Delta_1 \} \quad (4.52)$$

$$\Delta_1 \in \mathcal{C}^{2 \times 3} \quad \delta_i \in \mathbb{R}$$

Le majorant de la mesure  $\mu$  de cette matrice  $N(s)$ , relativement à  $\underline{\Delta}$ , fixe alors les intervalles de confiance admissibles, pour chaque paramètre incertain, si nous désirons obtenir des performances robustes (RP).

## 4.7.2 Analyse des problèmes NP, RS et RP

Nous analysons maintenant, pour les systèmes bouclés par les régulateurs  $H_\infty$  et par placement de pôles (paragraphe 4.7.2.2), les problèmes de performances nominales (NP), de stabilité en robustesse (RS) et de performances robustes (RP), définis aux paragraphes précédents.

### 4.7.2.1 Régulateur $H_\infty$

Nous analysons dans un premier temps le problème des performances nominales, avant d'étudier les problèmes de stabilité robuste et de performances robustes pour deux choix

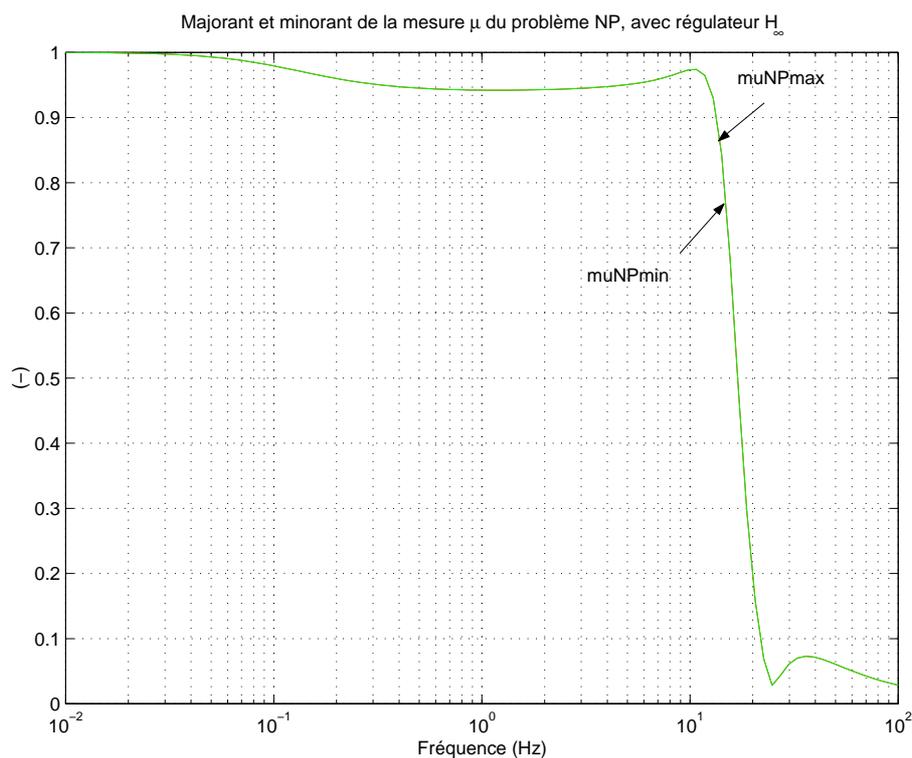


FIG. 4.84: Majorant et minorant de la mesure  $\mu$  des performances nominales (NP) du système avec la commande  $H_\infty$

différents des intervalles des incertitudes paramétriques.

### a) Problème NP

Le problème des performances nominales (NP) est indépendant des incertitudes choisies sur les paramètres. Nous pouvons donc calculer un majorant et un minorant de la mesure  $\mu$  du problème NP (fig. 4.84).

Comme nous le rappelons dans la table 4.7, le maximum du majorant de cette mesure  $\mu$  est égale à 1, ce qui signifie que les performances nominales sont atteintes (cf. fig. 4.77). C'est normal puisque les performances nominales sont choisies égales à celles de ce système bouclé.

### b) Problèmes RS et RP pour le premier choix d'incertitudes

Nous avons, dans un premier temps, choisi les pourcentages d'erreur initiaux suivants pour chaque paramètre physique :

$$\begin{aligned}
 m_c &= 415kg \pm 10\% \\
 m_r &= 52kg \pm 10\% \\
 k &= 22000N/m \pm 10\% \\
 k_p &= 270000N/m \pm 10\%
 \end{aligned}
 \tag{4.53}$$

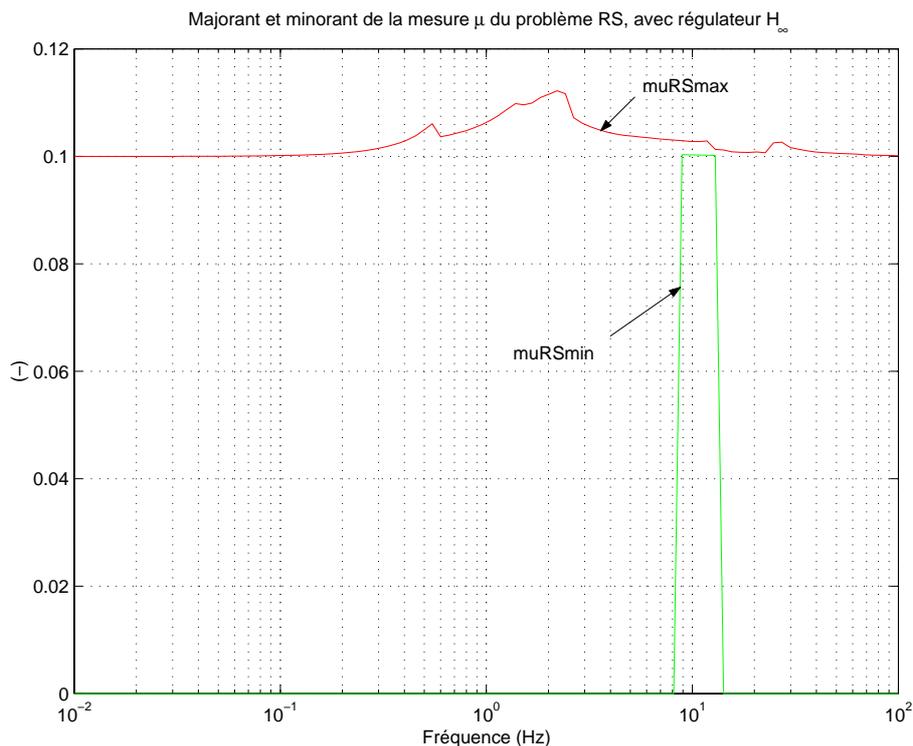


FIG. 4.85: Majorant et minorant de la mesure  $\mu$  de la stabilité robustes (RS) du système avec la commande  $H_\infty$  avec  $\pm 10\%$  pour tous les paramètres

Max. $\mu$ de NP	1
Max. $\mu$ de RS	0.11
Max. $\mu$ de RP	1.23

TAB. 4.6: Maxima des majorants des mesure  $\mu$  des problèmes NP, RS et RP du système  $H_\infty$  avec  $\pm 10\%$  sur tous les paramètres.

Les figures 4.85 et 4.86 représentent les majorants et les minorants des mesures  $\mu$  des problèmes RS et RP respectivement.

Pour le système équipé de la commande  $H_\infty$ , les maxima des majorants des mesures  $\mu$  des différents problèmes sont donnés par la table 4.6.

Cette table indique, la mesure  $\mu$  de RS étant inférieure à 1 (Max.  $\mu$  de RS = 0.11), que le système bouclé reste stable pour des intervalles de confiance plus grands que ceux prévus au départ puisque nous les divisons par 0.11 :

$$\begin{aligned}
 m_c &= 415kg \pm (10/0.11)\% = 415kg \pm 89\% \\
 m_r &= 52kg \pm 89\% \\
 k &= 22000N/m \pm 89\% \\
 k_p &= 270000N/m \pm 89\%
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Pour finir, le maximum de la mesure  $\mu$  de RP étant supérieur à 1 (Max.  $\mu$  de RP = 1.23), cela signifie que les gabarits initiaux ne sont pas garantis et que les intervalles initiaux ne sont pas acceptables. Par contre, pour les intervalles réduits suivants, obtenus en

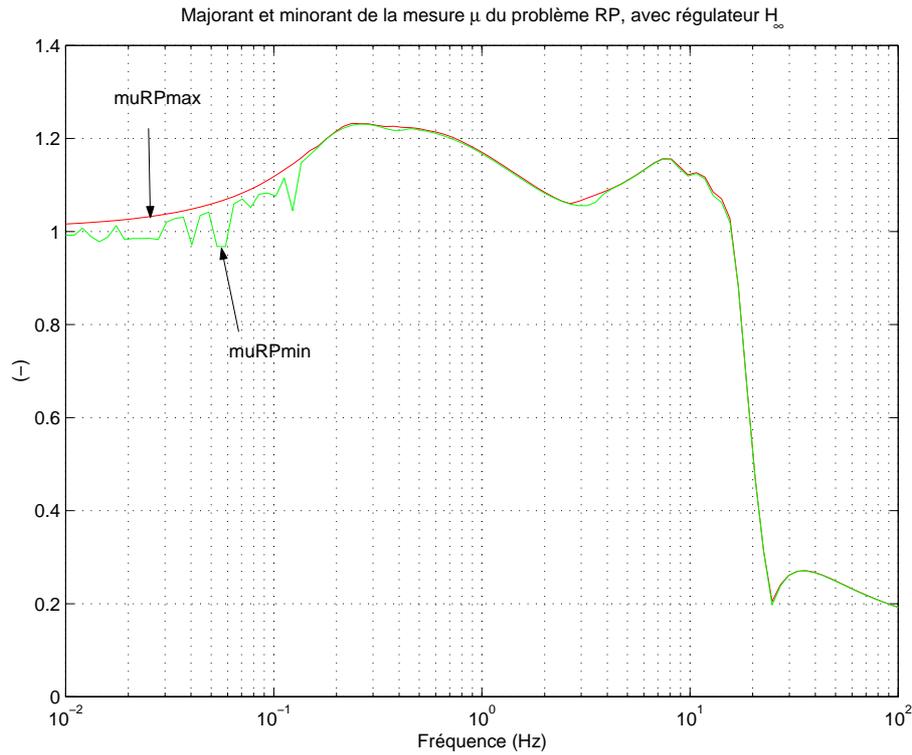


FIG. 4.86: Majorant et minorant de la mesure  $\mu$  des performances robustes (RP) du système avec la commande  $H_\infty$  avec  $\pm 10\%$  pour tous les paramètres

divisant les intervalles initiaux par 1.23, les gabarits augmentés sont assurés. Les gabarits augmentés correspondent aux gabarits initiaux multipliés par le maximum du majorant de la mesure  $\mu$  de RP qui vaut 1.23. Ainsi les gabarits initiaux multipliés par 1.23 sont satisfaits pour les intervalles de confiance suivants :

$$\begin{aligned}
 m_c &= 415kg \pm (10/1.23)\% = 415kg \pm 8\% \\
 m_r &= 52kg \pm 8\% \\
 k &= 22000N/m \pm 8\% \\
 k_p &= 270000N/m \pm 8\%
 \end{aligned}
 \tag{4.55}$$

### c) Problèmes RS et RP pour le deuxième choix d'incertitudes

Étant donné qu'en pratique, la masse de la caisse varie beaucoup plus que les autres paramètres, nous testons de nouveaux les problèmes RS et RP, mais avec de nouveaux pourcentages d'erreur initiaux pour chaque paramètre physique :

$$\begin{aligned}
 m_c &= 415kg \pm 30\% \\
 m_r &= 52kg \pm 10\% \\
 k &= 22000N/m \pm 10\% \\
 k_p &= 270000N/m \pm 10\%
 \end{aligned}
 \tag{4.56}$$

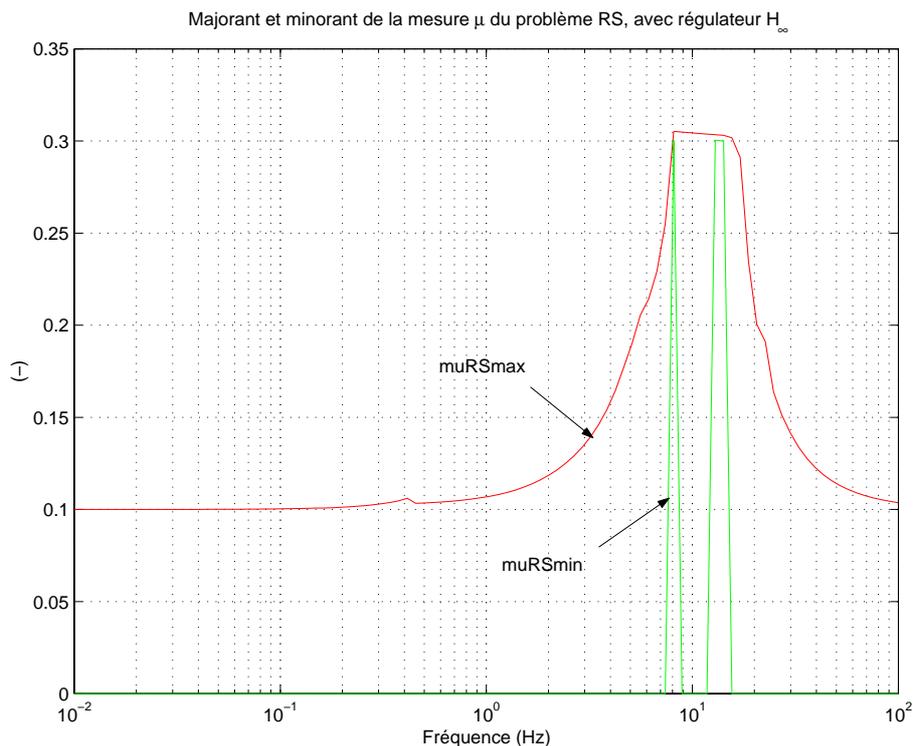


FIG. 4.87: Majorant et minorant de la mesure  $\mu$  de la stabilité robustes (RS) du système avec la commande  $H_\infty$  avec  $\pm 30\%$  pour  $m_c$  et  $\pm 10\%$  pour les autres

Max. $\mu$ de NP	1
Max. $\mu$ de RS	0.31
Max. $\mu$ de RP	1.34

TAB. 4.7: Maxima des majorants des mesures  $\mu$  des problèmes NP, RS et RP du système  $H_\infty$  avec  $\pm 30\%$  sur  $m_c$  et  $\pm 10\%$  sur les autres paramètres.

Les figures 4.87 et 4.88, représentent un majorant et un minorant de la mesure  $\mu$  des problèmes RS et RP respectivement.

Pour le système équipé de la commande  $H_\infty$  et pour le nouveau choix des intervalles initiaux des incertitudes, les maxima des majorants des mesures  $\mu$  des différents problèmes sont donnés par la table 4.7.

Cette table indique que les performances nominales sont atteintes puisque les gabarits fréquentiels ne sont pas dépassés (Max.  $\mu$  de NP = 1). Cette valeur n'a pas changée puisqu'elle ne dépend pas des incertitudes. De plus, la mesure  $\mu$  de RS étant inférieure à 1 (Max.  $\mu$  de RS = 0.31), cela indique que le système bouclé reste stable pour des intervalles de confiance plus grands que ceux prévus au départ. Ces nouveaux intervalles se calculent en divisant les intervalles initiaux par le maximum du majorant de la mesure  $\mu$  du problème considéré (RS) :

$$\begin{aligned}
 m_c &= 415kg \pm (30/0.31)\% = 415kg \pm 97\% \\
 m_r &= 52kg \pm (10/0.31)\% = 52kg \pm 32\% \\
 k &= 22000N/m \pm 32\%
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

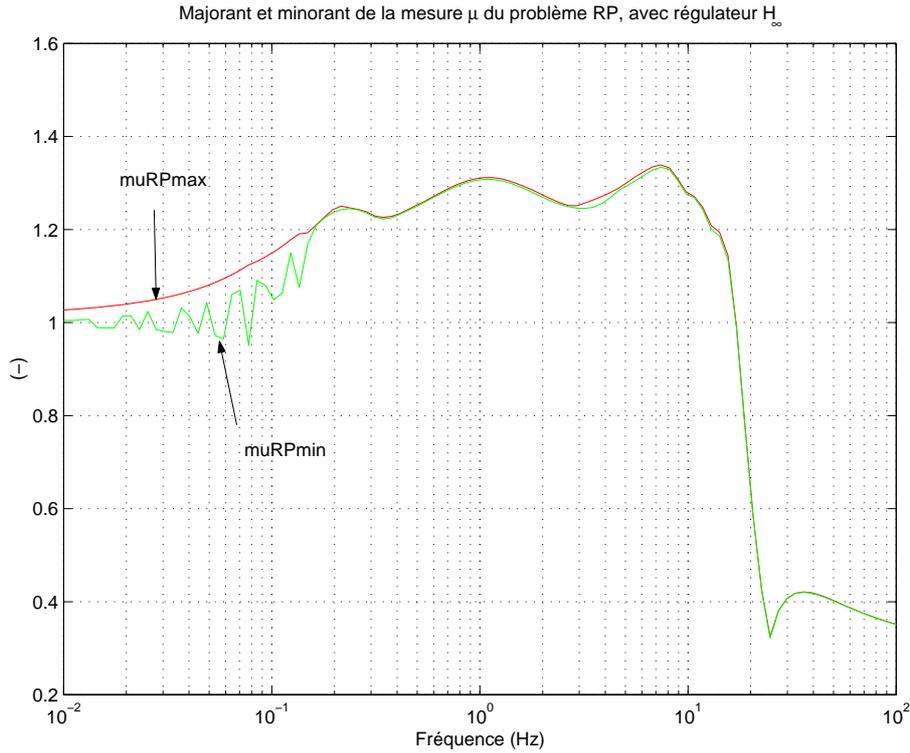


FIG. 4.88: Majorant et minorant de la mesure  $\mu$  des performances robustes (RP) du système avec la commande  $H_\infty$  avec  $\pm 30\%$  pour  $m_c$  et  $\pm 10\%$  pour les autres

$$k_p = 270000N/m \pm 32\%$$

Pour finir, le maximum de la mesure  $\mu$  de RP étant supérieur à 1, cela signifie que les gabarits initiaux ne sont pas garantis et que les intervalles initiaux ne sont pas acceptables. Par contre, pour les intervalles réduits suivants, les gabarits augmentés sont assurés. Les gabarits augmentés correspondent aux gabarits initiaux multipliés par le maximum du majorant de la mesure  $\mu$  de RP qui vaut 1.34. Les intervalles réduits sont calculés en divisant les intervalles initiaux par ce même maximum 1.34. Ainsi les gabarits initiaux multipliés par 1.34 sont satisfaits pour les intervalles de confiance suivants :

$$\begin{aligned} m_c &= 415kg \pm (30/1.34)\% = 415kg \pm 22\% \\ m_r &= 52kg \pm (10/1.34)\% = 52kg \pm 7.5\% \\ k &= 22000N/m \pm 7.5\% \\ k_p &= 270000N/m \pm 7.5\% \end{aligned} \quad (4.58)$$

La figure 4.89 permet de visualiser le gabarit du transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$  du problème NP et les gabarits modifiés pour les deux problèmes RP avec les intervalles de confiance réduits définis précédemment. Nous notons "Gabarit 1 de RP" ou "RP 1" le gabarit respecté pour le problème de performances robuste (RP) face à une variation de chaque paramètre de  $\pm 10\%$  divisé par la mesure  $\mu$  de ce problème RP (1.23). De même, "Gabarit 2 de RP" ou "RP 2" correspond à une variation de la masse de la caisse de  $\pm 30\%$  et des autres paramètres de  $\pm 10\%$  divisé par la mesure  $\mu$  de ce second problème RP (1.34).

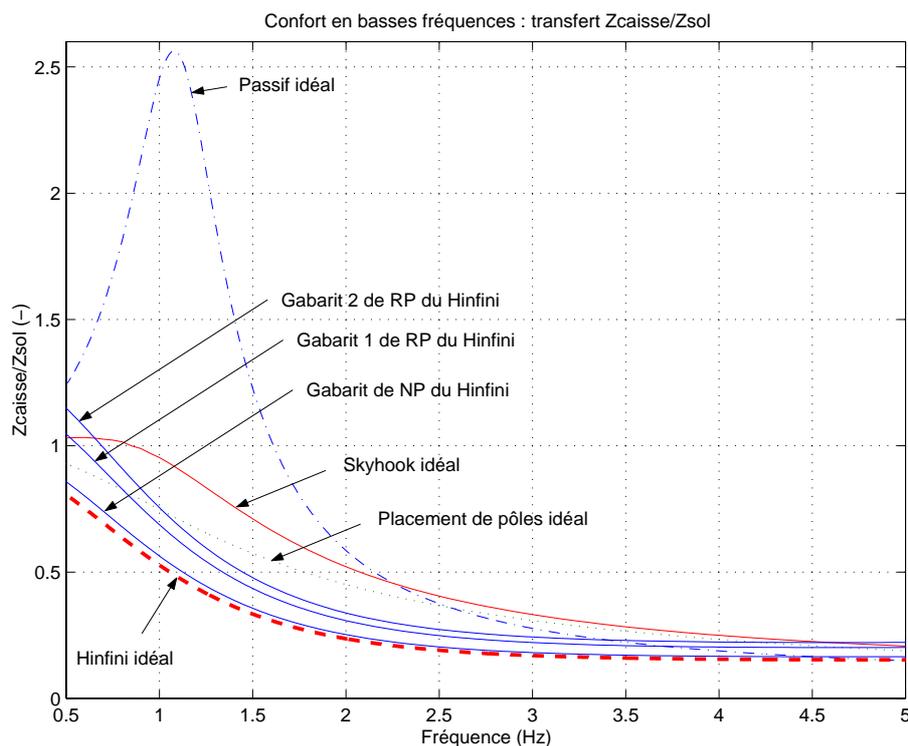


FIG. 4.89: Comparaison du confort en basses fréquences avec les gabarits des problèmes NP, RP 1 et RP 2 pour le régulateur  $H_\infty$

Nous pouvons voir sur cette figure que le système commandé par le régulateur  $H_\infty$  est relativement robuste puisqu'il accepte des variations de la masse de la caisse de l'ordre de 22% et de 7% sur les autres paramètres sans trop détériorer les performances. Au delà de ces intervalles, le système reste tout de même stable pour des variations de 89% de tout les paramètres ou bien pour des variations de 97% de la masse de la caisse et de 32% des autres paramètres. Ce système dispose donc d'une bonne robustesse en stabilité.

#### 4.7.2.2 Régulateur par placement de pôles

Nous procédons de la même manière pour l'analyse du système bouclé par la commande par placement de pôles. Nous obtenons les résultats apparaissant sur les courbes 4.90 à 4.92.

##### a) Problème NP

La mesure  $\mu$  du problème des performances nominales étant supérieure à 1 entre 1 et 38 rad/s (6.1Hz) et entre 63 et 80 rad/s (10 et 12.7Hz) (fig. 4.90), cela indique que les gabarits initiaux ne sont pas respectés. Ces gabarits initiaux sont dépassés au maximum de 81% dans ces deux bandes de fréquence puisque le maximum de la mesure  $\mu$  de NP vaut 1.81 (fig. 4.77).

##### b) Problèmes RS et RP pour le premier choix d'incertitudes

Pour le premier choix des intervalles de confiance initiaux, correspondant à  $\pm 10\%$  sur

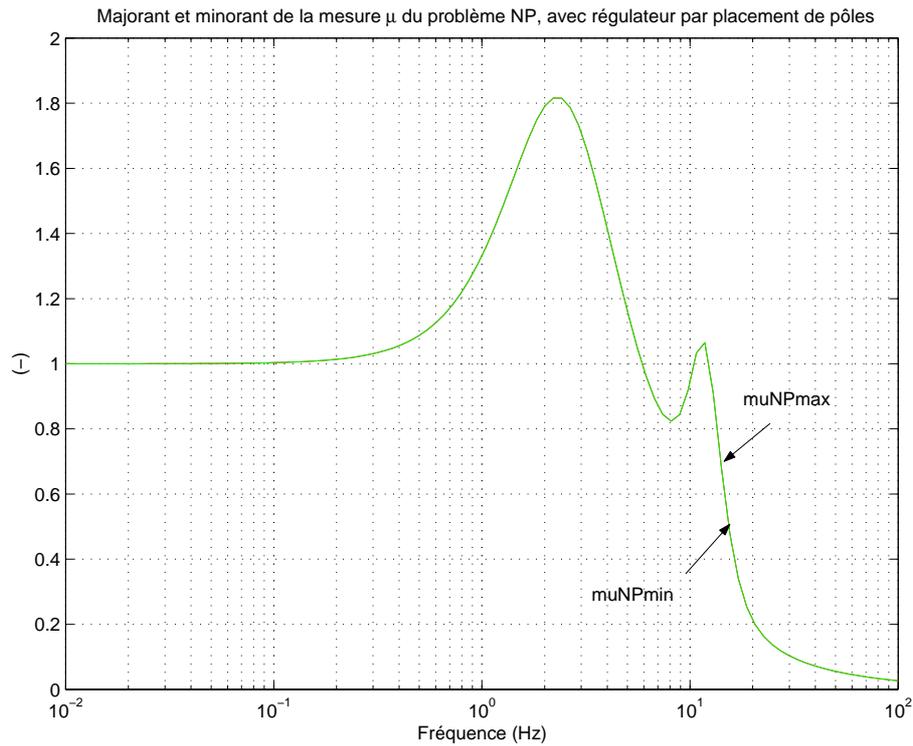


FIG. 4.90: Majorant et minorant de la mesure  $\mu$  des performances nominales (NP) du système avec la commande par placement de pôles

Max. $\mu$ de NP	1.81
Max. $\mu$ de RS	0.13
Max. $\mu$ de RP	1.95

TAB. 4.8: Maxima des majorants des mesures  $\mu$  des problèmes NP, RS et RP du placement de pôles avec  $\pm 10\%$  sur tous les paramètres.

tous les paramètres, nous obtenons les maxima des majorant des mesures  $\mu$  des problèmes NP, RS et RP donnés dans par la table 4.8 (voir fig. 4.91 et 4.92).

