HAL open science

Supercordes en espace-temps courbe et theories conformes

Dan Israel

To cite this version:

Dan Israel. Supercordes en espace-temps courbe et theories conformes. Physique mathématique [math-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004. Français. NNT : . tel-00007152

HAL Id: tel-00007152

https://theses.hal.science/tel-00007152

Submitted on 19 Oct 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LABORATOIRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE - ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Spécialité : **PHYSIQUE THÉORIQUE**

Présentée par

Dan Israël

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris VI

Sujet :

Supercordes en espace-temps courbe et théories conformes.

Soutenue le 20 septembre 2004 devant le jury composé de :

MM.	Luis Álvarez-Gaumé,	rapporteur,
	Édouard Brézin,	président du jury,
	Elias Kiritsis,	
	Costas Kounnas,	directeur de thèse,
	Eliezer Rabinovici,	rapporteur,
	Volker Schomerus,	
&	Arkady Tseytlin.	

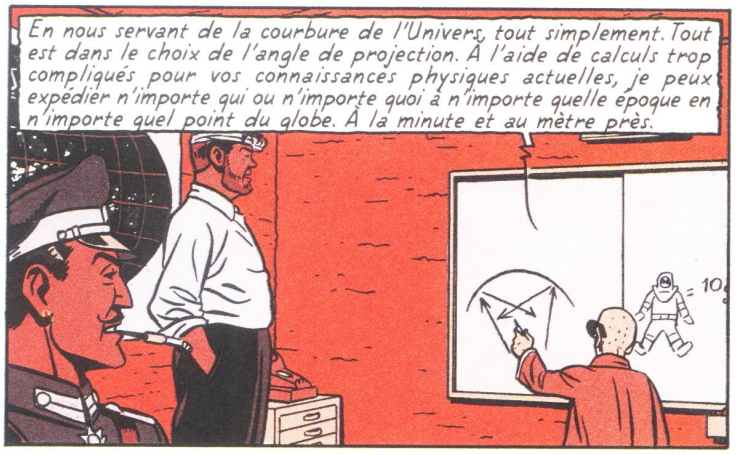
En nous servant de la courbure de l'Univers, tout simplement. Tout est dans le choix de l'angle de projection. À l'aide de calculs trop compliqués pour vos connaissances physiques actuelles, je peux expédier n'importe qui ou n'importe quoi à n'importe quelle époque en n'importe quel point du globe. À la minute et au mètre près.

Table des matières

Préambule vii

Chapitre I. Supergravité et cordes fondamentales 1
I.1. Supergravités 1
I.2. Solutions BPS des théories de supergravité 7
I.3. Quantification de la corde fondamentale 13
I.4. Supercordes dans Minkowski 25
I.5. Dualités 29

Chapitre II. Théorie des cordes en espace-temps courbe 33
II.1. Quelques notions de théorie (super)conforme 33
II.2. Variétés de groupe et algèbres affines 40
II.3. Théories de quotient 48
II.4. Déformations marginales 56

Chapitre III. La théorie des supercordes dans AdS_3 65
III.1. L'espace-temps anti-de Sitter 65
III.2. Quantification des cordes dans AdS_3 69
III.3. La théorie de quotient SL(2,$\mathbb{R}$) /U(1) 73
III.4. La fonction de partition de SL(2,$\mathbb{R}$) 76

Publication n°1 : «Superstrings on NS5 backgrounds, deformed AdS_3 and holography». 81

Publication n°2 : «Extended SL(2,R)/U(1) characters, or modular properties of a simple non-rational conformal field theory». 143

Chapitre IV. Régularisation de la théorie des petites cordes 171
IV.1. Préambule : la théorie du dilaton linéaire 171
IV.2. NS5-branes et holographie 173
IV.3. Déformation nulle de AdS_3 et théorie des petites cordes 175
IV.4. Double limite d'échelle 177
IV.5. D-branes dans la théorie des petites cordes 183

Publication n°3 : «The partition function of the supersymmetric two-dimensional black hole and little string theory». 187

Publication n°4 : «D-branes in N=2 Liouville and its mirror». 225

Chapitre V. Champs électromagnétiques en théorie des cordes 275
V.1. L'univers de Gödel 275
V.2. Quotients géométriques 279

Publication n°5 : «Quantization of heterotic strings in a Gödel/Anti de Sitter spacetime and chronology protection». 283

Publication n°6 : «Electric/magnetic deformations of S^3 and AdS_3, and geometric cosets». 309

Conclusions et perspectives 351

References 353

Préambule

Le travail de thèse exposé dans le présent mémoire porte sur l'étude de solutions de la théorie des supercordes dans des espaces-temps courbes. Les motivations de cette recherche sont premièrement de mieux comprendre la gravitation dans les espaces-temps fortement courbés en incorporant les phénomènes quantiques. Deuxièmement, nous souhaitons explorer le phénomène d'*holographie* de la gravitation en comprenant la dynamique de certains espaces-temps, liés à des géométries d'objets étendus. Ces deux descriptions sont extrêmement liées entre elles et complémentaires.

La théorie des supercordes. L'unification de la théorie de la gravitation – la relativité générale d'Einstein – et des théories de jauge décrivant les autres interactions fondamentales, est un problème récurrent de la physique théorique depuis près d'un siècle. En effet l'incorporation de la gravitation à la théorie quantique des champs se heurte à des problèmes techniques et conceptuels apparemment insurmontables, dus aux infinis non-renormalisables de la théorie ainsi obtenue.

La théorie des supercordes est la seule théorie connue de gravitation quantique ; de plus elle contient naturellement toutes les autres interactions fondamentales d'une manière unifiée. Le postulat principal de cette théorie est de remplacer les particules fondamentales ponctuelles par des objets étendus dans une dimension spatiale, appelés *cordes fondamentales* (fig. 1). L'échelle caractéristique de ces objets est naturellement choisie assez petite pour ne pas être observable aux échelles d'énergie habituelles. Les divergences sévères qui rendent la gravitation non renormalisable sont de cette manière supprimées ; la théorie des cordes fournit une description cohérente mais *perturbative* de la gravitation quantique. Les différentes particules de la théorie des champs correspondent à haute énergie à différents modes de vibration de la corde fondamentale. Les fermions sont introduits dans la théorie en rajoutant des partenaires fermioniques aux coordonnées de la corde ; on obtient ainsi les diverses théories de supercordes fermées (type IIA, IIB, hétérotique). Une autre extension possible de la théorie des supercordes est l'introduction de *cordes ouvertes* (fig. 2) qui possèdent deux extrémités, libres ou fixées – exprimées en termes de D-branes en langage moderne – et permettent d'obtenir la théorie de supercordes dite de type I.

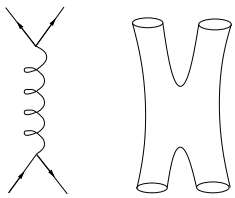

FIG. 1. Comparaison entre un diagramme de Feynman représentant l'interaction de particules ponctuelles (gauche) et diagramme correspondant en théorie des cordes (droite).

La principale limite de cette théorie est sa formulation en première quantification, intrinsèquement perturbative. Les seules quantités accessibles sont les éléments de la matrice de diffusion

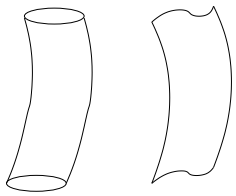

FIG. 2. Corde fermée (gauche) et corde ouverte (droite).

pour des états asymptotiques dans une vide particulier de la théorie. Pour une théorie de la gravitation quantique, cela veut dire que les amplitudes sont calculées autour d'un espace-temps donné, et que la géométrie ne résulte pas de la dynamique des degrés de liberté fondamentaux de la théorie. En outre, seul le régime perturbatif – où la constante de couplage des cordes est suffisamment faible – est a priori accessible. Cette dernière limitation a été en partie surmontée par l'introduction des dualités couplage fort/couplage faible (dites de type S), qui relient le régime perturbatif d'une théorie des supercordes avec le régime non-perturbatif de la même ou d'une autre théorie. Les différentes théories des cordes apparaissent alors comme différentes limites de l'espace des modules d'une théorie inconnue – appelée théorie $\mathscr{M}$ – pour lesquelles les amplitudes admettent un développement perturbatif (fig 3). Malgré ces limitations, nous pouvons espérer, à l'aide de

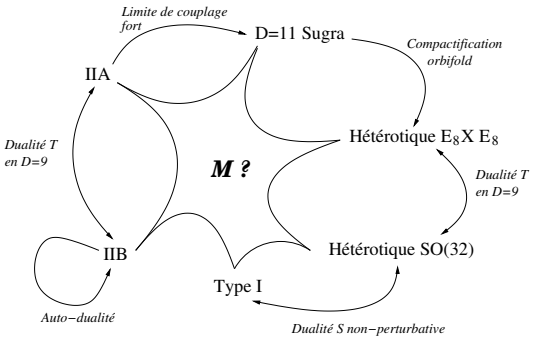

FIG. 3. Dualités entre théories de supercordes.

cette théorie, en apprendre d'avantage sur des problèmes physiques du domaine de la gravitation quantique, comme les trous noirs et les singularités cosmologiques, pourvu que le développement perturbatif soit valable. Cependant, peu d'espaces-temps courbes correspondent à des solutions connues de la théorie des cordes. Parmi ceux-ci, les variétés de groupe occupent une place particulière, grâce à leur grand nombre de symétries. Ces théories peuvent être jaugées et déformées pour générer de nouvelles solutions. Ces techniques seront utilisées de manière importante dans le présent travail.

Une autre voie de recherche – apparemment indépendante à l'origine – a consisté à reproduire la physique du modèle standard (interaction électrofaible, interaction forte) ou de ses extensions (théories de grande unification, modèle standard supersymétrique) à l'aide de théories de supercordes. Ces dernières étant définies obligatoirement en dix dimensions d'espace-temps, il est nécessaire de *compactifier* six dimensions sur un espace assez petit pour que la physique observable aux énergies accessibles à l'expérience soit de manière effective quadridimensionnelle. Les divers choix d'espaces compacts conduisent à des théories effectives de contenus en champs, de symétries de jauge et de supersymétries différents.

Ces deux directions de recherche se sont rapprochées de manière très fructueuse depuis une dizaine d'années avec la découverte des D-branes ; ces derniers objets peuvent être décrits soit comme des objets étendus dans la théorie effective de basse énergie préservant une fraction de la supersymétrie, soit comme les états de bord correspondant aux extrémités fixes des cordes ouvertes (fig 4). Cette découverte a permis plusieurs avancées spectaculaires, par exemple :

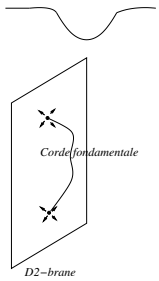

FIG. 4. Corde fondamentale attachée à une D2-brane ; simultanément, la masse et la charge de la D2-brane courbent l'espace-temps.

- la description microscopique des degrés de libertés de certains trous noirs obtenus comme états liés de D-branes ;
- la formulation des dualités non-perturbatives mentionnées ci-dessus ;
- de nouvelles possibilités pour reproduire le modèle standard.

Ces deux descriptions des mêmes objets physiques : *(i)* en termes de théorie de jauge effective des degrés de liberté des cordes ouvertes attachées aux D-branes et *(ii)* en termes d'objets étendus des théories de supergravité effectives associées aux théories de supercordes, sont complémentaires pour aborder des problèmes comme celui de l'entropie des trous noirs.

De manière très spectaculaire, il a été montré que, dans certains cas, il existe une limite particulière dans l'espace des modules, dite *limite de découplage* – car les degrés de libertés associés aux branes découplent de la gravitation – dans laquelle ces deux descriptions deviennent *équivalentes* au niveau de la théorie quantique complète. L'exemple le plus célèbre est la dualité entre la théorie des supercordes dans l'espace-temps $AdS_5 \times S^5$ et une théorie de jauge superconforme de supersymétrie maximale en quatre dimensions. Cette conjecture, qui fournit un exemple concret de description holographique de la gravitation quantique, a surtout été utilisée pour accéder au régime non-perturbatif des théories de jauge, avec l'espoir de décrire le confinement des quarks à basse énergie. Un obstacle à la réussite de ce programme vient du manque de solutions exactes de la théorie de supercordes, en particulier lorsque des champs dits de «Ramond–Ramond» deviennent non-triviaux, ce qui est le cas pour les D-branes. Les seules dualités holographiques qui peuvent être traitées au niveau de la théorie des cordes complète – mis à part la limite de Penrose de solutions de D-branes – correspondent à des configurations de cordes fondamentales microscopiques (F1) et de leurs duales magnétiques, les NS5-branes. Nous essayerons donc dans ce travail de construire de nouveaux espaces-temps de ce type, mais aussi d'utiliser ces nouvelles idées d'holographie pour avoir un point de vue complémentaire sur ces solutions exactes des théories de supercordes.

Plan de cette thèse. Dans la première partie de cette thèse nous présenterons les théories de supercordes en partant des théories effectives de supergravité et de leurs différentes solutions BPS. Cette approche permet d'introduire les branes de manière naturelle. La deuxième partie sera consacrée à l'approche de théorie conforme de la théorie des cordes, en particulier à la description des théories fondées sur les algèbres affines. Nous nous concentrerons ensuite dans la troisième partie

sur l'exemple particulier de l'espace-temps anti de Sitter à trois dimensions. Le quatrième chapitre traitera d'un cas particulier de dualité holographique, la théorie des petites cordes, et de la construction de solutions exactes en décrivant certains régimes perturbatifs. Enfin, le cinquième et dernier chapitre portera sur l'étude des champs électromagnétiques en théorie des cordes, et en particulier à l'étude de la physique de l'univers de Gödel. Les principaux résultats de cette thèse seront rappelés dans la conclusion.

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire a donné lieu à plusieurs publications :

(i) D. Israël, C. Kounnas and M. P. Petropoulos, "Superstrings on NS5 backgrounds, deformed AdS(3) and holography," JHEP **0310** (2003) 028 [arXiv : hep-th/0306053].

(ii) D. Israël, "Quantization of heterotic strings in a Goedel/anti de Sitter spacetime and chronology protection," JHEP **0401** (2004) 042 [arXiv : hep-th/0310158].

(iii) D. Israël, A. Pakman and J. Troost, "Extended SL(2,R)/U(1) characters, or modular properties of a simple non-rational conformal field theory," JHEP **0404**, 043 (2004) [arXiv : hep-th/0402085].

(iv) D. Israël, C. Kounnas, A. Pakman and J. Troost, "The partition function of the supersymmetric two-dimensional black hole and little string theory," JHEP **0406**, 033 (2004) [arXiv : hep-th/0403237].

(v) D. Israël, C. Kounnas, D. Orlando, P.M. Petropoulos, "Electric/Magnetic Deformations of S^3 and AdS_3, and Geometric Cosets," arXiv : hep-th/0405213.

(vi) D. Israël, A. Pakman and J. Troost, "D-branes in N=2 Liouville and its mirror," arXiv : hep-th/0405259.

Remerciements. Je voudrais premièrement remercier Jean Iliopoulos et Eugène Cremmer pour m'avoir donné la chance de faire ma thèse dans leur laboratoire.

Mon directeur de thèse, Costas Kounnas, m'a encadré avec un grand enthousiasme qui n'a jamais failli, même lorsqu'il devait supporter mes questionnements incessants, et je l'en remercie chaleureusement. J'ai beaucoup profité de sa grande expérience en théorie des cordes.

Durant cette thèse j'ai eu également le plaisir de collaborer avec Marios Petropoulos puis Jan Troost, Ari Pakman et Domenico Orlando. Je tiens à les remercier pour l'enrichissement que m'ont apporté ces projets communs. Pendant ces trois années, j'ai pu bénéficier de discussions fréquentes et éclairantes avec Costas Bachas, Elias Kiritsis et Boris Pioline, qui ont toujours suivi mon travail avec intérêt, et je les en remercie vivement.

Je suis également très reconnaissant à Luis Álvarez-Gaumé, Édouard Brézin, Elias Kiritsis, Eliezer Rabinovici, Volker Schomerus et Arkady Tseytlin pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse. J'ai eu la chance, lors du DEA, de connaître aussi Édouard Brézin comme professeur de théorie des champs, et je le remercie ainsi que Jean Iliopoulos, Christophe Schweigert, Samuel Wallon, Bernard Derrida, Paul Windey, Pierre Binetruy, Vladimir Dotsenko et Bernard Linet de m'avoir fait découvrir les beautés de la physique théorique. Lors de cette même année j'ai pu goûter aux charmes de l'astrophysique à hautes énergies, grâce au stage effectué dans l'équipe de Jacques Paul.

C'est peu dire que ce laboratoire ne serait pas le même sans les attentions permanentes de Nicole Ribet, et aussi de Michèle Leliepvre et Marcelle Martin, et je les remercie vivement.

Malgré les hauts et les bas des travaux de recherche, cette thèse s'est déroulée dans une ambiance conviviale, grâce aux autres thésards du laboratoire et d'ailleurs, Sergei, Pierre, Louis, Steffen, Cristina, Pedro, Nicolas, Yacine, Sylvain et Jérôme que je remercie. Je suis reconnaissant aussi à mes amis non physiciens de m'avoir permis de rester en contact avec le reste du monde. Pendant cette thèse, j'ai pu m'ouvrir l'esprit et les oreilles à des cordes d'un autre type, et je remercie Fadhel Messaoudi pour le plaisir que m'ont apporté ses cours.

Ma famille, en particulier mes parents et ma sœur Liora ont été d'un soutien constant, je les remercie pour leurs encouragements et leurs conseils, pendant cette thèse mais aussi bien sûr durant toutes les années qui ont précédé. J'ai une pensée particulière pour mon grand-père Jean Israël, qui ne fut pas pour rien dans mon orientation vers la physique.

Enfin et surtout, je remercie infiniment Amaelle...

I

Supergravité et cordes fondamentales

Dans ce chapitre nous allons introduire les théories de *supergravité* en dimension dix et onze. Ces théories apparaissent comme théories effectives de basse énergie des théories de supercordes que nous allons construire par la suite. Elles possèdent un spectre très riche d'objets étendus – stables en raison de la supersymétrie qu'ils préservent – chargés sous les différentes formes différentielles contenues dans les multiplets de supergravité. L'un d'entre eux, étendu dans une dimension spatiale, sera ensuite considéré comme la *corde fondamentale* de la théorie, c'est à dire comme un constituant élémentaire de la théorie, dont il sera possible de définir une théorie quantique.

I.1. Supergravités

Les supergravités sont des théories des champs incorporant naturellement la gravitation, la supersymétrie – locale – et dans certains cas les interactions de jauge. Nous commencerons par certains rappels élementaires avant de les construire.

Rappels de relativité générale et de théorie de champs. Commençons par une présentation succincte de la relativité générale (voir par exemple [1]). Considérons l'espace-temps comme une variété $\mathscr{M}$ de signature $(-,+,\cdots,+)$, munie d'une métrique lorentzienne g. Localement, cet espace-temps peut se décrire par son espace tangent, l'espace-temps plat de Minkowski $\mathbb{R}^{1,d}$. Les vecteurs tangents en chaque point définissent un espace vectoriel de dimension $d+1$, qu'il est possible de munir d'une base orthonormale, appelée *repère mobile*. Il existe une liberté dans le choix de cette base, correspondant au groupe d'isométrie de l'espace-temps plat, c.-à.-d. le groupe de Lorentz $SO(1,d)$. Il est possible de faire un choix différent de repère mobile en chaque point, du moment que pour deux points infiniment proches, le repère mobile varie continuement. En d'autres termes, nous avons rendu la symétrie de Lorentz locale. Considérons donc un système de coordonnées x^μ sur $\mathscr{M}$. Les vecteurs de base de l'espace tangent dans la base orthonormale que nous avons choisie sont donnés par :

$$\mathbf{e}_a = e_a^{\ \mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

où $e_a^{\ \mu}$ est une matrice de $GL(d+1,\mathbb{R})$ définissant le changement de base, défini de telle sorte que la nouvelle base soit orthonormale : $g(\mathbf{e}_a,\mathbf{e}_b) = \eta_{ab}$, où η_{ab} est la métrique de l'espace-temps de Minkowski. Nous introduisons aussi une base duale de une-formes ϑ^a, telle que $\vartheta^a = e^a_{\ \mu} dx^\mu$. La métrique sur $\mathscr{M}$ peut s'écrire dans les deux bases précédemment définies :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu = \eta_{ab}\, \vartheta^a \otimes \vartheta^b.$$

Les vecteurs de l'espace tangent peuvent se développer indifféremment sur l'une ou l'autre des bases : $V = V^\mu\,(\partial/\partial x^\mu) = V^a \mathbf{e}_a$. Nous devons maintenant définir une opération de dérivation ∇ sur les vecteurs de l'espace tangent, qui permettra de transporter des vecteurs tangents en un autre point de la variété, en tenant compte du changement de base d'un point à un autre. Cette opération

s'appelle le *transport parallèle*. Dans le repère mobile que nous avons défini plus haut, son action sur un vecteur est donnée par :

$$\nabla_a V = \nabla_a V^b \mathbf{e}_b = \left(\mathbf{e}_b \partial_a + \nabla_a \mathbf{e}_b\right) V^b \equiv \left(\partial_a + \Gamma^c_{ab}\mathbf{e}_c\right) V^b.$$

Nous avons introduit la connexion Γ qui définit la façon dont les vecteurs sont transportés. Ils permettent de définir la une-forme de connexion : $\omega^a_{\ b} = \Gamma^a_{cb}\vartheta^c$, qui satisfait les équations de structure de Cartan :

$$\text{(I.1)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}\vartheta^a + \omega^a_{\ b} \wedge \vartheta^c &= \mathscr{T}^a, \\ \mathrm{d}\omega^a_{\ b} + \omega^a_{\ c} \wedge \omega^c_{\ b} &= \mathscr{R}^a_{\ b}. \end{aligned}$$

Les équations précédentes définissent les deux-formes[a] de *torsion* $\mathscr{T}^a \equiv \frac{1}{2}\mathscr{T}^a_{\ bc}\vartheta^b \wedge \vartheta^c$ et de *courbure* $\mathscr{R}^a_{\ b} \equiv \frac{1}{2}\mathscr{R}^a_{\ bcd}\vartheta^c \wedge \vartheta^d$. Nous devons maintenant faire un choix particulier de connexion sur notre variété. Nous demandons que le transport parallèle préserve le produit scalaire entre deux vecteurs – en d'autres termes que la dérivée covariante de la métrique soit nulle – et que la torsion s'annule en chaque point. Ces conditions déterminent uniquement la *connexion Levi-Civita* en fonction de la métrique.

Considérons maintenant une théorie physique vivant dans l'espace-temps courbe précédemment défini, caractérisé par sa métrique. L'action des champs de cette théorie $S_m(g)$ doit être invariante par rapport aux changements de coordonnées, et dépend explicitement de la métrique g. L'idée maîtresse de la relativité générale est de considérer que la géométrie de l'espace-temps elle-même possède une dynamique propre, et correspond au champ de gravitation. Nous considérons donc le repère mobile $\mathbf{e}_a$ comme un champ à part entière de la théorie. L'action à deux dérivées la plus générale pour ce champ, invariante par reparamétrage (c.-à.-d. par changements de coordonnées) est donnée par l'*action de Einstein-Hilbert* :

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_{d+1}} \int_{\mathscr{M}} *\left(\mathscr{R} + \Lambda\right),$$

où nous avons introduit la courbure scalaire : $\mathscr{R} = \mathscr{R}_{bd}\eta^{bd} = \mathscr{R}^a_{\ bad}\eta^{bd}$ et la constante cosmologique Λ. Les équations du mouvement déduites de cette action sont les équations d'Einstein :

$$\mathscr{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\left(\mathscr{R} + \Lambda\right) = \frac{16\pi G_{d+1}}{\sqrt{-\det g}} \frac{\delta S_m(g)}{\delta g^{\mu\nu}} \equiv 8\pi G_{d+1} T_{\mu\nu}.$$

La dernière égalité définit le tenseur d'énergie-impulsion de la matière. La solution des équations d'Einstein du vide à $d+1$ dimensions, stationnaire, à symétrie sphérique est la *métrique de Schwarzschild* :

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{16\pi G_{d+1} M}{(d-1)\Omega_{d-1} r^{d-2}}\right) \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t + \left(1 - \frac{16\pi G_{d+1} M}{(d-1)\Omega_{d-1} r^{d-2}}\right)^{-1} \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r + r^2 \mathrm{d}\Omega^2_{d-1},$$

où $\mathrm{d}\Omega^2_{d-1}$ est une métrique sur la $(d-1)$-sphère unité. Cette métrique représente la solution extérieure pour le champ de gravitation d'un corps de masse M à symétrie sphérique. Lorsque le rayon de ce corps est inférieur au *rayon de Schwarzschild* $r_s = \left(16\pi G_{d+1} M/(d-1)\Omega_{d-1}\right)^{1/(d-2)}$, celui-ci est un trou noir. L'espace-temps contient alors une hypersurface nulle à $r = r_s$, appelée *horizon*, à l'intérieur de laquelle la lumière ne peut s'échapper à l'infini. Cette solution n'est pas stable au

[a] Nous définissions les p-formes différentielles comme des p-tenseurs complètement antisymétriques de la base duale, de composantes $\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}$ munis d'un produit extérieur antisymétrisé $\wedge$ défini par : $\left(\omega_{[p]} \wedge \rho_{[q]}\right)_{\mu_1\cdots\mu_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!}\omega_{[\mu_1\cdots\mu_p}\rho_{\mu_{p+1}\cdots\mu_{p+q}]}$ et d'une dérivée extérieure : $(\mathrm{d}\omega_{[p]})_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} = (p+1)\partial_{[\mu_1}\omega_{\mu_2\cdots\mu_p]}$. Nous définissons aussi le dual de Hodge d'une p-forme par : $(*\omega)_{\mu_1\cdots\mu_{d+1-p}} = \frac{1}{p!}\sqrt{-\det g}\, e_{\mu_1\cdots\mu_d} g^{\mu_{d-p+1}\nu_1}\cdots g^{\mu_d\nu_p}\omega_{\nu_1\cdots\nu_p}$.

point de vue quantique, à cause du *rayonnement de Hawking*. Ce rayonnement est similaire à celui d'un corps noir à la température

$$T_H = \frac{\mathscr{A}}{4\hbar G_{d+1}}, \tag{I.2}$$

proportionnelle à l'aire $\mathscr{A}$ de l'horizon du trou noir. Remarquons également que si nous étendons la solution de Schwarzschild à tout l'espace-temps, il faut ajouter une source ponctuelle en $r = 0$ à cause de la singularité de la courbure en ce point.

Théories de jauge. Les théories de jauge – appelées aussi théories de Yang-Mills – sont une généralisation de cette construction à un groupe de symétrie interne. Considérons par exemple l'action d'un champ scalaire ϕ de masse m à valeurs dans $\mathbb{C}^N$, dont l'action s'écrit :

$$S(\phi) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\phi^\dagger \wedge *\mathrm{d}\phi + *m^2\phi^\dagger\phi.$$

Cette théorie est invariante sous l'action d'une matrice unitaire sur champ scalaire : $\phi \to \mathscr{U}\phi$, $\mathscr{U} \in U(N)$. Nous voulons maintenant imposer que cette symétrie soit locale, c.-à.-d. que la matrice de transformation $\mathscr{U}(x^\mu)$ soit une fonction quelconque des coordonnées sur la variété. Cette opération s'appelle le jaugement d'une symétrie globale ; géométriquement, nous considérons alors un fibré du groupe de Lie $U(N)$ sur l'espace-temps $\mathscr{M}$. Dans ce cas l'action n'est plus invariante, à cause de la variation de $\mathscr{U}$ sous la dérivation : $\mathrm{d}(\mathscr{U}\phi) = \mathscr{U}\left(\mathrm{d} + \mathscr{U}^{-1}\mathrm{d}\mathscr{U}\right)\phi$. Nous introduisons alors comme dans l'exemple précédent la une-forme de connexion $\mathbf{A}$ à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(N)$ qui se transforme sous les transformations $U(N)$ locales comme : $\mathbf{A} \to \mathbf{A} - \mathscr{U}^{-1}\mathrm{d}\mathscr{U}$. Nous définissons la différentielle covariante de ϕ : $\mathrm{D}\phi = (\mathrm{d} + \mathbf{A})\phi$, de telle sorte que l'action devienne invariante sous les transformations de jauge. La courbure associée à cette connexion est donnée par $\mathscr{F} = \mathrm{D}\wedge\mathrm{D} = \mathrm{d}\mathbf{A} + \mathbf{A}\wedge\mathbf{A}$. De façon similaire à la relativité générale, la connexion est considérée comme un champ dynamique. L'action de la théorie est donc donnée par :

$$S(\phi|\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{M}} \mathrm{D}\phi^\dagger \wedge *\mathrm{D}\phi + m^2\phi^\dagger\phi + \frac{1}{g_{\mathrm{YM}}^2}\mathrm{Tr}\,\mathscr{F}\wedge *\mathscr{F}, \tag{I.3}$$

où g_{YM} définit la constante de couplage.

Fermions. Enfin, nous devons introduire des champs fermioniques pour décrire le secteur de matière. Grâce au théorème spin-statistique, nous savons que ces fermions se transforment comme des représentations spinorielles sous les transformations de Lorentz $SO(1,d)$ de l'espace tangent. Pour obtenir leurs lois transformations, nous introduisons les matrices γ^a de Dirac, vérifiant l'algèbre de Clifford : $\left\{\gamma^a, \gamma^b\right\} = 2\eta^{ab}$. Alors les générateurs du groupe de Lorentz dans la représentation spinorielle sont donnés par $\Sigma^{ab} = -\frac{\imath}{4}\left[\gamma^a, \gamma^b\right]$. Soit donc ψ un *spineur de Dirac* appartenant à cette représentation.[b] Pour coupler les théories fermioniques à la gravitation, nous devons définir un opérateur de dérivation covariante par rapport aux transformations de Lorentz locales : $\nabla_\mu\psi = \left(\partial_\mu + \Omega_\mu\right)\psi$, en fonction de la connexion de spin Ω donnée par $\Omega = \frac{\imath}{2}\omega^{ab}\Sigma_{ab}$. De plus, si le champ spinoriel est à valeurs dans un groupe de Lie, sa dérivée covariante par rapport aux transformations de jauge est simplement donnée par $\nabla_a + \mathbf{e}_a^{\ \mu}A_\mu$. En résumé une action pour un spineur de Dirac de masse m, covariante à la fois par rapport aux transformations de jauge internes et d'espace-temps est alors :

$$S(\psi) = \int_{\mathscr{M}} *\overline{\psi}\left[\imath\gamma^a e_a^{\ \mu}\left(\nabla_\mu + A_\mu\right) + m\right]\psi.$$

Nous avons défini tous les ingrédients nécessaires à la description du *modèle standard* des interactions fondamentales. Il se compose premièrement d'une théorie de jauge $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$

[b] son spineur conjugué est donné par $\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$.

(partiellement brisée par un champ scalaire, le boson de Higgs) couplée à des champs de matière fermioniques.[c] Cette théorie est quantifiée en considérant les champs comme des opérateurs agissant dans l'espace de Hilbert des états de la théorie quantique. Dans le formalise de l'*intégrale de chemin*, les quantités physiques sont données par la valeur moyenne d'opérateurs par rapport à toutes les configurations des champs :

$$\langle \mathscr{O}_1[\phi](x_1^\mu)\cdots\mathscr{O}_n[\phi](x_n^\mu)\rangle \sim \int \mathscr{D}\phi\, e^{-\frac{\imath}{\hbar}S(\phi)}\mathscr{O}_1[\phi](x_1^\mu)\cdots\mathscr{O}_n[\phi](x_n^\mu).$$

Dans la limite classique $\hbar \to 0$, la condition de phase stationnaire reproduit les équations classiques du mouvement pour ϕ. Le calcul de telles amplitudes n'est en général possible que de manière perturbative, c.-à.-d. en développant les termes d'interaction en puissances des paramètres qui les contrôlent. Ils conduisent typiquement à des quantités infinies, qui doivent être régularisées. Cependant il est possible d'en extraire des valeurs physiques de manière systématique grâce au processus de *renormalisation*. En outre, le modèle standard contient une théorie classique de la gravitation que nous avons présentée brièvement. Il est connu de longue date qu'à l'opposé des autres interactions, la théorie d'Einstein n'est pas renormalisable, ce qui empêche de définir une théorie quantique de la gravitation à l'aide des outils de la théorie quantique des champs.

Algèbres de supersymétrie. La construction du modèle standard peut se décrire uniquement en termes des symétries de la théorie, qu'elles soient globales ou locales comme les symétries de jauge. Il est dès lors intéressant de chercher à élargir ces symétries pour générer de nouvelles théories physiques, soit pour unifier les théories existantes, soit pour tenter d'incorporer la gravitation dans le formalisme quantique. Le premier type d'extension concerne uniquement le groupe de symétrie interne de la théorie. Ce type de modèles, dits de *grande unification*, visent à unifier les théories de jauge à l'aide de groupes de jauge élargis, par exemple $SO(10)$. Par contre, l'ajout de nouvelles symétries qui ne commutent pas avec les symétries de l'espace-temps – le groupe de Poincaré – est interdit, dans le cadre d'hypothèses physiques raisonnables, par le théorème de Colemann et Mandula. Cependant il existe une manière de contourner ce théorème en considérant des symétries de type fermionique ; il s'agit de la *supersymétrie*.[d] Soit donc une théorie des champs à quatre dimensions dont le spectre de bosons et le spectre de fermions sont dégénérés en masse – chaque particule d'un type possède un ou plusieurs «partenaires» de l'autre type. Nous pouvons alors éventuellement construire une opération de symétrie transformant ces particules l'une dans l'autre ; le paramètre d'une telle symétrie serait alors lui-même fermionique, c.-à.-d. anticommutant. Considérons ainsi un ensemble de N charges Q_A, qui se transforment comme des spineurs de Majorana (des spineurs de Dirac sur lesquels est imposée une condition de réalité $\bar{Q} = Q^T C$), appelées *supercharges*. Il est alors possible d'étendre l'algèbre de Poincaré, engendrée par les générateurs du groupe de Lorentz et les générateurs du groupe des translations $\mathscr{P}_\mu$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left[\mathscr{P}_\mu, Q_A\right] &= 0\,, \\ \left\{Q_A, \bar{Q}_B\right\} &= -2\gamma^\mu \mathscr{P}_\mu \delta_{AB} - 2\imath \mathscr{Z}_{AB}. \end{aligned} \tag{I.4}$$

Une théorie est dite supersymétrique si ses équations du mouvement sont compatibles avec cette symétrie. Les différentes particules de la théorie s'organisent alors en *multiplets*, de composantes reliées par l'action des charges Q_A de supersymétrie. Le multiplet générique comporte 2^{2N} états, dont la moitié est bosonique et la moitié fermionique. La matrice antisymétrique $\mathscr{Z}$, qui commute avec toute l'algèbre, est appelée *extension centrale*. Nous verrons par la suite que les valeurs

[c] voir par exemple [2] pour une présentation détaillée.

[d] Une introduction pédagogique est donnée dans [3].

propres q_i de cette matrice sont naturellement reliées aux charges des solutions supersymétriques de la théorie sous ses symétries locales. En présence d'une telle extension centrale, toutes les représentations de l'algèbre de supersymétrie vérifient l'inégalité de Bogomolny-Pradad-Sommerfeld (BPS) reliant leur masse m et leurs charges q_i :

$$m \geqslant |q_i| \,. \tag{I.5}$$

En particulier, lorsque pour p charges q_i l'inégalité précédente est une égalité, la représentation générique de supersymétrie – de dimension 2^{2N} – se décompose en représentations irréductibles de dimensions $2^{2(N-p)}$, dites p/N-BPS, préservant la fraction de supersymétrie correspondante.

La supersymétrie apparaît de manière plus naturelle dans le formalisme du *super-espace*.[e] Considérons que l'espace-temps, en plus des coordonnées usuelles x^μ, possède aussi des coordonnées fermioniques, données par un spineur de Majorana θ qui est une variable de Grassmann, c.-à.-d. anticommutante : $\{Q,Q\} = 0$. Alors, de même que l'impulsion $\mathscr{P}^\mu$ correspond au générateur des translations de l'algèbre de Poincaré, la supercharge Q correspond au générateur des «super-translations» de l'algèbre de super-Poincaré :

$$(x^\mu, \theta) \to (x^\mu - \bar{\zeta}\gamma^\mu\theta, \theta + \zeta)\,,$$

de paramètre fermionique ζ. Dans ce formalisme, les champs bosoniques $\phi(x^\mu)$ sont remplacés par des *super-champs* qui sont des fonctions des super-coordonnées $\Phi(x,\theta)$. Comme la super-coordonnée θ est anticommutante, le super-champ Φ se développe en un nombre fini de termes en puissance de θ. L'action gauche des générateurs de translation et de super-translation sur un tel super-champ est :

$$\mathscr{P}_\mu \cdot \Phi = -\partial_\mu \Phi\,, \quad Q \cdot \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \gamma^\mu\theta\partial_\mu\right)\Phi\,,$$

où la dérivation fermionique est simplement : $(\partial/\partial\theta_\alpha)\theta_\beta = \delta_{\alpha\beta}$.

Supergravité à onze dimensions et réductions dimensionnelles. La supersymétrie que nous venons d'introduire est une symétrie globale de la théorie reliant les bosons et les fermions ; il est également possible de rendre cette symétrie *locale*, de façon similaire aux théories de jauge et à la gravitation. Cependant, comme l'anticommutateur de deux transformations de supersymétrie est une translation, équation (I.4), une supersymétrie locale est indissociable d'une symétrie de Poincaré locale ; en d'autre termes nous sommes amenés à considérer les théories de *supergravité* qui réalisent l'extension naturelle de la théorie d'Einstein compatible avec la supersymétrie. D'un point de vue complémentaire, la particule médiatrice de la gravitation, le *graviton* – de spin 2 – appartient à un multiplet de supersymétrie qui contient toujours aussi une ou plusieurs particules de spin $3/2$, médiatrices de la supersymétrie locale. Une telle particule est un *gravitino*.

Le nombre de supercharges d'une théorie des champs ne peut excéder 32, pour éviter que les multiplets ne contiennent des particules de spin supérieur à deux. Ces dernières ne peuvent en effet se coupler de façon locale à la gravitation. La dimension maximale d'espace-temps pour laquelle il existe des représentations spinorielles de dimension 32 est onze dimensions. Nous allons alors considérer la théorie de *supergravité à onze dimensions* ; la plupart des autres supergravités peuvent s'en déduire par réduction dimensionnelle et/ou brisure de supersymétrie. Le multiplet gravitationnel se compose du graviton, d'un gravitino[f] ψ_μ, d'une trois-forme $\mathbf{C}$ de courbure $\mathscr{G} =$

[e] Par simplicité nous nous restreignons au super-espace $N = 1$.

[f] Le gravitino est une particule de spin 3/2, décrite ici comme un spineur de Dirac comportant en plus un indice vectoriel.

d**C**. L'action d'une telle théorie est [4] :

$$S_{11} = \frac{1}{2\kappa_{11}^2}\int *\mathscr{R} - *\frac{\imath}{2}\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\nabla_\nu\psi_\rho - \frac{1}{2}\mathscr{G}\wedge *\mathscr{G} - \frac{1}{6}\mathbf{C}\wedge\mathscr{G}\wedge\mathscr{G}$$
$$+ * \frac{1}{96}\left(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\alpha\beta\gamma\delta}\psi_\nu + 12\bar{\psi}^\alpha\gamma^{\gamma\delta}\psi^\beta\right)\left(\mathscr{G}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{3}{2}\bar{\psi}_{[\mu}\gamma_{\nu\rho}\psi_{\sigma]}\right). \tag{I.6}$$

Dans cette action, la dérivée covariante du gravitino est définie à l'aide de la connexion $\omega_{\mu ab} + \frac{\imath}{8}\bar{\psi}_\alpha\gamma_{\mu ab}{}^{\alpha\beta}\psi_\beta$. Il est possible de vérifier que les équations du mouvement (et non l'action) de cette théorie sont invariantes par transformation locale de supersymétrie. La partie non-triviale de l'algèbre de supersymétrie de cette théorie est donnée par :

$$\{Q,\bar{Q}\} = -2\gamma^M\mathscr{P}_M - 2\imath\gamma^{MN}\mathscr{Z}_{MN} - 2\imath\gamma^{MNPQR}\mathscr{Z}_{MNPQR} \tag{I.7}$$

Les charges centrales qui apparaissent dans le membre de droite correspondent aux charges d'objets étendus comme nous le verrons plus loin.

Réduction dimensionnelle. À partir de cette théorie à onze dimensions, il est possible de définir des théories de supergravité maximales (c.-à.-d. possédant 32 supercharges) en dimension plus basse, en utilisant la procédure de *réduction de Kaluza-Klein* [5]. Supposons que l'une des dimensions spatiales de l'espace-temps soit compacte, c.-à.-d. identifiée périodiquement. Alors, pour des énergies petites devant l'inverse du rayon de compactification, il est légitime de considérer que les champs de la théorie sont indépendants de cette direction. En décomposant les champs en représentations du groupe de Lorentz en dimensions réduite, nous obtenons alors une théorie de supergravité maximale en plus basse dimension.

Dans l'exemple considéré, nous obtenons de la réduction de la supergravité à onze dimensions l'action suivante, pour la **supergravité IIA** en dix dimensions :

$$S_{\mathrm{IIA}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int e^{-2\Phi}\left(*\mathscr{R} - \frac{1}{2}\mathscr{H}_{[3]}\wedge *\mathscr{H}_{[3]} + 4\mathrm{d}\Phi\wedge *\mathrm{d}\Phi\right)$$
$$-\frac{1}{2}\mathscr{F}_{[2]}\wedge *\mathscr{F}_{[2]} - \frac{1}{2}\mathscr{F}_{[4]}\wedge *\mathscr{F}_{[4]} - \frac{1}{2}\mathbf{B}_{[2]}\wedge\mathscr{F}_{[4]}\wedge\mathscr{F}_{[4]} + \text{ fermions}. \tag{I.8}$$

Les différents champs de cette action apparaissent de la façon suivante lors de la réduction dimensionnelle :

- la métrique à onze dimensions se décompose en une métrique à dix dimensions, un scalaire Φ appelé *dilaton* et une une-forme **A** de courbure $\mathscr{F}_{[2]} = \mathrm{d}\mathbf{A}$;
- la trois-forme **C** se décompose en une deux-forme $\mathbf{B}_{[2]}$ de courbure $\mathscr{H}_{[3]} = \mathrm{d}\mathbf{B}_{[2]}$ et une trois-forme $\mathbf{A}_{[3]}$ de courbure $\mathscr{F}_{[4]} = \mathrm{d}\mathbf{A}_{[3]} - \mathbf{A}_{[1]}\wedge\mathscr{F}_{[3]}$.

Cette supergravité possède deux supercharges de Majorana dans les représentations spinorielles **16** et **16'** du groupe de Lorentz $SO(1,9)$.

Le terme cinétique de la gravitation, c.-à.-d. la courbure scalaire, n'apparaît pas de manière canonique dans cette action à cause du couplage au dilaton Φ. Il est possible d'obtenir une action canonique, en transformant la métrique qui apparaît dans ce lagrangien – dite *métrique des cordes* g_σ – en une autre métrique dite *métrique d'Einstein* : $g_E = e^{-\Phi/2}g_\sigma$. La valeur observée de la constante gravitationnelle est alors $\tilde{\kappa}_{10} = e^{\Phi_\infty}\kappa_{10}$, en fonction de la valeur asymptotique Φ_∞ du dilaton. Ainsi le dilaton joue le rôle de constante de couplage dynamique de la théorie.

Il existe une autre supergravité maximale à dix dimensions qui ne descend pas de la supergravité à onze dimensions : la **supergravité IIB**. Les deux gravitinos de cette théorie se transforment

dans la représentation **16**. Son action est donnée par :

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{IIB}} &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int e^{-2\Phi}\left(*\mathscr{R}-\frac{1}{2}\mathscr{H}_{[3]}\wedge *\mathscr{H}_{[3]}+4\mathrm{d}\Phi\wedge *\mathrm{d}\Phi\right)-\frac{1}{2}\mathscr{F}_{[1]}\wedge *\mathscr{F}_{[1]} \\ &\quad -\frac{1}{2}\tilde{\mathscr{F}}_{[3]}\wedge *\tilde{\mathscr{F}}_{[3]}-\frac{1}{2}\tilde{\mathscr{F}}_{[5]}\wedge *\tilde{\mathscr{F}}_{[5]}-\frac{1}{2}\mathbf{A}_{[4]}\wedge\mathscr{H}_{[3]}\wedge\mathscr{F}_{[3]}+\text{ fermions,} \end{aligned}$$

avec $\tilde{\mathscr{F}}_{[3]}=\mathrm{d}\mathbf{A}_{[2]}-\mathbf{A}_{[0]}\wedge\mathscr{H}_{[3]}$ et $\tilde{\mathscr{F}}_{[5]}=\mathscr{F}_{[5]}-\frac{1}{2}\mathbf{A}_{[2]}\wedge\mathscr{H}_{[3]}+\frac{1}{2}\mathbf{B}_{[2]}\wedge\mathscr{F}_{[3]}$. De plus il faut imposer une condition d'auto-dualité sur la courbure $\tilde{\mathscr{F}}_{[5]}$ au sens de la dualité de Hodge : $\tilde{\mathscr{F}}_{[5]}=*\tilde{\mathscr{F}}_{[5]}$. Une propriété importante de cette supergravité est l'existence d'une symétrie globale de la théorie agissant sur les champs. Si nous définissons la combinaison complexe suivante des scalaires de la théorie : $\tau=\mathbf{A}_{[0]}+\imath e^{-\Phi}$, alors il existe une symétrie $SL(2,\mathbb{R})$ des équations du mouvement avec l'action suivante :

$$\begin{aligned} \tau' &= \frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \\ \begin{pmatrix}\mathscr{H}'_{[3]}\\ \mathscr{F}'_{[3]}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d & c\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathscr{H}_{[3]}\\ \mathscr{F}_{[3]}\end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathscr{F}}'_{[5]} &= \tilde{\mathscr{F}}'_{[5]},\ g'_E=g_E. \end{aligned} \tag{I.9}$$

Nous verrons ensuite qu'un sous-groupe discret $SL(2,\mathbb{Z})$ de cette symétrie existe dans la théorie des supercordes correspondant à cette supergravité.

Pour finir ce tour d'horizon des supergravités à dix dimensions, nous pouvons mentionner les **supergravités de type I ou Hétérotique**[g] qui contiennent uniquement seize supercharges. Leur caractéristique principale est de contenir des champs de jauge non-abéliens, se transformant dans le groupe $SO(32)$ ou $E_8\times E_8$. La dimension du groupe de jauge de la théorie est fixée par la condition d'annulation des anomalies dues à la présence de fermions chiraux. Dans le cas $E_8\times E_8$, il est possible d'obtenir la supergravité hétérotique par une réduction dimensionnelle particulière de la supergravité à onze dimensions. Considérons en effet une compactification de cette dernière selon la coordonnée x^{10} ; nous obtenons la théorie de type IIA. En revanche, si en plus de l'identification : $x^{10}\sim x^{10}+2\pi R_{10}$, nous imposons également l'identification suivante : $x^{10}\sim -x^{10}$, nous obtenons une compactification sur un espace singulier appelé *orbifold*. Le spectre des champs invariants par cette identification obtenu par réduction dimensionnelle est le suivant : un graviton, un gravitino, un dilaton Φ, une deux-forme $\mathbf{A}_{[2]}$. Cependant cette théorie possède des anomalies au niveau quantique. Comme l'ont montré Hořava et Witten [6], ces anomalies peuvent être annulées par deux multiplets de jauge du groupe E_8 qui «vivent» sur les locii des deux points fixes de l'identification, $x^{10}=0,\ \pi R_{10}$.

Toutes les théories de supergravité que nous avons présentées comportent un secteur «universel» composé du graviton, du dilaton Φ et de la deux-forme $\mathbf{B}_{[2]}$. La courbure de cette dernière $\mathscr{H}_{[3]}=\mathrm{d}\mathbf{B}_{[2]}$ peut aussi s'interpréter comme la *torsion* de la variété.

I.2. Solutions BPS des théories de supergravité

Nous avons considéré dans la section précédente les différentes théories de supergravité en onze et dix dimensions d'espace-temps. Nous cherchons maintenant les solutions «élémentaires» de ces théories correspondant à des objets étendus dans des directions spatiales.[h] Ce derniers,

[g] La nomenclature se réfère aux théories des cordes associées.

[h] Les solutions présentées ici sont examinées en grand détail dans [7].

appelés génériquement branes, par extension du mot «membrane» seront des généralisations de la solution de Schwarzschild des théories de gravité pure mais avec deux différences majeures :

- Ces objets étendus sont chargés par rapport aux p-formes que contiennent ces théories ;
- pour certaines valeurs des paramètres qui les décrivent, ces solutions sont dites *extrémales* ou BPS, et sont stables par rapport au rayonnement de Hawking.

Les p-branes noires de la supergravité à onze dimensions. Commençons notre revue par les solutions de branes de la supergravité à onze dimensions. Cette théorie contient une trois forme $\mathbf{C}_{[3]}$, qui peut être couplée minimalement à deux types d'objets étendus :

- la M2-brane, appelée aussi *membrane*, est étendue dans deux dimensions d'espace. Elle couple à la trois forme de manière «électrique» :

$$S_{\mathrm{M2}} \sim \frac{M_2}{2\kappa_{11}^2}\int_{\mathscr{S}_3} * \quad + \quad \frac{e}{\sqrt{2}\kappa_{11}}\int_{\mathscr{S}_3}\mathbf{C}_{[3]},$$

en intégrant la trois-forme sur le *volume d'univers* $\mathscr{S}_3$ de la membrane à $(2+1)$ dimensions. La membrane est aussi naturellement couplée à la gravitation par le premier terme source, proportionnel au volume. La solution des équations du mouvement venant de l'action (I.6) est la suivante :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \left(1-\frac{\mathscr{R}_-^6}{r^6}\right)^{2/3}\left[-\left(\frac{1-\frac{\mathscr{R}_+^6}{r^6}}{1-\frac{\mathscr{R}_-^6}{r^6}}\right)\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\right] \\
&\qquad + \frac{\mathrm{d}r^2}{\left(1-\frac{\mathscr{R}_-^6}{r^6}\right)\left(1-\frac{\mathscr{R}_+^6}{r^6}\right)} + r^2\mathrm{d}\Omega_7^2\,, \\
\mathbf{C}_{[3]} &= \frac{(\mathscr{R}_+\mathscr{R}_-)^3}{r^6}\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}$$

Cette solution correspond à une membrane de charge électrique et de masse par unité de surface[i] :

$$e = \frac{6\Omega_7}{\sqrt{2}\kappa_{11}}(\mathscr{R}_+\mathscr{R}_-)^3\ ,\ \ M_2 = \frac{\Omega_7}{2\kappa_{11}^2}\left[7\mathscr{R}_+^6-\mathscr{R}_-^6\right].$$

Notons que cette solution ne comporte pas de singularité nue (c.-à.-d. non protégée par un horizon causal), si la masse et la charge obéissent à l'inégalité :

$$\sqrt{2}\kappa_{11}M_2 \geqslant |e|.$$

Cette inégalité correspond exactement à la borne BPS, eq. (I.5) que nous avons discutée à propos des algèbres de supersymétrie. En effet, en présence d'une membrane orientée dans les directions $(0,1,2)$, le calcul explicite des charges de supersymétrie donne le résultat suivant :

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(M2)}\{Q,\bar{Q}\} = -2\gamma^0 M_2 - 2\imath\gamma^{12}e.$$

Ainsi la première extension centrale de l'algèbre de supersymétrie, eq. (I.7) est reliée directement à la charge de la membrane. Dans le cas *extrémal*, $\kappa_{11}M_2 = \sqrt{2}|e|$, la moitié de la supersymétrie est préservée par la solution ; en effet le membre de droite de l'algèbre de supersymétrie est proportionnel au projecteur $\hat{P} = \frac{1}{2}(1+\gamma^{012})$ qui possède seize vecteurs propres de valeur propre nulle.

[i] La charge électrique de la membrane est obtenue en intégrant la courbure duale $*\mathscr{G}$ sur une sept-sphère à l'infini entourant la membrane dans l'espace transverse : $e = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa_{11}}\int_{S^7_\infty} *\mathscr{G}$. La masse par unité de volume dite ADM est donnée par l'intégrale suivante de la perturbation de la métrique $h_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ sur la sept-sphère à l'infini : $M_2 = \frac{1}{2\kappa_{11}^2}\int_{S^7_\infty} d\Sigma^m\left(\partial^a h_{ab} - \partial_a h^c{}_c\right)$.

La supersymétrie préservée par cette solution peut aussi être obtenue explicitement en vérifiant que la variation de supersymétrie des champs de la théorie est nulle moyennant des contraintes sur le paramètre fermionique de transformation :

$$\delta\psi_\mu = \nabla_\mu \varepsilon + \frac{1}{288}\left(\gamma_\mu{}^{\nu\rho\sigma\tau} - 8\delta_\mu{}^\nu \gamma^{\rho\sigma\tau}\right)\mathscr{G}_{\nu\rho\sigma\tau}\varepsilon = 0\,.$$

La stabilité de la solution BPS – c.-à.-d. extrémale – au niveau quantique est assurée en raison de la supersymétrie. En effet sa masse est fixée par la charge, qui est une quantité topologique qui ne peut décroître continuement.

– la M5-brane est étendue dans quatre dimensions d'espace. Elle couple à la trois forme de manière «magnétique» :

$$\int_{\mathscr{S}_5} \tilde{\mathbf{C}}_{[6]}\,,$$

où la six-forme duale est définie localement par : $\mathrm{d}\tilde{\mathbf{C}}_{[6]} = *\mathscr{G}$. La solution des équations du mouvement venant de l'action (I.6) est alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \left(1-\frac{\mathscr{R}_-^3}{r^3}\right)^{1/3}\left[-\left(\frac{1-\frac{\mathscr{R}_+^3}{r^3}}{1-\frac{\mathscr{R}_-^3}{r^3}}\right)\mathrm{d}t^2 + \sum_{i=1}^{5}\mathrm{d}x_i^2\right] \\
&\qquad + \frac{\mathrm{d}r^2}{\left(1-\frac{\mathscr{R}_-^3}{r^3}\right)\left(1-\frac{\mathscr{R}_+^3}{r^3}\right)} + r^2\mathrm{d}\Omega_4^2\,, \\
\mathscr{G} &= \mathrm{d}\mathbf{C}_{[3]} = 3(\mathscr{R}_+\mathscr{R}_-)^{3/2}\ \omega_4\,,
\end{aligned}$$

(I.10)

où ω_4 est la forme de volume sur la quatre-sphère. De même que pour la membrane, cette solution correspond à une M5-brane de masse volumique et de charge magnétique :

$$m = \frac{3\Omega_4}{\sqrt{2}\kappa_{11}}(\mathscr{R}_+\mathscr{R}_-)^3\ ,\ \ M_5 = \frac{\Omega_4}{2\kappa_{11}^2}\left[4\mathscr{R}_+^3 - \mathscr{R}_-^3\right],$$

obéissant à la borne BPS $\sqrt{2}\kappa_{11}M_5 \geqslant |m|$. La solution extrémale préserve également la moitié des supersymétries. L'algèbre de supersymétrie est alors :

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(M5)}\{Q,\bar{Q}\} = -2\gamma^0 M_5 - 2\imath\gamma^{12345}m.$$

Ainsi la deuxième extension centrale de l'algèbre de supersymétrie, eq. (I.7) correspond à la charge magnétique de la M5-brane.

Quantification de la charge. Dans une théorie quantique contenant des membranes et des M5-branes, il existe une relation entre la charge électrique et la charge magnétique de ces dernières [8]. Plaçons pour cela une membrane (fermée) plongée dans l'espace-temps courbé par une M5-brane, donné par l'équation (I.10). Cette membrane va être couplée minimalement à la trois-forme $\mathbf{C}_{[3]}$ comme $\int_{\mathscr{S}^3}\mathbf{C}_{[3]}$. Considérons une déformation continue de la membrane, la ramenant à sa configuration initiale. Pendant ce processus, la membrane balaie une hypersurface fermée S ayant la topologie d'une trois-sphère. À cause du champ magnétique généré par la M5-brane, l'intégrale de chemin de la membrane acquerra alors la phase :

$$\exp\left\{\imath\frac{e}{\sqrt{2}\kappa_{11}}\oint_S \mathbf{C}_{[3]}\right\} = \exp\left\{\imath\frac{e}{\sqrt{2}\kappa_{11}}\oint_D \mathscr{G}\right\}\ ,\ \ \mathscr{C} = \partial D.$$

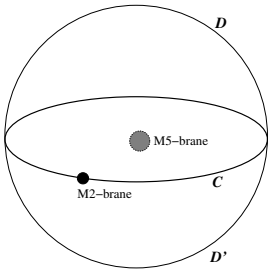

FIG. I.1. Hypersurface C balayée par la M2-brane, complétée par D ou D', formant ensemble une quatre-sphère.

La sous-variété D de l'espace-temps à quatre dimensions admet l'hypersurface C pour bord. Il existe bien sûr une ambiguïté dans le choix de D, mais celui-ci ne doit pas affecter les quantités physiques, donc la phase obtenue doit s'annuler. En particulier, si nous choisissons une autre sous variété D', telle que $D \cap D'$ contienne la M5-brane (fig I.1), nous obtenons alors la condition suivante :

$$\frac{e}{\sqrt{2}\kappa_{11}} \int_{D\cap D'} \mathscr{G} = e\,m = 2\pi n\ , \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{I.11}$$

Ainsi l'existence d'une seule solution magnétique quantifie toutes les charges électriques que peut contenir la théorie.

Les p-branes à dix dimensions. Les résultats précédents se généralisent aisément aux supergravités à dix dimensions [9]. Nous nous restreignons maintenant aux solutions supersymétriques extrémales. La différence majeure avec la supergravité à onze dimensions est la présence du dilaton Φ qui apparaîtra dans les solutions. Commençons par le *secteur universel* de ces théories, c.-à.-d. les objets chargés sous la deux-forme $\mathbf{B}_{[2]}$. La solution électrique est appelée **corde fondamentale** (dite F1), pour des raisons qui deviendront claires par la suite. Explicitement nous avons :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_\sigma^2 &= H_1^{-1}\left(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2\right) + \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\Omega_7^2\,, \\ \mathbf{B}_{[2]} &= \frac{1}{2} H_1^{-1}\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x\,, \\ e^{2\Phi} &= g_s^2 H_1^{-1}\ , \qquad\qquad \text{avec } H_1 = 1 + \frac{\tilde{\kappa}_{10}^2 g_s N_1}{6\pi\alpha'\Omega_7}\frac{1}{r^6}\,. \end{aligned} \tag{I.12}$$

Cette solution est paramétrée de telle sorte que la charge électrique et la masse volumique soient données par :

$$e_{F1} = \sqrt{2}\tilde{\kappa}_{10} g_s^{-1/2} N_1\, \tau_{F1}\ , \quad M_{F1} = N_1\, \tau_{F1}\,,$$

en fonction de la *tension* de la corde fondamentale

$$\tau_{F1} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\,,$$

et de la valeur asymptotique du dilaton Φ_∞. Cette solution est BPS et préserve la moitié de la supersymétrie.

La solution magnétique est la **NS5-brane**, s'étendant dans cinq directions spatiales. La solution BPS correspondante de supergravité est :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_\sigma^2 &= \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + H_5\left(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_3^2\right), \\ \mathscr{H} &= \mathrm{d}\mathbf{B}_{[2]} = 2\alpha' g_s N_5 \omega_3 \\ e^{2\Phi} &= g_s^2 H_5\,, \qquad\qquad \text{avec } H_5 = 1 + \frac{\alpha' N_5}{r^2}\,, \end{aligned} \tag{I.13}$$

pour une NS5-brane de tension

$$\tau_{\mathrm{NS5}} = \frac{N_5 \pi}{\tau_{\mathrm{F1}} \tilde{\kappa}_{10}^2},$$

de manière à vérifier la quantification de la charge $e_{F1}\, m_{NS5} = 2\pi N_1 N_5$. Les entiers N_1 et N_5 représentent ainsi le nombre de branes «élémentaires» superposées. Notons que les calculs perturbatifs de diffusion de gravitons dans la théorie des cordes donnent la relation : $2\tilde{\kappa}_{10}^2 = (2\pi)^7 g_s^2 \alpha'^4$. La tension de la NS5-brane se comporte donc en fonction de la constante de couplage des cordes comme $\tau_{\mathrm{NS5}} \sim g_s^{-2}\tau_{\mathrm{F1}}$; elle est donc très massive lorsque la constante de couplage est faible. Elle correspond à un objet *non-perturbatif* de la théorie.

Les supergravités de type II contiennent également d'autres p-formes ; les solutions BPS chargées sous celles-ci sont appelées **Dp-branes**. De façon succincte, à chaque p-forme sera associée une D-brane électrique étendue dans $(p-1)$ directions spatiales et une D-brane magnétique étendue dans $(7-p)$ directions. Dans la supergravité IIB il existe une D3-brane à la fois électrique et magnétique. La métrique et le dilaton d'une solution de Dp-brane sont :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_\sigma^2 &= H_p^{-1/2}\left(-\mathrm{d}t^2 + \sum_{i=1}^{p}\mathrm{d}x_i^2\right) + H_p^{1/2}\left(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_{8-p}\right), \\ e^{2\Phi} &= g_s^2 H_p^{(3-p)/4} \quad \text{, avec} \quad H_p = 1 + \frac{2\tilde{\kappa}_{10}\tau_p}{(7-p)\Omega_{8-p}\, r^{7-p}}\,, \end{aligned} \tag{I.14}$$

en fonction de la tension τ_p de la D-brane. Dans la théorie des cordes cette tension peut s'exprimer à l'aide de la tension de la corde fondamentale comme :

$$\tau_p = \frac{1}{g_s (2\pi)^p (\alpha')^{\frac{p+1}{2}}}.$$

Les Dp-branes sont donc des objets non-perturbatifs, dont la masse est grande lorsque la constante de couplage est faible.

Les objets de masse négative : les orientifolds. Toutes les solutions que nous avons construites jusqu'à présent correspondent à des objets de masse positive. Il est tout à fait possible de considérer le cas opposé, en remplaçant $\tau_p \to -\tau_p$ dans la solution (I.14) des Dp-branes. Ces solutions préservent également la moitié des supersymétries. Ce type de solutions n'est généralement pas considéré en relativité générale car l'espace-temps contient une singularité nue à l'emplacement de cet objet. Cependant ces solutions apparaissent naturellement dans la théorie des cordes, et sont appelées *orientifolds* [10].

Solutions cosmologiques gouvernées par des orientifolds (travail non publié). Nous allons maintenant montrer comment, à partir d'une solution de p-brane, il est possible de générer un espace-temps cosmologique, dont la dynamique est gouvernée par des objets de masse négative. Pour illustrer cette construction générale à toutes p-branes, nous prendrons l'exemple de la solution

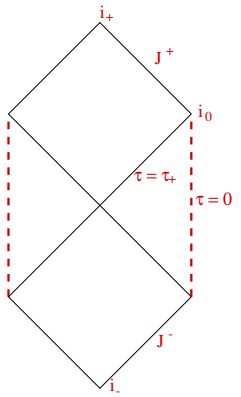

FIG. I.2. Diagramme de Carter-Penrose des solutions cosmologiques

de NS5-brane non-extrémale :

$$ds_\sigma^2 = (1-\mathscr{R}_-^2/r^2)^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\mathscr{R}_+^2/r^2} - (1-\mathscr{R}_+^2/r^2)\mathrm{d}t^2\right] + r^2\mathrm{d}\Omega_3^2 + \mathrm{d}\mathbf{x}^2\,,$$
$$e^{-2\Phi} = 1-\mathscr{R}_-^2/r^2\,,$$
$$\mathscr{H} = \mathscr{R}_+\mathscr{R}_-\sin^2\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}\psi\,.$$

Les équations du mouvement de la supergravité étant analytiques, il est possible de générer une nouvelle solution à partir d'une déjà connue par un *prolongement analytique* sur les coordonnées et/ou les paramètres. La nouvelle solution sera physique si tous les champs sont réels. Dans le cas présent nous effectuons la continuation analytique suivante :

$$r = i\tau \quad , \quad t = iy \quad , \quad \theta = i\xi\,,$$

en même temps qu'une redéfinition des deux paramètres indépendants :

$$\mathscr{R}_+ = i\tau_+\,, \quad \mathscr{R}_- = \tau_-.$$

Nous obtenons ainsi une solution cosmologique (c.-à.-d. dépendante du temps) asymptotiquement plate :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s_\sigma^2 &= (1+\tau_-^2/\tau^2)^{-1}\left[-\frac{\mathrm{d}\tau^2}{1-\tau_+^2/\tau^2} + (1-\tau_+^2/\tau^2)\mathrm{d}y^2\right] + \tau^2\mathrm{d}H_3^2 + \mathrm{d}\mathbf{x}^2\,,\\
e^{-2\Phi} &= 1+\tau_-^2/\tau^2\,,\\
\mathscr{H} &= \tau_+\tau_-\sinh^2\xi\,\sin^2\phi\,\mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}\psi\,,
\end{aligned}$$

où $\mathrm{d}H_3{}^2$ est une métrique sur l'espace hyperbolique à trois dimensions. Cette solution possède un horizon causal en $\tau = \tau_+$ et une singularité du genre espace en $\tau = 0$. La structure de cet espace-temps est résumée dans le diagramme causal dit de *Carter-Penrose* (fig. I.2). Cette solution ne présente aucune singularité de courbure à l'origine $\tau = 0$; la singularité apparente est uniquement due au choix du système de coordonnées, dit de Rindler.

Pour mieux comprendre la nature de cette solution, examinons la limite $\tau \to 0$:

$$\mathrm{d}s_\sigma^2 \simeq (\tau/\tau_-)^2\left[(\tau/\tau_+)^2\mathrm{d}\tau^2 - (\tau_+/\tau)^2\mathrm{d}y^2\right] + \tau^2\mathrm{d}H_3^2 + \mathrm{d}\mathbf{x}^2.$$

Dans les nouvelles coordonnées : $\tau^2 = (\tau_+\tau_-)^{1/2}\rho$ et $(\tau_+/\tau_-)y = t$, la solution s'écrit dans la métrique d'Einstein (obtenue par $\mathrm{d}s_E^2 = e^{-\phi/2}\mathrm{d}s_\sigma^2$) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s_E^2 &= \left(\frac{\tau_+^{1/2}\rho}{\tau_-^{3/2}}\right)^{-1/4}\left[\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu\right] + \left(\frac{\rho}{\tau_+^{5/6}\tau_-^{1/6}}\right)^{3/4}\left[\mathrm{d}\rho^2 + (\tau_+\tau_-)^2\mathrm{d}H_3^2\right], \\
e^{2\Phi} &= g_s^2\rho\,, \\
\mathscr{H} &= (\tau_+\tau_-)^2\mathrm{d}H_3\,.
\end{aligned}$$

Cette solution peut s'interpréter comme une brane de tension négative délocalisée sur H_3. En effet, de même que pour les solutions de p-branes, nous devons rajouter un terme source à l'action pour un objet de tension T_0 délocalisé sur l'espace hyperbolique H_3 :

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int\left(*\mathscr{R} - \frac{1}{2}\mathrm{d}\Phi\wedge *\mathrm{d}\Phi - \frac{1}{2}e^{-\Phi}\mathscr{H}\wedge *\mathscr{H}\right) - \delta(y)\mathscr{V}_{H_3}\,T_O\int_{\mathscr{S}_6} *e^{\Phi/2} + \mathbf{B}_{[2]}$$

D'après les équations du mouvement : $\mathscr{R}_{yy} \sim -T_O\,\delta(y)g_{yy}$, et le calcul du tenseur de courbure donne $\mathscr{R}_{yy} \sim +\delta(y)$, ce qui implique que la tension T_0 de la source est négative. Comme dans la référence [11], où une solution du même type est étudiée, nous pouvons donner l'interprétation physique suivante. Nous considérons qu'il existe une brane de masse négative, chargée, située au bord de l'univers. Sous l'effet de sa tension, l'univers va se contracter, mais en même temps la densité d'énergie électrique à l'intérieur de la brane augmente. La brane étant de masse négative, elle sera finalement repoussée par cette densité d'énergie et l'univers sera en expansion, mais sans être passé par une singularité de courbure initiale. Remarquons que seule la présence d'objets de masse négative permet d'éviter la singularité du Big-Bang. Il serait très intéressant de construire des modèles cosmologiques réalistes avec ce mécanisme, c.-à.-d. isotropes dans trois dimensions et non asymptotiquement plats.

I.3. Quantification de la corde fondamentale

Dans la section précédente nous avons construit les solutions de p-branes extrémales des théories classiques de supergravité à dix dimensions. Nous souhaitons maintenant construire des théories quantiques admettant ces supergravités comme solutions de basse énergie. Comme les solutions de p-branes de supergravité sont stables – en raison de la supersymétrie – elle devraient exister dans la théorie sous-jacente. Dans la limite où la théorie est faiblement couplée, $\kappa_{10} \to 0$, un seul de ces objets est de masse faible : la corde couplée à la deux-forme $\mathbf{B}_{[2]}$. Pour cette raison il est naturel de considérer cette corde comme l'objet fondamental de la théorie quantique, dont les degrés de liberté «engendrent» la théorie effective de supergravité à basse énergie. La construction de la théorie quantique de ces cordes fondamentales est la théorie des supercordes [12–14].

Actions de Nambu-Goto et Polyakov. Nous allons maintenant décrire la dynamique de la corde fondamentale, au niveau de la théorie classique puis de la théorie quantique. Nous nous limiterons pour l'instant au cas des théories IIA et IIB, avec une supersymétrie $N = 2$, et dans lesquelles les cordes sont *fermées*, c.-à.-d. periodiques dans leur dimension spatiale. L'action classique de la corde fondamentale peut se construire à l'aide des contraintes suivantes :

- cette action doit être un terme source de la supergravité compatible avec la solution (I.12) des équations du mouvement ;
- elle doit être invariante sous les transformations de super-Poincaré.

Une action vérifiant ces propriétés est premièrement composée d'un terme cinétique, l'**action de Nambu-Goto** :

$$S_{NG} = \tau_{F1} \int_{\mathscr{S}_2} \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}t \sqrt{-\det\, \Pi^\mu_a\, \Pi^\nu_b\, g^\sigma_{\mu\nu}}\,, \quad \text{avec} \quad \Pi^\mu_a = \partial_a X^\mu - i\bar{\theta}^A \gamma^\mu \partial_a \theta^A. \tag{I.15}$$

Cette action, pour une supercorde de tension τ_{F1}, correspond à l'intégrale de l'élément de surface sur la *surface d'univers*, en fonction des une-formes de la surface d'univers Π^μ_a, invariantes sous les super-translations : $\delta X^\mu = \frac{i}{2}\varepsilon^A \gamma^\mu \theta^A$, $\delta\theta^A = \varepsilon^A$. Les champs à deux dimensions $X(\sigma,t)$ représentent les coordonnées de la corde dans l'espace-temps. En revanche (σ,t) sont les coordonnées sur la surface d'univers de la corde. Pour les cordes fermées nous avons l'identification $\sigma \sim \sigma + 2\pi R$. Les spineurs de Majorana d'espace-temps $\theta^A(\sigma,t)$ sont les partenaires supersymétriques des champs $X^\mu(\sigma,t)$, coordonnées dans le super-espace. La chiralité de ces spineurs est la même que dans la supergravité correspondante, c.-à.-d. , dans la théorie IIA, deux spineurs de Majorana-Weyl de chiralités opposées, combinés en un spineur de Majorana, et dans le cas IIB, deux spineurs de Majorana-Weyl de même chiralité. Remarquons que cette action contient deux fois plus de degrés de libertés fermioniques que le nombre attendu.

Deuxièmement, l'action contient un terme de couplage à la deux-forme $\mathbf{B}_{[2]}$ sous laquelle la supercorde fondamentale est chargée de manière électrique :

$$S_B = \frac{\tau_{F1}}{2} \int_{\mathscr{S}_2} \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}t\; \varepsilon^{ab}\, \Pi^\mu_a\, \Pi^\nu_b\, \mathbf{B}_{\mu\nu}.$$

La charge électrique de la supercorde est choisie égale à sa tension, en accord avec la condition BPS sur la solution de p-brane correspondante.

Troisièmement, nous introduisons le terme de *Wess-Zumino* ; considérons par exemple le cas de la théorie IIA ; alors nous pouvons construire la trois-forme fermée suivante :

$$H = \Pi^\mu\, \mathrm{d}\bar{\theta}\, \gamma^\nu\, \gamma^{11}\, \mathrm{d}\theta\, g^\sigma_{\mu\nu} \quad , \quad \mathrm{d}H = 0.$$

Localement, nous pouvons donc définir une deux-forme b par $H = \mathrm{d}b$. Cela s'applique aussi dans le cas des théories IIB. Le terme de Wess-Zumino s'écrit alors comme l'intégrale de b sur la surface d'univers :

$$S_{WZ} = \frac{\tau_{F1}}{2} \int_{\mathscr{S}_2} \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}t\; \varepsilon^{ab} b_{ab}.$$

Ce terme est ajouté pour que l'action totale $S_{NG} + S_{WZ} + S_B$ soit invariante sous la symétrie locale dite de *symétrie* κ engendrée par le-s spineur-s d'espace-temps $\kappa^A(\sigma,t)$. La fixation de la jauge pour cette symétrie locale permet de supprimer la moitié des degrés de symétrie fermioniques de l'action de la supercorde. Ainsi, la symétrie κ est nécessaire pour obtenir le bon nombre de degrés de liberté. Notons que cette symétrie est présente uniquement si la tension et la charge de la supercorde obéissent à la condition BPS.