Nous en concluons les résultats suivants pour les problèmes RS et RP.

Le système bouclé est donc stable (RS) (Max.  $\mu$  de RS = 0.13) pour tout système dont les paramètres appartiennent aux intervalles de confiance suivants :

$$\begin{aligned}
 m_c &= 415kg \pm (10/0.13)\% = 415kg \pm 77\% \\
 m_r &= 52kg \pm 77\% \\
 k &= 22000N/m \pm 77\% \\
 c &= 1500N/m/s \pm 77\% \\
 k_p &= 270000N/m \pm 77\%
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

La mesure  $\mu$  du problème RP indique que les gabarits initiaux sont dépassés au maximum de 95% (Max.  $\mu$  de RP = 1.95) pour tout système dont les paramètres sont dans les intervalles de confiance suivants :

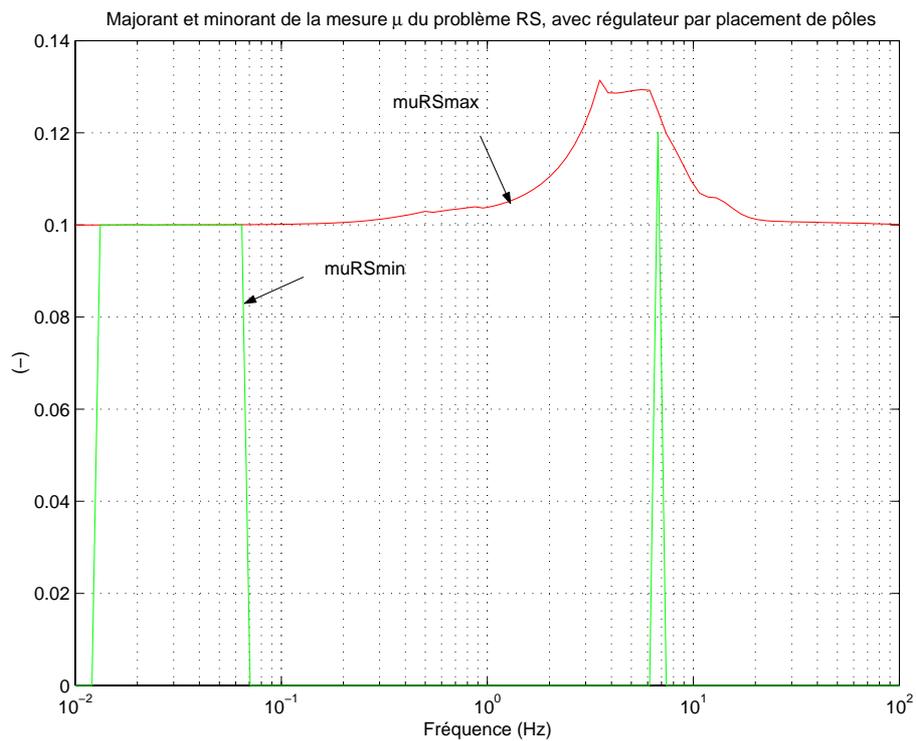


FIG. 4.91: Majorant et minorant de la mesure  $\mu$  de la stabilité robustes (RS) du système avec la commande par placement de pôles avec  $\pm 10\%$  pour tous les paramètres

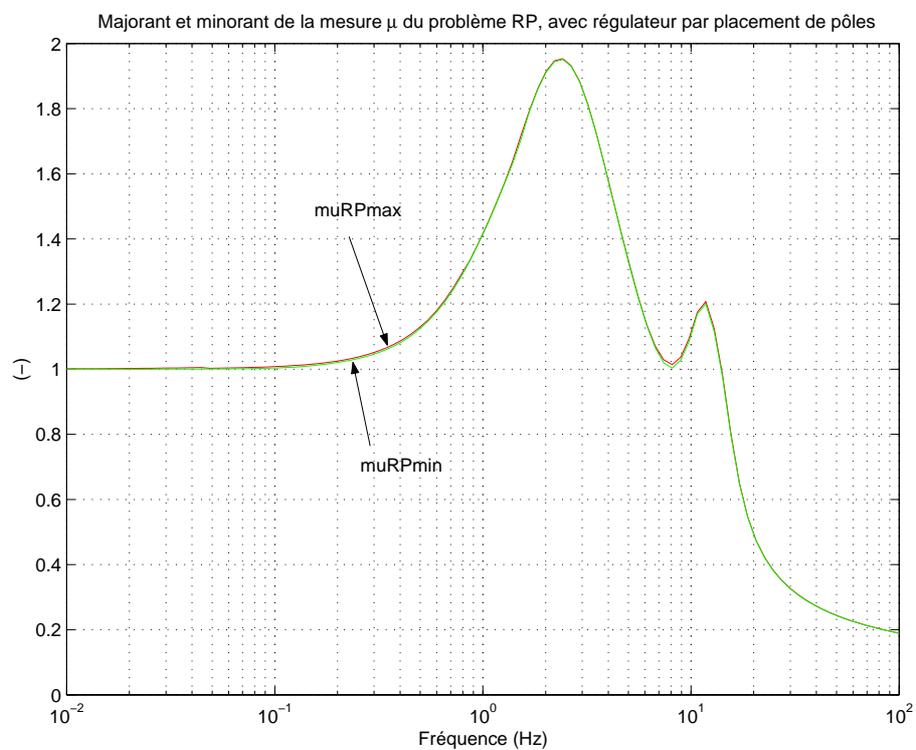


FIG. 4.92: Majorant et minorant de la mesure  $\mu$  des performances robustes (RP) du système avec la commande par placement de pôles avec  $\pm 10\%$  pour tous les paramètres

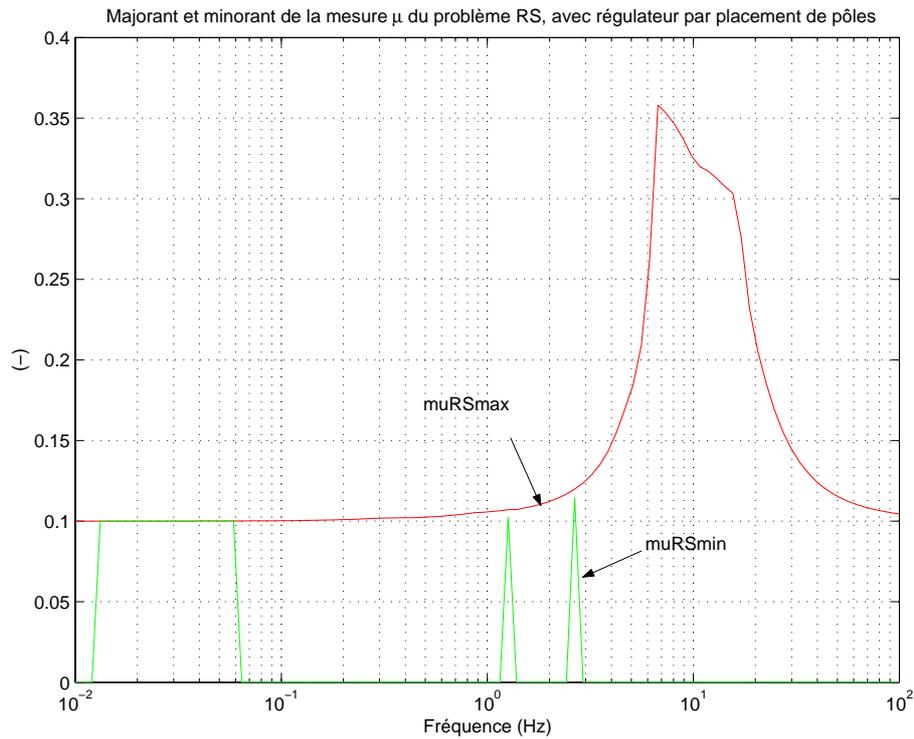


FIG. 4.93: Majorant et minorant de la mesure  $\mu$  de la stabilité robustes (RS) du système avec la commande par placement de pôles avec  $\pm 30\%$  pour  $m_c$  et  $\pm 10\%$  pour les autres

$$\begin{aligned}
 m_c &= 415kg \pm (10/1.95)\% = 415kg \pm 5\% \\
 m_r &= 52kg \pm 5\% \\
 k &= 22000N/m \pm 5\% \\
 c &= 1500N/m/s \pm 5\% \\
 k_p &= 270000N/m \pm 5\%
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Notons que les dépassement des gabarits initiaux se font uniquement dans les zones de fréquences où la mesure  $\mu$  est supérieure à 1. Il est possible de déterminer ces zones de fréquences à partir des figures précédentes.

### c) Problèmes RS et RP pour le deuxième choix d'incertitudes

Si l'on reprend les calculs pour les intervalles initiaux correspondant à  $\pm 30\%$  sur la masse de la caisse et  $\pm 10\%$  sur les autres paramètres, nous obtenons les maxima des majorants des mesures  $\mu$  des problème NP, RS et RP. donnés par la table 4.9 (voir fig. 4.93 et 4.94).

Le système bouclé est donc stable (RS) (Max.  $\mu$  de RS = 0.36) pour tous les paramètres dans les intervalles de confiance suivants, obtenue en divisant les intervalles initiaux par 0.36 :

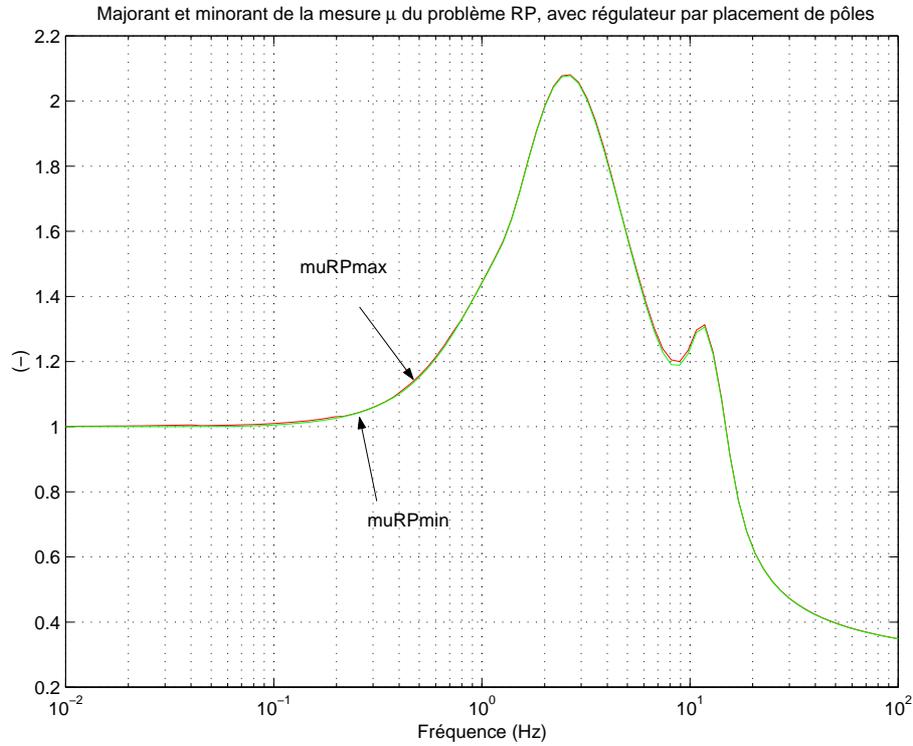


FIG. 4.94: Majorant et minorant de la mesure  $\mu$  des performances robustes (RP) du système avec la commande par placement de pôles avec  $\pm 30\%$  pour  $m_c$  et  $\pm 10\%$  pour les autres

Max. $\mu$ de NP	1.81
Max. $\mu$ de RS	0.36
Max. $\mu$ de RP	2.08

TAB. 4.9: Maxima des majorants des mesures  $\mu$  des problèmes NP, RS et RP du placement de pôles avec  $\pm 30\%$  sur  $m_c$  et  $\pm 10\%$  sur les autres paramètres.

$$\begin{aligned}
m_c &= 415kg \pm (30/0.36)\% = 415kg \pm 83\% \\
m_r &= 52kg \pm (10/0.36)\% = 52kg \pm 28\% \\
k &= 22000N/m \pm 28\% \\
c &= 1500N/m/s \pm 28\% \\
k_p &= 270000N/m \pm 28\%
\end{aligned} \tag{4.61}$$

La mesure  $\mu$  du problème RP indique que les gabarits initiaux sont dépassés au maximum de 108% (Max.  $\mu$  de RP = 2.08) pour tout système dont les paramètres sont dans les intervalles de confiance suivants :

$$\begin{aligned}
m_c &= 415kg \pm (30/2.08)\% = 415kg \pm 15\% \\
m_r &= 52kg \pm (10/2.08)\% = 52kg \pm 4.9\% \\
k &= 22000N/m \pm 4.9\% \\
c &= 1500N/m/s \pm 4.9\% \\
k_p &= 270000N/m \pm 4.9\%
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Comme pour le régulateur  $H_\infty$ , nous traçons sur la figure 4.95 les gabarits du transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$  pour les problème NP, RP 1 et RP 2 avec les intervalles de confiance réduits définis précédemment.

Nous voyons sur cette figure que le confort en basses fréquences du système commandé par le régulateur par placement de pôles respecte bien le gabarit NP défini par la  $\mu$ -analyse. Ces deux courbes sont confondues aux alentours de 2Hz soit environ 13rad/s ce qui correspond au pic de la mesure  $\mu$  du problème NP (fig. 4.90). De plus, ce système est relativement robuste puisque les gabarits RP 1 RP 2 ne sont pas très éloignés du gabarit NP pour ce régulateur par placement de pôles. Les intervalles admissibles pour les problèmes RP 1 et RP 2 sont plus restreints que ceux obtenus pour la commande  $H_\infty$  puisqu'ils sont de 15% sur la masse de la caisse et de 5% sur les autres paramètres, au lieu de 22% et 7% respectivement, ou bien de 5% sur tous les paramètres, au lieu de 8%.

Ce système possède une bonne robustesse en stabilité puisque des variations de 77% de tous les paramètres, ou bien de 83% sur la masse de la caisse et de 28% sur les autres paramètres, sont acceptées.

Notons que la robustesse en performances, pourrait s'étudier en utilisant un gabarit initial qui correspond aux performances nominales de ce système régulé par placement de pôles (alors que c'est celui utilisé pour la synthèse  $H_\infty$  qui est ici considéré). Nous obtiendrions alors des gabarits pour RP 1 et RP 2 de même forme que les performances du placement pôles idéal, et non, comme c'est notre cas, de la forme des performances du système  $H_\infty$ . Ainsi les gabarits de ce transfert seraient sans doute moins pessimistes pour les fréquences inférieures à 2Hz et supérieures à 3Hz environ.

### 4.7.2.3 Régulateur Skyhook

Pour finir, nous étudions le cas du régulateur Skyhook. Nous procédons de la même manière que pour les régulateurs précédents. Les résultats de la  $\mu$ -analyse du système

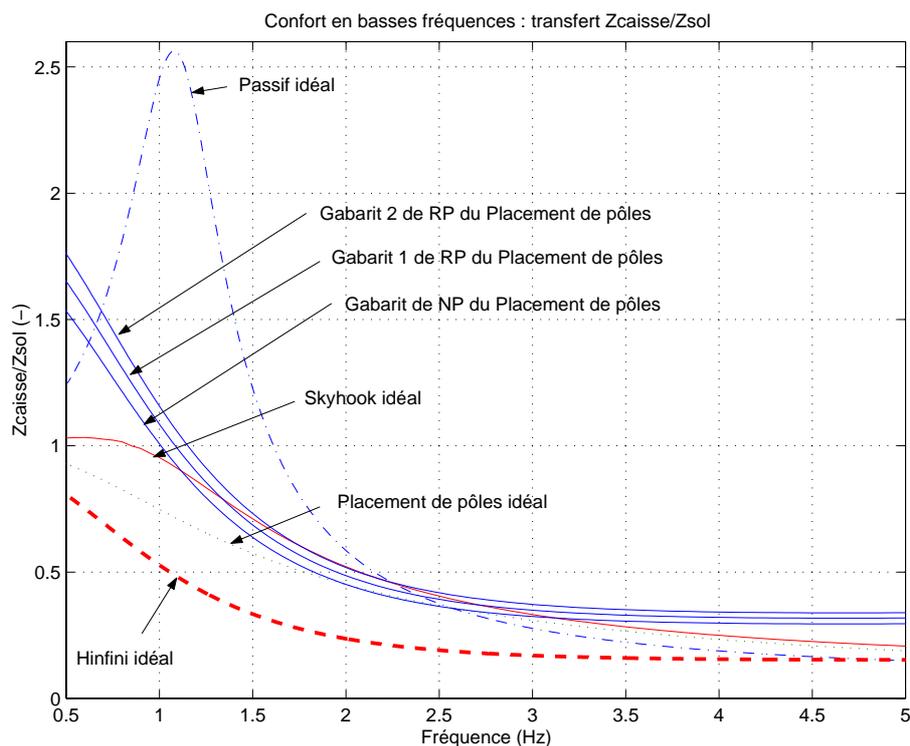


FIG. 4.95: Comparaison du confort en basses fréquences avec les gabarits des problèmes NP, RP 1 et RP 2 pour le régulateur par placement de pôles

Max. $\mu$ de NP	4.77
Max. $\mu$ de RS	0.12
Max. $\mu$ de RP	4.87

TAB. 4.10: Maxima des majorants des mesures  $\mu$  des problèmes NP, RS et RP du Skyhook avec  $\pm 10\%$  sur tous les paramètres.

bouclé par le régulateur Skyhook apparaissent sur les courbes 4.96 à 4.98.

### a) Problème NP

La mesure  $\mu$  du problème des performances nominales étant supérieure à 1 jusqu'à 29 rad/s (4.6Hz) et entre 63 et 80 rad/s (10 et 12.9Hz) (fig. 4.96), cela indique que les gabarits initiaux ne sont pas respectés. Ces gabarits initiaux sont dépassés au maximum de 377% (fig. 4.77) dans ces deux bandes de fréquence puisque le maximum de la mesure  $\mu$  de NP vaut 4.77.

### b) Problèmes RS et RP pour le premier choix d'incertitudes

Pour le premier choix des intervalles de confiance initiaux, correspondant à  $\pm 10\%$  sur tous les paramètres, nous obtenons les maxima des majorant des mesures  $\mu$  des problèmes NP, RS et RP donnés dans par la table 4.10 (voir fig. 4.97 et 4.98).

Nous en concluons les résultats suivants pour les problèmes RS et RP.

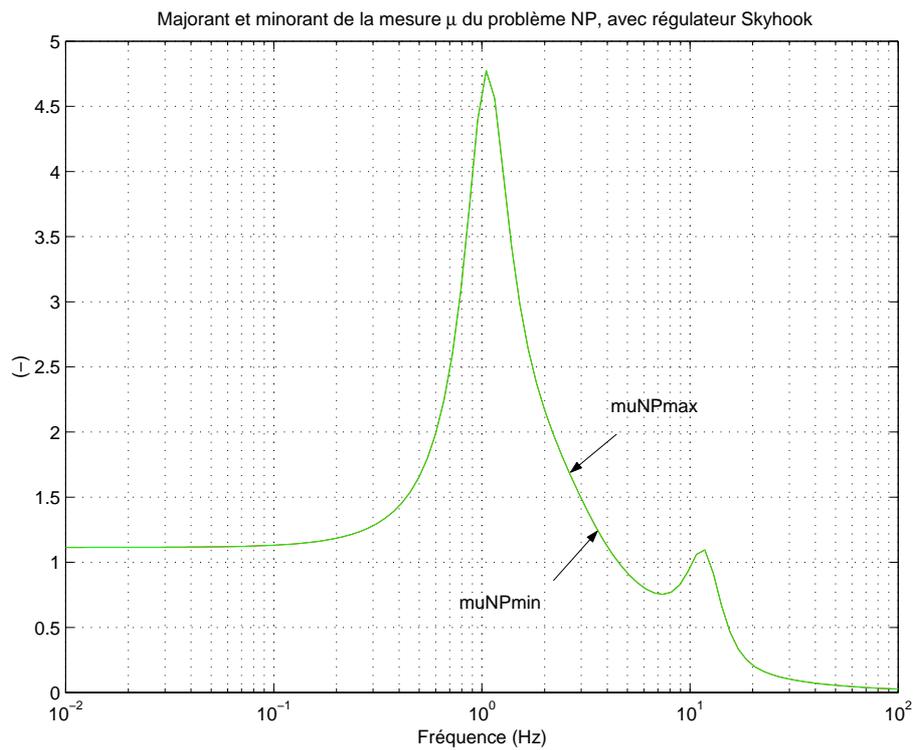


FIG. 4.96: Majorant et minorant de la mesure  $\mu$  des performances nominales (NP) du système avec la commande Skyhook

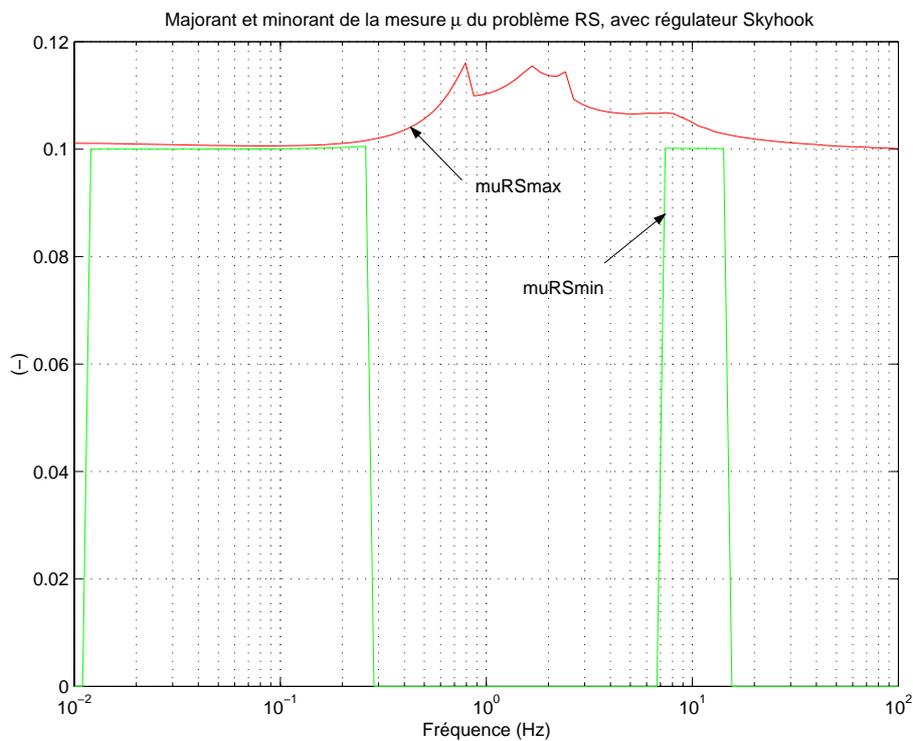


FIG. 4.97: Majorant et minorant de la mesure  $\mu$  de la stabilité robustes (RS) du système avec la commande Skyhook avec  $\pm 10\%$  pour tous les paramètres