Les équations du mouvement déduites de cette action sont non-linéaires, à cause premièrement du terme de Nambu-Goto (I.15), et donc difficiles à résoudre. Cependant, il est possible de linéariser ce terme cinétique en introduisant une métrique auxiliaire h_{ab} sur la surface d'univers de la corde. Classiquement cette métrique n'est pas un champ dynamique. Nous obtenons ainsi l'**action de Polyakov-Green-Schwarz**[j] [15,16] :

$$S_P = \frac{\tau_{F1}}{2} \int_{\mathscr{S}_2} \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}t \sqrt{-\det h}\; h^{ab}\, \Pi^\mu_a\, \Pi^\nu_b\, g^\sigma_{\mu\nu}. \tag{I.16}$$

Les équations du mouvement pour la métrique sont simplement : $h_{ab} \sim \Pi^\mu_a\, \Pi^\nu_b\, g^\sigma_{\mu\nu}$. La métrique h_{ab} n'est déterminée qu'à une constante multiplicative près à cause de l'invariance de l'action sous

[j] Le nom de Polyakov est attaché à l'action bosonique, et celui de Green-Schwarz à l'action supersymétrique.

les transformations de Weyl, c.-à.-d. la multiplication de la métrique de la surface d'univers par une fonction quelconque des coordonnées : $h_{ab} \to e^{\phi(\sigma,t)} h_{ab}$. Cette propriété sera centrale par la suite dans l'étude de la théorie des cordes.

Cependant, même après cette linéarisation du terme cinétique, les équations du mouvement restent non-linéaires, en particulier à cause du terme de Green-Schwarz. La quantification de cette théorie n'est possible qu'en choisissant la *jauge du cône de lumière*. Ce choix de jauge peut être effectué uniquement si dans l'espace-temps ambiant une direction d'espace et la direction temporelles sont plates. Dans l'espace-temps plat de Minkowski nous trouvons alors une théorie de champs libres, contenant les champs bosoniques associés aux coordonnées transverses de l'espace-temps cible et des fermions d'espace-temps se transformant dans $SO(8)$.

Formalisme de Ramond-Neveu-Schwarz. Le formalisme précédent, dit de Green-Schwarz, utilise directement des champs se transformant dans des représentations fermioniques de l'espace-temps. Cependant, les contraintes non-linéaires compliquées provenant de la symétrie κ ne peuvent être résolues qu'en utilisant la jauge du cône de lumière. Nous voulons maintenant introduire un autre formalisme dans lequel la quantification covariante est possible. Dans ce formalisme les coordonnés de la supercorde correspondent également à des champs scalaires $X^\mu(\sigma,t)$ de la surface d'univers, se transformant comme des vecteurs d'espace-temps. En revanche, nous introduisons des spineurs de la surface d'univers $\psi^\mu(\sigma,t)$ qui se transforment également comme des vecteurs d'espace-temps. Ainsi la supersymétrie d'espace-temps n'apparaîtra que de manière indirecte mais somme toute logique ; les modes zéro de ces champs généreront une algèbre de Clifford $\{\psi_0^\mu, \psi_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu}$, et le spectre de la supercorde contiendra naturellement des représentations de cette algèbre, en d'autres termes des fermions d'espace-temps. Le défaut de ce formalisme est qu'il ne permet pas de décrire la dynamique des supercordes dans un espace-temps dans lequel les formes $\mathbf{A}_{[n]}$ des théories de supergravité (appelées formes de «Ramond–Ramond» dans le contexte des supercordes) ne sont pas triviales. Au contraire n'importe quel profil pour la deux-forme $\mathbf{B}_{[2]}$, appelée ici forme de «Neveu-Schwarz – Neveu-Schwarz » est autorisé.

Nous voulons maintenant écrire une action pour ces champs bosoniques et fermioniques possédant une ou plusieurs supersymétries sur la surface d'univers. Les représentations spinorielles irréductibles du groupe de Lorentz à deux dimensions sont des *spineurs de Majorana-Weyl*, possédant une seule composante.[k] Dans le cas des supercordes de type II, cette supersymétrie sera de type $N = (1,1)$, c.-à.-d. deux supercharges de la surface d'univers de Majorana-Weyl de chiralités opposées.

Par analogie avec la discussion précédente sur la supercorde de Green-Schwarz, les champs de la supercorde seront couplés à la gravitation bidimensionnelle, en introduisant une métrique auxiliaire sur la surface d'univers. Comme nous désirons obtenir un formalisme supersymétrique, nous somme naturellement amenés à considérer une théorie de **supergravité à deux dimensions**. Celle-ci contient un gravitino à deux dimensions χ_a, qui se transforme comme un vecteur-spineur de Majorana. Dans un espace-temps courbe quelconque sans dilaton, nous avons l'action suivante ($\gamma_3 = \gamma^0\gamma^1$) :

[k] Un spineur de Dirac à deux dimensions possède deux composantes complexes : $\psi = \binom{\psi^+}{\psi^-}$. La condition de Weyl s'écrit : $\gamma^0\gamma^1\psi = \pm\psi$, où, explicitement, $\gamma^0\gamma^1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Il reste donc une composante complexe $\psi^\pm$. La contrainte de Majorana sur un tel spineur de Weyl se réduit à $\left(\psi^\pm\right)^* = \psi^\pm$.

$$
\begin{aligned}
S_{RNS} \quad &= \tau_{F1} \int \mathrm{d}^2\sigma \quad \sqrt{-h} \left[\frac{1}{2} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \bar{\psi}^\mu \gamma^a D_a \psi^\nu g_{\mu\nu} \right. \\
&\qquad + \bar{\chi}_a \gamma^b \gamma^a \left(\psi^\mu \partial_b X^\nu - \frac{1}{4} \chi_b \bar{\psi}^\mu \psi^\nu \right) g_{\mu\nu} - \frac{1}{12} \mathscr{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}^\mu \psi^\rho \bar{\psi}^\nu \psi^\sigma \\
&\quad - \frac{\imath}{16\pi} \mathscr{H}_{\mu\nu\rho} \bar{\psi}^\mu \gamma^a \gamma_3 \psi^\nu \partial_a X^\rho - \frac{1}{64\pi} \partial_\sigma \mathscr{H}_{\mu\nu\rho} \bar{\psi}^\mu \psi^\sigma \psi^\nu \gamma_3 \psi^\rho \\
&\quad \left. - \frac{1}{512\pi^2} g^{\rho\upsilon} \mathscr{H}_{\mu\nu\rho} \mathscr{H}_{\sigma\tau\upsilon} \bar{\psi}^\mu \gamma_3 \psi^\nu \bar{\psi}^\sigma \gamma_3 \psi^\tau - \frac{\imath}{48\pi} \mathscr{H}_{\mu\nu\rho} \bar{\chi}_a \gamma^b \gamma^a \psi^\mu \bar{\psi}^\nu \gamma_b \gamma_3 \psi^\rho \right] \\
&\quad - \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \mathbf{B}_{\mu\nu}. \qquad \text{(I.17)}
\end{aligned}
$$

Dans cette action le multiplet de supergravité (g, χ) est couplé à des multiplets scalaires de matière (X^μ, ψ^μ). Il est possible de vérifier explicitement que cette action possède bien une supersymétrie locale, avec les transformations suivantes :

$$
\text{Supersymétrie} : \left\{ \begin{array}{rcl}
\delta e_a^\mu &=& 2\imath \bar{\zeta} \gamma^\mu \chi_a \,, \\
\delta \chi_a &=& D_a \zeta \,, \\
\delta X^\mu &=& -\bar{\zeta} \psi^\mu \,, \\
\delta \psi^\mu &=& -i\gamma^a \left(\partial_a X^\mu + \bar{\chi}_a \psi^\mu \right) \zeta + \Gamma^\mu_{\ \nu\rho} \bar{\zeta} \psi^\nu \psi^\rho \\
&& \qquad + \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} \mathscr{H}_{\nu\rho\sigma} \bar{\psi}^\rho \gamma_3 \psi^\sigma \zeta .
\end{array} \right.
$$

Cette action possède en outre d'autres symétries locales, la *symétrie de Weyl* correspondant aux transformations conformes, de paramètre bosonique $\Lambda(\sigma, t)$, et la symétrie de super-Weyl qui lui est associée dans ce modèle supersymétrique, de paramètre fermionique $\eta(\sigma, t)$:

$$
\text{Symétrie (super)} - \text{conforme} : \left\{ \begin{array}{rcl}
\delta e_a^\mu &=& -\Lambda e_a^\mu \,, \\
\delta \chi_a &=& \imath \gamma_a \eta - \frac{1}{2} \Lambda \chi_a \,, \\
\delta X^\mu &=& 0 \,, \\
\delta \psi^\mu &=& \frac{1}{2} \Lambda \psi^\mu .
\end{array} \right. \qquad \text{(I.18)}
$$

Dans cette action, les champs de la surface d'univers $X^\mu(\sigma, t)$ correspondent aux coordonnées de la supercorde dans l'espace-temps. Ils définissent ainsi à une application $X : \mathscr{S}_2 \to \mathscr{M}$ de la surface d'univers vers la variété d'espace-temps. Les champs fermioniques de la surface d'univers ψ^μ pour leur part définissent une application $\psi : \mathscr{S}_2 \to T\mathscr{M}$ vers l'espace tangent à la variété. Les champs de supergravité qui apparaissent dans cette action – la métrique $g(x^\mu)$ et la deux-forme $\mathbf{B}_{[2]}(x^\mu)$ – correspondent à des fonctionnelles des champs X^μ de la surface d'univers $g[X^\mu(w, \bar{w})]$ et $\mathbf{B}_{[2]}[X^\mu(w, \bar{w})]$, appelés «champs de fond». Notons également que cette action est modifiée en présence d'un profil quelconque pour le champ du dilaton $\Phi(X^\mu)$; la partie bosonique donne le couplage suivant :

$$
S_{dil} = \int \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}t \sqrt{-h} R^{(2)}(h) \Phi(X^\mu) \qquad \text{(I.19)}
$$

en fonction de la courbure scalaire bidimensionnelle $R^{(2)}(h)$ de la surface d'univers.

Un choix de jauge approprié permet de simplifier considérablement cette action, pour le moment au niveau classique. Tout d'abord, la symétrie de reparamétrage et la symétrie de Weyl

peuvent être utilisées pour éliminer tous les degrés de liberté de la métrique de la surface d'univers, en choisissant la jauge $h_{ab} = \eta_{ab}$. Ensuite, la supersymétrie locale et la symétrie superconforme permettent d'atteindre la jauge dans laquelle $\chi_a = 0$. Néanmoins, il faudra imposer même une fois la jauge fixée que les équations du mouvent pour le repère mobile e_a^μ et pour le gravitino χ_a soient satisfaites, soit explicitement :

$$T_{ab} := \frac{1}{\sqrt{-h}} \frac{\delta \mathscr{L}_{RNS}}{\delta h^{ab}} = 0\,, \tag{I.20}$$

$$G_a := \frac{1}{\sqrt{-h}} \frac{\delta \mathscr{L}_{RNS}}{\delta \chi^a} = 0\,. \tag{I.21}$$

Modèles sigma non-linéaires. Après la fixation de la jauge conforme et superconforme dans l'action de supergravité précédente, nous avons obtenu une théorie des champs à deux dimensions se propageant dans une surface d'univers plate, possédant une symétrie globale de super-Poincaré. Nous somme donc amenés a considérer des action non-linéaires à deux dimensions possédant une supersymétrie globale $N = (1,1)$, c.-à.-d. possédant deux supercharges de Majorana-Weyl. De tels modèles sont appelés modèles sigma non-linéaires à deux dimensions. Leur formulation est simplifiée en utilisant le langage du *super-espace* que nous avons déjà défini. Dans notre cas, nous munissons tout d'abord la surface d'univers de coordonnées du *cône de lumière* : $w = \sigma + t$, $\bar{w} = \sigma - t$. Le super-espace $N = (1,1)$ est alors paramétré par les super-coordonnées $(w, \theta^+, \bar{w}, \theta^-)$, où $\theta^\pm$ sont deux spineurs de Majorana-Weyl de chiralités opposées. Ensuite nous définissons des *super-champs scalaires* comme des fonctions scalaires arbitraires du super-espace. Le développement de ces super-champs en puissances de $\theta^\pm$ est fini, car ces dernières sont des variables fermioniques :

$$\mathbf{X}^\mu(w, \theta^+, \bar{w}, \theta^-) = X^\mu(w, \bar{w}) + \imath\theta^+ \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\psi^\mu(w, \bar{w}) + \imath\theta^- \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\tilde{\psi}^\mu(w, \bar{w}) + \imath\theta^+\theta^- F^\mu(w, \bar{w}).$$

En plus des champs X^μ et ψ^μ que nous avions déjà introduit précédemment, le super-champ contient aussi un *champ auxiliaire* F^μ. Cependant ce n'est pas un champ dynamique, car il n'apparaîtra que de manière polynomiale dans l'action et pourra être intégré. Cette théorie possède deux supercharges de Majorana-Weyl $Q^\pm$, agissant de la façon suivante sur les super-champs :

$$Q^+ = \partial_{\theta^+} - \imath\partial_w\,\theta^+ \ , \ \ Q^- = \partial_{\theta^-} - \imath\partial_{\bar{w}}\,\theta^-.$$

Pour écrire une action du modèle sigma invariante sous le groupe de super-Poincaré, nous devons introduire des super-dérivées covariantes anticommutant avec les supercharges :

$$\{\mathfrak{D}_+, Q^\pm\} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{D}_+ = \partial_{\theta^+} + \imath\partial_w\,\theta^+$$
$$\{\mathfrak{D}_-, Q^\pm\} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{D}_- = \partial_{\theta^-} + \imath\partial_{\bar{w}}\,\theta^-$$

L'action générale du modèle sigma sans dilaton s'écrit alors comme l'intégrale suivante sur le super-espace :

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int \mathrm{d}^2 w\, \mathrm{d}\theta^+ \mathrm{d}\theta^- \left[g_{\mu\nu}(\mathbf{X}) + \mathbf{B}_{\mu\nu}(\mathbf{X})\right] \bar{\mathfrak{D}}\mathbf{X}^\mu \mathfrak{D}\mathbf{X}^\mu. \tag{I.22}$$

L'intégration sur les super-coordonnées revient à sélectionner le terme en $\theta^+\theta^-$ de l'action : $\int \mathrm{d}\theta^+ \mathrm{d}\theta^- = \partial_{\theta^+}\partial_{\theta^-}$. Après élimination des champs auxiliaires, nous obtenons l'action suivante

en composantes :

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int \mathrm{d}^2 w \, \left(g_{\mu\nu} + \mathbf{B}_{\mu\nu}\right) \partial X^\mu \bar{\partial} X^\mu + \imath \frac{\alpha'}{2} g_{\mu\nu} \psi^\mu \bar{\nabla}^+ \psi^\nu + \imath \frac{\alpha'}{2} g_{\mu\nu} \tilde{\psi}^\mu \nabla^- \tilde{\psi}^\nu$$
$$- \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^2 \mathscr{R}^+_{\mu\nu\rho\sigma} \psi^\mu \psi^\nu \tilde{\psi}^\rho \tilde{\psi}^\sigma .$$

Cette action s'écrit à l'aide des dérivées covariantes impliquant la torsion $\mathscr{H}$ de l'espace-temps :

$$\bar{\nabla}^+ \psi^\mu = \bar{\partial} \psi^\mu + \left(\Gamma^\mu_{\nu\rho} + \frac{1}{2} \mathscr{H}^\mu_{\nu\rho}\right) \bar{\partial} X^\rho \, \psi^\nu \tag{I.23}$$

pour les fermions de chiralité positive et pour les fermions de chiralité négative, la torsion contribue avec un signe opposé :

$$\nabla^- \tilde{\psi}^\mu = \partial \psi^\mu + \left(\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \frac{1}{2} \mathscr{H}^\mu_{\nu\rho}\right) \partial X^\rho \, \psi^\nu . \tag{I.24}$$

Enfin cette action fait apparaître $\mathscr{R}^+_{\mu\nu\rho\sigma}$, le tenseur de courbure de la variété avec torsion, qui se déduit du tenseur de courbure sans torsion par

$$\mathscr{R}^+_{\mu\nu\rho\sigma} = \mathscr{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + \partial_{[\mu} \mathscr{H}_{\nu]\rho\sigma} + \mathscr{H}_{\tau\sigma[\mu} \mathscr{H}^\tau{}_{\nu]\rho} .$$

Le modèle sigma que nous venons de définir est, dans un espace-temps courbe, une théorie des champs en interaction, car les «champs de fond» $g_{\mu\nu}$ et $\mathbf{B}_{[2]}$ sont des fonctionnelles des champs $X^\mu(w,\bar{w})$. Cependant, il est possible par un développement de la métrique et de la deux-forme en puissances de X^μ d'effectuer des calculs perturbatifs ordre par ordre dans la théorie quantique, lorsque la variété est suffisamment régulière. Ces développements font apparaître des dérivées de la métrique et de la deux-forme, qui joueront le rôle de constantes de couplages effectives dans la théorie quantique à deux dimensions. Enfin, comme les champs X^μ sont classiquement de dimension zéro, cette théorie quantique des champs sera renormalisable.

Considérons maintenant la cas de la **corde hétérotique** [17]. La corde fondamentale hétérotique est aussi une corde fermée. Rappelons que la supergravité correspondante possède la moitié des supersymétries des supergravités de type II, et contient en outre un champ de jauge. Dans le formalisme de Ramond-Neveu-Schwarz, la réduction de supersymétrie est prise en compte en considérant le super-espace $N = (1,0)$ de coordonnées $(w, \theta^+, \bar{w})$; en effet les modes zéro des fermions n'engendreront plus qu'une seule algèbre de Clifford au lieu de deux. Les super-champs scalaires associés aux coordonnées ont un développement simple : $\mathbf{X}^\mu((w,\theta^+,\bar{w}) = X^\mu(w,\bar{w}) + \imath\theta^+ \sqrt{\alpha'/2}\psi^\mu(w,\bar{w})$. Nous avons aussi besoin d'introduire des degrés de liberté correspondant au champ de jauge. Nous utiliserons la même idée que pour la construction des fermions d'espace-temps. Si nous ajoutons à la théorie 32 fermions de Majorana-Weyl de chiralité négative $\lambda^i(w,\bar{w})$, nous pouvons construire des courants $J^{ij} = \lambda^i \lambda^j$ et nous obtenons une algèbre de Lie avec leurs modes zéros, en particulier $O(32)$. Du point de vue de l'espace-temps, les champs λ^i sont à valeurs dans un fibré vectoriel de dimension 32 sur la variété d'espace-temps. Dans le formalisme du super-espace nous introduisons les super-champs fermioniques suivants : $\Lambda^i(w,\theta^+,\bar{w}) = \lambda^i(w,\bar{w}) + \theta^+ F(w,\bar{w})$. L'action du modèle sigma hétérotique s'écrit alors [18] :

$$S_{het} = -\tau_{F1} \int \mathrm{d}^2 w \, \mathrm{d}\theta^+ \, \left[g_{\mu\nu}(\mathbf{X}) + \mathbf{B}_{\mu\nu}(\mathbf{X})\right] \bar{\partial} \mathbf{X}^\mu \mathfrak{D} \mathbf{X}^\mu + G_{ij}(\mathbf{X}) \Lambda^i \left(\mathfrak{D}\Lambda^j + A^j_{\mu\ k} \mathfrak{D}\mathbf{X}^\mu \Lambda^k\right),$$

où G_{ij} est une métrique sur la fibre, et $A^j_{\mu\ k}$ une connexion associée au fibré vectoriel. Cette action est invariante sous les transformations locales $\delta\Lambda = R^i{}_j(\mathbf{X})\Lambda^j$, correspondant aux générateurs $R^i{}_j$ du groupe de structure de l'espace vectoriel, qui est un sous-groupe de $O(32)$.

Ceci complète notre survol rapide des théories de supercordes fermées classiques. Les supercordes ouvertes seront évoquées également par la suite. Nous allons maintenant esquisser la quantification de ces théories. En particulier, nous allons constater qu'un certain nombre des symétries de l'action classiques deviennent potentiellement anormales.

Quantification et développement perturbatif. Le point de départ de la quantification de la théorie est l'action de supergravité bidimensionnelle couplée aux champs X^μ et ψ^μ, donnée par l'équation (I.17). Cette théorie classique peut être quantifiée dans le formalisme de l'intégrale de chemin, dite de *Polyakov* dans ce contexte [19]. Les amplitudes de diffusion entre des états initiaux et des états finaux des cordes se calculent en intégrant sur toutes les configurations des champs de la surface d'univers interpolant entre ces deux états asymptotiques. En particulier, nous devons intégrer sur toutes les géométries de la surface d'univers – étendues aux «super-géométries» du super-espace – ce qui se décompose en une intégrale sur la métrique (correspondant aux propriétés *locales* de la surface d'univers) et une somme sur les topologies de la surface d'univers, c.-à.-d. les propriétés *globales* de la surface (fig. I.3). Le calcul des amplitudes s'effectue en général avec une surface d'univers euclidienne et non Minkowskienne, obtenue par la *rotation de Wick* : $w = \bar{w}^*$. De cette façon l'intégrale de chemin est mieux définie et la géométrie de la surface d'univers s'étudie en termes de surfaces de Riemann dont les propriétés sont bien connues. En particulier la fonction de partition de la théorie, qui représente l'amplitude de probabilité du vide au vide, est donnée par l'expression suivante :

$$Z \sim \sum_{\text{(super)topologies}} \int \mathscr{D}X^\mu \, \mathscr{D}\psi^\mu \, \mathscr{D}h \, \mathscr{D}\chi \; \exp\left\{-S_{RNS}(X^\mu, \psi^\mu, h_{ab}, \chi_a)\right\}, \tag{I.25}$$

en fonction de l'action (I.17). Les *super-surfaces de Riemann* sur lesquelles l'action des supercordes est intégrée sont simplement les surfaces de Riemann étendues dans le super-espace par les coordonnées fermioniques $\theta^\pm$.

Considérons pour commencer les surfaces de Riemann bosoniques. Les topologies sur lesquelles l'intégrale de chemin est sommée dépendent du type de théorie des cordes étudié. Dans le cas des cordes fermées IIA, IIB ou hétérotique, la somme s'étend à toutes les surfaces *sans bord* et *orientées*. Celles-ci sont entièrement caractérisées par leur *genre g*, qui caractérise le nombre de «trous» de la surface. Ainsi, un tore est une surface de genre un. L'indice topologique caractérisant ces surfaces est l'*indice d'Euler* $\chi_E = 2 - 2g$. La somme sur les genres des surfaces va jouer le

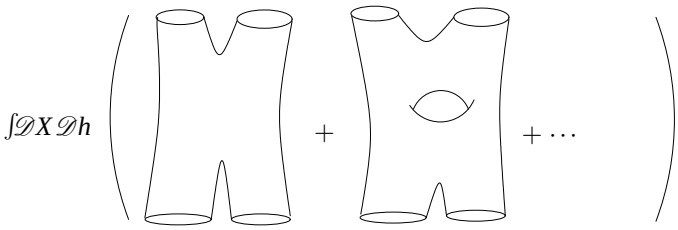

FIG. I.3. Somme sur les surfaces d'univers, cas bosonique.

rôle de développement perturbatif dans le calcul d'amplitudes de la théorie des cordes. Rappelons en effet que le dilaton est couplé dans l'action des supercordes à la courbure scalaire de la surface d'univers, eq. (I.19). Séparons maintenant la partie constante du dilaton de la partie dépendant explicitement des champs de la surface d'univers : $\Phi(X) = \Phi_0 + \delta\Phi(X)$. Alors le mode zéro donne une contribution purement topologique à l'action :

$$\tau_{F1}\Phi_0 \int d^2w \sqrt{-h} R^{(2)}(h) = 4\pi\tau_{F1}\Phi_0\chi_E \, .$$

Ainsi toutes les amplitudes des cordes sont pondérées par le facteur $g_s^{\chi_E}$, où nous avons défini la *constante de couplage des cordes fermées* $g_s = \exp 4\pi\tau_{F1}\Phi_0$. Comme nous l'avons vu, l'action des supercordes possède plusieurs symétries locales, bosoniques et fermioniques :

– la symétrie de reparamétrage de la surface d'univers $\mathrm{Diff}_{\mathscr{S}_2}$;
– la supersymétrie locale ;
– la symétrie de Weyl $\mathscr{W}$;
– la symétrie superconforme.

En conséquence l'intégrale fonctionnelle sera redondante puisque nous intégrons des configurations des champs reliées par une transformation de jauge. Nous devons intégrer sur le quotient de toutes les super-géométries par toutes les symétries locales de l'action. Ce quotient s'appelle l'*espace des super-modules*. Pour cela nous allons utiliser une procédure de fixation de la jauge, en intégrant sur une tranche de l'espace des super-géometries qui est transverse aux orbites du groupe de symétries locales de la théorie. La mesure d'intégration sur la tranche sera obtenue par la procédure de Faddeev-Popov. Considérons en effet la variation de la métrique sous un difféomorphisme généré par le champ vectoriel v et une transformation de Weyl Λ infinitésimaux :

$$\delta_{\mathrm{Diff}_{\mathscr{S}_3}\ltimes\mathscr{W}} h_{ab} = \nabla_a v_b + v_b \xi_a + 2\Lambda h_{ab} =: \mathfrak{P}(v)_{ab} + 2\left(\Lambda + \frac{1}{2}\nabla_c v^c\right) h_{ab}\,,$$

où la deuxième égalité définit l'opérateur de projection $\mathfrak{P}$ vers les tenseurs de trace nulle. La deuxième partie de l'égalité correspond aux déformations affectant le déterminant de la métrique $\hat{\Lambda} = \Lambda + \frac{1}{2}\nabla_c v^c$. Nous voulons effectuer le changement de variables dans l'intégrale de chemin :

$$\mathscr{D}h = \mathscr{D}\mathfrak{P}(v)\ \mathscr{D}\hat{\Lambda} \to \mathbf{J} \times \mathscr{D}v\ \mathscr{D}\Lambda,$$

faisant apparaître le jacobien $\mathbf{J}$ de l'opérateur $\mathfrak{P}$. Les degrés de liberté v et Λ que nous avons factorisés sont les degrés de liberté de jauge. Nous pouvons ainsi choisir tout d'abord la **jauge conforme** :

$$h_{ab} = \Lambda(\sigma, t)\delta_{ab},$$

après avoir supprimé l'intégration sur les difféomorphismes.

Cependant cette procédure est compliquée par l'existence de *modes zéro* de l'opérateur de projection $\mathfrak{P}$, c.-à.-d. des champs vectoriels solution de l'équation : $\mathfrak{P}(v) = 0$. De tels champs vectoriels sont appelés *vecteurs de Killing conformes*, qui n'affectent pas la métrique. Notons qu'ils n'existent que sur les surfaces de genre zéro (au nombre de six) et sur les surfaces de genre un (au nombre de deux). Dans ces deux cas il va donc subsister dans l'intégrale de chemin une partie de la symétrie de jauge qui ne peut être éliminée. Si l'amplitude calculée contient un nombre suffisant d'opérateurs insérés sur la surface d'univers, il suffira d'en fixer la position pour un nombre égal au nombre de vecteurs de Killing conformes pour fixer cette symétrie résiduelle. En outre il existe des paramètres géométriques de la surface qui ne peuvent être éliminés par une combinaison de difféomorphismes connectés à l'identité et de transformations de Weyl. Ces paramètres forment un espace de dimension finie, appelé l'*espace de Teichmüller* $\mathrm{Teich}(\mathscr{S}_g)$. La dimension de cet espace des modules est nulle pour une surface de genre zéro, égale à deux pour un genre un – sur le tore – et pour un genre plus élevé :

$$\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Teich}(\mathscr{S}_g) = 6g - 6\ ,\ \ g \geqslant 2.$$

En gardant à l'esprit ces complications, nous utilisons maintenant la représentation de Faddeev-Popov du jacobien à l'aide d'une intégrale de Grassmann (c.-à.-d. sur des variables fermioniques), du champ vectoriel $\mathbf{c}^a$ et du tenseur de trace nulle $\mathbf{b}_{ab}$:

$$\mathbf{J} = \int_G \mathscr{D}b\,\mathscr{D}c\,\exp\left\{-\int \mathrm{d}^2w\,\sqrt{-h}\,h^{ab}\,\mathbf{b}_a{}^c\,\nabla_c\mathbf{c}^a\right\}.$$

Ces champs spinoriels, mais de spin entier, sont appelés **fantômes de Fadeev-Popov** associés aux reparamétrages. Dans les coordonnées complexes, nous introduisons les notations $\mathbf{b} := \mathbf{b}_{ww}$, $\tilde{\mathbf{b}} := \mathbf{b}_{\bar{w}\bar{w}}$, et $\mathbf{c} := \mathbf{c}_w$, $\tilde{\mathbf{c}} := \mathbf{c}_{\bar{w}\bar{w}}$. Dans cette représentation du jacobien, les vecteurs de Killing conformes correspondent aux modes zéro du champ $\mathbf{c}_a$ et les modules aux modes zéros du champ $\mathbf{b}_{ab}$. Le courant associé à ces champs $j_w =: \mathbf{cb}$: est anormal : $\bar{\partial} j = \frac{3}{8}\sqrt{-h}R^{(2)}$. L'intégration de cette anomalie conduit au *théorème de Riemann-Roch* : la différence du nombre de modes zéros de $\mathbf{c}$ et de $\mathbf{b}$ est égale à $3-3g$. Ces modes zéros devront être compensés dans le calcul d'amplitudes par l'insertion des champs $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ dans la mesure.

Généralisons maintenant la discussion aux super-surfaces qui apparaissent dans le développement perturbatif de la supercorde dans le formalisme de Ramond-Neveu-Schwarz. Nous souhaitons faire le choix de la **jauge superconforme** pour les transformations locales de supersymétrie :

$$\chi_a = \imath\gamma_a\eta(\sigma,t),$$

où η est le paramètre fermionique des transformations superconformes, voir eq. (I.18). À ce choix de jauge est aussi associé un jacobien, qui peut également se représenter comme une intégrale de chemin, cette fois sur des champs bosoniques (β,γ) de spins $(3/2,1/2)$, les fantômes de super-reparamétrage. Cette intégrale de chemin peut se combiner avec celle sur les fantômes de reparamétrage en une intégrale dans le super-espace, que nous donnons dans la jauge superconforme :

$$\mathbf{J}_s = \int \mathscr{D}\mathbf{B}\mathscr{D}\mathbf{C}\ \exp\left\{\int \mathrm{d}^2w\,\mathrm{d}^2\theta\ \mathbf{B}\bar{\mathfrak{D}}\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{B}}\mathfrak{D}\tilde{\mathbf{C}}\right\},$$

en fonction des super-champs : $\mathbf{B} = \beta + \theta^+\mathbf{b}$ et $\mathbf{C} = \gamma + \theta^+\mathbf{c}$, avec une définition similaire pour les autres composantes. Cependant, il existe le même problème que pour la partie bosonique de l'intégration sur les géométries. Premièrement, considérons une surface fermée de genre g ; celle-ci contient $2g$ cycles. Lors du transport parallèle d'un spineur ψ^μ le long de ce cycle, celui-ci peut acquérir une phase $\mathbb{Z}_2$: $\psi^\mu \to \pm\psi^\mu$. Ainsi, dans le super-espace $N=(1,1)$, il existe en principe 2^{4g} choix possibles, appelés *structures de spin*, analogues fermioniques de la somme sur les topologies. Enfin, les modes zéro de β, qui correspondent aux modules fermioniques de la super-surface, et les modes zéros de γ, qui correspondent aux *spineurs de Killing conformes*, devront aussi être compensés dans les calculs d'amplitudes.

Anomalies. Un certain nombre des symétries locales de l'action classique des cordes ne sont pas nécessairement préservées dans la théorie quantique : elles possèdent potentiellement des anomalies. La présence d'anomalies pour des symétries de jauge est en général désastreuse dans une théorie quantique, car elle empêche le découplage d'états de norme négative et viole ainsi l'unitarité.

Anomalie de Weyl. La première anomalie rencontrée dans la quantification de la théorie des supercordes est l'anomalie de Weyl. Rappelons que l'action classique des supercordes, eq. (I.17), est invariante sous les transformations de Weyl $h_{ab} \to e^{2\Lambda}h_{ab}$, mis à part le terme de couplage au dilaton. Ainsi le degré de liberté associé à Λ n'est pas présent dans la théorie classique. En revanche, la théorie quantique contiendra des divergences ultraviolettes qui devront être régularisées, ce qui brisera inévitablement la symétrie de Weyl. Par définition du tenseur d'énergie-impulsion, eq. (I.20), la variation d'une amplitude quelconque sous une symétrie de Weyl sera :

$$\delta_W\langle\mathscr{O}^1\cdots\mathscr{O}^n\rangle = -\frac{1}{2\pi}\int d^2w\,\delta\Lambda(w,\bar{w})\,\langle T_{w\bar{w}}\mathscr{O}^1\cdots\mathscr{O}^n\rangle.$$

Il s'agit d'un exemple d'*identité de Ward*. Ainsi la condition d'annulation de l'anomalie de Weyl pour toutes les amplitudes correspondra à l'annulation de la trace du tenseur d'énergie-impulsion de la théorie : $T_{w\bar{w}} = 0$. Lorsque la courbure de l'espace-temps est partout faible par rapport à

l'échelle de la théorie des cordes, les «champs de fond» peuvent être développés autour de l'espace plat, par exemple $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}(X)$. Les interactions du modèle sigma peuvent alors être traitées perturbativement, et le développement s'organisera en puissances du paramètre α', relié à la tension des supercordes par $\tau_{F1} = 1/2\pi\alpha'$. À cause des divergences ultraviolettes, toutes ces constantes de couplage seront *renormalisées* dans la théorie quantique, c.-à.-d. dépendront de l'échelle d'énergie. L'anomalie recevra des contributions de tous les couplages de la théorie :

$$T_{w\bar{w}} = \beta^{\Phi}\sqrt{-h}R^{(2)} + \left(\beta^{g}_{\mu\nu} + \beta^{\mathbf{B}}_{\mu\nu}\right)\partial X^{\mu}\bar{\partial}X^{\nu} + \cdots$$

où les *fonctions* β associées aux champs de fond de la théorie $g_{\mu\nu}$, $\mathbf{B}_{[2]}$,... décrivent l'évolution des constantes de couplage en fonction de l'échelle dans la théorie renormalisée. Ainsi, la condition d'annulation de l'anomalie de Weyl s'écrit : $\beta^{g} = \beta^{\mathbf{B}} = \beta^{\Phi} = 0$. De façon remarquable, ces équations d'annulation des anomalies, au premier ordre en α', reproduisent les équations du mouvement pour les champs correspondants de supergravité (dans le cas hétérotique, les équations du mouvement pour le champ de jauge sont aussi obtenues). Le calcul à des ordres plus élevés en α' produit des corrections à la supergravité impliquant des termes à plus de deux dérivées. Par contre, les champs de «Ramond–Ramond» ne sont pas inclus dans ce formalisme. Remarquons pour finir que, dans le cas où nous aurions choisi de définir la théorie des supercordes dans une dimension d différente de dix, la fonction β du dilaton reçoit une contribution constante :

$$\beta^{\Phi} = \frac{\tau_{F1}}{24\pi}(d-10) + \cdots,$$

et dans ce cas l'espace-temps plat, sans champ de fond, est incompatible avec la symétrie de Weyl – ceci est une justification a posteriori pour le choix de dix dimensions pour définir la théorie – et il faut conserver le degré de liberté associé aux transformations de Weyl dans la théorie. Nous obtenons alors une *théorie des cordes non-critique*, sur laquelle nous reviendrons par la suite, avec la théorie de Liouville. Cependant cette théorie possède quand même la symétrie conforme comme symétrie résiduelle, suffisante pour obtenir une théorie unitaire.

Anomalie chirale. La supergravité bidimensionnelle de la corde hétérotique contient des fermions chiraux de la surface d'univers couplés à la gravitation ; nous attendons la présence d'une anomalie gravitationnelle correspondante. Il s'avère cependant [18] que cette anomalie peut être compensée par le terme de Wess-Zumino, mais uniquement dans le cas où les fermions se transforment dans un groupe de dimension 256. Ainsi nous trouvons que le groupe de jauge de la théorie est $SO(32)$ ou $E_8 \times E_8$, en accord avec le résultat de l'annulation des anomalies d'espace-temps dans la supergravité [20,21], bien que d'origine complètement différente.

Quantification BRST. Considérons maintenant que les conditions d'annulation des anomalies potentielles de la théorie sont satisfaites. Les degrés de liberté associés aux transformations de Weyl et de super-Weyl découplent de la théorie. Cependant, la théorie possède encore une symétrie résiduelle de dimension infinie, la *symétrie superconforme*. En effet l'action des supercordes est invariante sous les transformations infinitésimales suivantes de coordonées du super-espace :

$$\delta w = \varepsilon\left[f(w) - \imath\theta\eta(w)\right], \quad \delta\theta = \varepsilon\left[\frac{1}{2}\theta\partial f(w) - \imath\eta(w)\right], \tag{I.26}$$

où $f(w)$ est une fonction holomorphe bosonique – générant une transformation conforme – et $\eta(w)$ une fonction holomorphe fermionique, générant les transformations superconformes proprement dites. Ces transformations sont générées par l'action du super-tenseur d'énergie-impulsion, dont l'expression est la suivante dans un modèle sigma non-linéaire générique (I.22) :

$$\mathbf{T}(w,\theta^{+}) = \mathfrak{D}\mathbf{X}^{\mu}\partial\mathbf{X}^{\mu}g_{\mu\nu} - \frac{\imath}{3}\mathfrak{D}\mathbf{X}^{\mu}\mathfrak{D}\mathbf{X}^{\nu}\mathfrak{D}\mathbf{X}^{\nu}\mathscr{H}_{\mu\nu\rho} =: G(w) + \theta^{+}T(w), \tag{I.27}$$

soit en composantes :

$$T(w) = \partial X^\mu \partial X^\nu g_{\mu\nu} + \imath \psi^\mu \nabla^+ \psi^\nu g_{\mu\nu} \quad , \quad G(w) = \psi^\mu \left(\partial X^\nu g_{\mu\nu} - \frac{\imath}{3} \psi^\nu \psi^\rho \mathscr{H}_{\mu\nu\rho} \right).$$

Le transformations super-conformes anti-holomorphes sont générées par des opérateurs d'expression similaire. L'étude de ces symétries et leur conséquences seront abordées en détail dans le deuxième chapitre de cette thèse.

Pour le moment nous nous intéresserons à une autre symétrie intimement liée à la première. Cette symétrie, qui apparaît génériquement dans une théorie possédant une symétrie locale est la **symétrie BRST**, pour *Becchi-Rouet-Stora-Tyutin*. Considèrons une théorie de jauge quelconque, avec des générateurs de symétries locales δ_α, satisfaisant une algèbre $[\delta_\alpha, \delta_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^\gamma \delta_\gamma$. Nous voulons fixer la jauge par les conditions : $F^A(\phi^i) = 0$. Avec la procédure de Fadeev-Popov, nous pouvons réécrire l'action, une fois le choix de jauge imposé, à l'aide de champs auxiliaires, les fantômes (b_A, c^α) et les anti-fantômes B_A :

$$\int \frac{\mathscr{D}\phi}{V_{\text{jauge}}} e^{-S(\phi)} \quad = \quad = \int \mathscr{D}\phi \mathscr{D}B_A \mathscr{D}b_A \mathscr{D}c^\alpha \, e^{-S(\phi) - \imath \int B_A F^A - \int b_A (\delta_\alpha F^A) c^\alpha}.$$

En effet, l'intégration sur les multiplicateurs de Lagrange B_A reproduit les conditions de jauge, et l'action des fantômes le jacobien de changement de variables. Cette action est invariante sous la transformation suivante, dite BRST, de paramètre fermionique ζ :

$$\delta_B \phi_i = -\imath \zeta c^\alpha \delta_\alpha \phi_i \ , \quad \delta_B b_A = -\zeta B_A \ , \quad \delta_B c^\alpha = -\frac{1}{2} \zeta c^\beta c^\gamma f_{\beta\gamma}{}^\alpha \ , \quad \delta_B B_A = 0.$$

La transformation des champs ϕ^i est identique à une transformation de jauge ordinaire, mais le paramètre de transformation est associé aux fantômes c^α. Cette transformation est associée à une charge conservée Q_{BRST}. Lors du calcul d'amplitudes de diffusion entre des états physiques de la théorie quantique, nous devons naturellement obtenir des résultats qui ne dépendent pas du choix de jauge particulier que nous avons fait pour calculer l'intégrale de chemin. Cette condition se traduit par la condition suivante sur tous les états physiques de la théorie : $Q_{BRST}|\text{phys}\rangle = 0$. En outre la symétrie BRST doît être conservée dans la théorie quantique. L'opérateur BRST doit donc commuter avec la variation de l'hamiltonien de la théorie sous un changement de choix de jauge. Ceci impose que l'opérateur BRST soit nilpotent : $Q_{BRST}^2 = 0$. En conséquence, tout état de la forme $Q_{BRST}|\phi\rangle$, appelé BRST exact, sera un état physique, mais il sera orthogonal à tous les états physiques, car $\langle \text{phys}|Q_{BRST}|\phi\rangle = 0$. Ainsi l'espace de Hilbert des états physiques de la théorie quantique sera contenu dans la *cohomologie* de l'opérateur BRST, c'est à dire :

$$\mathscr{H} \in \mathbb{H}(Q_{BRST}) = \frac{|\phi\rangle \, , \, Q_{BRST}|\phi\rangle = 0}{|\psi\rangle \, , \, |\psi\rangle = Q_{BRST}|\chi\rangle}.$$

Dans le cas de la théorie des supercordes, la charge Q_{BRST} provient du choix de jauge conforme pour les reparamétrages et de jauge superconforme pour les super-reparamétrages. L'expression de la charge BRST se factorise en deux charges respectivement holomorphes et anti-holomorphes. L'expression explicite de la charge BRST holomorphe est donnée l'intégrale suivante du courant $\mathbb{J}_{BRST}$ holomorphe :

$$\begin{aligned} Q_{BRST} &= \oint \frac{\mathrm{d}w \mathrm{d}\theta^+}{2\imath\pi} \mathbb{J}_{BRST}(w, \theta^+) \\ &= \oint \frac{\mathrm{d}w \mathrm{d}\theta^+}{2\imath\pi} \mathbf{C} \left\{ T(w, \theta^+) + \frac{1}{2} T_{gh}(w, \theta^+) - \frac{3}{4} \mathfrak{D} \left[\mathbf{C} \left(\mathfrak{D} \mathbf{C} \right) \mathbf{B} \right] \right\}, \end{aligned} \tag{I.28}$$

en fonction du super-tenseur d'énergie-impulsion des super-fantômes

$$T_{gh}(w,\theta) = -\mathbf{C}\,\mathfrak{D}^2\,\mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{D}\mathbf{C}\,\mathfrak{D}\,\mathbf{B} - \frac{3}{2}\mathfrak{D}^2\,\mathbf{CB}.$$

Pour la charge anti-holomorphe $\tilde{Q}_{BRST}$ nous obtenons une expression similaire, pour les théories de type II.[l] Les états physiques des supercordes doivent alors appartenir à la cohomologie de l'opérateur $Q_{BRST} + \tilde{Q}_{BRST}$. Cependant d'autres contraintes, comme entre autres l'unitarité de la théorie et éventuellement la supersymétrie d'espace-temps, conduisent à des restrictions supplémentaires sur le spectre physique. Notons enfin que l'opérateur BRST n'est nilpotent, et donc la quantification BRST possible, que si les conditions d'annulation des anomalies de Weyl sont satisfaites.

Cordes ouvertes. Les théories de supercordes peuvent se généraliser en leur ajoutant des secteurs de *cordes ouvertes*. La surface d'univers est alors une bande, et les condititions aux bords, en $\sigma = 0, \pi$ doivent être spécifiées. Lorsque des conditions de *Dirichlet* sont choisies le long de certaines directions, les extrémités des cordes ouvertes sont partiellement localisées. Il fut ensuite réalisé [22] que les hypersurfaces balayées par ces extrémités de cordes ouvertes ne sont rien d'autre que les D-branes décrites en supergravité. Il est ainsi possible d'étudier la physique de ces objets non-perturbatifs grâce aux degrés de liberté des cordes ouvertes attachées dessus. En particulier, les extrémités des cordes portent une charge, dite de «Chan-Patton» par rapport à un groupe de jauge U(N) – pour N D-branes coïncidentes –, et leur théorie effective est une théorie de jauge supersymétrique, qui ne contient pas la gravitation, associée aux cordes fermées. Cependant, cette approche n'est exacte qu'au premier ordre des perturbations, car elle ne tient pas compte de la déformation de l'espace-temps induite par la D-brane.

Fonction de partition à une boucle. Un exemple particulièrement utile de calcul d'amplitudes est la fonction de partition à une boucle, c.-à.-d. l'amplitude «vide–vide» sur le tore de genre un. Le tore posséde un paramètre de Teichmüller complexe τ. Une représentation du tore est donnée

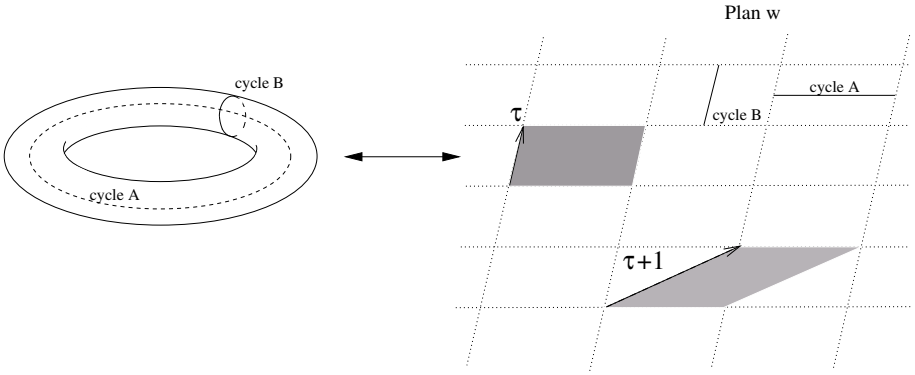

FIG. I.4. Tore de module τ, représentation dans le plan complexe.

par le plan complexe $(w,\bar{w})$, avec les identifications (voir fig. I.4) : $w \sim w + 2\pi(m\tau + n)$. Cependant il existe d'autres paramétrages équivalents du tore : ainsi, la transformation $T\ : \tau \to \tau + 1$ conduit à une identification de paramètre $(m-n,n)$, voir la figure, et la transformation $S\ : \tau \to {}^{-1}/_{\tau}$ à l'identication de paramètres $(n,-m)$. Cette dernière transformation revient à échanger les deux

[l] Dans la corde hétérotique l'opérateur BRST anti-holomorphe correspond uniquement aux symétries de reparamétrage bosoniques, associées aux fantômes (b,c).

cycles A et B du tore. Ces deux transformations génèrent le *groupe modulaire du tore*, $PSL(2,\mathbb{Z}) = SL(2,\mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$:

$$\tau \to \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\ , \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}\ , \quad ad-bc=1\ , \quad (a,b,c,d) \sim -(a,b,c,d).$$

Cette symétrie permet de choisir un représentant de l'orbite de τ dans le *domaine fondamental*, défini par :

$$\mathfrak{F}_0 = \{\tau \in \mathbb{C}\ , \quad |\Re\tau| \leqslant 1/2\ , \quad |\tau| \geqslant 1\}\,.$$

D'autre part, le tore possède un vecteur de Killing conforme, complexe, correspondant aux translations sur le tore. Ainsi, la mesure d'intégration doit être divisée par le volume du groupe de Killing conforme, soit l'aire du tore $(2\pi)^2\tau_2$.[m] La fonction de partition à une boucle s'exprime simplement en utilisant un formalisme hamiltonien. Elle s'interprète en effet comme le processus où une corde fermée est créée du vide, se propage selon le temps euclidien $\mathfrak{t} = \Im w$ pendant $2\pi\tau_2$, et le long de la coordonnée longitudinale de la corde $\sigma = \Re w$ de $2\pi\tau_1$. Le générateur des translations temporelles est le Hamiltonien H, et le générateur des translations spatiales l'impulsion P :

$$\begin{aligned} H &= \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{2\pi}\left\{T(\sigma,0)+T_{gh}(\sigma,0)+\bar{T}(\sigma,0)+\bar{T}_{gh}(\sigma,0)\right\} =: L_0+\bar{L}_0\,, \\ P &= \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{2\pi}\left\{T(\sigma,0)+T_{gh}(\sigma,0)-\left[\bar{T}(\sigma,0)+\bar{T}_{gh}(\sigma,0)\right]\right\} =: L_0-\bar{L}_0. \end{aligned}$$

Les états qui «circulent» dans la fonction de partition sont, comme en théorie des champs, tous les états physiques de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Ainsi la fonction de partition peut s'écrire :

$$Z = \int_{\mathfrak{F}_0} \frac{\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\bar{\tau}}{4\tau_2}\,\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}}\, e^{2\imath\pi\tau_1 P} e^{-2\pi\tau_2 H} = \int_{\mathfrak{F}_0} \frac{\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\bar{\tau}}{4\tau_2}\,\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}}\, q^{L_0}\,\bar{q}^{\bar{L}_0}\,,$$

où nous avons défini $q = \exp 2\imath\pi\tau$. L'amplitude à une boucle doît être invariante sous le groupe modulaire $PSL(2,\mathbb{Z})$, qui transforme le paramétrage de la surface d'univers en un paramétrage équivalent. Cette condition, appelée **invariance modulaire**, impose des contraintes très fortes sur le spectre admissible de la théorie. Le spectre physique de la théorie des supercordes se lit dans la fonction de partition en développant l'intégrande en puissances de q et $\bar{q}$.

I.4. Supercordes dans Minkowski

Pour illustrer la construction générale précédente, nous allons considérer la propagation des supercordes de type II dans un espace-temps plat de Minkowski. Dans ce cas les champs X^μ et ψ^μ sont simplement des champs libres sur la surface d'univers. Plaçons nous sur une surface de genre zéro, topologiquement une sphère. Les coordonnées complexes que nous avons définies $w, \bar{w}$ pour paramétrer la surface d'univers décrivent un cylindre, avec l'identification $w \sim w+2\pi$. Lorsque les fermions de la surface d'univers $\psi^\mu, \tilde{\psi}^\mu$ sont transportés le long de ce cercle, ils peuvent acquérir une phase :

$$\psi^\mu(w) = \eta\,\psi^\mu(w+2\pi)\ , \quad \tilde{\psi}^\mu(\bar{w}) = \bar{\eta}\,\psi^\mu(\bar{w}+2\pi),$$

avec $\eta = +$ pour le **secteur de Ramond** R ($a=1$), et $\eta = -$ pour le **secteur de Neveu-Schwarz** NS ($a=0$). Dans ces deux secteurs, nous pouvons développer en modes les champs libres de la

[m] Il faut aussi diviser la mesure par 2 pour tenir compte de la symétrie $\tau \to -\tau$.

théorie :

$$\begin{aligned}
\partial\bar{\partial}X^\mu = 0 \quad &\Longrightarrow \quad X^\mu(w,\bar{w}) = x^\mu + \frac{p^\mu}{2}(w+\bar{w}) + \imath\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left[\alpha^\mu_n e^{-\imath n w} + \tilde{\alpha}^\mu_n e^{-\imath n \bar{w}}\right] , \\
\bar{\partial}\psi^\mu = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \psi^\mu = \imath^{-1/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac{a-1}{2}} \psi^\mu_n e^{-\imath n w} , \\
\partial\tilde{\psi}^\mu = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \tilde{\psi}^\mu = \imath^{+1/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac{\bar{a}-1}{2}} \tilde{\psi}^\mu_n e^{-\imath n \bar{w}}.
\end{aligned}$$

Cette théorie peut être quantifiée en imposant les relations de commutations canoniques :

$$[\alpha^\mu_n, \alpha^\nu_m] = [\tilde{\alpha}^\mu_n, \tilde{\alpha}^\nu_m] = \{\psi^\mu_n, \psi^\nu_m\} = \{\tilde{\psi}^\mu_n, \tilde{\psi}^\nu_m\} = m\delta_{m,-n}\eta^{\mu\nu} , \quad [x^\mu, p^\mu] = i\eta^{\mu\nu}.$$

L'opérateur BRST de la théorie s'exprime à l'aide du super-tenseur d'énergie impulsion de la théorie libre :

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(w,\theta^+) = -\frac{1}{2}\mathfrak{D}\mathbf{X}^\mu\mathfrak{D}\mathbf{X}_\mu \quad &= \quad -\frac{1}{2}\left[\psi^\mu\partial X_\mu + \theta\left(\frac{2}{\alpha'}\partial X^\mu\partial X_\mu + \psi^\mu\partial\psi_\mu\right)\right] \\
&=: \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[e^{-\imath(\frac{3}{2}+n+\frac{a-1}{2})w}G_{n+\frac{a-1}{2}} + \theta^+ e^{-\imath(2+n)w}L_n\right],
\end{aligned}$$

avec une contribution anti-holomorphe similaire. L'Hamiltonien de la théorie, correspondant au générateur des translations temporelles sur la surface d'univers, est donné par le mode zéro du tenseur d'énergie impulsion :

$$\begin{aligned}
H = L_0 + \bar{L}_0 = \frac{\alpha'}{2}p^\mu p_\mu + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\alpha^\mu_{-n}\alpha_{n\mu} + \tilde{\alpha}^\mu_{-n}\tilde{\alpha}_{n\mu} + \left(n+\frac{a-1}{2}\right)\psi^\mu_{-n-\frac{a-1}{2}}\psi_{n+\frac{a-1}{2}\mu} \\
+\left(n+\frac{a-1}{2}\right)\tilde{\psi}^\mu_{-n-\frac{a-1}{2}}\tilde{\psi}_{n+\frac{a-1}{2}\mu}\Bigg\} + L_0^{\text{fantômes}} + \bar{L}_0^{\text{fantômes}} + (a-1)\,.
\end{aligned} \tag{I.29}$$

Le terme constant est appelé «énergie de point zéro». L'invariance BRST impose sur les états physiques du secteur de matière de la théorie les contraintes suivantes :

$$\left\{L_{n\geqslant 0} + \frac{a-1}{2}\right\}|\text{phys}\rangle = G_{n\geqslant\frac{1-a}{2}}|\text{phys}\rangle = \left\{\bar{L}_{n\geqslant 0} + \frac{\bar{a}-1}{2}\right\}|\text{phys}\rangle = \bar{G}_{n\geqslant\frac{1-\bar{a}}{2}}|\text{phys}\rangle = 0.$$

Secteur de «Neveu-Schwarz–Neveu-Schwarz». Dans ce secteur nous avons tout d'abord l'état fondamental de la théorie $|p^\mu\rangle \otimes \widetilde{|p^\mu\rangle} \otimes |0\rangle_{\text{NS}} \otimes \widetilde{|0\rangle}_{\text{NS}}$, où le premier facteur est le vide des oscillateurs bosoniques, vérifiant $\alpha^\mu_{n>0}|p^\mu\rangle = 0$ et $\alpha^\mu_0|p^\mu\rangle = p^\mu|p^\mu\rangle$. De même le vide de Neveu-Schwarz et anihilé par tous les oscillateurs positifs. Cet état est un *tachyon*, car sa masse est imaginaire. En effet, d'après la définition de l'hamiltonien des cordes, eq. (I.29), nous obtenons $p^2 = -M^2 = 2/\alpha'$. La présence de cet état est catastrophique car elle signifie que l'état fondamental est instable ; nous verrons comment le supprimer du spectre. Ensuite, nous avons un premier état excité, $e_{\mu\nu}|p^\mu\rangle \otimes \widetilde{|p^\mu\rangle} \otimes \psi^\mu_{-1/2}|0\rangle_{\text{NS}} \otimes \tilde{\psi}^\nu_{-1/2}\widetilde{|0\rangle}_{\text{NS}}$, cette fois-ci de masse nulle. Le tenseur de polarisation $e_{\mu\nu}$ se décompose en un tenseur symétrique de trace nulle, un tenseur antisymétrique et un scalaire, correspondant respectivement au graviton, aux fluctuations de la deux-forme $\mathbf{B}_{[2]}$ et du dilaton Φ. Ainsi le spectre perturbatif de la théorie des supercordes contient naturellement la gravitation.

Secteur de «Ramond–Neveu-Schwarz». Dans le secteur de Ramond, le vide des champs ψ, $|\alpha\rangle_R$, est dégénéré en raison de la présence des modes zéros. En effet, ceux-ci génèrent une algèbre de Clifford $\{\psi_0^\mu, \psi_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu}$, et le vide possèdera un indice spinoriel α de $SO(1,9)$. L'état de masse minimale dans le secteur de «Ramond–Neveu-Schwarz» est l'état de masse nulle suivant : $u_\alpha^\mu |p^\mu\rangle \otimes \widetilde{|p^\mu\rangle} \otimes |\alpha\rangle_{\mathrm{R}} \otimes \tilde{\psi}_\mu \widetilde{|0\rangle}_{\mathrm{NS}}$, où le tenseur de polarisation obéit à l'équation du mouvement linéarisée du gravitino : $p_\mu p_\nu \gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\nu_\beta = 0$. Le secteur de «Neveu-Schwarz–Ramond» donne une contribution similaire au spectre.

Secteur de «Ramond–Ramond». Dans ce cas nous obtenons le produit tensoriel de vides de Ramond dans les deux secteurs, holomorphes et antiholomorphes. Ces états, de masse nulle, se transforment dans le produit tensoriel de représentations spinorielles de $SO(1,9)$, c.-à.-d. comme des p-formes. Ces états ne sont rien d'autre que les fluctuations des formes $\mathbf{A}_{[n]}$ des supergravités de type II, les *formes de Ramond–Ramond*.

Projection GSO. Le spectre que nous avons décrit jusqu'à présent ne correspond pas à une théorie bien définie. Premièrement, le spectre contient un tachyon destabilisant la théorie. Deuxièmement, le secteur de Ramond contient deux fois trop d'états fermioniques. Nous devons alors conserver uniquement une partie des états physiques, en effectuant une projection compatible avec la structure de la théorie. Nous définissions pour cela le courant associé au *nombre fermionique* :

$$\mathscr{J} = \psi^0\psi^1 - \imath \sum_{n=1}^{4} \psi^{2n}\psi^{2n+1} + \beta\gamma,$$

La charge des états de la théorie sous ce courant, le nombre fermionique, est notée F. Nous pouvons alors définir un opérateur $\mathbb{Z}_2$ par $(-)^F$ pour classifier les états du spectre.

Secteur	repr. $SO(9,1)$	$(-1)^F$	m^2
$NS+$	**10**	$+1$	0
$NS-$	**1**	-1	$-\frac{1}{2\alpha'}$
$R+$	**16**	$+1$	0
$R-$	**16′**	-1	0

avec une classification similaire pour les opérateurs du secteur anti-holomorphe. La *projection GSO* correspond à ne garder, dans le secteur de Neveu-Schwarz, que les états de nombre fermionique pair. Cela élimine le tachyon (NS_-) et conserve le premier niveau excité (NS_+). Ensuite, dans le secteur de Ramond, nous ne conservons que les états de parité donnée, R_+ ou R_-. Cette projection s'effectue indépendemment sur les secteurs gauche et droit de la théorie. Nous obtenons alors deux théories de supercordes bien définies.

- Supercordes de type IIA : le spectre de cette théorie comprend les secteurs $(\mathrm{NS}_+, \mathrm{NS}_+) \oplus (\mathrm{NS}_+, \mathrm{R}_-) \oplus (\mathrm{R}_+, \mathrm{NS}_+) \oplus (\mathrm{R}_+, \mathrm{R}_-)$. Le secteur $(\mathrm{R}_+, \mathrm{R}_-)$ contient des états se transformant dans les représentations $\mathbf{16} \otimes \mathbf{16}' = [0] + [2] + [4]$, ce qui correspond au spectre des formes $\mathbf{A}_{[n]}$ de la supergravité IIA ;
- Supercordes de type IIB : le spectre est $(\mathrm{NS}_+, \mathrm{NS}_+) \oplus (\mathrm{NS}_+, \mathrm{R}_+) \oplus (\mathrm{R}_+, \mathrm{NS}_+) \oplus (\mathrm{R}_+, \mathrm{R}_+)$. Le secteur $(\mathrm{R}_+, \mathrm{R}_+)$ contient des états se transformant dans les représentations $\mathbf{16} \otimes \mathbf{16}' = [1] + [3] + [5]_+$, correspondant au spectre des formes $\mathbf{A}_{[n]}$ de la supergravité IIB.

Ce choix de secteurs est compatible avec l'invariance modulaire, et donne une théorie unitaire. En effet, la fonction de partition pour les théories de type II est donnée par :

$$Z = V_{10} \int_{\mathfrak{F}_0} \frac{\mathrm{d}\tau \mathrm{d}\bar{\tau}}{4\tau_2} \int \frac{d^{10}p}{(2\pi)^{10}} \frac{e^{-\pi\tau_2\alpha' p^2}}{|\eta(\tau)|^{16}} \frac{1}{2} \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2} (-)^{a+b} \frac{\vartheta^4 \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right](\tau)}{\eta^4(\tau)} \frac{1}{2} \sum_{\bar{a},\bar{b}\in\mathbb{Z}_2} (-)^{\bar{a}+\bar{b}+\varepsilon ab} \frac{\bar{\vartheta}^4 \left[\begin{smallmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{smallmatrix}\right](\bar{\tau})}{\bar{\eta}^4(\bar{\tau})},$$

où, premièrement, le facteur $|\eta|^{-16}$ représente la contribution de l'action de tous les oscillateurs bosoniques α^μ_{-n}, et s'exprime à l'aide de la *fonction de Dedekind* :

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)\ , \quad q = e^{2i\pi\tau}. \tag{I.30}$$

Les modes zéro des champs bosoniques génèrent l'intégrale sur l'impulsion p^μ. Deuxièmement, la contribution de chaque paire de fermions chiraux est donnée par le caractère $\vartheta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right](\tau)/\eta(\tau)$, à l'aide des fonctions théta de Jacobi :

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi b(n+\frac{a}{2})} q^{\frac{1}{2}(n+\frac{a}{2})^2}\ , \tag{I.31}$$

où (a,b) sont les structures de spin le long des deux cycles du tore. Dans le langage hamiltonien, le secteur (NS ou R) est donné par $a = 0,1$, et la projection GSO est implémentée dans chaque secteur par la somme sur b. Enfin la variable ε distingue la théorie IIB ($\varepsilon = 0$) de la théorie IIA ($\varepsilon = 1$). L'invariance modulaire de cette expression peut se prouver explicitement. En outre il est possible de montrer que cette expression s'annule, en raison de la supersymétrie d'espace-temps.

Cordes hétérotiques. La corde hétérotique est construite avec un secteur holomorphe semblable aux théories de type II, c.-à.-d. possédant la symétrie superconforme $N = 1$, dont la contribution à la charge BRST est donnée par l'intégrale (I.28) dans le super-espace. Par contre, le secteur antiholomorphe est purement bosonique, composé des coordonnées X^μ et des fermions «internes» $\lambda^i(\bar{w})$. La charge BRST antiholomorphe est alors :

$$\bar{Q}_{BRST} = -\oint \frac{\mathrm{d}\bar{w}}{2\pi\imath} \left\{ c \left(-\frac{1}{2}\bar{\partial}X^\mu \bar{\partial}X_\mu - \frac{1}{2}\lambda^i \bar{\partial}\lambda_i \right) + :\mathbf{bc}\,\bar{\partial}\mathbf{c}: + \frac{3}{2}\bar{\partial}^2\mathbf{c} \right\},$$

dépendant uniquement des fantômes de reparamétrage et non de ceux de super-reparamétrage. Là encore, nous pouvons constater que cet opérateur n'est nilpotent que si le nombre de fermions λ^i est 32, ce qui coïncide avec la condition des anomalies d'espace-temps dans la supergravité. Lorsque tous les fermions ont des conditions de periodicités identiques (Ramond ou Neveu-Schwarz), nous obtenons le groupe de jauge $SO(32)$. Lorsque les fermions sont séparés en deux groupes de seize avec des periodicités différentes, nous obtenons le groupe de jauge $E_8 \times E_8$. Ce sont les seuls choix invariants modulaires dans l'espace-temps plat.

Cordes de type I. Jusqu'à présent nous avons discuté de théories de supercordes pour lesquelles la surface d'univers est une variétée *orientée*. Nous pouvons aussi définir une théorie de supercordes non orientées, la théorie de type I, en ne conservant que les états invariants sous l'opérateur de parité de la surface d'univers $\Omega : w \to -\bar{w}$; cette projection s'appelle un **orientifold**. Cette construction n'est possible que dans la théorie des supercordes IIB qui contient des fermions d'espace-temps de même chiralité dans le secteur gauche et le secteur droit.

Dans le développement perturbatif, l'insertion de l'opérateur Ω dans le cycle correspondant au temps Euclidien revient à ajouter dans la somme sur les topologies les *surfaces non-orientées*, par exemple, à une boucle, la bouteille de Klein. Cependant, cette théorie n'est pas stable : en effet

le diagramme de la bouteille de Klein possède une divergence infrarouge, correspondant à l'émission de modes de masse nulle. Rappellons maintenant que, dans la supergravité, les orientifolds correspondent à des objets de masse négative chargés sous les formes de «Ramond–Ramond». Dans le cas présent nous avons affaire à un orientifold O_9 remplissant tout l'espace-temps, et la divergence correspond à l'émission de gravitons et du champ de «Ramond–Ramond».

Pour compenser cette divergence, nous devons rajouter au développement perturbatif des surfaces d'univers avec bord, c.-à.-d. des **cordes ouvertes**, dont les extrémités portent une charge associée à un groupe de jauge G. À une boucle, la divergence de la bouteille de Klein est annulée par l'amplitude sur l'anneau (surface avec bord orientée) et l'amplitude sur le ruban de Möbius (surface avec bord non orientée), mais uniquement si le groupe de jauge est $SO(32)$; nous retrouvons ici aussi la condition d'annulation des anomalies de la supergravité de type I d'une manière complètement différente. Les cordes ouvertes que nous avons introduites sont attachées à des D9-branes remplissant tout l'espace-temps, de charges et masse opposées à l'orientifold.

I.5. Dualités

Dans la section précédente nous avons construit cinq théories de supercordes en quantifiant les objets étendus BPS à $1+1$ dimensions des supergravités à dix dimensions correspondantes. Une des ambitions de la théorie des supercordes étant d'unifier les lois fondamentales de la physique, nous pouvons nous demander si ces différentes théories sont bien distinctes, ou bien décrivent la même physique dans des régimes différents. Nous allons maintenant évoquer l'existence de *dualités* unifiant ces différentes descriptions, et menant au diagramme de la figure 3.

Dualités perturbatives. En théorie des supercordes, les objets élémentaires ne sont plus ponctuels mais étendus dans une direction spatiale. Nous attendons donc que la géométrie de l'espace-temps ressentie par les cordes, pour des échelles petites devant $\sqrt{\alpha'}$ – l'échelle des cordes – soit radicalement différente. Il existe en effet une dualité des modèles sigma non-linéaires, échangeant petites et grandes échelles, appelée génériquement «dualité T» [23]. Considérons un modèle sigma-non linéaire bosonique, possédant une isométrie associée aux translations du champ de la surface d'univers $Y(w,\bar{w})$. Nous pouvons alors coupler minimalement ce champ à un champ de jauge $(\mathbf{A},\bar{\mathbf{A}})$ pour rendre cette symétrie locale :

$$S=\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^2w\,\Big[(g_{ij}+\mathbf{B}_{ij})\partial X^i\bar{\partial}X^j+\mathbf{B}_{yi}(\partial Y+\mathbf{A})\bar{\partial}X^i+\mathbf{B}_{iy}\partial X^i(\bar{\partial}Y+\bar{\mathbf{A}})$$
$$+\quad G_{yy}(\partial Y+\mathbf{A})(\bar{\partial}Y+\bar{\mathbf{A}})+\tilde{Y}\mathscr{F}-\frac{\pi}{2}R^{(2)}\Phi\Big]\,.$$

La courbure $\mathscr{F}=\partial\bar{\mathbf{A}}-\bar{\partial}\mathbf{A}$ est couplée au multiplicateur de Lagrange $\tilde{Y}$, forçant la connexion à être plate. Sur une surface topologiquement triviale, cela implique $\mathbf{A}=\partial X$, $\bar{\mathbf{A}}=\bar{\partial}X$. En choisissant la jauge $Y=0$, nous retrouvons le modèle sigma original avec le remplacement $Y\to X$. Par contre, si nous intégrons le champ de jauge et non le multiplicateur de Lagrange, nous obtenons le modèle sigma T-dual, exprimé dans les champs $\{X^i,\tilde{Y}\}$, avec les champs de fond :

$$\tilde{g}_{\tilde{y}\tilde{y}}=\frac{1}{g_{yy}}\,,\quad \tilde{g}_{\tilde{y}i}=\frac{\mathbf{B}_{yi}}{g_{yy}}\,,\quad \tilde{g}_{ij}=g_{ij}-\frac{g_{iy}g_{jy}+\mathbf{B}_{iy}\mathbf{B}_{yj}}{g_{yy}}\,,$$
$$\tilde{\mathbf{B}}_{yi}=\frac{g_{yi}}{g_{yy}}\,,\quad \tilde{\mathbf{B}}_{ij}=\mathbf{B}_{ij}-\frac{g_{iy}\mathbf{B}_{yj}+\mathbf{B}_{iy}g_{yj}}{g_{yy}}\,,\quad \tilde{\Phi}=\Phi+\log g_{yy}.$$

Le changement du dilaton vient du jacobien généré par l'intégration sur les champs de jauge. Notons que la dérivation de la dualité est uniquement valable au premier ordre en α'. Par exemple,

il n'est pas certain a priori que l'isométrie de translation existe dans la théorie quantique complète. Néamoins, comme nous le verrons plus tard, il existe un certain nombre d'exemples de théories des cordes exactement solubles où cette dualité est exacte. Dans les modèles sigma des supercordes de type II, un autre effet de cette dualité est de changer le signe du fermion droit de la surface d'univers $\tilde{\psi}^{\mathrm{Y}} \to -\tilde{\psi}^{\mathrm{Y}}$ associé au champ dualisé. Ainsi cette transformation va changer la chiralité de l'état fondamental du secteur de Ramond, et donc d'échanger les théories des supercordes IIA et IIB.

Dualités non-perturbatives. Dans ce chapitre nous avons d'abord construit les supergravités qui constituent les théories effectives de basse énergie des théories des cordes correspondantes : types IIA, type IIB, type I, hétérotique $SO(32)$ ou $E_8 \times E_8$. Nous pouvons nous demander s'il existe des relations entre ces théories des cordes distinctes ; nous avons déjà trouvé une dualité perturbative – par rapport à la constante de couplage des cordes donnée par le dilaton – entre les théories IIA et IIB. Nous cherchons maintenant des *dualités non-perturbatives* [24–26], reliant le régime pertubatif de certaines théories des cordes avec le régime de couplage fort d'autres théories, qui devraient se refléter dans les propriétés des supergravités.[n]

Auto-dualité de la théorie IIB. Nous avons vu dans la section I.1 que la supergravité IIB possède une symétrie $SL(2,\mathbb{R})$, dont un sous-groupe échange le régime de couplage fort et le régime de couplage faible. Une telle dualité peut-elle exister dans la théorie des cordes ? Remarquons tout d'abord que l'action d'une telle transformation, eq. (I.9), sur le terme de couplage d'une corde fondamentale à la deux forme de «Neveu-Schwarz–Neveu-Schwarz» est le suivant : $\int_{\mathscr{S}_2} \mathbf{B}_{[2]} \to \int_{\mathscr{S}_2} \mathbf{B}_{[2]}\, d + \mathbf{A}_{[2]}\, c$, de telle sorte que nous obtenons un état lié de cordes fondamentales et de D1-branes. Pour que la condition de quantification de la charge soit préservée, uniquement un sous groupe $SL(2,\mathbb{Z})$, à éléments de matrice entiers, peut être une symétrie de la théorie quantique. Nous postulerons alors que cette symétrie est exacte dans la théorie quantique des supercordes IIB. En particulier, la transformation $\tau \to {}^{-1}/_{\tau}$ échange la corde fondamentale, perturbative dans le régime $g_s \to 0$, et la D1-brane, perturbative dans le régime $g_s \to \infty$. Ces deux objets sont BPS, et donc leur masse ne peut être renormalisée par des effets quantiques ; leur comparaison a du sens.