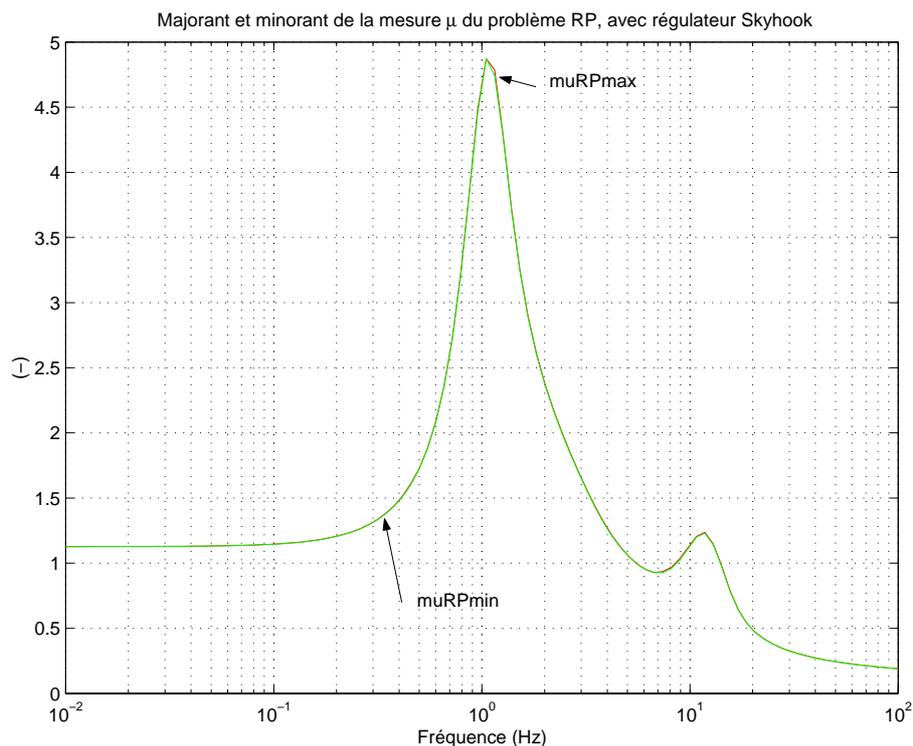


FIG. 4.98: Majorant et minorant de la mesure  $\mu$  des performances robustes (RP) du système avec la commande Skyhook avec  $\pm 10\%$  pour tous les paramètres

Le système bouclé par le régulateur Skyhook est donc stable (RS) (Max.  $\mu$  de RS = 0.12) pour tout système dont les paramètres appartiennent aux intervalles de confiance suivants :

$$\begin{aligned}
 m_c &= 415kg \pm (10/0.12)\% = 415kg \pm 83\% \\
 m_r &= 52kg \pm 83\% \\
 k &= 22000N/m \pm 83\% \\
 c &= 1500N/m/s \pm 83\% \\
 k_p &= 270000N/m \pm 83\%
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

La mesure  $\mu$  du problème RP indique que les gabarits initiaux sont dépassés au maximum de 387% (Max.  $\mu$  de RP = 4.87) pour tout système dont les paramètres sont dans les intervalles de confiance suivants :

$$\begin{aligned}
 m_c &= 415kg \pm (10/4.87)\% = 415kg \pm 2\% \\
 m_r &= 52kg \pm 2\% \\
 k &= 22000N/m \pm 2\% \\
 c &= 1500N/m/s \pm 2\% \\
 k_p &= 270000N/m \pm 2\%
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Notons que les dépassement des gabarits initiaux se font uniquement dans les zones de fréquences où la mesure  $\mu$  est supérieure à 1. Il est possible de déterminer ces zones de

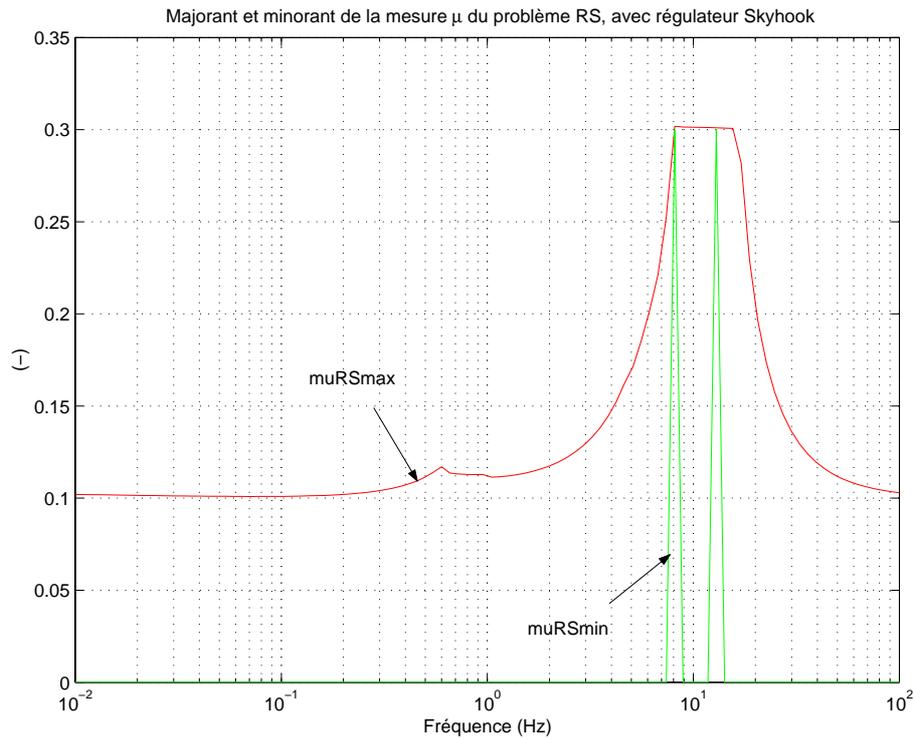


FIG. 4.99: Majorant et minorant de la mesure  $\mu$  de la stabilité robustes (RS) du système avec la commande Skyhook avec  $\pm 30\%$  pour  $m_c$  et  $\pm 10\%$  pour les autres

Max. $\mu$ de NP	4.77
Max. $\mu$ de RS	0.30
Max. $\mu$ de RP	4.89

TAB. 4.11: Maxima des majorants des mesures  $\mu$  des problèmes NP, RS et RP du Skyhook avec  $\pm 30\%$  sur  $m_c$  et  $\pm 10\%$  sur les autres paramètres.

fréquences à partir des figures précédentes.

### c) Problèmes RS et RP pour le deuxième choix d'incertitudes

Si l'on reprend les calculs pour les intervalles initiaux correspondant à  $\pm 30\%$  sur la masse de la caisse et  $\pm 10\%$  sur les autres paramètres, nous obtenons les maxima des majorants des mesures  $\mu$  des problème NP, RS et RP. donnés par la table 4.11 (voir fig. 4.99 et 4.100).

Le système bouclé est donc stable (RS) (Max.  $\mu$  de RS = 0.30) pour tous les paramètres dans les intervalles de confiance suivants, obtenue en divisant les intervalles initiaux par 0.30 :

$$\begin{aligned}
 m_c &= 415kg \pm (30/0.30)\% = 415kg \pm 99\% \\
 m_r &= 52kg \pm (10/0.30)\% = 52kg \pm 33\% \\
 k &= 22000N/m \pm 33\%
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

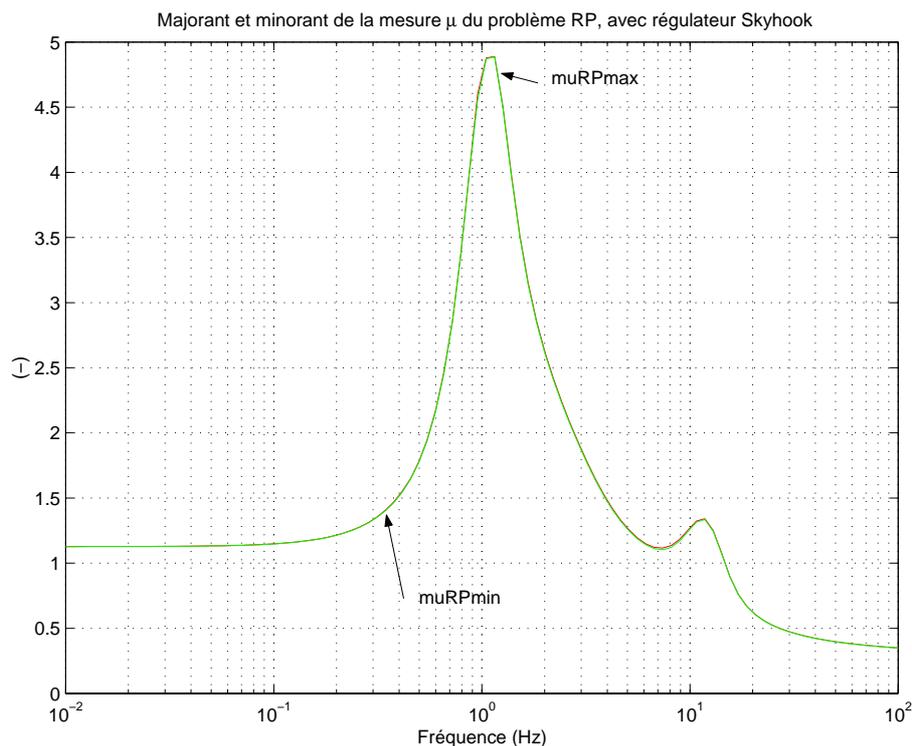


FIG. 4.100: Majorant et minorant de la mesure  $\mu$  des performances robustes (RP) du système avec la commande Skyhook avec  $\pm 30\%$  pour  $m_c$  et  $\pm 10\%$  pour les autres

$$\begin{aligned} c &= 1500N/m/s \pm 33\% \\ k_p &= 270000N/m \pm 33\% \end{aligned}$$

La mesure  $\mu$  du problème RP indique que les gabarits initiaux sont dépassés au maximum de 389% (Max.  $\mu$  de RP = 4.89) pour tout système dont les paramètres sont dans les intervalles de confiance suivants :

$$\begin{aligned} m_c &= 415kg \pm (30/4.89)\% = 415kg \pm 6\% \\ m_r &= 52kg \pm (10/4.89)\% = 52kg \pm 2\% \\ k &= 22000N/m \pm 2\% \\ c &= 1500N/m/s \pm 2\% \\ k_p &= 270000N/m \pm 2\% \end{aligned} \tag{4.66}$$

Comme pour les régulateurs précédents, nous traçons sur la figure 4.101 les gabarits du transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$  pour les problème NP, RP 1 et RP 2 avec les intervalles de confiance réduits définis précédemment.

Nous pouvons voir que le gabarit final du transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$  pour le problème NP est pessimiste mais rappelons que ce transfert n'est qu'un cas particulier alors que la  $\mu$ -analyse prend en compte le plus grand gain entre toutes les combinaisons d'entrées et de sorties possibles.

Le gabarit obtenu pour le problème NP est peu intéressant et les gabarits des problèmes RP le sont donc aussi puisqu'ils sont encore plus pessimistes. Comme pour le régulateur

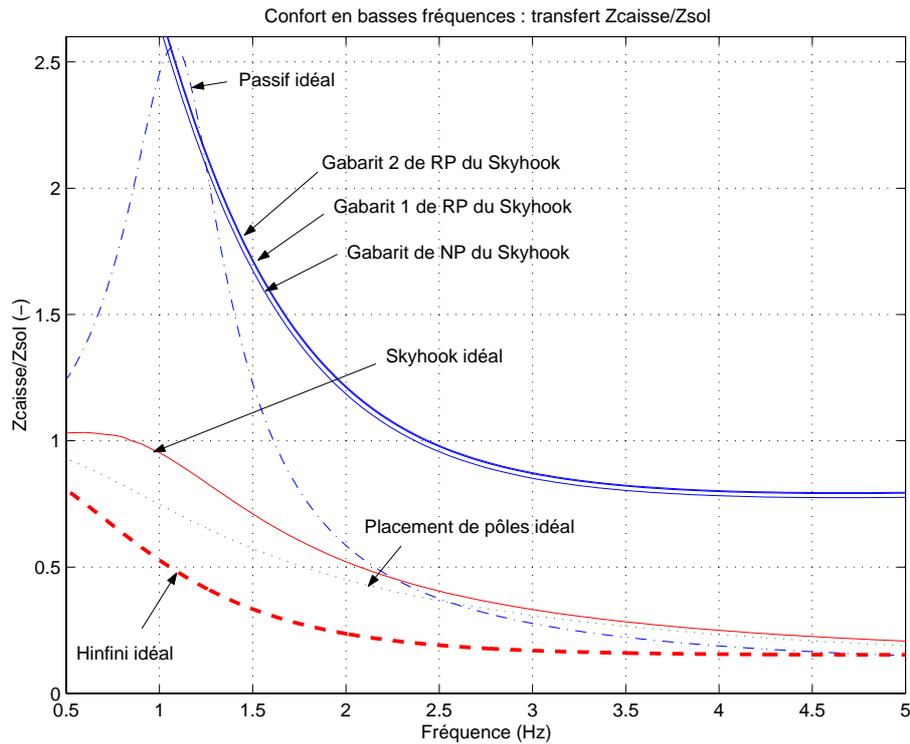


FIG. 4.101: Comparaison du confort en basses fréquences avec les gabarits des problèmes NP, RP 1 et RP 2 pour le régulateur Skyhook

précédent, il serait intéressant d'utiliser comme gabarit initial des performances nominales, un gabarit qui ait la forme du transfert  $z_{caisse}/z_{sol}$  du système bouclé par le régulateur Skyhook idéal. Ainsi, il serait possible d'étudier uniquement l'influence des variations paramétriques sur les performances nominales du Skyhook et pas, comme nous le faisons, par rapport aux performances nominales du  $H_\infty$ .

Enfin, ce système dispose d'une bonne robustesse en stabilité puisqu'il accepte des variations de 99% de la masse de la caisse et de 33% des autres paramètres. Notons que l'intervalle de variations admissible est centré et qu'il n'est donc pas possible d'obtenir un intervalle de 100% puisque cela signifierai la possibilité d'avoir une masse négative.

### 4.7.3 Conclusion

En conclusion, nous avons utilisé la  $\mu$ -analyse pour quantifier des intervalles de confiance admissibles pour chaque problème de stabilité robuste (RS) et de performances robustes (RP). De plus, nous avons vu que le système non perturbé (NP) régulé par la commande par placement de pôles ne satisfait pas tout à fait les gabarits initiaux contrairement à la commande  $H_\infty$  et que le gabarit respecté par la commande Skyhook n'est pas mieux que la boucle ouverte.

## 4.8 Prise en compte de l'actionneur réel

Les commandes précédentes ont été synthétisées à partir de modèles linéaires. Il convient maintenant de les tester sur des modèles plus réalistes. On cherche donc, dans

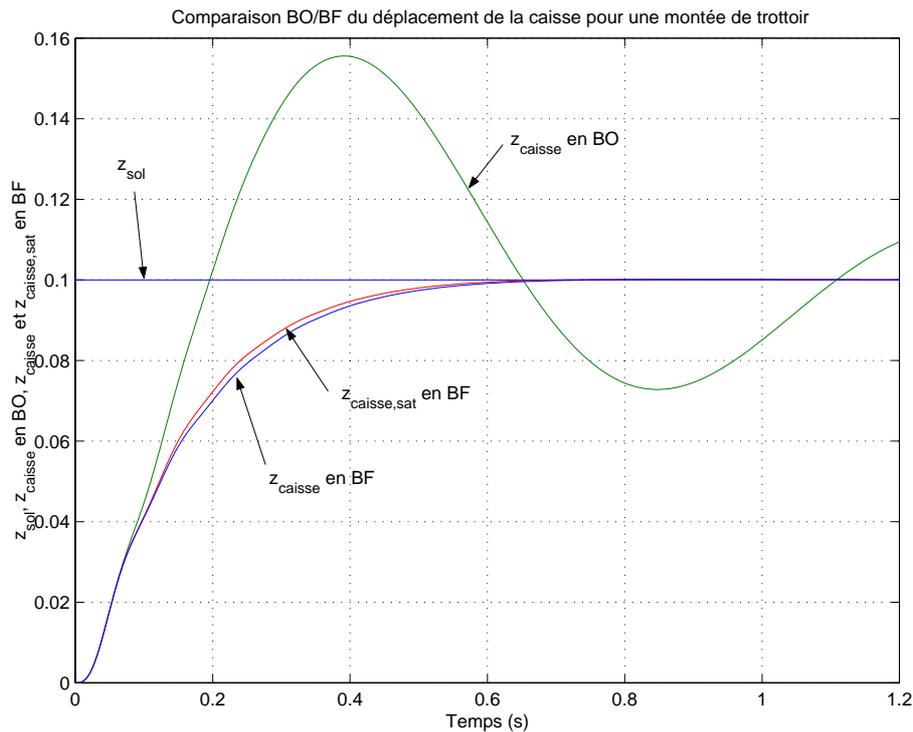


FIG. 4.102: Comparaison BO/BF du déplacement de la caisse lors d'une montée de trottoir

un premier temps, à observer l'influence de l'utilisation d'un modèle non-linéaire de l'actionneur. Au paragraphe 4.8.1 nous simulons l'influence d'une saturation de l'actionneur sur le système régulé par la commande par placement de pôles. Dans le paragraphe 4.8.2 nous reprenons les résultats de l'étude réalisée pour PSA concernant l'utilisation d'un modèle non-linéaire de l'amortisseur semi-actif et la comparaison des commandes  $H_\infty$  et Skyhook, qui sont complétés par l'analyse de la commande par placement de pôles (2ème synthèse).

#### 4.8.1 Saturation de la commande

Dans ce paragraphe nous appliquons, dans le cas de la commande par placement de pôles, une saturation de la commande en force à  $\pm 2000\text{N}$ , ce qui est une approximation assez grossière des limites de l'actionneur.

Nous effectuons deux essais. Le premier correspond à un trottoir modélisé par un échelon de 10cm. Le second représente une route chaotique modélisée par un bruit blanc de fréquence maximale égale à 20Hz.

Pour chaque essai, nous visualisons le déplacement de la caisse, de la roue pour les systèmes en boucle ouverte et en boucle fermée, ainsi que la commande en force  $u$ , la commande filtrée  $u_{filtree}$  par le filtre  $F$  défini lors de la deuxième synthèse du placement de pôles et la commande filtrée et saturée  $u_{filtree,sat}$ .

Les figures 4.102 à 4.104 sont relatives à la montée de trottoir, tandis que les figures 4.105 à 4.107 correspondent à la route chaotique.

Lors de la montée de trottoir, le déplacement de la caisse  $z_{caisse}$  du système en boucle fermée est très bien amorti contrairement au cas de la boucle ouverte qui présente un

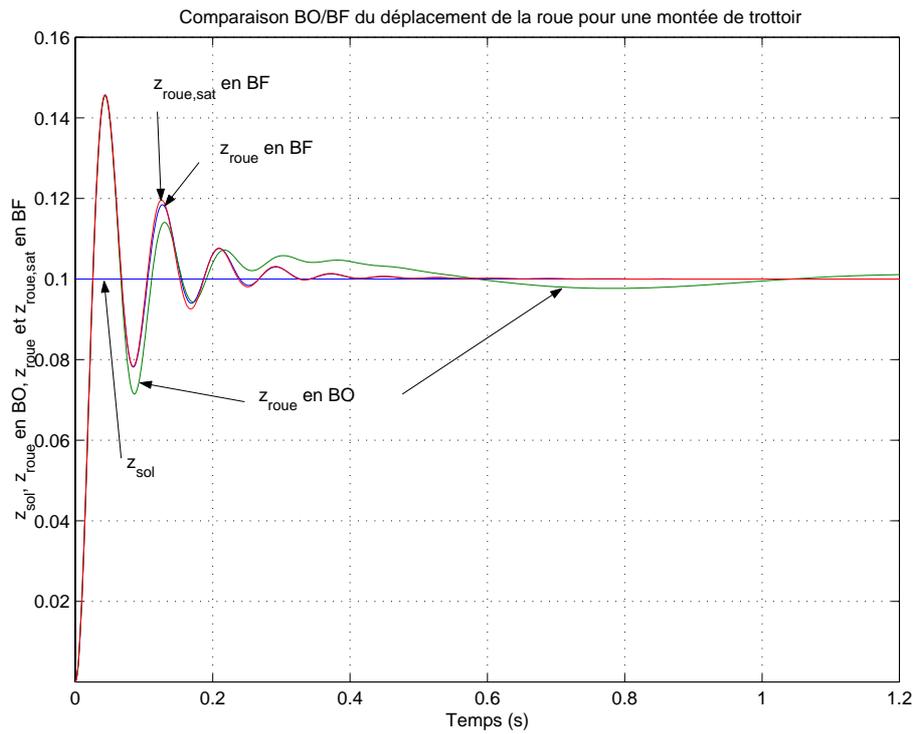
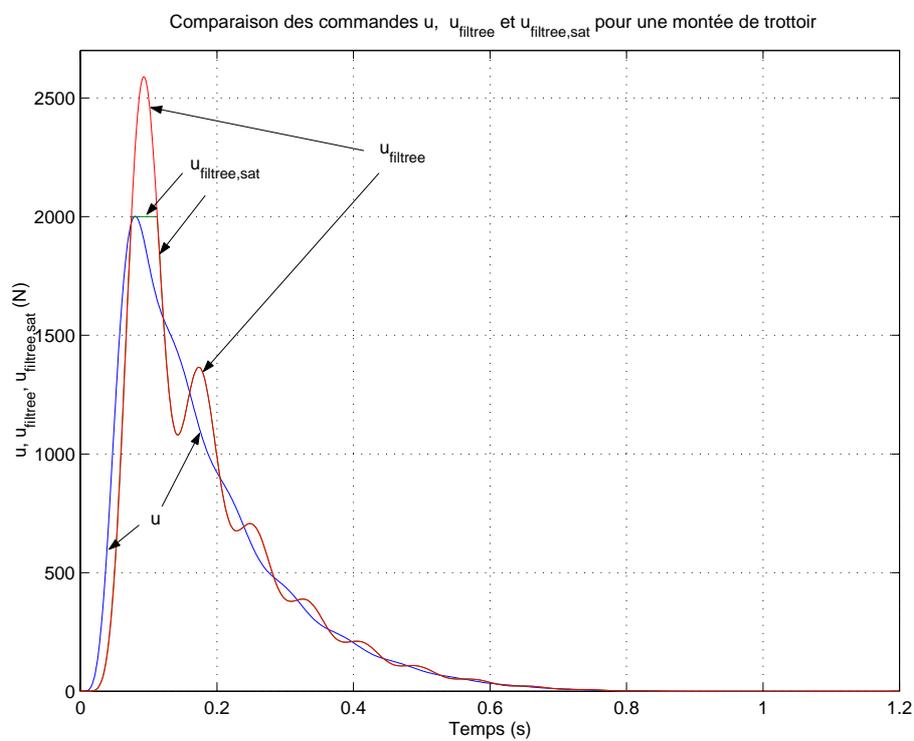


FIG. 4.103: Comparaison BO/BF du déplacement de la roue lors d'une montée de trottoir

FIG. 4.104: Comparaison des commandes  $u$ ,  $u_{filtree}$  et  $u_{filtree,sat}$  lors d'une montée de trottoir

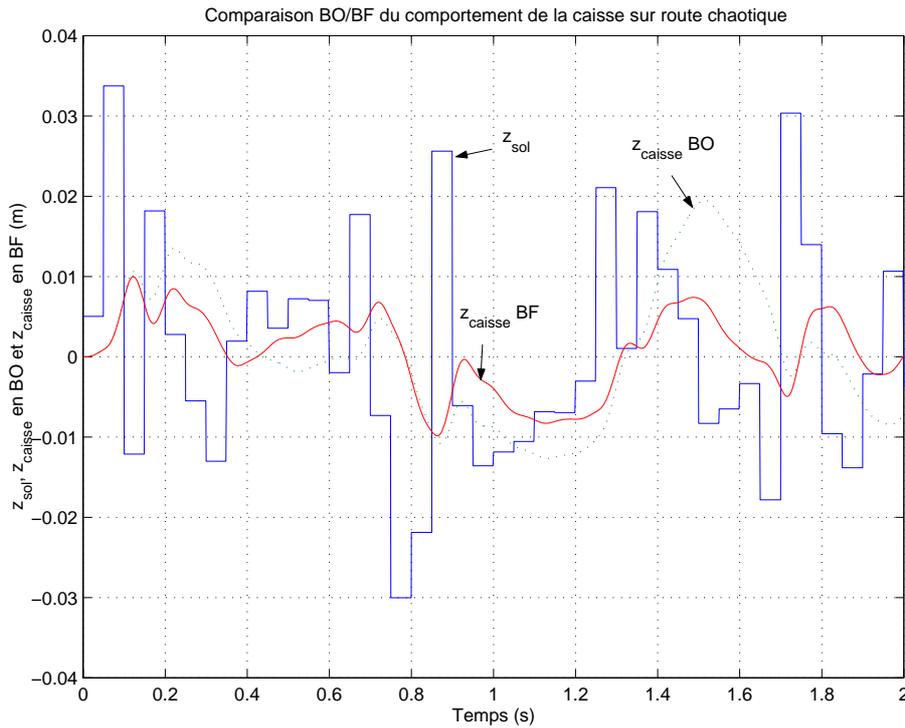


FIG. 4.105: Comparaison BO/BF du déplacement de la caisse sur route chaotique

premier dépassement de 55.6%. En boucle fermée (BF), le déplacement de la roue  $z_{roue}$  n'est pas plus amorti en hautes fréquences et présente donc le même dépassement que la boucle ouverte (BO). Cependant la roue se stabilise plus rapidement en BF. Nous pouvons remarquer que la saturation n'est pas très importante pour cet essai, car la commande  $u_{filtree}$  n'est pas trop sollicitée.

Sur l'essai de route chaotique, l'amplitude maximale du déplacement de la caisse en BF est deux fois plus petite que celle en BO. Le confort est donc amélioré. Le comportement de la roue est quasiment identique en BO et en BF. Il n'y a donc pas de détérioration de la tenue de route. Notons, de plus, que la saturation n'intervient à aucun moment malgré un "déplacement" du profil de la route  $z_{sol}$  entre +5 et -5cm à des fréquences allant jusqu'à 20Hz.

Cet essai ne permet pas de voir effectivement l'effet de cette saturation puisque la commande est relativement peu sollicitée et ne sature pas. Les conditions du profil de la route sont pourtant relativement mauvaises. La saturation à  $\pm 2000\text{N}$  n'est pas un modèle assez réaliste des limites de l'actionneur. Il peut donc être intéressant d'envisager d'utiliser un modèle plus précis de l'actionneur et de ses limites pour tester le système régulé par la commande par placement de pôles.

#### 4.8.2 Non linéarité de l'amortisseur semi-actif

Dans cette partie, on applique les commandes par placement de pôles (deuxième synthèse), Skyhook et  $H_\infty$  sur un modèle non-linéaire de l'amortisseur. Le modèle de l'actionneur utilisé correspond à un amortisseur semi-actif destiné aux Peugeot 607 qui dispose de 9 caractéristiques Force-Vitesse différentes et non-linéaires (cf. figures 4.4 et 4.5).

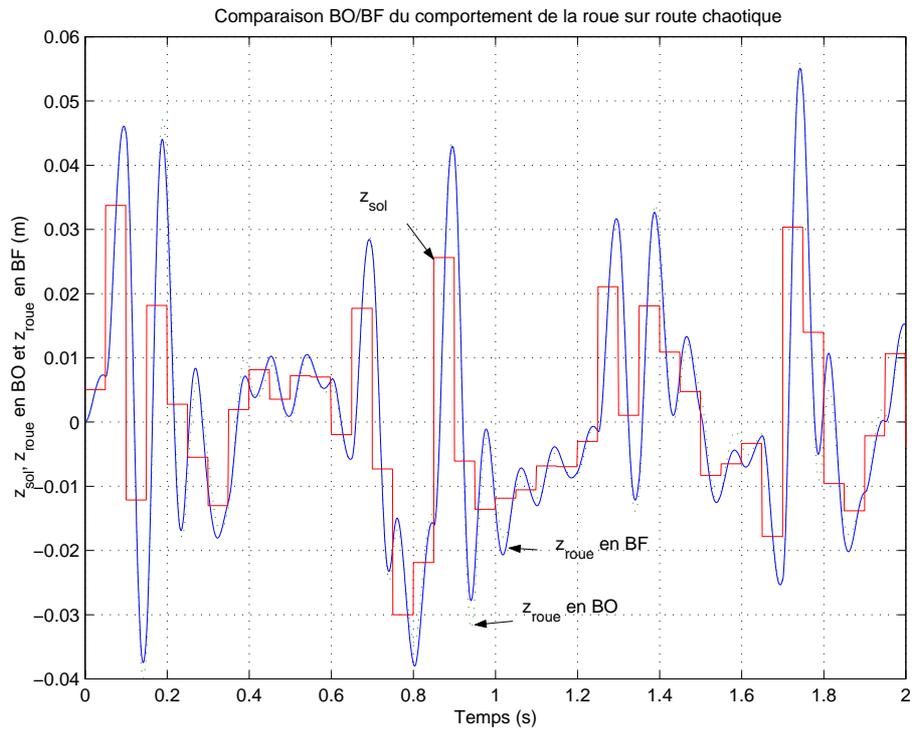
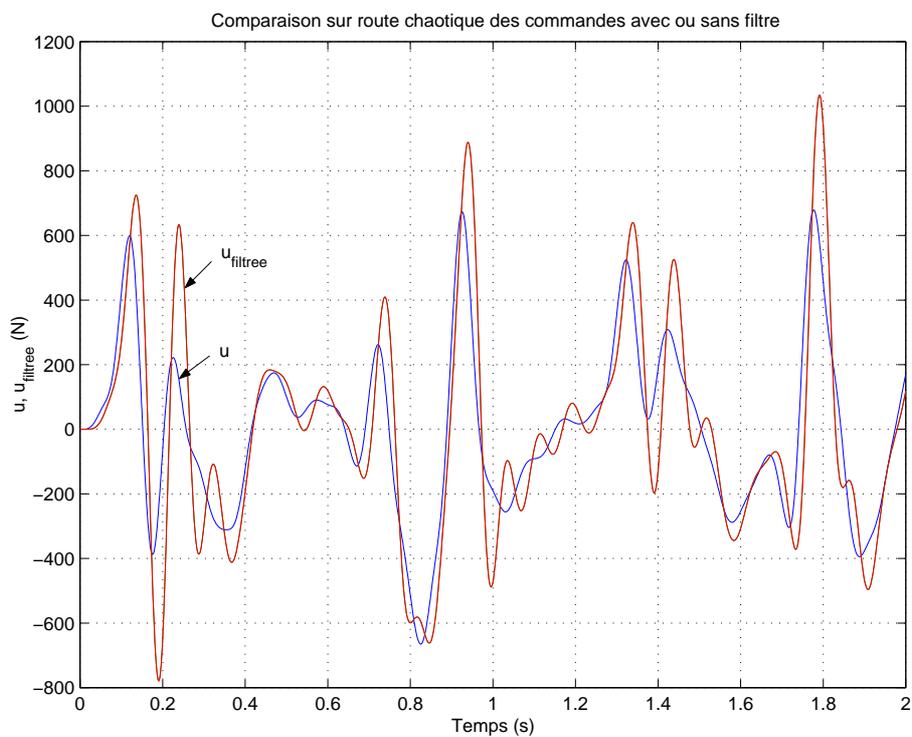


FIG. 4.106: Comparaison BO/BF du déplacement de la roue sur route chaotique

FIG. 4.107: Comparaison des commandes  $u$ ,  $u_{filtree}$  et  $u_{filtree,sat}$  sur route chaotique

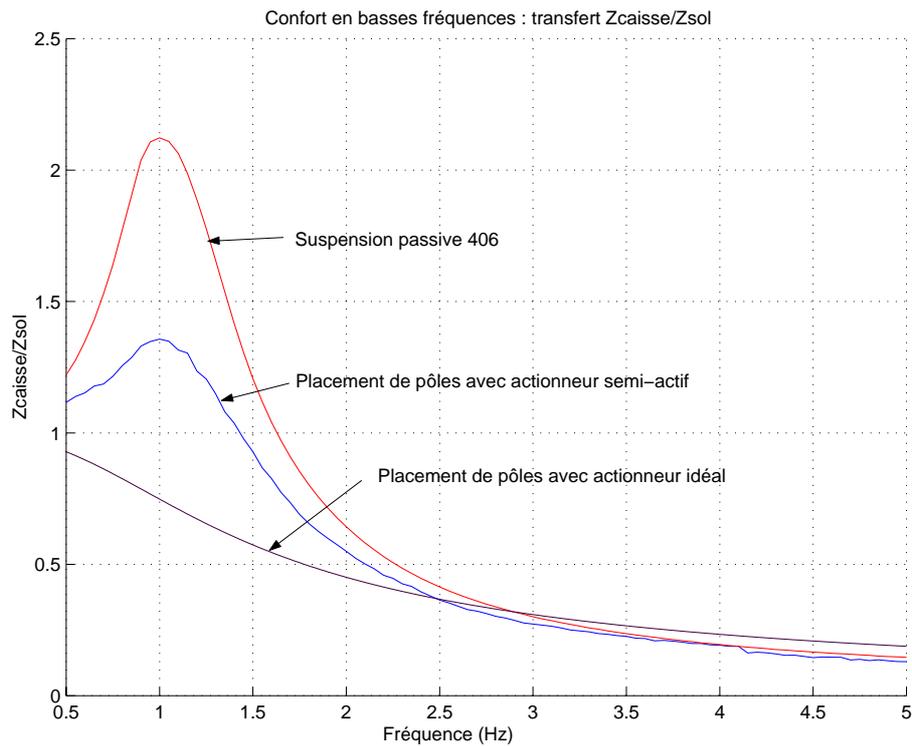


FIG. 4.108: Confort BF pour le placement de pôles "idéal", le placement de pôles "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406

Afin de visualiser l'impact de l'utilisation du modèle non-linéaire de l'amortisseur semi-actif 9 lois sur la loi de commande par placement de pôles, on compare le système sans régulateur avec le modèle d'amortisseur de la 406, le système avec commande par placement de pôles et actionneur idéal et celui avec la commande par placement de pôles et l'amortisseur semi-actif non-linéaire à 9 lois de la 607. Les figures 4.108, 4.109 et 4.110 permettent de comparer respectivement le confort en basses fréquences, le rebond de roue et l'accélération verticale de la caisse pour les trois systèmes précédents.

De la même manière, les figures 4.111, 4.112 et 4.113 d'une part, et 4.114, 4.115 et 4.116 d'autre part, permettent de juger les commandes Skyhook et  $H_\infty$  respectivement.

Pour plus de simplicité, on nommera "placement de pôles idéal" (resp. "Skyhook idéal" et " $H_\infty$  idéal") le système contrôlé par la loi de commande par placement de pôles (resp. Skyhook et  $H_\infty$ ) avec un actionneur idéal, et "placement de pôles semi-actif", "Skyhook semi-actif" et " $H_\infty$  semi-actif" lorsque l'actionneur est limité aux 9 lois non-linéaires.

#### 4.8.2.1 Analyse

Comme l'amortisseur 9 lois ne travaille que dans une plage restreinte (en particulier il ne dispose pas d'action active), comparée à l'actionneur idéal actif, il n'est pas étonnant que le comportement du système avec l'actionneur 9 lois s'éloigne de celui du système avec l'actionneur idéal et se rapproche de celui du système avec actionneur passif (amortisseur 406).

On remarque cependant que les commandes ne sont pas toutes influencées de la même manière. Pour la commande par placement de pôles, le pic de résonance est nettement

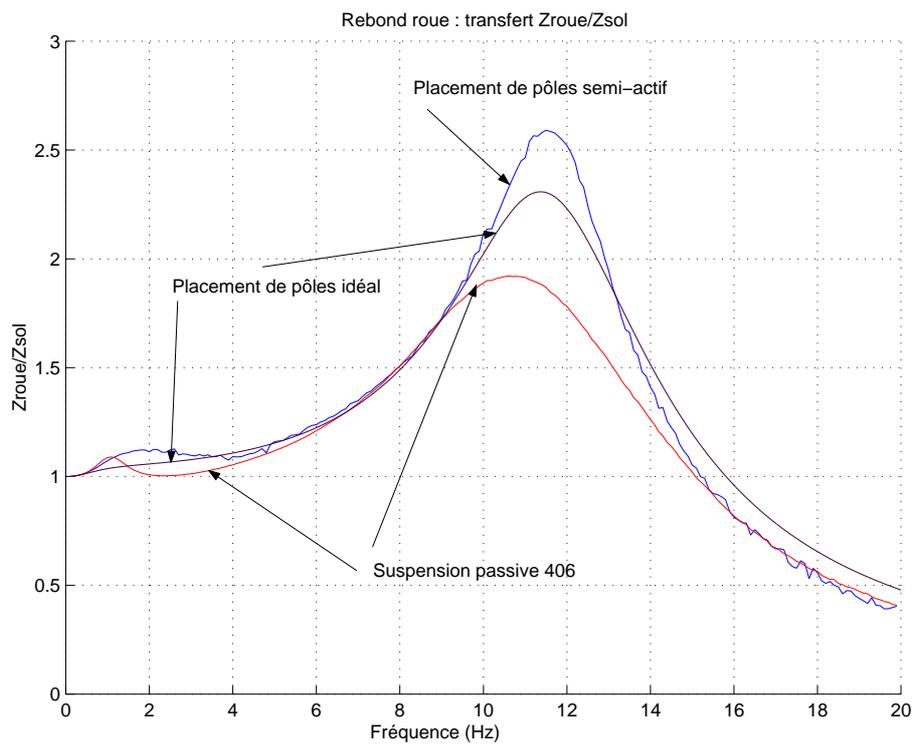


FIG. 4.109: Rebond de roue pour le placement de pôles "idéal", le placement de pôles "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406

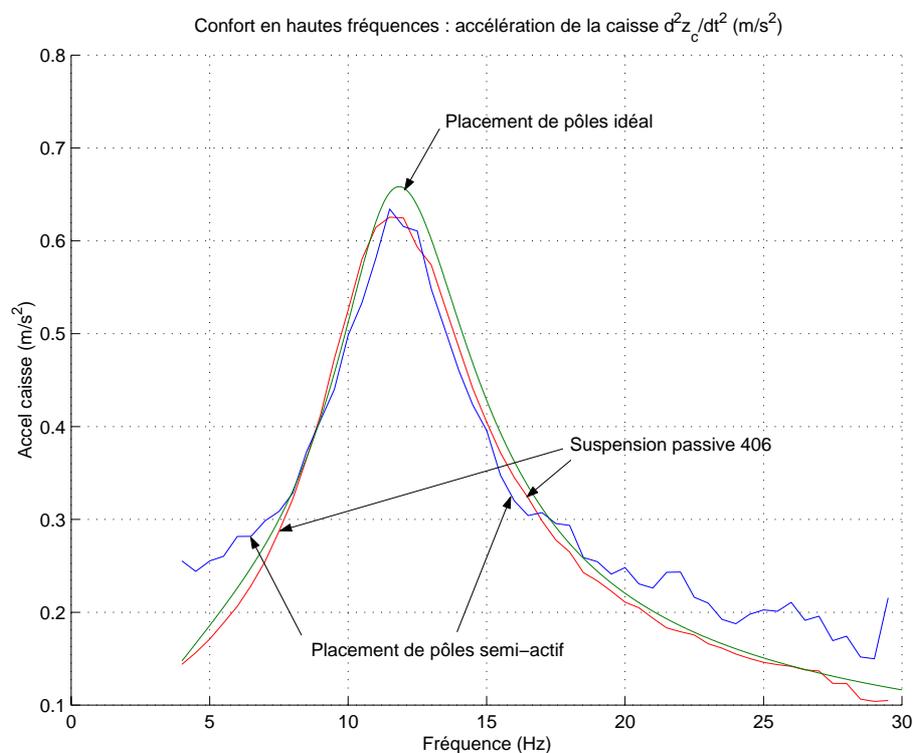


FIG. 4.110: Accélération verticale de la caisse pour le placement de pôles "idéal", le placement de pôles "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406

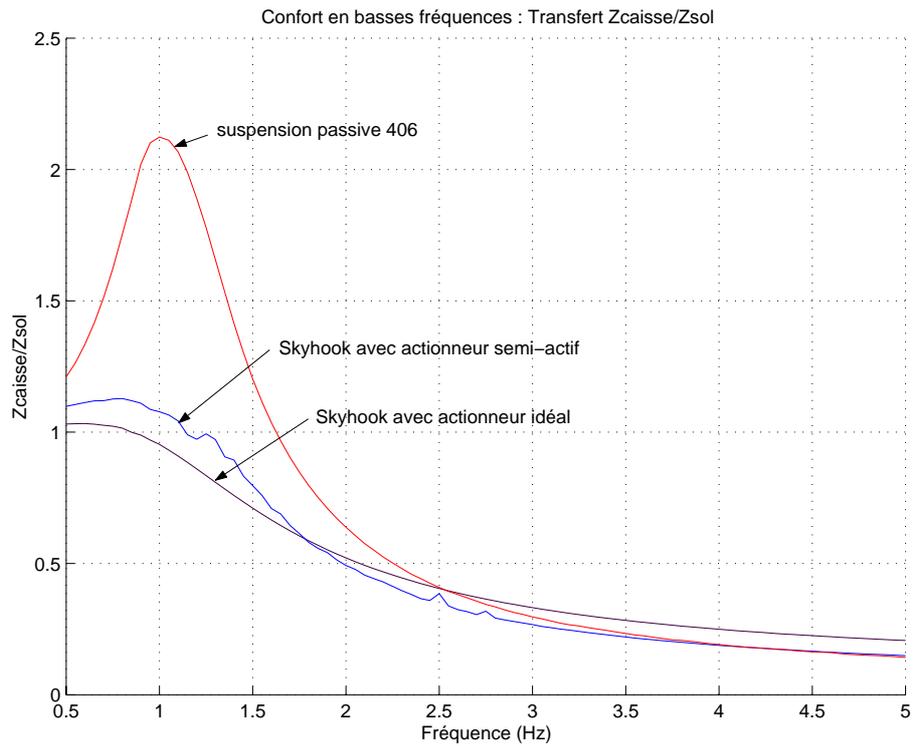


FIG. 4.111: Confort BF pour le Skyhook "idéal", le Skyhook "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406

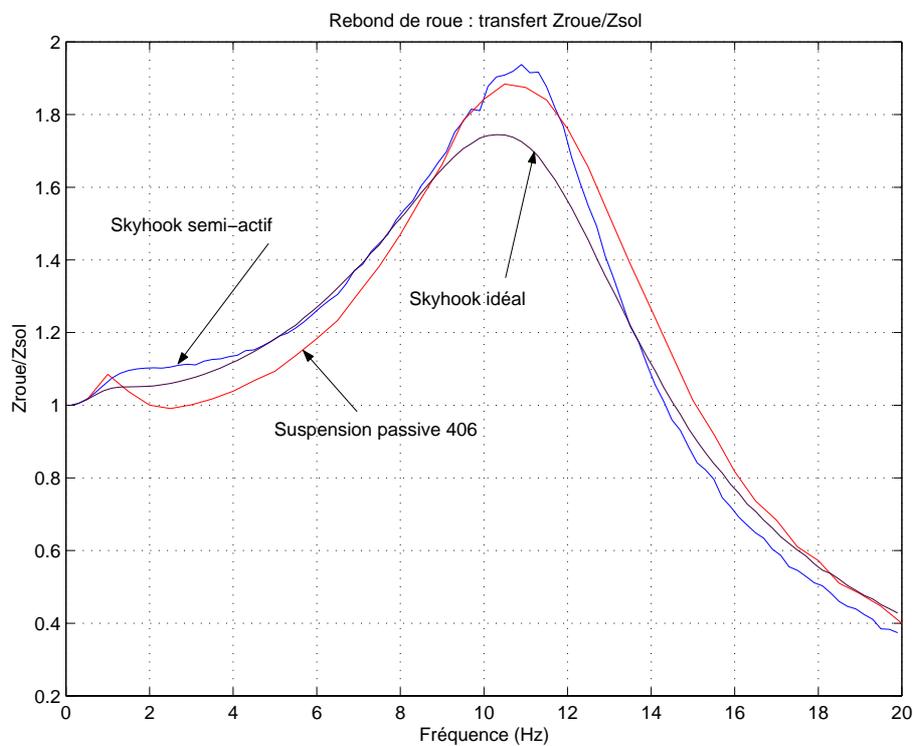


FIG. 4.112: Rebond de roue pour le Skyhook "idéal", le Skyhook "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406

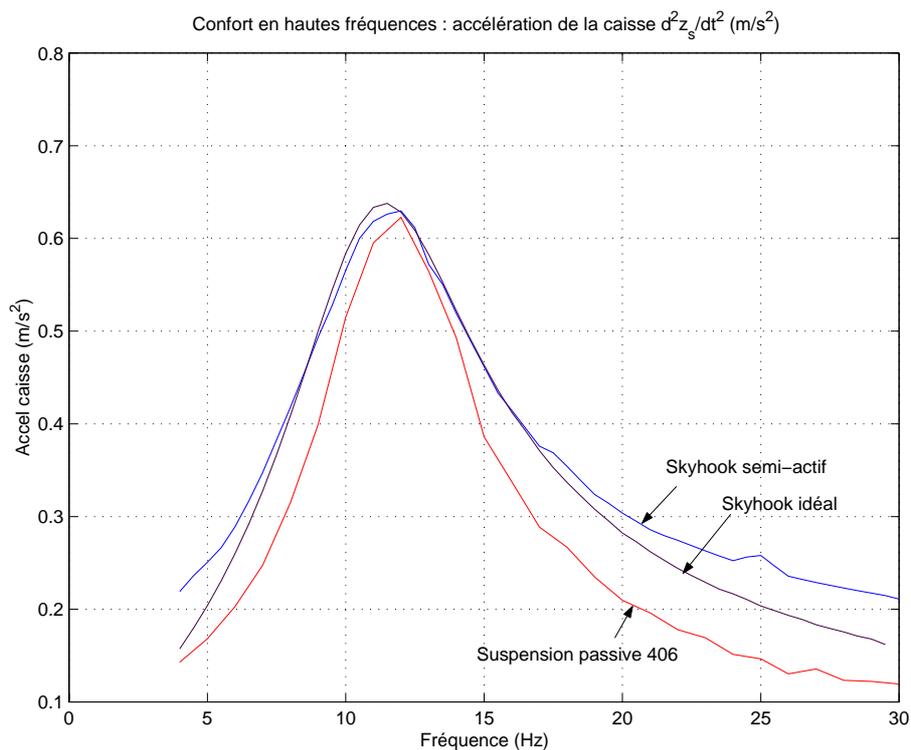


FIG. 4.113: Accélération verticale de la caisse pour le Skyhook "idéal", le Skyhook "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406

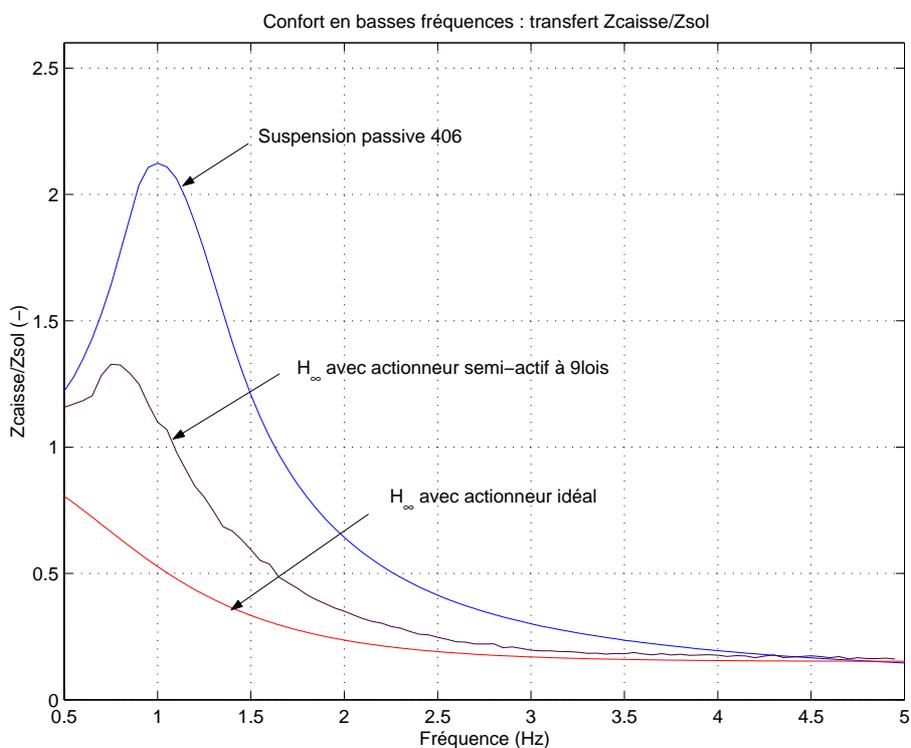


FIG. 4.114: Confort BF pour le  $H_{\infty}$  "idéal", le  $H_{\infty}$  "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406

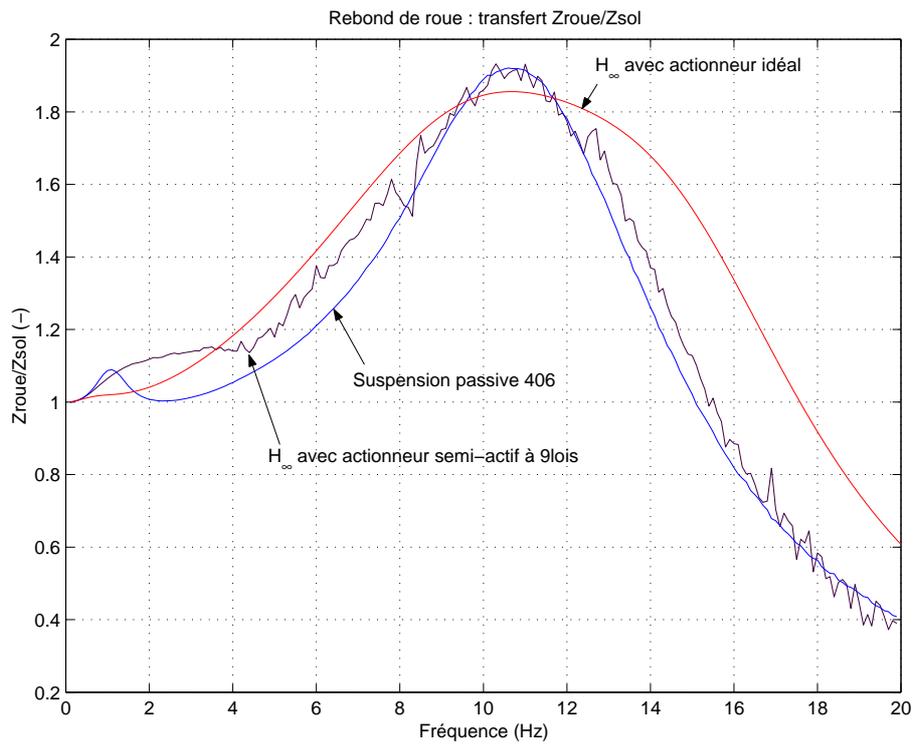


FIG. 4.115: Rebond de roue pour le  $H_{\infty}$  "idéal", le  $H_{\infty}$  "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406