Dualité type I- hétérotique $SO(32)$. Les supergravités correspondant aux théories effectives de la théorie de type I et la théorie hétérotique $SO(32)$ sont identiques, moyennant une redéfinition des champs, en particulier $\Phi \to -\Phi$, échangeant les régimes perturbatifs et non-perturbatifs. Ainsi nous pouvons postuler que, dans un régime de la théorie, l'objet perturbatif est la corde fondamentale BPS hétérotique, chargée sous la deux forme de NS-NS, et dans un autre régime, la D1-brane chargée sous la deux-forme de R-R de la théorie de type I joue ce rôle.

Supercordes IIA *et théorie $\mathscr{M}$.* La supergravité de type IIA est obtenue à partir de la supergravité à onze dimensions par reduction dimensionnelle. En particulier la constante de couplage des cordes est proportionnelle au rayon de la coordonnée compactifiée : $g_s = {}^{R_{10}}/\sqrt{\alpha'}$. Si nous prenons cette construction au sérieux dans la théorie quantique complète, cela signifie que, dans le régime de couplage fort de la théorie des supercordes IIA, une onzième dimension apparaît. Nous obtenons une théorie quantique à onze dimensions, mystérieuse, appellée pour cette raison – mais l'éthymologie est suspecte – la **théorie $\mathscr{M}$**. La corde fondamentale de la théorie IIA n'est alors rien d'autre qu'une membrane de la supergravité à onze dimensions enroulée autour de la dimension compacte.

Hétérotique $E_8 \times E_8$ et théorie $\mathscr{M}$. Nous avons déjà mentionné que la supergravité $E_8 \times E_8$ s'obtient par une compactification de la supergravité à onze dimensions sur un espace singulier, un *orbifold*. Là encore nous postulerons que cette relation se maintient dans la théorie quantique.

[n] voir [27] pour une introduction aux dualités.

Comme dans le cas précédent, la constante de couplage des cordes est proportionnelle à la longueur de l'intervalle de compactification et une onzième dimension apparaît à couplage fort. La corde fondamentale hétérotique correspond, à onze dimensions, à une membrane se terminant sur les deux hyperplans singuliers.

II

Théorie des cordes en espace-temps courbe

Dans le chapitre précédent nous avons abordé les aspects généraux de la quantification des supercordes. Cependant pour un fond général la théorie n'est pas soluble exactement ; mis à part le cas de l'espace plat, seulement certaines classes d'ondes gravitationnelles peuvent être étudiées sans utiliser de techniques particulières. Pourtant, la théorie des supercordes prétend fournir une description cohérente, au moins perturbativement, de la gravitation quantique. Il est alors capital de comprendre la dynamique des cordes dans un espace-temps courbe – qui n'est rien d'autre qu'un état cohérent de cordes fondamentales – à la fois pour approfondir notre connaissance de cette théorie et pour étudier la physique des phénomènes pour lesquels la relativité générale n'est plus valable, par exemple les trous noirs.

Il existe un certain nombre de cas où nous pouvons résoudre la théorie des cordes à l'aide de méthodes algébriques très puissantes, reposant sur la **théorie (super)conforme des champs** [28, 29] et ses extensions chirales. Nous avons déjà observé dans la section précédente que, lorsque la condition d'annulation des anomalies de Weyl est satisfaite, la théorie des champs sur la surface d'univers possède une symétrie superconforme, de dimension infinie. En général les théories conformes que nous utiliserons comme «briques» pour construire des solutions de la théorie des cordes possèdront une algèbre chirale, dite *algèbre* $\mathscr{W}$, contenant comme sous-algèbre l'algèbre conforme. Ainsi les états de la théorie se transformeront de manière bien définie par rapport aux symétries conformes. Enfin, l'opérateur BRST de la théorie s'écrivant en termes des composantes du tenseur d'énergie-impulsion, la cohomologie BRST du spectre physique sélectionnera dans les représentations de la théorie superconforme totale un sous-ensemble d'états, qui seront les états physiques de la théorie des cordes : des opérateurs primaires de dimension zéro.

II.1. Quelques notions de théorie (super)conforme

Dans cette section nous définissons brièvement les notions de théorie conforme nécessaires pour étudier la théorie des cordes en espace-temps courbe.

Algèbres de Virasoro et représentations. Une théorie des champs à deux dimensions est invariante conforme si elle posséde comme symétrie le groupe infini de transformations $w \to f(w)$ où f est une fonction holomorphe arbitraire de la coordonnée complexe de la surface. L'invariance conforme est une symétrie d'une théorie quantique si la trace du tenseur d'énergie-impulsion annule tout corrélateur : $\langle T_{w\bar{w}} \mathscr{O}^1 \cdots \mathscr{O}^n \rangle = 0$. Par conservation du tenseur d'énergie impulsion, les deux composantes restantes sont chirales :

$$\bar{\partial} T_{ww} = 0 \implies T_{ww} := T(w)\ , \quad \partial T_{\bar{w}\bar{w}} = 0 \implies T_{\bar{w}\bar{w}} := \bar{T}(\bar{w}).$$

Les **opérateurs primaires** de la théorie sont caractérisés par leur lois de transformations simples sous les transformations conformes :

$$\mathscr{V}_i(w,\bar{w}) \to [\partial f(w)]^{h_i} [\bar{\partial} \bar{f}(\bar{w})]^{\bar{h}_i} \mathscr{V}_i(\, f(w), \bar{f}(\bar{w})\,).$$

La *dimension conforme* de l'opérateur primaire est la somme $h_i + \bar{h}_i$, et son spin la différence $h_i - \bar{h}_i$. Les composantes du tenseur d'énergie impulsion, qui génèrent les transformations conformes des opérateurs, ne sont pas des opérateurs primaires, mais «quasi-primaires» :

$$\begin{aligned} T(w) &\rightarrow [\partial f(w)]^2 T(f(w)) + \frac{c}{12}\frac{\partial_w f \partial_w^3 f - \frac{3}{2}(\partial_w^2 f)^2}{(\partial_w f)^2} \\ \bar{T}(\bar{w}) &\rightarrow [\bar{\partial} \bar{f}(\bar{w})]^2 \bar{T}(\bar{f}(\bar{w})) + \frac{\tilde{c}}{12}\frac{\bar{\partial}_{\bar{w}} \bar{f} \bar{\partial}_{\bar{w}}^3 \bar{f} - \frac{3}{2}(\bar{\partial}_{\bar{w}}^2 \bar{f})^2}{(\partial_{\bar{w}} \bar{f})^2} \end{aligned}$$

Les nombres c et $\tilde{c}$ sont appelés *charges centrales*, et correspondent à une anomalie quantique. Dans la théorie des cordes complète, incluant les fantômes, $c = \bar{c} = 0$, et $T, \bar{T}$ sont de vrais opérateurs primaires.

Dans le contexte de la théorie des cordes, nous avons défini la théorie de la surface d'univers sur un cylindre, paramétré par le temps euclidien $\Im w$ et une coordonnée périodique $\Re w \sim \Re w + 2\pi$. Dans le contexte de la théorie conforme, il est plus simple d'étudier la théorie sur le plan obtenu par la transformation conforme : $z = \exp -\imath w$. Dans ce nouveau système de coordonnées, les translations temporelles correspondent aux dilatations radiales. L'hamiltonien de la théorie est donc donné par le générateur des dilatations dans le plan :

$$H = \oint \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\imath} T - \oint \frac{\mathrm{d}\bar{z}}{2\pi\imath} \bar{T} - \frac{c + \tilde{c}}{24}.$$

Dans le calcul d'amplitudes de diffusion, les états asymptotiques correspondent à des cylindres

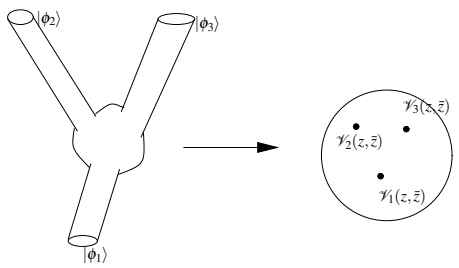

FIG. II.1. Transformation conforme des états asymptotiques aux opérateurs de vertex.

semi-infinis connectés à la surface d'univers. En utilisant la transformation précédente, les cylindres sont transformés en disques dont le centre correspond à $t = \pm\infty$; ainsi en théorie conforme les états asymptotiques peuvent être représentés par l'insertion d'opérateurs locaux sur la surface d'univers, dits **opérateurs de vertex** (fig II.1). L'action d'une transformation conforme infinitésimale $w \rightarrow w + \varepsilon(w)$ sur un opérateur primaire est générée par l'action du tenseur d'énergie impulsion, en étant attentif à l'ordre des opérateurs :

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \mathscr{V}(w,\bar{w}) &= [T_\varepsilon, \mathscr{V}(w,\bar{w})] + [\bar{T}_{\bar{\varepsilon}}, \mathscr{V}(w,\bar{w})] \\ &= \lim_{|z|\rightarrow|w|} \left\{ \left(\oint_{|z|>|w|} - \oint_{|z|<|w|} \right) \frac{\mathrm{d}z}{2\imath\pi} \varepsilon(z) \mathbf{R}\left(T(z)V(w,\bar{w})\right) \right. \\ &\qquad \left. - \left(\oint_{|z|>|w|} - \oint_{|z|<|w|} \right) \frac{\mathrm{d}\bar{z}}{2\imath\pi} \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \mathbf{R}\left(\bar{T}(\bar{z})V(w,\bar{w})\right) \right\}, \end{aligned} \tag{II.1}$$

où nous avons utilisé le *produit ordonné dans le temps radial* : $\mathbf{R}(A(z,\bar{z})B(w,\bar{w})) = A(z)B(w)$ si $|z| > |w|$, et $B(w)A(z)$ sinon, pour calculer le commutateur à temps égaux.

Une information fondamentale dans la théorie quantique des champs est le comportement de deux opérateurs dont les positions deviennent infiniment proches. En utilisant la symétrie conforme, le **produit local d'opérateurs** (PLO) de deux opérateurs primaires peut s'écrire comme un développement sur une base d'opérateurs primaires $\{\mathscr{V}_i\}$:

$$\mathscr{V}_i(z,\bar{z})\mathscr{V}_j(z',\bar{z}') \sim \sum_i C_{ij}^k\,(z-z')^{h_k-h_i-h_j}(\bar{z}-\bar{z}')^{\bar{h}_k-\bar{h}_i-\bar{h}_j}\left\{\mathscr{V}_k(z')+(z-z')\mathscr{V}_k^{(1)}+\cdots\right\},$$

où les termes sous-dominants sont des opérateurs non-primaires, appelés *descendants*. En particulier, pour le tenseur d'énergie-impulsion, nous obtenons :

$$T(z)T(z') \sim \frac{c\,\mathbb{I}}{2(z-z')^4}+\frac{2\,T(z')}{(z-z')^2}+\frac{\partial\,T(z')}{z-z'}+\text{ termes réguliers.}$$

Le terme proportionnel à l'unité $\mathbb{I}$ dans le développement doit avoir le même coefficient c que l'anomalie conforme. Si nous développons $T(z)$ en série de Laurent : $T(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-2}L_n$, nous obtenons l'**algèbre de Virasoro** :

$$[L_n,L_m]=(m-n)L_{m+n}+\frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m,-n}.$$

Cette algèbre de dimension infinie contient une sous-algèbre $SL(2,\mathbb{R})$ sans extension centrale générée par L_{-1},L_0,L_1.[a] Le PLO du tenseur d'énergie impulsion avec un opérateur primaire prend aussi une forme bien définie (voir eq. (II.1) :

$$T(z)\mathscr{V}_i(z,\bar{z}')=\frac{h_iV_i(z,\bar{z}')}{(z-z')^2}+\frac{\partial\mathscr{V}_i(z',\bar{z}')}{z-z'}+\text{termes réguliers.}$$

L'opérateur primaire de dimension zéro, s'il existe dans la théorie, joue un rôle particulier, car il est invariant sous la symétrie globale $\mathfrak{sl}_2$; c'est le vide de la théorie. Les états correspondant aux opérateurs primaires s'obtiennent par l'action de l'opérateur sur le vide : $|h_i\rangle=\mathscr{V}_i|0\rangle$. Les représentations unitaires de l'algèbre de Virasoro se construisent d'une manière analogue aux représentations d'une algèbre de Lie ; les *opérateurs de plus haut poids* annihilés par tous les modes positifs, correspondent aux opérateurs primaires :

$$L_{n>0}|h_i\rangle=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \oint\frac{\mathrm{d}z}{2\imath\pi}z^{n+1}\,T(z)\mathscr{V}_i(0)=0\,,\ \text{pour } n>0.$$

À partir de chaque opérateur de plus haut poids de dimension chirale h_i est construite une représentation, de dimension infinie, en agissant avec tous les modes négatifs de l'algèbre :

$$L_{-n_1}L_{-n_2}\cdots L_{-n_k}|h_i\rangle\,,\quad n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_k>0.$$

L'*échelon* d'un état dans une représentation est donné par $\sum n_k$.

En général la présence de la symétrie de dimension infinie associée à l'algèbre de Virasoro n'est pas suffisamment contraignante pour résoudre la théorie, et il faudra que la théorie possède une algèbre $\mathscr{W}$ plus large. Par contre, dans le cas particulier où la charge centrale $c<1$, la symétrie conforme est suffisante ; pour cette raison ces théories sont appelées des **modèles minimaux**. Les théories unitaires apparaissent uniquement lorsque la charge centrale prend des valeurs bien précises : $c=1-{}^{6}\!/_{p(p+1)}$, $p=2,3,\cdots$. Dans ce cas les représentations de l'algèbre de Virasoro sont réductibles, ou *dégénérées*, car elles contiennent des opérateurs annihilés par une combinaison de modes négatifs de l'algèbre, et sont ainsi eux-mêmes des opérateurs primaires de Virasoro.

[a] la composante anti-holomorphe du tenseur d'énergie impulsion génère une deuxième copie de l'algèbre de Virasoro, de telle sorte que l'algèbre globale totale est $\mathfrak{sl}_2$.

Algèbre superconforme N=1. La théorie des supercordes possède une symétrie plus large que la seule symétrie conforme : la symétrie superconforme. Comme nous l'avons vu, elle apparaît comme la symétrie résiduelle de l'action de supergravité à deux dimensions après le choix de jauge pour les (super)reparamétrages et les (super)transformations de Weyl. Plus précisément, les supercordes de type II possèdent une symétrie superconforme $N = (1,1)$, c.-à.-d. deux algèbres chirales superconformes $N = 1$, et la corde hétérotique une symétrie superconforme $N = (1,0)$.

L'algèbre superconforme $N = 1$ s'obtient par extension de l'algèbre conforme dans le superespace : le super-tenseur d'énergie impulsion (voir eq. (I.27)) $\mathbf{T}(w,\theta) = G(w) + \theta T(w)$ génère l'*algèbre de super-Virasoro, ou superconforme N=1* via les PLOs :

$$\mathbf{T}(z,\theta)\mathbf{T}(z',\theta') = \frac{\hat{c}}{4(z-z')^3} + \frac{3(\theta'-\theta)}{2(z-z')^2}\mathbf{T}(z',\theta') + \frac{\mathfrak{D}\mathbf{T}(z',\theta')}{2(z-z')} + \frac{\theta'-\theta}{z-z'}\partial\mathbf{T}(z',\theta') + \cdots,$$

associée aux transformations superconformes (I.26). La charge centrale apparaissant dans cette algèbre est $\hat{c} = \frac{2}{3}c$. La composante fermionique G peut être périodique ou antipériodique après transport parallèle autour du cylindre, et nous obtenons deux algèbres isomorphes. Le cas périodique ($a = 1$) est l'**algèbre de Ramond**, et le cas anti-périodique ($a = 0$) l'**algèbre de Neveu-Schwarz**. Dans la représentation de la théorie sur le plan, en développant en série de Laurent :

$$\mathbf{T}(z,\theta) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac{a-1}{2}} z^{-n-3/2}G_n + \theta\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-2}L_n,$$

nous obtenons l'algèbre superconforme $N = 1$ proprement dite :

$$[L_n, L_m] = (m-n)L_{m+n} + \frac{\hat{c}}{8}m(m^2-1)\,, \quad \{G_m, G_n\} = 2L_{m+n} + \frac{\hat{c}}{2}(m^2 - 1/4)\delta_{m,-n}\,,$$
$$[L_m, G_n] = (\frac{m}{2} - n)G_{m+n}\,.$$

Une conséquence de cette algèbre est que, dans le secteur de Ramond, la dimension de tous les états vérifie $h > \hat{c}/16$. Comme pour la symétrie conforme, les opérateurs super-primaires sont des super-champs qui se transforment sous les transformations superconformes comme :

$$\mathbf{V}_i(z,\theta,\bar{z},\bar{\theta}) \to (\mathfrak{D}\theta')^{2h}(\bar{\mathfrak{D}}\bar{\theta}')^{2\bar{h}_i}\mathbf{V}_i(z',\theta',\bar{z}',\bar{\theta}')\,,$$

et correspondent à l'état de plus haut poids d'une représentation de l'algèbre superconforme $N = 1$, annihilé par tous les modes positifs : $L_{n>0}|\phi_i\rangle = G_{n>0}|h_i\rangle = 0$. Le vide de la théorie correspond au primaire de dimension zéro, qui est dans le secteur de Neveu-Schwarz, $|0\rangle_{\text{NS}}$. Par contre, le «vide» de Ramond, qui est de dimension $\hat{c}/16$, est créé par un opérateur spécial, appelé **champ de spin** [29] $S^{\pm}(z)$, agissant sur le vide de Neveu-Schwarz. Cet opérateur est dégénéré en raison des modes zéro de l'algèbre de Ramond :

$$|+\rangle_{\text{R}} := S^{+}(0)|0\rangle_{\text{NS}}\,, \quad |-\rangle_{\text{R}} := G_0|+\rangle_{\text{R}}\,, \quad G_0|-\rangle_{\text{R}} = (h - \hat{c}/16)|+\rangle_{\text{R}}.$$

Dans le cas où l'opérateur de spin vérifie $h = \hat{c}/16$, il préserve la supersymétrie globale. La théorie superconforme que nous venons de présenter n'est pas *locale*, car les PLOs des composantes fermioniques des super-champs avec les champs de spin se développent en puissances demi-entières, ce qui crée une coupure dans le plan complexe où la théorie est définie. Pour y remédier, nous pouvons définir un opérateur de parité $(-)^F$ anticommutant avec la composante fermionique et commutant avec la partie bosonique des super-champs ; les deux vides de Ramond ont ainsi des parités opposées. La **projection GSO** [30] sur les états de parité $+1$ permet d'obtenir une théorie des champs locale, qui contient uniquement un des deux vides de Ramond, et les composantes bosoniques des super-champs.

Comme pour l'algèbre de Virasoro, la symétrie superconforme $N = 1$ n'est pas suffisante pour résoudre la théorie, sauf pour les *modèles minimaux* $N = 1$, avec une charge centrale $\hat{c} < 1$ prenant des valeurs discrètes.

Algèbres étendues. La symétrie apparaissant naturellement dans la théorie des supercordes est la symétrie superconforme $N = 1$, comme symétrie résiduelle de la supergravité à deux dimensions. Cependant la théorie sur la surface d'univers peut posséder «accidentellement» une symétrie globale plus large, la *symétrie superconforme étendue* $N = 2$ ou $N = 4$ [31]. Ces constructions ont une importance fondamentale dans l'étude de la théorie des supercordes. Considérons en effet une théorie des cordes hétérotiques à quatre dimensions, c.-à.-d. composées d'une théorie $(1,0)$ superconforme libre pour l'espace-temps de Minkowski à quatre dimensions, et d'une théorie conforme «interne» représentant l'espace compactifié à six dimensions. Alors il est possible de montrer [32] que, si cette théorie possède $\mathcal{N}$ supersymétries dans l'espace-temps – qui sont construites avec les opérateurs de spin – alors la théorie conforme «interne» doit nécessairement posséder une symétrie superconforme étendue : $N = 1$ pour une supersymétrie d'espace-temps, et $(N = 4) \otimes (N = 2)$ pour deux supersymétries d'espace-temps.[b] Nous verrons par la suite que la réciproque de ce théorème n'est pas triviale, car il faut imposer des conditions sur une théorie possédant une symétrie superconforme étendue pour obtenir la supersymétrie d'espace-temps.

Algèbre N=2. Pour commencer, considérons un modèle sigma non-linéaire $N = 1$ sans torsion. Lorsque la dimension de la variété de l'espace cible est paire, alors la théorie possède une symétrie superconforme $N = 2$ si et seulement si la variété est Kählerienne.[c] Dans le cas ou le modèle sigma possède une torsion, il possède une symétrie $N = 2$ si et seulement si la variété cible possède deux structures complexes, $\mathcal{J}_\pm$, qui sont constantes de manière covariante par rapport aux deux connexions de la variété avec torsion (voir eqs. (I.23) et (I.24)) : $\nabla^\pm_\rho \mathcal{J}^\mu_{\pm\,\nu} = 0$. L'algèbre $N = 2$ s'écrit alors à l'aide des courants suivants :

$$
\begin{aligned}
T &= \partial X^\mu \partial X^\nu g_{\mu\nu} + \imath \psi^\mu \nabla^+ \psi^\nu g_{\mu\nu} \ , \quad \bar{T} = \bar{\partial} X^\mu \bar{\partial} X^\nu g_{\mu\nu} + \imath \psi^\mu \bar{\nabla}^- \psi^\nu g_{\mu\nu} \\
G^1 &= \psi^\mu \partial X^\nu g_{\mu\nu} - \frac{\imath}{3} \psi^\mu \psi^\nu \psi^\rho \mathcal{H}_{\mu\nu\rho} \\
G^2 &= \psi^\mu \partial X^\nu \mathcal{J}_{+\mu\nu} + \frac{\imath}{3} \psi^\mu \psi^\nu \psi^\rho \mathcal{J}^\sigma_{+\mu} \mathcal{J}^\tau_{+\nu} \mathcal{J}^\xi_{+\rho} \mathcal{H}_{\sigma\tau\xi} \\
\bar{G}^1 &= \tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} X^\nu g_{\mu\nu} + \frac{\imath}{3} \tilde{\psi}^\mu \tilde{\psi}^\nu \tilde{\psi}^\rho \mathcal{H}_{\mu\nu\rho} \\
\bar{G}^2 &= \tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} X^\nu \mathcal{J}_{-\mu\nu} - \frac{\imath}{3} \tilde{\psi}^\mu \tilde{\psi}^\nu \tilde{\psi}^\rho \mathcal{J}^\sigma_{-\mu} \mathcal{J}^\tau_{-\nu} \mathcal{J}^\xi_{-\rho} \mathcal{H}_{\sigma\tau\xi} \\
J_R &= \psi^\mu \psi^\nu \mathcal{J}_{+\mu\nu} \ , \quad \bar{J}_R = \tilde{\psi}^\mu \tilde{\psi}^\nu \mathcal{J}_{-\mu\nu} .
\end{aligned}
$$

Le courant J_R (resp. $\bar{J}_R$) génère les rotations, dites de *symétrie R*, entre les deux super-courants G^1 et G^2 (resp $\bar{G}^1$ et $\bar{G}^2$). En définissant des super-courants complexes : $G^\pm = \frac{1}{2}(G^1 \pm \imath G^2)$, l'**algèbre**

[b] Pour $\mathcal{N} = 4$, la théorie interne est nécessairement aussi une théorie libre.

[c] Une variété de dimension paire est dite *hermitienne* si elle admet une structure complexe $\mathcal{J}$ agissant sur l'espace tangent, constante par rapport à la dérivée covariante, $\mathcal{J} : T\mathcal{M} \to T\mathcal{M}$ avec $\mathcal{J}^2 = -1$ et $\nabla_\rho \mathcal{J}^\mu_{\ \nu} = 0$, telle que $g(A,B) = g(\mathcal{J}A, \mathcal{J}B)$. Dans ce cas la métrique en coordonnées complexes n'a que des composantes mixtes : $g = g_{i\bar{j}} \mathrm{d}z^i \otimes d\bar{z}^{\bar{j}}$. Si de plus la *forme de Kähler* $\mathbf{J} := \imath g_{i\bar{j}} \mathrm{d}z^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}}$ est fermée ($\mathrm{d}\mathbf{J} = 0$) alors la variété est Kählerienne, et la métrique peut s'écrire localement comme : $g_{i\bar{j}} = \partial_i \bar{\partial}_{\bar{j}} K(z^i, \bar{z}^{\bar{i}})$, définissant le potentiel de Kähler $K(z^i, \bar{z}^{\bar{i}})$.

superconforme $N = 2$ proprement dite est contenue dans les PLOs suivants :

$$
\begin{aligned}
T(z)T(0) &\sim \frac{c}{2z^4} + \frac{2T(0)}{z^2} + \frac{\partial T(0)}{z} \\
T(z)G^{\pm}(0) &\sim \frac{3G^{\pm}(0)}{2z^2} + \frac{\partial G^{\pm}(0)}{z} \\
G^{+}(z)G^{-}(0) &\sim \frac{2c}{3z^3} + \frac{2J_R(0)}{z^2} + \frac{2T(0) + \partial J_R(0)}{z} \\
G^{\pm}(z)G^{\pm}(0) &\sim 0 \\
J_R(z)G^{\pm}(0) &\sim \pm\frac{G^{\pm}(0)}{z} \\
J_R(z)J_R(0) &\sim \frac{c}{3z}.
\end{aligned}
\tag{II.2}
$$

De manière similaire aux algèbres précédentes, lorsque la charge centrale de la théorie est $c < 3$, l'algèbre possède une série discrète de *modèles minimaux N=2*. Nous les retrouverons par la suite dans les constructions d'espaces-temps courbes. Pour les modèles non-minimaux $c > 3$, l'algèbre superconforme $N = 2$ possède néanmoins beaucoup de structure ; est-ce suffisant pour résoudre la théorie ? Nous reviendrons sur cette question par la suite. Comme pour l'algèbre $N = 1$, il existe une algèbre $N = 2$ de Ramond et une algèbre de Neveu-Schwarz, suivant la periodicité des super-courants. Mais, dans le cas présent, ces deux algèbres appartiennent à une famille continue d'algèbres, reliées par l'opération de **flot spectral** [33] :

$$
G^{\pm}(z) \to z^{\pm\eta} G^{\pm}(z)\ , \quad T(z) \to T(z) + \eta J_R(z) + \frac{c\eta^2}{6z^2}\ , \qquad J_R(z) \to J_R(z) + \frac{c\eta}{3z}. \tag{II.3}
$$

Ainsi, l'algèbre de Ramond correspond à $\eta = 0 \bmod \mathbb{Z}$ et l'algèbre de Neveu-Schwarz à $\eta = 1/2 \bmod \mathbb{Z}$, mais l'algèbre $N = 2$ est définie pour tout $\eta \in \mathbb{R}$.

Les opérateurs primaires de cette algèbre sont caractérisés par leur dimension h_i et leur charge q_i sous le courant de symétrie R : $T(z)\mathscr{V}_i(0) \sim h_i \mathscr{V}_i(0)/z^2$, $J_R(z)\mathscr{V}_i(0) \sim q_i V_i(0)/z$. Certains opérateurs primaires jouent un rôle particulier : les **opérateurs primaires chiraux** (c) du secteur de NS, définis par : $G^{+}_{-1/2}|\chi^{+}\rangle = 0$. De même les opérateurs anti-chiraux (a) sont annihilés par l'autre supercharge : $G^{-}_{-1/2}|\chi^{-}\rangle = 0$. Ces opérateurs sont l'exact analogue des états BPS des algèbres de supersymétrie ; en effet l'algèbre superconforme fixe leur dimension h en fonction de leur charge Q :

$$
h_{(c),(a)} = \frac{|q|}{2}\ , \quad Q_{(c),(a)} = \pm q. \tag{II.4}
$$

Ces opérateurs ont la propriété d'avoir des produits locaux d'opérateurs non-singuliers ; ils forment *l'anneau chiral* $\mathscr{K}$ des opérateurs primaires chiraux. Ces opérateurs sont très importants, en particulier dans l'étude des propriétés géométriques des variétés de compactification. De manière générale, tous les états appartenant à des représentations unitaires de l'algèbre vérifient l'inégalité $h \geqslant |q|/2$, qui devient une égalité pour les opérateurs (anti)-chiraux.

Symétrie N=2 et supersymétrie d'espace-temps. Nous avons déjà mentionné dans l'introduction de cette section que la supersymétrie d'espace-temps implique l'existence d'une symétrie superconforme étendue sur la surface d'univers de la supercorde. À l'opposé, considérons maintenant une solution de la théorie des supercordes décrite par un modèle sigma non-linéaire possédant

une symétrie N=2 superconforme.[d] L'opération de flot spectral, eq. (II.3), est réalisée sur l'algèbre par un opérateur unitaire U_η, qui possède naturellement une action sur les représentations de l'algèbre : $h_\eta = h - \eta q + \frac{c}{6}\eta^2$, $q_\eta = q - \frac{c}{3}\eta$. Partant d'un état dans le secteur de Neveu-Schwarz, c.-à.-d. un boson d'espace-temps, nous obtenons par l'action de $U_{1/2}$ un état du secteur de Ramond, donc un fermion d'espace-temps. Ainsi cet opérateur, reliant les bosons et les fermions, réalise la supersymétrie d'espace-temps. En particulier, l'image d'un opérateur chiral de l'algèbre de NS sera un état fondamental du secteur de Ramond. Cependant, l'action de l'opérateur $U_{1/2}$ sur les opérateurs de vertex des états du spectre physique ne sera bien définie que si le produit local d'opérateurs ne contient que des puissances au plus demi-entières, imposant que *toutes les charges de symétrie R de la théorie soient des entiers impairs*. Ainsi, l'opérateur de supersymétrie $U_{1/2}$ introduit une coupure dans la surface d'univers correspondant au changement de periodicité des fermions de la surface d'univers, et donc à l'échange des bosons et des fermions d'espace-temps.

Nous allons maintenant montrer, en suivant [34], que la projection sur les charges de symétrie R impaires est compatible avec l'*invariance modulaire* de la fonction de partition à une boucle (voir sect. I.3). Cela nous permettra d'introduire des outils indispensables pour la suite. Si la théorie conforme ne possède pas de symétrie chirale plus grande que la symétrie N=2 superconforme, alors sa fonction de partition peut s'écrire en fonction des **caractères** de l'algèbre $N = 2$, qui s'écrivent comme une trace dans une représentation $\mathbf{r}$ de l'algèbre N=2 chirale :

$$\chi_{\mathbf{r}}(\tau,z,u) = e^{-2\imath\pi u}\,\mathrm{Tr}_{\mathbf{r}}\, e^{2\imath\pi\tau\left(L_0 - c/24\right)} e^{2\imath\pi z J_0^R}.$$

Dans cette expression, τ est le paramètre modulaire du tore, et la variable z permet de différencier des états de même dimension $L_0|\phi\rangle = h_\phi|\phi\rangle$ mais de charges R, données par $J_0^R|\phi\rangle = Q_\phi|\phi\rangle$, différentes. Les représentations sont désignées par la dimension et la charge du primaire, $h_{\mathbf{r}}$ et $Q_{\mathbf{r}}$. La fonction de partition à une boucle de ce modèle s'exprime alors en fonction de ces caractères :

$$Z(\tau) = \sum_{\mathbf{r},\tilde{\mathbf{r}}} N_{\mathbf{r},\tilde{\mathbf{r}}}\, \chi_{\mathbf{r}}(\tau,0,0)\, \bar{\chi}_{\tilde{\mathbf{r}}}(\bar{\tau},0,0).$$

La matrice $N_{\mathbf{r},\tilde{\mathbf{r}}}$, spécifiant le choix de représentations chirales et leur appariement gauche-droit, doit être telle que la fonction de partition soit invariante sous l'action du groupe modulaire. Nous supposons que les caractères $N = 2$ de la théorie forment une représentation unitaire du groupe modulaire, c.-à.-d. qu'ils se transforment comme :

$$\chi_{\mathbf{r}}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}, u + \frac{cz^2}{6(c\tau+d)}\right) = S_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'}\chi_{\mathbf{r}'}(\tau,z,u), \tag{II.5}$$

où S est une matrice unitaire. L'action du flot spectral de paramètre η sur une représentation de N=2 induit une action très simple sur les caractères de l'algèbre :

$$\chi_{\mathbf{r}}^{\eta}(\tau,z,u) = \chi_{\mathbf{r}}\left(\tau, z+\eta\tau, u - \frac{c\eta^2}{6}\tau - \frac{c\eta}{3}z\right). \tag{II.6}$$

Alors, avec l'action répétée du flot spectral de paramètre $1/2$, nous pouvons définir des caractères supersymétrisés,

$$\chi_{\mathbf{r}}^{susy}(\tau,z,u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-)^n U_{1/2}^n \chi_{\mathbf{r}}(\tau,z,u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-)^n \chi_{\mathbf{r}}\left(\tau, z+\frac{n\tau}{2}, u - \frac{n^2c}{24}\tau - \frac{nc}{6}z\right),$$

[d] Pour être plus précis, nous considérons pour l'instant que l'espace-temps est décrit par une variété du type $\mathbb{R}^{1,1} \times \mathscr{M}$, où le cône de lumière est factorisé ; les degrés de liberté correspondants seront compensés par les fantômes de reparamétrage.

pour définir une nouvelle fonction de partition dans laquelle les bosons et les fermions d'espace-temps seront appariés, $Z^{susy} = \sum_{\mathbf{r},\tilde{\mathbf{r}}} N_{\mathbf{r},\tilde{\mathbf{r}}}\, \chi_{\mathbf{r}}^{susy}\, \bar{\chi}_{\tilde{\mathbf{r}}}^{susy}$. Considérons maintenant l'effet de la transformation $S : \tau \to -1/\tau$ d'un caractère supersymétrique :

$$\begin{aligned}\chi_{\mathbf{r}}^{susy}(-1/\tau,0,0) &= S_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-)^m \chi_{\mathbf{r}'}\left(\tau,\frac{m}{2},0\right) = S_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-)^m \mathrm{Tr}_{\mathbf{r}}\, e^{2\imath\pi\tau\left(L_0-c/24\right)} e^{\imath\pi m J_0^R} \\ &= S_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'}\, \chi_{\mathbf{r}'}(\tau,0,0)\, \delta_{\mathbf{r}',1 \bmod 2}.\end{aligned}$$

Ainsi, nous voyons que la transformation modulaire d'un caractère $\chi_{\mathbf{r}}^{susy}$ supersymétrique donne une somme de caractères ordinaires $\chi_{\mathbf{r}'}$, mais avec une projection sur les charges R impaires ; la projection et la supersymétrisation des caractères sont échangés par transformation modulaire S. L'invariance modulaire sous $T : \tau \to \tau + 1$ n'introduit pas de contraintes supplémentaires. Nous concluons qu'une fonction de partition composée de caractères supersymétrisés construits sur des primaires de charge R impaire sera invariante modulaire, et possédera la supersymétrie d'espace-temps.

Algèbre N=4. Une dernière algèbre superconforme étendue intervient dans les constructions de théories de supercordes : l'**algèbre N=4 restreinte**, dans laquelle les courants de symétrie R forment une algèbre $SU(2)$ [35]. La charge centrale de ces théories est toujours un multiple de quatre. Les quatre supercharges s'organisent alors en doublets complexes de ce $SU(2)$; les représentations sont indexées par la dimension et l'*isospin*. Nous verrons dans les chapitres suivants plusieurs réalisations de cette algèbre. Notons simplement que les modèles sigma possédant la symétrie $N = 4$ superconforme, sont des solutions exactes de la théorie des supercordes ne recevant pas de corrections perturbatives, à tous les ordres en α'.

Théorie conforme avec bord. Les méthodes de théorie (super)-conforme peuvent être étendues pour décrire aussi les D-branes et les cordes ouvertes qui s'y attachent. La théorie conforme avec bord fournit le cadre approprié à leur description. Nous définissons ainsi une théorie conforme restreinte au demi-plan complexe supérieur, $\Im z > 0$, contenant les mêmes opérateurs de vertex de cordes fermées. La physique des D-branes est alors contenue dans les conditions aux bords imposées sur l'axe réel.[e] Celles-ci doivent préserver la symétrie superconforme N=1 pour être compatibles avec les symétries locales de la théorie :

$$T(z) = \bar{T}(\bar{z}) \quad \text{et} \quad G(z) = \bar{G}(\bar{z}) \quad \text{pour} \quad z \in \mathbb{R}.$$

Cependant en général les D-branes préservent une algèbre chirale plus large que l'algèbre de super-Virasoro. Par exemple les D-branes supersymétriques préservent l'algèbre superconforme N=2.

II.2. Variétés de groupe et algèbres affines

La symétrie superconforme $N = 1$, commune à tous les modèles sigma non-linéaires de la théorie des supercordes, n'est en général pas suffisante pour résoudre la théorie, c.-à.-d. pour connaître son spectre (ou de manière équivalente sa fonction de partition à une boucle) et calculer les fonctions de corrélation entre les opérateurs de vertex. Une classe importante d'extensions de la symétrie superconforme est donnée par les *algèbres de courants*, ou algèbres affines ; la symétrie de la théorie est alors donnée par l'extension supersymétrique d'une algèbre de Lie affine, de dimension infinie, contenant l'algèbre superconforme $N = 1$. Cette symétrie étendue est alors suffisamment contraignante.

[e] Les opérateurs de vertex vivant sur le bord correspondent aux cordes ouvertes.

Modèles de Wess-Zumino-Witten. Une classe particulière de variétés correspond aux *variétés de groupe*. Considérons un groupe de Lie $\mathscr{G}$ compact semi-simple, et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie associée, $[T^a, T^b] = f^c_{ab} T^c$. Les générateurs sont normalisés par rapport au *produit de Killing* de l'algèbre comme $\kappa(T^a, T^b) = \delta^{ab}$. Nous pouvons définir les *une-formes de Maurer-Cartan* invariantes à gauche associées aux générateurs de l'algèbre comme :

$$\mathscr{J}^a = \kappa(T^a, g^{-1}\mathrm{d}g) = \mathscr{J}^a_\mu \mathrm{d}X^\mu \,,$$

où g est un élément générique du groupe $\mathscr{G}$. Il existe de façon similaire des une-formes invariantes à droite, définies par $\mathscr{K}^a = \kappa(T^a, \mathrm{d}g g^{-1})$. Dans le cas des variétés de groupe, l'équation de Maurer-Cartan (I.2) pour les formes $\mathscr{J}^a$ s'exprime à l'aide des constantes de structure de l'algèbre :

$$\mathrm{d}\mathscr{J}^a + \frac{1}{2} f^a_{bc} \mathscr{J}^b \wedge \mathscr{J}^c = 0.$$

Le produit de Killing sur $\mathfrak{g}$ induit naturellement un produit scalaire sur l'espace tangent au groupe $T\mathscr{G}$, permettant de définir la métrique de Cartan-Weyl sur le groupe :

$$ds^2 = \kappa(g^{-1}\mathrm{d}g\,, g^{-1}\mathrm{d}g) = \sum_{a=1}^{\mathrm{rang}(\mathfrak{g})} \mathscr{J}^a \otimes \mathscr{J}^b.$$

Ensuite nous pouvons définir la trois forme harmonique sur le groupe (c.-à.-d. fermée, $\mathrm{d}h_3 = 0$, mais non exacte, $h_3 \neq \mathrm{d}b$ globalement) dite *canonique* par

$$h_3 = f_{abc} \mathscr{J}^a \mathscr{J}^b \mathscr{J}^c.$$

Les une-formes de connexion avec torsion apparaissant dans le modèle sigma non-linéaire supersymétrique, eqs. (I.23,I.24), s'expriment aussi en fonction des constantes de structures du groupe, comme :

$$\omega^a_{\pm b\ c} = -\frac{1}{2} f^a{}_{bc} \pm \mathscr{H}^a{}_{bc}.$$

Il existe un choix particulier de champ $\mathbf{B}_{[2]}$, en d'autres termes de torsion, qui **parallélise** la variété. Concrètement nous effectuons le choix : $\mathscr{H}^a{}_{bc} = -\frac{1}{2} f^a{}_{bc}$, de telle sorte que la première connection s'annule : $\omega^a_{-b\ c} = 0$ et que la deuxième devienne plate : $\omega^a_{+b\ c} = -f^a{}_{bc}$, et les formes de courbures s'annulent dans les deux cas : $\mathscr{R}^{\pm a}{}_{bcd} = 0$. Nous obtenons alors le modèle sigma non-linéaire suivant, dit de **Wess-Zumino-Witten** (WZW), où les fermions gauches et droits sont découplés[f] :

$$\begin{aligned} kS_{\mathrm{WZW}} = \frac{k}{2\pi} \int_{\mathscr{S}_2 = \partial\mathscr{B}} \mathrm{d}^2 z\ \kappa(g^{-1}\mathbf{d}g, g^{-1} * \mathbf{d}g) + \mathscr{J}^a_i \mathscr{J}^a_j \left(\psi^i \nabla \psi^j - \tilde{\psi}^i \bar{\nabla} \tilde{\psi}^j\right) \\ + \quad \frac{\imath k}{12\pi} \oint_{\mathscr{B}} \kappa\left(g^{-1}\mathbf{d}g, \left[g^{-1}\mathbf{d}g, g^{-1}\mathbf{d}g\right]\right). \end{aligned} \tag{II.7}$$

Le terme de Wess-Zumino, correspondant au couplage à la deux forme $\mathbf{B}_{[2]}$, est écrit comme une intégrale de la trois-forme $(g^{-1}\mathbf{d}g)^{\wedge 3}$ sur un volume à trois dimensions $\mathscr{B}$ dont le bord est la surface d'univers de la corde : $\partial\mathscr{B} = \mathscr{S}_2$. Pour écrire ce terme l'application de la surface d'univers vers le groupe, $g : \mathscr{S}_2 \to \mathscr{G}$ est étendue à une application de $\mathscr{B}$ vers le groupe, $g : \mathscr{B} \to \mathscr{G}$.

Avec ce choix de constante de couplage à la deux-forme, non seulement la variété est parallélisée, mais il s'agit de l'unique point fixe de renormalisation, en d'autre termes cette valeur de fond pour $\mathbf{B}_{[2]}$ est nécessaire pour que la théorie sur la surface d'univers soit conforme [36].

[f] dans cette expression, $\mathbf{d}$ est la dérivée extérieure sur la surface d'univers : $\mathbf{d}g = \partial g \mathrm{d}z + \bar{\partial} g \mathrm{d}\bar{z}$.

Il existe une ambiguïté dans le choix du volume $\mathscr{B}$ pour compléter la surface d'univers de la corde. Dans l'intégrale de chemin de l'action de WZW, la différence entre deux choix $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sera donnée par

$$\delta Z = \int \mathscr{D}g \, \exp \frac{\imath k}{12\pi} \oint_{\mathscr{B}_1 - \mathscr{B}_2} \kappa\left(g^{-1}\mathbf{d}g, \left[g^{-1}\mathbf{d}g, g^{-1}\mathbf{d}g\right]\right),$$

s'exprimant à l'aide d'une intégrale sur le volume tridimensionnel sans bord $\mathscr{B}_1 - \mathscr{B}_2 \sim S^3$. Cette intégrale peut se réécrire comme l'image réciproque de la trois-forme h_3 sur la trois-sphère, c'est à dire comme $\oint_{S^3} g^\star h_3$. Clairement l'intégrale de chemin est inchangée à la condition : $\frac{\imath k}{12\pi}\oint_{S^3} g^\star h_3 \in 2\imath\pi\mathbb{Z}$. Les applications $S^3 \to \mathscr{G}$ de la trois sphère vers le groupe sont classifiées par le troisième groupe de cohomologie entière de la variété, $H^3(\mathscr{G},\mathbb{Z})$. Pour les groupes de Lie compacts, nous avons $H^3(\mathscr{G},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, ce qui implique que la constante k, appelée **niveau**, est quantifiée : $k \in \mathbb{N}$. Par contre, pour les groupes non-compacts comme $SL(2,\mathbb{R})$, le niveau ne sera pas quantifié.

Dans l'action de Wess-Zumino-Witten, eq. (II.7), les fermions chiraux ne sont pas couplés entre eux, ce qui va permettre de réécrire leur action en termes de fermions libres [37]. Nous redéfinissons d'abord les fermions gauches comme : $\Psi^a = \mathscr{J}_i^{\,a}\psi^i$. Pour les fermions droits, nous utiliserons le changement de variables : $\widetilde{\Psi}^a = \mathrm{Ad}(g)^a_{\ b}\mathscr{J}_i^{\,b}\widetilde{\psi}^i$, où $\mathrm{Ad}(g)$ désigne l'action adjointe de g, $h \to g^{-1}hg$. Dans la théorie quantique, ce changement de variables chiral introduit une anomalie [38]. La contribution de la mesure fermionique renormalise la partie bosonique de l'action de WZW comme $k \to k - \tilde{h}_{\mathfrak{g}}$.[g]

Les nouvelles variables fermioniques sont alors des fermions libres, et nous obtenons l'action découplée :

$$\begin{aligned} kS_{\mathrm{WZW}} = \frac{k-\tilde{h}_{\mathfrak{g}}}{2\pi}\int_{\mathscr{S}_2} \mathrm{d}^2z\kappa(g^{-1}\mathbf{d}g, g^{-1}*\mathbf{d}g) + \frac{k}{2\pi}\int_{\mathscr{S}_2}\mathrm{d}^2z\Psi^a\bar{\partial}\Psi^a + \widetilde{\Psi}^a\partial\widetilde{\Psi}^a \\ + \quad \imath\frac{k-\tilde{h}_{\mathfrak{g}}}{12\pi}\oint_{\mathscr{B}}\kappa\left(g^{-1}\mathbf{d}g, \left[g^{-1}\mathbf{d}g, g^{-1}\mathbf{d}g\right]\right). \end{aligned}$$

En conclusion, ce modèle sigma non-linéaire représente la propagation de supercordes sur le groupe de Lie $\mathscr{G}$, avec un flux de la deux-forme $\mathbf{B}_{[2]}$ donné par $\mathscr{H} = k\, h_3$.

En raison du grand nombre de symétries, cette action est exacte, c.-à.-d. que le modèle sigma ne reçoit pas de corrections quantiques. Plus précisément, pour un modèle de WZW au niveau k, le découplage des fermions renormalise l'action bosonique comme $k \to k - \tilde{h}_{\mathfrak{g}}$. Enfin, l'action effective bosonique est renormalisée comme $k - \tilde{h}_{\mathfrak{g}} \to k - \tilde{h}_{\mathfrak{g}} + \tilde{h}_{\mathfrak{g}} = k$.

Algèbres de Kač-Moody. En plus du découplage des fermions, le modèle de Wess-Zumino-Witten présente la particularité d'être invariant sous une symétrie de dimension infinie, agissant sur le champ $g(z,\bar{z})$ de la surface d'univers :

$$g(z,\bar{z}) \to \Omega(z)g(z,\bar{z})\tilde{\Omega}(\bar{z}), \tag{II.8}$$

où Ω, $\tilde{\Omega}$ sont des éléments quelconques du groupe $\mathscr{G}$.[h] Les courants conservés, chiraux associés à cette symétrie de dimension infinie, sont :

$$J(z) = T^aJ^a(z) = (k-\tilde{h}_{\mathfrak{g}})g^{-1}\partial g\,, \quad \tilde{J}(\bar{z}) = T^a\tilde{J}^a(\bar{z}) = -(k-\tilde{h}_{\mathfrak{g}})\bar{\partial}gg^{-1}.$$

Les courants gauches sont construits à l'aide des une-formes de Maurer-Cartan invariantes à gauche $\mathscr{J}^a$, et les courants droits à l'aide des formes invariantes à droite $\mathscr{K}^a$. Chaque jeu de

[g] le *label de Coxeter dual* $\tilde{h}_{\mathfrak{g}}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est défini par $\tilde{h}_{\mathfrak{g}}\delta^{ab} = \sum_{c,d} f^{cd}{}_a f^{cd}{}_a$.

[h] La periodicité de g sur la surface d'univers doit être respectée : $g(e^{2\imath\pi}z, e^{-2\imath\pi}\bar{z}) = g(z,\bar{z})$.

courants génère alors une algèbre via les produits d'opérateurs suivants :

$$J^a(z)J^b(z') \sim \frac{k-\tilde{h}_{\mathfrak{g}}}{2(z-z')^2} + \frac{f^{ab}_{\ c}J^c(z')}{z-z'}\,, \tag{II.9}$$

dont la forme est fixée par les symétries de la théorie. Les modes de Fourier de ces courants : $J(z) = \sum z^{-n-1}J_n$, obéissent alors à une **algèbre de Lie affine** $\hat{g}$, dite aussi *algèbre de Kač -Moody* [39] :

$$[J^a_n, J^b_m] = n\,\frac{k-\tilde{h}_{\mathfrak{g}}}{2}\,\delta^{ab}\,\delta_{m+n,0} + f^{ab}_{\ c}J^c_{m+n}$$

L'extension centrale $k-\tilde{h}_{\mathfrak{g}}$, provenant de la normalisation de l'action de WZW, est le niveau de l'algèbre affine.

Le découplage des fermions de l'action de WZW peut se comprendre aussi de façon algébrique. Le modèle de WZW original, avant le découplage des fermions (eq. II.7), possède une symétrie plus large, générée par les super-courants $\mathbf{J}^a(z,\theta) = j^a_f(z) + \theta\,\mathscr{J}^a(z)$:

$$\mathbf{J}^a(z,\theta)\,\mathbf{J}^b(z',\theta') \sim \frac{k\delta^{a,b}}{2(z-z')^2} + \frac{\theta'-\theta}{z-z'}\,f^{ab}_{\ c}\,\mathbf{J}^c(z',\theta').$$

La partie fermionique du super-courant $\mathbf{J}^a$ s'exprime à l'aide de fermions normalisés canoniquement, $\lambda^a(z)\lambda^b(0) \sim \delta^{ab}/z$, comme :

$$j^a(z) = \sqrt{\frac{k}{2}}\lambda^a(z).$$

Ces fermions libres permettent de définir une algèbre de Kač -Moody au niveau $\tilde{h}_{\mathfrak{g}}$:

$$J_f(z) = \frac{1}{2}f^{abc}\lambda^b\lambda^c.$$

Nous pouvons ainsi factoriser complètement l'algèbre en définissant des courants «purement bosoniques» comme $J^a(z) = \mathscr{J}^a(z) - J_f(z)$:

$$\begin{aligned}
J^a(z)J^b(z') &\sim \frac{k-\tilde{h}_{\mathfrak{g}}}{2(z-z')^2} + \frac{f^{ab}_{\ c}J^c(z')}{z-z'}\,,\\
J^a_f(z)J^b_f(z') &\sim \frac{\tilde{h}_{\mathfrak{g}}}{2(z-z')^2} + \frac{f^{ab}_{\ c}J^c_f(z')}{z-z'}\,,\\
J^a(z)J^a_f(z') &\sim 0.
\end{aligned}$$

Ainsi l'algèbre réalisée avec les fermions est complètement découplée, comme le suggère l'action (II.8).

Construction de Sugawara. Le modèle de (super)-WZW, possédant une symétrie de Lie affine $\hat{\mathfrak{g}}\times\hat{\mathfrak{g}}$ de dimension infinie, est l'exemple le plus simple d'algèbre chirale $\mathscr{W}$, contentant l'algèbre superconforme. En effet, à l'aide des super-courants, nous pouvons définir un super-tenseur d'énergie-impulsion, dit de Sugawara [40], de composantes :[i]

$$T(z) = \frac{1}{k}:J^aJ^a: - \frac{1}{2}\lambda^a\partial\lambda^a \tag{II.10}$$

$$G(z) = \sqrt{\frac{2}{k}}\left[J^a\lambda^a - \frac{1}{6}\,f_{abc}\,\lambda^a\lambda^b\lambda^c\right]. \tag{II.11}$$

[i] Dans cette expression apparaît le produit régularisé d'opérateurs : $J^aJ^a:(z)$, obtenu en soustrayant les singularités de contact contenues dans le produit d'opérateurs.

Ils réalisent une algèbre superconforme $N = 1$, de charge centrale :

$$\hat{c} = \left(1 - \frac{2\tilde{h}_{\mathfrak{g}}}{3k}\right) |\mathscr{G}|\,,$$

en fonction de $|\mathscr{G}|$ la dimension du groupe. Cette algèbre superconforme $N = 1$ étant plus «petite» que l'algèbre de Lie affine, le spectre de la théorie s'organisera naturellement en caractères de cette dernière. Il est possible de construire d'autres théories conformes à l'aide d'une algèbre de Kač-Moody, en choisissant un autre tenseur d'énergie-impulsion, qui doit cependant satisfaire certaines contraintes [41].

Représentations et caractères. Une fois la rotation chirale des fermions effectuée, le modèle de WZW se factorise en une théorie de $2r$ fermions libres (r est le rang du groupe) et d'un modèle de WZW bosonique. Comme nous venons de le voir, ce dernier possède comme symétrie une algèbre de Lie affine de niveau $(k - \tilde{h}_{\mathfrak{g}})$. Nous rappelons maintenant quelques éléments de la théorie des représentations de ces dernières dont nous aurons besoin pour construire le spectre de la théorie des cordes se propageant sur le groupe. Pour le moment nous nous restreignons aux groupes de Lie compacts. Les représentations de plus haut poids de l'algèbre affine se construisent à partir de représentations de plus haut poids de l'algèbre des modes zéro, qui est une algèbre de Lie usuelle. Les états de plus haut poids de l'algèbre affine $|\Lambda, \lambda\rangle$, associés au plus haut poids de l'algèbre de Lie Λ, vérifient :

$$J^a_{n>0}|\Lambda,\lambda\rangle = 0\ ,\ \ J^a_0|\Lambda,\lambda\rangle = R(\Lambda)^{\lambda'}{}_{\lambda}|\Lambda,\lambda'\rangle\,,$$

où la matrice $R(\Lambda)$ correspond à la représentation de plus haut poids Λ de l'algèbre des modes zéro. À l'aide de l'expression du tenseur d'énergie-impulsion de Sugawara (II.10), il est facile de vérifier que ces états sont aussi des primaires par rapport à l'algèbre conforme. Leur dimension conforme est donnée en fonction du Casimir de l'algèbre :

$$L_0|\Lambda,\lambda\rangle = \frac{\kappa(\Lambda,\Lambda+2\rho)}{2k}\ |\Lambda,\lambda\rangle\ , \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha\,.^{j}$$

De manière analogue à la construction des algèbres de Lie usuelles, les autres états de la représentation sont obtenus par l'action des modes négatifs des courants, $J^a_{n<0}$. Les états de la représentation seront caractérisés par leur poids affine, $\hat{\lambda} = (\lambda, k, n)$ en fonction de l'échelon n,[k] et avec le produit scalaire $(\hat{\lambda}, \hat{\lambda}') = \kappa(\lambda,\lambda') + kn' + k'n$. Cependant en général la représentation contiendra des vecteurs nuls et sera donc réductible.

Les représentations irreductibles de plus haut poids Λ seront caractérisées par leur caractère, fonction génératrice de la multiplicité des poids :

$$ch_{\Lambda}(\tau,\nu,u) = e^{-2\imath\pi k u} \sum_{\hat{\lambda}\in\, rep(\Lambda)} \dim V_{\hat{\lambda}}\ \exp\{2\imath\pi\tau n + \sum_i \nu_i \kappa(e_i,\lambda)\},$$

où $\dim V_{\hat{\lambda}}$ est la multiplicité du poids affine $\hat{\lambda}$ et $\{e_i\}$ une base orthonormale de l'espace des racines. Nous introduisons maintenant, pour chaque poids $\hat{\lambda}$, la fonctions théta associée à l'algèbre $\hat{\mathfrak{g}}$, définie par la somme suivante sur le réseau $\mathbf{M}$ des racines longues :

$$\Theta_{\hat{\lambda}}(\tau,\nu,u) = e^{-2\imath\pi k u} \sum_{n\in\mathbf{M}} e^{\imath\pi\tau k\ \kappa(n+\frac{\lambda}{k},n+\frac{\lambda}{k})}\ e^{2\imath\pi k\ \kappa(\sum_i \nu_i e_i, n+\frac{\lambda}{k})}.$$

[j] Dans la base de Cartan-Weyl l'algèbre affine a l'expression suivante : $[J^i_m, J^j_n] = \frac{k}{2} m\,\delta^{ij}\,\delta_{m+n,0}$, $[J^i_m, J^\alpha_n] = \alpha^i J^\alpha_{m+n}$, et enfin : $[J^\alpha_m, J^\beta_n] = \varepsilon(\alpha,\beta) J^{\alpha+\beta}_{m+n}$ si $\alpha+\beta$ est une racine, $\frac{2}{\alpha^2}(\alpha_i J^i_{m+n} + km\delta_{m+n,0})$ si $\alpha = -\beta$, 0 sinon.

[k] Pour un état du type $J^{a_1}_{-n_1}\cdots J^{a_2}_{-n_2}|\Lambda,\lambda\rangle$, l'échelon est défini comme $n = \sum n_i$.

En utilisant la *formule de Weyl-Kač*, une expression explicite des caractères est donnée en termes des fonctions théta de l'algèbre :

$$e^{2\imath\pi\tau\frac{\kappa(\Lambda,\Lambda+2\rho)}{2k}-c/24}\, ch_\Lambda(\tau,\nu,u) = \frac{\sum\limits_{w\in W}\varepsilon(w)\Theta_{w(\hat{\Lambda}+\hat{\rho})}(\tau,\nu,u)}{\sum\limits_{w\in W}\varepsilon(w)\Theta_{w(\hat{\rho})}(\tau,\nu,u)} =: \chi(\tau,\nu,u). \tag{II.12}$$

Le facteur multiplicatif du premier terme correspond à la dimension conforme des opérateurs primaires L_0 corrigée par l'«anomalie chirale» $c/24$, et le deuxième terme est écrit en termes des éléments w du groupe de Weyl W de l'algèbre de Lie, de parité $\varepsilon(w) = \pm 1$.[l]

Les caractères χ_Λ, incluant la dimension des opérateurs primaires sont les constituants naturels du spectre de la théorie des cordes sur $\mathscr{G}$. Nous pouvons maintenant écrire les différents spectres possibles pour la théorie des cordes sur le groupe $\mathscr{G}$ à l'aide de combinaisons de ces caractères pour les algèbres chirales gauches et droites. Cependant pour le moment nous ne savons pas quelles représentations de l'algèbre affine inclure dans le spectre de la théorie. Il se trouve que seulement un nombre fini de représentations, les **représentations intégrables**, est nécessaire [42]. Soit θ la plus haute racine de l'algèbre $\mathfrak{g}$. Alors une représentation de l'algèbre de Lie affine correspondant au plus haut poids Λ est intégrable si :

$$rep(\Lambda) \text{ intégrable} \iff \frac{2}{\kappa(\theta,\theta)}\,[k-\kappa(\Lambda,\theta)] \in \mathbb{N}.$$

Une fonction de corrélation contenant au moins une représentation non intégrable s'annule toujours ; en conséquence ces dernières découplent de la théorie. Une fonction de partition sur le tore pour la propagation des cordes sur le groupe $\mathscr{G}$ s'écrira donc comme :

$$Z(\tau) = \sum_{\Lambda,\kappa(\Lambda,\theta)\leqslant k}\ \sum_{\tilde{\Lambda},\kappa(\tilde{\Lambda},\theta)\leqslant k} M_{\Lambda,\tilde{\Lambda}}\,\chi_\Lambda(\tau,0,0)\,\bar{\chi}_{\tilde{\Lambda}}(\bar{\tau},0,0).$$

La matrice $M_{\Lambda,\tilde{\Lambda}}$ est choisie de telle sorte que la fonction de partition soit invariante modulaire. Les propriétés modulaires des caractères sont connues. Notons ici simplement que les caractères des représentations intégrables forment une représentation unitaire du groupe modulaire, voir eq. (II.5). Ainsi il existera toujours une solution diagonale : $M_{\Lambda,\tilde{\Lambda}} = \delta_{\Lambda,\tilde{\Lambda}}$.

Exemples.

La trois-sphère. Comme premier exemple de modèle de Wess-Zumino-Witten, nous allons considérer le cas du groupe $SU(2)$. En prenant par exemple un paramétrage d'angles d'Euler pour le groupe :

$$g = e^{\imath\frac{\sigma_2}{2}\phi_L} e^{\imath\frac{\sigma_1}{2}\theta} e^{\imath\frac{\sigma_2}{2}\phi_R}, \tag{II.13}$$

le modèle de WZW bosonique au niveau k s'écrit explicitement :[m]

$$S = \frac{k}{4\pi}\int d^2z\,\left(\partial\theta\bar{\partial}\theta + \partial\phi_L\bar{\partial}\phi_L + \partial\phi_R\bar{\partial}\phi_L + 2\cos\theta\,\partial\phi_L\bar{\partial}\phi_R\right).$$

Cette action correspond à la propagation des cordes sur la trois-sphère $SO(4)/SO(3)$, avec une torsion : $\mathscr{H} = 2k\sin\theta\ \mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi_L\wedge\mathrm{d}\phi_R$. L'isométrie $SU(2)\times SU(2)$ de la trois sphère est réalisée

[l] Le *groupe de Weyl* d'une algèbre de Lie est généré par les symétries discrètes du réseau des racines.

[m] Nous considérons ici un modèle de WZW supersymétrique de niveau $k+2$. Alors, après le découplage des fermions, le modèle de WZW bosonique sera au niveau $k+2-\tilde{h}_{\mathfrak{su}(2)} = k$.

comme une algèbre chirale $\hat{\mathfrak{su}}(2)_G \times \hat{\mathfrak{su}}(2)_D$:

$$\begin{aligned} J^3(z) = &\quad k(\partial\phi_L + \cos\theta\partial\phi_R) \quad , \quad J^{\pm}(z) = k(\partial\theta \pm \imath\sin\theta\partial\phi_R)e^{\mp\imath 2\phi_L} \\ \bar{J}^3(\bar{z}) = &\quad k(\bar{\partial}\phi_R + \cos\theta\bar{\partial}\phi_L) \quad , \quad \bar{J}^{\pm}(z) = k(\bar{\partial}\theta \pm \imath\sin\theta\bar{\partial}\phi_L)e^{\mp\imath 2\phi_R}. \end{aligned}$$

Les représentations apparaissant dans le spectre de la théorie sont classifiées par les spins des deux algèbres $\mathfrak{su}(2)$, qui sont restreints à l'intervalle $0 \leqslant j \leqslant k/2$ pour obtenir des représentations intégrables. Les caractères font apparaître les fonctions théta de $\hat{\mathfrak{su}}(2)$ données par ($q = e^{2\imath\pi\tau}$) :

$$\theta_{m,k}(\tau,\nu,u) = e^{-2i\pi ku}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{k\left(n+\frac{m}{2k}\right)^2} e^{2i\pi\nu k\left(n+\frac{m}{2k}\right)},$$

caractérisées par une charge $m \in \mathbb{Z}_{2k}$. La transformation de cette function sous $S : \tau \to -1/\tau$ est :

$$\theta_{m,k}(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau},u+\frac{\nu^2}{2\tau}) = \sqrt{\frac{-\imath\tau}{2k}}\sum_{m'\in\mathbb{Z}_{2k}}\theta_{m',k}(\tau,\nu,u).$$

Alors les caractères de l'algèbre affine s'expriment explicitement comme :

$$\chi_j(\tau,\nu,u) = \frac{\theta_{2j+1,k+2} - \theta_{-(2j+1),k+2}}{\theta_{1,2} - \theta_{-1,2}}.$$

Dans cette expression nous pouvons comprendre la contribution du dénominateur comme provenant de l'action des modes des courants de l'algèbre, alors que le numérateur prend en compte la soustraction des vecteurs nuls. Ces caractères ont une transformation simple sous $\tau \to -1/\tau$, donnée par la matrice :

$$S^j{}_{j'} = \sqrt{\frac{2}{k+2}}\sin\,\pi\frac{(2j+1)(2j'+1)}{k+2}.$$

Une classification complète des invariants modulaires est connue. En plus de l'invariant diagonal, il existe pour k pair des solutions correspondant au groupe $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$. Enfin pour des valeurs sporadiques de k il existe des solutions particulières, en correspondance directe avec les algèbres de Lie exceptionnelles E_n.

Le boson libre. Le cas le plus trivial de modèle de WZW correspond au groupe abélien $U(1)$. Dans ce cas nous considérons simplement la théorie d'un boson libre $X(z,\bar{z})$. L'algèbre chirale $\hat{\mathfrak{u}}(1) \times \hat{\mathfrak{u}}(1)$ est générée par les courants :[n]

$$J(z) = \imath\partial X \ , \ \ J(z)J(w) \sim \frac{1}{z^2} \quad \text{et} \quad \bar{J}(\bar{z}) = \imath\bar{\partial}X \ , \ \ \bar{J}(\bar{z})J(\bar{w}) \sim \frac{1}{\bar{z}^2}.$$

Le boson X correspond à une coordonnée compactifiée, et nous avons l'identification : $X(z,\bar{z}) \sim X(z,\bar{z}) + 2\pi R$. La dimension spatiale de la surface d'univers de la corde étant elle aussi compacte, le champ X réalisera en général une application $S^1 \to S^1$ du cercle sur le cercle, classifiée par le groupe d'homotopie $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$.[o] En d'autre termes, sur le plan complexe,

$$X(e^{2\imath\pi}z, e^{-2\imath\pi}\bar{z}) = X(z,\bar{z}) + 2\imath\pi wR \ , \ \ w \in \mathbb{Z}.$$

L'entier w représente le **nombre d'enroulement** de la corde autour de la dimension compacte. Dans ces secteurs nous devons considérer une algèbre chirale déformée, avec les courants :

$$J^w(z) = J(z) + \frac{wR}{2z} \ , \ \ \bar{J}^w(\bar{z}) = \bar{J}(\bar{z}) - \frac{wR}{2\bar{z}}.$$

[n] Nous choisissons ici la convention suivante pour l'échelle des cordes : $\alpha' = 2$.

[o] Nous n'avons pas rencontré de tels secteurs dans le cas précédent, car $H_1(S^3) = 0$.

Les caractères gauches et droits d'une représentation de moment n/R, dans le secteur d'enroulement w seront donnés par :

$$\chi_n^w(\tau,\nu) = e^{2\imath\pi\nu\left(\frac{n}{R}+\frac{wR}{2}\right)}\ \frac{q^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{R}+\frac{wR}{2}\right)^2}}{\eta(\tau)} \quad , \quad \overline{\chi}_n^w(\overline{\tau},\overline{\nu}) = e^{2\imath\pi\overline{\nu}\left(\frac{n}{R}-\frac{wR}{2}\right)}\ \frac{\overline{q}^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{R}-\frac{wR}{2}\right)^2}}{\eta(\overline{\tau})}.$$

Le facteur associé à la fonction de Dedekind, définie par (I.30), représente l'action libre des modes de création du courant $J(z)$. La fonction de partition de la théorie est simplement

$$Z(\tau) = \sum_{n,w\in\mathbb{Z}} \chi_n^w(\tau)\overline{\chi}_n^w(\overline{\tau}). \tag{II.14}$$

L'invariance modulaire peut être rendue manifeste à l'aide d'une resommation de Poisson sur la variable n. Nous obtenons ainsi l'expression :

$$Z(\tau) = \frac{R}{\sqrt{2\tau_2}}\frac{1}{\eta\overline{\eta}}\sum_{m,w\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi R^2}{2\tau_2}|m-w\tau|^2}.$$

Cette expression s'obtient directement en calculant l'intégrale de chemin pour le boson libre : $\int \mathscr{D}X e^{iS}$. Pour cette raison cette forme est appelée *lagrangienne*, et l'expression (II.14) la forme *hamiltonienne*. Dans cette représentation les entiers m,w sont sur un pied d'égalité ; ils représentent le nombre d'enroulement de la corde pour les deux cycles A et B du tore (voir fig. I.4), c.-à.-d. qu'ils classifient les applications : $T^2 \to S^1$. Nous voyons ainsi que l'inclusion de tous les secteurs d'enroulement est nécessaire pour garantir l'invariance modulaire. Nous pouvons remarquer que la théorie conforme ainsi définie est invariante sous la transformation $R \to 2/R$, si nous echangeons le moment et le secteur d'enroulement simultanément : $(n,w) \to (w,n)$. Cette opération correspond à la **dualité T**, évoquée au chapitre précédent, qui échange les petites et les grandes distances dans l'espace cible. La théorie $U(1)$, pour une valeur générique irrationnelle du rayon carré R^2, contient un nombre infini d'opérateurs primaires désignés par n ; cette théorie est dite *irrationnelle*. Par contre lorsque le rayon carré est rationnel, $R^2 = 2p'/p$, apparaît une algèbre chirale étendue, générée par les courants :

$$J_0 = \imath\partial X\ , \quad J^{\pm} = e^{\pm\imath\sqrt{2pp'}X}. \tag{II.15}$$

de dimensions conformes un pour le premier et pp' pour les autres. Les opérateurs primaires de cette algèbre, locaux avec les courants, sont de la forme $\exp(\imath mX/\sqrt{2pp'})$, $m \in \mathbb{Z}$. Comme les deux opérateurs de charges m et $m+2pp'$ sont reliés par l'action des courants $J^{\pm}$, la charge m des primaires est définie modulo $2pp'$. Ainsi le nombre d'opérateurs primaires de la théorie est fini, et la fonction de partition s'écrit en fonction des caractères étendus :

$$\chi_m(\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)}\theta_{m,pp'}(\tau,0)\,,$$

exprimés à l'aide des fonctions théta de $\hat{\mathfrak{su}}(2)$ au niveau pp'.

Nous voyons que, dans le cas particulier $pp' = 1$, les trois courants (II.15) sont de dimension un et réalisent une algèbre affine $\hat{\mathfrak{su}}(2)$ au niveau un ; les caractères que nous venons d'écrire sont alors identiques au caractères de $\hat{\mathfrak{su}}(2)_1$. Cet exemple instructif nous montre que la notion de géométrie de l'espace cible est radicalement altérée quand la courbure de l'espace-temps devient de l'ordre de l'échelle des cordes : ainsi dans cet exemple la propagation sur un cercle devient équivalente à la propagation sur une trois-sphère. Ce point de symétrie étendue au rayon $\sqrt{2}$, est aussi le point fixe de la dualité T. Ainsi cette symétrie peut s'interpréter de la façon suivante [43] : pour un rayon $R \neq \sqrt{2}$, les «bosons W» $J^{\pm}$ de l'algèbre chirale (II.15) deviennent massifs – par le mécanisme de Higgs – et la symétrie SU(2) est brisée en $U(1)$. Cependant la symétrie de Weyl $J_0 \to -J_0$ est conservée et reste exacte pour tout R.

Fermions libres. Dans la propagation des supercordes dans l'espace-temps plat ou sur une variété de groupe, nous avons à considérer la théorie conforme de fermions libres de la surface d'univers. À l'aide de N fermions libres du genre espace, caractérisé par le produit d'opérateurs $\psi^i(z)\psi^j(0) \sim \delta^{ij}/z$, nous pouvons construire une algèbre $\hat{\mathfrak{so}}(N)$ au niveau un. Explicitement nous avons :

$$J^{(ij)}(z) = \imath : \psi^i\psi^j : (z) \ , \quad J^{(ij)}(z)J^{(i'j')}(w) \sim \frac{G^{(ij)\,(i'j')}}{z^2} + \imath f^{(ij)\,(i'j')}_{(kl)} \frac{J^{(kl)}(0)}{z} \ ,$$

en fonction de la métrique invariante $G^{(ij)\,(i'j')}$ et des constantes de structure de $\mathfrak{so}(N)$. Nous considérons maintenant le cas où N est pair, naturel dans le cadre de la théorie des cordes. Les représentation intégrables de $\hat{\mathfrak{so}}(2n)_1$, susceptibles d'apparaître dans le spectre, sont : la représentation triviale (**0**), la représentation vectorielle (**v**) de dimension $2n$ et deux représentations spinorielles conjuguées, (**s**) et (**c**), de dimension 2^{n-1}. Les caractères correspondant peuvent s'écrire en fonction des caractères fermioniques (I.31) :

$$\begin{aligned}
\chi_{(\mathbf{0})} &= \frac{1}{2\eta^n}\left(\vartheta^n\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \vartheta^n\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\\
\chi_{(\mathbf{v})} &= \frac{1}{2\eta^n}\left(\vartheta^n\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} - \vartheta^n\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\\
\chi_{(\mathbf{s})} &= \frac{1}{2\eta^n}\left(\vartheta^n\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + i^{-n}\vartheta^n\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)\\
\chi_{(\mathbf{c})} &= \frac{1}{2\eta^n}\left(\vartheta^n\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} - i^{-n}\vartheta^n\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right).
\end{aligned} \tag{II.16}$$

Les représentations de spin entier apparaissent dans le secteur de Neveu-Schwarz des fermions libres, et les représentations de spin demi-entier dans le secteur de Ramond. Dans ce langage, la projection GSO que nous avons introduite dans la section I.4 revient à ne garder que la représentation vectorielle et une des représentations spinorielles de chaque algèbre chirale $SO(8)$, dans la jauge du cône de lumière de l'espace-temps plat. Ce choix est bien sûr compatible avec l'invariance modulaire.

La théorie de deux fermions libres correspond à une algèbre $\hat{\mathfrak{so}}(2)_1$, ce qui est équivalent à $\hat{\mathfrak{u}}(1)_2$. Or cette théorie peut aussi se formuler avec un boson libre H au rayon $R = 2$.[p] La correspondance entre les variables fermioniques et bosoniques s'appelle la *bosonisation* :

$$\partial H(z) = \psi^1(z)\psi^2(z) \ , \quad \frac{\psi^1 \pm \imath\psi^2}{\sqrt{2}} = e^{\pm\imath H}.$$

Ce formalisme permet d'obtenir une expression explicite pour les opérateurs de spin, états fondamentaux du secteur de Ramond : $S^{\pm}(z) = \exp \pm \imath H/2$. Par rapport à l'algèbre chirale (II.15) cette théorie possède naturellement une charge $s \in \mathbb{Z}_4$, correspondant aux quatre types de représentations de (II.16).

II.3. Théories de quotient

Les variétés de groupe que nous avons considérées constituent une classe importante de fonds possibles pour la théorie des supercordes, mais finalement assez limitée ; elle ne contient que des espaces possédant une grande symétrie, avec torsion et avec un dilaton constant. Cependant il existe une procédure très générale, dite de *quotient*, qui permet d'obtenir à partir d'un modèle de

[p] plus précisément, deux fermions chiraux ψ^1, ψ^2 s'expriment à l'aide d'un boson *holomorphe* H(z). La factorisation holomorphe d'un boson libre est possible si celui-ci est compact.

Wess-Zumino-Witten des variétés plus générales, possédant moins d'isométries, en gardant une structure algébrique exacte.

II.3.1. Modèles de Wess-Zumino-Witten jaugés. Comme pour les variétés de groupe, nous allons d'abord donner une construction «lagrangienne» de ces nouvelles théories – permettant de connaître l'expression des champs de fond – avant de donner ensuite une construction algébrique de la théorie, permettant en particulier de connaître son spectre. Pour simplifier les notations nous considérons ici un modèle de WZW bosonique, correspondant à un groupe de Lie $\mathscr{G}$, au niveau k :

$$kS_{\mathrm{WZW}}(g) = \frac{k}{2\pi}\int_{\mathscr{W}_2} \mathrm{d}^2z\ \kappa(g^{-1}\mathbf{d}g, g^{-1}*\mathbf{d}g) + \frac{\imath k}{12\pi}\oint_{\mathscr{B}} \kappa\left(g^{-1}\mathbf{d}g, \left[g^{-1}\mathbf{d}g, g^{-1}\mathbf{d}g\right]\right). \tag{II.17}$$

Nous choissons alors deux sous-groupes H et $\tilde{H}$ du groupe $\mathscr{G}$, et nous munissons le modèle d'une symétrie de jauge [44,45] :

$$g(z,\bar{z}) \to h(z,\bar{z})\, g(z,\bar{z})\, \tilde{h}(z,\bar{z})\ , \quad h \in H\ , \quad \tilde{h} \in \tilde{H}.$$

Contrairement à la symétrie (II.8), l'action gauche de H et droite de $\tilde{H}$ n'est pas chirale. Nous ajoutons alors à l'action des champs de jauge[q] $A, \bar{A}$ à valeurs dans $\mathfrak{h}, \tilde{\mathfrak{h}}$. Le couplage minimal de ces champs à l'action de WZW (II.17) donne le terme :

$$S(A,\bar{A}) = \frac{k}{\pi}\int d^2z\ \left(\kappa(\bar{A}, g^{-1}\partial g) + \kappa(A, \bar{\partial} g g^{-1}) + \kappa(\mathrm{Ad}_g A, \bar{A})\right).$$

Cependant cette action est anormale dans la théorie quantique [46]. Considérons en effet une variation infinitésimale $h = 1 + \varepsilon^a T^a$, $\tilde{h} = 1 + \tilde{\varepsilon}^a \tilde{T}^a$. L'action effective varie comme

$$\delta W \sim \frac{k}{2\pi}\int \tilde{\varepsilon}^a \partial \bar{A}^b \kappa(\tilde{T}^a, \tilde{T}^b) - \varepsilon^a \bar{\partial} A^b \kappa(T^a, T^b).$$

Cette anomalie peut être compensée par un contre-terme $\int \kappa(A,\bar{A})$. La variation de ce dernier sous la transformation de jauge est :

$$\delta\ \frac{k}{2\pi}\int \kappa(A,\bar{A}) \sim \frac{k}{2\pi}\int \varepsilon^a \bar{\partial} A^b \kappa(T^a, T^b) - \tilde{\varepsilon}^a \partial \bar{A}^b \kappa(\tilde{T}^a, \tilde{T}^b) - A^a \bar{A}^b \kappa(\varepsilon^a \tilde{T}^a + \tilde{\varepsilon}^a \tilde{T}^a, [T^b, \tilde{T}^c]).$$

Ainsi, dans le cas général, seul le *jaugement vecteur*, $g \to h^{-1}gh$ est autorisé. Dans le cas abélien, il existe une deuxième possibilité, le *jaugement axial* : $g \to hgh$.[r] Dans les deux cas l'action complète s'écrit, avec $A, \bar{A} \in \mathfrak{h}$:

$$kS(g|A,\bar{A}) = kS_{\mathrm{WZW}}(g) + \frac{k}{\pi}\int d^2z\ \left\{\kappa(\bar{A}, g^{-1}\partial g) \pm \kappa(A, \bar{\partial} g g^{-1}) + \kappa\left((1 \pm \mathrm{Ad}_g)A, \bar{A}\right)\right\}. \tag{II.18}$$

Le signe supérieur correspond au jaugement axial et le signe inférieur au jaugement vectoriel. En appelant T^A les générateurs de $\mathfrak{g}$, t^a les générateurs de $\mathfrak{h}$, T^μ les générateurs de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, l'action (sans le terme de Wess-Zumino) peut s'écrire :

$$kS = \frac{k}{2\pi}\int d^2z\quad C_{AB} J^A \bar{J}^B + \frac{k}{\pi}\int d^2z\ \left\{\bar{A}_a J^a\ \pm\ A_a \bar{J}^a\ +\ A_a \bar{A}_b (\delta^{ab} \pm C^{ab})\right\}$$
$$\text{avec } C^{AB} = \kappa(g^{-1} T^A g\,, T^B).$$

Les champs de jauge à deux dimensions étant non-dynamiques, ils peuvent, dans la théorie classique, être intégrés comme des multiplicateurs de Lagrange. Nous obtenons finalement l'action :

$$kS = \frac{k}{2\pi}\int_{\partial\mathscr{B}} d^2z\quad \left\{C_{\mu\nu} J^\mu\ \bar{J}^\mu + \left[C \mp 2(1 \pm C)^{-1}\right]_{ab} J^a \bar{J}^b\right\} + \frac{\imath k}{12\pi}\int_{\mathscr{B}} f_{abc} \mathscr{J}^a \mathscr{J}^b \mathscr{J}^c.$$

[q] plus précisément, les projections chirales des champs de jauge.

[r] Pour le moment nous nous restreignons aux algèbres de Lie simples. Dans le cas contraire les anomalies d'un facteur de l'algèbre peuvent être compensées par un autre facteur ; nous verrons des exemples plus loin.

Notons que le terme venant de l'intégration des champs de jauge contient à la fois une partie symétrique, correspondant à la modification de la métrique de l'espace cible, et un terme anti-symétrique, correspondant à la modification de la deux forme $\mathbf{B}_{[2]}$. Dans la théorie quantique, l'intégration sur les champs de jauge produira un dilaton venant de la mesure :

$$\Phi = -\frac{1}{2}\log\det(1 \pm C).$$

La solution que nous avons donnée est dégénérée, en raison de l'invariance de jauge que nous n'avons pas exploitée pour réduire le nombre de champs de dim $(\mathfrak{g})$ à $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. Une métrique ne faisant apparaître que les degrés de liberté du modèle jaugé peut s'obtenir à l'aide des une-formes suivantes, orthogonales aux directions dégénérées [47] :

$$M^{\nu} = \mathscr{J}_{\mu}\left\{1 \pm (1 \mp C)^{-1}C\right\}^{\mu\nu},$$

qui définissent une base orthonormale, c'est à dire telle que $ds^2 = \delta_{\mu\nu}M^{\mu} \otimes M^{\nu}$. Dans cette base la torsion possède l'expression suivante :

$$\mathscr{H} = \frac{1}{6}\left\{f_{\mu\nu\rho} \mp 3A_{[\mu\nu\rho]}\right\}M^{\mu} \wedge M^{\nu} \wedge M^{\rho}, \quad \text{avec} \quad A_{\mu\nu\rho} = f^{\sigma}_{\ \mu\nu}(1 \pm C)^{-1}_{\sigma\tau}C^{\tau}_{\ \rho}.$$

Les valeurs des champs de fond calculées de manière classique ne sont exactes qu'au premier ordre en $1/k$ – la constante de couplage du modèle sigma non-linéaire – et reçoivent des corrections quantiques, qui peuvent être calculées par des procédures complexes [47].

Lorsque le jaugement comporte des points fixes, la matrice $(1 \pm C)$ n'est plus inversible et l'intégration naïve des champs de jauge produit un modèle sigma singulier, dont la courbure et le dilaton divergent au point fixe. En particulier, pour un jaugement vectoriel, l'identité sera un tel point fixe. Cependant il n'est pas clair que dans la théorie conforme exacte un problème apparaisse en ce point.

Quantification des théories de quotient. Nous venons de voir que les théories conformes correspondant aux modèles de Wess-Zumino-Witten jaugés permettent de générer de nouvelles géométries pour la propagation des cordes ; leur intérêt majeur est de pouvoir être quantifiées exactement à l'aide d'une procédure BRST [48]. Nous considérons ici le cas du modèle vectoriel. Premièrement, pour mettre l'action du modèle de WZW jaugé, eq. (II.18) sous la forme appropriée, nous paramétrons les champs de jauge de la manière suivante :

$$A = \partial \mathrm{h}\,\mathrm{h}^{-1} \quad , \quad \bar{A} = \tilde{\mathrm{h}}^{-1}\bar{\partial}\tilde{\mathrm{h}} \quad , \qquad \mathrm{h},\, \tilde{\mathrm{h}} \in \mathfrak{h}.$$

Nous pouvons alors utiliser l'action de *Polyakov-Wiegmann*

$$S_{\mathrm{WZW}}(g\mathrm{h}) = S_{\mathrm{WZW}}(g) + S_{\mathrm{WZW}}(\mathrm{h}) - \frac{1}{4\pi}\int d^2z\, \kappa(g^{-1}\partial g, \bar{\partial}\mathrm{h}\mathrm{h}^{-1})$$

pour réecrire l'action du modèle de WZW jaugé comme $S_{\mathrm{WZW}}(\mathrm{h}^{-1}g\tilde{\mathrm{h}}) - S_{\mathrm{WZW}}(\mathrm{h}^{-1}\tilde{\mathrm{h}})$. Cependant ce changement de variables induit un jacobien dans l'intégrale de chemin du modèle :

$$\begin{aligned}\int \mathscr{D}g\,\mathscr{D}A\,\mathscr{D}\bar{A}\ &\exp\{-kS(g|A,\bar{A})\} \\ &= \int \mathscr{D}g\,\mathscr{D}\mathrm{h}\,\mathscr{D}\tilde{\mathrm{h}}\,\det D \det \bar{D}\ \exp\{-kS_{\mathrm{WZW}}(\mathrm{h}^{-1}g\tilde{\mathrm{h}}) + kS_{\mathrm{WZW}}(\mathrm{h}^{-1}\tilde{\mathrm{h}})\}.\end{aligned}$$

Nous pouvons réecrire le jacobien de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\det D \det \bar{D} &= \det(\partial - A)\ \det(\bar{\partial} - \bar{A}) = e^{\tilde{h}_{\mathfrak{h}} S_{\mathrm{WZW}}(\mathrm{h}^{-1}\tilde{\mathrm{h}})}\ \det \partial\ \det \bar{\partial} \\ &= e^{\tilde{h}_{\mathfrak{h}} S_{\mathrm{WZW}}(\mathrm{h}^{-1}\tilde{\mathrm{h}})} \int \mathscr{D}b\,\mathscr{D}c\,\mathscr{D}\bar{b}\,\mathscr{D}\bar{c}\ \exp\{-\int d^2z\ \kappa(b,\bar{\partial}c) + \kappa(\bar{b},\partial\bar{c})\}.\end{aligned}$$

Dans la dernière ligne nous avons introduit, de même que pour la quantification de la corde fondamentale de la section I.3, des fantômes de Fadeev-Popov, cette fois de dimensions conformes $(\Delta_b, \Delta_c) = (1,0)$ et $(\bar{\Delta}_{\bar{b}}, \bar{\Delta}_{\bar{c}}) = (1,0)$, à valeurs dans $\mathfrak{h}$ et de statistique fermionique. Enfin nous pouvons changer de variables $\mathrm{h}^{-1} g \tilde{\mathrm{h}} \to g$ et fixer la jauge par la condition $\tilde{\mathrm{h}} = 1$. Finalement, nous avons obtenu la fonction de partition suivante après choix de jauge :

(II.19)
$$Z = \int \mathscr{D}g\, \mathscr{D}\mathrm{h}\, \mathscr{D}b\, \mathscr{D}c\, \mathscr{D}\bar{b}\, \mathscr{D}\bar{c}\, \exp\{-kS_{\mathrm{WZW}}(g) + (k+\tilde{h}_{\mathfrak{h}})S_{\mathrm{WZW}}(\mathrm{h}) - \int d^2z\, \kappa(b, \bar{\partial}c) + \kappa(\bar{b}, \partial\bar{c})\}$$

Ainsi nous avons réécrit l'action de manière factorisée, comme un modèle de WZW pour $\mathscr{G}$ au niveau k, de courants $J, \bar{J}$, un modèle de WZW pour H au niveau $-(k+\tilde{h}_{\mathfrak{h}})$, de courants $I, \bar{I}$, et une action de fantômes de jauge. Cependant, les trois actions sont encore reliées par une symétrie BRST, correspondant à une transformation de jauge dont le paramètre est le champ de fantômes : $\delta_{BRST} g = \bar{c}g - gc$, compensée par une transformation appropriée des champs de fantômes. La charge BRST s'écrit comme l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \mathscr{Q}_{BRST} &= \oint \frac{\mathrm{d}z}{2\imath\pi} : \kappa(c(z), J(z) + I(z)) : + \frac{\imath}{2} : \kappa(c, [b,c]) : \\ &- \oint \frac{\mathrm{d}\bar{z}}{2\imath\pi} : \kappa(\bar{c}(\bar{z}), \bar{J}(\bar{z}) + \bar{I}(\bar{z})) : + \frac{\imath}{2} : \kappa(\bar{c}, [\bar{b}, \bar{c}]) : =: Q_{BRST} + \bar{Q}_{BRST}. \end{aligned} \tag{II.20}$$

le spectre physique du modèle de WZW jaugé sera donné par la cohomologie de cet opérateur. Nous voyons que là encore la charge BRST se factorise en une charge holomorphe et une charge antiholomorphe. Le tenseur d'énergie-impulsion de la théorie jaugée est donné par :

$$T(z) = T^{G/H}(z) + T'(z) := \left\{ \frac{: J^A J^A :}{2(k+\tilde{h}_{\mathfrak{g}})} - \frac{: J^a J^a :}{2(k+\tilde{h}_{\mathfrak{h}})} \right\} + \left\{ \frac{J^a J^a}{2(k+\tilde{h}_{\mathfrak{h}})} - \frac{I^a I^a}{2(k+\tilde{h}_{\mathfrak{h}})} - b^a \partial c^a \right\}.$$

La première pièce du tenseur d'énergie-impulsion, le *tenseur d'énergie-impulsion de Goddard-Kent-Olive* (GKO) [49] commute avec la seconde. La deuxième pièce est une quantité BRST exacte, c.-à.-d. :

$$T'(z) = \frac{1}{k+\tilde{h}_{\mathfrak{h}}} \left[Q_{BRST}, : b_a (J^a - I^a) : \right].$$

Ainsi le spectre physique obtenu par l'analyse de la cohomologie BRST sera donné par le tenseur d'énergie-impulsion de GKO. La charge centrale de la théorie ainsi obtenue est :

$$c = \frac{k|\mathscr{G}|}{k+\tilde{h}_{\mathfrak{g}}} - \frac{k|H|}{k+\tilde{h}_{\mathfrak{h}}}.$$

En oubliant les complications dues aux fantômes dans l'analyse BRST [50], les états physiques devront vérifier :

$$J^a_{n>0}|\phi\rangle = \bar{J}^a_{n>0}|\phi\rangle = 0\,, \quad \text{et si} \quad a \in \{\alpha^+\}\,, \quad J^a_0|\phi\rangle = \bar{J}^a_0|\phi\rangle = 0. \tag{II.21}$$

Par ailleurs il existe une restriction sur les modes zéro de H :

$$\left(J^i_0 + I^i_0 + \rho^i\right)|\phi\rangle = \left(\bar{J}^i_0 + \bar{I}^i_0 + \rho^i\right)|\phi\rangle = 0. \tag{II.22}$$

où l'indice i désigne les courants de la sous-algèbre de Cartan, dans la base de Cartan-Weyl. Nous voyons en particulier que les représentations des courants J^i et I^i doivent avoir le même Casimir. Le jaugement axial conduit aux mêmes contraintes, mais avec le remplacement $\bar{I}^i \to -\bar{I}^i$ dans (II.22).

Exemple : quotients de la trois-sphère. Nous allons illustrer cette construction avec la construction des théories de quotient de $SU(2)_k$. Explicitement l'action du modèle de WZW jaugé est :

$$S = \frac{k}{4\pi}\int d^2z\,\left(\partial\theta\bar\partial\theta + \partial\phi_L\bar\partial\phi_L + \partial\phi_R\bar\partial\phi_L + 2\cos\theta\,\partial\phi_L\bar\partial\phi_R\right)$$
$$+\frac{k}{2\pi}\int d^2z\,\left\{\bar A(\partial\phi_L + \cos\theta\,\partial\phi_R) \pm A(\bar\partial\phi_R + \cos\theta\bar\partial\phi_L) + (1\pm\cos\theta)A\bar A\right\}.$$

Dans le cas du jaugement vecteur (signe «-») nous pouvons faire le choix de jauge – voir (II.13) – suivant : $\phi_L = \phi_R$. Après l'intégration classique des champs de jauge, nous obtenons le modèle sigma :

$$S = \frac{k}{\pi}\int \mathrm{d}^2z\,\left(\frac{1}{4}\partial\theta\bar\partial\theta + \mathrm{cotan}^2(\theta/2)\,\partial\phi\bar\partial\phi\right), \tag{II.23}$$

avec le dilaton : $\Phi(\theta) = -\log\,\sin(\theta/2)$. La symétrie apparente de translation selon ϕ est brisée au niveau quantique, par des effets non-perturbatifs, à $\mathbb{Z}_k$.

Dans le cas du jaugement axial, après le choix de jauge $\phi_L + \phi_R = 0$, nous obtenons le modèle sigma :

$$S = \frac{k}{\pi}\int \mathrm{d}^2z\,\left(\frac{1}{4}\partial\theta\bar\partial\theta + \tan^2(\theta/2)\,\partial\phi\bar\partial\phi\right), \tag{II.24}$$

Ces deux actions sont évidemment les mêmes, après le remplacement $\theta \to \theta + \pi/2$. Cette dualité T est facile à comprendre, car les deux jaugements sont reliés par la substitution : $\bar J^3 \to -\bar J^3$, qui est une symétrie de Weyl, exacte, du modèle de WZW original. Le raisonnement est similaire au cas de la dualité T pour le boson libre. Le modèle sigma (II.23) a la topologie d'un disque, et possède une singularité pour $\theta \to \pi/2$, à une distance géodésique finie du centre. Pourtant, dans l'action duale (II.24) qui lui est équivalente, $\theta \to 0$ est un point parfaitement régulier. À l'approche de la singularité de l'espace, les modes d'enroulement des cordes deviennent plus légers que les modes d'impulsion, et ainsi la géométrique effective est radicalement transformée. Il est tentant de spéculer qu'un tel comportement se généralise aux autres singularités, par exemple cosmologiques.

Caractères et fonction de partition. Les règles de quantification BRST du quotient, eqs. (II.21) et (II.22), peuvent être implémentées au niveau des caractères de l'algèbre affine, donnés par l'expression (II.12), afin de calculer les caractères et fonctions de partition des théories de quotient.

Nous commençons par choisir une fonction de partition invariante modulaire pour le modèle de WZW pour $\mathscr{G}$: $Z(\tau) = \sum_{\Lambda,\bar\Lambda} N_{\Lambda\bar\Lambda}\chi^{\Lambda}_{\mathfrak{g}}\bar\chi^{\bar\Lambda}_{\mathfrak{g}}$. Par contre, la fonction de partition pour le modèle de WZW de H, sera composée de caractères particuliers car l'action apparaît dans l'intégrale fonctionnelle (II.19) avec un niveau négatif. En conséquence, il est possible de montrer, en utilisant le *déterminant de Kač -Kazhdan* [51], que les représentations de $\hat{\mathfrak{h}}$ satisfaisant les contraintes (II.22) – pour des représentations de $\hat{\mathfrak{g}}$ intégrables – ne contiennent pas de vecteurs nuls. Les représentations sont donc générées par l'action libre des modes des courants de l'algèbre affine. Le caractère d'une représentation de plus haut poids est alors ($r_{\mathfrak{h}}$ est le rang de $\mathfrak{h}$) :

$$\chi^{\tilde\Lambda}_{\mathfrak{h}}(\tau,z^a) = \frac{e^{\imath\kappa(z,\rho)}\,q^{-\frac{\kappa(\tilde\Lambda,\tilde\Lambda+\rho)}{k+h_{\mathfrak{h}}}}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{r_{\mathfrak{h}}}\prod_{\alpha>0}(1-q^{n-1}e^{-\imath\kappa(\alpha,z)})(1-q^n e^{\imath\kappa(\alpha,z)})}$$

Le choix des représentations dans la fonction de partition correspondante, est dicté par les contraintes (II.22) impliquant l'égalité des Casimirs. Enfin, la contribution des fantômes est aussi donnée par l'action

libre des modes $b^a_{n<0}$ et $c^a_{n<0}$, mais avec une statistique inversée :

$$\chi^{\varphi}(\tau,z^a) = e^{\imath\kappa(z,\rho)} \left\{ \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{r_{\mathfrak{h}}} \prod_{\alpha>0}(1-q^{n-1}e^{-\imath\kappa(\alpha,z)})(1-q^n e^{\imath\kappa(\alpha,z)}) \right\}^2$$

Les caractères de la théorie de quotient sont alors donnés par le produit des trois facteurs précédents, contraints par la condition de neutralité (II.22) :

$$\chi^{\Lambda}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\ \tilde{\Lambda}}(\tau,z^\mu) = \int_0^1 \prod_a \frac{\mathrm{d}v^a}{2\pi} \quad \chi^{\Lambda}_{\mathfrak{g}}(\tau,v^a,v^\mu)\ \chi^{\tilde{\Lambda}}_{\mathfrak{h}}(\tau,v^a)\ \chi^{\varphi}(\tau,v^a). \tag{II.25}$$

Ces caractères se transforment sous le groupe modulaire avec la matrice S des caractères de $\hat{\mathfrak{g}}$ et la matrice conjuguée de $\hat{\mathfrak{h}}$.

Théories parafermioniques. Une classe particulière de théories de quotient correspond au jaugement par le tore maximal [52,53], c.-à.-d. la sous-algèbre de Cartan complète ; ces théories sont appelées génériquement «parafermioniques», par généralisation du cas de $SU(2)$. Nous commençons par exprimer les courants de la sous-algèbre de Cartan à l'aide de bosons libres holomorphes normalisés canoniquement – c.-à.-d. $\phi^i\phi^j \sim -\delta^{ij}\log z$ – comme :

$$J^i(z) = \imath\sqrt{\frac{k}{2}}\partial\phi^i. \tag{II.26}$$

Nous pouvons alors factoriser les courants associés aux racines de l'algèbre en une partie chargée sous ces courants et une partie neutre, notée ϖ_α :

$$J^\alpha(z) = \sqrt{\frac{2k}{\alpha^2}}\ c_\alpha\ \varpi_\alpha(z)\ e^{\frac{\imath}{\sqrt{k}}\alpha\phi}.$$

Les champs holomorphes ϖ_α sont les *parafermions générateurs* associés aux racines simples. Les parafermions générateurs associés à des racines α et β sont identifiés si $\alpha-\beta \in k\mathbf{M}$, où $\mathbf{M}$ est le réseau des racines longues. Les coefficients constants c_α sont appelés *cocycles*. Les produits d'opérateurs entre les parafermions et les relations entre les cocycles sont déterminés en fonction des relations de commutation de l'algèbre ; en particulier, nous avons $\varpi_\alpha(z)\varpi_{-\alpha}(0) \sim z^{-2+\alpha^2/k}$. Cette relation, combinée avec l'invariance conforme de la théorie, fixe la dimension des parafermions générateurs :

$$\Delta_\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2k}.$$

Les opérateurs primaires de la théorie de parafermions s'obtiennent directement à partir des opérateurs primaires de l'algèbre affine $\hat{\mathfrak{g}}$. En effet, en utilisant (II.26), nous pouvons décomposer ces derniers en une partie chargée sous l'algèbre de Cartan et une partie neutre :

$$\Phi_{\Lambda,\lambda} =: \Pi_{\Lambda,\lambda} e^{\frac{\imath}{\sqrt{k}}\lambda\phi}$$

Les opérateurs $\Pi_{\Lambda,\lambda}$ ainsi définis sont les opérateurs primaires de l'algèbre chirale des parafermions, annihilés par les modes positifs des parafermions. Ils portent une charge λ appartenant au réseau des poids $\mathbf{M}^*$ modulo $k\mathbf{M}$.

Les caractères des parafermions s'obtiennent à partir de la décomposition des caractères de $\hat{\mathfrak{g}}$ par rapport au réseau des charges sous l'algèbre de Cartan :

$$\chi^{\Lambda}(\tau,z) = \sum_{\lambda \bmod k\mathbf{M}} c^{\Lambda}_{\lambda}\,\Theta_{\lambda,k}(\tau,z). \tag{II.27}$$

Les fonctions c_λ^Λ sont appelées «fonctions de cordes» dans la littérature mathématique ; elles sont les fonctions génératrices de la dégénéresence p_n des états de poids λ à l'échelon n de la représentation Λ de l'algèbre affine :

$$c_\lambda^\Lambda(\tau) := q^{\frac{\kappa(\Lambda,\Lambda+2\rho)}{k+\tilde{h}_{\mathfrak{g}}}-\frac{\kappa(\lambda,\lambda)}{2k}-c/24}\sum_{n=0}^{\infty} p_n q^n\ , \quad \text{avec la symétrie} \quad c_{\lambda+km}^\Lambda = c_\lambda^\Lambda\ ,\ \ m\in\mathbf{M}.$$

Les caractères de la théorie de parafermions sont donnés par $\eta^{r_{\mathfrak{g}}}c_\lambda^\Lambda$; ils se transforment avec la matrice modulaire des caractères de $\hat{\mathfrak{g}}$ et le conjugué de celle de $\Theta_{\lambda,k}$. Ces caractères peuvent aussi s'obtenir suivant l'analyse BRST des théories de quotient, en utilisant la décomposition (II.27) dans la formule générale (II.25).

Exemple de $SU(2)$. Les parafermions de $SU(2)_k$ possèdent une symétrie chirale $\mathbb{Z}_k\times\mathbb{Z}_k$. Les parafermions vérifient explicitement l'algèbre suivante :

$$\begin{aligned}
\varpi_m(z)\varpi_n(0) &\sim \left(\frac{\Gamma(k-m+1)\Gamma(k-n+1)\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)\Gamma(k+1)\Gamma(k-m-n)}\right)^{1/2} z^{\Delta_{m+n}-\Delta_m-\Delta_n}\varpi_{m+n}\ , \quad m,n\geqslant 0\,,\\
\varpi_m(z)\varpi_{-m}(0) &\sim z^{-2(\Delta_m-1)}\left(\frac{1}{z^2}-\frac{2\Delta_m}{c}T+\cdots\right).
\end{aligned}$$

Les caractères de l'algèbre s'obtiennent par la décomposition en termes de fonctions théta des caractères de $\hat{\mathfrak{su}}(2)_k$:

$$\chi^j = \sum_{m\in\mathbb{Z}_{2k}} c_m^j\theta_{\lambda,k}.$$

Dans ce cas l'expression explicite des fonctions de cordes est connue. Une fonction de partition générique pour cette théorie s'obtient avec un invariant modulaire de $SU(2)$ et un invariant modulaire des fonctions théta :

$$Z(\tau) = \sum_{j,\bar{j}=0}^{k/2}\sum_{m,\bar{m}\in\mathbb{Z}_{2k}} N_{j\bar{j}}M^{m\bar{m}}c_m^j(\tau)\bar{c}_{\bar{m}}^{\bar{j}}(\bar{\tau}).$$

Un invariant modulaire générique des fonctions théta est donné par :

$$\sum_{\substack{m+\bar{m}=0 \bmod 2\ell\\ m-\bar{m}=0 \bmod 2\ell'}} \theta_{m,k}\bar{\theta}_{\bar{m},k}\ , \quad \text{avec} \quad k=\ell\ell'.$$

Toutes ces solutions s'interprètent comme le quotient de la solution diagonale, $m=\bar{m}$, par une symétrie discrète $\mathbb{Z}_\ell$, en d'autres termes un *orbifold*.

Extension supersymétrique. Par souci de simplicité nous avons présenté les théories de quotient dans le cadre de la théorie conforme bosonique. L'extension au cas de théories superconformes est relativement directe. Premièrement, nous pouvons reformuler les modèles de WZW supersymétriques dans le super-espace. Pour cela, l'action de WZW bosonique est remplacée par l'action des super-champs suivants, dont la partie bosonique est à valeurs dans $\mathscr{G}$ et la partie fermionique à valeurs dans $\hat{\mathfrak{g}}$, $G=\exp\imath T^a\Phi_a$, avec $\Phi_a=\phi_a+\sqrt{k/2}\theta\lambda^a+\sqrt{k/2}\bar{\theta}\tilde{\lambda}^a+\theta\bar{\theta}F^a$. L'action de WZW supersymétrique s'écrit :

$$k\mathbf{S}(g) = \frac{k}{2\pi}\int \mathrm{d}^2z\,\mathrm{d}^2\theta\ \mathrm{Tr}\ \left(G^{-1}\mathfrak{D}GG^{-1}\bar{\mathfrak{D}}G+\int dt\left\{G\partial_tG^{-1}\left(\mathfrak{D}G\bar{\mathfrak{D}}G^{-1}+\bar{\mathfrak{D}}G\mathfrak{D}G^{-1}\right)\right\}\right)$$

Ensuite nous rajoutons à cette action un super-champ de jauge $\mathbf{A},\bar{\mathbf{A}}$ à valeurs dans $\mathfrak{h}$, avec le couplage :

$$\begin{aligned} k\mathbf{S}(G|\mathbf{A},\bar{\mathbf{A}}) &= k\mathbf{S}_{WZW}(G) \\ &\quad + \frac{k}{\pi}\int d^2z\, d^2\theta \left\{ \kappa(\bar{\mathbf{A}}, G^{-1}\mathfrak{D}G) \pm \kappa(\mathbf{A}, \bar{\mathfrak{D}}GG^{-1}) + \kappa\left((1\pm \mathrm{Ad}_g)\mathbf{A},\bar{\mathbf{A}}\right)\right\}. \end{aligned}$$

La symétrie locale de cette action comprend une partie bosonique $g \to h^{\pm 1}gh$ à valeurs dans le groupe et une partie fermionique, à valeurs dans l'algèbre, correspondant aux composantes fermioniques du champ de jauge. Le modèle sigma non-linéaire correspondant à ce modèle supersymétrique s'obtient simplement en remplaçant dans le modèle bosonique les champs par des super-champs et les dérivées par des dérivées covariantes du super-espace. La quantification BRST s'effectue de la même manière. En plus des fantômes fermioniques (b,c), nous obtenons une paire de super-fantômes (β,γ) bosoniques. La charge BRST comprend maintenant une partie correspondant à la symétrie de jauge fermionique :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{BRST} = \oint \frac{\mathrm{d}z}{2\imath\pi} \Bigg\{ &: \kappa(c(z), J_{\mathfrak{g}}(z) + I_{\mathfrak{h}}(z)) : + \sqrt{\frac{k}{2}} : \kappa(\gamma, \lambda_{\mathfrak{g}} + \mu_{\mathfrak{h}}) : \\ &+ \frac{\imath}{2} : \kappa(c,[b,c]) : + \frac{\imath}{2} : \kappa(\gamma, \{\beta,\gamma\}) : \Bigg\} \end{aligned}$$

Nous pouvons aussi définir une algèbre superconforme $N=1$ pour les états physiques de la théorie de quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, commutant avec l'algèbre superconforme pour $\mathfrak{h}$ [54] :

$$\begin{aligned} T^{G/H} &= \frac{1}{k} : J^\mu J^\mu : - \frac{k-\tilde{h}_{\mathfrak{g}}}{2k} : \lambda^\mu \partial\lambda^\mu : + \frac{\imath}{k} f_{\mu\nu\rho} J^\mu \lambda^\nu \lambda^\rho + \frac{1}{k} f_{\mu\nu\rho} f_{\sigma\nu\rho} \lambda^\mu \partial\lambda^\sigma \\ &\qquad - \frac{1}{4k^2} f_{\mu\nu\rho} f_{\mu\sigma\tau} \lambda^\nu \lambda^\rho \lambda^\sigma \lambda^\tau, \\ G^{G/H} &= \sqrt{\frac{2}{k}} \left(J^\mu \psi^\mu - \frac{\imath}{6} f_{\mu\nu\rho} \lambda^\mu \lambda^\nu \lambda^\rho \right), \end{aligned}$$

générant une algèbre de charge centrale :

$$\hat{c} = \frac{k|\mathscr{G}|}{k+\tilde{h}_{\mathfrak{g}}} - \frac{k|H|}{k+\tilde{h}_{\mathfrak{h}}}. \tag{II.28}$$

Théories de quotient et symétrie N=2. Les théories de quotient que nous venons de construire possèdent génériquement une symétrie superconforme $N=1$. Cependant, une certaine classe de quotients, dits de *Kazama-Suzuki*, possède une symétrie étendue N=2. Bien que la géométrie des théories de quotient associées aux modèles de WZW jaugés soit différente des quotients géométriques[s], la condition de symétrie $N=2$ se résume à une condition sur la géométrie de ces derniers. Pour que le modèle de WZW jaugé possède une symétrie étendue $N=2$, l'espace quotient correspondant doit être un *espace symétrique hermitien*. Par exemple, les quotients $SU(n+m)/U(m)\times SU(n)$ entrent dans cette catégorie.

Considérons le cas particulier du quotient $SU(2)/U(1)$ supersymétrique, au niveau k, qui posséde cette propriété. L'algèbre N=2 s'écrit à l'aide des courants purement bosoniques J^a de $\hat{\mathfrak{su}}(2)$

[s] Le quotient géométrique gauche (resp. droit) d'un groupe de Lie $\mathscr{G}$ par un sous-groupe H est défini par les classes d'équivalence de l'action à droite (resp. à gauche) des éléments de H : $[g] = \{gh, h\in H\}$. Par exemple, la n-sphère correspond au quotient $SO(n+1)/SO(n)$.

et des fermions λ^a associés :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2k}\left(:J^1J^1: + :J^2J^2:\right) - \frac{k-2}{4k}\left(\lambda^1\partial\lambda^1 + \lambda^2\partial\lambda^2\right) + \frac{\imath}{2k}\lambda^1\lambda^2J^3\,, \\ G^{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{k}}\left(J^1 \mp \imath J^2\right)\left(\lambda^1 \pm \imath\lambda^2\right)\,, \\ J_R &= \imath\lambda^2\lambda^1 - \frac{2\mathscr{J}^3}{k} = \frac{\imath(k-2)\,\lambda^2\lambda^1}{k} - \frac{2J^3}{k}. \end{aligned}$$

La charge centrale de cette théorie conforme est, d'après (II.28),

$$c = \frac{3}{2}\hat{c} = \frac{3(k-2)}{k}.$$

Nous observons que cette charge centrale correspond exactement à celle des modèles minimaux unitaires de l'algèbre superconforme N=2. Ces derniers étant entièrement caractérisés par leur charge centrale, nous concluons que le modèle de WZW jaugé $SU(2)/U(1)$ supersymétrique correspond à une réalisation de ces théories.

II.4. Déformations marginales

La formulation de la théorie des supercordes présentée jusqu'à présent est une théorie de *première quantification*, c.-à.-d. que nous quantifions la propagation d'une corde fondamentale «test» dans un fond correspondant à un état cohérent de cordes. Nous ne connaissons pas de formulation qui soit indépendante du fond gravitationnel, en d'autres termes une *théorie de champs de cordes* fermées.[t] Cette approche serait cependant nécessaire pour mieux comprendre la gravitation quantique à l'aide des théories de supercordes.

Le mieux que nous puissions faire est d'accéder à une connaissance la plus complète possible des solutions de première quantification de la théorie des cordes, en étudiant l'espace des solutions appelé *espace des modules* de la théorie. Les modèles sigma non-linéaires acceptables sont des théories superconformes N=1 ; à l'ordre le plus bas dans l'échelle des cordes α', les champs de fond de l'action du modèle sigma sont fournis par les solutions de la supergravité correspondante. Cependant, dans le cas général, il n'est pas clair que toutes ces solutions peuvent être corrigées ordre par ordre en α' pour constituer une théorie véritablement superconforme sur la surface d'univers.

Dans ce chapitre nous avons considéré certaines théories conformes *exactes*, c.-à.-d. possédant la symétrie conforme au-delà de l'approximation de supergravité, et pour lesquelles le spectre et les interactions peuvent être calculés exactement. Cependant ces modèles de Wess-Zumino-Witten et leurs quotients constituent des points isolés très particuliers de l'espace des modules. Nous voudrions savoir s'il est possible de déformer ces théories, en conservant la symétrie superconforme, pour explorer l'espace des modules et relier différentes théories déjà connues.

Les déformations des théories conformes sont dites **marginales** si elles sont générées par des opérateurs de dimension droite et gauche $(\Delta,\overline{\Delta}) = (1,1)$; elles préservent alors la symétrie conforme. L'action de la théorie conforme peut ainsi être déformée par :

$$\delta S = \varepsilon \int \mathrm{d}^2z\ V_{1,1}(z,\overline{z}).$$

Par contre, lorsque la dimension des opérateurs est inférieure à un, la déformation est dite «pertinente», car elle devient importante aux faibles énergies. Alors, d'après le «théorème C» [55], la théorie va atteindre un autre point fixe correspondant à une théorie conforme de charge centrale

[t] Cependant des théories de champs de cordes ouvertes sont connues.

inférieure (pour une théorie unitaire). Revenons au cas des déformations marginales. La dimensionnalité de l'opérateur responsable de la perturbation assure que la déformation est marginale au premier ordre seulement. En effet, il n'est pas garanti que, dans la théorie déformée, sa dimension soit toujours la même. Dans l'affirmative, la déformation est dite *exactement marginale*. Nous allons maintenant en étudier quelques exemples.

Espace des modules des théories N=2. Les déformations marginales des théories conformes ont été étudiées en particulier dans le cadre des compactifications supersymétriques de la théorie des cordes. Une théorie des supercordes compactifiée sur une variété d'holonomie spéciale – dite de **Calabi-Yau** – à six dimensions donne une théorie effective à quatre dimensions possédant une ou deux supersymétries. Ses propriétés globales –par exemple le groupe de jauge ou le nombre de familles de quarks – sont liées à la topologie de la variété. Par contre, les paramètres continus de la théorie effective – masses, constantes de couplage – sont reliés aux détails de la géométrie de l'espace interne. Il est aussi possible de réaliser des compactifications non géométriques, en remplaçant l'espace de compactification par une théorie superconforme N=2 arbitraire de charge centrale $\hat{c} = 6$. Un exemple est donné par les *modèles de Gepner* [56], obtenus en prenant le produit tensoriel de modèles minimaux N=2, et en projetant sur les charges de symétrie R impaires.

Nous avons vu dans la section II.1 qu'il existe des classes d'opérateurs particuliers, les *opérateurs chiraux* et les *opérateurs anti-chiraux*, pour lesquels la dimension conforme est complètement déterminée par la charge de symétrie R, voir eq. (II.4). Leur dimension, étant reliée à la charge, qui est une quantité «topologique» ne prenant que des valeurs discrètes – au moins pour les théories rationnelles – ne peut varier continuement lors de la déformation marginale de la théorie. Ainsi des opérateurs de ce type, marginaux au premier ordre, seront nécessairement exactement marginaux. Le premier type d'opérateur marginal que nous pouvons construire utilise un opérateur $\mathscr{V}_{1/2,1/2}$ de type (c,c), c.-à.-d. chiral par rapport à l'algèbre N=2 gauche et à l'algèbre droite, de dimension $\Delta = \bar{\Delta} = 1/2$. La perturbation suivante est alors exactement marginale :

$$\delta S = \int \mathrm{d}^2 z \; G^-_{-1/2} \bar{G}^-_{-1/2} \mathscr{V}_{1/2,1/2}(z,\bar{z}).$$

Dans le cas où la théorie N=2 est associée à un modèle sigma sur une variété de Calabi-Yau, il est possible de montrer que ce type de deformations marginales correspond à une déformation de la *structure complexe* de la variété, associée à un changement de forme. Le deuxième type d'opérateur marginal utilise un opérateur $\mathscr{V}_{1/2,-1/2}$ de type (c,a), c.-à.-d. chiral par rapport à l'algèbre N=2 gauche et anti-chiral par rapport à l'algèbre droite, de dimension $\Delta = \bar{\Delta} = 1/2$. La perturbation suivante est alors exactement marginale :

$$\delta S = \int \mathrm{d}^2 z \; G^-_{-1/2} \bar{G}^+_{-1/2} \mathscr{V}_{1/2,-1/2}(z,\bar{z}).$$

Ce type de déformation est associé aux changement de la *structure de Kähler* de la variété. Remarquons pour finir qu'il existe un automorphisme extérieur de l'algèbre N=2, dit «miroir», agissant sur le courant de symétrie R de l'algèbre droit comme : $\Omega(\bar{J}_R) = -\bar{J}_R$. Cette symétrie, analogue à la dualité T, est exacte en théorie des supercordes. Du point de vue de l'espace cible, elle échange la structure complexe et la structure de Kähler de la variété. Nous sommes alors ammenés a proposer une symétrie, la *symétrie miroir* [57], appariant des variétés de Calabi-Yau a priori complètement différentes.

Espace des modules des compactifications toroïdales. Il existe une classe de modèles pour laquelle l'espace des modules complet est connu : les compactifications toroïdales. Ces théories

conformes sont des théories libres correspondant à la propagation des cordes sur un espace plat compact, avec une métrique et une deux-forme constantes.

Le cas le plus simple est bien sûr celui d'un boson libre. Nous prendrons la convention que le champ $X(z,\bar{z})$ est compactifié au rayon unité, c.-à.-d. $X \sim X + 2\pi$. Alors l'action pour une compactification sur un cercle de rayon R est simplement :

$$S = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^2z\, R^2\, \partial X \bar{\partial} X.$$

L'opérateur marginal de cette théorie est l'opérateur bilinéaire dans le courant de translation :

$$\delta S = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int \mathrm{d}^2z\, R^2\, \partial X \bar{\partial} X.$$

Cette perturbation correspond simplement à l'opération de changement du rayon du cercle, $R^2 \to R^2(1+\varepsilon)$. Cependant, comme la dualité T relie une compactification de rayon R et une de rayon $2/R$, l'espace des modules doit être quotienté par cette symétrie $\mathbb{Z}_2$. L'espace des modules est alors $[1,+\infty[$.

Cette discussion se généralise aux compactifications toroïdales de dimension d quelconque. La seule différence qualitative est la possibilité d'ajouter une deux-forme de NS–NS constante à l'action. Considérons alors le modèle sigma linéaire suivant :

$$S = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^2z\, E_{ij}\partial X^i \bar{\partial} X^j\ , \quad \text{avec } E_{ij} := G_{ij} + B_{ij} \in GL(d,\mathbb{R}).$$

En tenant compte des modes d'enroulement w^i, comme dans le cas d'un boson libre unique, la contribution des modes zéro à la fonction de partition est :

$$\Gamma_{d,d}(G,B) = \sum_{\{n_i\},\{w^i\}\in\mathbb{Z}^d} q^{\frac{1}{2}G_{ij}P_g^iP_g^j}\ \bar{q}^{\frac{1}{2}G_{ij}P_d^iP_d^j}\ ,$$

où les moments gauches et droits sont donnés par :

$$P_g^i = \frac{G^{ij}}{\sqrt{2}}\left\{n_i + (G_{jk}+B_{jk})w^k\right\}\ ,\ \ P_d^i = \frac{G^{ij}}{\sqrt{2}}\left\{n_i + (-G_{jk}+B_{jk})w^k\right\}. \tag{II.29}$$

Nous désirons maintenant connaître l'espace des modules de ces théories, c.-à.-d. les déformations possibles du réseau des modes zéro. Ce réseau est naturellement muni du produit scalaire suivant :

$$P\circ P' := G_{ij}\left(P_g^iP_g^j - P_d^iP_d^j\right)\ ,$$

correspondant au changement de phase d'un opérateur de moment P' effectuant un tour complet autour d'un opérateur de moment P. La localité mutuelle de tous les opérateurs, ainsi que l'invariance modulaire de la fonction de partition à une boucle, impose les contraintes suivantes sur le réseau de compactification :

– le réseau est pair : $\forall P \in \Gamma_{d,d}\,,\ P\circ P \in 2\mathbb{Z}$;
– le réseau est auto-dual : $\Gamma^*_{d,d} = \Gamma_{d,d}$.

L'espace des modules est composé de toutes les transformations préservant ces deux conditions, en d'autres termes préservant le produit scalaire $\circ$; il est donc contenu dans le «groupe de Lorentz» $O(d,d,\mathbb{R})$. Cependant, des réseaux reliés entre eux par des rotations chirales $O(d,\mathbb{R})\times O(d,\mathbb{R})$ agissant séparément sur les secteurs gauches et droits sont équivalents. Il faut donc prendre les classes d'équivalence de $O(d,d,\mathbb{R})$ par ces symétries. Enfin, il existe un groupe de symétries discrètes, généralisant la dualité T, quie relie des théories équivalentes (voir [58]). Ce groupe de symétrie, tel que l'image du réseau $\Gamma_{d,d}$ est le réseau lui-même, est noté $O(d,d,\mathbb{Z})$. Ce groupe est généré par les éléments suivants :

– les translations entières de la deux-forme, $B \to B + \Theta$, où Θ est une matrice antisymétrique $d \times d$ à coefficients entiers ;
– les «difféomorphismes discrets» $X^i \to \Lambda^i{}_j X^j$, avec $\Lambda \in GL(d,\mathbb{Z})$;
– la dualité $R_i \to 2/R_i$ selon une des directions.

En résumé l'espace des modules des compactifications toroïdales est :

$$O(d,\mathbb{R}) \times O(d,\mathbb{R}) \setminus {}^{O(d,d,\mathbb{R})} / {}_{O(d,d,\mathbb{Z})} ,$$

où le groupe $O(d,\mathbb{R}) \times O(d,\mathbb{R})$ agit à gauche et le groupe de dualité $O(d,d,\mathbb{Z})$ agit à droite. Dans le cas de la corde hétérotique, cet espace des modules est élargi en raison de l'action dans le réseau correspondant au groupe de jauge. Il faut alors considérer le réseau complet $\Gamma_{d,d+16}$.

Déformations marginales des modèles de Wess-Zumino-Witten. L'étude précédente de l'espace des modules des compactifications toroïdales peut être généralisée aux modèles de Wess-Zumino-Witten. Cette étude est beaucoup plus intéressante que dans le cas toroïdal, car nous considérons maintenant des déformations interpolant entre plusieurs espaces-temps courbes de la théorie de cordes, pouvant posséder des propriétés physiques intéressantes.

Examinons tout d'abord quelles déformations des modèles de WZW sont exactement marginales. Au premier ordre dans la perturbation, nous pouvons, pour un niveau k générique, déformer par un opérateur bilinéaire quelconque construit à l'aide des courants de l'algèbre affine :

$$\delta S_{\mathrm{WZW}} = \varepsilon \int \mathrm{d}^2 z\, \mathscr{V}(z,\bar{z}) = \varepsilon M_{AB} \int \mathrm{d}^2 z\, J^A(z)\, \bar{J}^B(\bar{z}). \tag{II.30}$$

Cependant, la déformation ne sera exactement marginale que si nous imposons des restrictions sur la matrice M_{AB}. Pour connaître la dimension conforme de l'opérateur $V(z,\bar{z})$ dans la théorie dont l'action est modifiée par (II.30), nous pouvons calculer sa fonction à deux points perturbativement en ε [59]. À l'ordre zéro dans la perturbation, nous obtenons naturellement $\langle \mathscr{V}(z,\bar{z})\mathscr{V}(z',\bar{z}')\rangle \sim |z-z'|^{-2}$. À l'ordre ε^2, nous obtenons la contribution suivante à la fonction à deux points :

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{V}(z,\bar{z})\mathscr{V}(z',\bar{z}')\rangle_{S_{\mathrm{WZW}}+\delta S} = \frac{\varepsilon^2}{2}\int \mathrm{d}^2 w_1 \int \mathrm{d}^2 w_2\, \langle \mathscr{V}(z,\bar{z})\mathscr{V}(z',\bar{z}')\mathscr{V}(w_1,\bar{w}_1)\mathscr{V}(w_1,\bar{w}_2)\rangle_{S_{\mathrm{WZW}}} \\ -\frac{\varepsilon^2}{2}\int \mathrm{d}^2 w_1 \int \mathrm{d}^2 w_2\, \langle \mathscr{V}(w_1,\bar{w}_1)\mathscr{V}(w_1,\bar{w}_2)\rangle_{S_{\mathrm{WZW}}} + \mathscr{O}(\varepsilon^3)\end{aligned}$$

Le premier terme contient une divergence logarithmique qui pourrait conférer à l'opérateur $\mathscr{V}$ une dimension anormale. En utilisant la forme explicite de la déformation, eq. (II.30) et les produits d'opérateurs entre les courants du modèle de WZW, eq. (II.9), ce corrélateur peut se calculer explicitement. Pour que les termes proportionnels à toutes les divergences logarithmiques s'annulent, la matrice M_{AB} doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$\sum_{a,b} M_{AC} M_{BD} f^{ABE} = 0 \ \text{ et } \ \sum_{a,b} M_{CA} M_{DB} f^{ABE} = 0 \text{ , ceci } \ \forall c,d,e. \tag{II.31}$$

De façon équivalente, cette condition exige que la perturbation puisse être mise sous la forme $N_{AB}\mathscr{W}^A\mathscr{W}^B$, où les opérateurs $\mathscr{W}^A$ – combinaisons linéaires des courants J^A – ne doivent pas avoir de pôles simples dans leur produits d'opérateurs. Cette condition est suffisante pour assurer que la déformation est marginale à tous les ordres.

Déformations de la sous-algèbre de Cartan. Une solution triviale aux contraintes (II.31) consiste à déformer uniquement avec les courants de la sous-algèbre de Cartan, qui commutent tous entre eux, et n'ont donc pas de pôles simples dans leur produits d'opérateurs. Nous pouvons de manière explicite étudier l'effet de ces déformations au point de vue du spectre et de la fonction

de partition ; en utilisant la décomposition parafermionique (II.27) des caractères d'une algèbre de Lie affine $\hat{\mathfrak{g}}_k$, nous considérons la fonction de partition :

$$Z(\tau) = \sum_{\Lambda} \sum_{\lambda,\bar{\lambda} \bmod k\mathbf{M}} c_\lambda^\Lambda \Theta_{\lambda,k} \; c_{\bar{\lambda}}^\Lambda \Theta_{\bar{\lambda},k} \,. \tag{II.32}$$

La contribution des fonctions théta de l'algèbre est analogue à un réseau toroïdal avec une métrique et une torsion particulières (voir II.29). En appelant α_i les racines longues de l'algèbre et $\Lambda^{(i)}$ les poids fondamentaux, la fonction de partition diagonale des fonctions théta est ainsi :

$$\sum_{\lambda \bmod k\mathbf{M}} \Theta_{\lambda,k}\bar{\Theta}_{\lambda,k} = \sum_{\{\lambda^i\} \bmod k\mathbf{M},\ \{n^i\},\{\bar{n}^i\}\in\mathbb{Z}^{r_\mathfrak{g}}} q^{\,k\|n^i\alpha_i + \frac{\lambda_i\Lambda^{(i)}}{k}\|^2} \; \bar{q}^{\,k\|\bar{n}^i\alpha_i + \frac{\lambda_i\Lambda^{(i)}}{k}\|^2} \tag{II.33}$$

Premièrement, les termes tels que $n^i - \bar{n}^i$ est pair peuvent se réécrire en décomposant : $n^i = N^i + W^i$, $\bar{n}^i = -N^i + W^i$ comme :

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda \bmod k\mathbf{M}} \sum_{\{N^i\},\{W^i\}\in\mathbb{Z}^{r_\mathfrak{g}}} q^{\,k\|\frac{\lambda + kW^i\alpha_i}{k} + N^i\alpha_i\|^2} \; \bar{q}^{\,k\|\frac{\lambda + kW^i\alpha_i}{k} - N^i\alpha_i\|^2} \\ &= \sum_{\lambda} \sum_{\{N^i\}\in\mathbb{Z}^{r_\mathfrak{g}}} q^{\,\frac{1}{2}\|\sqrt{\frac{2}{k}}\lambda + \sqrt{\frac{k}{2}}(2N^i)\alpha_i\|^2} \; \bar{q}^{\,\frac{1}{2}\|-\sqrt{\frac{2}{k}}\lambda + \sqrt{\frac{k}{2}}(2N^i)\alpha_i\|^2} . \end{aligned} \tag{II.34}$$

La contribution des termes avec $n^i - \bar{n}^i$ va être similaire, avec des moments impairs $2N^i + 1$. Ainsi, le réseau des nombres d'enroulement est identifié avec le réseau des poids complet et le réseau des moments avec le réseau des racines longues. La métrique du modèle toroïdal est naturellement la métrique de Cartan-Weyl de l'algèbre de Lie. Dans la fonction de partition du modèle de WZW, eq. (II.32) apparaissent des contributions non-diagonales pour les fonctions théta en $\lambda, \bar{\lambda}$. Ces secteurs non-diagonaux correspondent aux secteurs supplémentaires de l'orbifold de (II.33) suivant :

$$Z_{orb} = \frac{1}{|\mathbf{M}|} \sum_{\gamma\in\mathbf{M}^*,\ \delta\in\mathbf{M} \bmod k\mathbf{M}} Z\begin{bmatrix}\gamma\\ \delta\end{bmatrix} := \frac{1}{|\mathbf{M}|} \sum_{\gamma\in\mathbf{M}^*,\ \delta\in\mathbf{M} \bmod k\mathbf{M}} e^{\frac{2\imath\pi}{k}\kappa(\lambda-\gamma,\delta)} \; \Theta_{\lambda,k}\bar{\Theta}_{\lambda-2\gamma,k} ,$$

où nous avons divisé par le volume d'une cellule du réseau des racines longues $|\mathbf{M}|$. Cet orbifold est combiné avec un orbifold similaire de la fonction de partition du quotient parafermionique afin d'obtenir la fonction de partition de modèle de WZW :

$$Z_{WZW} = \frac{1}{|\mathbf{M}|} \sum_{\gamma\in\mathbf{M}^*,\ \delta\in\mathbf{M} \bmod k\mathbf{M}} \sum_{\Lambda}\sum_{\lambda} c_\lambda^\Lambda c_{\lambda-2\gamma}^\Lambda \sum_{\lambda'} \Theta_{\lambda',k}\Theta_{\lambda'-2\gamma,k} \quad e^{2\imath\pi\kappa(\lambda-\lambda',\delta)} \tag{II.35}$$

Dans chaque secteur de l'orbifold apparaît le réseau asymétrique :

$$\sum_{\lambda\in\mathbf{M}^*} \sum_{\{m^i\}\in\mathbb{Z}^{r_\mathfrak{g}}} q^{\,\frac{1}{2}\|\sqrt{\frac{2}{k}}\lambda + \sqrt{\frac{k}{2}}m^i\alpha_i\|^2} \; \bar{q}^{\,\frac{1}{2}\|\sqrt{\frac{2}{k}}(-\lambda+2\gamma) + \sqrt{\frac{k}{2}}m^i\alpha_i\|^2} ,$$

donnant une torsion non nulle dans le modèle combiné $G/H \times H$, voir eq. (II.29).

Nous pouvons maintenant appliquer à ce réseau les mêmes déformations marginales que pour un réseau toroïdal à $r_\mathfrak{g}$ dimensions. Ainsi nous avons trouvé que l'espace des modules des modèles de WZW comprend un sous-espace donné par :

$$O(d,\mathbb{R}) \times O(d,\mathbb{R}) \setminus O(d,d,\mathbb{R}) \,/\, O(d,d,\mathbb{Z}) ,$$

cependant l'interprétation géométrique n'est évidemment pas la même que dans le cas plat. Par exemple, nous pouvons généraliser la déformation de changement de rayon en remplaçant dans l'expression (II.34) k par $R^2 k$ et en couplant ce réseau déformé aux parafermions de la même manière (II.35).

Géométrie des modèles de WZW *déformés.* Pour obtenir la géométrie correspondant aux modèles de WZW déformés par le Cartan, nous allons en donner une représentation comme une théorie de quotient et utiliser les méthodes de la sect. II.3. Considérons en effet le modèle de WZW jaugé suivant :

$$\text{(II.36)}\quad kS(g|A,\bar{A},E) = kS_{\text{WZW}}(g) + \frac{k}{\pi}\int \mathrm{d}^2z\,\left\{\kappa(\bar{A},g^{-1}\partial g) - \kappa(A,\bar{\partial}gg^{-1}) + \kappa\left((1-\mathrm{Ad}_g)A,\bar{A}\right)\right\} + \frac{k}{\pi}\int \mathrm{d}^2z\, E_{ab}\partial(X^a+A^a)\bar{\partial}(X^b+\bar{A}^b)\ ,$$

Les champs de jauge $A,\bar{A}$ sont à valeurs dans la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Nous avons couplé ce jaugement au jaugement d'un modèle toroïdal de dimension $r_{\mathfrak{g}}$, donné par la métrique $G_{ab} = E_{(ab)}$ et la deux-forme $B_{ab} = E_{[ab]}$. En utilisant les techniques de la sect. II.3 nous pouvons facilement calculer la géométrie effective de ce modèle jaugé, au premier ordre en $1/k$. Nous pouvons d'abord effectuer le choix de jauge : $X^a = 0$, $i = 1,\cdots,r_{\mathfrak{g}}$, afin d'éliminer les degrés de liberté redondants. Alors l'intégration des champs de jauge donne le modèle sigma non-linéaire suivant :

(II.37)
$$kS = \frac{k}{2\pi}\int_{\partial\mathscr{B}} \mathrm{d}^2z \quad \left\{C_{\mu\nu}J^\mu\,\bar{J}^\mu + \left[C+2(1+E-C)^{-1}\right]_{ab}J^a\,\bar{J}^b\right\} + \frac{\imath k}{12\pi}\int_{\mathscr{B}} f_{abc}\mathscr{J}^a\,\mathscr{J}^b\,\mathscr{J}^c\ ,$$

Ainsi que le dilaton venant de la mesure :

$$\text{(II.38)}\qquad \Phi = -\frac{1}{2}\log\det(1+E-C).$$

Ce modèle de WZW jaugé définit une famille continue de théories, qui s'obtiennent en parcourant l'espace des modules du modèle toroïdal auxilliaire, à l'aide des transformations de Lorentz $O(r_{\mathfrak{g}},r_{\mathfrak{g}},\mathbb{R})$. Remarquons aussi que le modèle de WZW original apparaît dans la limite $E_{ab} = R\delta_{ab}$, $R\to\infty$, qui se situe à l'infini dans l'espace des modules. Au contraire le quotient vectoriel par le tore maximal correspond à la limite $E_{ab}\to 0$. Les autres quotients maximaux s'obtiennent en remplaçant dans l'action le jaugement vecteur par le jaugement axial pour un nombre quelconque de générateurs de la sous-algèbre de Cartan. Il est aussi possible de trouver une représentation des modèles de WZW déformés, plus compliquée, dans laquelle le point correspondant au modèle de WZW original se situe au milieu de l'espace des modules, et permettant d'interpoler continuement entre les jaugement axiaux et vectoriels [60].

Les caractères correspondant à cette représentation s'obtiennent à l'aide de la méthode BRST générale de la sect. II.3. Nous obtiendrons comme résultat final l'orbifold des caractères parafermioniques de $\hat{\mathfrak{g}}$ avec un réseau de dimension (d,d) correspondant aux fonctions théta de $\hat{\mathfrak{g}}$ déformées par le réseau toroïdal auxiliaire.

Exemple de la trois-sphère. L'exemple de la trois-sphère est particulièrement simple, car la sous-algèbre de Cartan est de dimension un. Ainsi la seule déformation possible correspond au changement de rayon de cette théorie $U(1)$. Premièrement nous réécrivons la fonction de partition de $SU(2)_k$ comme l'orbifold :

$$\text{(II.39)}\qquad Z(\tau) = \frac{1}{2k}\sum_{\gamma,\delta\in\mathbb{Z}_k}\sum_{2j=0}^{k}\sum_{m\in\mathbb{Z}_{2k}} c^j_m\,\bar{c}^j_{m-2\gamma}\sum_{n\in\mathbb{Z}_{2k}}\theta_{n,k}\,\theta_{n-2\gamma,k}\,e^{\frac{2i\pi}{k}\delta(n-m)}.$$

Nous remplaçons maintenant les contributions des secteurs déformés des fonctions théta par un réseau toroïdal à un rayon différent :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_{2k}} \theta_{n,k}\,\theta_{n-2\gamma,k} = \sum_{N,W\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{\sqrt{2k}}+\sqrt{\frac{k}{2}}W\right)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{\sqrt{2k}}-\sqrt{\frac{k}{2}}(W+2\gamma/k)\right)^2}$$
$$\longrightarrow \sum_{N,W\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{\sqrt{2R^2}}+\sqrt{\frac{R^2}{2}}W\right)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{\sqrt{2R^2}}-\sqrt{\frac{R^2}{2}}(W+2\gamma/k)\right)^2},$$

Ce qui nous permet d'écrire la fonction de partition du modèle déformé comme [61] :

$$Z(\tau) = \frac{1}{2k}\sum_{\gamma,\delta\in\mathbb{Z}_k}\sum_{2j=0}^{k}\sum_{m\in\mathbb{Z}_{2k}} c^j_m\,\bar{c}^j_{m-2\gamma}$$

$$\text{(II.40)}\qquad \sum_{N,W\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{\sqrt{2R^2}}+\sqrt{\frac{R^2}{2}}W\right)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}\left(\frac{N}{\sqrt{2R^2}}-\sqrt{\frac{R^2}{2}}(W+2\gamma/k)\right)^2} e^{\frac{2i\pi}{k}\delta(N-m)}.$$

Cette fonction de partition possède deux limites remarquables, dans lesquelles le boson correspondant à la sous-algèbre de Cartan découple de la théorie. Dans la limite $R\to 0$, nous obtenons la fonction de partition du modèle de WZW jaugé $SU(2)/U(1)|_{\text{axial}}$, mutipliée par celle d'un boson non-compact. Au contraire, dans la limite $R\to+\infty$, nous obtenons la fonction de partition de $SU(2)/U(1)|_{\text{vecteur}}$. Il existe ainsi une *ligne de déformations marginales* reliant les deux théories de quotient. Cette observation jette un éclairage nouveau sur la dualité T [62–64]. Plaçons nous en effet sur le point symétrique de la ligne de déformation, c.-à.-d. le modèle $SU(2)$. Alors les déformations $\delta S\sim+\int J^3\bar{J}^3$ et $\delta S\sim-\int J^3\bar{J}^3$ sont équivalentes car elles sont reliées par une symétrie de Weyl de l'algèbre affine $\widehat{\mathfrak{su}}(2)$. Comme dans le cas du boson libre, cette symétrie discrète survit à la brisure de la symétrie $SU(2)_G\times SU(2)_D$ le long de la ligne de déformation, et correspond à la dualité $R\leftrightarrow 2/R$.

En suivant la méthode générale exposée précédemment, voir eqs. (II.37-II.38), nous obtenons le modèle sigma suivant pour la théorie $SU(2)_k$ déformée, obtenu à l'aide d'un boson compact auxillaire de rayon $\tilde{R}\sqrt{2k}$ (nous considérons le cas du jaugement axial) :

$$S_{\tilde{R}} = \frac{k}{\pi}\int d^2z\left\{\partial\theta\bar{\partial}\theta + \frac{(1+\tilde{R}^2)\sin^2\theta\,\partial\phi\bar{\partial}\phi+\tilde{R}^2\cos^2\theta\,\partial\psi\bar{\partial}\psi}{\cos^2\theta+\tilde{R}^2}\right.$$
$$\left.+\frac{\tilde{R}^2\sin^2\theta(\partial\phi\bar{\partial}\psi-\partial\psi\bar{\partial}\phi)}{\cos^2\theta+\tilde{R}^2}\right\},$$

et le dilaton :

$$\Phi = \Phi_0 - \log\frac{\cos^2\theta+\tilde{R}^2}{\tilde{R}^2}.$$

Ainsi ce modèle relie le modèle de WZW jaugé $SU(2)/U(1)|_{\text{axial}}$ tensorisé avec un boson libre de rayon nul, pour $\tilde{R}\to 0$, avec le modèle de WZW $SU(2)_k$, pour $\tilde{R}\to\infty$.[u] La famille de modèles sigma aboutissant à $SU(2)/U(1)|_{\text{vecteur}}$ s'obtient à partir du jaugement vecteur de $SU(2)\times U(1)$.

Comme nous l'avons annoncé, il existe une représentation du modèle déformé valable sur toute la ligne joignant les deux modèles de WZW jaugés, donnée par le modèle sigma suivant [64] :

$$\text{(II.41)}\quad S_\lambda = \frac{k}{\pi}\int d^2z\left\{\partial\theta\bar{\partial}\theta + \frac{\lambda^2\sin^2\theta\partial\phi\bar{\partial}\phi+\cos^2\theta\,\partial\psi\bar{\partial}\psi+\sin^2\theta(\partial\phi\bar{\partial}\psi-\partial\psi\bar{\partial}\phi)}{1+(\lambda^2-1)\cos^2\theta}\right\},$$

[u] la normalisation du dilaton est choisie de telle sorte que cette limite soit bien définie.

pour lequel l'action de WZW correspond à $\lambda = 1$ et les deux quotients à $\lambda = 0$ (axial), et $\lambda \to \infty$ (vecteur). Nous voyons aisément que les paramètres de déformation des deux actions sont reliés par : $\lambda^2 - 1 = 1/\tilde{R}^2$. Ces deux paramètres sont eux-mêmes reliés avec le paramètre de la fonction de partition déformée, eq. (II.40), par la relation : $R = \sqrt{2k}\lambda$, en accord avec la discussion ci-dessus.

III

La théorie des supercordes dans AdS_3

Les techniques que nous avons développées dans la section précédente s'appliquent aux groupes compacts uniquement. Cependant cette restriction est trop contraignante pour décrire la propagation des supercordes dans des espaces-temps courbes qui contiennent génériquement des sous-variétés non-compactes. En outre, pour obtenir des solutions de la théorie des cordes avec une limite $k \to \infty$ bien définie (c.-à.-d. de courbure faible), il faut nécessairement compenser l'anomalie conforme des groupes compacts – pour lesquels la charge centrale est inférieure à l'espace plat – par l'anomalie conforme de groupes non-compacts, de manière à obtenir une théorie des supercordes critique ($c = 15$) pour toute valeur de k.

Du point de vue des modèles sigma non-linéaires, toutes les actions de modèles de WZW, de théories de quotients et de modèles déformés décrites dans le chapitre II peuvent être utilisées, car le passage des groupes compacts aux groupes non-compacts revient à effectuer des prolongements analytiques sur les champs, ce qui ne change pas les équations du mouvement.[a] Par contre, la théorie des représentations des algèbres affines non-compactes est radicalement différente, et en général peu connue. L'étude du spectre de ces modèles non-compacts, ou de leur fonctions de partition, est donc un domaine relativement nouveau, qui permet d'étudier par exemple la propagation des cordes autour de p-branes, de trous noirs, ou dans des espaces-temps cosmologiques. Une partie des résultats décrits dans ce chapitre proviennent des publications ajoutées en appendice.

III.1. L'espace-temps anti-de Sitter

Le cas le plus simple de modèle de WZW non-compact est aussi le plus utile physiquement. Il correspond au groupe $SL(2,\mathbb{R})$ des matrices bidimensionnelles réelles de déterminant unité. En effet, la géométrie de la variété correspondant à ce groupe est un espace-temps anti-de Sitter à trois dimensions. Cet espaces-temps, de signature $(-,+,+)$ et à symétrie maximale, apparaît à nombreuses reprises en supergravité et en théorie des cordes. Premièrement, il apparaît comme vide supersymétrique de certaines supergravités, dites jaugées. Deuxièmement il est possible de construire des solutions de trous noirs dans cet espace-temps, simplement par un quotient d'une symétrie discrète. Enfin, cette solution a connu une recrudescence d'intérêt ces dernières années, car elle représente un des rares exemples de théories de supercordes dans lesquelles l'*holographie* est réalisée de manière concrète.

Les dualités anti-de Sitter/théorie conforme. Historiquement, la théorie des cordes est apparue comme candidate pour décrire les interactions fortes ; il fut cependant montré que la théorie de la chromo-dynamique quantique, une théorie de jauge fondée sur le groupe $SU(3)$, décrivait correctement ces interactions – au moins dans le domaine perturbatif à hautes énergies où les calculs sont possibles – sans nécessiter la physique exotique des modèles de cordes. Les théories des cordes sont réapparues quelques années plus tard, lorsqu'il fut réalisé par Scherk et Schwarz [65]

[a] Cependant dans certains cas nous obtiendrons alors des valeurs imaginaires des champs de fond

qu'elles constituaient des théories de gravitation quantique. Le lien entre les deux théories ne s'est cependant pas rompu. Premièrement, dans la limite où la chromo-dynamique possède un grand nombre de couleurs – c.-à.-d. une théorie de jauge $SU(N)$ avec $N \gg 1$ – les diagrammes de Feynman planaires [66] dominent le développement perturbatif de la théorie de jauge dans la constante de couplage effective $\lambda = g_{\mathrm{YM}}^2 N$, où g_{YM} est la constante de couplage de la théorie de jauge (I.3). Les termes sous-dominants s'organisent en un développement perturbatif en fonction du *genre* de la surface bidimensionnelle sur laquelle peut être tracé le diagramme ; nous observons donc une forte analogie avec le développement perturbatif de la théorie des cordes.

De nouveaux liens furent tissés entre les théories de jauge et de cordes depuis la compréhension de la physique des D-branes. Comme nous l'avons montré précédemment, ces dernières s'interprètent comme des solutions à basse énergie des champs de fond de la théorie des cordes, mais aussi comme des «défauts» dans la théorie conforme, localisés dans certaines dimensions de l'espace-temps, sur lesquels des cordes ouvertes peuvent finir [22]. La théorie effective de basse énergie de ces cordes ouvertes, pour N Dp-branes empilées, n'est rien d'autre qu'une théorie de jauge supersymétrique à $p+1$ dimensions, de groupe $U(N)$. La comparaison de ces deux descriptions a priori différentes est très fertile pour la compréhension des deux théories.

Toutes ces idées furent mises à profit par Maldacena [67] pour formuler la correspondance entre théories superconformes à quatre dimensions et l'espace-temps anti-de Sitter à cinq dimensions, dite AdS/CFT. Parmi les solutions de Dp-branes, la D3-brane occupe une position particulière. Du point de vue gravitationnel, elle apparaît comme solution de la supergravité IIB, chargée sous la trois-forme auto-duale $\mathbf{A}_{[4]}$. D'après (I.14), contrairement au cas générique, cette solution est parfaitement régulière au voisinage de la brane, c.-à.-d. dans la limite près de l'horizon $r \to 0$; en particulier, le dilaton, donc le couplage des cordes, devient constant. En outre, la théorie sur le volume d'univers de la D3-branes, décrite par les cordes ouvertes attachées aux branes, possède une symétrie de jauge non abélienne à quatre dimensions ; elle est donc potentiellement utile à l'étude des interactions fortes.

Dans la *limite de découplage* $\alpha' \to 0$ nous décrivons la physique de basse énergie de cette théorie, correspondant à une théorie de Yang-Mills supersymétrique à quatre dimensions, de constante de couplage $g_{\mathrm{YM}}^2 = g_s$. Celle-ci possède non seulement une supersymétrie $N = (4,4)$, mais aussi une symétrie élargie *superconforme*.[b] Dans cette limite les corrections de cordes fermées à la théorie de cordes ouvertes, c.-à.-d. le couplage de la théorie sur les branes à la gravitation, deviennent négligeables. Cependant, la solution de supergravité dans l'espace-temps ambiant autour des branes ne se trivialise pas complètement ; dans la limite de découplage nous nous concentrons sur la géométrie près de l'horizon des D3-branes, donnée par l'espace-temps $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$, où ces deux espaces de symétrie maximale ont le même rayon. La dualité dite AdS/CFT postule que ces deux descriptions de la physique des D3-branes dans la limite de découplage sont équivalentes. Cette conjecture relie en effet les amplitudes de théories des cordes dans $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$, qui décrivent la physique de la gravitation quantique dans cet espace-temps, avec les fonctions de corrélation d'une théorie de jauge non-abélienne.