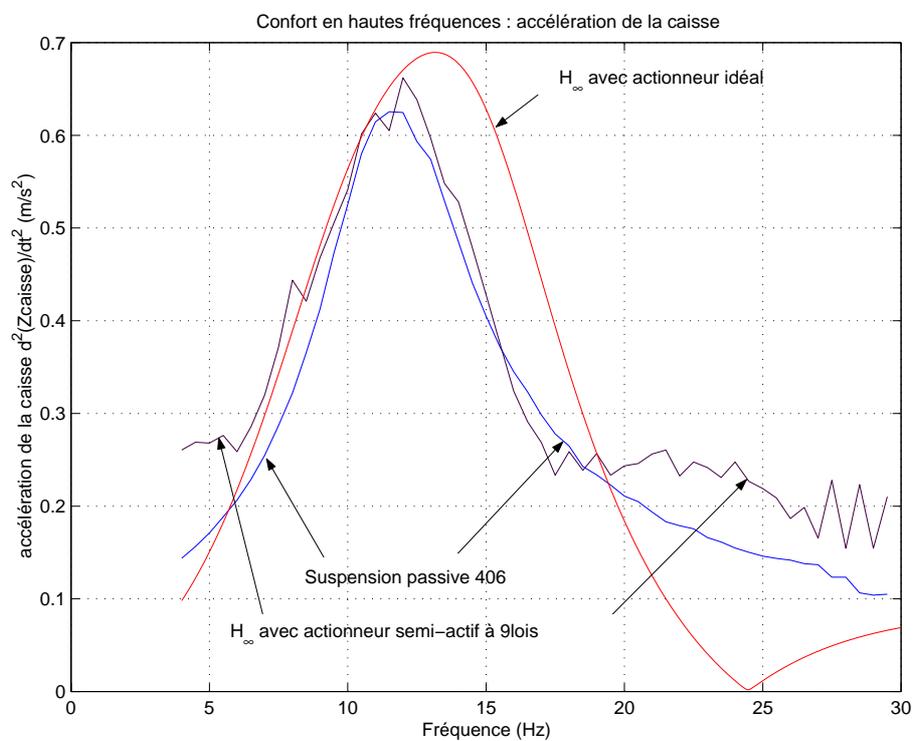


FIG. 4.116: Accélération verticale de la caisse pour le  $H_{\infty}$  "idéal", le  $H_{\infty}$  "semi-actif" et le système passif avec amortisseur de 406

détérioré, passant de 0.93 à 1.36, mais cela est compensé par l'amélioration du filtrage, qui se rapproche du cas passif (amortisseur 406). Pour cette commande le "confort BF" du cas semi-actif (66) est équivalent à celui du cas idéal (68). Le pic de résonance de la commande Skyhook est peu détérioré, passant de 1.03 à 1.13, et le filtrage est là aussi amélioré, car cet actionneur réel filtre mieux les hautes fréquences. Cela conduit, pour la commande Skyhook, à une nette amélioration du "confort BF" qui passe de 84 dans le cas idéal à 60 dans le cas semi-actif. De même que la commande par placement de pôles, la commande  $H_\infty$  subit une nette détérioration de son pic de résonance, qui passe de 0.81 à 1.33. Pour la commande  $H_\infty$ , en se rapprochant du cas passif, le filtrage est légèrement détérioré, contrairement aux autres commandes. Tout cela conduit à une détérioration du "confort BF", passant de 29 dans le cas idéal à 45 dans le cas semi-actif. Remarquons tout de même que le confort reste meilleur dans le cas de la commande  $H_\infty$ .

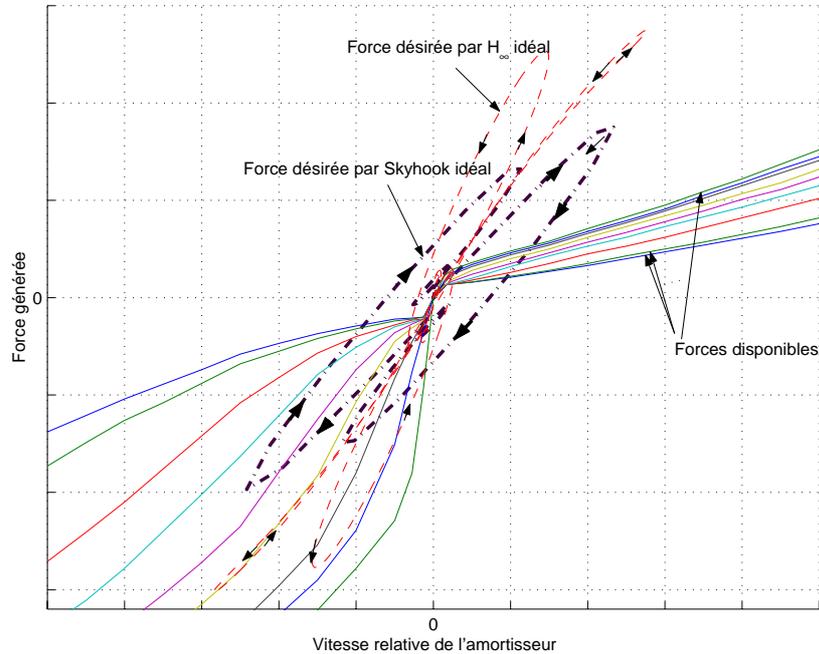
Nous avons vu que les pics de résonance sont plus affectés pour les commandes par placement de pôles et  $H_\infty$  que pour la commande Skyhook. Cela provient du fait que les lois de commande  $H_\infty$  idéale et placement de pôles idéal utilisent une plage plus large sur le graphique Force-Vitesse que celle qu'utilise la commande Skyhook idéale. A titre d'exemple, la figure 4.117 permet de comparer les forces demandées par les régulateurs Skyhook et  $H_\infty$  utilisant un actionneur actif idéal, lors du passage du véhicule sur la bosse (10mm x 2m) simulée sur les essais temporels. Nous voyons que les régulateurs ne réagissent pas de la même manière. En effet, le régulateur  $H_\infty$  demande une force passive très importante qui ne peut être fournie en compression alors que le régulateur Skyhook se contente d'une force moindre et parfois active. Nous pouvons aussi comparer sur cette figure les forces demandées avec les forces disponibles lors de l'utilisation de l'amortisseur semi-actif à 9 lois de la 607. La restriction à un actionneur semi-actif, dont la caractéristique Force-Vitesse est limitée par des valeurs maximale et minimale, dégrade donc plus les commandes par placement de pôles et  $H_\infty$  que la commande Skyhook. Toutefois, la commande  $H_\infty$  conserve, en particulier, un "Confort-BF" meilleur que ceux des commandes Skyhook et par placement de pôles (cf. table 4.12).

Concernant le rebond de roue, la commande par placement de pôles est plus dégradée que la commande Skyhook qui l'est elle même plus que la commande  $H_\infty$  (Ces deux dernières commandes ont dans le cas semi-actif le même gain max.  $Z_{roue}/Z_{sol}$ ).

Enfin, les trépidations des commandes  $H_\infty$  semi-actif et par placement de pôles semi-actif ont été améliorées par rapport aux cas idéaux, ce qui n'est pas le cas de la commande Skyhook.

On retrouve donc bien les compromis mis en évidence dans l'étude du cas passif.

Le tableau 4.12 donne les valeurs du "Confort-BF" et de la trépidation, le gain maximal et la fréquence associée des différents transferts ( $Z_{caisse}/Z_{sol}$  et  $Z_{roue}/Z_{sol}$ ) et l'accélération maximale ainsi que la fréquence associée, pour les systèmes Placement de pôles semi-actif, Skyhook semi-actif,  $H_\infty$  semi-actif et pour le modèle sans loi de commande de l'amortisseur passif et non-linéaire de la 406.

Comparaison des forces désirées par les régulateurs  $H_\infty$  et Skyhook avec celles disponibles par l'amortisseur de la 607FIG. 4.117: Comparaison des forces demandées par les régulateurs Skyhook et  $H_\infty$  et des forces disponibles générées par l'actionneur semi-actif à 9lois de la 607

	Amortisseur 406	Placement pôles semi-actif	Skyhook semi-actif	$H_\infty$ semi-actif
"Confort-BF"	93	66	60	45
Gain max. de $Z_{caisse}/Z_{sol}$	2.12	1.36	1.13	1.33
Fréquence associée (Hz)	1	1	0.8	0.8
Gain max. de $Z_{roue}/Z_{sol}$	1.88	2.59	1.94	1.91
Fréquence associée (Hz)	10.5	11.5	10.9	10.7
Trépidation	1.64	1.72	1.96	1.84
Accélération max. ( $m/s^2$ )	0.62	0.63	0.63	0.66
Fréquence associée (Hz)	12	11.5	12	12

TAB. 4.12: Comparaison des critères PSA pour les systèmes Placement de pôles semi-actif, Skyhook semi-actif,  $H_\infty$  semi-actif et 406 passif

### 4.8.2.2 Conclusion

Dans ce paragraphe, nous avons simulé l'influence de l'utilisation d'un modèle semi-actif de l'amortisseur de la 607 à 9lois.

Il apparaît, principalement sur les figures 4.108, 4.111 et 4.114, que la commande Skyhook est moins influencée que ne le sont les commandes par placement de pôles et  $H_\infty$ . Les zones de la caractéristique Force-Vitesse de l'actionneur idéal, utilisées par les commandes par placement de pôles et  $H_\infty$  sont bien plus grandes que celle à laquelle on est limité lors de l'utilisation de l'amortisseur semi-actif à 9 lois de la 607. La commande Skyhook utilise une zone plus petite de cette caractéristique de l'actionneur idéal, elle est donc moins affectée par l'utilisation de l'amortisseur semi-actif à 9 lois de la 607.

Le confort BF des commandes par placement de pôles et  $H_\infty$  est plus dégradé que celui de la commande Skyhook (par rapport aux cas idéaux), mais le "Confort-BF" reste meilleur pour la commande  $H_\infty$ .

Le rebond de roue est quant à lui plus détérioré dans le cas du placement de pôles et du Skyhook, et la trépidation est maintenant meilleure pour le placement de pôles que pour la commande  $H_\infty$ , qui est elle même meilleure que pour la commande Skyhook.

En conclusion, on voit bien que l'utilisation de l'actionneur réel a tendance à "niveler" les différentes commande étudiées.

## 4.9 Conclusions sur le modèle quart de véhicule

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés au modèle quart de véhicule à 2ddl. Nous avons présenté trois commandes différentes. La commande par placement de pôles et la commande  $H_\infty$  sont générales contrairement à la commande Skyhook qui est spécifique aux suspensions. Ces commandes sont synthétisées à partir d'un modèle linéaire du quart de suspension à 2dll. Puis elles sont appliquées sur un modèle prenant en compte les non-linéarités de l'actionneur. Dans le cas de la commande par placement de pôles, une saturation de la force fournie par l'actionneur est tout d'abord prise en compte. Puis, un modèle non-linéaire des caractéristiques Force/Vitesse de l'amortisseur semi-actif à 9lois de la Peugeot 607 est utilisé pour l'application des commandes par placement de pôles, Skyhook et  $H_\infty$ .

Afin de caractériser les performances de ces suspensions, nous faisons principalement appel aux critères fournis par PSA. Mais nous utilisons aussi les fonctions de sensibilité notamment pour la commande par placement de pôles. Pour compléter cette étude, nous avons caractérisé les performances nominales, la robustesse en stabilité et la robustesse en performances de ces systèmes, à l'aide de la  $\mu$ -analyse.

La commande par placement de pôles peut sembler facile à mettre en œuvre, mais le choix des pôles n'est pas facile à relier aux critères à respecter. De même, la commande Skyhook se révèle très facile à mettre en œuvre contrairement à la commande  $H_\infty$ . Cependant, la commande  $H_\infty$  permet, dans le domaine fréquentiel, de spécifier plus facilement les performances et la robustesse. De plus, la commande  $H_\infty$  ne fait appel qu'à la mesure seule du débattement de la suspension. Cette mesure est la plus facile à obtenir et la moins coûteuse. Au contraire, la commande Skyhook nécessite l'obtention de la vitesse absolue de la caisse (ou de la roue) en plus de la vitesse relative entre la caisse et la roue.

La vitesse absolue de la caisse est calculée par intégration de la mesure de l'accélération de la caisse tandis que la vitesse relative entre la caisse et la roue est dérivée de la mesure du débattement de la roue. Ainsi la commande Skyhook nécessite deux capteurs. La commande par placement de pôles fait, quant à elle, appel à la position absolue de la caisse qui découle de la double intégration de la mesure de l'accélération de la caisse. Cette mesure est plus coûteuse que celle utilisée par la commande  $H_\infty$ .

Dans le cadre d'une étude réalisée pour PSA, nous avons travaillé sur la suspension semi-active d'un modèle quart de véhicule à 2ddl et sur la comparaison des commandes  $H_\infty$  et Skyhook. Nous nous sommes aussi intéressés à l'ajout d'une dynamique dans le comportement de l'actionneur afin de modéliser le temps de passage d'une loi à une autre pour l'amortisseur de type 607. Nous avons aussi testé deux utilisations différentes de ce type d'actionneur : lois croisées, lois non croisées. Le but étant d'obtenir le moins de changements de lois possibles car des changements de lois fréquents risquent d'affecter la durée de vie de l'actionneur. Cependant, dans ce chapitre nous ne présentons que les résultats concernant l'utilisation de modèles non-linéaires et pas ceux de l'insertion d'une dynamique ni ceux de la comparaison lois croisées/lois non-croisées.

L'étude peut être poursuivie en améliorant la synthèse  $H_\infty$  vis-à-vis de l'accélération de la caisse qui est utilisée dans la littérature pour représenter le confort des passagers.

Il est aussi envisageable d'appliquer la commande  $H_\infty$  sur un système équipé d'une suspension active dont la bande passante est limitée. En effet, les suspensions actives actuelles disposent de bandes passantes limitées mais la limite n'est pas trop pénalisante. De plus, en ne sollicitant pas continuellement la partie active de ces suspensions, la consommation énergétique reste acceptable. Il reste ainsi un travail à faire sur la modélisation des actionneurs.

Ce chapitre représente la majeure partie de notre contribution. Le chapitre suivant porte sur la commande  $H_\infty$  appliquée à un modèle demi-véhicule de type essieu ainsi que sur l'utilisation d'une commande du modèle complet de véhicule à 7ddl permettant simultanément le découplage des mouvements de la caisse et le rejet des perturbations dues au profil de la route sous chacune des roues.



# Chapitre 5

## Commande de modèles 1/2 véhicule-essieu et 3D

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons l'application de loi de commande sur des modèles plus complets que le quart de véhicule. La première partie est consacrée au modèle demi-véhicule de type essieu. Ce modèle à commander étant linéaire (chapitre 1), il nous sert pour la synthèse de la commande  $H_\infty$  que nous appliquons dans cette étude. L'utilisation d'hypothèses de symétrie droite/gauche du véhicule, ainsi qu'un changement de base du vecteur d'entrée et de celui de sortie, nous permet d'obtenir deux sous-systèmes indépendants : le modèle vertical et le modèle roulis-latéral. Le premier concerne uniquement l'aspect vertical et permet d'exprimer le mouvement vertical du centre de gravité de la caisse, et de celui de l'essieu. Le deuxième définit le roulis de la caisse, celui de l'essieu et le déplacement latéral du véhicule. Une synthèse de loi de commande  $H_\infty$  est effectuée pour chaque sous-système. Les deux régulateurs obtenus, peuvent alors être mis en parallèle pour définir le régulateur global permettant la commande du système initial du demi-véhicule de type essieu. Des essais fréquentiels et temporels sont effectués permettant de visualiser les apports de la boucle fermée comparativement à la boucle ouverte.

Les publications suivantes sont issues de ce travail. Nous décrivons dans (Sammier et al., 1999), présenté en octobre 1999 aux "Journées Automatique et Automobile" à Bordeaux, et dans (Sammier et al., 2000a), présenté en septembre 2000 à la conférence "IEEE Conference on Control Application" à Anchorage (Alaska), la commande  $H_\infty$  d'une suspension active d'un modèle demi-véhicule de type essieu. Dans (Lueders et al., 1999), présenté en novembre 1999 au 14ème congrès annuel de l'IAR à Strasbourg, nous donnons les résultats de l'incorporation d'un modèle horizontal des pneus dans un modèle demi-véhicule de type essieu, dans le but de prendre en compte le couplage entre les mouvements vertical et latéral dû à l'adhérence des pneus.

La deuxième partie concerne un modèle complet de véhicule à 7ddl. Ce modèle, présenté au paragraphe 1.5.2 du chapitre 1, définit le mouvement vertical du centre de gravité de la caisse, le roulis et le tangage de la caisse, et le mouvement vertical de chacune des quatre roues. Notre objectif est ici double. D'une part, nous cherchons à découpler les trois mouvements de la caisse qui sont le comportement vertical, le roulis et le tangage. D'autre part, nous voulons rejeter les perturbations venant du profil de la route sous

chacune des quatre roues et affectant les trois mouvements de la caisse. Le paragraphe 3.4 du chapitre 3 présente le problème de commande permettant simultanément le découplage ligne par ligne et le rejet des perturbations. Ainsi, dans notre cas nous testons tout d'abord les conditions nécessaires et suffisantes au problème du découplage ligne par ligne. Puis nous faisons appel à une approche matricielle qui provient de (Falb & Wolovich, 1967), permet de calculer explicitement une loi de commande solution du problème de découplage ligne par ligne. Comme actuellement aucune méthode n'est disponible pour calculer explicitement la loi de commande solution du problème du rejet de perturbation, nous paramétrons le degré de liberté restant afin de trouver, dans la famille des lois de commande solutions du problème du découplage ligne par ligne, une loi qui permet de rejeter les perturbations.

Ce travail est résumé dans la publication suivante (Sammier et al., 2000b), présentée en septembre 2000 à la première "IFAC Conference on Mechatronic Systems" à Darmstadt (Allemagne).

## 5.2 Commande $H_\infty$ du modèle demi-véhicule de type essieu

Ce paragraphe est consacré à la synthèse de la commande  $H_\infty$  sur un modèle linéaire de demi-véhicule de type essieu, basé sur un modèle développé pour les camions à l'université de Cambridge par Dorling (1996). Pour une présentation du modèle demi-véhicule de type essieu, le lecteur est renvoyé au paragraphe 1.4.4 du chapitre 1.

Le découplage d'une part des mouvements verticaux et d'autre part des mouvements latéraux et de roulis du modèle demi-véhicule de type essieu amène à deux sous-systèmes indépendants. Notre but est ici de synthétiser un régulateur  $H_\infty$  pour chaque sous-système. Ces deux régulateurs sont ensuite assemblés pour obtenir un régulateur global du modèle demi-véhicule de type essieu.

Au paragraphe 5.2.1, nous redéfinissons tout d'abord le problème de sensibilité mixte. En effet, dans notre cas et contrairement au cas général présenté au paragraphe 3.5.4, certaines sorties à contrôler ne sont pas mesurables. Puis nous appliquons cette configuration du problème de sensibilité mixte à chacun des deux sous-systèmes (vertical, roulis-latéral). Les résultats de ces essais fréquentiels et temporels sur ces deux sous-systèmes, sont présentés au paragraphe 5.2.2.

### 5.2.1 H-infini

Dans notre application nous considérons que les sorties à commander ne sont pas toutes mesurables. Ainsi la structure de la configuration du contrôle standard, représenté sur la figure 5.1 est légèrement différente de celle présentée au paragraphe 3.5.4.

Décomposons le système  $G$  afin de différencier les sorties mesurées de celles qui ne le sont pas :

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_p \\ u_p \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

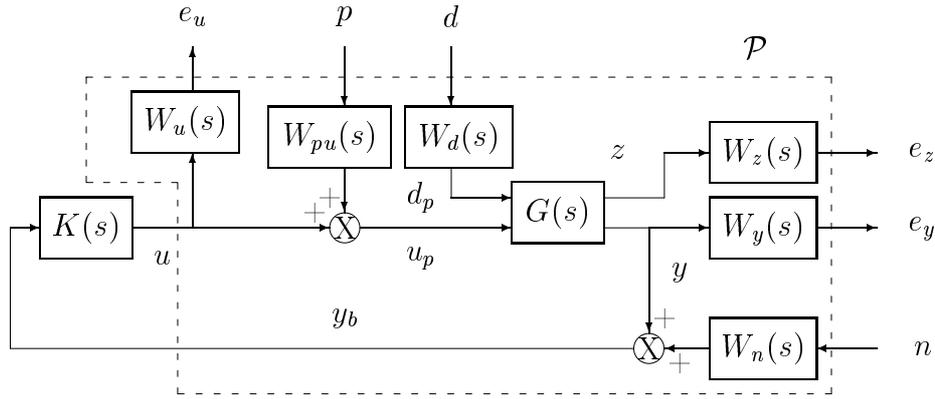


FIG. 5.1: Configuration du problème de sensibilité mixte pour les systèmes dont certaines sorties à commander ne sont pas mesurables

où  $z$  est le vecteur des sorties non-mesurées et  $y$  celui des sorties mesurées. Afin de mettre notre problème sous la forme de la configuration présentée ci-dessus, les entrées exogènes  $w$  et les sorties à commander  $e$  sont définies par :

$$e = [e_z, e_y, e_u]^T \quad w = [d, p, n]^T$$

Le problème  $H_\infty$  optimal est de trouver un régulateur  $K(s)$  qui assure la stabilité de la boucle fermée et :

$$\|T_{ew}\|_\infty = \left\| \begin{array}{ccc} W_z(G_{11} - G_{12}S_u K G_{21})W_d & W_z G_{12}S_u W_{pu} & -W_z G_{12}S_u K W_n \\ W_y S_y G_{21} W_d & W_y S_y G_{22} W_{pu} & -W_y T_y W_n \\ -W_u K S_y G_{21} W_d & -W_u T_u W_{pu} & -W_u K S_y W_n \end{array} \right\|_\infty < \gamma \quad (5.2)$$

où  $W_z, W_d, W_u, W_y, W_n, W_{pu}$  sont des fonctions de pondération permettant de limiter les fonctions de sensibilité.

Dans la suite, nous appliquons cette configuration du problème de sensibilité mixte à chacun des deux sous-systèmes c'est à dire celui concernant les mouvements verticaux et celui concernant le roulis et le mouvement latéral.

Les notations  $v$  et  $r$  sont rajoutées aux noms des variables et des matrices, afin de faire la différence entre le sous-système vertical d'une part et le sous-système roulis-latéral d'autre part.

• Le sous-système décrivant le mouvement vertical, est le suivant (voir (1.18) et (1.19)) :

$$\begin{cases} \dot{x}_v = A_v x_v + E_v w_v + B_v u_v \\ e_v = C_{1v} x_v + D_{11v} w_v + D_{12v} u_v \\ y_v = C_{2v} x_v + D_{21v} w_v + D_{22v} u_v \end{cases}$$

où  $x_v = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ ,  $w_v = [f_z, \dot{r}_z]^T$ ,  $u_v = [f_{az}]$ ,  $e_v = [e_{zv}, e_{yv}, e_{uv}]^T$  représentent les écarts à minimiser du problème standard du sous-système vertical, qui doivent être aussi petits que possible.  $e_{zv} = W_{zv}[\ddot{z}_{caisse}, z_u - r_z]$  correspond aux sorties pondérées non-mesurées.  $e_{yv} = W_{yv}(z_s - z_u)$  correspond aux sorties pondérées mesurées. La mesure

$y_v = [z_s - z_u]$ , utilisée par le régulateur, est la composante verticale du débattement de la suspension.  $e_{uv} = W_{uv}f_{az}$  correspond à l'entrée de commande pondérée.

Les fonctions de pondération sont détaillées dans (5.3). Le but est ici de limiter l'accélération verticale de la caisse  $\ddot{z}_{caisse}$  dans la bande de fréquences où le corps humain y est le plus sensible. L'écrasement du pneumatique  $z_{roue} - z_{sol}$ , qui est proportionnel à la force normale appliquée sur la route, doit aussi être contrôlé afin d'obtenir une bonne tenue de route. Cela doit se faire sans abuser de la commande ou du débattement de la suspension. Ainsi  $f_{az}$  la composante verticale de la commande et  $z_{caisse} - z_{roue}$  la composante verticale du débattement de la suspension doivent être limitées afin de tenir compte des contraintes technologiques et d'obtenir une consommation d'énergie raisonnable. Ainsi nous choisissons le vecteur des sorties à contrôler suivant :

$$e_v = [\ddot{z}_{caisse}, z_u - r_z, z_s - z_u, f_{az}]^T$$

Afin de faire la différence entre le sous-système vertical et le sous-système roulis-latéral, les fonctions de pondérations sont renommées en fonction de la variable qu'elles pondèrent :

$$\begin{aligned} W_d &= \begin{bmatrix} W_{fz} & 0 \\ 0 & W_{r_z} \end{bmatrix}; W_z = \begin{bmatrix} W_{\ddot{z}_{caisse}} & 0 \\ 0 & W_{z_u - r_z} \end{bmatrix} \\ W_y &= W_{z_s - z_u}; W_u = W_{f_{az}}; \end{aligned} \quad (5.3)$$

Puisque le corps humain est plus sensible aux vibrations dans la bande de fréquence entre 3 et 8Hz, nous utilisons un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure de 10Hz pour les pondération suivantes  $W_{\ddot{z}_{caisse}}, W_{r_z}, W_y, W_{f_z}$ . Les pondérations  $W_{f_{az}}, W_{pu}, W_n$  sont des filtres passe-haut afin de limiter l'entrée de commande en hautes fréquences.

• Le sous-système roulis-latéral, est défini par la représentation d'état suivante (voir (1.18) et (1.19)) :

$$\begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r + E_r w_r + B_r u_r \\ z_r = C_{1r} x_r + D_{11r} w_r + D_{12r} u_r \\ y_r = C_{2r} x_r + D_{21r} w_r + D_{22r} u_r \end{cases}$$

$x_r = [x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}]^T$ ,  $w_r = [f_y, \dot{\theta}, F_{yp}]^T$ ,  $u_r = [f_{a\theta}]$ ,  $e_r = [e_{zr}, e_{yr}, e_{ur}]^T$  définit les écarts à minimiser du problème standard de commande du sous-système roulis-latéral.  $e_{zr} = W_{zr}[\theta_s, \theta_u - r_\theta]$  correspond aux sorties pondérées non-mesurées.  $e_{yr} = W_{yr}y_r$  correspond aux sorties pondérées mesurées. Le régulateur dispose de la mesure  $y_r = [\theta_s - \theta_u]$  du débattement angulaire de la suspension entre la caisse et l'essieu.  $e_{ur} = W_{ur}f_{a\theta}$  correspond à l'entrée de commande pondérée.

Les pondération sont détaillées en 5.4.

Comme dans le cas vertical, les trois sorties à contrôler représentent le confort, la tenue de route, le débattement de la suspension et la consommation d'énergie pour la commande. Le corps humain est sensible à l'accélération angulaire  $\theta_s$ , qui est donc choisi comme indicateur de confort. La composante angulaire de l'écrasement des pneus  $\theta_u - r_\theta$  permet de prendre en compte la tenue de route. La composante angulaire du débattement de la suspension entre la caisse et l'essieu  $\theta_s - \theta_u$  est restreinte afin de rester dans les limites fixées par les butées de suspension. La composante angulaire de la force délivrée

par la suspension active  $f_{a\theta}$  est présente dans le vecteur des sorties à contrôler afin de limiter la consommation de la suspension active. Le vecteur des sorties à contrôler est donc le suivant :

$$z_r = [\ddot{\theta}_s, \theta_u - r_\theta, \theta_s - \theta_u, f_{a\theta}]^T$$

Chaque pondération fréquentielle est renommée relativement au nom de la variable qu'elle pondère :

$$\begin{aligned} W_d &= \begin{bmatrix} W_{f_\theta} & 0 & 0 \\ 0 & W_{r_\theta} & 0 \\ 0 & 0 & W_{F_{yp}} \end{bmatrix}; W_z = \begin{bmatrix} W_{\theta_s} & 0 \\ 0 & W_{\theta_u - r_\theta} \end{bmatrix} \\ W_y &= W_{\theta_s - \theta_u}; W_u = W_{f_{a\theta}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Nous considérons que la perturbation aérodynamique  $f_y$  et celle due au profil de la route  $r_\theta$  ont les mêmes bandes passantes que les perturbations  $f_z, r_z$  du sous-système vertical. Ainsi les pondérations associées sont les mêmes :  $W_{f_y} = W_{f_z}, W_{r_\theta} = W_{r_z}$ .

La perturbation  $F_{yp}$  correspondant à la force latérale dans les fréquences inférieures à 5Hz. En effet, cette entrée de perturbation dépend de l'angle du volant et même les meilleurs pilotes ne peuvent pas exciter l'angle volant à des fréquences supérieures à 5Hz.

Les considérations sur les bandes de fréquences associées aux différents objectifs sont les mêmes que pour le cas du sous-système vertical. Ainsi les pondérations fréquentielles concernant le confort, la tenue de route, la limitation de la commande, le bruit de mesure et les perturbations sur l'entrée de commande, sont les mêmes que leur homologue du sous-système vertical.

Les fonctions de pondération permettent d'une part de limiter l'amplitude de la fonction de transfert entre les perturbations et les sorties à contrôler et d'autre part de gérer fréquemment les compromis entre les différents objectifs.

### 5.2.2 Résultats de simulation

Les performances de la commande  $H_\infty$  sont démontrées au travers de deux simulations ; l'une concerne le mouvement vertical l'autre le roulis.

Sur les figures 5.2, nous comparons la boucle ouverte et la boucle fermée par les réponses fréquentielles et temporelles des fonctions de transfert entre la vitesse verticale  $\dot{z}_{sol}$  du profil de la route et l'accélération verticale  $\ddot{z}_{caisse}$  de la caisse.

La réponse fréquentielle (resp. temporelle) est représentée sur la figure 5.2(a) (resp. 5.2(b)). L'essai temporel correspond au cas du demi-véhicule passant à une vitesse de 70 km/h sur un nid de poule de 5cm de profondeur et de 0.5m de long. En réduisant l'accélération  $\ddot{z}_{caisse}$  de la masse suspendue dans la bande de fréquence où le corps humain est le plus sensible, le confort est amélioré comme prévu.

Les figures 5.3(a) et 5.3(b) présentent les résultats des tests sur le comportement du modèle en roulis. Sur ces figures, le véhicule répond à une inclinaison de la route ( $r_\theta$ ). Dans la bande de fréquence intéressante, la réduction de gain de la fonction de transfert est de l'ordre de 8 à 14 dB. La figure 5.3(b) représente l'accélération angulaire de la caisse et la composante angulaire  $f_{a\theta}$  de l'entrée de commande. Nous voyons une bonne amélioration de confort.

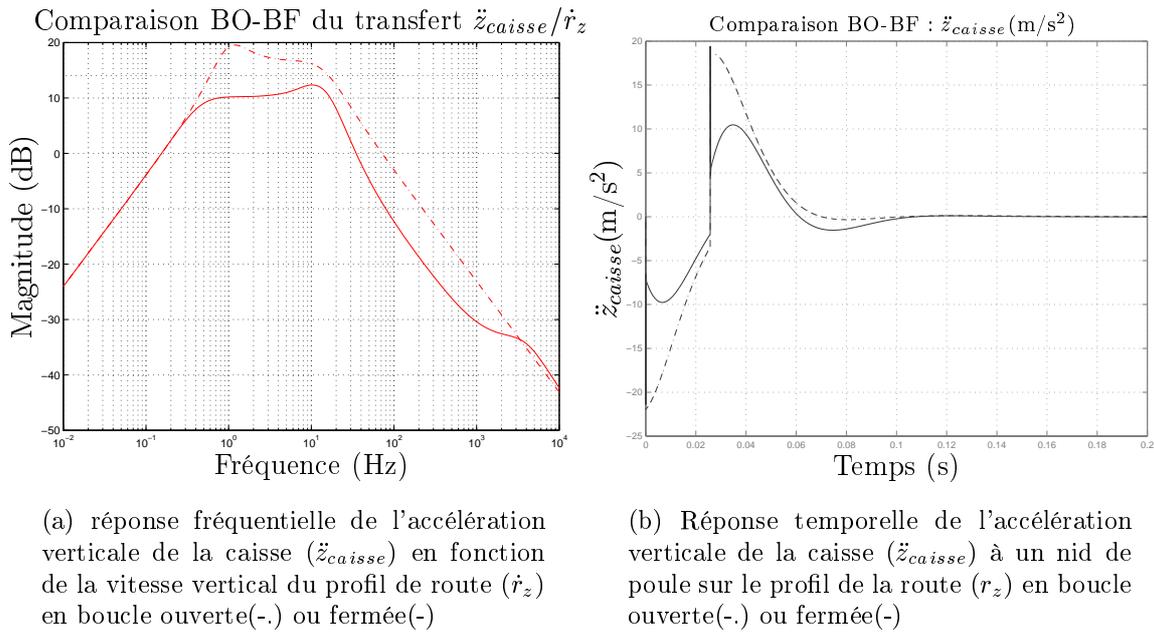


FIG. 5.2: Réponses fréquentielles et temporelles de l'accélération verticale de la caisse ( $\ddot{z}_{caisse}$ )

Ceci a été la première étude que nous avons réalisé sur les suspensions et nous avons voulu améliorer principalement le confort en terme d'accélération au détriment de la tenue de route. Nous avons ainsi diminué l'accélération verticale et angulaire de la caisse entre 1 et 8Hz qui représente la bande de fréquence dans laquelle nous souhaitons améliorer le confort ce qui est visible sur les essais temporels. Ceci est un choix de compromis parmi d'autres. Il reste beaucoup de travail à faire sur ce modèle et sur sa commande de même que sur les spécifications des critères de performances liés à ce modèle. Les publications suivantes sont issues de cette étude. Nous décrivons dans (Sammier et al., 1999), présenté en octobre 1999 aux "Journées Automatique et Automobile" à Bordeaux, et dans (Sammier et al., 2000a), présenté en septembre 2000 à la conférence "IEEE Conference on Control Application" à Anchorage (Alaska), la commande  $H_\infty$  d'une suspension active d'un modèle demi-véhicule de type essieu.

### 5.2.3 Intégration du modèle de pneu

Le paragraphe 1.2.3 du chapitre 1 présente l'intégration du modèle horizontal de chacun des pneus au modèle demi-véhicule de type essieu. Cela permet d'obtenir un modèle plus complet où la force latérale  $F_{yp}$  est défini par les modèles de pneu. Cette force dépend :

- des caractéristiques des pneus,
- du glissement longitudinal ( $\lambda_d$  et  $\lambda_g$ ) de chacun des pneus,
- de l'angle de carrossage ( $\gamma_d$  et  $\gamma_g$ ) de chacun des pneus,
- de l'angle de dérive ( $\alpha_d$  et  $\alpha_g$ ) de chacun des pneus,
- de la force normale ( $F_{nd}$  et  $F_{ng}$ ) agissant sur chacun des pneus. Ces forces normales sont définies par l'écrasement de chacun des pneus et dépendent donc du modèle de suspen-

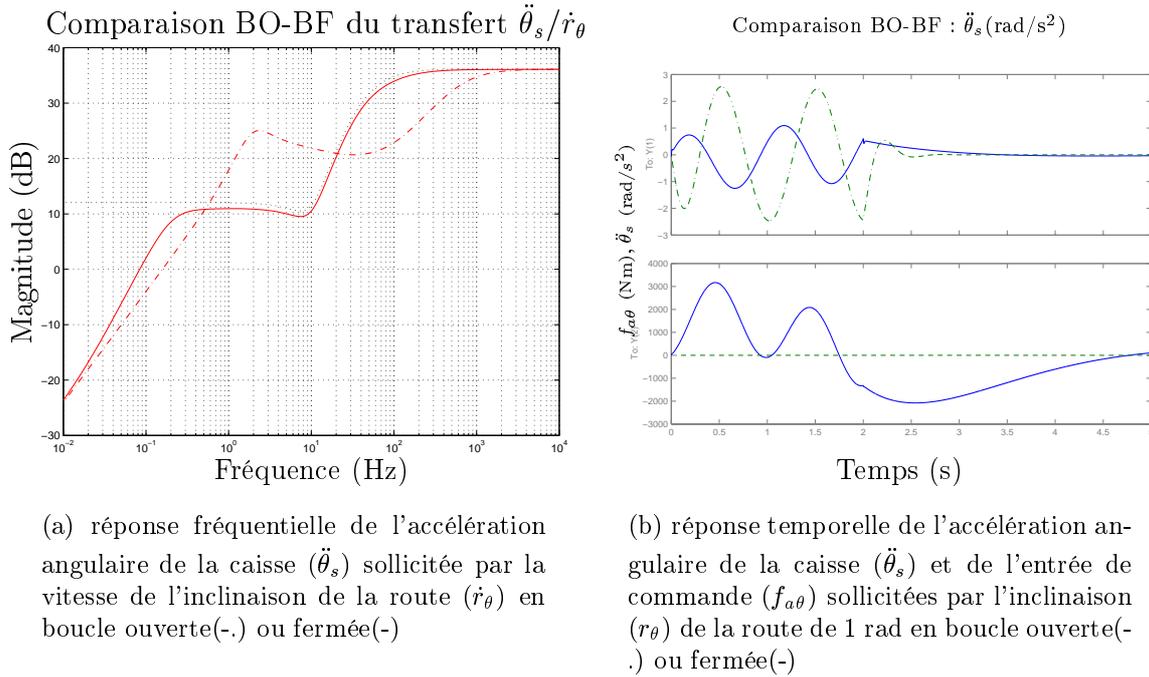


FIG. 5.3: accélération angulaire ( $\ddot{\theta}_s$ ) de la caisse en fonction de l'inclinaison de la route ( $r_\theta$ )

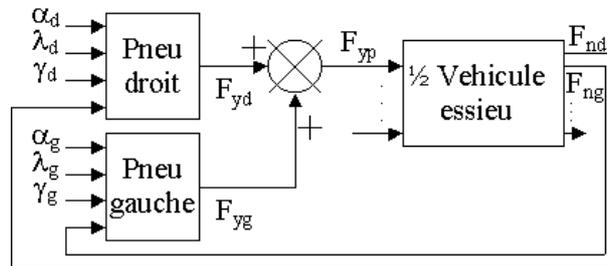


FIG. 5.4: Incorporation des modèles de pneu au modèles demi-véhicule de type essieu

sion du demi-véhicule de type essieu. Ainsi le couplage entre le comportement vertical et latéral est pris en compte (fig. 5.4).

Nous utilisons successivement les trois modèles de pneus présentés au paragraphe 1.2.2.

La commande  $H_\infty$  synthétisée précédemment est alors utilisée sur ce modèle demi-véhicule plus réaliste.

Sur les figures 5.5 à 5.13, les trois cas de modèles de pneu sont représentés par des traits différents : le modèle de Bayle en trait plein (-), celui de Burckhard en pointillés (..) et celui de Milliken en trait alternés (-.).

Les figures 5.5 à 5.8 correspondent au cas où nous avons pris les fonctions suivantes pour les entrées des modèles de pneu (l'angle de dérive  $\alpha$  et le glissement longitudinal  $\lambda$ ) :

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{10} \sin(\pi t)$$

$$\lambda(t) = 0$$

Cela correspond à une succession de virage ( $\alpha$  est une sinusoïde) passés à vitesse constante ( $\lambda = 0$ ).

La deuxième simulation, figures 5.10 à 5.13, correspond à une succession de virage passés en freinant en entrée de virage et en accélérant en sortie :

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{10} \sin(\pi t)$$

$$\lambda(t) = 0.2 \sin(2\pi t)$$

L'angle de dérive est donc une sinusoïde dont l'amplitude est de 18 degrés et la fréquence de 0.5Hz. Le glissement longitudinal a une amplitude de 20% et une fréquence de 1Hz.

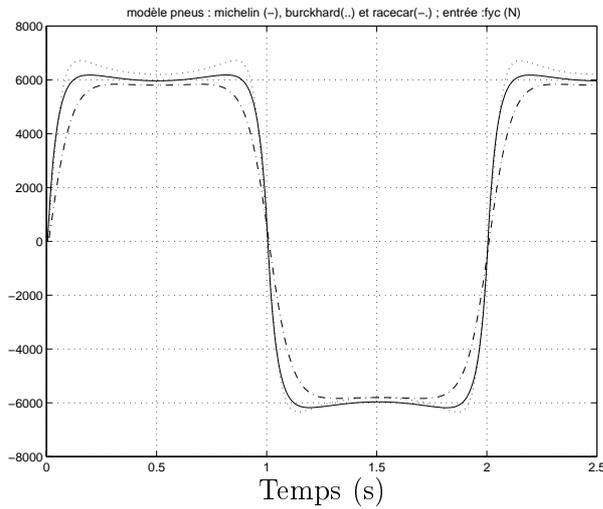
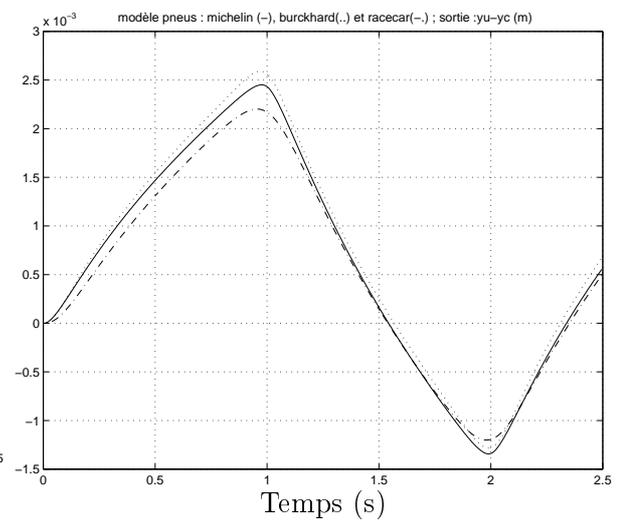
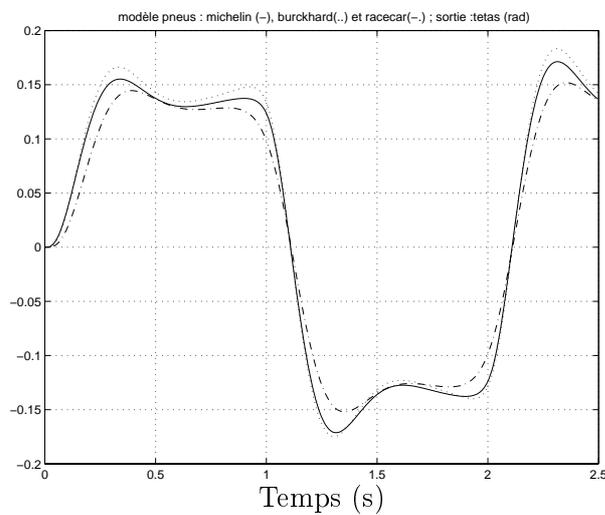
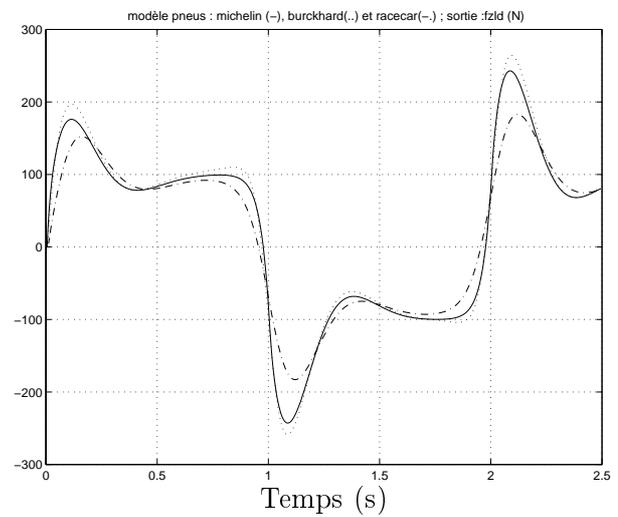
Sur les figures 5.5 et 5.10, nous traçons  $F_y$  la somme des forces latérales données par les modèles des pneus droit et gauche, obtenue pour chacune des simulations. Cette force est utilisée comme entrée du modèle demi-véhicule de type essieu. Les figures 5.6 et 5.11 (resp. 5.7 et 5.12) représentent le débattement latéral global des pneus  $y - y_c$  (resp. l'angle de roulis de la caisse  $\theta_s$ ). Sur les figures 5.8 et 5.13 nous observons  $F_{z,dyn,left}$  la charge verticale dynamique supportée par le pneu gauche et donnée par le modèle demi-véhicule essieu. Cette charge dynamique étant largement inférieure à la charge statique, qui correspond au quart du poids du véhicule ( $\sim 3800$  N), cela signifie que le contact entre le pneu et la route n'est pas rompu. Comme nous l'avons vu au chapitre 2 traitant des critères de performances, une bonne tenue de route correspond à un écrasement des pneus identique au cas statique. Or l'écrasement est proportionnel à la charge que supporte le pneu. Ainsi lorsque la charge dynamique  $F_{z,dyn,left}$  est diminuée, la tenue de route est améliorée.

Cette étude a donné lieu à une publication (Lueders et al., 1999), présentée en novembre 1999 au 14ème congrès annuel de l'IAR à Strasbourg.

Ceci est une première simulation, cependant, notons que le glissement  $\lambda$  et les angles de dérive  $\alpha$  et de carrossage  $\gamma$  ne peuvent être choisis librement car ils dépendent d'autres variables. Ainsi, seule l'utilisation d'un modèle complet de véhicule, qui prend en compte l'angle volant, les positions des pédales d'accélération et de freinage et les conditions d'adhérence de la route, permettra de définir correctement le glissement et les angles de dérive et de carrossage pour chacun des pneus.

#### 5.2.4 Conclusion sur le modèle demi-véhicule de type essieu

L'objectif de cette application est le développement d'une loi de commande  $H_\infty$  de la suspension active d'un véhicule. Nous avons utilisé un modèle demi-véhicule de type essieu basé sur celui développé pour les camions à l'université de Cambridge par Dorling (1996). Le modèle demi-véhicule de type essieu prend en compte le déplacement vertical du centre de gravité de la caisse et de celui de l'essieu, ainsi que le roulis de la caisse et celui de l'essieu. Lors de la synthèse de la loi de commande  $H_\infty$ , nous prenons en compte les domaines fréquentiels des différents objectifs. Les performances sont à obtenir

FIG. 5.5:  $F_y$  somme des forces définies par le modèle de pneuFIG. 5.6: Sorties  $y - y_c$  du modèle demi-véhiculeFIG. 5.7: Angle  $\theta_s$  défini par le modèle demi-véhiculeFIG. 5.8: Charge verticale dynamique sur le pneu gauche  $F_{z,dyn,left}$ FIG. 5.9:  $\alpha$  et  $\lambda$  sont des sinusoïdes

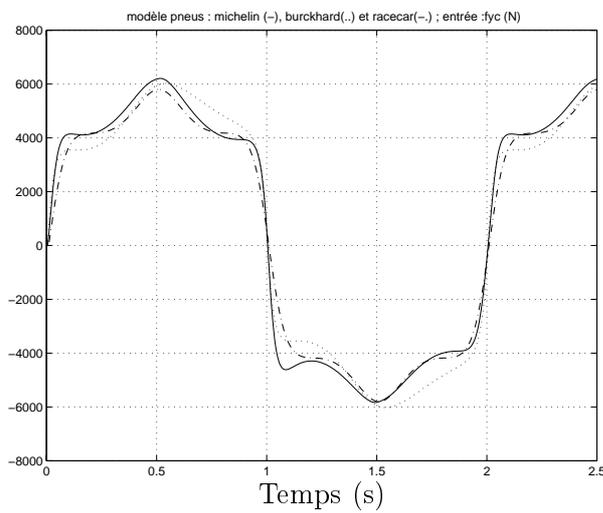


FIG. 5.10:  $F_y$  somme des forces définies par le modèle de pneu ( $\alpha$  est une sinusoïde et  $\lambda$  est nul)

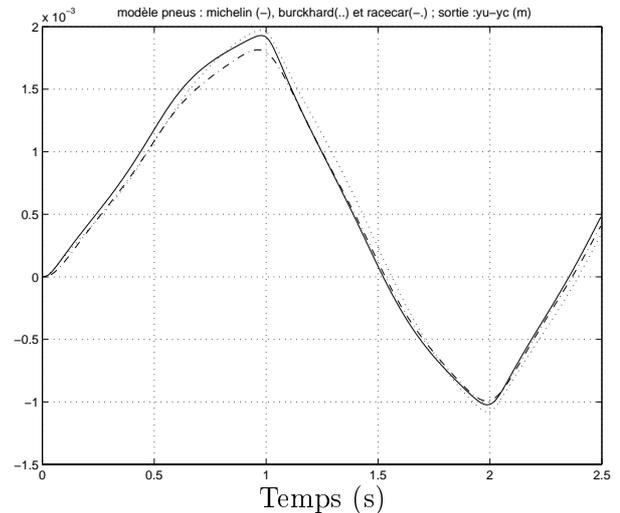


FIG. 5.11: Sorties  $y - y_c$  du modèle demi-véhicule ( $\alpha$  et  $\lambda$  sont des sinusoïdes)

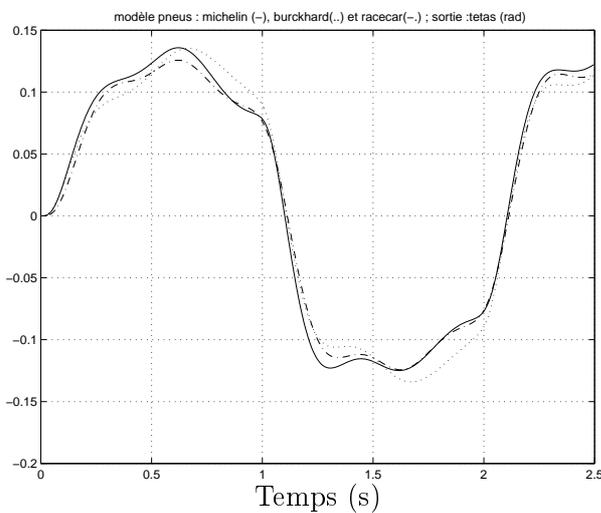


FIG. 5.12: Angle  $\theta_s$  défini par le modèle demi-véhicule ( $\alpha$  et  $\lambda$  sont des sinusoïdes)

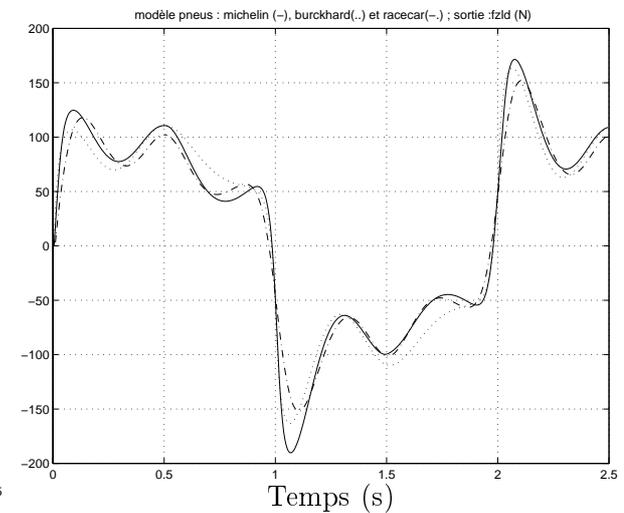


FIG. 5.13: Charge verticale dynamique sur le pneu gauche  $F_{z,dyn,left}$  ( $\alpha$  et  $\lambda$  sont des sinusoïdes)

en basses fréquences. La limitation de la commande se fait en hautes fréquences. Nous tenons compte du domaine fréquentiel de sensibilité du corps humain et de celui des entrées exogènes (force latérale  $F_{yp}$ , bruit de mesures). La prise en compte d'une entrée de perturbation agissant directement sur la commande, permet de limiter l'influence d'une défaillance de l'actionneur. Le problème  $H_\infty$  sous-optimal concernant les performances nominales (NP) est résolu. Puis les performances sont mises en évidence par des simulations fréquentielles et temporelles pour chaque sous-système. L'amélioration du confort en vertical et en roulis est significative.