Géométrie de l'espace-temps anti-de Sitter. De manière remarquable, l'espace-temps anti-de Sitter lui-même possède des propriétés suggerant la correspondance formulée ci-dessus, d'origine purement géométrique.

[b] Cette symétrie élargie est cependant de dimension finie, contrairement à la symétrie de la surface d'univers de la supercorde.

L'espace-temps anti-de Sitter à d dimensions, AdS_d, peut être représenté de manière simple par plongement dans un espace plat à $(d+1)$ dimensions, de signature $(-,+,\cdots,+,-)$, par l'équation :

$$X_0^2 - \sum_{i=1}^{d-1} X_i^2 + X_{d+1}^2 = R^2. \tag{III.1}$$

Par construction, le groupe d'isométrie de AdS_d est donc le groupe de Lorentz de l'espace de plongement, $SO(2,d-1)$. L'équation (III.1) peut être résolue par le choix de paramétrage : $X_0 = R\cosh\rho\,\cos\tau$, $X_{d+1} = R\cosh\rho\,\sin\tau$ et $\mathrm{d}X^i = R\sinh\rho\,\Omega_i$ en fonction des des coordonnées Ω_i sur la $(d-1)$-sphère unité. Nous obtenons alors la métrique suivante, écrite dans les *coordonnées globales*, couvrant entièrement l'espace-temps anti-de Sitter :

$$ds^2 = R^2\left(\mathrm{d}\rho^2 - \cosh^2\rho\,\mathrm{d}\tau^2 + \sinh^2\rho\,\mathrm{d}\Omega_{d-1}^2\right).$$

Notons que dans ce paramétrage le temps τ est compact, mais ces courbes de genre temps fermées topologiques peuvent être supprimées en considérant le *recouvrement universel* de la variété. La principale particularité de cet espace-temps par rapport à l'espace-temps plat est sa structure causale. Pour examiner la structure asymptotique de cette géométrie nous choisissons les coordonnées $\tan\theta = \sinh\rho$, de telle sorte que la métrique soit maintenant

$$ds^2 = \frac{R^2}{\cos^2\theta}\left(\mathrm{d}\theta^2 - \mathrm{d}\tau^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\Omega_{d-1}^2\right).$$

Dans ces coordonnées le «bord» de anti-de Sitter – c.-à.-d. l'infini spatial de l'espace-temps – correspond à $\theta = \pi/2$. En ce point, la variété ne possède pas de métrique, à cause du pôle double du préfacteur, mais une *structure conforme* –c.-à.-d. une classe d'équivalence de métriques sous les transformations conformes – correspondant à $\mathbb{R}\times S^d$. Ceci est à comparer à l'espace-temps de Minkovski pour lequel l'infini spatial est simplement un point. Le groupe d'isométrie $SO(2,d-1)$ possède une action naturelle sur ce bord, qui correspond au *groupe conforme* de l'espace-temps de Minkowski à 4 dimensions. D'une certaine manière, la théorie de jauge superconforme $N = (4,4)$ des D3-branes «vit» sur le bord de l'espace-temps AdS_5. Dans la supergravité le supergroupe d'isométrie de AdS_5 induit une action du groupe superconforme. La correspondance peut se formuler plus précisément de la manière suivante [68]. Considérons, dans la théorie des cordes, des opérateurs *non-normalisables*, Ces opérateurs ont une valeur bien définie sur le bord d'anti-de Sitter, qui agit comme une *source* pour les opérateurs de la théorie conforme duale à AdS_5. Ainsi la fonction de partition dans l'espace-temps ambiant anti-de Sitter, pour des champs possédant ce comportement asymptotique, correspondra à la *fonctionnelle génératrice* des fonctions de Green pour les opérateurs de la théorie des champs couplés à ces sources.

Cependant, la théorie conforme sur la surface d'univers correspondant aux champs de fond $AdS_5\times S^5$ avec un flux de Ramond–Ramond n'est pas soluble, malgré de récents progrès. Il existe un régime de constante de couplage des cordes et de courbure faibles dans lequel l'approximation de supergravité est valide ; dans le même temps, la théorie de jauge possède un grand nombre de couleurs ($N \gg 1$) et est fortement couplée ($\lambda \gg 1$).

Le système D1-D5. En dehors du système de D3-branes, il existe un autre système dans lequel cette dualité AdS/CFT se réalise. Considérons en effet, dans la théorie de supercordes IIB, une configuration de D5-branes, dont le volume d'univers comprend les coordonnées $(t,x^1,\cdots,x^5)$, enroulées autour d'un tore à quatre dimensions étendu dans les coordonnées $(x^2,\cdots x^5)$ et de volume $V = (2\pi)^4\alpha'^2 v$. Il est possible d'ajouter au système des D1-branes parallèles aux D5-branes, c.-à.-d. dont le volume d'univers est (t,x^1), en préservant $1/4$ de la supersymétrie totale. Ces dernières ne sont pas localisées le long des dimensions du tore, mais nous considérons au contraire

une distribution continue de ces D1-branes pour $(x^2, \cdots, x^5)$, avec une densité uniforme. La solution de supergravité de cette configuration s'obtient simplement en superposant la solution pour N_5 D5-branes, voir (I.14), et celle de N_1 D1-branes, mais délocalisée. Ce principe de superposition est en général valable pour les configurations multiples de branes préservant une fraction de la supersymétrie. Explicitement nous avons [69] :

$$
\begin{aligned}
ds_\sigma^2 =& \frac{1}{\sqrt{H_1 H_5}}\left(-dt^2 + dx_1^2\right) + \sqrt{H_1 H_5}\left(\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}\Omega_3^2\right) + \sqrt{\frac{H_1}{H_5}}\sum_{i=2}^{5}\mathrm{d}x_i^2\,,\\
e^{2\Phi} =& g_s^2\,\frac{H_1}{H_5}\,,\\
\mathscr{F}_{[3]} =& -\frac{1}{g_s}\mathrm{d}H_1^{-1}\wedge\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x + 2\alpha' N_5\omega_3\,,
\end{aligned}
\tag{III.2}
$$

avec

$$
H_1 = 1 + \frac{g_s\alpha' N_1}{vr^2}\,,\quad H_5 = 1 + \frac{g_s\alpha' N_5}{r^2}. \tag{III.3}
$$

Le facteur conforme H_1 pour les D1-branes délocalisées s'obtient en intégrant sur le tore avec une densité constante : $H_1 \sim 1 + g_s\alpha' N_1 \int d^4x\,(r^2+x^2)^{-3}$. Le quatre-tore peut être remplacé par une variété de Calabi-Yau à quatre dimensions (appelée variété K3) sans briser plus de supersymétries.

En compactifiant également la coordonnée x^5, cette solution correspond à une solution de trou noir chargé supersymétrique à quatre dimensions. Ce trou noir possède un horizon de surface nulle, mais en superposant à cette solution une onde gravitationnelle nous pouvons lui donner une surface arbitraire. La description en termes de branes, c.-à.-d. la connaissance des degrés de liberté de cordes ouvertes vivant sur les D-branes, permet de calculer l'entropie de ce trou noir de manière microscopique [70], et le résultat coïncide avec l'approche semi-classique.

Il existe également pour cette configuration D1-D5 une limite de découplage, conduisant à une dualité holographique. Comme dans le cas des D3-branes, nous prenons la limite de basse énergie $\alpha' \to 0$. Dans le même temps, nous gardons fixée $U = r/\alpha'$, la masse des cordes fondamentales étendues entre les D-branes. Cette dernière condition est nécessaire pour garder finie l'énergie des configurations de la théorie sur les branes dans la phase de Coulomb, correspondant à une séparation des D-branes dans l'espace transverse. Dans le même temps nous gardons fixé le volume sans dimension du tore v et la constante de couplage des cordes à six dimensions $g_6 = g_s/\sqrt{v}$.

Dans cette limite, la solution de supergravité se simplifie en la solution près de l'horizon, $AdS_3 \times S^3 \times T^4$, et la supersymétrie est élargie à $1/2$ de la supersymétrie de l'espace-temps plat. Alors, les mêmes arguments que pour la théorie des D3-branes s'appliquent, et conduisent à postuler une dualité de type AdS/CFT entre la théorie des supercordes IIB dans le fond $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ et la limite de basse énergie de la théorie de cordes ouvertes vivant sur la configuration D1/D5. Cette dernière est une théorie superconforme à deux dimensions, et, comme pour la théorie vivant sur la surface d'univers des cordes fondamentales, cette symétrie est de dimension *infinie* (contrairement aux dimensionnalités supérieures). L'algèbre de (super-)Virasoro de cette théorie conforme peut se construire à l'aide de l'action du (super-)groupe de symétrie de AdS_3 sur le bord conforme [71], et correspond à une théorie de charge centrale $c = 6(N_1N_5 + 1)$. La charge centrale ainsi obtenue dans la supergravité peut être comparée favorablement à celle obtenue directement en étudiant la théorie sur les branes.

Comme pour les D3-branes, la solution de théorie des cordes $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ comporte des flux de Ramond-Ramond et ne connaît pas de description exacte en théorie des cordes. Cependant, en utilisant une *dualité S*, échangeant la deux-forme de Ramond–Ramond avec celle de Neveu-Schwarz–Neveu-Schwarz, nous pouvons transformer ce système en une configuration de cordes

fondamentales (F1) et de NS5-branes. La théorie des cordes dans l'espace ambiant est alors décrite par la **théorie conforme exacte** $SL(2,\mathbb{R})_{N_5} \times SU(2)_{N_5} \times U(1)^4$ [72]. Les deux derniers facteurs correspondent à des théories conformes bien connues et discutées dans la section précédente. Par contre, le modèle de WZW pour le groupe non-compact $SL(2,\mathbb{R})$ comporte beaucoup de particularités nouvelles et va être discuté en détail. Remarquons pour finir que le niveau des modèles de WZW dépend seulement du nombre de NS5 branes et non de celui de cordes fondamentales. Ce dernier apparaît uniquement dans l'expression de la constante de couplage des cordes $g_s = \sqrt{\nu N_5/N_1}$.

III.2. Quantification des cordes dans AdS_3

La théorie des supercordes dans AdS_3 avec un flux de NS-NS est donc décrite par un modèle de WZW correspondant au groupe non-compact $SL(2,\mathbb{R})$ [73,74]. Plus précisément, ce modèle correspond à l'espace-temps AdS_3 avec un temps compact ; il est possible de décompactifier le temps en considérant le *recouvrement universel* du groupe, noté $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$. Pour l'instant nous nous concentrerons sur la théorie bosonique.

Représentations de l'algèbre de Lie. Avant d'étudier l'algèbre affine du modèle de WZW, il est nécessaire de comprendre la théorie des représentations des modes zéro, c.-à.-d. de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. La première différence avec les algèbres compactes vient du fait qu'il existe trois sous-algèbres abéliennes inéquivalentes [75]. Ceci peut se comprendre aisément en considérant l'algèbre isomorphe $\mathfrak{so}(1,2)$, qui n'est rien d'autre que l'algèbre de Lorentz à trois dimensions. Dans ce cas nous savons qu'un champ vectoriel dans $\mathbb{R}^{1,2}$ peut être genre temps, genre espace ou genre lumière.

Base elliptique. La sous-algèbre correspondant au sous-groupe à un paramètre de genre temps est appelée *elliptique*. Elle correspond au générateur des rotations du groupe de Lorentz. Son action est diagonalisée en paramétrant les éléments du groupe à l'aide des angles d'Euler[c] :

$$g = e^{\frac{\imath\sigma_2}{2}(\theta+\tau)}\, e^{\sigma_1\rho}\, e^{\frac{\imath\sigma_2}{2}(\theta-\tau)}\,,$$

dans laquelle la métrique de Cartan-Weyl sur le groupe est donnée par les coordonnées globales sur AdS_3 :

$$ds^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \sinh^2\rho\,\mathrm{d}\theta^2 - \cosh^2\rho\,\mathrm{d}\tau^2. \tag{III.4}$$

L'algèbre elliptique, correspondant au générateur $T^3 = -\imath\sigma_2/2$, est diagonalisée. Nous définissons également les autres générateurs comme : $T^\pm = (\sigma_3 \pm \imath\sigma_1)/2$. L'algèbre de Lie s'écrit alors :

$$[T^3, T^\pm] = \pm T^\pm\,, \quad [T^+, T^-] = -2T^3.$$

Les représentations irréductibles unitaires de l'algèbre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ sont de quatre types différents. Elles sont toutes classifiées par le second *Casimir* de l'algèbre $c_2 = \sum_a T^a T^a$, paramétré comme $c_2 = -j(j-1)$. Il s'agit :

- des représentations *continues principales* $\mathscr{C}_s$, caractérisées par $j = 1/2 + \imath s$, $s \in \mathbb{R}_*^+$. Le spectre du générateur elliptique est donné par : $m = \alpha + \mathbb{Z}$, où $\alpha \in \{0, 1/2\}$;
- des représentations *continues supplémentaires* $\mathscr{S}_j$, caractérisées par $1/2 < j < 1$, avec le même spectre pour le générateur elliptique.
- des représentations *discrètes principales* $\mathscr{D}_j^\pm$, caractérisées par $j \in \mathbb{N}_*/2$. Ces représentations sont de plus haut ou de plus bas poids, c.-à.-d. que le spectre du générateur elliptique est, pour $\mathscr{D}_j^\pm$, $m = \pm(j+r)$, $r \in \mathbb{N}$.
- de la représentation *triviale* $\mathscr{T}$, avec $j = 0$.

[c] Les matrices de Pauli sont définies par : $\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\sigma_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Pour le recouvrement universel du groupe $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$, ce spectre est modifié de la manière suivante. Premièrement, pour les représentations continues, le paramètre α est un réel quelconque dans $[0,1[$. Deuxièmement, le spin j des représentations discrètes prend des valeurs continues : $j \in \mathbb{R}_*^+$.

Base hyperbolique. Cette base diagonalise le générateur de genre espace, dit *hyperbolique*, correspondant aux transformations de Lorentz, $T^2 = \imath\sigma_3/2$. En définissant : $U^\pm = (-\sigma_2 \pm \imath\sigma_1)/2$, l'algèbre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ s'écrit :

$$[T^2, U^\pm] = \pm\imath U^\pm \ , \quad [U^+, U^-] = -2\imath T^2.$$

Quel que soit le type de représentation – discrète ou continue – le spectre du générateur hyperbolique est $\mu \in \mathbb{R}$. Le paramétrage du groupe diagonalisant l'action de ce générateur est plus compliqué, car il faut utiliser des formes différentes pour couvrir tout le groupe, voir [75]. Par exemple, la région de la variété de groupe correspondant à l'*extérieur* de l'horizon de AdS_3 peut se paramétrer comme :

$$g_{ext}(r,t,x) = e^{\frac{\sigma_3(t+x)}{2}} \begin{pmatrix} \cosh r & \sinh r \\ \sinh r & \cosh r \end{pmatrix} e^{\frac{\sigma_3(t-x)}{2}} \ ,$$

correspondant à la métrique d'AdS_3 sous la forme :

$$ds^2 = \mathrm{d}r^2 - \sinh^2 r\,\mathrm{d}t^2 + \cosh^2 r\,\mathrm{d}x^2.$$

Les autres paramétrages permettent de couvrir les autres régions de la variété, à l'intérieur de l'horizon situé en $r \to 0$ (de type Rindler).

Base parabolique. En plus des deux choix précédents de sous-algèbre de Cartan, il est possible de diagonaliser le spectre du générateur U^+, dit *parabolique*.[d] Le spectre du générateur parabolique est continu, avec $p_+ \in \mathbb{R}$ pour les représentations continues et $p_+ \in \mathbb{R}_\pm$ pour les représentations $\mathscr{D}_j^\pm$. Le paramétrage diagonalisant son action correspond à la décomposition de Gauß. Encore une fois, il existe plusieurs paramétrages mais nous avons, par exemple, à l'extérieur de l'horizon :

$$g(u,x^+,x^-) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^- & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x^+ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

correspondant aux coordonnées dites de *Poincaré* :

$$ds^2 = \frac{\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}x^+\mathrm{d}x^-}{u^2}.$$

Le choix de la base la plus appropriée (elliptique, hyperbolique, parabolique) dépend du problème étudié. Ainsi, si nous souhaitons jauger ou déformer l'une de ces sous-algèbres, l'étude du spectre et de la géométrie sera naturellement plus simple dans la base où son action est diagonalisée.

Solutions classiques et flot spectral. Pour étudier le spectre du modèle de WZW $SL(2,\mathbb{R})$ proprement dit, la base elliptique est la plus appropriée. La première raison est que le spectre du générateur elliptique est discret, et donc l'analyse plus semblable aux groupes compacts.

La deuxième raison est plus subtile ; contrairement aux groupes compacts (c.f. chapitre précédent), le groupe fondamental de $SL(2,\mathbb{R})$ est non-trivial : $H_1(SL(2,\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$. En conséquence, comme pour le cas du boson libre compact (section II.2), nous devons considérer des *secteurs d'enroulement* pour lesquels l'algèbre affine est déformée [76]. Or il se trouve que la direction selon laquelle l'algèbre est déformée correspond au courant elliptique compact.

[d] Cependant cette sous-algèbre abélienne n'est pas une sous-algèbre de Cartan.

Dans cette base, l'algèbre des courants s'écrit (nous n'écrivons que l'algèbre gauche par simplicité) :

$$J^3(z)J^3(0) \sim -\frac{k}{2z^2}\,,$$
$$J^3(z)J^\pm(0) \sim \pm\frac{J^\pm(0)}{z}\,,$$
$$J^+(z)J^-(0) \sim \frac{k}{z^2} - \frac{2J^3(0)}{z}\,.$$

L'action de la déformation sur les courants s'appelle le *flot spectral*, par analogie avec les algèbres superconformes N=2 (voir la section II.1). Explicitement nous avons :

$$J^3(z) = \tilde{J}^3(z) + \frac{kw_G}{2z} \qquad J^\pm(z) = z^{\mp w_G}\,\tilde{J}^\pm(z)$$
$$\bar{J}^3(\bar{z}) = \tilde{\bar{J}}^3(\bar{z}) + \frac{kw_D}{2\bar{z}} \qquad \bar{J}^\pm(z) = \bar{z}^{\mp w_D}\,\tilde{\bar{J}}^\pm(\bar{z})\,, \tag{III.5}$$

où $w_G, w_D \in \mathbb{Z}$ sont les deux paramètres d'enroulement. Pour mieux comprendre leur signification, nous écrivons les courants elliptiques en termes des champs correspondant aux coordonnées globales (III.4) :

$$J^3 = k(\cosh^2\rho\,\partial T + \sinh^2\rho\,\partial\Phi)\,, \quad \bar{J}^3 = k(\cosh^2\rho\,\bar{\partial}T - \sinh^2\rho\,\bar{\partial}\Phi). \tag{III.6}$$

Ainsi, l'enroulement autour de la coordonnée angulaire ϕ est donné par $(w_G + w_D)/2$, et l'enroulement autour de la coordonnée temporelle τ par $(w_G - w_D)/2$. Lorsque nous considérons le recouvrement universel du groupe, pour éviter les courbes de genre temps fermées, nous devons imposer $w_G = w_D$, c.-à.-d. que le flot spectral soit diagonal. Le flot spectral modifie aussi le tenseur d'énergie-impulsion obtenu par la construction de Sugawara comme :

$$T(z) = \tilde{T}(z) - w\tilde{J}^3(z) - \frac{kw}{4z^2}.$$

L'action du flot spectral peut se comprendre simplement en considérant son action sur les solutions classiques du modèle de WZW [77]. Une solution générale s'écrit comme $g = g^+(z)g^-(\bar{z})$, où $g^\pm$ sont des fonctions holomorphes quelconques respectant la périodicité de la surface d'univers sous $z \to e^{2\imath\pi}z$. En particulier, les géodésiques du genre temps : $g_\alpha(z,\bar{z}) = U(z\bar{z})^{\sigma_2\,\alpha}V$, $U,V \in SL(2,\mathbb{R})$, correspondent à des représentations discrètes, pour lesquelles la surface d'univers se réduit à une ligne d'univers. À l'opposé, les géodésiques du genre espace : $g_\beta(z,\bar{z}) = U(z\bar{z})^{\imath\sigma_3\,\beta}V$ correspondent à des représentations continues principales. Le flot spectral agit sur ces solutions classiques comme[e] :

$$g(z,\bar{z}) = z^{w\sigma_2/2}\,\tilde{g}(z,\bar{z})\,\bar{z}^{w\sigma_2/2}\,.$$

En partant d'une représentation discrète, nous générons une surface d'univers localisée dans anti-de Sitter, appelées *cordes courtes*, en contraction et expansion périodique, voir fig. III.1 à gauche. Au contraire, en partant d'une représentation continue, nous obtenons une surface d'univers dont le rayon (dans les coordonnées globales) croît linéairement avec le temps, et qui asymptotiquement décrit une surface d'univers macroscopique, localisée près du bord, avec un nombre d'enroulement w, appelée *corde longue*, voir fig. III.1 à droite. La taille de la surface d'univers peut croître indéfiniment, car la force de contraction due à la tension de la corde est exactement compensée par la force répulsive due à la deux-forme de NS-NS. L'énergie d'un certain état de la corde dans l'espace-temps est donnée, d'après (III.6), par : $E = J_0^3 + \bar{J}_0^3$. Le moment angulaire est lui donné

[e] À partir de maintenant, nous considérons le recouvrement universel où le flot spectral est diagonal.

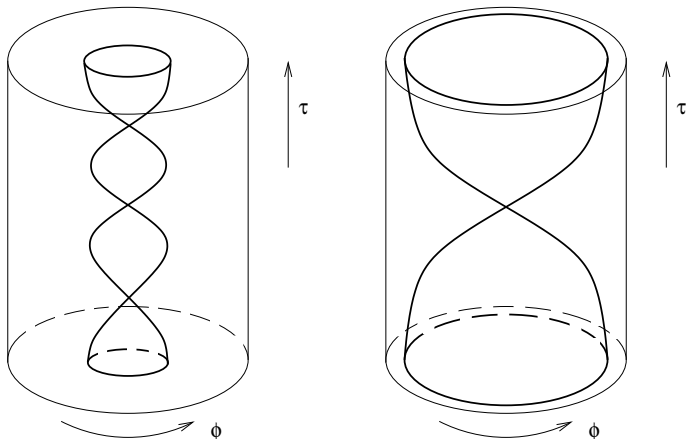

FIG. III.1. Solutions classiques de cordes courtes (gauche) et de cordes longues (droite) dans AdS_3.

par $\ell = J_0^3 - \bar{J}_0^3$. Ainsi l'action du flot spectral diagonal modifie l'énergie d'une configuration mais pas son moment angulaire.

L'inclusion de ces nouveaux secteurs d'enroulement est non seulement possible, mais *obligatoire*, en particulier pour assurer l'invariance modulaire. Du point de vue de l'algèbre affine, ils correspondent à un automorphisme extérieur, qui génère de nouvelles représentations dont le spectre de dimensions conformes n'est pas borné inférieurement, notées $\mathscr{C}_s^w$ pour les représentations continues et $\mathscr{D}_j^{\pm,w}$ pour les représentations discrètes. Notons que le flot spectral d'une unité échange les deux types de représentations discrètes :

$$\mathscr{D}_j^{+,w+1} \sim \mathscr{D}_j^{-,w}. \tag{III.7}$$

Spectre physique. Pour bâtir le spectre physique de la théorie des cordes, nous devons faire face à un problème particulier des groupes non-compacts. En effet, même si nous sélectionnons uniquement des représentations unitaires de l'algèbre des modes zéro dans le spectre, les représentations de l'algèbre affine seront toujours non-unitaires. Par exemple, une représentation $\mathscr{D}_j^+$ contiendra une représentation des modes zéro de spin $(j-N)$ à l'échelon N, qui sera non unitaire pour $N > j$. Nous pouvons seulement espérer que le *spectre physique*, c.-à.-d. obtenu par l'application des contraintes venant de la symétrie BRST sur les états physiques, voir sect. I.3, ne contienne que des états de norme positive.

Considérons une théorie des cordes (bosonique) constituée du modèle de WZW $SL(2,\mathbb{R})$ au niveau k et d'une théorie conforme «interne» unitaire $\mathscr{M}$. Le spectre des opérateurs primaires du modèle bosonique est donné, dans un secteur de flot spectral w par :

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{-j(j-1)}{k-2} - w\tilde{m} - \frac{k}{4}w^2 + h_{\mathscr{M}} \\ \bar{L}_0 &= \frac{-j(j-1)}{k-2} - w\bar{\tilde{m}} - \frac{k}{4}w^2 + \bar{h}_{\mathscr{M}}. \end{aligned} \tag{III.8}$$

Le spectre physique s'obtient en appliquant la condition $L_0 = \bar{L}_0 = 1$ pour les diverses représentations de l'algèbre.

Dans le cas des représentations continues principales, il est simple de montrer l'unitarité du spectre physique, d'une manière analogue au cas de l'espace-temps plat. Dans le secteur $w = 0$, le seul état physique est le tachyon. Cette observation a motivé l'introduction de la notion de flot

spectral car, d'après l'étude de la théorie conforme duale à AdS_3, des représentations continues étaient attendues.

Les représentations discrètes nécessitent une étude plus approfondie. Premièrement, pour les représentations sans flot spectral, l'unitarité du spectre physique impose que le spin des représentations soit tronqué [74] : $0 < j < \frac{k}{2}$. Cette condition s'applique aussi aux représentations obtenues par flot spectral. Si nous imposons de plus que les représentations présentes dans le spectre correspondent à des opérateurs *normalisables*, nous restreignons cet intervalle[f] à

$$\frac{1}{2} < j < \frac{k-1}{2}. \tag{III.9}$$

Les autres types de représentations (continues supplémentaires et triviale) n'apparaissent probablement pas dans le spectre physique car elles correspondent toutes à des états non-normalisables.

Cette analyse du spectre conduit à l'image suivante ; lorsque le spin d'une représentation discrète, dans un secteur de flot spectral w, atteint la borne supérieure de (III.9), une corde longue d'enroulement w est émise. Pour des énergies supérieures, nous atteignons le secteur $w+1$ des représentations discrètes.

Comme pour les groupes compacts, il est souhaitable de connaître la fonction de partition du modèle de WZW $SL(2,\mathbb{R})$ pour vérifier que le spectre donné ci-dessus est invariant modulaire. Cependant la nature non-compacte du groupe conduit à des complications majeures, dues à la dégénérescence infinie des représentations de modes zéro. Nous pouvons définir des caractères associés aux représentations discrètes $\chi^j(\tau,\nu)$ et associés aux représentations continues $\chi^s_\alpha(\tau,\nu)$, mais les premiers ne convergent pas dans tout le plan complexe ν, et les derniers ne convergent nulle part. De plus, pour écrire les caractères correspondant à des représentations discrètes avec flot spectral, il faut soustraire des contributions infinies.

Pour calculer néanmoins une fonction de partition pour cette théorie, nous avons adopté une stratégie différente, voir la publication n° 1 [78]. Alors que pour les groupes compacts, nous avons construit les théories de quotient à partir des modèles de WZW, nous ferons ici le chemin inverse. Nous partirons au contraire d'un modèle jaugé euclidien, mieux défini, pour reconstruire la fonction de partition de la théorie mère $SL(2,\mathbb{R})$.

III.3. La théorie de quotient SL(2,$\mathbb{R}$) /U(1)

D'après la discussion précédente, il existe plusieurs jaugements possibles du modèle de WZW sur $SL(2,\mathbb{R})$, suivant que nous choisissons la sous-algèbre elliptique, hyperbolique ou parabolique. Nous envisageons ici la première possibilité, qui consiste à jauger le générateur de genre temps, afin d'obtenir un modèle sigma sur un espace euclidien.

Nous considérons le modèle $SL(2,\mathbb{R})/U(1)_{\text{axial}}$ [79], obtenu par le jaugement de la symétrie : $g \to \exp\{\lambda \frac{\imath\sigma_2}{2}\}\, g \exp\{\lambda \frac{\imath\sigma_2}{2}\}$. En partant du paramétrage de $SL(2,\mathbb{R})$ dans les angles d'Euler, nous pouvons obtenir l'action du modèle jaugé (à l'ordre $1/k$) par les méthodes de la section II.3.1. Nous obtenons un résultat analogue au quotient de $SU(2)$:

$$S = \frac{k}{\pi}\int \mathrm{d}^2z\,\left(\partial\rho\bar{\partial}\rho + \tanh^2\rho\,\partial\phi\bar{\partial}\phi\right), \tag{III.10}$$

avec de plus le dilaton : $\Phi = \Phi_0 - \log\,\cosh^2\rho$. Ce modèle sigma est faiblement couplé, à la fois sur la surface d'univers (les couplages du modèle sigma sont bornés) et dans l'espace-temps, car le dilaton est borné supérieurement par Φ_0. Cette variété bidimensionnelle, en forme de cigare,

[f] Plus précisément, les représentations $0 < j < 1/2$ sont non-normalisables, et l'isomorphisme (III.7) impose de tronquer aussi la borne supérieure.

est interprétée comme un trou noir euclidien, c.-à.-d. le prolongement analytique, en dehors de l'horizon, de la métrique d'un trou noir lorentzien. Ce dernier s'obtient en jaugeant le sous-groupe hyperbolique de $SL(2,\mathbb{R})$ [80].

Le spectre de cette théorie de quotient est unitaire, contrairement au modèle de WZW original [81]. Le spectre des opérateurs primaires peut s'obtenir par la quantification BRST, en prenant garde toutefois à l'action du flot spectral[g]. Explicitement les dimensions des opérateurs primaires sont :

$$\begin{aligned} L_0 &= -\frac{j(j-1)}{k-2} + \frac{(n-kw)^2}{4k} \\ \bar{L}_0 &= -\frac{j(j-1)}{k-2} + \frac{(n+kw)^2}{4k}\,, \end{aligned} \tag{III.11}$$

provenant d'états de $SL(2,\mathbb{R})$, dans un secteur de flot spectral w, obéissant aux contraintes :

$$J_0^3 + \bar{J}_0^3 = \tilde{J}_0^3 + \tilde{\bar{J}}_0^3 + kw = 0\,, \quad J_0^3 - \bar{J}_0^3 = n.$$

Fonction de partition du modèle jaugé. De manière surprenante, la fonction de partition de cette théorie peut se calculer directement par l'intégrale de chemin. Le point de départ de ce calcul est le modèle sigma non-linéraire sur l'espace hyperbolique $H_3^+ = SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$[h]. Ce modèle s'obtient à partir du modèle de WZW sur $SL(2,\mathbb{R})$ dans les coordonnées globales (III.4) par le prolongement analytique $\tau \to \imath\tau$. Ce n'est pas à proprement parler un modèle de WZW, car le groupe d'isométries de H_3^+, qui est $SL(2,\mathbb{C})$, ne se factorise pas en deux algèbres chirales. De plus, à cause de ce prolongement analytique la deux-forme de NS-NS devient imaginaire et la théorie conforme n'est pas unitaire. Ce modèle est néamoins étudié en détail [83–85], car contrairement au cas lorentzien l'intégrale de chemin est bien définie. Pour calculer l'intégrale de chemin de H_3^+, nous remarquons que ce modèle sigma non-linéaire peut se mettre sous une forme quadratique, après un changement de coordonnées :

$$S = \frac{k}{\pi}\int \mathrm{d}^2z\,\left(\partial\phi\bar{\partial}\phi + (\partial+\partial\phi)\bar{Z}(\bar{\partial}+\bar{\partial}\phi)Z\right)$$

Le déterminant venant de l'intégration sur le champ Z se calcule en effectuant une rotation chirale qui élimine la dépendance en ϕ, mais au prix d'une anomalie chirale, renormalisant le terme cinétique de ϕ comme $k \to k-2$ [86].

Le traitement de la fonction de partition du modèle jaugé $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ est analogue au traitement BRST, mais cette fois sur le tore. Il faut alors tenir compte des holonomies autour des un-cycles dans la décomposition du champ de jauge :

$$A = \partial\rho_L + \frac{\imath}{2\tau_2}(u_1\bar{\tau} - u_2)\,, \quad \bar{A} = \bar{\partial}\rho_R - \frac{\imath}{2\tau_2}(u_1\tau - u_2)\,, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}. \tag{III.12}$$

Après des manipulations analogues à celles expliquées dans la section II.3, nous obtenons une action pour $SL(2,\mathbb{R})\times U(1)$, plus des fantômes venant du choix de jauge. Cependant, les modèles de WZW pour $SL(2,\mathbb{R})$ et $U(1)$ sont couplés par les holonomies venant de l'équation (III.12). En d'autres termes, la fonction de partition est schématiquement obtenue sous la forme : $Z \sim \int \mathrm{d}^2u \int \mathrm{d}j\ \chi_j(\tau, u_1\tau - u_2)\bar{\chi}_j(\bar{\tau}, u_1\bar{\tau} - u_2)\sum_m \Theta_{m,k}(\tau, u_1\tau - u_2)\bar{\Theta}_{-m,k}(\bar{\tau}, u_1\bar{\tau} - u_2)$, en fonction de caractères de $SL(2,\mathbb{R})$ et de $U(1)_k$ au rayon carré $2k$. Pour effectuer le calcul du terme correspondant à $SL(2,\mathbb{R})$, nous pouvons contourner les problèmes dus à la signature lorentzienne du modèle et à la méconnaissance des caractères en effectuant un prolongement analytique vers H_3^+ ; après

[g] Un spectre correct fut obtenu dans [82] sans tenir compte du flot spectral, mais en ajoutant des secteurs d'enroulement pour le boson supplémentaire apparaissant dans la traitement BRST.

[h] Dans le cas présent il s'agit du *quotient géométrique* et non du modèle de WZW jaugé.

le jaugement, ce prolongement n'aura pas d'effet car la direction temporelle est enlevée. Nous obtenons finalement l'action quasi-libre de H_3^+, déformée par les holonomies, une contribution du boson supplémentaire, avec un réseau de modes zéro donné par les holonomies du champ de jauge, et les fantômes enlevant deux oscillateurs.

L'analyse de cette fonction de partition [87] s'effectue en intégrant la partie non-entière des holonomies, interprétée comme des multiplicateurs de Lagrange imposant des contraintes sur l'espace de Hilbert de $H_3^+ \times U(1)$. Nous obtenons finalement le spectre (III.11), avec les représentations discrètes dans l'intervalle (III.9). Alors que les caractères des représentations discrètes apparaissent correctement, avec les multiplicités attendues – voir la publication n° 3, ref. [88], pour un traitement détaillé du cas supersymétrique – la contribution des représentations continues est divergente, à cause du volume infini qu'elles peuvent explorer. Cette divergence infrarouge peut être régularisée, suivant [89], au prix de l'invariance modulaire. Nous obtenons alors, à côté du terme divergent principal, un terme fini donnant une *densité d'états* régularisée, liée au changement de phase lors de la diffusion d'états asymptotiques. Mais nous avons montré [88] que si les multiplicités des opérateurs descendants sont prises en compte, il reste une autre contribution finie, qui ne peut s'interpréter en termes de représentations de $SL(2,\mathbb{R})$. Cette contribution, non universelle, est probablement due à la procédure de régularisation infrarouge choisie.

Caractères et transformations modulaires. Pour étudier les caractères de cette théorie de quotient, en particulier leurs propriétés modulaires, nous pouvons utiliser, à la place du plongement dans le modèle de WZW $SL(2,\mathbb{R})$, l'extension à l'algèbre superconforme $N=2$ [81]. Elle présente l'avantage d'être unitaire, et de posséder des caractères finis. Considérons en effet une théorie $N=2$, de charge centrale $c>3$. Nous pouvons bosoniser le courant de symétrie R de l'algèbre (II.2) comme : $J_R(z) = \imath\sqrt{c/3}\,\partial H(z)$, et factoriser la partie chargée sous J_R des supercourants : $G^\pm = \sqrt{2c/3}\,\varpi^\pm \exp \pm\imath\sqrt{3/c}\,H$. Les opérateurs $\varpi^\pm(z)$ ainsi définis sont les premiers courants parafermionques du quotient $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$, au niveau $k = 2c/(c-3)$. Nous voyons ainsi que, de même que les modèles minimaux $N=2$ ($c<3$) sont reliés au modèle $SU(2)/U(1)$, les modèles non-minimaux ($c>3$) sont reliés à la théorie de quotient $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ supersymmétrique, qui peut se décomposer en une théorie de quotient bosonique et un boson libre supplémentaire, au rayon $R_H = 2\sqrt{c/3}$.

Cette construction permet de calculer les caractères du quotient $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ en utilisant ceux, connus, de l'algèbre N=2 [90]. Il suffit simplement de développer ces derniers en termes des charges du boson H.[i]

Les transformations modulaires des caractères de $N=2$ sont connues, mais elles font intervenir un continuum de charges $N=2$. En outre, il est difficile d'en extraire la contribution venant des caractères de $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ bosonique. Pour remédier à ces problèmes, nous pouvons utiliser des *caractères étendus* de l'algèbre $N=2$, obtenus en sommant les caractères (II.6) par k unités de flot spectral :

$$Ch_{\mathbf{r}}^m(\tau,z,u) := \sum_{p\in\mathbb{Z}} \chi_{\mathbf{r}}^{m+kp}(\tau,z,u). \tag{III.13}$$

Cette construction n'est bien sûr possible que pour k entier, et peut être modifiée pour traiter le cas k rationnel. Ces caractères, distingués par une charge $2m \in \mathbb{Z}_{2k}$, ont la propriété d'être stables sous transformations modulaires [92]. Leurs propriétés ressemblent alors à celles des théories rationnelles, qui possèdent un nombre fini d'opérateurs primaires. Dans la publication n°2, nous avons défini de manière similaire des caractéres étendus pour le quotient $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ bosonique, en décomposant les charges du courant elliptique de $SL(2,\mathbb{R})$ comme $m = n + 2kp$, avec $n \in \mathbb{Z}_{2k}$ et

[i] Notons que le plongement dans $SL(2,\mathbb{R})$ permet d'obtenir les mêmes résultats, voir [91].

en sommant sur p. Ces caractères proviennent naturellement de la décomposition des caractères étendus de $N = 2$, dont nous avons utilisé les transformations modulaires pour trouver celles des caractères étendus de $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ [93].

Le résultat qualitativement le plus important de ce travail est qu'un caractère d'une représentation discrète se transforme à la fois en une contribution discrète – couvrant tout l'intervalle (III.9) – et en une contribution des représentations continues. Ce mélange des représentations a des conséquences importantes pour comprendre la fonction de partition, mais aussi pour étudier les D-branes de cette théorie. Remarquons pour finir que nous avons montré dans [88], pour le quotient supersymétrique, que la fonction de partition de $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ pour k entier se décompose naturellement à l'aide des caractères étendus.

III.4. La fonction de partition de SL(2,$\mathbb{R}$)

Après ce long détour par la théorie de quotient, nous sommes maintenant en mesure de revenir à notre problème initial, le calcul de la fonction de partition du modèle de WZW $SL(2,\mathbb{R})$. Celui-ci s'inscrit dans la problématique plus large du traitement des modèles de théorie des cordes pour lesquels il n'existe pas de directions du cône de lumière plates, ce qui empêche d'utiliser la jauge du cône de lumière ou une rotation de Wick vers l'espace euclidien. Nous proposons ici une méthode qui s'applique aux modèles sigma non-linéaires pour lesquels la direction temporelle est «courbée», c.-à.-d. que la composante de la métrique associée n'est pas constante. Cependant il est nécessaire que l'espace-temps soit *stationnaire*, ce qui exclut par exemple les solutions cosmologiques.

Nous avons vu dans la section II.4 que la fonction de partition d'un modèle de WZW sur G peut, dans le cas compact, s'écrire comme un orbifold des théories G/H et H, où H est le sous-groupe de Cartan. Nous avons donc une représentation équivalente, pour le modèle sigma non-linéaire, par un modèle de WZW jaugé G/H et un modèle de WZW sur H. Dans le cas de la trois-sphère, cette représentation est $\{SU(2)_k/U(1)\times U(1)_k\}/\mathbb{Z}_k$. L'action du $\mathbb{Z}_k$, qui correspond au groupe de symétrie discret des parafermions de $SU(2)$, est différente si le jaugement est axial ou vectoriel.

Considérons maintenant la propagation des cordes sur une variété $\mathscr{M}$ minkowskienne stationnaire, telle que la symétrie de translation temporelle corresponde à une symétrie réelle de la théorie des cordes, associée à un courant conservé. Nous pouvons alors jauger cette isométrie et découper le modèle en $\mathscr{M}/\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Ces deux modèles doivent être couplés par l'analogue de l'orbifold pour les groupes discrets, dont l'action sur la coordonnée temporelle est uniquement sur les modes zéro. Nous pouvons alors, pour obtenir une intégrale de chemin définie positive, séparer les modes zéro du champ associé à la coordonnée temporelle : $T(z,\bar{z}) = T_0 + \delta T(z,\bar{z})$, et ensuite effectuer un prolongement analytique sur les fluctuations, $\delta T \to \imath\delta T$. Il restera alors simplement une divergence associée à l'intégration sur les modes zéro, c.-à.-d. l'énergie. Nous obtenons ainsi la fonction de partition sous la forme : $Z(\tau) \sim \int \mathrm{d}E\ Z(E;\tau)$, où l'intégrande est bien défini.

Revenons maintenant au cas particulier de AdS_3, étudié dans la publication n°1. Nous pouvons décomposer la théorie en $SL(2,\mathbb{R})/U(1)|_{\text{axial}} \times U(1)_{-k}$. Le facteur $U(1)_{-k}$ est un boson de genre temps au rayon $\sqrt{2k}$. Contrairement aux parafermions de $SU(2)$, les parafermions de $SL(2,\mathbb{R})$ ont une symétrie $\mathbb{Z}$, car le nombre de courants parafermioniques est infini. Il existe une certaine liberté dans le choix du groupe discret pour l'orbifold. Les résultats du calcul de la fonction de partition sont les suivants : le jaugement par le groupe $\mathbb{Z}$ entier correspond à la fonction de partition de *recouvrement universel* de $SL(2,\mathbb{R})$, dans lequel le temps est non-compact [78]. Pour k entier, nous trouvons que l'orbifold par un sous-groupe $\mathbb{Z}_{Nk}$ correspond au recouvrement N^{ième} du groupe $SL(2,\mathbb{R})$, c.-à.-d. que le temps est compact et de rayon $\sqrt{2Nk}$.

L'analyse de la fonction de partition est similaire à celle du modèle jaugé, mis à part l'intégration sur l'énergie, correspondant à $J_0^3 + \bar{J}_0^3$. Notons qu'elle apparaît de manière linéaire dans le spectre voir eqs. (III.8). Après le prolongement analytique $E \to \imath E$, cette intégration va donner des contraintes, réduisant la fonction de partition à celle du modèle H_3^+ donnée dans [86]. Mais, sous cette forme intégrée sur l'énergie, la structure du spectre, en particulier des représentations discrètes, n'est plus visible.

Ce prolongement analytique de $SL(2,\mathbb{R})$ vers H_3^+ est assez inhabituel. En effet dans l'espace-temps plat, à la coordonnée temporelle sont associés deux courants chiraux $\imath\partial T$ et $\imath\bar{\partial}T$. Le prolongement euclidien est défini par la rotation de Wick sur les deux courants. Au contraire, dans $SL(2,\mathbb{R})$, l'énergie correspond au mode zéro de $J^3 + \bar{J}^3$, et le moment angulaire à $J^3 - \bar{J}^3$, voir eq. (III.6). Le prolongement analytique sur la coordonnée temporelle complexifie donc les courants J^3 et $\bar{J}^3$. Nous allons donner plus loin une définition alternative de l'AdS$_3$ euclidien.

Théories de supercordes dans AdS$_3\times$ S^3. Nous revenons maintenant à la théorie des supercordes dans l'espace-temps complet AdS$_3\times$ S$^3\times$ T^4, représentant une configuration de NS5-branes enroulées sur un tore et de cordes fondamentales, et préservant la moitié de la supersymétrie. Cette solution se décrit à l'aide des modèles de WZW supersymétriques $SU(2)$ et $SL(2,\mathbb{R})$ au niveau k, ainsi que de quatre bosons libres, de manière à obtenir une théorie de supercordes critique avec $c = 15$. Suivant la discussion générale de la section II.2, les caractères de l'algèbre affine supersymétrique se découplent en caractères purement bosoniques, au niveau $k-2$ pour $SU(2)$ et $k+2$ pour $SL(2,\mathbb{R})$, et en caractères de fermions libres. Cependant pour comprendre la supersymétrie d'espace-temps il est nécessaire d'analyser la symétrie superconforme étendue de cette théorie. Premièrement, la théorie super-conforme du quatre-tore possède une symétrie superconforme $N = 4$ restreinte réalisée en termes de bosons et de fermions libres. Ensuite, le produit de modèles de WZW $SU(2) \times SL(2,\mathbb{R})$ possède au moins une symétrie superconforme $N = 2$. En adaptant le théorème de la section II.1 – reliant la supersymétrie d'espace-temps et la symétrie superconforme sur la surface d'univers – nous attendons que la théorie se sépare en une théorie superconforme $N = 2$ de charge centrale $c = 3$ et en une théorie $N = 4$ de charge centrale $c = 6$. La première se réalise à l'aide des courants $\mathscr{J}^3 = J^3 + :\chi^+\chi^-:$ et $\mathscr{I}^3 = I^3 + :\psi^+\psi^-:$, respectivement de $SL(2,\mathbb{R})$ et $SU(2)$, et des fermions associés χ^3 et ψ^3, comme[j] :

$$G_2^\pm = \frac{1}{\sqrt{2k}}\left[\mathscr{I}^3 \mp \mathscr{J}^3\right]\left(\psi^3 \pm \chi^3\right) \ , \quad J_2^R = \psi^3\chi^3 . \tag{III.14}$$

La deuxième algèbre superconforme se réalise à l'aide des autres courants de l'algèbre affine. Nous obtenons d'abord l'algèbre $N = 2$, $c = 6$ suivante :

$$G_4^\pm = \frac{1}{\sqrt{k}}\left[I^\mp\psi^\pm - J^\mp\chi^\pm\right] \ , \quad J_4^R = \psi^+\psi^- + \chi^+\chi^- + \frac{2(\mathscr{J}^3 - \mathscr{I}^3)}{k} . \tag{III.15}$$

Pour que cette algèbre puisse s'élargir à l'algèbre superconforme N=4 restreinte, il faudrait que le boson H^+ défini par : $\sqrt{2}\imath\partial H^+ = J_4^R$, réalise une algèbre affine $\hat{\mathfrak{su}}(2)$ au niveau un, correspondant aux courants : $(\imath\partial H^+/\sqrt{2}, \exp \pm\imath\sqrt{2}H^+)$. Ceci n'est possible que si les charges du courant $\imath\partial H^+$ correspondent à celles d'un boson compactifié au rayon $R_+ = \sqrt{2}$. Il faudrait pour cela imposer sur tous les états du spectre de la théorie : $\mathscr{J}_0^3 - \mathscr{I}_0^3 = 0 \bmod k$, ainsi qu'une condition similaire pour le secteur droit. Cependant cette restriction n'est pas acceptable physiquement, car $\mathscr{J}_0^3 + \bar{\mathscr{J}}_0^3$ correspond à l'énergie dans l'espace-temps de l'état de la supercorde considéré. La restriction aux charges demi-entières revient à n'autoriser que certaines valeurs discrètes pour l'énergie.

[j] De manière plus précise, cette algèbre n'est $N = 2$ qu'après un prolongement analytique pour le fermion ψ^3 du genre temps

Pour contourner ce problème, nous pouvons adopter une autre méthode [94]. Au lieu de construire des charges de supersymétrie d'espace-temps à l'aide du flot spectral de l'algèbre superconforme étendue sur la surface d'univers, nous pouvons simplement utiliser les opérateurs de spin construit avec les fermions, voir la section II.1, car les fermions des modèles de WZW sont libres. Cependant, par rapport à l'espace plat, seule la moitié des opérateurs de spin est comprise dans la cohomologie BRST, à cause des termes de torsion dans les super courants (III.14). Pour ne conserver dans la fonction de partition que les spineurs d'espace-temps physiques, le plus naturel est d'utiliser l'action d'un orbifold sur les fermions de $SL(2,\mathbb{R}) \times SU(2)$. Cependant dans ce cas il faut agir de manière non-triviale sur les caractères des algèbres affines. Le plus simple est de réaliser que la brisure de supersymétrie due aux torsions de $SL(2,\mathbb{R})$ et $SU(2)$ est identique à celle imposée par une compactification sur K3 au lieu du quatre-tore, pour les supercordes IIB. Cependant, dans la description S-duale, le couplage gravitationnel anormal des D5-branes induit une charge de D1-branes [95], ce qui revient finalement à changer le nombre de D1-branes présentes dans le modèle. Du point de vue de la théorie conforme, la compactification sur K3 peut être réalisée de manière simple par l'orbifold[k] $T^4/\mathbb{Z}_2$. De cette manière nous obtenons la fonction de partition supersymétrique des supercordes IIB dans $\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^3$ [78].

Remarquons pour finir que le flot spectral de l'algèbre $SL(2,\mathbb{R})$ (III.5) doit agir sur le courant total $\mathscr{J}^3$ du modèle de WZW supersymétrique. Mais l'action du flot spectral sur le courant $N=2$: $\chi^+\chi^- \to \chi^+\chi^- - w/z$ laisse les caractères invariants, et revient seulement à redéfinir le vide de NS des fermions.

Les déformations marginales de $\mathbf{AdS}_3$. Grâce à notre connaissance de la fonction de partition, nous pouvons maintenant aborder l'étude des déformations marginales du modèle de WZW $SL(2,\mathbb{R})$, en suivant et adaptant les résultats de l'étude des groupes compacts dans la section II.4. La première différence provient de l'existence de trois sous-algèbres abéliennes inéquivalentes, déjà décrites dans la section III.2. En se restreignant aux déformations symétriques, il existe trois opérateurs exactement marginaux générant des lignes de déformation, elliptique, hyperbolique et parabolique, voir la publication n°1. Remarquons que les courants correspondent à des opérateurs *non-normalisables* de la théorie et changeront donc, pour n'importe quelle valeur de la déformation, la géométrie asymptotique de l'espace-temps.

Nous nous concentrons pour l'instant sur la ligne de déformation *elliptique*, qui s'exprime naturellement dans la base elliptique de l'algèbre affine que nous avons utilisée pour construire la fonction de partition. De manière similaire à $SU(2)$, voir eq. (II.41), nous obtenons une famille de modèles sigma, avec une isométrie $U(1) \times U(1)$, paramétrée par λ :

$$S_\lambda = \frac{k}{\pi} \int \mathrm{d}^2 z \left\{ \partial\rho\bar{\partial}\rho + \frac{\lambda^2 \sinh^2\rho\, \partial\phi\bar{\partial}\phi - \cosh^2\rho\, \partial\tau\bar{\partial}\tau + \sinh^2\rho\,(\partial\phi\bar{\partial}\tau - \partial\tau\bar{\partial}\phi)}{1+(\lambda^2-1)\cosh^2\rho} \right\},$$

ainsi que le dilaton $\Phi = \Phi_0(\lambda) - \log\left(1+(\lambda^2-1)\cosh^2\rho\right)$. Comme dans le cas de $SU(2)$ cette ligne de déformation interpole entre le modèle de WZW jaugé $SL(2,\mathbb{R})/U(1)|_{\text{axial}}$, c.-à.-d. le cigare (III.10), pour $\lambda \to \infty$, et le quotient $SL(2,\mathbb{R})/U(1)|_{\text{vecteur}}$, appelé «trompette», de modèle sigma :

$$S = \frac{k}{\pi} \int \mathrm{d}^2 z \left(\partial\rho\bar{\partial}\rho + \mathrm{cotanh}^2\rho\, \partial\phi\bar{\partial}\phi \right).$$

Ces deux modèles sigma sont reliées par la dualité T présentée dans la section I.5 [96,97]. La courbure de cet espace bidimensionnel diverge en $\rho \to 0$, ainsi que le dilaton, et l'approximation en $1/k$ dans laquelle cette action effective est calculée – ou la dualité T implémentée – n'est plus valable, comme pour le modèle sigma de $SU(2)/U(1)$, lui aussi singulier.

[k] Il est aussi possible de choisir un modèle de Gepner, construit avec des modèles minimaux $N=2$.

Dans l'exemple de $SU(2)$, nous avions remarqué que la dualité T etait une symétrie *exacte* de la théorie conforme, car les deux modèles jaugés étaient reliés par la symétrie de Weyl : $\bar{I}^3 \to -\bar{I}^3$ dans le modèle de WZW représentant le $SU(2)$ déformé. Au contraire, l'opération de dualité T dans $SL(2,\mathbb{R})$ correspond à un *automorphisme extérieur* de l'algèbre[l] : $\bar{J}^3 \to -\bar{J}^3$. L'indentité des deux théories n'est donc pas garantie. Comme pour les groupes compacts, nous pouvons calculer le spectre de ce modèle de WZW déformé, en agissant sur le réseau de la sous-algèbre affine de Cartan, dans le cas présent par un changement de rayon du réseau de genre temps de la fonction de partition de $SL(2,\mathbb{R})$ [78].

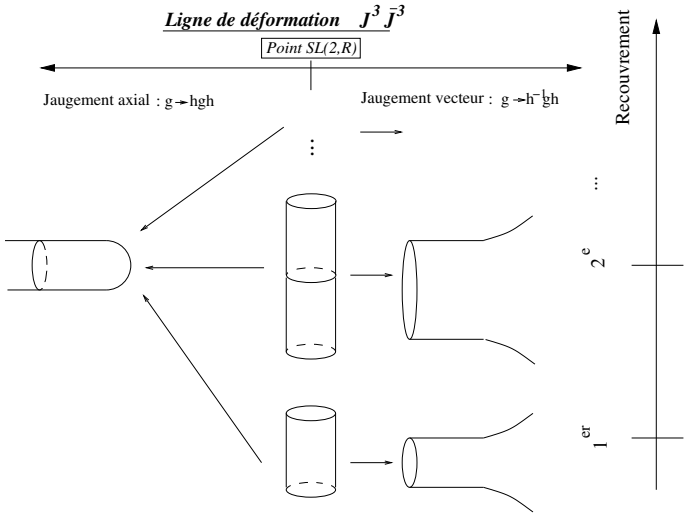

FIG. III.2. Ligne de déformations marginales de $SL(2,\mathbb{R})$ pour différents recouvrements.

L'étude des limites de théorie de quotient conduit aux résultats suivants, voir fig. III.2. Dans la limite $\lambda \to \infty$, nous observons – après un prolongement analytique pour rendre la limite bien définie – que le $U(1)$ que nous déformons découple de la théorie, et nous retrouvons la fonction de partition du quotient $SL(2,\mathbb{R})/U(1)|_{\text{axial}}$ d'où nous sommes partis. Au contraire, dans la limite $\lambda \to 0$, correspondant au jaugement vecteur, nous observons que le résultat dépend du recouvrement de $SL(2,\mathbb{R})$ choisi. Ainsi, en partant du n^{ième} recouvrement de $SL(2,\mathbb{R})$, nous obtenons le spectre du recouvrement n^{ième} de la trompette (fig. III.2), correspondant à un orbifold $\mathbb{Z}_n$ du modèle $SL(2,\mathbb{R})/U(1)|_{\text{axial}}$ habituel. Ainsi, seule la ligne de déformation pour le recouvrement simple de $SL(2,\mathbb{R})$ interpole entre les deux théories reliées naïvement par dualité T [78].

Remarques sur la régularisation de $SL(2,\mathbb{R})$. L'étude de cette ligne de déformation permet de réexaminer la question de la régularisation de la fonction de partition des cordes dans AdS_3. Premièrement, il est possible de régulariser l'intégration sur les modes zéro, simplement en déformant légèrement le modèle de WZW comme précédemment, avec $\lambda^2 = 1-\varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$. Cependant, nous savons que la géométrie est affectée radicalement par cette déformation. Le modèle sigma (III.4) possède désormais une singularité de courbure en $\rho = \operatorname{arccosh} 1/\sqrt{\varepsilon}$, «coupant» le bord de l'espace-temps anti-de Sitter. D'un point de vue holographique, cette régularisation d'une divergence *infrarouge* de la théorie des cordes (c.-à.-d. de basse énergie) correspond à une *coupure ultraviolette* (c.-à.-d. à haute énergie) de la théorie conforme duale dans l'espace-temps. Cette coupure brise explicitement l'invariance conforme, ce qui se manifeste par la coupure du bord d'anti-de Sitter.

[l] Il correspond en effet au renversement du temps dans le groupe de Lorentz $SO(2,1)$.

Il est aussi possible de définir un espace *anti-de Sitter euclidien*, non singulier, de la manière suivante. Comme nous l'avons déjà remarqué, le prolongement analytique de AdS_3 vers H_3^+ ne correspond pas à un prolongement des courants, mais des coordonnées. La signification de l'algèbre chirale $SL(2,\mathbb{R})$ n'est alors pas claire ; en outre la théorie obtenue est non-unitaire. Comme alternative à cette procédure, nous pouvons définir un espace AdS_3 euclidien par prolongement analytique sur les courants chiraux J^3 et $\bar{J}^3$. L'espace obtenu s'obtient formellement en continuant la ligne de déformation de $SL(2,\mathbb{R})$, eq (III.4) à $\lambda^2 = -1$. L'espace euclidien obtenu n'a qu'une isométrie $U(1) \times U(1)$ mais est non-singulier. Le spectre de la théorie est modifié par des termes quadratiques régularisant l'intégration sur les modes zéro, comme $\delta L_0 = 2m^2/k$ et $\delta \bar{L}_0 = 2\bar{m}^2/k$. Contrairement au modèle sigma sur H_3^+, nous obtenons ici une théorie conforme unitaire, avec une deux-forme de NS–NS réelle.

Publication n°1 : «Superstrings on NS5 backgrounds, deformed AdS_3 and holography».

Published by Institute of Physics Publishing for SISSA/ISAS

Received: *July 4, 2003*
Revised: *October 7, 2003*
Accepted: *October 13, 2003*

Superstrings on NS5 backgrounds, deformed AdS_3 and holography*

Dan Israël and Costas Kounnas

Laboratoire de Physique Théorique de l'Ecole Normale Supérieure†
24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France
E-mail: israel@lpt.ens.fr, kounnas@lpt.ens.fr

P. Marios Petropoulos

Centre de Physique Théorique, Ecole Polytechnique‡
91128 Palaiseau, France
E-mail: marios@cpht.polytechnique.fr

Abstract: We study a non-standard decoupling limit of the D1/D5-brane system, which interpolates between the near-horizon geometry of the D1/D5 background and the near-horizon limit of the pure D5-brane geometry. The S-dual description of this background is actually an exactly solvable two-dimensional (worldsheet) conformal field theory: {null-deformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\} \times \mathrm{SU}(2) \times T^4$ or $K3$. This model is free of strong-coupling singularities. By a careful treatment of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, based on the better-understood $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$ coset, we obtain the full partition function for superstrings on $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2) \times T^4/\mathbb{Z}_2$. This allows us to compute the partition functions for the $J^3\bar{J}^3$ and $J^2\bar{J}^2$ deformations, as well as the full line of supersymmetric null deformations, which links the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ conformal field theory with linear-dilaton theory. The holographic interpretation of this setup is a renormalization-group flow between the decoupled NS5-brane world-volume theory in the ultraviolet (little string theory), and the low-energy dynamics of super Yang-Mills string-like instantons in six dimensions.

Keywords: p-branes, Superstring Vacua, Conformal Field Models in String Theory, AdS-CFT and dS-CFT Correspondence.

*Research partially supported by the EEC under the contracts HPRN-CT-2000-00122, HPRN-CT-2000-00131, HPRN-CT-2000-00148.

†Unité mixte du CNRS et de l'Ecole Normale Supérieure, UMR 8549.

‡Unité mixte du CNRS et de l'Ecole Polytechnique, UMR 7644.

© SISSA/ISAS 2003

JHEP10(2003)028

Contents

1. Introduction **2**

2. A new decoupling limit for the D1/D5-brane system **4**
- 2.1 The supergravity solution and a partial near-horizon limit 4
- 2.2 Exact conformal-field-theory description: a null deformation of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 7

3. Bosonic strings on AdS_3 **9**
- 3.1 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ from $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_{\mathrm{A}}$ 9
- 3.2 Uncovering the spectrum 12
- 3.3 About the structure of the partition function 14

4. Superstrings on $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times T^4$ **17**
- 4.1 Extended superconformal algebras 17
  - 4.1.1 NS5 background 17
  - 4.1.2 NS5/F1 background 18
- 4.2 The partition function for superstrings on $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times K3$ 22

5. Marginal deformations of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ **23**
- 5.1 The $J^3\bar{J}^3$ deformation 23
- 5.2 The $J^2\bar{J}^2$ deformation 28
- 5.3 The null deformation 29

6. The supersymmetric null deformation of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)$ **32**
- 6.1 The $N = 2$ algebra of the deformed theory 32
- 6.2 Space-time supersymmetry 34
- 6.3 The partition function for superstrings on deformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)$ 35

7. Some comments about holography **36**
- 7.1 The D1/D5 setup and AdS/CFT 36
- 7.2 The null deformation of AdS_3 37
- 7.3 A little review of little string theory 38
- 7.4 Low energy limit, strong coupling and fundamental strings 39

8. Discussion and conclusions **41**

A. The $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ WZW model: a reminder **43**

B. Free-boson conformal blocks **47**

C. Derivation of the spectrum **49**
- C.1 The spectrum of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 49
- C.2 The spectrum of the null-deformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 52

JHEP10(2003)028

D. Theta functions **54**

1. Introduction

So far only few exact, solvable string supersymmetric backgrounds with a neat brane interpretation are known. The most popular is certainly the near-horizon limit of the NS5-brane background [1], which is an exact worldsheet conformal field theory based on $\mathrm{SU}(2)_k \times \mathrm{U}(1)_Q$ (a three-sphere plus a linear dilaton), and preserves 16 supercharges thanks to the $N = 4$ superconformal algebra on the worldsheet [2]. This background includes a strong-coupling region, that can be excised by distributing the five-branes either on a circle [3, 4] or on a spherical shell [5].

Another well-known exact string vacuum is the near-horizon geometry of NS5-branes wrapped on a four-torus (or on a $K3$ manifold) and fundamental strings [6]–[9]. In type-IIB string theory, one can use S-duality to map this solution to the D1/D5-brane system. The supersymmetry of this background is enhanced from 8 to 16 supercharges in the near-horizon limit. In this case the exact conformal field theory is $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)^4$. However, until recently, the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ CFT [10, 11] was poorly understood (see [12] and references therein). Substantial progress in the determination of the correct Hilbert space of this theory was made in [13, 14] and [15]. The key ingredient, first used in [16], was the observation that one must add all the representations obtained by the spectral flow of the affine algebra $\widehat{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})_L \times \widehat{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})_R$. This allows to reconcile the unitarity bound on the spin of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ representations ($0 < j \leq k/2$) with the requirement that the operator product algebra be closed.

A partition function for bosonic strings on thermal AdS_3 (i.e. $H_3^+/\mathbb{Z}$) was proposed in [14], by using the older result by [17]. In [18], the partition function for the axial coset $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_\mathrm{A}$ — whose target-space interpretation is a euclidean two-dimensional black hole [19] — was analyzed in the same spirit; it allowed to extract the full spectrum in agreement with previous semi-classical analysis. However, as a consequence of the non-compact nature of the group, these partition functions are plagued with a divergence, which should be handled with care in order to obtain sensible results. Finding a modular-invariant partition function for $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ that reproduces the spectrum found in [13] is to our knowledge still an open problem. One of the aims of the present paper is to fill this gap, which is a first step towards the complete understanding of superstrings on $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2) \times T^4$ or $K3$ as well as deformations of this background. The structure of the partition function will be understood from a different viewpoint, by using the orbifold language, and the supersymmetrization will be discussed by considering the extended superconformal algebra on the worldsheet.

The above two string backgrounds are in fact members of a family of conformal field theories interpolating between them both in space-time and in moduli space. These theories can be viewed as exact marginal deformations of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ WZW model, driven by a

JHEP10(2003)028

left-right combination of null currents (i.e. currents generating null subgroups) [20]. The endpoint of this deformation gives the linear dilaton and two light-cone free coordinates [21]. This geometry corresponds actually to a near-horizon limit for the NS5-branes *only* (such a limit was also mentioned in [22]). We explain in this paper how this background can be obtained by a particular decoupling limit of the NS5/F1 background, actually the *little-string-theory decoupling limit in the presence of macroscopic fundamental strings*. In the D-brane picture, this limit involves also the decompactification of the torus. An important achievement of the present work is that this model can also be viewed as a regularization of the strong-coupling region of the NS5-brane theory, which thus provides an alternative to [5], with a better-controlled worldsheet conformal field theory.

This class of backgrounds clearly preserves a fraction of target-space supersymmetry, which is generically one quarter, enhanced to one half on the endpoints of the deformation. An interesting feature of this deformation is that it is completely fixed by the requirement of $N = 2$ superconformal invariance on the worldsheet. We will show that it reduces to an orthogonal rotation between the worldsheet bosons and fermions interpolating between the $N = 2$ superconformal algebras of $\mathrm{U}(1)_Q \times \mathbb{R}^{1,1} \times \mathrm{SU}(2)$ and $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)$.

There has been in the last years a considerable renewal of interest for these theories because, besides their intrinsic interest as exact string backgrounds, they enter in several gauge/gravity dualities. The celebrated AdS/CFT correspondence [23] is a conjectured equivalence between the near-horizon geometry of the D3- or D1/D5-brane background (respectively $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ and $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times T^4$) and the extreme infra-red theory living on their world-volume, a superconformal gauge theory with maximal supersymmetry. In a similar fashion, a holographic duality between the decoupled NS5-brane world-volume theory — the so-called little string theory (LST) — and the linear-dilaton background has been conjectured in [24, 25].

The holographic interpretation of our setup is clear. The ultraviolet region of the holographic "gauge" dual corresponds to the asymptotic geometry, and is therefore the decoupled world-volume theory living on the NS5-branes. This theory is not a field theory, since there is no ultraviolet field-theoretic fixed point, and contains string-like excitations [26], hence the name "little string theory" [25]. In the type-IIB case, this theory is described in the infra-red by a gauge theory in six dimensions with $\mathrm{U}(N_5)$ gauge group and $N = (1,1)$ supersymmetry. The standard NS5 background corresponds to a renormalization-group flow towards a free fixed point in the infra-red, whose dual picture is a strong-coupling region in the gravitational background.

In the case of the null deformation of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, the addition of fundamental strings in the background corresponds in the dual theory to a configuration of string-like instantons of the low-energy gauge theory. Therefore the physics near the infra-red fixed point is governed by the dynamics of the moduli space of these instantons. The effective theory in 1+1 dimensions is superconformal, hence the dilaton stops running. This CFT has been studied intensively in the last years, in particular in the context of black-hole quantum mechanics (see [27] for references).

The paper is organized as follows. In section 2 we present the precise decoupling limit which leads to the background of interest, and explain why this background is an exact

JHEP10(2003)028

conformal theory. Section 3 is devoted to bosonic strings in AdS_3, with special emphasis to the derivation of a partition function for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, where the spectrum is read off unambiguously at finite or infinite radius. Then we introduce the worldsheet fermions and discuss in section 4 the superstrings in the background $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times T^4/\mathbb{Z}_2$ with particular attention to the construction of extended worldsheet superconformal algebras. In section 5 we give the partition functions for the $J^3\bar{J}^3$ and $J^2\bar{J}^2$ deformations of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, and study in detail its null deformation, which is the main motivation of this article. Null deformations of the supersymmetric background $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times T^4$ are extensively discussed in section 6, with a particular attention to the requirement of preserving $N = 2$ superconformal algebra. Section 7 gives a brief outlook of the holographic interpretation of this superstring vacuum.

2. A new decoupling limit for the D1/D5-brane system

In this section, we will present a decoupling limit for the D1/D5-brane system or conversely the NS5/F1 dual configuration. In this limit, we obtain a line of exact conformal theories, which turn out to be connected by a marginal deformation. Supersymmetry properties and spectra will be analyzed later.

2.1 The supergravity solution and a partial near-horizon limit

We consider the D1/D5-brane system in type-IIB string theory. The D5-branes extend over the coordinates $x, x^6, \ldots, x^9$, whereas the D1-branes are smeared along the four-torus spanned by $x^6, \ldots, x^9$. The volume of this torus is asymptotically $V = (2\pi)^4\alpha'^2 v$. With these conventions, in the sigma-model frame, the supergravity solution at hand reads (metric, dilaton and Ramond-Ramond field strength):

$$d\tilde{s}^2 = \frac{1}{\sqrt{H_1 H_5}}\left(-dt^2 + dx^2\right) + \sqrt{H_1 H_5}\left(dr^2 + r^2 d\Omega_3^2\right) + \sqrt{\frac{H_1}{H_5}}\sum_{i=6}^{9}(dx^i)^2\,, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{e}^{2\tilde{\phi}} = g_\mathrm{s}^2\frac{H_1}{H_5}\,, \tag{2.2}$$

$$F_{[3]} = -\frac{1}{g_\mathrm{s}}dH_1^{-1}\wedge dt\wedge dx + 2\alpha' N_5\Omega_3 \tag{2.3}$$

(Ω_3 is the volume form of the three-sphere) with

$$H_1 = 1 + \frac{g_\mathrm{s}\alpha' N_1}{v r^2}\,, \qquad H_5 = 1 + \frac{g_\mathrm{s}\alpha' N_5}{r^2}\,.$$

The four-torus can be replaced by a Calabi-Yau two-fold $K3$, provided that the charges of the D1 and D5 branes are of the same sign. The near-horizon ($r \to 0$) string coupling constant and the ten-dimensional gravitational coupling constant are

$$g_{10}^2 = g_\mathrm{s}^2\frac{N_1}{v N_5}\,, \qquad 2\kappa_{10}^2 = (2\pi)^7\mathrm{e}^{2\langle\tilde{\phi}\rangle}\alpha'^4\,.$$

JHEP10(2003)028

The standard decoupling limit of Maldacena, which leads to the $\mathrm{AdS}_3/\mathrm{CFT}_2$ correspondence [23], is

$$\begin{aligned} &\alpha' \to 0\,, \\ &U \equiv \frac{r}{\alpha'} \text{ fixed}\,, \\ &v \text{ fixed}\,. \end{aligned}$$

In this limit, the holographic description is a two-dimensional superconformal field theory living on the boundary of AdS_3 that corresponds to the world-volume theory of the D1/D5 system compactified on a T^4 whose volume is held fixed in Planck units [9, 28].

In order to reach a decoupling limit that corresponds to the near-horizon geometry for the D5-branes only, one has to consider the limit:

$$\begin{aligned} &\alpha' \to 0\,, \\ &U = \frac{r}{\alpha'} \text{ fixed}\,, \\ &g_{\mathrm{s}}\alpha' \text{ fixed}\,, \\ &\alpha'^2 v \text{ fixed}\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

The last condition is equivalent to keeping fixed the six-dimensional string coupling constant:

$$g_6^2 = \frac{g_{\mathrm{s}}^2}{v}\,.$$

Since the gravitational coupling constant vanishes in this limit, the world-volume theory decouples from the bulk. The geometrical picture of the setup is the following: as $v \to \infty$, the torus decompactifies and the density of D-strings diluted in the world-volume of the D5-branes goes to zero.

The string coupling remains finite in this near-horizon limit, while the asymptotic region is strongly coupled. A perturbative description, valid everywhere is obtained by S-duality. The supergravity solution (2.1), (2.2) in the S-dual frame reads:

$$ds^2 = \mathrm{e}^{-\tilde{\phi}} d\tilde{s}^2 = \frac{1}{g_{\mathrm{s}}} \left\{ \frac{1}{H_1} \left(-dt^2 + dx^2\right) + \alpha'^2 H_5 \left(dU^2 + U^2 d\Omega_3^2\right) + \sum_{i=6}^{9} (dx^i)^2 \right\}, \tag{2.9}$$

$$\mathrm{e}^{2\phi} = \frac{1}{g_{\mathrm{s}}^2} \frac{H_5}{H_1} \tag{2.10}$$

with (in the limit (2.7) under consideration)

$$H_1 = 1 + \frac{g_{\mathrm{s}} N_1}{\alpha' v U^2}\,, \qquad H_5 = \frac{g_{\mathrm{s}} N_5}{\alpha' U^2}\,. \tag{2.11}$$

The expression (2.3) for the antisymmetric tensor remains unchanged but it stands now for a NS flux and we will trade $F_{[3]}$ for $H_{[3]}$.