De nombreuses perspectives se dégagent à la suite de ce travail. Une étude de la robustesse en stabilité (RS) et de la robustesse en performances (RP) pourra être effectuée par le biais de la  $\mu$ -analyse. Il reste aussi à tester ces commandes sur un modèle plus réaliste du véhicule.

## 5.3 Modèle "complet" de véhicule ou modèle 3D

Prattichizzo et al. (1998) montrent que pour un modèle complet de véhicule à 7ddl équipé de suspensions actives, le rejet parfait de perturbation est toujours possible. Dans ce paragraphe, le but est de découpler ligne par ligne les sorties de ce système et de rejeter les perturbations. Pour cela le système doit avoir autant d'entrées de commande que de sorties à découpler. Ainsi, nous nous attachons dans un premier temps à définir de nouvelles entrées du système. Ces entrées sont appelées à devenir les entrées de références pour les sorties à découpler. Puis nous testons la faisabilité du découplage ligne par ligne et du rejet de perturbations simultanés grâce aux conditions nécessaires et suffisantes présentées au paragraphe 3.4. Les conditions requises étant remplies, nous détaillons la méthodologie utilisée pour obtenir une loi de commande pour ce problème de découplage et de rejet simultanés. Cela passe par l'obtention de la famille des lois de commande découplantes à l'aide d'une méthode qui provient de (Falb & Wolovich, 1967). Puis nous recherchons parmi cette famille de lois découplantes, une loi de commande permettant le rejet de perturbations. Des essais temporels viennent illustrer la résolution de ce problème théorique de découplage et de rejet simultané.

### 5.3.1 Application du découplage et rejet au modèle complet de véhicule

Dans ce paragraphe, le but est de découpler ligne par ligne les sorties de ce système et de rejeter les perturbations. Pour cela le système doit avoir autant d'entrées de commande que de sorties à découpler.

#### 5.3.1.1 Mise en forme

Le système complet de véhicule est présenté au paragraphe 1.5.2. Nous rappelons l'équation 1.29 de ce système :

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_{p1} z_r + B_{p2} u \quad (5.5)$$

avec

$$A_p = \begin{bmatrix} A_v & B_v C_a \\ 0_{4 \times 14} & A_a \end{bmatrix}; B_{p1} = \begin{bmatrix} F_v \\ 0_{4 \times 1} \end{bmatrix}; B_{p2} = \begin{bmatrix} B_v D_a \\ B_a \end{bmatrix}$$

Ces matrices sont détaillées au paragraphe 1.5.2.

Les perturbations considérées sont les profils verticaux de la route sous chacune des quatre roues, représentés par  $z_r$ . Les sorties auxquelles nous nous intéressons sont les 3 degrés de liberté du châssis représentés par  $q$ . Les nouvelles entrées de commande  $\bar{u}$ , permettant d'obtenir autant d'entrées de commande que de sorties à découpler, sont définies par la relation suivante :

$$u = T^t \bar{u}$$

avec  $\bar{u} = [\bar{u}_z \quad \bar{u}_\theta \quad \bar{u}_\phi]^t$  et  $T$  défini au chapitre 1 par :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -t_f & t_f & -t_r & t_r \\ -l_f & -l_f & l_r & l_r \end{bmatrix}$$

Le système final est alors le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_p = A_p x_p + B_{p1} z_r + B_{p2} T^t \bar{u} \\ y = q = C_p x_p \end{cases} \quad (5.6)$$

avec l'état  $x_p = [x_v^t \quad x_a^t]$  et la matrice

$$C_p = [I_{3 \times 3} \quad 0_{3 \times 15}]$$

Puisque le système utilisé est linéaire, la théorie sur le découplage des systèmes linéaires peut être appliquée. Notons que le problème de découplage ligne par ligne n'est soluble que pour les systèmes qui ont le même nombre d'entrées de commande que de sorties. Dans le cas singulier où la matrice de transfert entre les entrées de commande et les sorties n'est pas carrée, le problème du découplage ligne par ligne reste ouvert (Commault et al., 1993).

### 5.3.1.2 Calcul de la loi de commande

La loi de commande considérée est un retour d'état statique régulier défini par :

$$\bar{u} = F x_p + G v + H d \quad (5.7)$$

où  $G$  est une matrice carrée non-singulière.

Dans notre cas, nous avons testé par la méthode des graphes (Commault et al., 1993) la faisabilité du rejet de perturbation pour un système structuré. Il s'avère que dans le cas générique des systèmes structurés, le rejet n'est possible que si les perturbations sont mesurées. Il peut exister un choix particulier des paramètres du système pour lequel le rejet parfait n'est pas possible même en mesurant les perturbations. Cependant il suffit d'une légère variation d'un paramètre pour que nous sortions de ce cas particulier. Ainsi, pour la suite, nous considérons que les perturbations sont mesurables, la matrice  $H$  est alors non-nulle.

Le système bouclé est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_p = (A_p + B_{p2}T^tF) x_p + B_{p2}T^tGv + (B_{p1} + B_{p2}T^tH) d \\ y = C_p x_p \end{cases} \quad (5.8)$$

où les nouvelles entrées de commande  $v$  sont regroupées dans un vecteur de dimension  $m$ .

Comme nous l'avons dit au paragraphe 3.4, il existe des conditions nécessaires et suffisantes de faisabilité, pour résoudre simultanément le problème de découplage ligne par ligne et celui du rejet parfait de perturbations (voir (Dion et al., 1994), (Icart, 1990), (Falb & Wolovich, 1967)). Ces contributions donnent une procédure pour calculer les matrices  $F$  et  $G$ , solutions du problème. Cependant aucune méthode de calcul de la matrice  $H$  (appliquée aux mesures des perturbations) n'est fournie.

De plus, lorsque l'on calcule les matrices  $F$  et  $G$  à partir des équations (3.31-3.33), solutions du problème de découplage, certains degrés de liberté sont fixés par le choix des  $\lambda_i$  et des  $e_{i,j}$  et ne sont donc plus disponibles pour trouver des lois de commandes qui permettent le rejet de perturbation.

Étudions la solvabilité du problème. Le système considéré est :

$$\begin{cases} \dot{x}_p = A_p x_p + B_{p2}T^t\bar{u} \\ y = C_p x_p \end{cases} \quad (5.9)$$

où le terme  $B_{p1}z_r$ , représentant les perturbations, a été enlevé. En fait ce terme n'est pas utilisé pour résoudre le problème du découplage ligne par ligne.

Pour notre problème, les coefficients  $n_i$ , qui correspondent à l'ordre des zéros à l'infini de chacune des trois lignes, sont

$$n_1 = n_2 = n_3 = 3 \quad (5.10)$$

La matrice  $D^*$  est alors :

$$D^* = C_p A_p^2 B_{p2} G^t \quad (5.11)$$

Nous obtenons  $Det(D^*) \neq 0$ . Le problème du découplage ligne par ligne est donc solvable.

Les coefficients  $\lambda_i$  et  $e_{i,j}$  doivent être choisis pour obtenir les matrices  $F$  and  $G$ . A partir de  $D^*$ , des  $\lambda_i$  et des  $e_{i,j}$ , les matrices  $F$  et  $G$  sont facilement déduites.

De façon à obtenir un gain statique unitaire pour chaque transfert du système bouclé, les coefficients  $\lambda_i$  sont choisis de la façon suivante :

$$\lambda_i = e_{i,0} \quad \forall i \quad (5.12)$$

Le degré de chaque fonction de transfert du système bouclé est fixé par son coefficient  $n_i$  calculé précédemment. Dans notre cas, ces fonctions de transfert sont toutes de degré 3. Les coefficients  $e_{i,j}$  sont choisis ainsi :

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{\lambda_i}{s^{n_i} + \sum_{j=0}^{n_i-1} e_{i,j} s^j} \\ &= \frac{1}{(s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2)(s + \omega_i)} \end{aligned} \quad (5.13)$$

avec  $\omega_i = 2\pi f_i$ ,  $f_i = 0.1Hz$  et  $\xi_i = 1.2$  pour  $i = 1, \dots, m$ .

La matrice  $H$  est alors paramétrée dans le système (5.8) afin d'annuler le transfert entre les entrées de perturbations ( $z_r$ ) et les sorties ( $q$ ). Les coefficients  $h_i$  de la matrice

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ h_5 & h_6 & h_7 & h_8 \\ h_9 & h_{10} & h_{11} & h_{12} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

sont donc recherchés de façon à ce que

$$T_{z_r q} = C_p (sI - A_p - B_{p2}T^t F)^{-1} (B_{p1} + B_{p2}T^t H) = 0, \forall s \quad (5.15)$$

En pratique, nous obtenons :

$$q = \begin{pmatrix} z_c \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = T_{z_r q} (z_{r1} \quad z_{r2} \quad z_{r3} \quad z_{r4}) \quad (5.16)$$

avec

$$T_{z_r q} = (T_{z_{r1}q} \quad T_{z_{r2}q} \quad T_{z_{r3}q} \quad T_{z_{r4}q}), \quad (5.17)$$

et

$$T_{z_{ri}q} = \begin{pmatrix} P_{ai} + h_i P_{bi} \\ P_{ci} + h_i P_{di} + h_{i+4} P_{ei} \\ P_{fi} + h_{i+8} P_{gi} \end{pmatrix} = 0, \forall s \quad (5.18)$$

où les  $P_*$  sont des polynômes de degré 16 en  $s$ .

Ainsi  $h_1$  est une solution réelle d'un système de 16 équations à 1 inconnue. Cette solution n'existe que si les polynômes  $P_{ai}$  et  $P_{bi}$  sont proportionnel. Il en est de même pour les coefficients  $h_2$  à  $h_4$  et  $h_9$  à  $h_{12}$ . Une fois les coefficients  $h_2$  à  $h_4$  fixés,  $h_5$  à  $h_8$  sont obtenus en résolvant pour chacun un système de 16 équations à 1 inconnue.

De plus, étant donné la taille élevé du système le calcul de l'inverse de la matrice  $(sI - A_p - B_{p2}T^t F)$  est entaché d'erreurs numériques. Cela entraîne des erreurs dans les coefficients des polynômes  $P_*$  et les systèmes de 16 équations à 1 inconnue ne sont pas solvables.

Cependant, pour chaque coefficient  $h_i$ , les 16 équations nous donnent 16 solutions qui ne diffèrent que très peu les unes des autres. La moyenne de ces solutions sert alors de point de départ pour la recherche manuelle d'une solution.

Finalement, la solution retenue permet de limiter à  $10^{-7}$  les gains des transferts devant être nuls ( $q/z_r$ ,  $z_c/\bar{u}_2$ ,  $z_c/\bar{u}_3$ ,  $\theta/\bar{u}_1$ ,  $\theta/\bar{u}_3$ ,  $\phi/\bar{u}_1$  et  $\phi/\bar{u}_3$ ), tout en fournissant un gain unitaire pour les transferts de la diagonale ( $z_c/\bar{u}_1$ ,  $\theta/\bar{u}_1$  et  $\phi/\bar{u}_1$ ).

Remarquons aussi que pour qu'il y ai rejet parfait des perturbations, les paramètres  $h_i$  doivent être obtenus avec une très grande précision, ce qui signifie que cette commande est très sensibles aux variations des paramètres physiques.

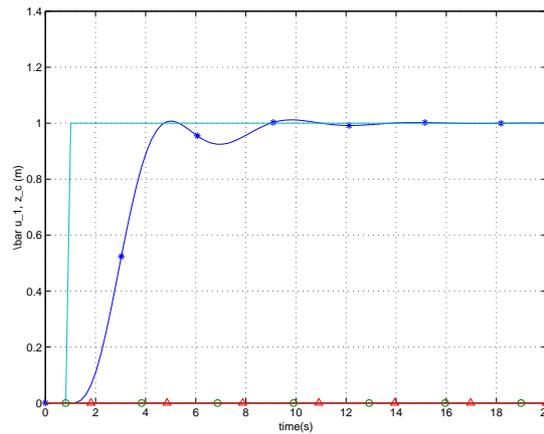


FIG. 5.14: Réponse temporelle du déplacement vertical du CdG de la caisse ( $z_c$ ) à un échelon de l'entrée de référence  $\bar{u}_1$

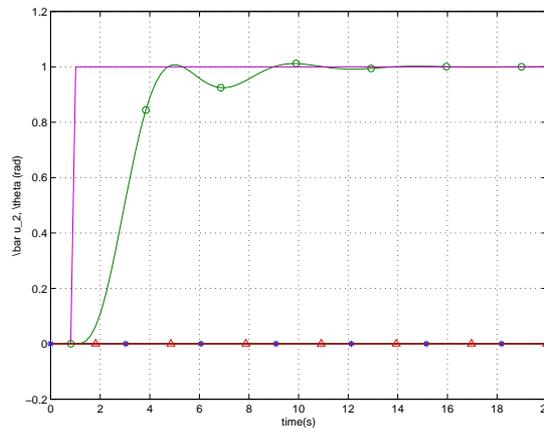


FIG. 5.15: Réponse temporelle du roulis ( $\theta$ ) de la caisse ( $z_c$ ) à un échelon de l'entrée de référence  $\bar{u}_2$

### 5.3.1.3 Résultat de simulation

Quelques résultats de simulations sont présentés sur les figures 5.14 à 5.17, où  $*$ ,  $\circ$  et  $\Delta$  représentent respectivement le déplacement vertical ( $z_c$ ) du centre de gravité de la caisse, le roulis ( $\theta$ ) and le tangage ( $\phi$ ) de la caisse.

Les figures 5.14 à 5.16, représentent les réponse temporelles des sorties ( $z_c, \theta, \phi$ ) à un échelon de chaque entrée de commande ( $\bar{u}_i$ ) successivement. Le découplage ligne par ligne apparaît clairement sur les figures. L'entrée de commande  $\bar{u}_i$  affecte uniquement la sortie  $y_i = q_i$ .

La figure 5.17 représente la réponse temporelle des trois sorties à un échelon d'une des entrées de perturbations ( $z_{ri}$ ). Il apparaît qu'aucune perturbation n'affecte les sorties ce qui signifie que le problème du rejet de perturbations est résolu.

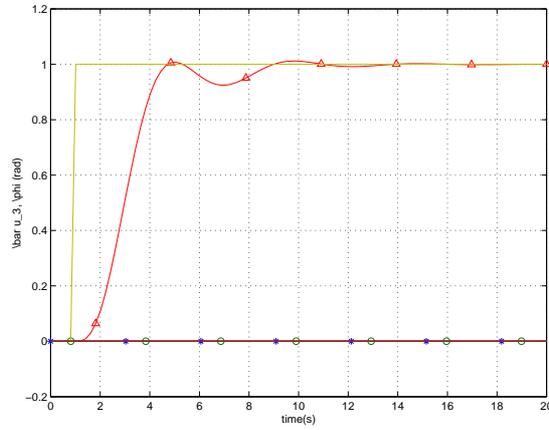


FIG. 5.16: Réponse temporelle du tangage ( $\phi$ ) de la caisse ( $z_c$ ) à un échelon de l'entrée de référence  $\bar{u}_3$

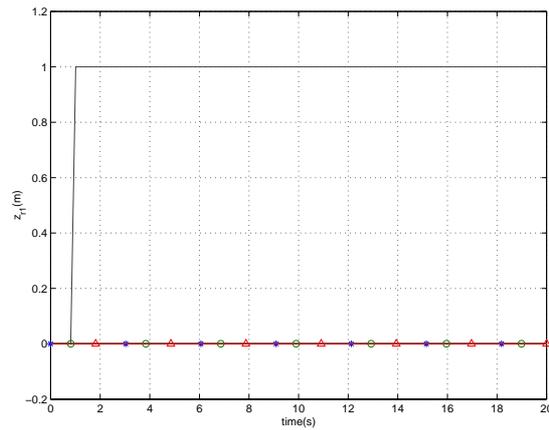


FIG. 5.17: Réponse temporelle du déplacement vertical ( $z_c$ ), du roulis ( $\theta$ ) et du tangage ( $\phi$ ) de la caisse à un échelon du profil de la route sous une roue ( $z_{ri}$ )

### 5.3.2 Conclusions sur le modèle "complet" de véhicule ou modèle 3D

Sur le modèle complet à 7ddl équipé de suspensions actives, nous avons synthétisé une loi de commande permettant simultanément de découpler ligne par ligne les mouvements de la caisse, et de rejeter parfaitement les perturbations dues au profil de la route sous chacune des quatre roues. Nous avons tout d'abord défini de nouvelles entrées pour obtenir un système carré. Ces entrées sont les références des trois mouvements de la caisse (vertical, roulis et tangage). Puis, le résultat du test des conditions nécessaires et suffisantes du problème théorique de découplage ligne par ligne étant positif, nous avons recherché la famille  $(F, G)$  des lois de commande permettant le découplage ligne par ligne. Enfin, parmi cette famille, nous avons cherché, en paramétrant la matrice  $H$  appliquée aux mesures des perturbations, une loi de commande permettant aussi le rejet des perturbations. Nous obtenons alors trois systèmes mono-variables reliant chaque mouvement de la caisse à son entrée de référence. Notons que même si l'ordre de chacune de ces trois fonctions de transfert est fixé par l'ordre  $n_i$  du zéro à l'infini de la ligne correspondante du système initial, nous pouvons tout de même choisir librement les gains  $\lambda_i$  et les dynamiques (avec  $e_{ij}$ ) de ces fonctions de transfert.

Cependant, nous n'avons pas pris en compte les problèmes de robustesse vis-à-vis des incertitudes de modèle. Une solution est alors d'appliquer, en sus, une commande robuste à chacun de ces systèmes mono-variables pour parer aux éventuelles erreurs de modélisation.

On pourra alors comparer d'une part ces trois systèmes mono-variables découplés et régulés chacun par une commande robuste, et d'autre part une commande robuste multivariable appliquée directement sur le modèle complet de véhicule à 7ddl.

## 5.4 Conclusions sur les deux modèles et leurs commandes

Au paragraphe 5.2, nous présentons la synthèse d'une loi de commande  $H_\infty$  d'un modèle linéaire de demi-véhicule de type essieu équipé de suspension actives. Le régulateur est en fait composé d'une partie traitant les mouvements verticaux et d'une partie traitant le roulis et le déplacement latéral. Cette commande permet d'améliorer le confort en vertical et en roulis, (Sammier et al., 1999, 2000a). La commande est ensuite testée sur un modèle demi-véhicule de type essieu auquel un modèle horizontal de chacun des pneus est intégré, (Lueders et al., 1999). Rappelons tout de même que c'est une première simulation et qu'en principe, les entrées du modèle de pneu  $(\alpha, \lambda, \dots)$  dépendent d'un modèle complet de véhicule.

Il reste d'une part à tester la robustesse en stabilité (RS) et en performances (RP) du système bouclé linéaire et d'autre part à appliquer la commande synthétisée sur le modèle linéaire du demi-véhicule de type essieu, sur un modèle non-linéaire plus réaliste détaillant notamment les actionneurs.

La deuxième partie (paragraphe 5.3) traite du problème de découplage ligne par ligne et du rejet de perturbations simultanés pour un modèle complet de véhicule à 7ddl. Le but est donc d'une part de découpler le mouvement vertical, le roulis et le tangage de la caisse et d'autre part d'annuler l'influence du profil de la route sous chacune des roues

sur ces trois mouvements de la caisse. Ce problème est résolu et permet d'obtenir trois systèmes mono-variables indépendants reliant chaque mouvement de la caisse à son entrée de référence, (Sammier et al., 2000b).

Cependant, cette loi de commande est très sensible aux erreurs de modélisation. Une solution est alors d'appliquer, en sus, une commande robuste à chacun des trois systèmes mono-variables pour parer aux éventuelles erreurs de modélisation. On pourra ainsi par la suite comparer cette méthode (découplage et rejet, puis application d'une commande robuste sur chaque sous-système) avec l'application, directement sur le modèle complet de véhicule à 7ddl, d'une commande robuste multivariable.

Dans ce chapitre nous avons présenté nos premières études sur un modèle demi-véhicule de type essieu et sur un modèle complet à 7 degrés de liberté. Il reste beaucoup de travail à effectuer sur la commande de ces modèles. En effet, la robustesse en stabilité et en performance vis-à-vis de variations paramétriques peut être étudiée avec la  $\mu$ -analyse. De plus, nous n'avons pas testé ces commandes sur un modèle non-linéaire, comme c'est le cas au chapitre 4. La comparaison des deux méthodes de commande robustes du modèle complet citées précédemment peut aussi se faire sur ce type de modèle. Il est envisageable de synthétiser d'autres lois de commande sur ces modèles.

# Chapitre 6

## Conclusions générales

Au cours de cette thèse, nous avons étudié les suspensions de véhicules de tourisme et en particulier leur modélisation et leur commande.

Nous allons maintenant conclure sur les aspects abordés dans chaque chapitre, avant de proposer des perspectives à ce travail.

### 6.1 Conclusions

Dans le premier chapitre, nous présentons successivement les modèles quart de véhicule (vertical), demi-véhicule de type essieu (vertical et roulis) et complet (vertical, roulis et tangage). Pour chacun de ces modèles nous avons présenté les éléments qui le constituent (raideur verticale du pneu, suspension, barre anti-roulis,...). Ces modèles ne sont pas nouveaux, cependant, afin de prendre en compte le couplage entre les mouvements latéraux et verticaux, agissant au niveau du contact entre le pneu et le sol, nous incorporons successivement, dans un modèle demi-véhicule de type essieu, trois modèles d'adhérence de pneu.

Nous nous sommes attachés ensuite, au chapitre deux, à présenter des critères de performances pour chaque type de modèle de véhicule (quart, essieu, complet), ainsi que des critères de robustesse. Les principaux objectifs d'une suspension sont le confort et la tenue de route. Nous avons vu que le système avait certaines limites (points invariants, comportement invariants) dont la connaissance nous permet de définir des performances inatteignables. Pour chaque type de modèle de véhicule, nous rappelons les critères de la littérature. Cependant, si l'on dispose de critères, comme l'accélération de la caisse pour le confort ou encore l'écrasement des pneus pour la tenue de route, les spécifications associées à ces critères ne sont pas toujours bien définies. Par ailleurs, plus le modèle se complique, moins l'on dispose de spécifications précises. Pour le modèle quart de véhicule, en plus de ces critères que nous retrouvons dans la littérature, nous donnons des critères établis en collaboration avec PSA, avec des spécifications précises.

Nous avons présenté des critères de robustesse vis-à-vis des variations des paramètres. Cependant, ces critères ne sont pas toujours faciles à prendre en compte lors de la synthèse de loi de commandes et sont donc souvent testés a posteriori.

Le chapitre trois fournit des rappels sur les lois de commandes utilisées. Ainsi, après un état de l'art non-exhaustif sur la commande des suspensions, nous avons tout d'abord développé quelques méthodes de commandes classiques (commande par placement de

pôles, commande par retour d'état, commande  $H_\infty$ ) ainsi que l'outil  $\mu$ -analyse, avant de présenter la commande Skyhook spécifique aux suspensions.

Pour la synthèse de la commande  $H_\infty$ , le nombre de paramètres de réglages correspondant aux pondérations, n'est pas limité. Cela permet d'imposer des gabarits fréquentiels pour chaque transfert du système en boucle fermée. Cependant cette méthode donne des régulateurs d'ordre élevé. De plus le réglage des pondérations fait appel à de bonnes connaissances en automatique. En limitant le gain du plus grand pic en fréquences (pire cas), cette commande est particulièrement adaptée pour des routes chaotiques. Elle peut toutefois donner des résultats pessimistes si l'objectif est de minimiser, au détriment des cas singuliers, l'écart moyen par rapport à la position de repos.

La  $\mu$ -analyse est un outil générique de l'automatique permettant d'analyser les performances nominales d'un système mais aussi la stabilité robuste et les performances robustes de ce système vis-à-vis d'incertitudes réelles.

La commande Skyhook, spécifique aux suspensions, permet une synthèse rapide car elle ne dispose que de deux paramètres de réglage et ne nécessite donc pas de connaissances pointues en Automatique. Cependant, le faible nombre de paramètres de réglages rend plus difficile la satisfaction des compromis notamment entre le confort et la tenue de route.

Nous avons suivi la méthode généralement utilisée qui consiste à synthétiser une commande (placement de pôles, Skyhook,  $H_\infty$ ) pour un système linéaire puis à analyser a posteriori, par le biais de la  $\mu$ -analyse, les performances nominales et la robustesse en stabilité et en performances de ce système vis-à-vis d'incertitudes.

Au chapitre quatre, nous avons synthétisé trois commandes différentes (placement de pôles, Skyhook et  $H_\infty$ ) sur un modèle linéaire de quart de véhicule à 2 degrés de liberté équipé d'une suspension active. Puis nous avons comparé, à l'aide des critères définis au chapitre deux, les performances nominales de ces trois systèmes bouclés linéaires entre elles et avec celle du système linéaire en boucle ouverte (Sammier et al., 2001a). Nous avons ensuite analysé les performances nominales ainsi que la robustesse en stabilité et en performances des systèmes bouclés, vis-à-vis d'incertitudes paramétriques pour chaque paramètre physique (masses, ressorts) du système. Enfin, nous avons appliqué ces commandes sur un modèle quart de véhicule incorporant un modèle non-linéaire de l'amortisseur semi-actif de la 607 et nous avons comparé les performances nominales avec celles du système de référence de la suspension passive de la 406, (Sammier et al., 2001b). Du point de vue des mesures, la commande par placement de pôles utilise la mesure du déplacement absolu de la caisse. La commande Skyhook nécessite la mesure du débattement de la suspension mais aussi du déplacement absolu de la caisse ou de la roue, alors que la commande  $H_\infty$  n'utilise que la mesure du débattement de la suspension qui est la plus facile à obtenir. Nous avons vu en appliquant les commandes sur le modèle non-linéaire, que ce dernier a tendance à niveler les différentes commandes, les plus affectées étant celles par placement de pôles et  $H_\infty$ , bien que cette dernière donne toujours de meilleurs résultats que la commande Skyhook concernant le confort.

En plus de ce travail, nous avons, dans le cadre d'une collaboration contractuelle avec PSA effectuée en 2000 (Sammier et al., 2000c,d), étudié, par le biais des critères de performances, l'influence de la prise en compte d'une dynamique de l'actionneur sur les performances nominales du système non-linéaire bouclé par les commandes Skyhook ou  $H_\infty$ . Nous avons aussi comparé le nombre de changements de loi lors de l'utilisation d'un amortisseur à lois croisées ou non-croisées, afin de savoir lequel, étant le moins sollicité, a

une plus grande durée de vie.

Au chapitre cinq, nous avons travaillé sur la commande du modèle demi-véhicule de type essieu et du modèle complet à 7 degrés de liberté, tous deux définis au premier chapitre.

Comme nous l'avons vu, le modèle demi-véhicule de type essieu se décompose en deux sous-systèmes linéaires gérant l'un le déplacement vertical et l'autre le déplacement latéral et le roulis. Nous avons synthétisé deux commandes  $H_\infty$ , une sur chaque sous-système. Nous avons alors étudié les performances nominales de chaque sous système bouclé en considérant principalement le confort en terme d'accélération. Cette commande fut ensuite appliquée à un modèle demi-véhicule incorporant des modèles de l'adhérence des pneus, afin de prendre en compte le couplage entre les mouvements verticaux et latéraux.

Pour le modèle de véhicule complet à 7 degrés de liberté, nous avons utilisé une commande par retour d'état permettant de découpler les trois mouvements de la caisse (déplacement vertical du centre de gravité, roulis et tangage) et de rejeter les perturbations dues au profil de la route sous chacune des quatre roues. Nous avons donc obtenu trois sous-systèmes indépendants reliant les trois mouvements de la caisse à leur référence respective (Sammier et al., 1999, 2000a,b; Lueders et al., 1999).

## 6.2 Perspectives

Dans ce travail, nous avons proposé plusieurs méthodologies pour l'étude des suspensions. Nous pouvons dégager plusieurs axes de recherche pour poursuivre ce travail.

Un premier point correspond à la réalisation d'essais pratiques en appliquant les commandes sur un système réel.

Il reste aussi à compléter l'étude sur la modélisation des actionneurs afin de prendre en compte leurs dynamiques et leurs saturations, et sur l'assemblage des différents modèles non-linéaires (actionneurs, adhérence des pneus,...) dans un modèle complet de véhicule qui soit plus réaliste que celui à 7 degrés de liberté. Une meilleure connaissance des actionneurs et de leurs réponses fréquentielles ainsi qu'une bonne modélisation de la route peuvent être prises en compte lors de la synthèse de lois de commande et permettre ainsi d'obtenir de meilleures performances lors de leur utilisation sur un modèle non-linéaire.

De plus, les résultats du système bouclé par le régulateur  $H_\infty$  nous montrent que l'utilisation de suspensions actives peut être envisagée pour améliorer sensiblement les performances. Il conviendra alors de modéliser finement la bande passante, les limitations et le comportement de ces suspensions, pour pouvoir en tenir compte lors de la synthèse du régulateur.

Nous avons vu que les critères d'analyse de performance sont nombreux et que ceux de la littérature nécessitent une bonne modélisation du profil de la route. Il reste ainsi à approfondir les spécifications liées à ces critères. Une redéfinition des critères entraînera évidemment de nouvelles synthèses de commandes.

L'analyse de la robustesse en stabilité et en performances peut être approfondie en considérant d'autres incertitudes comme par exemple des dynamiques négligées, des variations de gains des capteurs et des actionneurs et en ayant une meilleure connaissance des incertitudes effectivement constatées dans l'industrie d'un véhicule à l'autre.

Les résultats relatifs au modèle complet, même s'ils sont théoriques, nous montrent

qu'un découplage des différents degrés de liberté de la caisse (vertical, roulis, tangage) est possible. Une solution peut alors être d'appliquer, en sus, une commande robuste sur chaque système mono-variable. Il sera ensuite intéressant de pouvoir comparer les résultats obtenus tant au niveau des performances que de la robustesse, avec ceux d'une commande robuste multi-variable.

Enfin, de manière générale, les couplages entre les différents mouvements du véhicule peuvent inciter à rechercher une commande globale des différents organes du véhicule (direction, propulsion/freinage, suspension) afin d'améliorer encore les performances en tenant compte de ces couplages.

# Bibliographie

- Aa, M.A.H. Van Der, J.H.E.A. Muijderman et F.E. Veldpaus. “Constrained optimal control of semi-active suspension systems with preview”. *Vehicle System Dynamics*, 28, pp. 307–323, 1997.
- Alleyne, A. “Improved vehicle performance using combined suspension and braking forces”. *Vehicle System Dynamics*, 27, pp. 235–265, 1997.
- Alvarez-Salas, R. “Modélisation et commande de véhicules automobiles”. Rapport technique, LAG-ENSIEG-INPG, Grenoble, France, Juin 1998.
- Astrom, K.L. et B. Wittenmark. *Computer-Controlled Systems*. Information and systems sciences series. Prentice Hall, New Jersey, 3rd edition edition, 1997.
- Autran, F., F. Bessière, J. Lévine et P. Rouchon. “La fonction suspension, du passif à l’actif : l’approche valeo”. *Journées Automatique et Automobile*, 22-23 juin 1995. Bordeaux, France.
- Bayle, P., J.F. Forissier et S. Lafon. “A new tire model for vehicle dynamics simulations”. *Automotive Technology International*, pp. 193–198, 1993.
- Bonnardel, G. “Confort vibratoire du siège du conducteur”. *Journal de l’Ingénieur de l’automobile*, pp. 54–58, Octobre 1988. SIA 88075.
- Burckhardt, M. *Fahrwerktechnik : Radschlupf - Regelsysteme*. Vogel Buchverlag, Regensburg, Germany, 1993.
- Chang, S.L. et C.H. Wu. “Design of an active suspension system based on a biological model”. *Proceeding of the American Control Conference*, pp. 2915–2919, June 1997. Albuquerque, New Mexico USA.
- Cherry, A.S. et R.P. Jones. “Fuzzy logic control of an automotive suspension system”. *IEEE Proc. Control Theory Appl.*, 142(2), pp. 149–160, March 1995.
- Choi, J.W., Y.B. Seo, W.S. Yoo et M.H. Lee. “Lqr approach using eigenstructure assignment with an active suspension control application”. *Proceedings of the 1998 IEEE, Int. Conf. on Control Application*, pp. 1235–1239, 1-4 September 1998. Trieste, Italy.
- Commault, C., J.M. Dion et M. Benahcène. “Output feedback disturbance decoupling : Graph interpretation for structured systems”. *Automatica*, 29, pp. 1463–1472, 1993.
- Commault, C., J.M. Dion et J. Montoya. “Simultaneous decoupling and disturbance rejection : a structural approach”. *Int. Journ. of Cont.*, 59, pp. 1325–1344, 1994.
- Commault, C., J.M. Dion et S. Perez. “Transfer matrix approach to the disturbance decoupling problem”. *World Congress IFAC’84*, 8, pp. 130–133, 1984. Budapest, Hungary.

- Cooke, R., D.A. Crola et M. Abe. "Modelling combined ride and handling manoeuvres for a vehicle with slow-active suspension". *Vehicle Systems Dynamics*, 27, pp. 457–476, 1997.
- DeLarminat, Ph. *Automatique - Commande des systèmes linéaires*. Hermès, Paris, 1993.
- Descusse, J. et J.M. Dion. "On the structure at infinity of linear square decouplable systems". *IEEE Trans. Automat. Control*, 27, pp. 971–974, 1982.
- Descusse, J., J.F. Lafay et M. Malabre. "Solution to morgan's problem". *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 33, pp. 732–739, 1988.
- Deusen, B.D. Van. "Human response to vehicle vibration". *Society of Automotive Engineers*, 77, 1968. paper 680090.
- Dion, J.M. et C. Commault. "Feedback decoupling of structured systems". *IEEE Trans. Automat. Control*, 38, pp. 1132–1135, 1993.
- Dion, J.M., C. Commault et J. Montoya. "Simultaneous decoupling and disturbances rejection - a structural approach". *INT.J.CONTROL*, 59(5), pp. 1325–1344, 1994.
- Donati, P. et P. Boulanger. "Proposition pour l'établissement d'un code d'essai en vibration des sièges suspendus destinés aux tracteurs routiers". *Journal de l'Ingénieur de l'automobile*, pp. 137–139, Octobre 1988. SIA 88090.
- Dorling, R.J. *Integrated Control of Road Vehicle Dynamics*. Thèse de doctorat, Cambridge University Engineering Department, 1996.
- Doyle, J.C., K. Glover, P.P. Khargonekar et B.A. Francis. "State-space solutions to standard  $h_2$  and  $h_\infty$  control problems". *IEEE Trans. Autom. Control*, 34(8), pp. 831–847, 1989.
- Duc, G. et S. Font. *Commande Hinf et mu-Analyse : des Outils pour la Robustesse*. Editions Hermès, 1998.
- Elbeheiry, E.M., D.C. Karnopp, M.E. Elaraby et A.M. Abdelraaouf. "Suboptimal control design of active and passive suspensions based on a full car model". *Vehicle Systems Dynamics*, 26, pp. 197–222, 1996.
- Emura, J., S. Kakizaki, F. Yamaoka et M. Nakamura. "Development of the semi-active suspension system based on the sky-hook damper theory". *Society of Automotive Engineers*, pp. 17–26, 1994. paper 940863.
- Esmailzadeh, E. et F. Fahimi. "Optimal adaptive active suspensions for a full car model". *Vehicle Systems Dynamics*, 27, pp. 89–107, 1997.
- Falb, P.L. et W.A. Wolovich. "Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems". *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 12, pp. 651–659, 1967.
- Fialho, I. et G. Balas. "Adaptive vehicle suspension design using lpv methods". *37th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 469–474, December 1998. Tampa, Floride USA.
- Fialho, I.J. et G.J. Balas. "Design of nonlinear controllers for active vehicle suspensions using parameter-varying control synthesis". *Vehicle Systems Dynamics*, 33, pp. 351–370, 2000.
- Gahinet, P. et P. Apkarian. "A linear matrix inequality approach to  $h_\infty$  control". *Int. J. of Robust and Nonlinear Contr.*, 4, pp. 421–448, 1994.

- Gay, F. *Lois de commande en vue du contrôle global de châssis d'un véhicule : le CGC*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, IRCCyN, Septembre 2000.
- Gillespie, T. D. *Fundamentals of vehicle dynamics*. Society of Automotive Engineers, Warrendale, USA, 1992.
- Gissingner, G.L. "Vehicle dynamics ". *Proc. of Symposium on Euroconform Complex Retraining of Specialists in Road Transport*, pp. 23–35, 9-15 June 2001.
- Giua, A., C. Seatzu et G. Usai. "Semiactive suspension design with an optimal gain switching target ". *Vehicle Systems Dynamics*, 31, pp. 213–232, 1999.
- Glover, K. et J.C. Doyle. "State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $h_\infty$ -norm bound and relations to risk sensitivity ". *Systems and Control Letters*, 11, pp. 167–172, 1988.
- Gobbi, M., G. Mastinu et C. Doniselli. "Optimising a car chassis ". *Vehicle System Dynamics*, 32, pp. 149–170, 1999.
- Hac, A. "Decentralized control of active vehicle suspension with preview ". *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 117, pp. 478–483, December 1995.
- Hrovat, D. "Survey of advanced suspension developments and related optimal control applications ". *Automatica*, 33(10), pp. 1781–1817, 1997.
- Icart, S. *Row by row decoupling problem with stability : the linear case. in French*. Thèse de doctorat, ENSM de Nantes, July 1990.
- Iglesias, P.A. et K. Glover. "State-space approach to discret-time  $h_\infty$  control ". *Int. J. Control*, 54, pp. 1031–1073, 1991.
- ISO2631-1978(E). *Guide for Evaluation of Human Exposure to Whole-Body Vibration*. International Organization for Standardization, 2nd ed. edition, 1978.
- Iwasaki, T. et R.E. Skelton. "All controllers for the general  $h_\infty$  control problem : Lmi existence conditions and state-space formulas ". *Automatica*, 30(8), pp. 1307–1317, 1994.
- Janeway. "Ride and vibration data manual ". *Society of Automotive Engineers*, 1965.
- Karnopp, D.C., M.J. Crosby et R.A. Harwood. "Vibration control using semi-active force generators ". *ASME Journal of Engineering for Industry*, 96(2), pp. 619–626, 1974.
- Kiencke, U. et L. Nielsen. *Automotive Control Systems*. Springer, Berlin, 2000.
- Kitching, K.J., D. Cebon et D.J. Cole. "An experimental investigation of preview control ". *Vehicle System Dynamics*, 32, pp. 459–478, 1999.
- Krtolica, R. et D. Hrovat. "Optimal active suspension control based on a half-car model : An analytical solution ". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(4), pp. 528–532, April 1992. Trieste, Italy.
- Lee, R.A. et F. Pradko. "Analytical analysis of human vibration ". *Society of Automotive Engineers*, 77, 1968. paper 680091.
- Liberzon, A., P.O. Gutman et D. Rubenstein. "Active control for single-wheel suspension of off-road track vehicle ". *IFAC Workshop on Motion Control*, pp. 105–110, September, 21-23 1998. Grenoble, France.
- Limebeer, D.J.N., M. Green et D. Walker. "Discret time  $h_\infty$  control ". *28th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 392–396, 1989.

- Lueders, C., D. Sannier, O. Sename et L. Dugard. "Analysis of the tire models integration effects on a half car model". *14th IAR annual meeting*, November 18-19 1999. Strasbourg, France.
- Lévine, J. *Advances in Control, Highlights of ECC'99*, chapter 7, pp. 197–226. Springer, 1999.
- Malabre, M. et B. del Muro Cuellar. "Disturbance rejection by measurement feedback : a structural approach". *Mathematical Theory of Networks and Systems MTNS'96*, 1996. St Louis, USA.
- Malabre, M. et J.C. Martinez-Garcia. "Fixed poles of disturbance rejection and decoupling". *Proc. 3rd Europe Cont. Conf. ECC'95*, 1995. Rome, Italy.
- Marquardt, D.W. "An algorithm for leastsquares estimation of non-linear parameters.". *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11, pp. 431–441, 1963.
- Milliken, W.F. et D.L. Milliken. *Race car vehicle dynamics*. SAE, 1995.
- Moline, D., S. Floyd, S. Vaduri et E.H. Law. "Simulation and evaluation of semi-active suspensions". *Society of Automotive Engineers*, pp. 27–37, 1994. paper 940864.
- Moreau, X. *La dérivation non entière en isolation vibratoire et son application dans le domaine de l'automobile. La suspension Crone : du concept à la réalisation*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, Février 1995.
- Moreau, X., A. Oustalou et M. Nouillant. "Skyhook and crone suspensions : a comparison". *Proceedings of IFAC Workshop ICV'99*, March 23-24 1998. Seville, Spain.
- Moreau, X., A. Oustalou et M. Nouillant. "From analysis to synthesis of vehicle suspensions : the crone approach". *Proceedings of ECC'99*, 31 August-3 September 1999. Karlsruhe, Germany.
- Motorlegend. "La tenue de route". <http://www.motorlegend.com/new/technique/troute/>, 2001.
- Murphy, N.R., Jr. et R.B. Ahlvin. "Ride dynamics module for amm-75 ground mobility model". in *Proc. 5th Int. Conf. of the International Society for Terrain-Vehicle Systems*, IV, 1975. Detroit, MI.
- Oya, M., Y. Araki et H. Harada. "A new state space description to control active suspension of ground vehicles". *Vehicle Systems Dynamics*, 27, pp. 517–530, 1997.
- Pacejka, H.B. et E. Bakker. "The magic formula tyre model". *Vehicle Systems Dynamics*, 21, pp. 1–18, 1993.
- Pacejka, H.B. et I.J.M. Besselink. "Magic formula tyre model with transient properties". *Vehicle System Dynamics Supplement*, 27, pp. 234–249, 1997.
- Pacejka, H.B. et R.S. Sharp. "Shear force development by pneumatic tyres in steady state conditions : A review of modelling aspects". *Vehicle System Dynamics*, 20, pp. 121–176, 1991.
- Park, J.H. et Y.S. Kim. "Decentralized variable structure control for active suspensions based on a full-car model". *IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 383–387, 1-4 September 1998. Trieste, Italy.
- Park, J.H. et Y.S. Kim. "An  $h_\infty$  controller for active suspensions and its robustness based on a full-car model". *14th World Congress of IFAC*, pp. 503–508, 1999. Beijing, P.R. China.

- Prattichizzo, D., P. Mercorelli, A. Bicchi et A. Vicino. "Geometric disturbance decoupling control of vehicles with active suspensions". *Proceedings of the 1998 IEEE, Int. Conf. on Control Application*, pp. 253–257, 1-4 September 1998. Trieste, Italy.
- Ramirez-Mendoza, R.A. *Sur la modélisation et la commande des véhicules automobiles*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, Juillet 1997.
- Ramirez-Mendoza, R.A., M. Nawarecki, O. Sename, L. Dugard et M.M'Saad. "An optimal control approach for the design of an active suspension system". *IFAC Workshop Advances in Automotive Control*, 1998. Mohican, USA.
- Richard, S., P. Chevrel et B. Maillard. "Active control of future vehicles drivelines". *CDC38*, pp. 3752–3757, 1999. Phoenix, Arizona USA.
- Sammier, D., O. Sename et L. Dugard. "Commande  $h_\infty$  d'une suspension active de véhicule". *Journées Automatique et Automobile, GDR Automatique, Club EEA, MENRT*, 20-21 Octobre 1999. Bordeaux, France.
- Sammier, D., O. Sename et L. Dugard. " $h_\infty$  control of active vehicle suspensions". *IEEE CCA 2000*, September 25-27 2000a. Anchorage, Alaska.
- Sammier, D., O. Sename et L. Dugard. "Simultaneous decoupling and disturbance rejection on an active full-car suspensions model". *1st IFAC Conference on Mechatronic Systems*, September 18-20 2000b. Darmstadt, Germany.
- Sammier, D., O. Sename et L. Dugard. "Étude d'une suspension pilotée". Rapport technique, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, Mai 2000c. Rapport intermédiaire.
- Sammier, D., O. Sename et L. Dugard. "Comparison of skyhook and  $h_\infty$  control applied on a quarter-car suspension model". *IFAC Workshop on Advances in Automotive Control*, March 2001a. Karlsruhe, Germany.
- Sammier, D., O. Sename et L. Dugard. "Skyhook and  $h_\infty$  control for semi-active suspensions : Some practical aspects". *soumis au Journal VSD, en révision*, Février 2001b.
- Sammier, D., O. Sename, L. Dugard et V. Abadie. "Étude d'une suspension pilotée". Rapport technique, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, Octobre 2000d. Rapport final.
- Skogestad, S. et I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control*. John Wiley and Sons, 1996.
- Sohn, H.C., K.S. Hong et J.K. Hedrick. "Semi-active control of the macpherson suspension system : Hardware-in-the-loop simulations". *IEEE CCA 2000*, pp. 982–987, September 25-27 2000. Anchorage, Alaska.
- Stoorvogel, A.A. "The discret time  $h_\infty$  control problem with measurement feedback". *SIAM. J. Control and Optimization*, 30, pp. 182–202, 1992.
- Thompson, A.G. et P.M. Chaplin. "Force control in electrohydraulic active suspensions". *Vehicle System Dynamics*, 25, pp. 185–202, 1996.
- Titli, A. et S. Boverie. "Fuzzy and neuro control for semi-active and active suspension". *WAC 95*, pp. 46–50, 1995.
- Valentin-Charbonnel, C. *Commande robuste avec contrainte d'ordre, par la norme  $H_\infty$  et le formalisme LMI. Application au contrôle d'attitude d'un satellite d'observation de la terre*. Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, École supérieure d'électricité, Octobre 1998.

- van der Woude, J.W. “Disturbance decoupling by measurement feedback for structured systems : a graph theoretic approach ”. *Proc. 2nd Europ. Cont. Conf. ECC'93*, pp. 1132–1137, 1993. Groningen, Holland.
- Verriest, J.P. “Le confort postural du conducteur : étude expérimentale et modélisation ”. *Journal de l'Ingénieur de l'automobile*, pp. 122–128, Octobre 1988. SIA 88088.
- Watanabe, Y. et R.S. Sharp. “Mechanical and control design of a variable geometry active suspension system ”. *Vehicle System Dynamics*, 32, pp. 217–235, 1999.
- Wong, J.Y. *Theory of Ground Vehicles*. John Wiley and Sons, New York, second edition edition, 1993.
- Wonham, W.M. *Linear multivariable control : a geometric approach*. Springer-Verlag, New-York, (3rd ed., 1985), 1974.
- Yamashita, M., K. Fujimori, K. Hayakawa et H. Kimura. “Application of  $h_\infty$  control to active suspension systems ”. *Automatica*, 30(11), pp. 1717–1729, 1994.
- Yamashita, M., K. Fujimori, C. Uhlik, R. Kawatani et H. Kimura. “ $h_\infty$  control of an automotive active suspension ”. *Proc. of the 29th Conf. on Decision and Control*, pp. 2244–2250, December 1990.
- Yu, F. et D.A. Crolla. “An optimal self-tuning controller for an active suspension ”. *Vehicle System Dynamics*, 29, pp. 51–65, 1998.
- Yue, C., T. Butsuen et J.K. Hedrick. “Alternative control laws for automotive active suspensions ”. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 111, pp. 286–291, June 1989.
- Zhou, K. *Essentials of robust control*. Prentice Hall, New Jersey, 1998.
- Zhou, K., J. Doyle et K. Glover. *Robust Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.