We now introduce the new variables:

$$u = \frac{1}{U}\,, \qquad X^{\pm} = X \pm T = \frac{x \pm t}{g_6 \sqrt{N_1 N_5}}\,,$$

and the following mass scale:

$$M^2 = \frac{g_{\mathrm{s}} N_1}{\alpha' v}\,. \tag{2.13}$$

JHEP10(2003)028

In these coordinates, the solution (2.9), (2.10) and (2.3), with (2.11), reads:

$$\begin{aligned}
\frac{ds^2}{\alpha'} &= N_5 \left\{ \frac{du^2}{u^2} + \frac{dX^2 - dT^2}{u^2 + 1/M^2} + d\Omega_3^2 \right\} + \frac{1}{\alpha' g_{\rm s}} \sum_{i=6}^{9} (dx^i)^2 \,, \\
{\rm e}^{2\phi} &= \frac{1}{g_{10}^2} \frac{u^2}{u^2 + 1/M^2} \,, \\
\frac{H_{[3]}}{\alpha'} &= N_5 \left\{ \frac{2u}{(u^2 + 1/M^2)^2} du \wedge dT \wedge dX + 2\Omega_3 \right\} .
\end{aligned} \tag{2.14}$$

This is the geometry of a deformed AdS_3 times an $S^3 \times T^4$. Asymptotically ($u \to 0$), it describes the near-horizon geometry of the NS5-brane background, $\mathrm{U}(1)_Q \times \mathbb{R}^{1,1} \times \mathrm{SU}(2) \times T^4$ *in its weakly coupled region.* In the $u \to \infty$ limit, the background becomes that of the NS5/F1 near-horizon: $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2) \times T^4$, with a finite constant dilaton. In some sense, we are regulating the strong-coupling region of the NS5-brane background by adding an appropriate condensate of fundamental strings. As we already advertised, this regularization is an alternative to the one proposed in [5]; it avoids the spherical target-space wall of the latter, and replaces it by a smooth transition, driven by a marginal worldsheet deformation, as will become clear in section 2.2.

Before going into these issues, we would like to address the question of supersymmetry. The configuration displayed in eqs. (2.14) preserves by construction one quarter of supersymmetry. Consider indeed IIB supergravity. The unbroken supersymmetries correspond to the covariantly constant spinors for which the supersymmetry variations of the dilatino and gravitino vanish:

$$\delta\lambda = \left[\gamma^\mu \partial_\mu \phi \; \sigma^3 - \frac{1}{6} H_{\mu\nu\rho} \gamma^{\mu\nu\rho} \right] \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0 \,, \tag{2.15}$$

$$\delta\psi_\mu = \left[\partial_\mu + \frac{1}{4} \left(w_\mu{}^{ab} - H_\mu{}^{ab} \sigma^3 \right) \Gamma_{ab} \right] \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0 \,. \tag{2.16}$$

where σ^3 is the third Pauli matrix. The two supersymmetry generators η_1 and η_2 have the same chirality: $\Gamma^{11}\eta_{1,2} = \eta_{1,2}$.

Let us for example concentrate on the dilatino variation, eq. (2.15):

$$\begin{aligned}
\delta\lambda &= \left[\Gamma^2 \, e_2^u \, \partial_u \phi \; \sigma^3 - H_{uxt} \, {\rm e}_1^u \, {\rm e}_2^x \, {\rm e}_0^t \, \Gamma^1\Gamma^2\Gamma^0 + H_{\theta\varphi\chi} \, {\rm e}_3^\theta \, {\rm e}_4^\varphi \, {\rm e}_5^\chi \, \Gamma^3\Gamma^4\Gamma^5 \right] \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \\
&= \left[\frac{1/M^2}{u^2 + 1/M^2} \Gamma^2 \; \sigma^3 - \frac{u^2}{u^2 + 1/M^2} \Gamma^1\Gamma^2\Gamma^0 + \Gamma^3\Gamma^4\Gamma^5 \right] \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

where Latin indices $a, b, \ldots$ refer to the tangent-space orthonormal bases, with $\{0,1,2\}$ and $\{3,4,5\}$ corresponding to the AdS_3 and S^3 submanifolds. The two $\mathrm{SO}(9,1)$ spinors are decomposed into $\mathrm{SO}(1,1) \times \mathrm{SO}(4) \times \mathrm{SO}(4)_T$:

$$\mathbf{16} \to (+, \mathbf{2}, \mathbf{2}) + (+, \mathbf{2}', \mathbf{2}') + (-, \mathbf{2}', \mathbf{2}) + (-, \mathbf{2}, \mathbf{2}') \,.$$

The first $\mathrm{SO}(4)$ is the isometry group of the transverse space (coordinates $x^{2,\ldots,5}$) and $\mathrm{SO}(4)_T$ corresponds to the four-torus.

JHEP10(2003)028

In the infinite-deformation limit, $M^2 \to 0$, this equation projects out the SO(4) spinors of one chirality:

$$\left[\sigma^3 + \Gamma^2\Gamma^3\Gamma^4\Gamma^5\right] \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0\,.$$

The surviving supersymmetry generators, are, for η_1, $(+, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ and $(-, \mathbf{2}, \mathbf{2}')$, and for η_2, $(+, \mathbf{2}', \mathbf{2}')$ and $(-, \mathbf{2}', \mathbf{2})$.

In the opposite limit of undeformed AdS_3, $M^2 \to \infty$, we have instead:

$$\left[1 - \Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3\Gamma^4\Gamma^5\right] \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

which projects out the SO(5, 1) spinor (coordinates $x^{0,1,6,\ldots,9}$ of the five-brane world-volume) of left chirality, i.e. keeps the representations $(+, \mathbf{2}', \mathbf{2}')$ and $(-, \mathbf{2}, \mathbf{2}')$ for both supersymmetry generators. For any finite value of the deformation, both projections must be imposed:

$$\left[\frac{1/M^2}{u^2 + 1/M^2}\left(\sigma^3 - \Gamma^2\Gamma^3\Gamma^4\Gamma^5\right) - \frac{u^2}{u^2 + 1/M^2}\left(\Gamma^0\Gamma^1 + \Gamma^2\Gamma^3\Gamma^4\Gamma^5\right)\right] \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

which breaks an additional half supersymmetry. The remaining supersymmetries are $(-, \mathbf{2}, \mathbf{2}')$ for η_1 and $(+, \mathbf{2}', \mathbf{2}')$ for η_2. The gravitino equation gives no further restrictions as it should (it reduces to the Killing-spinor equation on S^3 and deformed AdS_3), and we are eventually left with one quarter of supersymmetry. Supersymmetry enhancement occurs only for the limiting backgrounds — $\mathrm{AdS}_3 \times S^3$ or three-sphere plus linear dilaton, which preserve one half of the original supersymmetry.

2.2 Exact conformal-field-theory description: a null deformation of $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

We will now show that the deformed-AdS_3 factor in the background (2.14) is the target space of an exactly conformal sigma-model.

The action for a WZW model is in general

$$S = \frac{k}{16\pi}\int_{\partial\mathcal{B}} \mathrm{Tr}\left(g^{-1}dg \wedge *g^{-1}dg\right) + \frac{ik}{24\pi}\int_{\mathcal{B}} \mathrm{Tr}\left(g^{-1}dg\right)^3\,. \tag{2.18}$$

In the case of $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, one can use the Gauss decomposition for the group elements:

$$g = g_- g_0 g_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^- & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x^+ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

which provides the Poincaré coordinate system (see appendix A). With this choice, the sigma-model action reads:

$$S = \frac{k}{2\pi}\int d^2z \left(\frac{\partial u \bar{\partial} u}{u^2} + \frac{\partial x^+ \bar{\partial} x^-}{u^2}\right). \tag{2.20}$$

JHEP10(2003)028

As usual, the affine symmetry $\widehat{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})_L \times \widehat{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})_R$ is generated by weight-one currents. Since the group is non-compact, there are null directions, easily identified in the Poincaré coordinates. The corresponding $\widehat{\mathrm{U}}(1)_L \times \widehat{\mathrm{U}}(1)_R$ symmetries are linearly realized and generated by the following *null currents:*[1]

$$J = \frac{\partial x^+}{u^2}\,, \qquad \bar{J} = \frac{\bar{\partial} x^-}{u^2}. \tag{2.21}$$

The $(1,1)$ operator $J(z)\bar{J}(\bar{z})$, is truly marginal and can be used to generate a line of CFT's. Along this line, i.e. for finite values of the deformation parameter $1/M^2$, the geometry back-reaction must be taken into account. Integrating the corrections (much like in [29] and [30] for compact cases) one obtains the following null-deformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-sigma-model action [20]:

$$S = \frac{k}{2\pi}\int d^2z \left(\frac{\partial u \bar{\partial} u}{u^2} + \frac{\partial x^+ \bar{\partial} x^-}{u^2 + 1/M^2}\right). \tag{2.22}$$

The affine symmetry $\widehat{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})_L \times \widehat{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})_R$ is broken down to $\widehat{\mathrm{U}}(1)_L \times \widehat{\mathrm{U}}(1)_R$ and only the two null currents survive, which now read:

$$J = \frac{\partial x^+}{u^2 + 1/M^2}\,, \qquad \bar{J} = \frac{\bar{\partial} x^-}{u^2 + 1/M^2}\,. \tag{2.23}$$

The deformed target-space geometry and antisymmetric tensor are read off directly from eq. (2.22), and turn out to coincide with the deformed-AdS_3 factor in (2.14).

There is an alternative way to reach the same conclusion. As shown in [29], marginal deformations of a WZW model correspond to $O(d,d,\mathbb{R})$ transformations acting on the abelian isometries. In order to implement the latter in the case at hand, we rewrite the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW action as:

$$S = \frac{k}{2\pi}\int d^2z \left(\frac{\partial u \bar{\partial} u}{u^2} + \partial\left(x^+ x^-\right)\cdot E \cdot \bar{\partial}\begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}\right) \tag{2.24}$$

with

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1/u^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Acting on the corresponding background with the following $O(2,2,\mathbb{R})$ element[2] (see e.g. [31] for a review):

$$g = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ -\Theta/M^2 & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \qquad \text{with} \qquad \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

we recover (2.24) with

$$E' = g(E) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{u^2+1/M^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

which is precisely the null-deformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW action, eq. (2.22).

[1] Strictly speaking, these are not Cartan generators. See appendix A.

[2] The simplest setup for illustrating this transformation is flat background — compactified bosons: two light-cone coordinates with a constant B-field. The original lagrangian, $4\pi\mathcal{L} = \partial x^+ \bar{\partial} x^-$, transforms into $4\pi\tilde{\mathcal{L}} = \frac{M^2}{1+M^2}\partial x^+ \bar{\partial} x^-$; this amounts to a shift of radii.

JHEP10(2003)028

Notice finally that the deformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-WZW model under consideration can also be obtained as a coset by gauging a U(1) subgroup of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathrm{U}(1)$ [32]. We will come back later to this CFT to compute the one-loop partition function, which demands a careful treatment of global properties of the fields. The question of supersymmetry along these deformations needs also to be recast in the present, exact CFT framework, and will be discussed in section 6.

3. Bosonic strings on AdS_3

This section is devoted to the bosonic part of the AdS_3 (i.e. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$) component of the previous backgrounds. Despite many efforts and achievements (a short summary is given appendix A), our understanding is not completely satisfactory. We show here how to reach information about $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ starting from the better-understood $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_{\mathrm{A}}$ axial gauging. This enables us to provide a partition function for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, which carries full information about the spectrum. Under this form, the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ WZW model resembles a $\mathbb{Z}_N$ freely acting orbifold of $T^2\times S^1\times S^1$ over U(1), at large-N. Spectra and partition functions of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ deformations will be addressed in section 5.

3.1 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ from $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_{\mathrm{A}}$

There is a tight link between the spectrum of string theory on AdS_3 and the spectrum of the axial-gauged coset $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_{\mathrm{A}}$ — non-compact parafermions. The states in the coset are those of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ CFT with the restriction $J^3_n|\mathrm{state}\rangle=\bar{J}^3_n|\mathrm{state}\rangle=0$ for $n>0$, and the conditions on the zero modes $J^3_0+\bar{J}^3_0=-wk$ and $J^3_0-\bar{J}^3_0=n$. It is therefore possible to reconstruct the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ starting from its axial gauging, much like in the case of compact parafermions, where the $\mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)$ gauging enables for reconstructing the SU(2) WZW model [33]. In the non-compact case, however, the coset was shown to be a unitary conformal field theory [34], whereas this holds for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ only if Virasoro conditions are imposed [11, 35, 36, 37]. The physical states can be chosen, up to a spurious state, to be annihilated by the positive modes of the time-like current $J^3_{n>0}$, $\bar{J}^3_{n>0}$. This is the same as for the coset, except for the zero modes.

Our aim is here to show how a partition function for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ can be reached starting from the partition function of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_{\mathrm{A}}$ proposed in [18]. We start with the WZW action (2.18) for $g\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ parameterized with Euler angles (see eq. (A.8)). We will gauge the U(1) axial subgroup $g\to hgh$ with $h=\mathrm{e}^{i\lambda\sigma_2/2}$. The action for the gauged model is

$$S(g,A)=S(g)+\frac{k}{2\pi}\int d^2z\mathrm{Tr}\left(A\bar{\partial}gg^{-1}+\bar{A}g^{-1}\partial g-Ag\bar{A}g^{-1}-A\bar{A}\right).$$

The gauge field is Hodge-decomposed as:

$$A=\partial(\tilde{\rho}+\rho)+\frac{i}{\tau_2}(u_1\bar{\tau}-u_2)\,,\qquad \bar{A}=\bar{\partial}(\tilde{\rho}-\rho)-\frac{i}{\tau_2}(u_1\tau-u_2)\,.$$

After field redefinitions, the gauged-fixed action is given by an $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ times a compact boson, with global constraints and a (b,c) ghost system. This theory is unitary and the corresponding target space is euclidean.

JHEP10(2003)028

The partition function has been computed by using path-integral techniques in [17] and [18]. We would like to summarize the method and remind the final result. Following [18] the model is transformed, for technical convenience, into a U(1)-gauging of the — non-unitary — $H_3^+ = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\,\mathrm{SU}(2)$ CFT:

$$S = \frac{k}{2\pi}\int d^2z\left(\partial\phi\bar{\partial}\phi + (\partial\bar{v} + \bar{v}\partial\phi)\left(\bar{\partial}v + v\bar{\partial}\phi\right)\right) + \\ + \frac{k}{2\pi}\int d^2z\partial\rho\bar{\partial}\rho + \frac{1}{\pi}\int d^2z\left(b\bar{\partial}c + \tilde{b}\partial\tilde{c}\right).$$

The first part of the action is indeed the $H_3^+ = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\,\mathrm{SU}(2)$ sigma-model. The various fields acquire non-trivial holonomies from the gauge field, and can be decomposed as:

$$\phi = \hat{\phi} + \frac{1}{4\tau_2}\left[(u_1\bar{\tau} - u_2)z + (u_1\tau - u_2)\bar{z}\right],$$
$$\rho = \hat{\rho} + \frac{1}{4\tau_2}\left[(u_1\bar{\tau} - u_2)z + (u_1\tau - u_2)\bar{z}\right],$$
$$v = \hat{v}\exp -\frac{1}{4\tau_2}\left[(u_1\bar{\tau} - u_2)z + (u_1\tau - u_2)\bar{z}\right].$$

The fields v and $\bar{v}$ give the following contribution to the partition function:

$$\det\left|\partial + \frac{1}{2\tau_2}(u_1\bar{\tau} - u_2) + \partial\hat{\phi}\right|^{-2} = \det\left|\partial + \frac{1}{2\tau_2}(u_1\bar{\tau} - u_2)\right|^{-2}\exp\frac{2}{\pi}\int d^2z\partial\hat{\phi}\bar{\partial}\hat{\phi} \\ = 4\eta\bar{\eta}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(u_1\tau - u_2))^2}}{|\vartheta_1(u_1\tau - u_2|\tau)|^2}\exp\frac{2}{\pi}\int d^2z\partial\hat{\phi}\bar{\partial}\hat{\phi},$$

where $\vartheta_1(\nu|\tau)$ is an elliptic theta function (see appendix D). The periodicity properties of this determinant allows for breaking u_1 and u_2 into an integer and a compact real: $u_1 = s_1 + w$, $u_2 = s_2 + m$, $s_i \in [0,1)$. Taking finally into account the contributions of the free bosons ϕ and ρ and that of the ghosts, leads to the result [18]:

$$Z_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_\mathrm{A}} = 4\sqrt{k(k-2)}\,\eta\bar{\eta}\int d^2s\frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau - s_2))^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)|^2}\sum_{m,w=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{\tau_2}|(s_1+w)\tau - (s_2+m)|^2}. \tag{3.3}$$

We can recast the latter in terms of the free-boson conformal blocks (B.1):

$$Z_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_\mathrm{A}} = 4\sqrt{(k-2)\tau_2}\,\eta\bar{\eta}\int d^2s\frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau - s_2))^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)|^2}\sum_{m,w\in\mathbb{Z}}\zeta\begin{bmatrix}w + s_1\\ m + s_2\end{bmatrix}(k), \tag{3.4}$$

which meets our intuition that there are one compact and one non-compact bosons in the cigar geometry.

A few remarks are in order here. The integration over s_1, s_2 should be thought of as a constraint on the Hilbert space, which defines the non-compact parafermionic $\mathbb{Z}$ charge. The allowed parafermionic charges are $m = n/2$, $\bar{m} = -n/2$ for the unflowed sector, and $\tilde{m} = (n - wk)/2$ and $\tilde{\bar{m}} = -(n + wk)/2$ for the w-flowed sector. Another important issue is the logarithmic divergence originating from $s_1 = s_2 = 0$, and due to the non-compact nature of the group. Baring this divergence, the partition function (3.3) is modular-invariant, as can be easily checked by using the modular properties of Jacobi

JHEP10(2003)028

functions. Its content in terms of non-compact-parafermion discrete and continuous series can be further investigated (see [18] for details). Moreover, in the large-k (flat-space) limit, $Z_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_{\mathrm{A}}} \sim k(\pi\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta})^{-2}$ up to an infinite-volume factor:[3] we recover two free, uncompactified bosons.

We will now show that it is possible to recover a partition function for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ WZW model, starting from the above result for the coset $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_{\mathrm{A}}$. In many respects this is similar to what happens in the compact case: $\mathrm{SU}(2)_k$ can be reconstructed as $(\mathrm{SU}(2)_k/\,\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1)_{\sqrt{2k}})/\mathbb{Z}_k$, where $\mathbb{Z}_k$ is the compact-parafermionic symmetry of the coset $\mathrm{SU}(2)_k/\,\mathrm{U}(1)$, and acts freely on the compact $\mathrm{U}(1)_{\sqrt{2k}}$. To some extent, however, manipulations involving divergent expressions such as (3.3) can be quite formal, and require to proceed with care.

As we already pointed out, the states in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_{\mathrm{A}}$ are those of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ that are annihilated by the modes J^3_n and $\bar{J}^3_n$, $n>0$, and have J^3_0 and $\bar{J}^3_0$ eigenvalues $(n-wk)/2$ and $-(n+wk)/2$. Therefore, in order to reconstruct the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ partition function, we need to couple the coset blocks with an appropriately chosen lattice for the Cartan generators J^3 and $\bar{J}^3$ corresponding to a free time-like boson. This coupling should mimic the $\mathbb{Z}_k$ free action that appears in the $\mathrm{SU}(2)_k$ (see the discussion for the SU(2) in [38]), in a non-compact parafermionic version, though. Since the non-compact parafermions have a $\mathbb{Z}$ symmetry, we consider here a $\mathbb{Z}$ free action. By using the conformal blocks for free bosons given in appendix B (see eq. (B.1)), we reach the following partition function for the *universal cover* of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, in the lagrangian representation[4]

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} &= 4\sqrt{\tau_2}(k-2)^{3/2}\int d^2s\,d^2t\frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau-s_2))^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau-s_2|\tau)|^2}\times \\ &\quad\times\sum_{m,w,m',w'\in\mathbb{Z}}\zeta\begin{bmatrix}w+s_1-t_1\\ m+s_2-t_2\end{bmatrix}(k)\,\zeta\begin{bmatrix}w'+t_1\\ m'+t_2\end{bmatrix}(-k)\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Modular invariance is manifest in this expression, since it has the structure of a freely acting orbifold (this can also be easily checked by using formulas of appendices B and D). The extra $k-2$ factor comes along with the J^3, $\bar{J}^3$ contribution; it ensures the correct density scaling in the large-k limit, as explained in appendix B about eq. (B.3). We perform a Poisson resummation[5] on m and m', which are trade for n and n'. We define $n^{\pm}=n\pm n'$ and $w_{\pm}=w\pm w'$, and rewrite the partition function in the hamiltonian representation:

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} &= 4\sqrt{\tau_2}(k-2)^{3/2}\int d^2s\,d^2t\frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau-s_2))^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau-s_2|\tau)|^2}\sum_{n^{\pm},w_{\pm}\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{-i\pi\left(n^-(s_2-2t_2)+n^+s_2\right)}\times \\ &\quad\times\mathrm{e}^{-\frac{\pi\tau_2}{k}\left(n^+n^-+k^2(w_++s_1)(w_-+s_1-2t_1)\right)+i\pi\tau_1\left(n^-(w_-+s_1-2t_1)+n^+(w_++s_1)\right)}\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

[3]This factor comes as $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{x^2+y^2}\exp-\pi(x^2+y^2)$.

[4]To find the partition function for the N-th cover, one has to replace the $\mathbb{Z}$ orbifold by a $\mathbb{Z}_{Nk}$ orbifold: $t_1\to\gamma/Nk$, $t_2\to\delta/Nk$. Then the left and right spectral flow are $w_+^{L,R}=w_+\pm N\ell$.

[5]The resummation on m' is of course performed by means of analytic continuation, as usual when dealing with a time-like direction.

JHEP10(2003)028

Expression (3.6) becomes more transparent by introducing light-cone directions with corresponding left and right lattice momenta:

$$P^{+}_{\mathrm{L,R}} = \frac{n^{+}}{\sqrt{2k}} \pm \sqrt{\frac{k}{2}} w_{-}\,, \tag{3.7}$$

$$P^{-}_{\mathrm{L,R}} = \frac{n^{-}}{\sqrt{2k}} \pm \sqrt{\frac{k}{2}} w_{+}\,. \tag{3.8}$$

In terms of these unshifted[6] momenta the partition function at hand reads:

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} &= 4\sqrt{\tau_2}(k-2)^{3/2} \int d^2s\, d^2t \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau - s_2))^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)|^2} \times \\ &\times \sum_{n^{\pm}, w_{\pm}\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-i\pi\sqrt{\frac{k}{2}}\left(\left(P^{+}_{\mathrm{L}}+P^{+}_{\mathrm{R}}\right)s_2 + \left(P^{-}_{\mathrm{L}}+P^{-}_{\mathrm{R}}\right)(s_2-2t_2)\right)} \times \\ &\times q^{\frac{1}{2}\left(P^{+}_{\mathrm{L}}+\sqrt{\frac{k}{2}}(s_1-2t_1)\right)\left(P^{-}_{\mathrm{L}}+\sqrt{\frac{k}{2}}s_1\right)} \bar{q}^{\frac{1}{2}\left(P^{+}_{\mathrm{R}}-\sqrt{\frac{k}{2}}(s_1-2t_1)\right)\left(P^{-}_{\mathrm{R}}-\sqrt{\frac{k}{2}}s_1\right)}\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.2 Uncovering the spectrum

The latter expression is formally divergent. It is in fact a generalized function, which contains all the information about the spectrum. The integral over t_2 leads to the constraint $\delta_{n^-,0}$ and, due to the shift t_1, the "winding" $w_- - 2t_1$ is continuous. The momenta $P^-_{L,R}$ correspond therefore to a boson X^+ "compactified" at zero radius. Conversely, the other light-cone degree of freedom is compact. This *light-cone compactification* (for a related discussion, see [39]) is not so surprising. Indeed, the quantum numbers of a given state in the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ CFT, $j = \bar{j}$, $m + \bar{m}$, $m - \bar{m}$, w are respectively those of a Liouville field, a non-compact coordinate, and a compact one. Since we consider the universal cover of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, such that the time is non-compact, the only possibility is that one of the light-cone directions is compactified at radius $\sqrt{2k}$. Note also a particular feature of a two-dimensional lattice for two light-cone coordinates: if the radius of one light-cone coordinate shrinks to zero, the momenta and windings of the other light-cone coordinate are exchanged. This fact explains why the energy, as it appears in the partition function of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, is actually a (shifted) winding mode.

We will now proceed and analyze further the partition function given in eq. (3.9). After integrating out t_2 we obtain:

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} &= 4\sqrt{\tau_2}(k-2)^{3/2} \int d^2s \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau - s_2))^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)|^2} \sum_{n^+, w_+\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-i\pi n^+(s_2 - \tau_1(w_+ + s_1))} \times \\ &\times \int_0^1 dt_1 \sum_{w_-\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi\tau_2 k(w_+ + s_1)(w_- + s_1 - 2t_1)}\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

[6] Due to the shifted-orbifold structure of the partition function the relevant quantities are actually the shifted momenta:

$$P^{\mathrm{s}+}_{\mathrm{L,R}} = P^{+}_{\mathrm{L,R}} \pm \sqrt{\frac{k}{2}}(s_1 - 2t_1)\,, \qquad P^{\mathrm{s}-}_{\mathrm{L,R}} = P^{-}_{\mathrm{L,R}} \pm \sqrt{\frac{k}{2}} s_1\,.$$

JHEP10(2003)028

It is straightforward to show that the large-k limit of this partition function is, up to the usual infinite-volume factor, $Z \sim k^{3/2}\pi\left(\pi\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta}\right)^{-3}$. This was somehow built-in when writing (3.5) out of (3.4); it meets the expectations for ordinary flat-space spectrum.

It is possible to extract the spectrum of the theory at any finite k, and trace back its origin in terms of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ representations. We proceed along the lines of [14] and [18]. The precise derivation of the spectrum is given in appendix C. Here we only collect the results.

Discrete representations. The discrete representations appear in the range $\frac{1}{2} < j < \frac{k-1}{2}$. Their conformal weights are the following:

$$L_0 = -\frac{j(j-1)}{k-2} + w_+\left(-\tilde{m} - \frac{k}{4}w_+\right) + N\,,$$
$$\bar{L}_0 = -\frac{j(j-1)}{k-2} + w_+\left(-\tilde{\bar{m}} - \frac{k}{4}w_+\right) + \bar{N}\,,$$

with $\tilde{m} + \tilde{\bar{m}} = -k(w - t_1)$ and $\tilde{m} - \tilde{\bar{m}} = n$.

Continuous representations. The continuous spectrum appears with the density of states:

$$\rho(s) = \frac{1}{\pi}\log\epsilon + \frac{1}{4\pi i}\frac{d}{ds}\log\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - is - \tilde{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - is + \tilde{\bar{m}}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + is - \tilde{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + is + \tilde{\bar{m}}\right)}\,.$$

The weights of the continuous spectrum are

$$L_0 = \frac{s^2 + 1/4}{k-2} + w_+\left(-\tilde{m} - \frac{k}{4}w_+\right) + N\,,$$
$$\bar{L}_0 = \frac{s^2 + 1/4}{k-2} + w_+\left(-\tilde{\bar{m}} - \frac{k}{4}w_+\right) + \bar{N}\,,$$

with $\tilde{m}, \tilde{\bar{m}}$ as previously.

These results are in agreement with the unitary spectrum proposed in [13]. Here this spectrum was extracted straightforwardly from a modular-invariant partition function, constructed in the lorentzian AdS_3 .

Our aim is now to better understand the coupling between the oscillators and the zero modes of the light-cone coordinates, as appearing in the partition function. To this end, we write the algebra $\widehat{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})_L$ by using the free-field representation of non-compact parafermions [40, 41]. The currents read:

$$J^{\pm} = -\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\partial X \pm i\sqrt{\frac{k-2}{2}}\partial\rho\right)\mathrm{e}^{\pm i\sqrt{\frac{2}{k}}(X-T)}\,, \tag{3.12}$$

$$J^3 = i\sqrt{\frac{k}{2}}\partial T\,, \tag{3.13}$$

with the following stress tensor:

$$T = \frac{1}{2}(\partial T)^2 - \frac{1}{2}(\partial X)^2 - \frac{1}{2}(\partial\rho)^2 + \frac{1}{\sqrt{2(k-2)}}\partial^2\rho\,. \tag{3.14}$$

JHEP10(2003)028

There is a linear dilaton with background charge $Q = \sqrt{2/(k-2)}$ along the coordinate ρ. It contributes the central charge, which adds up to $c = 3 + 6/(k-2)$. The spectral flow symmetry can be realized by adding w_+ units of momentum along T:

$$J^3 \to J^3 - \frac{k}{2z} w_+ \,, \qquad J^\pm(z) \to z^{\mp w_+} J^\pm(z) \,.$$

The primary operators are those of a free-field theory with a peculiar zero-mode structure though, which is read off directly from the lattice component of the partition function, eq. (3.6):[7]

$$\exp\left\{ \sqrt{\frac{2}{k-2}} j\rho + i\sqrt{\frac{2}{k}} \left[\frac{k}{4} w_+ X^+ + \left(\tilde{m} - \frac{k}{4} w_+ \right) X^- + \frac{k}{4} w_+ \bar{X}^- + \left(\tilde{\bar{m}} - \frac{k}{4} w_+ \right) \bar{X}^+ \right] \right\}.$$

One should stress, however, that even if the theory can be represented with free fields, the descendants are constructed by acting with the modes of the affine currents: the oscillator number and the zero modes are shifted simultaneously. We are therefore lead[8] to use the the Lagrange multipliers s_1 and s_2 in the partition function (3.6) to enforce this twisting.

3.3 About the structure of the partition function

Our approach has been to build a modular-invariant partition function for $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ starting from that of the coset model $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_\mathrm{A}$. We have reached expression (3.5) or equivalently (3.9). These expressions are generalized functions which are formally divergent, as was originally the partition function for the coset, eq. (3.4). However, the presence of a divergence is not an obstruction for uncovering the spectrum encoded in the partition functions, as shown in [18] for the coset and here for the AdS_3. In this section, we would like to make contact with the — not fully satisfactory — expressions found in [12] and [13], explain why the methods used previously failed, and clarify the underlying freely acting orbifold structure.

We start with eq. (3.10) that we regulate by shifting $s_1\tau - s_2 \to s_1\tau - s_2 + \theta$ in the elliptic theta function. This breaks modular invariance unless, together with $\tau \to -1/\tau$, θ transforms into $-\theta/\tau$. Then, summation over w_- and integration over t_1 can be merged into an integration over the *light-cone energy* $E = k(w_- - 2t_1)$, which is performed after analytic continuation. A Poisson resummation over n^+ finally leads to the following result:

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} &= 4\frac{(k-2)^{3/2}}{k\sqrt{\tau_2}} \int d^2s \sum_{m_+,w_+\in\mathbb{Z}} \delta\left(w_+ + s_1\right) \delta\left(m_+ + s_2\right) \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau - s_2 + \theta))^2}}{\left|\vartheta_1(s_1\tau - s_2 + \theta|\tau)\right|^2} \\ &= 4\frac{(k-2)^{3/2}}{k\sqrt{\tau_2}} \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}\theta)^2}}{\left|\vartheta_1\left(\theta|\tau\right)\right|^2} \,. \end{aligned} \tag{3.17}$$

This result is precisely that of [12] and [13], up to an overall normalization.

[7] The fact that the roles of X^+ and X^- are reversed between the left-moving and the right-moving sectors will be explained in the fifth section. For the moment note that the partition function is invariant under: $\bar{X}^\pm \to \bar{X}^\mp$.

[8] This is close to the construction of gravitational waves, see [42].

JHEP10(2003)028

In unitary conformal field theories, the partition function is usually decomposed in characters of the chiral holomorphic and anti-holomorphic algebras:

$$Z_{\text{genus-one}}(\tau,\bar{\tau}) = \sum_{\text{L,R}} \mathcal{N}_{\text{L,R}} \chi_{\text{L}}(\tau) \bar{\chi}_{\text{R}}(\bar{\tau}) \,,$$

where the summation is performed over all left-right representations present in the spectrum with multiplicities $\mathcal{N}_{\text{L,R}}$, and $\chi(\tau)$ are the corresponding characters:

$$\chi(\tau) = \text{Tr}_{\text{rep}} q^{L_0 - \frac{c}{24}} \,.$$

This decomposition is very powerful for classifying models (i.e. multiplicities $\mathcal{N}_{\text{L,R}}$) by following the requirements of modular invariance. From the path-integral point of view, different modular-invariant combinations correspond to different choices for boundary conditions on the fields. However, this decomposition relies on the very existence of the characters. This holds for WZW models on compact groups. It does not apply to the case of non-compact groups, unless the group is abelian — free bosons. Then the zero-mode representations are one-dimensional, the characters of the affine algebra are well-defined, and the infinite-volume divergence decouples into an overall factor. For non-abelian groups, unitary[9] representations of the zero-modes are infinite-dimensional, and the characters of the affine algebra diverge. This degeneracy can be lifted by switching on a source coupled to some Cartan generator:

$$\chi(\tau,\theta) = \text{Tr}_{\text{rep}} q^{L_0 - \frac{c}{24}} \mathrm{e}^{2i\pi\theta J_0} \,.$$

Such a regularization is not fully satisfactory because it alters modular-covariance and does not allow to cure the characters of the continuous part of the spectrum. Moreover, the best these generalized characters can do, is to lead (after formal manipulations) to expressions like (3.17). The information carried by the latter is quite poor: it diverges at $\theta \to 0$ and the divergence cannot be isolated as a volume factor; the large-k limit is obscure; only the discrete part of the spectrum seems to contribute. These caveats are avoided in the integral representation we have presented here (eqs. (3.5) or (3.9)), which is closer in spirit with the work of [14] for the thermal AdS_3. Although divergent, it is modular-invariant, contains a nice spectral decomposition and has a well-defined large-k limit in agreement with our expectations.

To close this section, we would like to comment on the freely acting orbifold structure implemented in eq. (3.5). We consider for illustration the $\mathbb{Z}_N$ orbifold of a compact boson of radius R times a two-torus, presented in appendix B. The $\mathbb{Z}_N$ acts as a twist on T^2 and as a shift on the orthogonal S^1. The partition function for this model is given by eq. (B.13). Although it is not compatible with the symmetries of a two-dimensional lattice, we take formally the large-N limit of this expression. The first term of (B.13) vanishes while the

[9] If we give up unitarity, finite-dimensional zero-mode representations do exist, but Virasoro conditions do not eliminate all spurious states.

JHEP10(2003)028

sum over h, g in the second term becomes an integral over $s_1, s_2 \in [0,1]$. We also drop out the geometrical factor $\sin^2 \pi \frac{\Lambda(h,g)}{N}$ which is meaningless here, and find:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{Z_{\mathbb{Z}_N}}{N} = 4 \int d^2 s \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau - s_2))^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)|^2} \sum_{m,w\in\mathbb{Z}} \zeta \begin{bmatrix} w + s_1 \\ m + s_2 \end{bmatrix} (R^2) \,. \tag{3.21}$$

In order to make final contact with the partition function of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_\mathrm{A}$ (eq. (3.4)) we must identify R^2 with k, and mod out a non-compact free boson, i.e. multiply (3.21) by $\sqrt{\tau_2}\,\eta\bar{\eta}$. We insist that we do not claim that the theory $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_\mathrm{A}$ is the same as an freely acting orbifold of flat space, but only that the structure is very similar. An important difference is that the oscillators of the field X of the free-field representation (eq. (3.12)) are twisted and its zero modes shifted simultaneously. This is not possible in flat space.

One can similarly understand the orbifold structure underlying the full $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ model. To this end we consider the $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ model given in appendix B. In the formal large-N limit, all but the last term vanish in the partition function (B.14); the sums over h_1, g_1 and h_2, g_2 are trade for integrals over s_1, s_2 and $t_1, t_2 \in [0,1] \times [0,1]$:

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \frac{Z_{\mathbb{Z}_N\times\mathbb{Z}_N}}{N^2} &= 4\frac{1}{\eta\bar{\eta}} \int d^2 s\, d^2 t \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau - s_2))^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)|^2} \times \\ &\times \sum_{m_1,w_1,m_2,w_2\in\mathbb{Z}} \zeta \begin{bmatrix} w_1 + s_1 - t_1 \\ m_1 + s_2 - t_2 \end{bmatrix} (R_1^2)\; \zeta \begin{bmatrix} w_2 + t_1 \\ m_2 + t_2 \end{bmatrix} (R_2^2) \,. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Comparison with the partition function of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (eq. (3.5)) is possible provided we identify in (B.14), R_1^2 with k, R_2^2 with $-k$, and mod out a non-compact free boson, i.e. multiply eq. (3.22) by $\sqrt{\tau_2}\,\eta\bar{\eta}$.

The function $\vartheta_1(0,\tau)$, which is identically zero, never appears in the orbifold since its corresponds to the untwisted, unprojected sector and is replaced by the usual toroidal partition sum:

$$\frac{\Gamma_{2,2}(T,U)}{\eta^4\bar{\eta}^4} \,.$$

In the case of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (the $N \to \infty$ limit), the sum on the sectors is replaced by an integral over s_1 and s_2. The integration over the energy picks up precisely the untwisted, unprojected sector, as it gives the constraint $\delta^{(2)}(s_1\tau - s_2)$. We can rewrite formally the integrated partition function in terms of the functional determinant for the twisted bosons:

$$Z = \frac{(k-2)^{3/2}}{k\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta}} \int d^2 s\; \delta^{(2)}(s_1\tau - s_2)\; \det \left| \partial + \frac{1}{2\tau_2}\,(s_1\bar{\tau} - s_2) \right|^{-2} = \frac{(k-2)^{3/2}}{k\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta}}\; \det|\partial|^{-2} \,.$$

Thus we find that the partition function of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ is the same as a linear dilaton and two light-cone free coordinates.[10]

[10] As already stressed, there is a central charge deficit coming for the other CFT's defining the string theory which corresponds to the lowest-weight of Liouville continuous representations [2].

JHEP10(2003)028

4. Superstrings on $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times T^4$

We develop in this section the supersymmetry tools, which are needed for studying superstrings on NS5- or NS5/F1-brane backgrounds, as well as on the deformed AdS_3 geometries interpolating between them. This includes explicit realizations of extended $N = 2$ and $N = 4$ supersymmetry algebras. In principle it is possible to construct a space-time supersymmetric string background with $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathcal{M}$, where $\mathcal{M}$ is any $N = 2$ superconformal field theory with the correct central charge $\hat{c} = 4$. To make contact with the NS5/F1 background, we can choose either T^4 or a CFT realization of $K3$. We finally present the partition function of the model on $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times K3$.

4.1 Extended superconformal algebras

Since the $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times T^4$ background preserves one half of the supersymmetry, the worldsheet theory should factorize into an $N = 4$ superconformal theory with $\hat{c} = 4$ and an $N = 2$ free theory with $\hat{c} = 2$ [43]. An explicit realization of the relevant extended algebras is necessary in order to prove that supersymmetry survives at the string level; it is also important for the determination of the couplings between the bosonic and the fermionic degrees of freedom. However, as we will see, the straightforward application of the rules of $N = 2$ constructions is not the correct way to implement space-time supersymmetry in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)$.

4.1.1 NS5 background

We would like here to remind the construction of the "small" $N = 4$ superconformal algebra for the wormhole background [46], which is the simplest case beyond flat space [44]; it is also relevant for discussing the supersymmetric null deformation of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

The near-horizon geometry of the NS5-brane background is the target space of an exactly conformal sigma-model based on $\mathrm{SU}(2)_k \times \mathrm{U}(1)_Q \times \mathrm{U}(1)^6$ [1]. Let us concentrate on the $\mathrm{SU}(2)_k \times \mathrm{U}(1)_Q$ factor. The full algebra of this four-dimensional internal subspace consists of the bosonic $\mathrm{SU}(2)_k$, the Liouville coordinate, and four free fermions:

$$
\begin{aligned}
J^i(z)J^j(0) &\sim \frac{k}{2}\frac{\delta^{ij}}{z^2} + i\sum_{\ell=1}^{3}\frac{\epsilon^{ij\ell}J^\ell(0)}{z}\,, \quad i,j,\ell = 1,2,3\,,\\
\partial\rho(z)\partial\rho(0) &\sim -\frac{1}{z^2}\,,\\
\psi^a(z)\psi^b(0) &\sim \frac{\delta^{ab}}{z}\,, \quad a,b = 1,\ldots,4\,.
\end{aligned}
$$

The "small" $N = 4$ algebra is generated by twisting the "large" $N = 4$ algebra [45] based on the affine symmetry $\mathrm{SU}(2)_{k+1} \times \mathrm{SU}(2)_1 \times \mathrm{U}(1)$. The generators of that algebra read:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{k+2}\sum_{i=1}^{3} J^iJ^i - \frac{1}{2}\partial\rho\partial\rho - \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4}\psi^a\partial\psi^a\,,\\
G^i &= \sqrt{\frac{2}{k+2}}\left[-J^i\psi^4 + \sum_{j,\ell=1}^{3}\epsilon^{ij\ell}\left(J^j - \psi^4\psi^j\right)\psi^\ell\right] + i\psi^i\partial\rho\,,
\end{aligned}
$$

JHEP10(2003)028

$$
\begin{aligned}
G^4 &= \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sum_{i=1}^{3} \left[J^i \psi^i + \frac{1}{3} \sum_{j,\ell=1}^{3} \epsilon^{ij\ell} \psi^i \psi^j \psi^\ell \right] + i\psi^4 \partial\rho \,, \\
S^i &= \frac{1}{2} \left(\psi^4 \psi^i + \frac{1}{2} \sum_{j,\ell=1}^{3} \epsilon^{ij\ell} \psi^j \psi^\ell \right) , \\
\tilde{S}^i &= \frac{1}{2} \left(\psi^4 \psi^i - \frac{1}{2} \sum_{j,\ell=1}^{3} \epsilon^{ij\ell} \psi^j \psi^\ell \right) + J^i \,,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

where ρ is an ordinary bosonic coordinate.

The large $N = 4$ algebra is contracted to the required small $N = 4$, provided the ρ coordinate is promoted to a Liouville field by adding a background charge Q (i.e. a linear dilaton in the corresponding direction). The effect on the algebra (4.1) is the following:

$$
T \to T - Q\partial^2 \rho \,, \qquad G^a \to G^a - iQ\partial\psi^a \,.
$$

The background charge Q is such that we obtain a $\hat{c} = 4$ theory: $Q = \sqrt{2/(k+2)}$. The linear dilaton background compensates the central charge deficit of the $\mathrm{SU}(2)_k$.
We bosonize the self-dual combination of fermions:

$$
i\sqrt{2}\partial H^+ = \psi^1\psi^2 + \psi^4\psi^3 \,.
$$

It defines the R-symmetry SU(2) algebra *at level one* generated by the currents:

$$
(S^3, S^\pm) = \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \partial H^+, \mathrm{e}^{\pm i\sqrt{2}H^+} \right) . \tag{4.4}
$$

The resulting "small" ($N = 4$)-algebra generators are combined into two conjugate SU(2) R-symmetry doublets:

$$
G^+, \tilde{G}^- = \left[QJ^- \mathrm{e}^{\frac{i}{\sqrt{2}}H^-} + i \left(Q \left(J^3 + i\sqrt{2}\partial H^- \right) - i\partial\rho \right) \mathrm{e}^{\frac{-i}{\sqrt{2}}H^-} \right] \mathrm{e}^{\frac{\pm i}{\sqrt{2}}H^+} \,, \tag{4.5}
$$

$$
\tilde{G}^+, G^- = \left[QJ^+ \mathrm{e}^{\frac{-i}{\sqrt{2}}H^-} + i \left(Q \left(J^3 + i\sqrt{2}\partial H^- \right) + i\partial\rho \right) \mathrm{e}^{\frac{i}{\sqrt{2}}H^-} \right] \mathrm{e}^{\frac{\pm i}{\sqrt{2}}H^+} \,. \tag{4.6}
$$

4.1.2 NS5/F1 background

We now move to the $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times T^4$ background, which describes the near-horizon geometry of the NS5/F1-brane system. Our focus is the six-dimensional $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)$ subspace that we want to split into one $\hat{c} = 4$ system with $N = 4$ superconformal symmetry and one with $\hat{c} = 2$ with $N = 2$. The total central charge of this factor is given by:

$$
\hat{c} = \frac{3k_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}}{k_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} - 2} + \frac{3k_{\mathrm{SU}(2)}}{k_{\mathrm{SU}(2)} + 2} \,. \tag{4.7}
$$

Therefore to obtain a critical string background ($\hat{c} = 6$) for any level, we must choose

$$
k_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} - 4 = k_{\mathrm{SU}(2)} = k \,. \tag{4.8}
$$

JHEP10(2003)028

The $N=1$ algebra of the theory is generated by

$$T = \frac{1}{k+2} I_i I_j \delta^{ij} + \frac{1}{k-2} J_\alpha J_\beta \eta^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\psi_i \partial\psi^i - \frac{1}{2}\chi_\alpha \partial\chi^\alpha \,, \tag{4.9}$$

$$G = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \left[\psi_i I^i - \frac{i}{3}\epsilon_{ij\ell}\psi^i\psi^j\psi^\ell + \chi_\alpha J^\alpha - \frac{i}{3}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\chi^\alpha\chi^\beta\chi^\gamma \right] , \tag{4.10}$$

where I^i and J^α denote respectively the bosonic currents of SU(2) and SL(2, $\mathbb{R}$), ψ^i and χ^α the corresponding fermions, and $\eta^{\alpha\beta} = (+,+,-)$.[11]

The $N=2$ algebras of SL(2, $\mathbb{R}$) $\times$ SU(2)**.** The various currents provided by the SU(2) and SL(2, $\mathbb{R}$) algebras and the associated fermions allow for extracting one $N=2$, $\hat{c}=2$ algebra generated by:

$$G_2^\pm = \frac{1}{\sqrt{2(k+2)}} \left[\left(I^3 + \psi^+\psi^-\right) \mp \left(J^3 + \chi^+\chi^-\right) \right] \left(\psi^3 \pm \chi^3\right) , \tag{4.11}$$

$$J_2 = \psi^3\chi^3 \,. \tag{4.12}$$

We have combined the currents and the fermions as follows:

$$J^\pm = J^1 \pm iJ^2 \,, \qquad I^\pm = I^1 \pm iI^2 \,, \qquad \psi^\pm = \frac{\psi^1 \pm i\psi^2}{\sqrt{2}} \,, \qquad \chi^\pm = \frac{\chi^1 \pm i\chi^2}{\sqrt{2}} \,.$$

The remaining generators form another $N=2$ algebra decoupled from the first one [48]:

$$G_4^\pm = \frac{1}{\sqrt{k+2}} \left[I^\mp\psi^\pm - iJ^\mp\chi^\pm \right] , \tag{4.13}$$

$$S^3 = \frac{1}{2(k+2)} \left(2J^3 + (k+4)\chi^+\chi^- - 2I^3 + k\psi^+\psi^- \right) . \tag{4.14}$$

The various coefficients in S^3 are such that: (i) S^3 is regular with respect to $G_2^\pm$ in order to obtain two independent algebras, and (ii) $S^3(z)G_4^\pm(0) \sim \pm\, G_4^\pm(0)/2z$. The normalization of S^3 follows from $S^3(z)S^3(0) \sim 1/2z^2$. Therefore we rewrite it in terms of a free boson as follows:

$$\begin{aligned} \frac{i}{\sqrt{2}}\partial H^+ &= \frac{1}{2}\left(\psi^+\psi^- + \chi^+\chi^-\right) + \frac{1}{k+2}\left(J^3 + \chi^+\chi^- - I^3 - \psi^+\psi^-\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\psi^+\psi^- + \chi^+\chi^-\right) + \frac{1}{k+2}\left(\mathcal{J}^3 - \mathcal{I}^3\right) . \end{aligned} \tag{4.15}$$

We have introduced the total currents, including the fermionic part:

$$\mathcal{J}^3 = J^3 + \chi^+\chi^- \qquad \text{and} \qquad \mathcal{I}^3 = I^3 + \psi^+\psi^- \,, \tag{4.16}$$

respectively for SL(2, $\mathbb{R}$) and SU(2), both at level $k+2$.

We would like to extend the superconformal symmetry to $N=4$, as we expect from the target-space supersymmetry. This is possible provided the R-symmetry current $i\partial H^+$ corresponds to a free boson compactified at the self-dual radius, which seems indeed the

[11] Indices $i, j, \ldots$ and $\alpha, \beta, \ldots$ run both over $1, 2, 3$, and we raise them with δ^{ij} and $\eta^{\alpha\beta}$.

JHEP10(2003)028

case here since the total currents $\mathcal{J}^3$ and $\mathcal{I}^3$ are correctly normalized in eqs. (4.15), and can both be bosonized at radius $\sqrt{2(k+2)}$. However, in order to form the superconformal characters of SU(2) and SL(2, $\mathbb{R}$), the characters of these currents are coupled to the $N=2$ coset theories:

$$\frac{\mathrm{SU}(2)}{\mathrm{U}(1)} \times \mathrm{U}(1)_{R=\sqrt{\frac{k+2}{k}}} \qquad \text{and} \qquad \frac{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}{\mathrm{U}(1)} \times \mathrm{U}(1)_{R=\sqrt{\frac{k+2}{k+4}}}\,.$$

The coupling acts as a $\mathbb{Z}_{k+2}$ shift in the lattice of $\mathcal{J}^3$ and $\mathcal{I}^3$; it is similar to the discussion about the bosonic SL(2, $\mathbb{R}$). Therefore, the charges of the current S^3 are not those of a boson at self-dual radius.

Space-time supersymmetry. For a worldsheet superconformal theory with *accidental* $N=2$ superconformal symmetry, the space-time supersymmetry charges are obtained by spectral flow of the R-symmetry current [49]. However, this requires that the charges of all the physical states with respect to this U(1) current are *integral*. As we have seen above, the R-symmetry current of the $\hat{c}=4$ block, whose expression is given in (4.15) does not fulfill this requirement, because its charges depend on the eigenvalues of $\mathcal{I}^3$ and $\mathcal{J}^3$. Moreover, space-time supercharges based on the above $N=2$ current lead to incompatibilities with target-space symmetries [50]. These problems arise because, even in flat space, the space-time supercharges are constructed with the fermion vertex operators at zero momentum. In the present case, the space-time momentum enters directly in the $N=2$ charges and the SU(2) charges, though compact, cannot be considered as internal.

We will proceed as in [9]: we construct directly the space-time supercharges with the spin fields of the free fermions, which are BRST invariant and mutually local. This seems sensible, since the fermions in a critical string theory based on WZW models are free. The $N=2$ current of the theory:

$$J = J_2 + 2S^3 = \frac{2}{k+2}\left(\mathcal{J}^3 - \mathcal{I}^3\right) + \psi^+\psi^- + \chi^+\chi^- + \psi^3\chi^3\,,$$

differs from the free-fermionic one by the "null" contribution $(\mathcal{J}^3 - \mathcal{I}^3)/(k+2)$. We can of course wonder whether a more appropriate choice of $N=2$ structure exists. Another choice of complex structure does exist, and is provided by decomposing the SL(2, $\mathbb{R}$) as SL(2, $\mathbb{R}$)/$O(1,1)$ × U(1). It suffers, however, from the same problem.

The required projections in SL(2, $\mathbb{R}$) × SU(2) × U(1)^4**.** Here we come to the full background AdS$_3$ × S^3 × T^4. The worldsheet fermions of the T^4 are bosonized as:

$$\lambda^1\lambda^2 = \partial H_3\,, \qquad \lambda^3\lambda^4 = \partial H_4\,,$$

and those of SU(2) × SL(2, $\mathbb{R}$) as:

$$\psi^+\psi^- = i\partial H_2 \qquad \chi^+\chi^- = i\partial H_1\,, \qquad \psi^3\chi^3 = i\partial H_0\,.$$

In the $-1/2$ picture, the spin fields are

$$\Theta_\varepsilon(z) = \exp\left\{-\frac{\varphi}{2} + \frac{i}{2}\sum_{\ell=0}^{4}\varepsilon_\ell H_\ell\right\}, \tag{4.20}$$

where $\mathrm{e}^{-\varphi/2}$ is the bosonized superghost ground state in the Ramond sector [51].

JHEP10(2003)028

The standard GSO projection keeps all spin fields satisfying

$$\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1\,, \tag{4.21}$$

which is required by BRST invariance. In type-IIB superstrings, the GSO projection is the same on the spin fields from the right-moving sector, while for type-IIA it is the opposite. In the $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times T^4$ background, the fields (4.20) must obey the additional relation:

$$\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1\,. \tag{4.22}$$

Equivalently, for type-IIB, by using the GSO projection (4.21), the restriction on the allowed spin fields can be imposed on the fermions of the four-torus:

$$\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1\,. \tag{4.23}$$

Relations (4.22) or (4.23) ensure the absence of $1/z^{\frac{3}{2}}$ poles in the OPE of the spin fields with the $N = 1$ supercurrent (4.10) that would otherwise appear as a consequence of the torsion terms. Note also that in the superconformal algebra for the right-moving sector, the torsion terms come with a negative sign in the supercurrent, but the projection remains the same.

In order to preserve the $N = 1$ supercurrent, we must implement the projection (4.23) as a $\mathbb{Z}_2$ orbifold on the coordinates of the four-torus. This is why we are effectively dealing with the background $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times K3$. Then, from the S-dual viewpoint, the model we are describing consists of D5-branes wrapped on a $K3$ manifold and D-strings. It is known [53] that in this case there is an *induced* D-string charge which is the opposite of the total D5-brane charge. Indeed, including gravitational corrections to the Wess-Zumino term of the D5-brane action, generates the following D1-brane charge:

$$Q_1^{\mathrm{ind}} = N_5 \int \frac{c_2(K3)}{24} = -N_5\,.$$

Therefore the net number of D1-branes accompanying the D5-branes is $N_1 + N_5$. This has little effect on the S-dual model under consideration here, because the number of D-strings affects the value of the string coupling but not the worldsheet CFT.

In conclusion, we have seen that, in order to obtain a supersymmetric spectrum consistent with the BRST symmetry, we have to project out half of the space-time spinors from the Ramond sector. By modular invariance, this projection must act as an orbifold on the fermionic characters and also on the bosonic part to be consistent with superconformal invariance. For simplicity we have chosen to act on the fermions associated with the four-torus; therefore the background is now $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times T^4/\mathbb{Z}_2$. The $T^4/\mathbb{Z}_2$ orbifold can be replaced by another realization of $K3$ in CFT, such as a Gepner model [49]. Another way to realize the projection is to twist the fermionic characters associated with $\mathrm{AdS}_3 \times S^3$. In that case, we have to act nontrivially on the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ and $\mathrm{SU}(2)$ bosonic characters. Then the toroidal part of the background remains untwisted: the NS5-branes are wrapped on a T^4 rather than on a $K3$.

JHEP10(2003)028

4.2 The partition function for superstrings on $\mathbf{AdS}_3 \times S^3 \times K3$

We are now in position to write the partition function for type IIB superstrings on $\mathrm{AdS}^3 \times S^3 \times K3$. We must combine the various conformal blocks in a modular-invariant way, and impose the left and right GSO projections together with the additional projections dictated by the presence of torsion.

The standard orbifold conformal blocks are given in appendix B. The $\mathrm{SU}(2)_k$ partition function is chosen to be the diagonal modular-invariant combination [54] and the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ factor was discussed in section 3. Putting everything together, including the conformal and superconformal ghosts, we obtain:

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathrm{IIB}} = & \frac{\mathrm{Im}\tau}{\eta^2\bar{\eta}^2} Z_{\mathrm{SU}(2)} Z_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} \frac{1}{2} \sum_{h,g=0}^{1} Z^{\mathrm{twisted}}_{T^4/\mathbb{Z}_2} \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \times \\
& \times \frac{1}{2} \sum_{a,b=0}^{1} (-)^{a+b}\, \vartheta^2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \vartheta \begin{bmatrix} a+h \\ b+g \end{bmatrix} \vartheta \begin{bmatrix} a-h \\ b-g \end{bmatrix} \times \\
& \times \frac{1}{2} \sum_{\bar{a},\bar{b}=0}^{1} (-)^{\bar{a}+\bar{b}}\, \bar{\vartheta}^2 \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{bmatrix} \bar{\vartheta} \begin{bmatrix} \bar{a}+h \\ \bar{b}+g \end{bmatrix} \bar{\vartheta} \begin{bmatrix} \bar{a}-h \\ \bar{b}-g \end{bmatrix} .
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

We can read from the latter expression the spectrum of chiral primaries with respect to the space-time superconformal algebra [9]. The vertex operators for such left-moving states in the NS sector are given in the (-1) ghost picture by (see [57]):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}^I_j &= \mathrm{e}^{-\varphi}\, \lambda^I\, \Phi^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}_{j,\, m}\, \Phi^{\mathrm{SU}(2)}_{j-1,\, m'} \\
\mathcal{W}^{\pm}_j &= \mathrm{e}^{-\varphi} \left[\chi \Phi^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}\right]_{j\pm 1,\, m} \Phi^{\mathrm{SU}(2)}_{j-1,\, m'} \\
\mathcal{X}^{\pm}_j &= \mathrm{e}^{-\varphi}\, \Phi^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}_{j,\, m} \left[\psi \Phi^{\mathrm{SU}(2)}\right]_{j-1\pm 1,\, m'}
\end{aligned}
$$

where $\Phi^{\mathrm{SU}(2)}_{j',m'}$ and $\Phi^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}_{j,m}$ are respectively the bosonic primary fields of the holomorphic current algebras $\mathrm{SU}(2)_k$ and $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_{k+4}$. They are combined with the worldsheet fermions into representations of $\mathrm{SU}(2)_{k+2}$ and $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_{k+2}$.

The above states live in the five-plus-one dimensional world-volume of the NS5-branes. In order to obtain the closed string spectrum, we tensorize this left-moving spectrum with the right-moving one, and impose the $\mathbb{Z}_2$ projection on the torus. Additional states localized in one-plus-one dimensions are constructed with the twisted sectors of the orbifold:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{W}}^{\pm}_j &= \mathrm{e}^{-\varphi}\, \mathcal{V}^{\,tw} \left[\psi \Phi^{\mathrm{SU}(2)}\right]_{j\pm 1,\, m} \Phi^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}_{j-1,\, m'} , \\
\tilde{\mathcal{X}}^{\pm}_j &= \mathrm{e}^{-\varphi}\, \mathcal{V}^{\,tw}\, \Phi^{\mathrm{SU}(2)}_{j,\, m} \left[\chi \Phi^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}\right]_{j-1\pm 1,\, m'} ,
\end{aligned}
$$

where $\mathcal{V}^{\,tw}$ are the twist fields of the NS sector.

JHEP10(2003)028

5. Marginal deformations of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

The $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ geometry in Euler (global) coordinates reads:[12]

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 - \cosh^2 r dt^2 + \sinh^2 r d\phi^2 \,, \\ B &= \cosh^2 r d\phi \wedge dt \end{aligned}$$

and there is no dilaton. Strictly speaking the time coordinate t is 2π-periodic for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, but non-compact for its universal covering (AdS_3); ϕ is 2π-periodic and $r > 0$.

Conformal deformations of this background are generated by truly marginal operators i.e. dimension-$(1,1)$ operators that survive their own perturbation. In the presence of holomorphic and anti-holomorphic current algebras, marginal operators are constructed as products $J^\alpha \bar{J}^\beta$, not all being necessarily truly marginal. In the SU(2) WZW model, nine marginal operators do exist. However, they are related by $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)$ symmetry to one of them, say $J^3\bar{J}^3$. Hence, only one line of continuous deformations appears.

The situation is different for $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, because here one cannot connect any two vectors by an $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ transformation. This is intimately related to the existence of several families of conjugacy classes: the elliptic and hyperbolic, which correspond to the two different choices of *Cartan* subalgebra, and the parabolic corresponding to the *null* subalgebra. Three different truly marginal left-right-symmetric deformations are possible, leading therefore to three families of continuously connected conformal sigma models. Each of them preserves a different $\mathrm{U}(1)_L \times \mathrm{U}(1)_R$ subalgebra of the undeformed WZW model.

The marginal deformations of SU(2) have been thoroughly investigated [29, 30, 56] with respect to: (i) the identification with the $(\mathrm{SU}(2)_k/\,\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)_{\sqrt{2k\alpha}})/\mathbb{Z}_k$, where $\mathrm{SU}(2)_k/\,\mathrm{U}(1)$ is the gauging of the $\mathrm{SU}(2)_k$ WZW model, and α is the deformation parameter; (ii) the geometrical (sigma-model) interpretation in terms of metric, torsion and dilaton backgrounds; (iii) the determination of the toroidal partition function and the spectrum as functions of R. For the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ deformations, the available results are less exhaustive, especially concerning the spectrum and the partition function [20, 30, 55]. Our aim is to understand the spectra — partition functions — as well as the issue of supersymmetry, when these deformations appear in a more general set up like the NS5/F1.

5.1 The $J^3\bar{J}^3$ deformation

The $J^3\bar{J}^3$ deformation of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ is the one that naturally appears by analytically continuing the deformed SU(2). It was analyzed in [30]. Much like the latter, the metric, antisymmetric tensor and dilaton can be obtained by considering the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathrm{U}(1)/\,\mathrm{U}(1)$ coset, where the U(1) in the product is compact with a radius related to the deformation parameter, and the gauged one is a diagonal combination of the extra U(1) with the "time-

[12] We systematically set the AdS_3 radius to one in the expressions for the background fields. One has to keep in mind, however, that a factor k is missing in the metric. This plays a role when performing T-dualities by applying the Buscher rules [58] because it can affect the periodicity properties of some coordinates.

JHEP10(2003)028

like" U(1) in the SL(2, $\mathbb{R}$), defined by $h = \exp i\frac{\lambda}{2}\sigma^2$. The geometry corresponding to the $J^3\bar{J}^3$-deformed SL(2, $\mathbb{R}$), with deformation parameter $\alpha - 1 > 0$, is thus found to be

$$ds^2 = dr^2 + \frac{-\cosh^2 r dt^2 + \alpha \sinh^2 r d\phi^2}{\alpha \cosh^2 r - \sinh^2 r} \tag{5.1}$$

$$B = \frac{\alpha \cosh^2 r d\phi \wedge dt}{\alpha \cosh^2 r - \sinh^2 r}\,, \tag{5.2}$$

with dilaton

$$\mathrm{e}^{2\Phi} = \mathrm{e}^{2\Phi_0} \frac{\alpha - 1}{\alpha \cosh^2 r - \sinh^2 r}\,. \tag{5.3}$$

The scalar curvature of this geometry is

$$R = 2\frac{\left(1 - \tanh^2 r\right)\left(2\left(\alpha^2 - \tanh^2 r\right) - 5\alpha\left(1 - \tanh^2 r\right)\right)}{\left(\alpha - \tanh^2 r\right)^2}\,.$$

Notice that the background fields are usually expected to receive $1/k$ corrections; hence, they are valid semi-classically only, except when they are protected by symmetries as in the unperturbed WZW models.

At $\alpha = 1$ we recover the AdS_3 metric and antisymmetric tensor. For $\alpha \geq 1$, the geometry is everywhere regular whereas for $\alpha < 1$ the curvature diverges at $r = \operatorname{arctanh}\sqrt{\alpha}$. Similarly, the string coupling $g_\mathrm{s} = \exp\Phi$ is finite everywhere for $\alpha \geq 1$ and blows up at $r = \operatorname{arctanh}\sqrt{\alpha}$ for $\alpha < 1$. This means that the semi-classical approximation fails for $\alpha < 1$. The string theory is however well defined. It is actually related by T-duality to the range $\alpha > 1$ as will be discussed later.

The two endpoints of the deformed background are remarkable:

The $\alpha \to \infty$ limit. In this case the background fields become:

$$ds^2 = dr^2 + \tanh^2 r d\phi^2 - \frac{dt^2}{\alpha} \tag{5.5}$$

$$\mathrm{e}^{-\Phi} = \mathrm{e}^{-\Phi_0} \cosh r \tag{5.6}$$

with no antisymmetric tensor. This is the *cigar* geometry times a free time-like coordinate. The cigar — euclidean black hole [19] — is the axial gauging ($g \to hgh$) of the U(1) subgroup defined by $h = \exp i\frac{\lambda}{2}\sigma^2$. It generates time translations (see eq. (A.9)) and acts without fixed points. The corresponding geometry is regular and the 2π-periodicity of ϕ inherited from the SL(2, $\mathbb{R}$) ensures the absence of conical singularity.

The $\alpha \to 0$ limit. Now we recover the *trumpet* plus a free time-like coordinate:

$$ds^2 = dr^2 + \coth^2 r dt^2 - \alpha d\phi^2 \tag{5.7}$$

$$\mathrm{e}^{-\Phi} = \mathrm{e}^{-\Phi_0} \sinh r\,. \tag{5.8}$$

The trumpet is the vector gauging ($g \to hgh^{-1}$) of the same U(1), and generates now rotations around the center (see eq. (A.9)). Throughout this gauging the time coordinate becomes space-like and vice-versa. The subgroup acts with fixed points, and this accounts

JHEP10(2003)028

for the appearance of a singularity at $r = 0$, which is present no matter the choice for the periodicity of t (in fact this coordinate is not periodic if we start from the universal covering of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$). Notice also that the time coordinate ϕ is compact, but infinitely rescaled though.

A similar phenomenon occurs in the $J^3\bar{J}^3$ deformation line of the SU(2) WZW model. The two endpoints are the axial and vector gaugings of SU(2) by a U(1), times a free boson, at zero or infinite radius. Axial and vector gaugings are identical in the compact case [38]. They are T-dual descriptions of the same CFT, whose background geometry is the *bell*. Therefore, in the compact case, there is a real T-duality relating large and small deformation parameters. The situation is quite different in the non-compact case.

We would like now to better understand the algebraic point of view and determine the partition function of the deformed theory at any α. To all orders in the deformation parameter, the deformation acts only on the charge lattice of the Cartan subalgebra along which the WZW theory is deformed. Therefore, as in the SU(2) case, the deformation at hand corresponds to a shift of the "radius" of the $J^3, \bar{J}^3$ lattice: $\sqrt{2k} \to \sqrt{2k\alpha}$. The form (3.5) of the original $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ partition function enables us to implement this radius shift in the time-like lattice with the modular-invariant result:

$$\begin{aligned} Z_{3\bar{3}}(\alpha) = 4\sqrt{\tau_2}(k-2)^{3/2} \int d^2s\, d^2t \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau - s_2))^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)|^2} \times \\ \times \sum_{m,w,m',w'\in\mathbb{Z}} \zeta\begin{bmatrix} w+s_1-t_1 \\ m+s_2-t_2 \end{bmatrix}(k)\, \zeta\begin{bmatrix} w'+t_1 \\ m'+t_2 \end{bmatrix}(-k\alpha)\,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

We can first expand the spectrum around the symmetric $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ point (i.e. for $\alpha = 1+\varepsilon$, $|\varepsilon| \ll 1$). It allows to express the spectrum in terms of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ quantum numbers. Using the same techniques as in appendix C, we first perform a Poisson resummation, and integrate over t_2. We find the exponential factor:

$$\begin{aligned} \exp\Bigg\{ &-\pi\tau_2\varepsilon\left[\frac{n^2}{k} - k(w_+ - (w-t_1))^2\right] - \\ &- 2\pi\tau_2 w_+\left(k(w-t_1) - \frac{k}{2}w_+\right) - 2\pi\tau_2 s_1(q+\bar{q}+1+k(w-t_1)) + \\ &+ 2i\pi s_2(q-\bar{q}-n) - (k-2)\pi\tau_2 s_1^2 + 2i\pi\tau_1(w_+ + s_1)n \Bigg\}\,. \end{aligned}$$

The second and third lines are exactly the same as the undeformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ and lead to the same analysis. For $\varepsilon \ll 1$, the first line gives simply a shift on the weights of the operators according to their J_0^3,$\bar{J}_0^3$ eigenvalues:

$$\begin{aligned} L_0^\varepsilon &= L_0 - \frac{\varepsilon}{k}\left(\tilde{m} + \frac{k}{2}w_+\right)\left(\tilde{\bar{m}} + \frac{k}{2}w_+\right), \\ \bar{L}_0^\varepsilon &= \bar{L}_0 - \frac{\varepsilon}{k}\left(\tilde{m} + \frac{k}{2}w_+\right)\left(\tilde{\bar{m}} + \frac{k}{2}w_+\right). \end{aligned}$$

JHEP10(2003)028

In terms of the unflowed eigenvalues: $m = \tilde{m} + kw_+/2$, $\bar{m} = \tilde{\bar{m}} + kw_+/2$, the deformation term is

$$\delta h = \delta \bar{h} = -\frac{\varepsilon m \bar{m}}{k}$$

It breaks of course the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_L \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_R$ symmetry of the CFT.

In the limits $\alpha \to 0$ or ∞, the $J^3, \bar{J}^3$ lattice decouples. We then recover a free time-like boson (of zero or infinite radius) times an $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ coset. By using the large/small-radius limits presented in appendix B, we can trace the effect of these limits at the level of the partition function:[13]

$$Z_{3\bar{3}}(\alpha) \underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} \frac{k-2}{\sqrt{k\tau_2}\eta\bar{\eta}} Z_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_\mathrm{A}} \tag{5.10}$$

with $Z_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_\mathrm{A}}$ given in (3.4). This is precisely the geometrical expectation since the large-α limit of the background (5.1)–(5.3) is the cigar, eqs. (5.5), (5.6) describing the semiclassical geometry of the axial U(1) gauging of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Similarly, we find

$$Z_{3\bar{3}}(\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 4\sqrt{k\alpha}(k-2)^{3/2} \int d^2s\, d^2t \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau - s_2))^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)|^2} \sum_{m,w\in\mathbb{Z}} \zeta\begin{bmatrix} w + s_1 - t_1 \\ m + s_2 - t_2 \end{bmatrix}(k)\,. \tag{5.11}$$

In terms of background geometry, this limit describes the trumpet (eqs. (5.7)and (5.8)) times a free time-like coordinate. We can therefore read off from expression (5.11) the partition function of the vector coset:

$$Z_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_\mathrm{V}} = 4(k-2)^{3/2}\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta} \int d^2s\, d^2t \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau - s_2))^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)|^2} \sum_{m,w\in\mathbb{Z}} \zeta\begin{bmatrix} w + s_1 - t_1 \\ m + s_2 - t_2 \end{bmatrix}(k)\,. \tag{5.12}$$

The spectrum of primary fields of this coset can be computed straightforwardly, and reads:

$$L_0^{\mathrm{vector}} = \bar{L}_0^{\mathrm{vector}} = -\frac{j(j-1)}{k-2} + \frac{\mu^2}{k}\,, \qquad \text{with} \qquad \mu = -\frac{k}{2}(w - t_1) \in \mathbb{R}\,, \tag{5.13}$$

both for continuous and discrete representations. The gaussian variable $w - t_1$ can be integrated out, and leads to the partition function:

$$Z_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_\mathrm{V}} = 4\frac{(k-2)^{3/2}}{\sqrt{k}}\eta\bar{\eta} \int d^2s \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau - s_2))^2}}{|\vartheta_1\,(s_1\tau - s_2|\tau)|^2}\,. \tag{5.14}$$

The cigar and trumpet geometries are semi-classically T-dual: they are related by Buscher duality [58]. Any two points $(\alpha, 1/\alpha)$ in the above line of deformations are in fact connected by an element of $O(2,2,\mathbb{R})$ [30]. However, recalling the spectrum of primaries of the axial coset:

$$L_0^{\mathrm{axial}} = -\frac{j(j-1)}{k-2} + \frac{(\frac{n}{2} - \frac{kw}{2})^2}{k}\,, \qquad \text{with} \qquad \bar{L}_0^{\mathrm{axial}} = -\frac{j(j-1)}{k-2} + \frac{(\frac{n}{2} + \frac{kw}{2})^2}{k}\,, \tag{5.15}$$

[13] The $\alpha \to \infty$ limit requires analytic continuation because the lattice is time-like.

JHEP10(2003)028

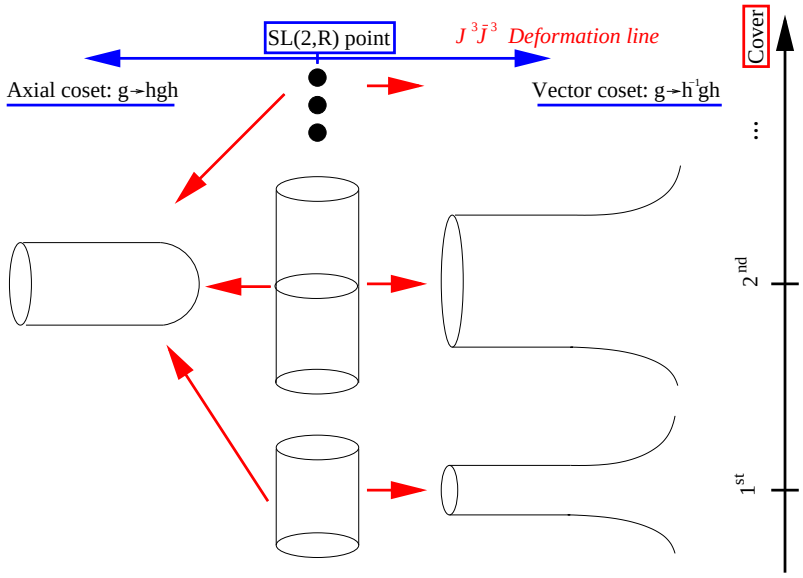

Figure 1: The T-duality for the different covers of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

we observe that they are different from the vector ones. Our previous discussion gives the explanation for this apparent "failure" of T-duality. The coordinate ϕ in the cigar metric (5.5) inherits the $2\pi\sqrt{2k}$ periodicity (in the asymptotic region $r \to \infty$) from the angular coordinate of AdS_3, irrespectively of the cover of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ under consideration; therefore the corresponding lattice in the partition function is compact with radius $\sqrt{2k}$. However, the t coordinate of the trumpet metric (5.7) is $2\pi N\sqrt{2k}$-periodic, for the N-th cover of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (see figure 1). Consequently, since our original choice was the universal cover of the algebra, the spectrum we found — eq. (5.13) — corresponds to the "universal cover" of the trumpet, i.e. with a non-compact transverse coordinate.

The spectrum of the above coset theories has been studied in [59]. In that work, axial and vector cosets were argued to be T-dual, but the definition used for the T-duality amounts to exchange the momenta and winding modes of the physical states. In the case of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, this is equivalent to the more rigorous definition of T-duality — residual discrete symmetry of a broken gauge symmetry — *only* on the *single cover* of the group manifold. Indeed, if we consider the single cover of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, we obtain in the limits $\alpha \to 0$ and $\alpha \to \infty$ the same spectrum of primaries for the vector and axial cosets, eq. (5.15), but with different constraints: $\tilde{m} \pm \tilde{\bar{m}} = n$, $\tilde{m} \mp \tilde{\bar{m}} = -kw$, where plus and minus refer to the vector and axial cosets respectively.

Before closing this section, we would like to comment on the unitarity of the undeformed model. To this end, we consider a small deformation parameterized by ε:

$$\alpha = 1 - \varepsilon\,, \quad \varepsilon > 0\,.$$

Then the quadratic term in eq. (5.10) is space-like and enables us to perform the energy integration *without* any analytic continuation (in fact, we slightly rotate the energy direction into the light-cone). In the limit $\varepsilon \to 0$, we obtain a delta-function that gives the

JHEP10(2003)028

trivial partition function previously discussed. It is possible to analyze this result from a different perspective. We decompose the characters of the discrete representations e.g., by using a non-compact generalization of the Kač-Peterson formula [60]: $\chi^{j,+}_{\mathrm{SL}(2,R)}(\tau) = \sum_{m\in\mathbb{N}} c^j_m q^{-(j+m)^2/k}$ with the string functions $c^j_m = q^{-j(j-1)/(k-2)+(j+m)^2/k} \times$ (oscillators). Changing the Cartan radius $\sqrt{2k} \to \alpha\sqrt{2k}$, $\alpha < 1$, all characters become convergent.

5.2 The $J^2\bar{J}^2$ deformation

The operator $J^2\bar{J}^2$ is also suitable for marginal deformations of the theory. It is not equivalent to $J^3\bar{J}^3$ because it corresponds to a choice of *space-like* Cartan subalgebra instead of a time-like one. Conversely the corresponding deformation can be realized as $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{U}(1)/\,\mathrm{U}(1)$ where the gauged U(1) is now a diagonal combination of the extra U(1) factor with $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ elements of the type $h = \exp -\frac{\lambda}{2}\sigma^3$.

Owing to the previous discussion, we easily determine the partition function at any value of the deformation parameter. This is realized by deforming the corresponding cycle in the Cartan torus, which amounts in shifting the radius of the space-like J^2, $\bar{J}^2$ lattice. In order to present this partition function in a form closer to the one of the $J^3\bar{J}^3$ deformation, we diagonalize J^2 instead of J^3. This is achieved by redefining the lattice variables in eq. (3.5) as:

$$\begin{aligned} w + s_1 - t_1 &\to w - t_1\,, \qquad & w' + t_1 &\to w' + t_1 + s_1\,, \\ m + s_2 - t_2 &\to m - t_2\,, \qquad & m' + t_2 &\to m' + t_2 + s_2\,. \end{aligned}$$

Then we write the following partition function for the $J^2\bar{J}^2$ deformation:

$$\begin{aligned} Z_{2\bar{2}}(\alpha) = 4\sqrt{\tau_2}(k-2)^{3/2} \int d^2s\, d^2t \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau - s_2))^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)|^2} \times \\ \times \sum_{m,w,m',w'\in\mathbb{Z}} \zeta\begin{bmatrix} w - t_1 \\ m - t_2 \end{bmatrix}(k\alpha)\, \zeta\begin{bmatrix} w' + t_1 + s_1 \\ m' + t_2 + s_2 \end{bmatrix}(-k)\,. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Getting the effective geometry is interesting *per sei* but its systematic analysis goes beyond the scope of the present work. For extreme deformations, a space-like coordinate is factorized, and we are left with an $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ coset with lorentzian target space: the lorentzian two-dimensional black hole.

Again the $\alpha \to 0$ and $\alpha \to \infty$ limits are related by T-duality, which at the level of the semi-classical geometry describe various space-time regions of the black hole [59]. For $\alpha \to \infty$ we obtain:

$$Z_{2\bar{2}}(\alpha) \underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{k\alpha\tau_2}\eta\bar{\eta}} Z_{\mathrm{BH}} \tag{5.18}$$

with

$$Z_{\mathrm{BH}} = 4\sqrt{\tau_2}(k-2)^{3/2}\,\eta\bar{\eta} \int d^2s \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau - s_2))^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)|^2} \sum_{m',w'\in\mathbb{Z}} \zeta\begin{bmatrix} w' + s_1 \\ m' + s_2 \end{bmatrix}(-k)\,. \tag{5.19}$$

There is a subtlety in the latter expression compared to the ordinary euclidean axial black hole (3.4). In the path-integral calculation of the partition function for the euclidean

JHEP10(2003)028

coset, the oscillators were coupled to the full real momentum of the free boson. We used the periodicity of the determinant to break the zero modes into an integer part and a real compact part. The integer part was interpreted as the lattice of the zero modes of the compact boson and the real part as Lagrange multipliers which impose constraints on the Hilbert space. In the present case, we have to perform an analytic continuation in order to move to the hamiltonian representation of the partition function,

$$Z_{\rm BH} = 4\sqrt{k}(k-2)^{3/2}\,\eta\bar{\eta}\int_{\mathbb{R}^2} d^2v\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}[\mathrm{Im}(i(v_1\tau-v_2))]^2}\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{\tau_2}|v_1\tau-v_2|^2}}{\left|\vartheta_1\left(i(v_1\tau-v_2)|\tau\right)\right|^2}\,,$$

and read the string spectrum. Now, because the coupling is imaginary, the determinant is no longer periodic; therefore we have a *non-compact* time-like coordinate coupled to the oscillators.

5.3 The null deformation

As we already mentioned in section 2.2, the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ WZW model allows for extra, unconventional, marginal deformations, which are not generated by Cartan left-right bilinears such as $J^2\bar{J}^2$ or $J^3\bar{J}^3$. Instead, the marginal operator we will consider is the following:

$$J\bar{J} \sim \left(J^1+J^3\right)\left(\bar{J}^1+\bar{J}^3\right),$$

(see eqs. (2.21) and (A.11)–(A.16)).

In the holographic dual description, these null currents are the translation generators of the conformal group acting on the boundary in Poincaré coordinates [61]. We will here analyze their action from the sigma-model viewpoint and determine the spectrum and partition function of the deformed model. Supersymmetry issues will be addressed in the more complete set up of $\{$ null-deformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ $\}\times\mathrm{SU}(2)$, in section 6.

We recall that the metric of the deformed background is (see eqs. (2.14))

$$ds^2 = \frac{du^2}{u^2} + \frac{-dT^2+dX^2}{u^2+1/M^2}\,.$$

The scalar curvature reads:

$$R = -2\frac{u^2\left(3u^2-4/M^2\right)}{\left(u^2+1/M^2\right)^2}\,.$$

This geometry is smooth everywhere for $M^2>0$. On the opposite, $M^2<0$ gives a singular geometry, which seems however interesting, and corresponds to the repulsion solution [62].

In order to study the null deformation of AdS_3, it is useful to introduce a free-field representation of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, in which operators J and $\bar{J}$ have a simple expression. We first introduce $\phi=-\log u$, $\bar{\gamma}=x^+$ and $\gamma=x^-$. The worldsheet lagrangian (see eq. (2.20))[14] reads:

$$\frac{2\pi}{k}\mathcal{L} = \partial\phi\bar{\partial}\phi + \mathrm{e}^{2\phi}\partial\bar{\gamma}\bar{\partial}\gamma\,. \tag{5.24}$$

[14]Note that the euclidean rotation from $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ to H_3^+ is performed by just considering γ and $\bar{\gamma}$ as complex conjugate.

JHEP10(2003)028

It can be represented with a (β,γ) ghost system of conformal dimensions $(1,0)$:

$$\frac{2\pi}{k}\mathcal{L} = \partial\phi\bar{\partial}\phi + \beta\bar{\partial}\gamma + \bar{\beta}\partial\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta}\mathrm{e}^{-2\phi}\,. \tag{5.25}$$

Classically, β and $\bar{\beta}$ are Lagrange multipliers. They can be eliminated by using their equations of motion, and this gives back the action (5.24). At the quantum level, however, we must integrate them out; taking into account the change of the measure and the renormalization of the exponent, we obtain, after rescaling the fields:

$$2\pi\mathcal{L} = \partial\phi\bar{\partial}\phi + \beta\bar{\partial}\gamma + \bar{\beta}\partial\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}}\phi} - \sqrt{\frac{2}{k-2}}R^{(2)}\phi\,. \tag{5.26}$$

The last but one term is the screening charge necessary to compute correlation functions in the presence of the background charge for the field ϕ ($R^{(2)}$-term). The OPE of the free fields are $\phi(z,\bar{z})\phi(0) \sim -\ln(z\bar{z})$ and $\beta(z)\gamma(0) \sim 1/z$. By using these free fields, the holomorphic currents (A.11)–(A.13) are recast, at quantum level, as:

$$\begin{aligned} J^1 + J^3 &= \beta\,, \\ J^2 &= -i\beta\gamma - i\sqrt{\frac{k-2}{2}}\partial\phi\,, \\ J^1 - J^3 &= \beta\gamma^2 + \sqrt{2(k-2)}\gamma\partial\phi + k\partial\gamma\,. \end{aligned}$$

They satisfy the $\widehat{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})_{\mathrm{L}}$ OPA, eqs. (A.17). Notice finally that the holomorphic primaries of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ CFT read in this basis:

$$\Phi^j_m = \gamma^{j-m}\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{2}{k-2}}j\phi}\,. \tag{5.27}$$

The conformal weight of this operator is entirely given by the Liouville primary, whereas the J^2 eigenvalue corresponds to the sum of the "ghost number" and the Liouville momentum.

We can use the above free-field representation to write the null deformation of the AdS_3 sigma model, eq. (2.22):

$$2\pi\mathcal{L} = \partial\phi\bar{\partial}\phi + \beta\bar{\partial}\gamma + \bar{\beta}\partial\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta}\left[\frac{1}{M^2} + \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{2}{k-2}}\phi}\right] - \sqrt{\frac{2}{k-2}}R^{(2)}\phi\,.$$

For any non-zero value of the deformation parameter, the fields β and $\bar{\beta}$ can be eliminated, leading to two light-cone free coordinates. The energy-momentum tensor reads:

$$T = -\frac{1}{2}\partial\phi\partial\phi - \frac{1}{\sqrt{2(k-2)}}\partial^2\phi - M^2\partial\bar{\gamma}\partial\gamma\,.$$

We would like to determine the partition function of the model at hand. To this end we will follow the procedure which has by now become familiar: implement the deformation into the twist-shift orbifold structure of the AdS_3. The ghost number is no longer conserved because the ghost-number current $\beta\gamma$ (equal to $\gamma\partial\bar{\gamma}\exp 2\phi$, on shell) is not a conformal field (this means in particular that the fields (5.27) are now ill-defined). However, there is still a global U(1)symmetry: $\gamma \to \mathrm{e}^{i\alpha}\gamma$, $\bar{\gamma} \to \mathrm{e}^{-i\alpha}\bar{\gamma}$ that we can orbifoldize (this is a twist on a

JHEP10(2003)028

complex boson). However, with this representation it is not possible to implement spectral flow without adding extra fields; therefore we have to find the action of the deformation on the zero-mode structure.

Owing the above ingredients, we can construct the partition function that fulfills the following requirements:

1. The endpoint of the deformation, $M^2 \to 0$, should give the Liouville theory times a free light-cone. At $M^2 \to \infty$ one should recover the undeformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

2. The partition function must be modular invariant.

This enables us to propose the following partition function for the null-deformed model:

$$Z^{\text{null}}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}\left(M^2\right) = 4\sqrt{\tau_2}(k-2)^{3/2}\int d^2s\, d^2t \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau - s_2))^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)|^2} \times \\ \times \sum_{m,w,m',w'\in\mathbb{Z}} \zeta\begin{bmatrix} w+s_1-t_1 \\ m+s_2-t_2 \end{bmatrix}\left(k\frac{1+M^2}{M^2}\right)\zeta\begin{bmatrix} w'+t_1 \\ m'+t_2 \end{bmatrix}\left(-k\frac{1+M^2}{M^2}\right). \tag{5.30}$$

which is obtained by changing the radii of both space-like $(J^1,\, \bar{J}^1)$[15] and time-like $(J^3,\, \bar{J}^3)$ lattices by the same amount. It is natural since these moduli correspond to the deformations along J^1 and J^3. In the pure $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ theory, the spectrum is constructed by acting on the primaries with the modes of the affine currents. The difference with the linear dilaton model is that the shift of the oscillator number is linked to the shift of the zero modes. In writing (5.30), which interpolates between these two models, we have implemented that this shift should vanish at infinite deformation (i.e. $M^2 = 0$), which indeed happens provided the radius of the lattice of light-cone zero-modes becomes large. We will expand on that in the next section. In the limit of infinite deformation $M^2 \to 0$, by using the standard technology developed so far, we find

$$Z^{\text{null}}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}\left(M^2\right) \sim \frac{(k-2)^{3/2}M^2}{\pi^2\tau_2^{3/2}\,(\eta\bar{\eta})^3}\,, \qquad \text{at} \qquad M^2 \sim 0\,.$$

This coincides with the partition function for $\mathrm{U}(1)_Q \times \mathbb{R}^{1,1}$.

The derivation of the spectrum goes as previously (see appendix C). Again, we concentrate on the vicinity of the unbroken $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (although the spectrum is known at any M^2):

$$\frac{M^2}{1+M^2} = 1-\varepsilon\,, \quad \varepsilon \ll 1\,.$$

The deformed discrete spectrum is

$$L_0 = -\frac{j(j-1)}{k-2} - w_+\left(\tilde{m} + \frac{\varepsilon}{2}(\tilde{m}+\tilde{\bar{m}})\right) - \frac{k}{4}(1+\varepsilon)w_+^2 + N + \\ + \frac{\varepsilon(1-2j)}{2(k-2)}\left(\tilde{m} + \tilde{\bar{m}} + \frac{k}{2(k-2)}(1-2j)\right),$$

[15] Or equivalently $(J^2,\, \bar{J}^2)$ since they are exchanged by a group transformation.

JHEP10(2003)028

$$\bar{L}_0 = -\frac{j(j-1)}{k-2} - w_+\left(\tilde{\bar{m}} + \frac{\varepsilon}{2}(\tilde{m}+\tilde{\bar{m}})\right) - \frac{k}{4}(1+\varepsilon)w_+^2 + \bar{N} + \\ + \frac{\varepsilon(1-2j)}{2(k-2)}\left(\tilde{m} + \tilde{\bar{m}} + \frac{k}{2(k-2)}(1-2j)\right). \tag{5.33}$$

The last terms of both equations are due to the displacement of the poles corresponding to the discrete representations. For the continuous spectrum, we have a similar shift on the weights:

$$L_0 = \frac{s^2+1/4}{k-2} - w_+\left(\tilde{m} + \frac{\varepsilon}{2}(\tilde{m}+\tilde{\bar{m}})\right) + \frac{k}{4}(1+\varepsilon)w_+^2 + N\,,$$
$$\bar{L}_0 = \frac{s^2+1/4}{k-2} - w_+\left(\tilde{\bar{m}} + \frac{\varepsilon}{2}(\tilde{m}+\tilde{\bar{m}})\right) + \frac{k}{4}(1+\varepsilon)w_+^2 + \bar{N}$$

with a deformed density of states. We observe that the deformation term is linked to the spectral flow.

6. The supersymmetric null deformation of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)$

So far, we have been considering conformal deformations of the AdS_3 background, realized by marginal deformations of the corresponding $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ WZW model. In supersymmetric NS5-brane configurations, the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ appears usually along with $\mathrm{SU}(2)$. We will here analyze the issue of supersymmetry in presence of null deformations of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ factor. We will in particular show that the requirement for the worldsheet $N=2$ superconformal symmetry to be preserved, gives very tight constraints on the allowed deformations.

6.1 The $N=2$ algebra of the deformed theory

We first rewrite the $N=2$ algebra for $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)$, eqs. (4.11), (4.12) and (4.16) in the free-field representation (eqs. (3.12), (3.13)). We recall that I^i are the $\mathrm{SU}(2)$ currents, ψ^i and χ^i the fermions of respectively $\mathrm{SU}(2)$ and $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$:

$$\sqrt{2}G^\pm = i\sqrt{\frac{2}{k+2}}\left(\sqrt{\frac{k+4}{2}}\partial X \mp i\sqrt{\frac{k+2}{2}}\partial\rho\right)\mathrm{e}^{\mp i\sqrt{\frac{2}{k+4}}(X-T)}\chi^\pm + \\ + \sqrt{\frac{2}{k+2}}\left[\mathcal{I}^3 \mp \left(\sqrt{\frac{k+4}{2}}i\partial T + \chi^+\chi^-\right)\right]\frac{\psi^3 \pm \chi^3}{2} + \sqrt{\frac{2}{k+2}}I^\mp\psi^\pm\,, \tag{6.1}$$

$$J = \psi^3\chi^3 + \chi^+\chi^- + \psi^+\psi^- + \frac{2}{k+2}\left[\sqrt{\frac{k+4}{2}}i\partial T + \chi^+\chi^- - \mathcal{I}^3\right]. \tag{6.2}$$

The fermions χ^+, χ^- are bosonized as $\chi^+\chi^- = i\partial H_1$. Note also a shift $k \to k+4$ with respect to the formulas for pure AdS_3; k is the level of $\widehat{\mathrm{SU}}(2)$, and this shift ensures that the total bosonic central charge equals six (see (4.7) and (4.8)).

In [39], a map was given between the free-field representation of the superconformal algebra for $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ and the algebra for $N=2$ Liouville times two free coordinates. As a first step towards the supersymmetrization of the null deformation studied previously, we

JHEP10(2003)028

will show that there exists a *one-parameter family of $N = 2$ algebras* interpolating between $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)$ and $\mathrm{U}(1)_Q \times \mathbb{R}^{1,1} \times \mathrm{SU}(2)$.

The $N = 2$ generators (with a non-standard complex structure) are, for $\mathrm{U}(1)_Q \times \mathbb{R}^{1,1} \times \mathrm{SU}(2)$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\hat{G}^{\pm} &= \left(i\partial\hat{X} - \sqrt{\frac{2}{k+2}} i\partial\hat{H}_1 \pm \partial\rho \right) \mathrm{e}^{\pm i\hat{H}_1} + \\
&\quad + \left(\sqrt{\frac{2}{k+2}} \mathcal{I}^3 \mp i\partial\hat{T} \right) \frac{\psi^3 \pm \chi^3}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{2}{k+2}} I^{\mp}\psi^{\pm} \,, \\
\hat{J} &= i\partial\hat{H}_1 + \psi^3\chi^3 + \chi^+\chi^- + \frac{2}{k+2}\left[\sqrt{\frac{k+2}{2}} i\partial\hat{X} - \mathcal{I}^3 \right] ,
\end{aligned}$$

where $\hat{T}$, $\hat{X}$, are the light-cone coordinates. This is not the usual $N = 2$ subalgebra of the $N = 4$ superconformal algebra (eqs. (4.5) and (4.6)) of the $\mathrm{U}(1)_Q \times \mathrm{SU}(2)$ SCFT.

We now perform the following $\mathrm{SO}(2,1)$ rotation, which leaves unchanged the OPE's:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_1 &= H_1 - tX^- \,, \\
\hat{T} &= cT + sH_1 \,, \\
\hat{X} &= cX + s(H_1 - tX^-) \,,
\end{aligned}$$

where $X^- = X - T$, and we have introduced:

$$c = \cosh\sigma \,, \quad t = \tanh\sigma \,, \quad s = \sinh\sigma = \frac{s_0}{p} \,, \quad \text{with} \quad s_0 = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \quad \text{and} \quad p \geq 1 \,.$$

For $p = 1$, the rotated $N = 2$ algebra corresponds exactly to the superconformal algebra of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)$, eqs. (6.1) and (6.2). Furthermore, one can check that the $N = 2$ superconformal structure is preserved for any p.

Coming back to the null deformation of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)$, we conclude that the above one-parameter family of supercurrents can be implemented along the line of deformation. The $N = 2$ R-symmetry current of the deformed theory takes the form:

$$J = \psi^3\chi^3 + \chi^+\chi^- + i\partial H_1 + ps^2\left(\frac{1}{t} i\partial T + i\partial H_1 \right) - s_0^2\mathcal{I}^3 + (p-1)t\, i\partial X^- \,, \tag{6.3}$$

and the deformed supercurrents read:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}G_2^{\pm} &= \left(s_0\mathcal{I}^3 \mp i(c\partial T + s\,\partial H_1) \right) \frac{\psi^3 \pm \chi^3}{\sqrt{2}} + s_0 I^{\mp}\psi^{\pm} + \\
&\quad + i\left[c\partial X - (s_0 - s)\left(\partial H_1 - t\partial X^- \right) \mp i\partial\rho \right] \mathrm{e}^{\pm i\left(H_1 - tX^-\right)} \,.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Clearly, the background contains both torsion (in the first line of (6.4)) and a background charge (in the second line). The field H_1 still corresponds to a free complex fermion, provided we change the radius of the compact light-cone direction:

$$\hat{R}_+ = \frac{2}{t} = \sqrt{2\left(p^2(k+2) + 2\right)} \,.$$

JHEP10(2003)028

The latter statement holds because the deformation is null. It therefore confirms our assumption (section 5.3) that the null deformation corresponds to a change of the radius of the compact light-cone coordinate. The relation between this parameterization and the mass scale introduced in section 2 is, up to $1/k$ corrections:

$$\frac{1}{M^2} = \frac{k+2}{k+4}\left(p^2-1\right). \tag{6.6}$$

The holomorphic primary fields for the deformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ are recast as:

$$\Phi_{j\ m}^{w_+,\mathrm{def}} = \exp\left\{\sqrt{\frac{2}{k+2}}j\phi + it\left[\left(\tilde{m}-\frac{1}{2t^2}w_+\right)X^- + \frac{1}{2t^2}w_+(X+T)\right]\right\},$$

where, as in the undeformed theory, $\tilde{m}-\tilde{\bar{m}}\in\mathbb{Z}$ and $\tilde{m}+\tilde{\bar{m}}-2w_+/t^2$ is the energy. This gives the following $N=2$ charges:

$$\mathcal{Q}_R = q_1+q_2+q_0-w_+ + \frac{2}{p(k+2)}\left[\tilde{m}+\ q_1\ -w_+\right] - \frac{2}{k+2}\left[m_{\mathrm{SU}(2)}\ +\ q_2\right]$$

with q_i the fermionic charges.

The worldsheet supersymmetry of the deformed theory works similarly to the undeformed one ($p=1$). In fact, the spectral-flow charge w_+ in the first bracket has to be compensated by a shift of q_1, because the spectral-flow symmetry must act on the total current [52]. We are left with well-normalized charges for $\mathcal{I}^3$ and deformed $\mathcal{J}^3$.

6.2 Space-time supersymmetry

The supersymmetry generators of the original $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathrm{SU}(2)$ model are given in eq. (4.20) with a restriction on the allowed charges captured in (4.23), on top of the usual GSO projection.

In the deformed theory, these operators are no longer physical with respect to the supercurrent $G=G^+ + G^-$ given in eq. (6.4). The physical spin fields are instead

$$\Theta_\varepsilon^{\mathrm{def}}(z) = \exp\left\{-\frac{\varphi}{2} + \frac{i}{2}\sum_{\ell=0}^{4}\varepsilon_\ell H_\ell + \frac{i}{2}\varepsilon_1(p-1)t\,X^-\right\}. \tag{6.9}$$

Since the only modification resides in the X^- term, it changes neither the conformal dimensions of these fields nor their mutual locality. By using the same projection as before, we obtain a set of well-defined physical spin operators. Acting with one of these operators on a left-moving vertex operator of the NS sector ($q_\ell\in\mathbb{Z}$),

$$V(z') \sim \mathrm{e}^{-\varphi}\Phi_{j\,m}^{w_+,\ \mathrm{def}}\exp i\sum_{\ell=0}^{4}q_\ell\,H_\ell(z'),$$

gives a leading term behaving like

$$(z-z')^{\frac{1}{2}\left\{-1+\sum_{\ell=0}^{4}\varepsilon_\ell q_\ell+\varepsilon_1(p-1)w_+\right\}}.$$

JHEP10(2003)028

We conclude that the locality condition of space-time supercharges with respect to the states requires *the deformation parameter be an odd integer:* $p \in 2\mathbb{Z}+1$. Note that since this quantization condition originates from the massive states (those with $w_+ \neq 0$), it is not visible in the supergravity analysis. In the limit of infinite deformation, this choice generates modified space-time supercharges, constructed with $H_1 - s_0 X^-$. This choice is not the one obtained from the $N=4$ algebra (see eqs. (4.5) and (4.6)), because the complex structure for the fermions is different. An appropriate choice, though, avoids infinite shifts in the spin fields, and allows for reaching a well-defined theory at the limit of infinite deformation.

At this point we want to discuss the issue of supersymmetry breaking. In type-IIB, the first projection performed in the undeformed theory keeps the spinors $(+, \mathbf{2}', \mathbf{2}')$ and $(-, \mathbf{2}, \mathbf{2}')$ of $\mathrm{SO}(1,1) \times \mathrm{SO}(4) \times \mathrm{SO}(4)_T$ for both supersymmetry generators. When the AdS_3 factor of the background is deformed in the null direction, the gravitino must be right-moving in space-time (hence, it depends on X^-), which picks up the spinor $(-, \mathbf{2}, \mathbf{2}')$. So, although the number of covariantly constant spinors is reduced by a factor of two in the deformed background, the number of *transverse* fermionic degrees of freedom appearing in the spectrum is the same. A subtlety comes, however, while dealing with the right-moving sector of the theory. As already mentioned, in WZW models, the right superconformal algebra is written with a torsion term of opposite sign. The correct torsion for the right movers in the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ factor demands to rotate the fields of $\mathrm{SU}(2)_R \times \mathrm{U}(1)_Q \times \mathbb{R}^{1,1}$ as:

$$\begin{aligned}
\hat{\bar{H}}_1 &= \bar{H}_1 - t\bar{X}^+ \,, \\
\hat{\bar{T}} &= c\bar{T} - s\bar{H}_1 \,, \\
\hat{\bar{X}} &= c\bar{X} + s(H_1 + t\bar{X}^+) \,.
\end{aligned}$$

Therefore, the right algebra is written with $\bar{X}^+$ rather than with $\bar{X}^-$. For the undeformed model this is irrelevant since the two free-field representations are isomorphic. However, for non-zero deformation, it makes a difference because the right-moving spin fields will be corrected with $\bar{X}^+$ rather than $\bar{X}^-$:

$$\bar{\Theta}^{\mathrm{def}}_{\bar{\varepsilon}}(z) = \exp\left\{ -\frac{\varphi}{2} + \frac{i}{2}\sum_{\ell=0}^{4} \bar{\varepsilon}_\ell \bar{H}_\ell + \bar{\varepsilon}_1 (p-1) t\, \bar{X}^+ \right\}.$$

As a consequence, gravitinos from the right- and left-moving sectors of the worldsheet CFT propagate in opposite light-cone directions. They give space-time transverse supercharges $(\mathbf{2}, \mathbf{2}')$ from the left and $(\mathbf{2}', \mathbf{2}')$ from the right. In type-IIA, the same reasoning leads to the representations $(\mathbf{2}, \mathbf{2}')$ for both generators. The conclusion is that the deformation *flips the chirality of space-time fermions from the right sector.*

6.3 The partition function for superstrings on deformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)$

As we have seen in the previous analysis, the only necessary modification on the fermionic part is the flip of chirality for the right-moving fermions. It is implemented by inserting $(-)^{F_{\mathrm{R}}}$, where F_{R} is the space-time fermion number for right-movers. This is an orbifold, that projects out the Ramond states from the untwisted sector, while the twisted sector

JHEP10(2003)028

restores the Ramond states, with opposite chirality though. The fermionic vertex operators are thus constructed with $\exp \pm i\left(H_1+(p-1)t\ X^-\right)/2$. However, since this modification has no effect on the conformal weights of the spin fields, it does not alter the fermionic characters in the partition function. The remaining parts of the partition function have been discussed in previous sections. Putting everything together, we find for the {null-deformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$} $\times\,\mathrm{SU}(2)\times T^4/\mathbb{Z}_2$:

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathrm{IIB}}(p) = {} & \frac{\mathrm{Im}\tau}{\eta^2\bar{\eta}^2} Z_{\mathrm{SU}(2)} Z^{\mathrm{null}}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}(p) \frac{1}{2}\sum_{h,g=0}^{1} Z^{\mathrm{twisted}}_{T^4/\mathbb{Z}_2}\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \times \\
& \times \frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1} (-)^{a+b}\ \vartheta^2\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix} a+h \\ b+g \end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix} a-h \\ b-g \end{bmatrix} \times \\
& \times \frac{1}{2}\sum_{\bar{a},\bar{b}=0}^{1} (-)^{\bar{a}+\bar{b}} \frac{1}{2}\sum_{h',g'=0}^{1} (-)^{(1-\delta_{p,1})\left[\bar{a}g'+\bar{b}h'+h'g'\right]}\ \bar{\vartheta}^2\begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{bmatrix}\bar{\vartheta}\begin{bmatrix} \bar{a}+h \\ \bar{b}+g \end{bmatrix}\bar{\vartheta}\begin{bmatrix} \bar{a}-h \\ \bar{b}-g \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

where $p\in 2\mathbb{Z}+1$ and $Z^{\mathrm{null}}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}(p)$ is given in (5.30) with $k\to k+4$; the relation between p and M^2 has been given by eq. (6.6). The sum over h' and g' flips the chirality of the right-moving fermionic representation for any $p\neq 1$, according to the left-right asymmetry discussed in the text.

This is the *simplest* modular invariant combination of the various ingredients, with the correct projections dictated by the superconformal invariance. It should, by no means, be considered as unique, and many other models do exist, which are equally acceptable.

7. Some comments about holography

In this last section of the paper, we will give some remarks about the holographic dual of string theory in the background (2.14). Since this string theory is exactly solvable and perturbative everywhere, we can use the gauge/gravity correspondence beyond the supergravity approximation. The purpose here is only to identify the non-gravitational dual of the setup and to explain its relevance to study little string theory. Although the space-time studied in this paper is constructed as a deformation of AdS_3, the holographic interpretation is different from the undeformed case.

7.1 The D1/D5 setup and AdS/CFT

Let first review briefly the usual holographic dual of the theory of D1/D5-branes [23]. Starting with the supergravity solution of eqs. (2.1), (2.2) and (2.3), we would like to take a limit where the theory on the branes is decoupled from the bulk modes. This is obtained by the low-energy limit:

$$\alpha'\to 0\,,\qquad U=\frac{r}{\alpha'}\ \text{fixed}$$

so that the gravitational coupling constant goes to zero. All open-string modes become infinitely massive and only the zero modes survive; the dual theory is a field theory.

JHEP10(2003)028

In the above limit, the dimensionless volume of the four-torus has a fixed, finite value:

$$\hat{v}(T^4) = \frac{N_1}{N_5}\,.$$

Therefore, the dual conformal theory is $(1+1)$-dimensional. In the low-energy limit, the D1-branes are trapped inside the D5-brane world-volume and can be considered as string-like instantons of the six-dimensional $\mathrm{U}(N_5)$ gauge theory of the D5-branes. The $\mathcal{N}=(4,4)$ superconformal field theory dual to the near-horizon limit of the background is the Higgs branch of a sigma-model on the moduli space of these instantons, of central charge $c = 6(N_1 N_5 + 1)$ [23].

In regions of the moduli space where the string coupling is large, the theory is appropriately described in the S-dual frame. The string background is then given by the WZW theory: $\mathrm{SU}(2)_k \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_{k+4}$, where $k = N_5$. Now the constant value of the six-dimensional string coupling is $g_6 = N_5/N_1$. Note that, although the number of fundamental strings do not appear in the worldsheet CFT description, the string theory is weakly coupled only for large values of N_1.

An interesting feature of this theory is that it is possible to construct directly out of the worldsheet currents the generators of the space-time Virasoro algebra [9], which act on the boundary of AdS_3.

7.2 The null deformation of AdS_3

The null deformation of AdS_3 cannot be small; regardless the value of the deformation parameter, the causal structure of the space-time is completely changed. There is no longer conformal boundary, but rather an asymptotic flat geometry with a linear dilaton. Anyway, the deformation parameter can always been scaled to one (if positive) by rescaling the non-compact coordinates of the light-cone.

From the holographic point of view, the null deformation corresponds to adding an (infra-red) irrelevant operator in the lagrangian. It is therefore more appropriate for holography to start with the holographic dual of the linear dilaton background and perturb it in the infra-red by a relevant operator.

Our decoupling limit (2.7) is quite different from the standard one. We send the ten-dimensional string coupling to infinity. Therefore in order to study this part of the moduli space of the brane theory we have to perform an S-duality. In the dual variables, the limit under consideration is

$$\tilde{g}_s \to 0\,, \qquad \tilde{\alpha}' \text{ fixed}\,, \qquad \frac{r}{\tilde{g}_s} \text{ fixed}\,. \tag{7.2}$$

This looks the same as the little-string-theory limit. However, in the case at hand, the background contains fundamental strings, which affect the geometry in the vicinity of the branes. In the limit (7.2) the energy of the D1-branes stretched between the NS5-branes is kept fixed: $E_{D1} \sim r/(\tilde{\alpha}'\tilde{g}_s)$. If instead we keep the energy of the fundamental strings fixed, $E_{F1} \sim r/\tilde{\alpha}'$, the contribution of the fundamental strings disappears and we are left with the "pure" NS5-brane background (see [9]). Another important difference between the standard near-horizon limit and the partial near-horizon limit is that the later involves

JHEP10(2003)028

the decompactification of the torus, in the D-brane picture (we send the asymptotic value of the dimensionless volume v to infinity). Therefore the dual "gauge" theory should be six-dimensional; this is again the same as little string theory.

7.3 A little review of little string theory

The little string theory is the decoupled theory living on the world-volume of the NS5-branes (for a review, see [63]). The world-volume theory is decoupled from the bulk by taking the limit:

$$\tilde{g}_s \to 0\,, \qquad \tilde{\alpha}' \text{ fixed}\,,$$

This is not a low-energy limit, unlike in the AdS/CFT case. The resulting theory is interacting and non-local, since it exhibits the T-duality symmetry. In the case of type-IIB string theory, the low-energy limit of LST is a $\mathrm{U}(N_5)$ gauge theory with $N = (1,1)$ supersymmetry and a bare gauge coupling:

$$g_{YM}^2 = \tilde{\alpha}'\,.$$

The coupling grows at large energy, and additional degrees of freedom, which are identified as string-like instantons in the low- energy theory, appear at energies of order $\tilde{\alpha}'^{-1/2}$. These instantons are identified with fundamental strings attached to the NS5-branes. In the infra-red this theory flows to a free fixed point. In the case of type-IIA string theory, the infra-red limit is an $N = (2,0)$ interacting superconformal theory. It contains tensionless strings.

The conjectured holography of [25] states that this theory is dual to string theory in the NS5-brane background in the near-horizon limit [1]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} + \tilde{\alpha}' N_5 \left(d\rho^2 + d\Omega_3{}^2\right)\,, \\ \Phi &= \Phi_0 - \rho\,, \\ H &= 2\tilde{\alpha}' N_5\ \epsilon(\Omega_3)\,. \end{aligned}$$

In this limit, $r/\tilde{g}_s$ — the energy of the D1-branes stretched between the NS5-branes — is kept fixed. This geometry corresponds to the exact conformal field theory $\mathrm{SU}(2)_k \times \mathrm{U}(1)_Q$, with $k+2 = N_5$ that was discussed in section (4.1.1). This holographic description breaks down in the region $\Phi \to -\infty$, near the branes, because the string coupling blows up. In the type-IIB case, this is related to the fact that the infra-red fixed point is free. In the type-IIA theory, this strong-coupling region is resolved by lifting the background to M-theory [25]; we obtain the background $\mathrm{AdS}_7 \times S^4$ of eleven-dimensional supergravity in the vicinity of the M5-branes (distributed on a circle in the eleventh dimension).

As in the AdS/CFT correspondence, on-shell correlators of non-normalizable states in string theory corresponds to off-shell Green functions of observables in LST. The non-normalizable states of the NS5-brane background are constructed with the discrete representations of the linear dilaton:

$$V = \left(\psi\bar{\psi}\Phi_j\bar{\Phi}_j\right)_{j+1} \mathrm{e}^{\frac{2j}{\sqrt{2(k+2)}}\rho}\,, \tag{7.5}$$

where the primary operator of spin j of SU(2) and the fermions are combined into an operator of spin $j+1$. From the worldsheet point of view, the operators (7.5) are necessary

JHEP10(2003)028

to balance the background charge in the correlation functions. The theory contains also delta-function-normalizable states, from the continuous representations:

$$V \sim \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{\sqrt{2(k+2)}}+is\right)\rho},$$

but their holographic interpretation is less clear. In the bulk they are propagating fields in the linear dilaton background. There is a third class of operators from the discrete representations, normalizable in the ultraviolet but not in the infra-red:

$$V \sim \mathrm{e}^{\frac{-2(j+1)}{\sqrt{2(k+2)}}\rho}\Phi_j\bar{\Phi}_j\,.$$

These operators correspond to states localized on the five-branes. When we deform the theory towards $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, they become the discrete representations of the unitary spectrum of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

7.4 Low energy limit, strong coupling and fundamental strings

The decoupling limit of the LST (7.3) does not really make sense for type-IIB superstrings in the deep infra-red region. In fact, as the string coupling blows up here, sending its asymptotic value to zero does not ensure that the theory living on the branes decouples from the bulk at very low energies (see [64] for a related discussion). Since the bulk theory is non-perturbative in this region, the resolution of this puzzle is quite conjectural.

Our background, viewed from the LST side, provides a possible mechanism to better describe the situation. We first take the worldsheet description of the bulk physics; the bosonic lagrangian of the theory is

$$2\pi\mathcal{L} = \partial\rho\bar{\partial}\rho - \sqrt{\frac{2}{k+2}}R^{(2)}\rho + \partial X^+\bar{\partial}X^- + 2\pi\mathcal{L}^{WZW}_{\mathrm{SU}(2)_k} + \sum_{i=6}^{9}\partial X^i\bar{\partial}X^i\,.$$

Starting from this extremity of the line of marginal deformations, we add at first order the following $(1,1)$ operator to the lagrangian:

$$\delta\mathcal{L} \sim M^2\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{2}{k+2}}\rho}\,\partial X^+\bar{\partial}X^-\,.$$

It provides a Liouville potential for the linear dilaton and thus regulate the strong-coupling region. This potential adds a non-trivial "electric" NSNS flux in the background. We know from our previous analysis that deforming the theory in this way corresponds to adding fundamental strings in the infra-red region of the background. This operator is a singlet of $\mathrm{SU}(2)_L\times\mathrm{SU}(2)_R$. The brane picture is that, as we go down into the throat (the strong-coupling region) macroscopic fundamental strings condense in the world-volume of the NS five-branes.

Now consider the dual, non-gravitational theory living on the D5-branes. The low-energy bosonic euclidean action is

$$S_{\mathrm{gauge}} = \int \frac{1}{\alpha' g_{\mathrm{s}}}\mathrm{Tr}F\wedge *F + \frac{i}{\alpha'}C_0 dt\wedge dx\wedge\mathrm{Tr}F\wedge F + \frac{1}{\alpha' g_{\mathrm{s}}}\left\{DX^i\wedge *DX^i + [X^i,X^j]^2 * \mathbb{I}\right\}.$$

JHEP10(2003)028

Where C_0 is the flux generated by the D1-branes. It is well known that for gauge theories in dimensions higher than four, field configurations of non-zero energy (instanton-like) have an infinite action and therefore do not contribute to the path integral. The conclusion is different in the presence of the D1-brane flux. Starting with any instanton solution in four dimensions,

$$*_4 F = F\,,$$

we can lift it to a field configuration in six dimensions which obey a generalized self-duality condition:

$$*_6 F = F \wedge dt \wedge dx\,,$$

Such a solution is not really an instanton, since it is invariant under time translations. This configuration is one-half BPS, because it imposes the following fermionic projection on supersymmetry generators:

$$\frac{1}{2}\left(1-\gamma^{6789}\right)\eta = 0\,,$$

where $6,7,8,9$ are the coordinates of the 4-torus in our conventions. The gauge action for such a solution is

$$S_{\text{gauge}} = \frac{1}{\alpha'}\left[\frac{1}{g_{\text{s}}} + iC_0\right]\int dt \wedge dx \wedge \text{Tr}F \wedge F\,.$$

In the infra-red, the RR 2-form behaves as:

$$C_0 = -\frac{i}{g_{\text{s}}}\left[\frac{\alpha' v U^2}{g_{\text{s}} N_1} - 1\right] \underset{U\to 0}{\to} \frac{i}{g_{\text{s}}}\,.$$

Therefore, the classical action for such a configuration vanish. The conclusion is that, in presence of the D1-brane flux, an imaginary "theta-like" topological term is added to the SYM action. Now stringy instanton solutions of the gauge theory are minima of the action and contribute to the path integral; in the infra-red the theory is not the free SYM fixed point, but rather the $(1+1)$-dimensional dynamics of these objects.

At this point one can wonder if there are other natural infra-red completions of the perturbative string background. Another proposal, called "double-scaled little string theory" has been made [4]. The idea is to describe the Higgs phase of the little string theory, where the NS5-branes are distributed on a circle of radius r_0. The double scaling limit is defined by: $\tilde{g}_s \to 0$, $r_0/\sqrt{\tilde{\alpha}'} \to 0$. In this limit, the worldsheet dual background is described by an orbifold of an $N=2$ Liouville theory with a potential tensorized with the coset $\text{SU}(2)/\text{U}(1)$. By using a duality discussed recently in [65], this theory is argued to be equivalent to

$$\left(\frac{\text{SU}(2)}{\text{U}(1)} \times \frac{\text{SL}(2,\mathbb{R})}{\text{U}(1)}\right)\Big/\mathbb{Z}_{N_5}\,.$$

In this model the strong-coupling throat region of the NS5-branes background is replaced by the tip of the cigar geometry, so the dilaton value is bounded from above. However, because of the duality, this model is *not* continuously connected to the pure NS5-brane background by a marginal deformation. The holographic interpretation of this mirror symmetry needs further investigation.

JHEP10(2003)028

8. Discussion and conclusions

Let us summarize the main conclusions of this paper. We have shown that a new, interesting decoupling limit for the D1/D5-brane theory (or NS5/F1 in the S-dual description) exists. It captures not only the infra-red dynamics, but also the full renormalization-group flow. Furthermore, this theory is free of strong-coupling problems in the bulk, in contrast with the little-string-theory limit in the moduli space. We have studied this background mainly from the string worldsheet point of view, since the bulk background in the NS5/F1 picture is an exactly solvable worldsheet conformal field theory: {null-deformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$} $\times$ $\mathrm{SU}(2)\times(T^4$ or $K3)$.

We have first analyzed the undeformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ theory, for which our achievement is the construction of the partition function for the (lorentzian) AdS_3, including both discrete and continuous representations, in all the sectors of spectral flow. Our procedure is to start from the coset theory $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_A$, and to reconstruct the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ partition function by coupling the former with a lattice corresponding to the time direction. The partition function is thus obtained in a linearized form, where the energy integration is manifest. Although formally divergent, the expression of the partition function contains all the information about the full spectrum, and behaves as expected in the large-k limit. Upon integrating the energy, we recover the partition function of [12, 13, 17]. An important feature of our partition function is that one light-cone direction is compact, whereas the other is non-compact. This allows for a natural definition of the light-cone hamiltonian.

The $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ WZW model is a building block for physically interesting backgrounds, such as $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times T^4$, which preserve supersymmetry and have a brane origin. We have written the extended worldsheet superconformal algebra for this theory, although, as discussed in [9, 50], it is somehow problematic to define the space-time supersymmetry in that way. In order to implement the projection that leaves unbroken one half of flat-space supersymmetry, we have chosen to consider superstrings on the $T^4/\mathbb{Z}_2$ orbifold point of $K3$. This implies only minor modifications in the brane interpretation of the background: the topological sector of the orbifold corresponds to additional D1-branes with negative charge (this is clear from the D-brane gravitational couplings), while the microscopic degrees of freedom living on the branes are different from the T^4 case. We could instead have insisted on keeping the T^4 as the internal manifold, but then the orbifold action acting on $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ — necessary for cutting half of the supersymmetries — would have been more complicated. The lattice interpretation of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ partition function is a very powerful tool in the process of understanding marginal deformations in AdS_3 backgrounds. We have considered left-right symmetric bilinears in the currents. For $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ this amounts to three different deformations: two marginal deformations corresponding to the two different choices of Cartan subalgebra, and one marginal deformation along a "null" direction.

The deformation with respect to the time-like generator J^3 relates the theory to the euclidean black hole $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_A$, on one side, and to its T-dual $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)_V$ on the other side. We have found that the spectra of the two cosets do not match exactly. This is related to the fact that we have started with a theory on the universal cover of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. The conclusion is different if we take the single cover instead, but then string

JHEP10(2003)028

theory does not make sense except at the coset points, because of the presence of closed time-like curves. The J^3 deformation gives a geometry that also interpolates between the AdS_3 geometry (in global coordinates) and the linear dilaton background. In the case at hand, however, the brane picture — if any — remains to be understood.

Similar considerations hold for marginal deformations driven by the space-like choice of Cartan generator, namely J^2. In the limit of infinite deformation, we obtain now the lorentzian two-dimensional black hole.

The case of null deformation of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ has attracted most of our attention, because of its brane interpretation and the underlying decoupling limit. We have reached a modular-invariant partition function for the purely bosonic case, and extended the whole set up to the supersymmetric background. We have in particular shown that the physical spin fields, which give the space-time supercharges, are modified asymmetrically by the background, and are restricted by the same projection as in the absence of any deformation. The locality condition for this charges with respect to the string states, however, gives an extra quantization condition, on the deformation parameter. Therefore, as a *superconformal worldsheet theory*, the line of deformation is *continuous*, but *space-time supersymmetry* further selects a *discrete* subset of deformation points. We observe that, at least for k large, these special points are such that the $O(2,2,\mathbb{R})$ transformations of eq. (2.26) that give the null-deformed model belong to $O(2,2,\mathbb{Z})$, i.e. become a discrete line of *dualities*.

The decoupling limit of the D1/D5-brane configuration that we have presented here, calls for further holography investigation. In the present paper, the analysis of the holographic picture of this gravitational background has been very superficial: it provides a natural infra-red regularization of little string theory, by imposing an upper bound on the string coupling constant, without changing the asymptotic ultraviolet geometry. More work is needed to understand it.

There are many other issues that remain open, as for example:

- Study in more detail other realizations of the worldsheet supersymmetry that do not involve the orbifold of the four-torus.
- Give a complete picture of the $\mathrm{AdS}_3 \times S^3$ landscape by means of a systematic analysis of other supersymmetry-preserving marginal deformations e.g. cosets or limiting gravitational-wave backgrounds.
- Interpret these backgrounds in terms of brane set-ups.
- Put holography at work; the explicit calculation of correlation functions in the deformed theory seems at first sight rather difficult, and needs further investigation.

Finally it is worth stressing that connecting the near-horizon geometry of NS5/F1-branes ($\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)^4$) with the near-horizon limit for the NS5-branes alone ($\mathbb{R}^{1,1} \times \mathrm{U}(1)_Q \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)^4$) is a step towards the search of an exact CFT description of a background which is $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ in some region of space-time and asymptotically flat in another one.

JHEP10(2003)028

Acknowledgments

We have enjoyed very useful discussions with C. Bachas, A. Fotopoulos, E. Kiritsis, B. Pioline and S. Ribault. We are also grateful to E. Kiritsis for a careful reading of the manuscript.

A. The $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ WZW model: a reminder

We collect in this appendix some well-known facts about the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ WZW model, within a consistent set of conventions. The commutation relations for the generators of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ algebra are

$$\left[J^1, J^2\right] = -iJ^3\,, \qquad \left[J^2, J^3\right] = iJ^1\,, \qquad \left[J^3, J^1\right] = iJ^2\,. \tag{A.1}$$

The sign in the first relation is the only difference with respect to the SU(2). Introducing

$$J^{\pm} = iJ^1 \mp J^2\,,$$

yields[16]

$$\left[J^3, J^{\pm}\right] = \pm J^{\pm} \qquad \left[J^+, J^-\right] = 2J^3\,, \tag{A.3}$$

which are also valid for SU(2). This is the $s\ell(2)$ algebra. Its representations are the same for both $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ and SU(2); only their unitarity properties are different (see e.g. [66]).

The quadratic Casimir for $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ is defined as:

$$C_2 = \left(J^1\right)^2 + \left(J^2\right)^2 - \left(J^3\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(J^+J^- + J^-J^+\right) - \left(J^3\right)^2\,, \tag{A.4}$$

and its eigenvalues parametrized by[17] $C_2 = j(1-j)$.

Irreducible representations of the above algebra are essentially of two kinds: discrete $\mathcal{D}^{\mp}(j)$ or continuous principal $\mathcal{C}_{\mathrm{p}}(b,a)$ and continuous supplementary $\mathcal{C}_{\mathrm{s}}(j,a)$. The discrete ones have highest ($\mathcal{D}^-$) or lowest ($\mathcal{D}^+$) weight, whereas the continuous ones do not. The spin j of the discrete representations is real,[18] and their states are labelled by $|jm\rangle$, $m = \mp j, \mp j \mp 1, \mp j \mp 2, \ldots$ For the principal continuous ones, $j = \frac{1}{2} + ib,\ b > 0$, and the magnetic number is $m = a, a \pm 1, a \pm 2, \ldots,\ -\frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{2}$, $a, b \in \mathbb{R}$; for the supplementary continuous ones, $0 < j \leq \frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{2}$, with the constraint $\left|j - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} - |a|$, $a, j \in \mathbb{R}$. These representations are unitary and infinite-dimensional; $\mathcal{D}^{\pm}(j)$ become finite-dimensional when j is a negative integer or half-integer, and are non-unitary for any negative j. Notice finally that the quadratic Casimir C_2 is positive for both continuous series; for the discrete ones it is positive or negative when $0 < j < 1$ or $1 < j$, respectively.

[16] In some conventions $J^{\pm} = J^1 \pm iJ^2$, as for SU(2).

[17] There is an arbitrariness in the sign of C_2, as well as on that of j. The ones we consider here are the most popular in the community. However, the most efficient are the opposite ones both for C_2 and j, since they allow for a unified presentation of SU(2) and $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ representations.

[18] In order to avoid closed time-like curves, we are considering the universal covering of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Therefore, j is not quantized.

JHEP10(2003)028

The three-dimensional anti-de Sitter space is the universal covering of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ group manifold. The latter can be embedded in Minkowski space with signature $(-,+,+,-)$ and coordinates (x^0,x^1,x^2,x^3) — we set the radius to one:

$$g = \begin{pmatrix} x^0+x^2 & x^1+x^3 \\ x^1-x^3 & x^0-x^2 \end{pmatrix}. \tag{A.5}$$

The Poincaré patch introduced in the Gauss decomposition, $(u,x^\pm) \in \mathbb{R}^3$ covers exactly once the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Comparing eqs. (2.19) and (A.5) yields

$$x^0+x^2 = \frac{1}{u}\,, \qquad x^1 \pm x^3 = \frac{x^\pm}{u}\,, \qquad x^0-x^2 = u + \frac{x^+x^-}{u}\,.$$

The metric and antisymmetric tensor read:

$$ds^2 = \frac{du^2+dx^+dx^-}{u^2}\,, \qquad H = dB = \frac{du\wedge dx^+\wedge dx^-}{u^3}\,. \tag{A.7}$$

The isometry group of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ group manifold is generated by left or right actions on g: $g\to hg$ or $g\to gh$ $\forall h\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. From the four-dimensional point of view, it is generated by the Lorentz boosts or rotations $\zeta_{ab} = i\,(x_a\partial_b - x_b\partial_a)$ with $x_a = \eta_{ab}x^b$. We list here explicitly the six generators in the Poincaré coordinates, as well as the action they correspond to:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{1}{2}\left(\zeta_{32}-\zeta_{01}\right) = -i\left(\frac{x^-}{2}u\partial_u + \frac{1}{2}\left((x^-)^2-1\right)\partial_- - \frac{u^2}{2}\partial_+\right), \quad g\to \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}\sigma^1}g,\\
L_2 &= -\frac{1}{2}\left(\zeta_{02}-\zeta_{31}\right) = -i\left(\frac{1}{2}u\partial_u + x^-\partial_-\right), \quad g\to \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}\sigma^3}g\\
L_3 &= \frac{1}{2}\left(\zeta_{03}-\zeta_{12}\right) = i\left(\frac{x^-}{2}u\partial_u + \frac{1}{2}\left((x^-)^2+1\right)\partial_- - \frac{u^2}{2}\partial_+\right), \quad g\to \mathrm{e}^{i\frac{\lambda}{2}\sigma^2}g,\\
R_1 &= \frac{1}{2}\left(\zeta_{01}+\zeta_{32}\right) = i\left(\frac{x^+}{2}u\partial_u + \frac{1}{2}\left((x^+)^2-1\right)\partial_+ - \frac{u^2}{2}\partial_-\right), \quad pg\to g\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}\sigma^1},\\
R_2 &= \frac{1}{2}\left(\zeta_{31}-\zeta_{02}\right) = -i\left(\frac{1}{2}u\partial_u + x^+\partial_+\right), \quad g\to g\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}\sigma^3}\\
R_3 &= \frac{1}{2}\left(\zeta_{03}+\zeta_{12}\right) = -i\left(\frac{x^+}{2}u\partial_u + \frac{1}{2}\left((x^+)^2+1\right)\partial_+ - \frac{u^2}{2}\partial_-\right), \quad g\to g\mathrm{e}^{i\frac{\lambda}{2}\sigma^2}\,.
\end{aligned}$$

Both sets satisfy the algebra (A.1). Notice also that in terms of Euler angles defined by

$$g = \mathrm{e}^{i(t+\phi)\sigma_2/2}\mathrm{e}^{r\sigma_1}\mathrm{e}^{i(t-\phi)\sigma_2/2}\,, \tag{A.8}$$

L_3 and R_3 simplify considerably:

$$L_3+R_3 = -i\partial_t\,, \qquad L_3-R_3 = -i\partial_\phi\,; \tag{A.9}$$

these generate time translations and rotations around the center.

JHEP10(2003)028

We will now focus on the WZW model on $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. The above isometries turn into symmetries of the action displayed in eq. (2.18), leading thereby to conserved currents. In writing eq. (2.20), we have chosen a gauge for the B field:

$$B = -\frac{1}{2u^2} dx^+ \wedge dx^- \,.$$

The two-form is not invariant under $R_{1,3}$ and $L_{1,3}$, and the action (2.20) leads correspondingly to boundary terms which must be properly taken into account in order to reach the conserved currents. The latter can be put in an improved-Noether form, in which they have only holomorphic (for L_i's) or anti-holomorphic (for R_j's) components. These are called $J^i(z)$ and $\bar{J}^j(\bar{z})$ respectively. Their expressions are the following:

$$\begin{aligned} J^1(z) \pm J^3(z) &= -\frac{k}{8\pi}\mathrm{Tr}\left(\sigma^1 \mp i\sigma^2\right)\partial g\, g^{-1}\,, & J^2(z) &= -\frac{k}{8\pi}\mathrm{Tr}\sigma^3 \partial g\, g^{-1}\,, \\ \bar{J}^1(\bar{z}) \pm \bar{J}^3(\bar{z}) &= \frac{k}{8\pi}\mathrm{Tr}\left(\sigma^1 \pm i\sigma^2\right) g^{-1}\bar{\partial} g\,, & \bar{J}^2(\bar{z}) &= -\frac{k}{8\pi}\mathrm{Tr}\sigma^3 g^{-1}\bar{\partial} g\,. \end{aligned}$$

These yield in Poincaré coordinates:

$$J^1 + J^3 = -\frac{k}{4\pi}\frac{\partial x^+}{u^2} = -\frac{k}{4\pi} J \tag{A.11}$$

$$J^1 - J^3 = \frac{k}{4\pi}\left(2x^- \frac{\partial u}{u} - \partial x^- + (x^-)^2 \frac{\partial x^+}{u^2}\right) \tag{A.12}$$

$$J^2 = \frac{k}{4\pi}\left(\frac{\partial u}{u} + x^- \frac{\partial x^+}{u^2}\right), \tag{A.13}$$

$$\bar{J}^1 + \bar{J}^3 = \frac{k}{4\pi}\frac{\bar{\partial} x^-}{u^2} = \frac{k}{4\pi}\bar{J} \tag{A.14}$$

$$\bar{J}^1 - \bar{J}^3 = \frac{k}{4\pi}\left(-2x^+ \frac{\bar{\partial} u}{u} + \bar{\partial} x^+ - (x^+)^2 \frac{\bar{\partial} x^-}{u^2}\right) \tag{A.15}$$

$$\bar{J}^2 = \frac{k}{4\pi}\left(\frac{\bar{\partial} u}{u} + x^+ \frac{\bar{\partial} x^-}{u^2}\right), \tag{A.16}$$

where J and $\bar{J}$ are the null currents introduced in eq. (2.21).

At the quantum level, these currents, when properly normalized, satisfy the following $\widehat{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})_{\mathrm{L}} \times \widehat{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})_{\mathrm{R}}$ OPA:[19]

$$\begin{aligned} J^3(z)J^3(0) &\sim -\frac{k}{2z^2}\,, \\ J^3(z)J^\pm(0) &\sim \pm\frac{J^\pm}{z}\,, \\ J^+(z)J^-(0) &\sim \frac{2J^3}{z} - \frac{k}{z^2}\,, \end{aligned} \tag{A.17}$$

and similarly for the right movers. Equivalently on the modes of these currents generate the affine Lie algebra:

$$\left[J^3_n, J^3_m\right] = -\frac{k}{2} n \delta_{m,-n}\,,$$

[19] In some conventions the level is $x = -k$. This allows to unify commutation relations for the affine $\widehat{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})_x$ and $\widehat{\mathrm{SU}}(2)_x$ algebras. Unitarity demands $x < -2$ for the former and $0 < x$ with integer x for the latter.

JHEP10(2003)028

$$
\begin{aligned}
\left[J_n^3, J_m^\pm\right] &= \pm J_{n+m}^\pm, \\
\left[J_n^+, J_m^-\right] &= 2J_{n+m}^3 - kn\delta_{m,-n}\,.
\end{aligned}
$$

The Virasoro algebra generators of the conformal field theory are built out of these currents:

$$
\begin{aligned}
L_0 &= \frac{-1}{k-2}\left[\frac{1}{2}\left(J_0^+J_0^- + J_0^-J_0^+\right) + (J_0^3)^2 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(J_{-m}^+J_m^- + J_{-m}^-J_m^+ + 2J_{-m}^3J_m^3\right)\right] \\
L_n &= \frac{-1}{k-2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(J_{n-m}^+J_m^- + J_{n-m}^-J_m^+ + 2J_{n-m}^3J_m^3\right).
\end{aligned}
$$

The central charge is $c = 3 + 6/(k-2)$.

Lowest-weight representation of this CFT can be constructed by using the standard rule: start with a set of primary states annihilated by the operators J_n^i with $n \geq 1$; these ground states fall into representations of the global algebra generated by the zero modes $J_0^{\pm,3}$. The module is then constructed by acting with the creation operators J_{-n}^i $(n \geq 1)$.

Because the metric of the algebra is indefinite, the representations of the affine algebra will contain negative norm states, and the CFT is not unitary. However, by using the Virasoro constraints it is possible to construct a unitary string theory containing the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ CFT. Since the level 0 generators commute with the Virasoro algebra, the spectrum of the string theory must be constructed out of unitary representations of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. The unitary representations relevant here are: the *discrete representations* $\mathcal{D}^\pm(j)$ with $j > 0$ and the *principal continuous representations* $\mathcal{C}_p(b,a)$. The second step in the proof of the unitarity of the spectrum is to show that the negative norm states obtained with the creation operators are removed at each level by the Virasoro constraints. For the discrete representations, this is true only if the spin of the allowed representations is bounded: $0 < j < k/2$. This is not consistent with the general structure of string theory ; in fact assuming that the internal CFT contributes positively to L_0, this restriction on the spin puts an *absolute upper bound* on the level of string excitations: $N \leq 1 + k/4$. The case of continous representations is worse: the only allowed states are tachyons.

From the representations given above, it is possible to construct new ones by acting with an automorphism of the affine algebra called *spectral flow* $(w \in \mathbb{Z})$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{J}_n^3 &= J_n^3 - \frac{k}{2}w\;\delta_{n,0}\,, \\
\tilde{J}_n^\pm &= J_{n\pm w}^\pm\,.
\end{aligned}
$$

This solves the above consistency problem. The eigenvalues of the states are then shifted according to:

$$
\tilde{m} = m - \frac{k}{2}w\,, \qquad \tilde{\bar{m}} = \bar{m} - \frac{k}{2}w\,,
$$

and the Virasoro generators as:

$$
\tilde{L}_n = L_n + wJ_n^3 - \frac{k}{4}w^2\delta_{n,0} = L_n + w\tilde{J}_n^3 + \frac{k}{4}w^2\delta_{n,0}\,.
$$

JHEP10(2003)028

The flowed representations obtained from the lowest-weight representations constructed above are generically not bounded from below ; after imposing the Virasoro constraints, one can show that the physical spectrum of the string theory still contains only positive norm states.

B. Free-boson conformal blocks

The generic conformal blocks for a free compactified boson are the U(1) characters,

$$\zeta\begin{bmatrix}\omega\\ \mu\end{bmatrix}\left(R^2\right) = \frac{R}{\sqrt{\tau_2}}\exp-\frac{\pi R^2}{\tau_2}\left|\omega\tau-\mu\right|^2, \tag{B.1}$$

where R is the compactification radius (imaginary for a time-like boson), and ω, μ need not be integers.

The partition function for an ordinary, free compactified boson reads (in the lagrangian representation):

$$Z(R) = \frac{\Gamma_{1,1}(R)}{\eta\bar{\eta}} = \frac{1}{\eta\bar{\eta}}\sum_{m,w\in\mathbb{Z}}\zeta\begin{bmatrix}w\\ m\end{bmatrix}\left(R^2\right). \tag{B.2}$$

Notice that for $(\omega,\mu)\in\mathbb{R}^2$ in (B.1), a modular-invariant combination is provided by

$$\tilde{Z}(R) = \frac{1}{\eta\bar{\eta}}\int_{\mathbb{R}^2} d\omega\, d\mu\, R^2\,\zeta\begin{bmatrix}\omega\\ \mu\end{bmatrix}\left(R^2\right) \tag{B.3}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta}}, \tag{B.4}$$

which is the partition function of a decompactified free boson (the measure $d\omega\, d\mu\, R^2$ ensures the correct scaling of with R).

Bosons can also be twisted or shifted. This corresponds to ordinary or freely acting orbifolds. We will first focus on $\mathbb{Z}_N$ shifts, whose spectra are also captured in eq. (B.1). The shifted-partition-function sectors read in this case:

$$Z\begin{bmatrix}h\\ g\end{bmatrix}(R) = \frac{\Gamma_{1,1}\left[\begin{smallmatrix}h\\ g\end{smallmatrix}\right](R)}{\eta\bar{\eta}} = \frac{1}{\eta\bar{\eta}}\sum_{m,w\in\mathbb{Z}}\zeta\begin{bmatrix}w+h/N\\ m+g/N\end{bmatrix}\left(R^2\right), \quad h,g\in\{0,\dots,N-1\}, \tag{B.5}$$

and satisfy the periodicity conditions

$$Z\begin{bmatrix}h\\ g\end{bmatrix}(R) = Z\begin{bmatrix}h+N\\ g\end{bmatrix}(R) = Z\begin{bmatrix}h\\ g+N\end{bmatrix}(R). \tag{B.6}$$

The basic properties of the quantities introduced so far are summarized as follows:

$$\tau\to\tau+1\ :\ \zeta\begin{bmatrix}\omega\\ \mu\end{bmatrix}\left(R^2\right)\to\zeta\begin{bmatrix}\omega\\ \mu-\omega\end{bmatrix}\left(R^2\right),$$

$$\tau\to-\frac{1}{\tau}\ :\ \zeta\begin{bmatrix}\omega\\ \mu\end{bmatrix}\left(R^2\right)\to|\tau|\zeta\begin{bmatrix}\mu\\ -\omega\end{bmatrix}\left(R^2\right),$$

JHEP10(2003)028

and

$$\frac{1}{N}\sum_{h,g=0}^{N-1} Z\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}(R) = Z\left(\frac{R}{N}\right). \tag{B.7}$$

Notice finally that the duality symmetry of the partition function (B.2), namely $Z(R) = Z\left(R^{-1}\right)$, does not survive the $\mathbb{Z}_N$ shift. This becomes clear in the following identity, obtained by double Poisson resummation:

$$\sum_{m,w\in\mathbb{Z}} \zeta\begin{bmatrix}w+h/N\\m+g/N\end{bmatrix}\left(R^{-2}\right) = \sum_{y,n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{N}(ng-yh)}\zeta\begin{bmatrix}n\\y\end{bmatrix}\left(R^{2}\right).$$

As a consequence, the two limits ($R\to 0$ or ∞) of (B.5) are distinct:

$$Z\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}(R) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} R/\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta} & \text{for } h=g=0\,,\\ 0 & \text{otherwise}\,,\end{cases} \tag{B.9}$$

whereas

$$Z\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}(R) \underset{R\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{R\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta}} \quad \forall h,g\,, \tag{B.10}$$

up to exponentially suppressed terms.[20]

We now consider $\mathbb{Z}_N$ twists of a two-torus, for $N\leq 4$. The corresponding sums read:

$$\begin{aligned} Z_{2,2}\begin{bmatrix}2h/N\\2g/N\end{bmatrix} &= \frac{\Gamma_{2,2}(T,U)}{\eta^2\bar{\eta}^2} \qquad \text{for} \qquad h=g=0\,,\\ &= 4\frac{\eta\bar{\eta}}{\left|\vartheta\left[\begin{smallmatrix}1+2h/N\\1-2g/N\end{smallmatrix}\right](0|\tau)\right|^2}\sin^2\pi\frac{\Lambda(h,g)}{N} \quad \text{otherwise}\,, \end{aligned} \tag{B.11}$$

where T,U are the usual T^2-compactification moduli. Here $\Lambda(h,g)$ is an integer which is correlated to the number of fixed points of the torus, depending of the twisted sector under consideration. In the case of a T^4, the $\mathbb{Z}_N$ twists give rise to twisted sectors which are the square of the those given in eq. (B.11). The $T^2/\mathbb{Z}_N$ twisted partition function reads:

$$Z^{\text{twisted}}_{T^2/\mathbb{Z}_N}(T,U) = \frac{1}{N}\sum_{h,g=0}^{N-1} Z_{2,2}\begin{bmatrix}2h/N\\2g/N\end{bmatrix}. \tag{B.12}$$

Shifts and twists can be combined. We will consider here two cases, which happen to play a role in the analysis of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ and of its cosets. The first is a $\mathbb{Z}_N$ orbifold of a compact boson of radius R times a two-torus. The $\mathbb{Z}_N$ acts as a twist on the T^2 and as a shift on the orthogonal S^1. The order of the orbifold is restricted to $N\leq 4$ by the symmetries of the lattice of the two-torus. The partition function for this model reads:

$$Z_{\mathbb{Z}_N} = \frac{1}{N}\sum_{h,g=0}^{N-1}\frac{\Gamma_{1,1}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right](R)}{\eta\bar{\eta}} Z_{2,2}\begin{bmatrix}2h/N\\2g/N\end{bmatrix}$$

[20] When h/N and g/N become continuous variables, δ-functions appear, which must be carefully normalized.

JHEP10(2003)028

$$= \frac{1}{N}\frac{\Gamma_{1,1}(R)\,\Gamma_{2,2}(T,U)}{\eta^3\bar{\eta}^3} +$$
$$+\frac{1}{N}\sum_{(h,g)\neq(0,0)} 4\sin^2\pi\frac{\Lambda(h,g)}{N}\frac{\mathrm{e}^{2\pi\tau_2 h^2/N^2}}{\left|\vartheta_1\left(\frac{h\tau-g}{N}|\tau\right)\right|^2}\sum_{m,w\in\mathbb{Z}}\zeta\begin{bmatrix}w+h/N\\ m+g/N\end{bmatrix}(R^2). \quad \text{(B.13)}$$

Similarly, we can consider a $\mathbb{Z}_N\times\mathbb{Z}_N$ orbifold of four free bosons. The first $\mathbb{Z}_N$ acts as a shift on a compact boson of radius R_1 and as a twist on a T^2; the second $\mathbb{Z}_N$ acts as a shift on the compact boson of radius R_1 and similarly on another compact boson of radius R_2. The partition function now reads:

$$\begin{aligned}
Z_{\mathbb{Z}_N\times\mathbb{Z}_N} &= \frac{1}{N^2}\sum_{h_1,g_1=0}^{N-1}\sum_{h_2,g_2=0}^{N-1}\frac{\Gamma_{1,1}\left[\begin{smallmatrix}h_1-h_2\\ g_1-g_2\end{smallmatrix}\right](R_1)}{\eta\bar{\eta}}\frac{\Gamma_{1,1}\left[\begin{smallmatrix}h_2\\ g_2\end{smallmatrix}\right](R_2)}{\eta\bar{\eta}}Z_{2,2}\begin{bmatrix}2h_1/N\\ 2g_1/N\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{N^2}\frac{\Gamma_{1,1}(R_1)\,\Gamma_{1,1}(R_2)\,\Gamma_{2,2}(T,U)}{\eta^4\bar{\eta}^4}\\
&\quad+\frac{1}{N^2}\sum_{(h_1,g_1)\neq(0,0)}\frac{\Gamma_{1,1}\left[\begin{smallmatrix}h_1\\ g_1\end{smallmatrix}\right](R_1)\,\Gamma_{1,1}(R_2)}{\eta^2\bar{\eta}^2}Z_{2,2}\begin{bmatrix}2h_1/N\\ 2g_1/N\end{bmatrix}+\\
&\quad+\frac{1}{N^2}\sum_{(h_2,g_2)\neq(0,0)}\frac{\Gamma_{1,1}\left[\begin{smallmatrix}-h_2\\ -g_2\end{smallmatrix}\right](R_1)\,\Gamma_{1,1}\left[\begin{smallmatrix}h_2\\ g_2\end{smallmatrix}\right](R_2)\,\Gamma_{2,2}(T,U)}{\eta^4\bar{\eta}^4}+\\
&\quad+\frac{1}{N^2}\frac{1}{\eta\bar{\eta}}\sum_{(h_1,g_1)\neq(0,0)}\sum_{(h_2,g_2)\neq(0,0)}4\sin^2\pi\frac{\Lambda(h_1,g_1)}{N}\frac{\mathrm{e}^{2\pi\tau_2 h_1^2/N^2}}{\left|\vartheta_1\left(\frac{h_1\tau-g_1}{N}|\tau\right)\right|^2}\times\\
&\quad\times\sum_{m_1,w_1,m_2,w_2\in\mathbb{Z}}\zeta\begin{bmatrix}w_1+(h_1-h_2)/N\\ m_1+(g_1-g_2)/N\end{bmatrix}(R_1^2)\;\zeta\begin{bmatrix}w_2+h_2/N\\ m_1+g_2/N\end{bmatrix}(R_2^2)\,. \quad \text{(B.14)}
\end{aligned}$$

Models based on freely acting orbifolds exhibit rich decompactification properties [67, 68, 69], which are due to the breaking of the duality symmetries. There are two limits of interest[21] here:

$$Z_{\mathbb{Z}_N\times\mathbb{Z}_N}\underset{R_2\to 0}{\longrightarrow}\frac{1}{R_2\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta}}Z\left(\frac{R_1}{N}\right)Z^{\text{twisted}}_{T^2/\mathbb{Z}_N}(T,U) \quad \text{(B.15)}$$

and

$$Z_{\mathbb{Z}_N\times\mathbb{Z}_N}\underset{R_2\to\infty}{\longrightarrow}\frac{R_2}{N\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta}}Z_{\mathbb{Z}_N}(R_1,T,U) \quad \text{(B.16)}$$

obtained by using the above equations. In the first limit the two circles decouple from the T^2, and the only reminiscence of the second $\mathbb{Z}_N$ shift is the rescaling R_1/N. In the second limit, only the decompactifying circle decouples.

C. Derivation of the spectrum

C.1 The spectrum of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

In this appendix we solve for the constraints s_1 and s_2 to obtain the spectrum of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, following the lines of [14] and [18]. The total exponential factor in (3.6) after expanding

[21] Similarly, for $R_1\to 0$ or ∞, we obtain respectively (B.15) or (B.16), with $R_1\leftrightarrow R_2$.

JHEP10(2003)028

the ϑ_1 function and integrating t_2 is

$$\exp\Big\{ -\pi\tau_2 k(w_+ + s_1)(w_- - 2t_1 + s_1) - 2i\pi\tau_1 n(w_+ + s_1) + \\ + 2i\pi n s_2 - 4\pi\tau_2 \frac{1}{4(k-2)} + 2\pi\tau_2 s_1^2 - 2\pi\tau_2 \left(q + \bar{q} + 1\right) s_1 + \\ + 2i\pi\tau_1 \left(q - \bar{q}\right) s_1 - 2i\pi \left(q - \bar{q}\right) s_2 - 2\pi\tau_2 \left(N + \bar{N}\right) + 2i\pi\tau_1 \left(N - \bar{N}\right) \Big\},$$

where q is the number of $J^+_{n<0}$ minus $J^-_{n<0}$ operators acting on the ground state, and similarly for $\bar{q}$. The integration over s_2 gives simply the constraint: $q - \bar{q} = n$. The remaining integration over s_1 reads:

$$\int_0^1 ds_1 \exp\left\{-2\pi\tau_2 s_1 \left(k(w - t_1) + q + \bar{q} + 1\right) - (k-2)\pi\tau_2 s_1^2\right\}.$$

As in [18], we introduce an auxiliary variable s in order to integrate the constraint:

$$\exp\left\{-2\pi\tau_2 s_1 \left(k(w - t_1) + q + \bar{q} + 1\right) - (k-2)\pi\tau_2 s_1^2\right\} = \\ = 2\sqrt{\frac{\tau_2}{k-2}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \ \exp\left\{-4\pi\tau_2 \frac{s^2}{k-2} - 2\pi\tau_2 \left(2is + q + \bar{q} + 1 + k(w - t_1)\right) s_1\right\}.$$

We would like to emphasize that s is not just an auxiliary variable but stands for the momentum of the Liouville field coupled to the other degrees of freedom of the theory. At this stage, the interpretation of the partition function is clear in the free-field representation (see section 3.2). In this case, the BRST constraint relates the Liouville momentum, the oscillator number and the lattice of the light-cone coordinates. The integration over s_1 gives finally

$$\frac{\mathrm{e}^{-4\pi\tau_2 \frac{s^2}{k-2}}}{\pi\sqrt{\tau_2(k-2)}} \left[\frac{1}{2is + q + \bar{q} + 1 + k(w - t_1)} - \frac{\mathrm{e}^{-2\pi\tau_2(2is + q + \bar{q} + 1 + k(w - t_1))}}{2is + q + \bar{q} + 1 + k(w - t_1)}\right].$$

We complete the square in the second term by shifting the integration contour of s in the complex plane: $s \to s - i(k-2)/2$. We thus pick up residues corresponding to the discrete representations, for

$$\mathrm{Im} s = \frac{q + \bar{q} + 1 + k(w - t_1)}{2}.$$

These poles are located in the strip

$$-(k-2) < q + \bar{q} + 1 + k(w - t_1) < 0\,,$$

and correspond to the states of the discrete spectrum, obeying the constraint

$$\tilde{m} + \tilde{\bar{m}} = 2j + q + \bar{q} = -k(w - t_1)\,.$$

Hence, we obtain the discrete representations in the correct range given in [13]:

$$\frac{1}{2} < j < \frac{k-1}{2}\,.$$

We note here that due to the continuous shift t_1 the spin is not quantized by the constraint.

JHEP10(2003)028

Putting all factors together, we obtain the following weights for the discrete spectrum:

$$L_0 = -\frac{j(j-1)}{k-2} + w_+\left(-\tilde{m} - \frac{k}{4}w_+\right) + N\,,$$
$$\bar{L}_0 = -\frac{j(j-1)}{k-2} + w_+\left(-\tilde{\bar{m}} - \frac{k}{4}w_+\right) + \bar{N}\,.$$

The remaining part of the partition function reads:

$$\sum_{w,w_+}\int ds\left[\frac{1}{2is+q+\bar{q}+1+k(w-t_1)} - \frac{\mathrm{e}^{-2\pi\tau_2(q+\bar{q}+k(w-t_1+1/2))}}{2is+q+\bar{q}-1+k(w-t_1+1)}\right]\times$$
$$\times\exp\left\{-2\pi\tau_2\left(2\frac{s^2}{k-2} + kw_+\left(w-t_1-\frac{w_+}{2}\right) + N + \bar{N} - 2\right) + 2i\pi\tau_1(N-\bar{N}-nw_+)\right\}.$$

In order to identify the continuous part of the spectrum, we note that the exponent of the second term, namely

$$-2\pi\tau_2\left(2\frac{s^2}{k-2} + 2(w_+ + 1)\left(k(w-t_1) - \frac{k}{2} - \frac{k}{4}(w_+ + 1)\right) + N + q + \bar{N} + \bar{q} - 2\right),$$

can be seen as the spectral flow by one unit of the w_+ sector of the theory: $w_+ \to w_+ + 1$, $m \to m - k/2$, $\bar{m} \to \bar{m} - k/2$, $N \to N + q$, $\bar{N} \to \bar{N} + \bar{q}$. We can then combine the first term from the w_+ sector and the second term from the flowed $w_+ - 1$ sector to obtain:

$$\sum_{w,w_+}\int ds\,\left[\frac{1}{2is+q+\bar{q}+1+k(w-t_1)} - \frac{1}{2is+q+\bar{q}-1+k(w-t_1)}\right]\times$$
$$\times\exp\left\{-2\pi\tau_2\left(\frac{s^2}{k-2} + kw_+\left(w-t_1-\frac{w_+}{2}\right) + N + \bar{N} - 2\right) + 2i\pi\tau_1\left(N-\bar{N}-nw_+\right)\right\}.$$

The second line represents the density of long-string states, and gives a divergence while summing over q. By regularizing the sum as explained in [14],

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{A+r}\mathrm{e}^{-r\epsilon} = \log\epsilon - \frac{d}{dA}\log\Gamma(A)\,,$$

we obtain the density of states of the continuous spectrum:

$$\rho(s) = \frac{1}{\pi}\log\epsilon + \frac{1}{4\pi i}\frac{d}{ds}\log\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-is-\tilde{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-is+\tilde{\bar{m}}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+is-\tilde{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+is+\tilde{\bar{m}}\right)}\,.$$

The weights of the continuous spectrum are

$$L_0 = \frac{s^2+1/4}{k-2} + w_+\left(-\tilde{m} - \frac{k}{4}w_+\right) + N\,,$$
$$\bar{L}_0 = \frac{s^2+1/4}{k-2} + w_+\left(-\tilde{\bar{m}} - \frac{k}{4}w_+\right) + \bar{N}\,,$$

with $\tilde{m} + \tilde{\bar{m}} = -k(w-t_1)$ and $\tilde{m} - \tilde{\bar{m}} = n$. Therefore we have identified both types of representations, including the sectors obtained by spectral flow.

JHEP10(2003)028

C.2 The spectrum of the null-deformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

We now derive the first-order spectrum of the null-deformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ theory, whose partition function is given in (5.30).We expand, as previously, all oscillator terms and obtain the overall exponential factor

$$\exp\Bigg\{-2\pi\tau_2\alpha k w_+(w-t_1-w_+/2)-4\pi\tau_2\frac{s^2+1/4}{k-2}-2i\pi\tau_1 n w_+ \\ +2i\pi s_2(n-q+\bar{q})-2\pi\tau_2\left(2i\sqrt{\frac{\alpha k-2}{k-2}}s+q+\bar{q}+1+\alpha k(w-t_1)\right)s_1\Bigg\},$$

where

$$\alpha=\frac{M^2+1}{M^2}\,.$$

After integrating over s_1 we are left with

$$\frac{\exp\left\{-4\pi\tau_2\frac{s^2+1/4}{k-2}\right\}}{2\pi\tau_2\left(2i\sqrt{\frac{\alpha k-2}{k-2}}s+q+\bar{q}+1+\alpha k(w-t_1)\right)} \\ -\frac{\exp\left\{-2\pi\tau_2\left(2\frac{s^2+1/4}{k-2}+2i\sqrt{\frac{\alpha k-2}{k-2}}s+q+\bar{q}+1+\alpha k(w-t_1)\right)\right\}}{2\pi\tau_2\left(2i\sqrt{\frac{\alpha k-2}{k-2}}s+q+\bar{q}+1+\alpha k(w-t_1)\right)}\,.$$

As previously, we complete the square in the second term by shifting the Liouville momentum:

$$s\to s-\frac{i}{2}\sqrt{(\alpha k-2)(k-2)}\,.$$

The poles corresponding to the discrete representations are now

$$\mathrm{Im}(s)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k-2}{\alpha k-2}}\,[q+\bar{q}+1+\alpha k(w-t_1)]\,;$$

they are located in the strip:

$$-\sqrt{(\alpha k-2)(k-2)}<q+\bar{q}+1+\alpha k(w-t_1)<0\,.$$

The deformed discrete spectrum, for $\alpha=1+\varepsilon$, $\varepsilon\ll 1$, reads:

$$\begin{aligned} L_0 &= -\frac{j(j-1)}{k-2}-w_+\left(\tilde{m}+\frac{\varepsilon}{2}(\tilde{m}+\tilde{\bar{m}})\right)-\frac{k}{4}(1+\varepsilon)w_+^2+N+ \\ &\quad+\frac{\varepsilon(1-2j)}{2(k-2)}\left(\tilde{m}+\tilde{\bar{m}}+\frac{k}{2(k-2)}(1-2j)\right), \\ \bar{L}_0 &= -\frac{j(j-1)}{k-2}-w_+\left(\tilde{\bar{m}}+\frac{\varepsilon}{2}(\tilde{m}+\tilde{\bar{m}})\right)-\frac{k}{4}(1+\varepsilon)w_+^2+\bar{N}+ \\ &\quad+\frac{\varepsilon(1-2j)}{2(k-2)}\left(\tilde{m}+\tilde{\bar{m}}+\frac{k}{2(k-2)}(1-2j)\right). \end{aligned} \tag{C.7}$$

JHEP10(2003)028

The last terms of both equations are due to the displacement of the poles corresponding to the discrete representations. By using the parameterization considered in the supersymmetric model, $\alpha k = p^2(k-2)+2$, the expressions are simpler: the poles of the discrete representations are now located at

$$\mathrm{Im}(s) = \frac{1}{2p}\left[q+\bar{q}+1+\left(2+(k-2)p^2\right)(w-t_1)\right],$$

inside the strip

$$-p(k-2) < q+\bar{q}+1+\left(2+(k-2)p^2\right)(w-t_1) < 0\,.$$

If we define, by analogy with the undeformed theory:

$$2\mathrm{Im}(s) \equiv 1-2j\,,$$

we find the discrete spectrum:

$$\begin{aligned} L_0 &= -\frac{j(j-1)}{k-2} - w_+\left(j+q+\frac{1-p}{2}(1-2j)\right) - \frac{p^2(k-2)+2}{4}w_+^2 + N\,,\\ \bar{L}_0 &= -\frac{j(j-1)}{k-2} - w_+\left(j+\bar{q}+\frac{1-p}{2}(1-2j)\right) - \frac{p^2(k-2)+2}{4}w_+^2 + \bar{N}\,. \end{aligned}$$

For the continuous spectrum, we use the spectral flow as in the undeformed case:

$$\left\{\frac{1}{2i\sqrt{\frac{\alpha k-2}{k-2}}s+q+\bar{q}+1+\alpha k(w-t_1)} - \frac{1}{2i\sqrt{\frac{\alpha k-2}{k-2}}s+q+\bar{q}-1+\alpha k(w-t_1+1)}\right\}\times$$
$$\exp\left\{-2\pi\tau_2\left(2\frac{s^2+1/4}{k-2} - w_+\alpha k(w-t_1) - \frac{\alpha k}{2}w_+^2 + N + \bar{N}\right) + 2i\pi\tau_1(N-\bar{N}-nw_+)\right\}.$$

This gives the deformed continuous spectrum at first order:

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{s^2+1/4}{k-2} - w_+\left(\tilde{m}+\frac{\varepsilon}{2}(\tilde{m}+\tilde{\bar{m}})\right) + \frac{k}{4}(1+\varepsilon)w_+^2 + N\,,\\ \bar{L}_0 &= \frac{s^2+1/4}{k-2} - w_+\left(\tilde{\bar{m}}+\frac{\varepsilon}{2}(\tilde{m}+\tilde{\bar{m}})\right) + \frac{k}{4}(1+\varepsilon)w_+^2 + \bar{N}\,, \end{aligned}$$

with the density of long-string states:

$$\begin{aligned} \rho(s) = \frac{1}{\pi}\log\epsilon + \frac{1}{4\pi i}\frac{d}{ds}\log\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\left(1+\frac{k\epsilon}{2(k-2)}\right)s-\tilde{m}-\frac{\tilde{m}+\tilde{\bar{m}}}{2}\epsilon\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\left(1+\frac{k\epsilon}{2(k-2)}\right)s-\tilde{m}-\frac{\tilde{m}+\tilde{\bar{m}}}{2}\epsilon\right)}\times\\ \times\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\left(1+\frac{k\epsilon}{2(k-2)}\right)s+\tilde{\bar{m}}+\frac{\tilde{m}+\tilde{\bar{m}}}{2}\epsilon\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\left(1+\frac{k\epsilon}{2(k-2)}\right)s+\tilde{\bar{m}}+\frac{\tilde{m}+\tilde{\bar{m}}}{2}\epsilon\right)}\,. \end{aligned}$$

JHEP10(2003)028

D. Theta functions

We recall here the basic properties of Jacobi functions. Our conventions are

$$\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(v|\tau)=\sum_{p\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{\pi i\tau\left(p+\frac{a}{2}\right)^2+2\pi i\left(v+\frac{b}{2}\right)\left(p+\frac{a}{2}\right)}$$

$a,b\in\mathbb{R}$, so that

$$\vartheta_1=\vartheta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\qquad \vartheta_2=\vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\qquad \vartheta_3=\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\qquad \vartheta_4=\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

We also recall that

$$\begin{aligned}\vartheta_1(v|\tau)&=-2q^{1/8}\sin\pi v\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\mathrm{e}^{2i\pi v}q^m\right)\left(1-q^m\right)\left(1-\mathrm{e}^{-2i\pi v}q^m\right),\\ \eta(\tau)&=q^{1/24}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^m\right),\end{aligned}$$

and

$$\vartheta_1'=-2\pi\eta^3=-\pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4\,,$$

where the prime stands for $\partial_v|_{v=0}$. Notice that

$$|\vartheta_1(a\tau+b|\tau)|^2=\mathrm{e}^{2\pi\tau_2a^2}\left|\vartheta\begin{bmatrix}1+2a\\1+2b\end{bmatrix}(0|\tau)\right|^2,$$

which leads in particular to the following:

$$\left|\vartheta\begin{bmatrix}1+2h/N\\1-2g/N\end{bmatrix}(0|\tau)\right|=\mathrm{e}^{-\pi\tau_2h^2/N^2}\left|\vartheta_1\left(\frac{h\tau-g}{N}|\tau\right)\right|. \tag{D.5}$$

Finally, the Riemann identity[22] reads:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+\mu ab}\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(v_0)\prod_{j=1}^{3}\vartheta\begin{bmatrix}a+h_j\\b+g_j\end{bmatrix}(v_j)=\\ &\quad=\vartheta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\frac{(-)^{\mu+1}v_0-\sum_j v_j}{2}\right)\prod_{j=1}^{3}\vartheta\begin{bmatrix}1-h_j\\1-g_j\end{bmatrix}\left(\frac{(-)^{\mu+1}v_0+\cdots-v_j+\cdots)}{2}\right),\end{aligned} \tag{D.6}$$

where the parameter $\mu=0$ or 1, and $\sum_j h_j=\sum_j g_j=0$.

References

[1] C.G. Callan Jr., J.A. Harvey and A. Strominger, *Worldbrane actions for string solitons*, *Nucl. Phys.* **B 367** (1991) 60.

[2] I. Antoniadis, S. Ferrara and C. Kounnas, *Exact supersymmetric string solutions in curved gravitational backgrounds*, *Nucl. Phys.* **B 421** (1994) 343 [hep-th/9402073].

[22] We use the short-hand notation $\vartheta\left[{a \atop b}\right](v)$ for $\vartheta\left[{a \atop b}\right](v|\tau)$.

JHEP10(2003)028

[3] K. Sfetsos, *Branes for Higgs phases and exact conformal field theories*, *J. High Energy Phys.* **01** (1999) 015 [hep-th/9811167].

[4] A. Giveon and D. Kutasov, *Little string theory in a double scaling limit*, *J. High Energy Phys.* **10** (1999) 034 [hep-th/9909110].

[5] E. Kiritsis, C. Kounnas, P.M. Petropoulos and J. Rizos, *Five-brane configurations without a strong coupling regime*, *Nucl. Phys.* **B 652** (2003) 165 [hep-th/0204201].

[6] I. Antoniadis, C. Bachas and A. Sagnotti, *Gauged supergravity vacua in string theory*, *Phys. Lett.* **B 235** (1990) 255.

[7] H.J. Boonstra, B. Peeters and K. Skenderis, *Brane intersections, anti-de sitter spacetimes and dual superconformal theories*, *Nucl. Phys.* **B 533** (1998) 127 [hep-th/9803231].

[8] J.M. Maldacena and A. Strominger, *AdS_3 black holes and a stringy exclusion principle*, *J. High Energy Phys.* **12** (1998) 005 [hep-th/9804085].

[9] A. Giveon, D. Kutasov and N. Seiberg, *Comments on string theory on AdS_3*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 733 [hep-th/9806194].

[10] J. Balog, L. O'Raifeartaigh, P. Forgacs and A. Wipf, *Consistency of string propagation on curved space-times: an* $\mathrm{SU}(1,1)$ *based counterexample*, *Nucl. Phys.* **B 325** (1989) 225.

[11] P.M.S. Petropoulos, *Comments on* $\mathrm{SU}(1,1)$ *string theory*, *Phys. Lett.* **B 236** (1990) 151.

[12] P.M. Petropoulos, *String theory on AdS_3: some open questions*, hep-th/9908189.

[13] J.M. Maldacena and H. Ooguri, *Strings in AdS_3 and* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *WZW model. I*, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2929 [hep-th/0001053].

[14] J.M. Maldacena, H. Ooguri and J. Son, *Strings in AdS_3 and the* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *WZW model. II: euclidean black hole*, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2961 [hep-th/0005183].

[15] J.M. Maldacena and H. Ooguri, *Strings in AdS_3 and the* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *WZW model. III: correlation functions*, *Phys. Rev.* **D 65** (2002) 106006 [hep-th/0111180].

[16] M. Henningson, S. Hwang, P. Roberts and B. Sundborg, *Modular invariance of* $\mathrm{SU}(1,1)$ *strings*, *Phys. Lett.* **B 267** (1991) 350.

[17] K. Gawędzki, *Noncompact WZW conformal field theories*, hep-th/9110076.

[18] A. Hanany, N. Prezas and J. Troost, *The partition function of the two-dimensional black hole conformal field theory*, *J. High Energy Phys.* **04** (2002) 014 [hep-th/0202129].

[19] E. Witten, *On string theory and black holes*, *Phys. Rev.* **D 44** (1991) 314.

[20] S. Förste, *A truly marginal deformation of* $\mathrm{SL}(2,R)$ *in a null direction*, *Phys. Lett.* **B 338** (1994) 36 [hep-th/9407198].

[21] C. Klimčík and A.A. Tseytlin, *Exact four-dimensional string solutions and toda like sigma models from 'null gauged' WZNW theories*, *Nucl. Phys.* **B 424** (1994) 71 [hep-th/9402120].

[22] A. Giveon, D. Kutasov and O. Pelc, *Holography for non-critical superstrings*, *J. High Energy Phys.* **10** (1999) 035 [hep-th/9907178].

[23] J.M. Maldacena, *The large-N limit of superconformal field theories and supergravity*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231 [hep-th/9711200].

JHEP10(2003)028

[24] H.J. Boonstra, K. Skenderis and P.K. Townsend, *The domain wall/QFT correspondence*, *J. High Energy Phys.* **01** (1999) 003 [hep-th/9807137].

[25] O. Aharony, M. Berkooz, D. Kutasov and N. Seiberg, *Linear dilatons, NS5-branes and holography*, *J. High Energy Phys.* **10** (1998) 004 [hep-th/9808149].

[26] N. Seiberg, *New theories in six dimensions and matrix description of M-theory on T^5 and $T^5/\mathbb{Z}_2$*, *Phys. Lett.* **B 408** (1997) 98 [hep-th/9705221].

[27] J.R. David, G. Mandal and S.R. Wadia, *Microscopic formulation of black holes in string theory*, *Phys. Rept.* **369** (2002) 549 [hep-th/0203048].

[28] J. de Boer, *Six-dimensional supergravity on $S^3 \times AdS_3$ and 2d conformal field theory*, *Nucl. Phys.* **B 548** (1999) 139 [hep-th/9806104].

[29] S.F. Hassan and A. Sen, *Marginal deformations of WZNW and coset models from $O(d,d)$ transformation*, *Nucl. Phys.* **B 405** (1993) 143 [hep-th/9210121].

[30] A. Giveon and E. Kiritsis, *Axial vector duality as a gauge symmetry and topology change in string theory*, *Nucl. Phys.* **B 411** (1994) 487 [hep-th/9303016].

[31] A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, *Target space duality in string theory*, *Phys. Rept.* **244** (1994) 77 [hep-th/9401139].

[32] G.T. Horowitz and A.A. Tseytlin, *On exact solutions and singularities in string theory*, *Phys. Rev.* **D 50** (1994) 5204 [hep-th/9406067].

[33] D. Gepner and Z.-a. Qiu, *Modular invariant partition functions for parafermionic field theories*, *Nucl. Phys.* **B 285** (1987) 423.

[34] L.J. Dixon, M.E. Peskin and J. Lykken, *$N = 2$ superconformal symmetry and* $\mathrm{SO}(2,1)$ *current algebra*, *Nucl. Phys.* **B 325** (1989) 329.

[35] N. Mohammedi, *On the unitarity of string propagation on* $\mathrm{SU}(1,1)$, *Int. J. Mod. Phys.* **A 5** (1990) 3201.

[36] S. Hwang, *No ghost theorem for* $\mathrm{SU}(1,1)$ *string theories*, *Nucl. Phys.* **B 354** (1991) 100.

[37] J.M. Evans, M.R. Gaberdiel and M.J. Perry, *The no-ghost theorem for AdS_3 and the stringy exclusion principle*, *Nucl. Phys.* **B 535** (1998) 152 [hep-th/9806024].

[38] E. Kiritsis, *Exact duality symmetries in CFT and string theory*, *Nucl. Phys.* **B 405** (1993) 109 [hep-th/9302033].

[39] Y. Hikida, K. Hosomichi and Y. Sugawara, *String theory on AdS_3 as discrete light-cone Liouville theory*, *Nucl. Phys.* **B 589** (2000) 134 [hep-th/0005065].

[40] P.A. Griffin and O.F. Hernandez, *Structure of irreducible* $\mathrm{SU}(2)$ *parafermion modules derived via the Feigin-Fuchs construction*, *Int. J. Mod. Phys.* **A 7** (1992) 1233.

[41] Y. Satoh, *Ghost-free and modular invariant spectra of a string in* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *and three-dimensional black hole geometry*, *Nucl. Phys.* **B 513** (1998) 213 [hep-th/9705208].

[42] E. Kiritsis, C. Kounnas and D. Lüst, *Superstring gravitational wave backgrounds with space-time supersymmetry*, *Phys. Lett.* **B 331** (1994) 321 [hep-th/9404114].

[43] T. Banks and L.J. Dixon, *Constraints on string vacua with space-time supersymmetry*, *Nucl. Phys.* **B 307** (1988) 93.

JHEP10(2003)028

[44] M. Ademollo et al., *Dual string models with nonabelian color and flavor symmetries*, *Nucl. Phys.* **B 114** (1976) 297.

[45] A. Sevrin, W. Troost and A. Van Proeyen, *Superconformal algebras in two-dimensions with* $N = 4$, *Phys. Lett.* **B 208** (1988) 447.

[46] C. Kounnas, M. Porrati and B. Rostand, *On* $N = 4$ *extended superliouville theory*, *Phys. Lett.* **B 258** (1991) 61.

[47] C. Kounnas, *Four-dimensional gravitational backgrounds based on* $N = 4$, $c = 4$ *superconformal systems*, *Phys. Lett.* **B 321** (1994) 26 [hep-th/9304102].

[48] I.T. Ivanov, B.-b. Kim and M. Roček, *Complex structures, duality and WZW models in extended superspace*, *Phys. Lett.* **B 343** (1995) 133 [hep-th/9406063].

[49] D. Gepner, *Space-time supersymmetry in compactified string theory and superconformal models*, *Nucl. Phys.* **B 296** (1988) 757.

[50] D. Berenstein and R.G. Leigh, *Spacetime supersymmetry in* AdS_3 *backgrounds*, *Phys. Lett.* **B 458** (1999) 297 [hep-th/9904040].

[51] D. Friedan, E.J. Martinec and S.H. Shenker, *Conformal invariance, supersymmetry and string theory*, *Nucl. Phys.* **B 271** (1986) 93.

[52] A. Pakman, *Unitarity of supersymmetric* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\,\mathrm{U}(1)$ *and no-ghost theorem for fermionic strings in* $AdS_3 \times N$, *J. High Energy Phys.* **01** (2003) 077 [hep-th/0301110].

[53] M. Bershadsky, C. Vafa and V. Sadov, *D-branes and topological field theories*, *Nucl. Phys.* **B 463** (1996) 420 [hep-th/9511222].

[54] A. Cappelli, C. Itzykson and J.B. Zuber, *The ade classification of minimal and* $A_1(1)$ *conformal invariant theories*, *Commun. Math. Phys.* **113** (1987) 1.

[55] S. Elitzur, A. Forge and E. Rabinovici, *Some global aspects of string compactifications*, *Nucl. Phys.* **B 359** (1991) 581.

[56] S. Förste and D. Roggenkamp, *Current current deformations of conformal field theories and WZW models*, *J. High Energy Phys.* **05** (2003) 071 [hep-th/0304234].

[57] D. Kutasov, F. Larsen and R.G. Leigh, *String theory in magnetic monopole backgrounds*, *Nucl. Phys.* **B 550** (1999) 183 [hep-th/9812027].

[58] T.H. Buscher, *A symmetry of the string background field equations*, *Phys. Lett.* **B 194** (1987) 59.

[59] R. Dijkgraaf, H. Verlinde and E. Verlinde, *String propagation in a black hole geometry*, *Nucl. Phys.* **B 371** (1992) 269.

[60] I. Bakas and E. Kiritsis, *Beyond the large-N limit: nonlinear* W_∞ *as symmetry of the* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ *coset model*, *Int. J. Mod. Phys.* **A 7** (1992) 55 [hep-th/9109029].

[61] V. Balasubramanian, P. Kraus and A.E. Lawrence, *Bulk vs. boundary dynamics in anti-de Sitter spacetime*, *Phys. Rev.* **D 59** (1999) 046003 [hep-th/9805171].

[62] C.V. Johnson, A.W. Peet and J. Polchinski, *Gauge theory and the excision of repulson singularities*, *Phys. Rev.* **D 61** (2000) 086001 [hep-th/9911161].

[63] D. Kutasov, *Introduction to little string theory*, in *ICTP Spring School on Superstrings and Related Matters*, Trieste, Italy, April 2–10, 2001.

JHEP10(2003)028

[64] J.M. Maldacena and A. Strominger, *Semiclassical decay of near-extremal fivebranes*, *J. High Energy Phys.* **12** (1997) 008 [hep-th/9710014].

[65] K. Hori and A. Kapustin, *Duality of the fermionic 2d black hole and $N = 2$ Liouville theory as mirror symmetry*, *J. High Energy Phys.* **08** (2001) 045 [hep-th/0104202].

[66] B.G. Wybourne, *Classical groups for physicists*, Wiley, New York, 1974.

[67] E. Kiritsis and C. Kounnas, *Perturbative and non-perturbative partial supersymmetry breaking: $N = 4 \to N = 2 \to N = 1$*, *Nucl. Phys.* **B 503** (1997) 117 [hep-th/9703059].

[68] E. Kiritsis, C. Kounnas, P.M. Petropoulos and J. Rizos, *Solving the decompactification problem in string theory*, *Phys. Lett.* **B 385** (1996) 87 [hep-th/9606087].

[69] E. Kiritsis, C. Kounnas, P.M. Petropoulos and J. Rizos, *String threshold corrections in models with spontaneously broken supersymmetry*, *Nucl. Phys.* **B 540** (1999) 87 [hep-th/9807067].

JHEP10(2003)028

Publication n°2 : «Extended SL(2,R)/U(1) characters, or modular properties of a simple non-rational conformal field theory».

Published by Institute of Physics Publishing for SISSA/ISAS

Received: *March 31, 2004*
Revised: *April 19, 2004*
Accepted: *April 19, 2004*

Extended $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$ characters, or modular properties of a simple non-rational conformal field theory*

Dan Israël,[a] Ari Pakman[ab] and Jan Troost[a]

[a] *Laboratoire de Physique Théorique de l'École Normale Supérieure*†
24, Rue Lhomond 75231 Paris Cedex 05, France
[b] *Racah Institute of Physics, The Hebrew University*
Jerusalem 91904, Israel
E-mail: israel@lpt.ens.fr, pakman@phys.huji.ac.il, troost@lpt.ens.fr

Abstract: We define extended $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$ characters which include a sum over winding sectors. By embedding these characters into similarly extended characters of $N = 2$ algebras, we show that they have nice modular transformation properties. We calculate the modular matrices of this simple but non-trivial non-rational conformal field theory explicitly . As a result, we show that discrete $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ representations mix with continuous $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ representations under modular transformations in the coset conformal field theory. We comment upon the significance of our results for a general theory of non-rational conformal field theories.

Keywords: Conformal Field Models in String Theory, Black Holes in String Theory, Extended Supersymmetry.

*Research partially supported by the EEC under the contracts HPRN-CT-2000-00122, HPRN-CT-2000-00131.

†Unité mixte du CNRS et de l'Ecole Normale Supérieure, UMR 8549.

© SISSA/ISAS 2004

JHEP04(2004)043

Contents

1. Introduction **1**

2. The extended characters **2**

3. Modular transformation of extended continuous characters **5**

4. Modular transformations of extended discrete coset characters: strategy **6**

5. Embedding $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ in $N=2$ **7**

6. The $N=2$ modular transformations **11**

7. The modular transformations decomposed **13**

8. Conclusions **16**

A. Lemma for $N=2$ transformations **17**

B. Computing $S^2=C$ **20**

1. Introduction

A systematic theory of rational conformal field theories has been established. It includes modular transformation properties of characters, the construction of modular invariant partition functions, and, for example, a fairly systematic analysis of boundary conditions consistent with the chiral algebra. The general theory has proven extremely useful in constructing (supersymmetric) string theory compactifications [1] and their D-branes (apart from having applications in two-dimensional physical systems at criticality).

A similarly systematic study of non-rational conformal field theories is lacking. Recent progress in the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\,\mathrm{SU}(2)$ conformal field theory (see e.g. [2]) as well as in Liouville theory (see e.g. [3, 4]) and the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ conformal field theory indicates that such a theory is in reach. It would seem imperative then to analyze the features of simple non-rational conformal field theories that have proven instrumental in the theory of their rational cousins. One such feature is the modular transformation properties of the chiral characters of the conformal field theory. We study these transformation properties for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ conformal field theory in this paper. The $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ conformal field theory is perhaps the algebraically simplest of non-trivial non-rational conformal field theories, and it has importance as providing a black hole background in string theory [5]–[10].

In a larger framework, it is clear that a better understanding of non-rational conformal field theories should lead to a firmer grip on non-trivially curved non-compact string theory

JHEP04(2004)043

vacua, and therefore to a better understanding of the stringy theory of quantum gravity. Particular examples directly related to our paper include cosmological backgrounds and NS5-brane holography. Let us proceed then to lay bare some of the basic properties of a simple non-rational conformal field theory to make a small step in this direction.

We will restrict our computations to the case where the parent $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ conformal field theory is at integer level k. But our results are extendable at least to the case of generic rational k. Although the WZW $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ model (and hence the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ coset) is well defined for any real k, there are some settings were the case of integer k is singled out. In string theory the occurrence of integer level k appears in the context of double scaled little string theory, where it is the number of NS5-branes in the string background. A possible second instance where integer level k values are special is suggested by the embedding of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ into non-minimal $N=2$ algebras [11]. The $N=2$ Landau-Ginzburg models with superpotentials given by the classified 14 singular polynomials of modality one [12], flow in the infrared to $N=2$ superconformal field theories with $c=3k/-2$, with integer k [11]. An algebraic description of these models in terms of modular invariants of non-minimal $N=2$ theories would be a non-rational extension of the well-established equivalence [13] between $N=2$ LG theories with superpotentials given by the ADE series of singular polynomials with modality 0 and the ADE modular invariants of minimal $N=2$.

In section 2, we will define the extended characters of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ conformal field theory. We show in section 3 that the modular transformation properties of the continuous extended characters are derived with elementary means. The strategy we follow for the discrete characters is explained in section 4. In section 5 we remind the reader of the connection between the coset characters and characters for the $N=2$ superconformal algebra. We will then put to use some known modular properties of the $N=2$ superconformal algebra to derive the modular transformation properties of the extended discrete $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ coset characters. We thus construct the modular S- and T-matrices for this simple non-rational conformal field theory and we derive general lessons from this example in the concluding section.

2. The extended characters

In this section we define the extended characters for the bosonic coset $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$. A motivation for defining extended characters is that the regular characters yield a continuous spectrum of U(1) charges under modular transformations and this problem is avoided for the extended characters.[1] We restrict to discrete and continuous representations of the parent $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ conformal field theory [14]. These include all normalizable (i.e. quadratically integrable) wavefunctions on the group manifold. We introduce the coset central charge:

$$c_{cs} = \frac{3k}{k-2} - 1 = 2 + \frac{6}{k-2}, \tag{2.1}$$

corresponding to a parent $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ algebra at level k.

[1] The charges of the coset are defined with respect to the U(1) global symmetry that remains after gauging the local U(1).

JHEP04(2004)043

Continuous representations. We label *continuous representations* of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ by their Casimir $-j(j-1)$ determined by $j = \frac{1}{2} + is$ (where $s \in \mathbb{R}^+$) and their parity $\alpha \in \{0, \frac{1}{2}\}$. The characters of the coset can be obtained by expanding the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ characters $\hat{\chi}_{j=1/2+is,\alpha}(q,z)$ into terms with definite U(1) charge $\alpha + r$ ($r \in \mathbb{Z}$), and expressing each such term as a character of a (time-like) U(1) boson times a character of the coset.[2] This yields

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_{j=1/2+is,\alpha}(q,z) &= \mathrm{Tr}\, q^{L_0-(c_{cs}+1)/24}\, z^{J_0^3} \\ &= q^{\frac{s^2}{k-2}} \eta(\tau)^{-3} \sum_{r\in\mathbb{Z}} z^{\alpha+r} \\ &= \sum_{r\in\mathbb{Z}} z^{\alpha+r} \zeta_{r+\alpha}(\tau)\, \hat{\lambda}_{1/2+is,\alpha+r}(\tau)\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

with $q = e^{2\pi i\tau}$ and $\eta(\tau) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$. The U(1) and the coset characters are:

$$\begin{aligned}\zeta_{r+\alpha}(\tau) &= q^{-\frac{(r+\alpha)^2}{k}} \eta(\tau)^{-1} \\ \hat{\lambda}_{1/2+is,\alpha+r}(\tau) &= \mathrm{Tr}\, q^{L_0-c_{cs}/24} \\ &= \eta(\tau)^{-2} q^{\frac{s^2}{k-2}} q^{\frac{(\alpha+r)^2}{k}}\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

It turns out to be natural to define new, extended characters (in the spirit of [21, 22]) that correspond to traces over direct sums of irreducible modules. In particular, for a given continuous representation, we define the extended characters by summing over all the coset modules whose U(1) charges differ by multiples of k.[3] While the coset characters $\hat{\lambda}_{1/2+is,\alpha+r}(\tau)$ transform in a complicated fashion under modular transformations, the extended characters have nice modular transformation properties, as we will see in the next sections.

We define the extended characters for the continuous representations as follows:

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_{1/2+is,\alpha+r}(\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\lambda}_{1/2+is,\alpha+r+kn}(\tau) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \eta(\tau)^{-2} q^{\frac{s^2}{k-2}} q^{\frac{(\alpha+r+kn)^2}{k}} \\ &= \eta(\tau)^{-2} q^{\frac{s^2}{k-2}} \Theta_{2(\alpha+r),k}(\tau,0) \end{aligned} \tag{2.4}$$

[2] There are several methods to obtain the coset characters. The method decribed here is used in [15] (see also [16]). By embedding the parafermionic algebra into an $N=2$ algebra, a similar decomposition of the $N=2$ characters into coset and U(1) characters was obtained in [17]. We make use of this method in section 5. In [18] the characters were obtained by counting the multiplicities of the Hilbert space induced from $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ and in [19] by applying Felder's method to a Feigin-Fuchs representation of the parafermionic algebra. The coset characters have also been discussed in [20].

[3] This is reminiscent of similar techniques used for compact bosons at rational radius squared, and for characters of the $N=2$ superconformal algebra.

JHEP04(2004)043

where the classical theta functions $\Theta_{m,k}(\tau,\nu)$ at level k are defined as:[4]

$$\Theta_{m,k}(\tau,\nu) = \sum_{p\in\mathbb{Z}+\frac{m}{2k}} q^{kp^2} z^{kp}\,, \qquad \text{with } z = e^{2i\pi\nu}\,. \tag{2.5}$$

Note that for a given s, there are $2k$ distinct extended continuous characters (labeled by $\alpha = 0, 1/2$ and $r = 0, 1\ldots, k-1$).

Discrete representations. We consider now *discrete lowest weight representations*[5] of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ labeled by $2j \in \mathbb{Z}$. Only the representations with $0 < j < \frac{k}{2}$ give unitary representations in the coset theory.[6] The U(1) charges are $j+r$ ($r \in \mathbb{Z}$) The decomposition of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ discrete character $\chi_j(q,z)$ yields (see [15] for details):

$$\begin{aligned}\chi_j(q,z) &= \mathrm{Tr}\, q^{L_0-(c_{cs}+1)/24}\, z^{J_0^3}\\ &= \frac{q^{-\frac{(j-\frac{1}{2})^2}{k-2}} z^{j-\frac{1}{2}}}{\vartheta_1(\tau,\nu)}\\ &= \sum_{r\in\mathbb{Z}} z^{j+r}\zeta_{j+r}(\tau)\,\lambda_{j,r}(\tau)\end{aligned} \tag{2.6}$$

where[7]

$$\vartheta_1(q,z) = z^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^{n-1}z)(1-q^n z^{-1})\,. \tag{2.7}$$

The coset characters are:

$$\lambda_{j,r}(\tau) = \eta(\tau)^{-2} q^{-\frac{(j-\frac{1}{2})^2}{k-2}} q^{\frac{(j+r)^2}{k}} S_r(\tau)\,, \tag{2.8}$$

where the function $S_r(\tau)$ for integer r is given by:

$$S_r(\tau) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s q^{\frac{1}{2}s(s+2r+1)}\,. \tag{2.9}$$

For the discrete representations we similarly define extended characters:

$$\begin{aligned}\Lambda_{j,r}(\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_{j,kn+r}(\tau)\\ &= \eta(\tau)^{-2} q^{-\frac{(j-\frac{1}{2})^2}{k-2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{(j+r+kn)^2}{k}} S_{r+kn}(\tau)\,.\end{aligned} \tag{2.10}$$

We now turn to analyzing the modular transformation properties of these extended characters, which will occupy us for most of the rest of the paper.

[4] For rational k, $k = p/q$, we would introduce theta functions at level pq and sum over chiral momentum sectors that differ by p units. This is as in the case of a chiral boson at rational radius squared.

[5] The discrete representations of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ are actually either highest weight or lowest weight, but both give the same modules for the coset theory.

[6] This restriction is further constrained to $\frac{1}{2} < j < \frac{k-1}{2}$ in the full conformal field theory [23, 14, 24].

[7] Both the expression for the discrete $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ characters in the second line of (2.6) *and* the decomposition into coset characters in the third line are valid only for $|q| < |z| < 1$.

JHEP04(2004)043

3. Modular transformation of extended continuous characters

The continuous extended characters in eq. (2.4) are the product of three factors, each having good modular properties. For T-transformations ($\tau \to \tau + 1$), we use the formulas

$$\begin{aligned} \eta(\tau+1) &= e^{\frac{i\pi}{12}}\eta(\tau) \\ \Theta_{m,k}(\tau+1,\nu) &= e^{\frac{i\pi m^2}{2k}}\Theta_{m,k}(\tau,\nu) \end{aligned} \tag{3.1}$$

to show that the following T-transformation holds:

$$\hat{\Lambda}_{1/2+is,\alpha+r}(\tau+1) = e^{2\pi i\left(\frac{s^2}{k-2}-\frac{1}{12}\right)} e^{2\pi i\frac{(\alpha+r)^2}{k}} \hat{\Lambda}_{1/2+is,\alpha+r}(\tau)\,. \tag{3.2}$$

Under S-transformations ($\tau \to -1/\tau$), using the identities:

$$\begin{aligned} \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau) \\ e^{-\frac{2\pi i}{\tau}\frac{s^2}{k-2}} &= \sqrt{\frac{-2i\tau}{k-2}}\int_{-\infty}^{+\infty} ds' e^{2\pi i\tau\frac{s'^2}{k-2}} e^{-\frac{4\pi i s s'}{k-2}} \\ \Theta_{m,k}\left(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{-i\tau}{2k}} e^{\frac{\pi i k}{2\tau}\nu^2} \sum_{m'\in Z_{2k}} e^{-i\pi m m'/k}\Theta_{m',k}(\tau,\nu)\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

we find that

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_{1/2+is,\alpha+r}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{2}{\sqrt{k(k-2)}}\int_0^{+\infty} ds' \cos\left(\frac{4\pi s s'}{k-2}\right) \times \\ \times \sum_{2\alpha'+2r'\in Z_{2k}} e^{-\frac{\pi i}{k}(2r'+2\alpha')(2r+2\alpha)}\hat{\Lambda}_{1/2+is',\alpha'+r'}(\tau)\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Note that whatever the value of α is, the $2k$ characters with both $\alpha' = 0, 1/2$ appear in the righthand side of (3.4), with all the possible values of the continuous parameter s'.

We have thus derived the modular transformation properties of the extended continuous coset characters. It is clear that the continuous representations transform among themselves under modular T- and S-transformations. We can thus imagine building modular invariants using continuous representations only.

We can check, using the properties of the continuous and discrete Fourier transform that this part of the S-matrix squares to the charge conjugation matrix. Charge conjugation[8] is implemented for continuous representations by simply changing the sign of the U(1) charge associated to the coset character i.e. $\alpha + r \to -(\alpha + r)$.

We now turn to deriving the modular transformation properties for the extended discrete characters, which are less straightforward to compute.

[8] Although we haven't explicitly introduced a variable keeping track of the U(1) charge in our computation, it can easily be done.

JHEP04(2004)043

4. Modular transformations of extended discrete coset characters: strategy

For the extended discrete coset characters, it is still possible to derive the transformation under the modular T-transformation $\tau \to \tau + 1$ in one step:

$$\Lambda_{j,r}(\tau+1) = e^{2\pi i(-\frac{(j-1/2)^2}{k-2}-\frac{1}{12})} e^{2\pi i \frac{(j+r)^2}{k}} \Lambda_{j,r}(\tau)\,, \tag{4.1}$$

where again we notice diagonality despite the sum over primaries with differing conformal weight.

To derive the transformation properties of the extended discrete coset characters under a modular S-transformation $\tau \to -\frac{1}{\tau}$, we will follow a more involved strategy. The idea underlying the computation is to embed the coset model into a model with a larger symmetry, to derive the transformation properties for the more symmetrical model, then to extract the modular transformation properties of the original extended coset characters. Recall that the modular properties of the string functions, i.e. of the characters of the compact and rational SU(2)/ U(1) coset, are straightforwardly derived from the corresponding transformation properties of the SU(2) parent Wess-Zumino-Witten conformal field theory (which has a larger symmetry) after decomposing the SU(2) WZW model with respect to a U(1) subgroup.

We choose to embed our model as a sub-sector of an $N = 2$ superconformal field theory. It is well known [11] that the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ operators occur as building blocks for the $N = 2$ superconformal algebra with $c > 3$. We will add a free boson to the coset model at the correct radius in order to enhance the symmetry of the theory to an $N = 2$ superconformal algebra. We then employ the character decomposition of $N = 2$ characters in terms of the compact boson characters and the bosonic $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ coset characters to link the modules of $N = 2$ to the desired coset modules. We then make use of known [25, 26] modular transformation properties of (extended) $N = 2$ characters (and of the compact boson characters) to derive the modular transformation properties of the constituent discrete bosonic coset characters.

That is a sketch of the strategy we choose, but one can think of at least two equivalent alternative strategies. The first would be to embed the coset into the original $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ theory,[9] but we would have to be careful with the negative weights of the time-like U(1).[10] The second would be to decompose directly the lemma we prove in appendix A in terms of U(1) charges and apply this directly to the bosonic coset characters.

Our strategy has the advantage that as a by-product, we will find useful links between extended $N = 2$ characters at $c > 3$ and the characters of our non-compact non-rational conformal field theory (which should be viewed as analogous to similar Gepner formulas [1] in the compact, minimal $N = 2$ case). In other words, our method lays bare some of the structure underlying computations in $N = 2$ models with $c > 3$.

[9] This has been done implicitly in [16].

[10] Care should also be taken in order not to violate the restriction mentioned in footnote 7.

JHEP04(2004)043

To implement our strategy, we first turn then to defining the relevant $N = 2$ characters in the next section, then to decompose them in section 5, next to recall their modular transformation properties in section 6. Finally, in section 7 we decompose these modular transformation properties in terms of the constituent compact boson and coset character.

5. Embedding $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ in $N = 2$

The current and primaries of unitary $N = 2, c > 3$ theories can by obtained from those of a *bosonic* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ model by taking out the timelike boson associated to the bosonization of J^3 in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, and introducing a spacelike boson to bosonize the $N = 2$ U(1) current. We refer the reader to [11] for the details of this construction. It is shown there that the continuous and discrete representations of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (with the unitarity bound $0 < j < k/2$ in the discrete), give rise to all the unitary highest weight representations of the $N = 2$ algebra with $c > 3$, which were obtained in [27] from the Kac determinant. For a given j, there is an infinite number of $N = 2$ representations labeled by $r \in \mathbb{Z}$. The number r is related to the eigenvalue m of J_0^3 in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ in a way to be indicated below for each representation.

This construction allows to parameterize the quantum numbers of the $N = 2$ representations (the conformal dimension $h_{j,r}$ and U(1) charge $Q_{j,r}$ of the highest weights) in terms of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ labels, and this will be very useful to make explicit the connection between $N = 2$ and $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ characters. Moreover, as we will show below, the $N = 2$ spectral flow (which will play a central role in our construction) just amounts to a shift in the quantum number r.

The relation between the characters of the $N = 2$ representations and the characters of the coset is similar to the embedding of the coset into $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ considered in section 2. Namely, the $N = 2$ characters can be expanded into terms with definite U(1) charge $Q = Q_{j,r} + n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Then each term is the product of a U(1) character (generated by the modes of the R-current $J(z)$) with highest weight

$$\Delta = \frac{3Q^2}{2c} = \frac{k-2}{2k}\left(Q_{j,r} + n\right)^2,$$

times a coset character. We will work in the NS sector of the $N = 2$ algebra, which suffices for our purposes.

Continuous representations. From a $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k$ continuous representation with parameters $j = \frac{1}{2} + is, \alpha$ we obtain the $N = 2$ representations

$$h_{j,r} = \frac{\frac{1}{4} + s^2 + (\alpha + r)^2}{k-2}, \qquad Q_{j,r} = Q_m = \frac{2(r+\alpha)}{k-2} \tag{5.1}$$

with $r \in \mathbb{Z}$. The $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ state which gives rise to each representation has $J_0^3 = m = r + \alpha$, and we will use s, m to label the representations. There are no null states among the descendents [28, 29], so the $N = 2$ character is obtained from the free action of the modes

JHEP04(2004)043

$L_{-n}, J_{-n}, G^{\pm}_{-n+1/2}$ on the highest weight state. This yields

$$\begin{aligned} ch_c(s,m;\tau,\nu) &= \mathrm{Tr}\, q^{L_0-c/24} z^{J_0} = q^{-c/24} q^{h_{j,m}} z^{Q_m} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{n-\frac{1}{2}}z)(1+q^{n-\frac{1}{2}}z^{-1})}{(1-q^n)^2} \\ &= q^{-c/24} q^{1/8} q^{h_{j,m}} z^{Q_m} \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} \end{aligned} \tag{5.2}$$

where

$$\vartheta_3(\tau,\nu) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^{n-\frac{1}{2}}z)(1+q^{n-\frac{1}{2}}z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} z^n \,. \tag{5.3}$$

Plugging the above identity into the character and using in the exponent of q the identity

$$\frac{n^2}{2} + \frac{m^2}{k-2} = \frac{(n-m)^2}{k} + \frac{k-2}{2k}\left(\frac{2m}{k-2}+n\right)^2 . \tag{5.4}$$

we find the decomposition of the $N=2$ characters in terms of a U(1) boson and the coset characters as:

$$ch_c(s,m;\tau,\nu) = \eta^{-1}(\tau) \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{Q_m+n} q^{\frac{k-2}{2k}(Q_m+n)^2} \hat{\lambda}_{1/2+is,n-m}(\tau) \tag{5.5}$$

where $\hat{\lambda}_{1/2+is,n-m}$ are the characters of the continuous coset representation. We now consider the effect of applying the $N=2$ spectral flow mapping [30] by w integer units:

$$\begin{aligned} h &\to h + wQ + \frac{c}{6}w^2 \\ Q &\to Q + \frac{c}{3}w \,, \end{aligned} \tag{5.6}$$

to both expressions (5.2) and (5.5) of the continuous characters. We find:

$$\begin{aligned} q^{\frac{c}{6}w^2}\ z^{\frac{c}{3}w}\ ch_c(s,m;\tau,\nu+w\tau) &= ch_c(s,m+w;\tau,\nu) \\ &= q^{-c/24} q^{1/8} q^{h_{j,m+w}} z^{Q_{m+w}} \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} \qquad (5.7) \\ &= \eta^{-1}(\tau) \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{Q_m+\frac{wk}{k-2}+n} q^{\frac{k-2}{2k}(Q_m+\frac{wk}{k-2}+n)^2} \hat{\lambda}_{1/2+is,n-m}(\tau) \,, \qquad (5.8) \end{aligned}$$

respectively, where in the second line we used $\vartheta_3(\tau,\eta+w\tau) = q^{-\frac{w^2}{2}} z^{-w} \vartheta_3(\tau,\eta)$. Two observations are in order. Firstly, we see explicitly that all the representations with fixed Casimir labeled by $j = 1/2 + is$ are mapped into each other under spectral flow. Secondly, we notice that, in the last expression, eq. (5.8), summing over spectral flow sectors that differ by $k-2$ units, corresponds to summing in the bosonic coset characters over sectors that differ by k units in the chiral momentum. We are thus led to introduce *extended* $N=2$ *characters* as follows:

$$Ch_c(s,m) = \sum_{t\in\mathbb{Z}} ch_c(s,m+t(k-2);\tau,\nu)$$

JHEP04(2004)043

$$= q^{\frac{s^2}{k-2}} \Theta_{2m,k-2}\left(\tau, \frac{2\nu}{k-2}\right) \frac{\theta_3(\tau,\nu)}{\eta^3(\tau)} \tag{5.9}$$

$$= \eta^{-1}(\tau) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Theta_{n(k-2)+2m,\frac{k(k-2)}{2}}\left(\tau, \frac{2\nu}{k-2}\right) \hat{\lambda}_{1/2+is,n-m} \tag{5.10}$$

$$= \eta^{-1}(\tau) \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{Q_m+n} q^{\frac{k-2}{2k}(Q_m+n)^2} \hat{\Lambda}_{1/2+is,n-m}\,. \tag{5.11}$$

We get three equivalent expressions. Eq. (5.9) is obtained from summing (5.7) over the spectral flowed sectors. Eqs. (5.10)-(5.11) are obtained from two forms of summing (5.8). These expressions show the intimate connection between extended $N = 2$ characters and extended bosonic coset characters. Note that the quantum number $2m$ now lies in the set $2m \in \mathbb{Z}_{2(k-2)}$.

Discrete representations. From a $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k$ discrete $\mathcal{D}_j^+$ representation with $0 < j < k/2$, we obtain $N = 2$ representations with the following values of $h_{j,r}$ and $Q_{j,r}$.

$$r \geq 0 \qquad h_{j,r} = \frac{-j(j-1)+(j+r)^2}{k-2} \qquad Q_{j,r} = \frac{2(j+r)}{k-2} \tag{5.12}$$

$$r < 0 \qquad h_{j,r} = \frac{-j(j-1)+(j+r)^2}{k-2} - r - \frac{1}{2} \qquad Q_{j,r} = \frac{2(j+r)}{k-2} - 1\,. \tag{5.13}$$

For $r \geq 0$ ($r < 0$), these states are built out of a J^3 primary of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ with $J_0^3 = m = j+r$ ($J_0^3 = m = j+r+1$). Note that the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ state with $m = j$ gives rise to two $N = 2$ representations, with $r = 0, -1$. These correspond to chiral and anti-chiral primaries respectively, as follows from $h_{j,0} = Q_{j,0}/2$ in (5.12) and $h_{j,-1} = -Q_{j,-1}/2$ in (5.13).

Each representation has one non-degenerate null descendent at relative U(1) charge $+1$ (-1) for $r \geq 0$ ($r < 0$) and level $r + 1/2$ ($-r - 1/2$) [28, 29].[11] For $r = 0, -1$, the null states are clearly $G^+_{-1/2}|h_{j,0}\rangle$ and $G^-_{-1/2}|h_{j,-1}\rangle$, while for other values of r the null states are more complicated (see [29] for explicit expressions for the first levels).

The characters for every $r \in \mathbb{Z}$ are given by

$$ch_d(j,r;\tau,\nu) = \mathrm{Tr}\, q^{L_0-c/24} z^{J_0}$$

$$= q^{-\frac{(j-1/2)^2}{k-2}+\frac{(j+r)^2}{k-2}} z^{\frac{2(j+r)}{k-2}} \frac{1}{1+zq^{1/2+r}} \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\,, \tag{5.14}$$

$$= q^{-\frac{(j-1/2)^2}{k-2}+\frac{(j+r)^2}{k-2}-r-\frac{1}{2}} z^{\frac{2(j+r)}{k-2}-1} \frac{1}{1+z^{-1}q^{-1/2-r}} \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\,. \tag{5.15}$$

It is immediate to verify that also for these representations, the spectral flow by w units is equivalent to a shift $r \to r + w$. Both expressions (5.14) and (5.15) hold for every $r \in \mathbb{Z}$, but each form reflects the structure of the representation and the null states for a particular sign of r. For $r \geq 0$ the form (5.14) shows that we have the quantum numbers (5.12) of the primary state, and the factor $(1 + zq^{1/2+r})^{-1}$ gets rid of the null state. An analogous statement holds for $r < 0$ and the form (5.15).

[11] In the cases $j = 0, k/2$ the structure of the descendents is more involved. Modular properties of the extended $N = 2$ character built from the state $j = m = 0$, which is both $N = 2$ chiral and anti-chiral, have been described in [26].

JHEP04(2004)043

Another useful expression for the character is:

$$ch_d(j,r;\tau,\nu) = \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\frac{(q^s z)^{\frac{2j-1}{k-2}} q^{\frac{s^2}{k-2}} z^{\frac{2s}{k-2}}}{1+zq^s} \tag{5.16}$$

where $s = r + \frac{1}{2}$.

Using (5.3), we can expand (5.14) into

$$ch_d(j,r;\tau,\nu) = q^{-\frac{(j-1/2)^2}{k-2}+\frac{(j+r)^2}{k-2}} z^{\frac{2(j+r)}{k-2}} \eta(\tau)^{-3} \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s z^{s+n} q^{\frac{n^2}{2}+s(\frac{1}{2}+r)}\,. \tag{5.17}$$

By shifting $n \to n-s$ and using (5.4) with $m = j+r$, we obtain the decomposition

$$ch_d(j,r;\tau,\nu) = \eta^{-1}(\tau)\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{\frac{2(j+r)}{k-2}+n} q^{\frac{k-2}{2k}\left(\frac{2(j+r)}{k-2}+n\right)^2} \lambda_{j,r-n}(\tau)\,, \tag{5.18}$$

where $\lambda_{j,r-n}(\tau)$ are the characters of the discrete coset representations given in (2.8).

Summing over $k-2$ units of spectral flow, we again obtain three alternative expressions for the discrete extended $N=2$ characters:

$$\begin{aligned} Ch_d(j,r) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} ch_d(j,r+n(k-2);\tau,\nu) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{q^{-\frac{(j-1/2)^2}{k-2}+\frac{(j+r+n(k-2))^2}{k-2}} z^{\frac{2(j+r+n(k-2))}{k-2}}}{1+zq^{1/2+r+n(k-2)}} \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} && (5.19) \\ &= \eta^{-1}(\tau)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Theta_{n(k-2)+2(j+r),\frac{k(k-2)}{2}}\left(\tau,\frac{2\nu}{k-2}\right)\lambda_{j,r-n}(\tau) && (5.20) \\ &= \eta^{-1}(\tau)\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{\frac{2(j+r)}{k-2}+n} q^{\frac{k-2}{2k}\left(\frac{2(j+r)}{k-2}+n\right)^2} \Lambda_{j,r-n}(\tau)\,, && (5.21) \end{aligned}$$

and we have chosen the fundamental domain $r \geq 0, r \in \mathbb{Z}_{k-2}$. The form (5.19) can be easily recast into (see (5.16))

$$\begin{aligned} Ch_d(j,r;\tau,\nu) &= \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} \sum_{s\in r+\frac{1}{2}+\mathbb{Z}(k-2)} \frac{(q^s z)^{\frac{2j-1}{k-2}} q^{\frac{s^2}{k-2}} z^{\frac{2s}{k-2}}}{1+zq^s} && (5.22) \\ &= \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\frac{1}{k-2}\sum_{r'\in\mathbb{Z}_{k-2}} e^{-2\pi i\frac{r'(r+1)}{k-2}} I\left(\frac{4}{k-2},\frac{r'}{k-2}-\frac{1}{2},\frac{2j-1}{k-2}-\frac{1}{2};\tau,\nu\right), \end{aligned}$$

where the function $I(k,a,b;\tau,\nu)$ is defined in eq. (A.1).

Relation to [26]. In this subsection, we show the relation between our extended $N=2$ characters with those introduced in [26]. We first recall that in [26], super-Liouville theory was studied as an $N=2$ superconformal theory with central charge $c = 3\hat{c} = 3+3\mathcal{Q}^2$ with $\mathcal{Q} = \sqrt{2K/N}$ where K and N are positive integers (with greatest common divisor equal to

JHEP04(2004)043

one).[12] To link that study to ours, we identify the central charges of the respective $N=2$ algebras. For integer level k, this leads to.[13]

$$\begin{aligned} c &= \frac{3k}{k-2} = 3 + \frac{6K}{N} \\ K &= 1 \\ N &= k-2\,. \end{aligned} \tag{5.23}$$

The characters themselves are matched by identifying the quantum numbers as follows. Our U(1) charge $Q_{j,r}$ of the highest weight is Q in [26]. For the continuous characters (5.9) our quantum numbers $\frac{s^2}{k-2}$ and $2m \in Z_{2(k-2)}$ correspond to $p^2/2$ and $j \in Z_{2NK}$ in eq.(2.25) of [26] ("massive characters"). For the discrete characters, our quantum numbers (j,r) correspond to $(s/2,r)$ in [26]. The identity between our discrete extended character (5.19) and eq.(2.19) of [26] ("massless characters"), can be seen by rewriting (5.19) as

$$Ch_d(j,r) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\left\{ zq^{(k-2)\left(n+\frac{2r+1}{2(k-2)}\right)} \right\}^{\frac{2j-1}{k-2}}}{1+zq^{(k-2)(n+\frac{2r+1}{2(k-2)})}} z^{2\left(n+\frac{2r+1}{2(k-2)}\right)} q^{(k-2)\left(n+\frac{2r+1}{2(k-2)}\right)^2} \frac{\theta_3(\tau,\nu)}{\eta^3(\tau)}\,. \tag{5.24}$$

Several useful properties of the extended characters are listed in [26]. We now turn to the next step in the program, which is to rederive their modular transformation properties. Finally, we will use the decomposition formulas to dissect the modular transformation rules.

6. The $N=2$ modular transformations

The modular transformation S of the continuous extended $N=2$ characters can be derived using the same techniques as we employed for the extended continuous coset characters. We define the formula for the (radial) momentum s in terms of the conformal dimension and U(1) R-charge: $s^2/(k-2) = h' - [(2m)^2 + 1/4](k-2)$, where the U(1) charge is: $Q = 2m/(k-2) = 2(\alpha+r)/(k-2)$. We then find [26]:

$$\begin{aligned} Ch_c\left(s,m;-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}\right) &= \frac{2}{k-2} e^{i\pi\frac{k}{k-2}\frac{\nu^2}{\tau}} \sum_{2m'\in Z_{2(k-2)}} e^{-\frac{4i\pi}{k-2}mm'} \times \\ &\times \int_0^\infty ds' \cos\left(\frac{4\pi ss'}{k-2}\right) Ch_c(s',m';\tau,\nu)\,. \end{aligned} \tag{6.1}$$

To derive the modular transformation properties of the discrete extended $N=2$ characters, we will need a useful lemma given in appendix A.[14] Using this lemma it is possible to rederive the modular transformation properties as in [26]. We only use the restricted case

[12] Only in this subsection will N denote this positive number and does not refer to the number of supercurrents in the superconformal algebra.

[13] The $N=2$ techniques of [26] can also be used to treat the case of rational values of k.

[14] A proof of this lemma is given in [25] for square tori and real ν. We extend the proof to the generic case in appendix A. Note that this provides a firm backing of the results in e.g. [26, 31].

JHEP04(2004)043

of relevance to us in the following. The extended discrete $N=2$ characters transform into discrete and continuous characters as follows:[15,16]

$$
\begin{aligned}
e^{-i\pi\frac{c\nu^2}{3\tau}} Ch_d\left(j,r;-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}\right) = \frac{1}{k-2}\sum_{2m'\in Z_{2(k-2)}} e^{-\frac{2i\pi}{k-2}(2j+2r)m'}\int_0^\infty ds' \times \\
\times \frac{\cosh\pi\left(s'\frac{k-4j}{k-2}+im'\right)}{\cosh\pi(s'+im')} Ch_c(s',m';\tau,\nu) + \\
+\frac{i}{k-2}\sum_{r'\in Z_{k-2}}\sum_{2j'=2}^{k-2} e^{-2\pi i\frac{(2j+2r)(2j'+2r')-(2j-1)(2j'-1)}{2(k-2)}} \times \\
Ch_d(j',r';\tau,\nu) + \frac{i}{2(k-2)}\sum_{r'\in Z_{k-2}} e^{-2\pi i\frac{(2j+2r)(2r'+1)}{2(k-2)}} \times \\
\times\left[Ch_d\left(\frac{1}{2},r';\tau,\nu\right) - Ch_d\left(\frac{(k-1)}{2},r';\tau,\nu\right)\right] \qquad (6.2)
\end{aligned}
$$

We thus recalled the method for the derivation of the modular transformation properties of the extended $N=2$ characters, and have strengthened the backbone of the proof by extending the lemma in appendix A to generic modular parameters. The modular transformation properties have also been clarified slightly, by labeling the characters by natural $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ labels. It is appropriate here to recall that the extended $N=2$ characters were introduced in [26] to have a discrete spectrum of R-charges in the right-hand side of the modular transformation of discrete characters, eq. (6.2).

Check for $N=2$. A useful check on the above modular transformation property for discrete characters is given by computing whether the square of the modular S-matrix is the charge conjugation matrix. We can perform this check by (artificially) distinguishing a discrete and a continuous sector, and by viewing the S-matrix as being upper triangular:

$$
S = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}, \qquad (6.3)
$$

where A indicates the coefficients of the discrete characters contributing to the modular transform of discrete characters, etcetera. The technical details are recorded in appendix B. We find, after using the character identities:

$$
Ch_c\left(s=0,r+\frac{1}{2};\tau,\nu\right) = Ch_d\left(\frac{1}{2},r;\tau,\nu\right) + Ch_d\left(\frac{(k-1)}{2},r;\tau,\nu\right), \qquad (6.4)
$$

[15] In the computation, the principal value prescription is implemented at the point where we split the momentum integral into negative and positive momenta. In recombining the two integrals, we have eliminated a possible pole contribution (which the principal value prescription in the appendix A tells us to do) at $s'=0$. The final expression can be shown to be regular at $s'=0$.

[16] Note that the "partial range" of quantum numbers appearing on the right hand side, discussed in [26], namely $1\le 2j'\le k-1$, coincides in the particular case under study with the full range [24] of extended discrete characters necessary to describe all discrete representations in the coset. It is no surprise that all relevant characters appear on the right hand side, as all characters in the unitary supersymmetric coset model will satisfy the lower bound on the conformal dimension associated to the partial range discussed in [26]. It is nevertheless striking that the precise bound on the discrete representation label is naturally reproduced from an analysis of generic discrete $N=2$ characters.

JHEP04(2004)043

$$
\begin{aligned}
Ch_d(j,r;\tau,\nu) &= Ch_d\left(\frac{k}{2}-j,-r-1;\tau,-\nu\right),\\
Ch_c(s,m;\tau,\nu) &= Ch_c(s,-m;\tau,-\nu)\,,
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

that the matrix S^2 is indeed the charge conjugation matrix, which changes the sign of the U(1)-charge. In the appendix we show in detail how the split into continuous and discrete representations indeed turns out to be artificial, which can be expected on the basis of the splitting of the continuous $N=2$ representation with $s=0$ and odd U(1) R-charge into two discrete ones (see equation (6.4)). This is a faithful foreshadowing of what will happen in the computation for the coset.

7. The modular transformations decomposed

We now wish to plug the decomposition rule for the $N=2$ characters recalled in section 5 in terms of coset characters into the modular transformation rules which we rederived in section 6.

Continuous transformations revisited. We want to start with the simple case of rederiving the modular transformation rules for extended continuous coset characters using $N=2$ characters. The analysis of the modular transformation properties of the continuous characters of the coset goes as follows:

$$
\begin{aligned}
Ch_c\left(s,\alpha+r;-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}\right) &= \frac{1}{\sqrt{-i\tau}\eta(\tau)}\sum_n\sqrt{\frac{-i\tau}{k(k-2)}}e^{\pi i\frac{k}{k-2}\frac{\nu^2}{\tau}}\times\\
&\quad\times\sum_{m\in Z_{k(k-2)}}e^{-2i\pi\frac{m(n(k-2)+2(\alpha+r))}{k(k-2)}}\Theta_{m,\frac{k(k-2)}{2}}\left(\tau,\frac{2\nu}{k-2}\right)\times\\
&\quad\times\hat{\lambda}_{1/2+is,n-(\alpha+r)}\left(-\frac{1}{\tau}\right)\times\\
&= \frac{1}{\eta(\tau)}e^{i\pi\frac{k\nu^2}{\tau(k-2)}}\frac{2}{k-2}\sum_{q\in Z_{2(k-2)}}e^{-2\pi iq(\alpha+r)/(k-2)}\times\\
&\quad\times\int_0^\infty ds'\cos\left(\frac{4\pi ss'}{k-2}\right)\times\\
&\quad\times\sum_n\Theta_{n(k-2)+q,\frac{k(k-2)}{2}}\left(\tau,\frac{2\nu}{k-2}\right)\hat{\lambda}_{1/2+is',n-q/2}(\tau)
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

where the first line follows from the use of the modular transformation properties of Θ-functions (3.3), and the second line by using the transformation property of the $N=2$ characters (6.1) (which we decomposed into coset characters using (5.10)). We should identify coefficients of truly linearly independent Θ-functions (of which there are $k(k-2)$ at level $k(k-2)/2$). To that end, we need to split the sums in the right hand side as $n'=k\tilde{n}+p$ where $n\in\mathbb{Z}$ and $p\in\mathbb{Z}_k$, while we split $q=(k-2)q'+t$, where $q'\in\mathbb{Z}_2$ and $t\in\mathbb{Z}_{k-2}$. We then shift $p+q'\to p$ and find:

$$
\sum_n e^{-2\pi imn/k}\hat{\lambda}_{1/2+is,n-(\alpha+r)}(\tilde{q}) = 2\sqrt{\frac{k}{k-2}}\sum_{\tilde{n}}\sum_{q'\in\mathbb{Z}_2}\int_0^\infty ds'\cos\left(\frac{4\pi ss'}{k-2}\right)\times
$$

JHEP04(2004)043

$$\times e^{-2\pi i t/k(\alpha+r)} e^{4\pi i p(\alpha+r)/k} \times$$
$$\times e^{-2\pi i q'(\alpha+r)} \hat{\lambda}_{1/2+is',k\tilde{n}+p-kq'/2-t/2}(q)\,. \qquad (7.2)$$

where we have identified: $m \equiv t \bmod k-2$ and $m-t \equiv (k-2)p$ where $p \in \mathbb{Z}_k$. We can read the obtained result as a modular transformation property of continuous coset characters. After performing a discrete Fourier transform on m (by summing over $m \in \mathbb{Z}_k$), we recognize on the left hand side the extended continuous characters we defined; on the right hand side the remaining constrained sum over $kq'+t-2p$ gives the sum over $2(\alpha'+r') \in \mathbb{Z}_{2k}$. We realize that this formula agrees exactly with the result (3.4) we derived in another manner previously. Thus we have rederived the transformation property of extended continuous characters of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ coset in an admittedly roundabout fashion, but we have learned useful techniques to be applied in the case of the extended discrete characters.

Modular transformations of discrete extended coset characters. Now we have made all the necessary preparations to calculate the modular transformation properties of extended discrete bosonic coset characters. We follow the same reasoning as we just did for the continuous representations. By applying on the one hand the modular transformation properties of Θ-functions (3.3), and on the other hand the modular transformation properties of $N=2$ characters (6.2), we obtain:

$$\begin{aligned}
&e^{-\pi i \frac{k}{k-2}\nu^2/\tau} Ch_d\left(j,r;-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}\right) = \\
&\quad = \frac{1}{\eta(\tau)}\frac{1}{\sqrt{k(k-2)}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}_{k(k-2)}} e^{-2i\pi\frac{m(n(k-2)+2(j+r))}{k(k-2)}} \times \\
&\qquad \times \Theta_{m,\frac{k(k-2)}{2}}\left(\tau,\frac{2\nu}{k-2}\right)\hat{\lambda}_{j,-n+r}\left(-\frac{1}{\tau}\right) \\
&\quad = \frac{1}{\eta(\tau)}\frac{1}{k-2}\sum_{q\in\mathbb{Z}_{2(k-2)}} e^{-2\pi i q(j+r)/(k-2)}\int_0^\infty ds'\,\frac{\cosh\pi\left(s'\frac{k-4j}{k-2}+i\frac{q}{2}\right)}{\cosh\pi(s'+i\frac{q}{2})} \times \\
&\qquad \times \sum_{n'\in\mathbb{Z}}\Theta_{n'(k-2)+q,\frac{k(k-2)}{2}}\left(\tau,\frac{2\nu}{k-2}\right)\hat{\lambda}_{\frac{1}{2}+is',n'-\frac{q}{2}}(\tau) + \\
&\qquad + \frac{i}{k-2}\frac{1}{\eta(\tau)}\sum_{r'\in Z_{k-2}}\sum_{2j'=2}^{k-2} e^{-\frac{\pi i}{k-2}[(2j+2r)(2j'+2r')-(2j-1)(2j'-1)]} \times \\
&\qquad \times \sum_{n'\in\mathbb{Z}}\Theta_{n'(k-2)+2j'+2r',\frac{k(k-2)}{2}}\left(\tau,\frac{2\nu}{k-2}\right)\lambda_{j',-n'+r'}(\tau) + \\
&\qquad + \frac{i}{2(k-2)}\frac{1}{\eta(\tau)}\sum_{r'\in Z_{k-2}} e^{-\frac{\pi i}{k-2}(2j+2r)(2r'+1)} \times \\
&\qquad \times \left\{\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\Theta_{n'(k-2)+1+2r',\frac{k(k-2)}{2}}\left(\tau,\frac{2\nu}{k-2}\right)\lambda_{\frac{1}{2},-n'+r'}(\tau) - \right.
\end{aligned}$$

JHEP04(2004)043

$$- \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \Theta_{n'(k-2)+k-1+2r', \frac{k(k-2)}{2}} \left(\tau, \frac{2\nu}{k-2} \right) \lambda_{\frac{k-1}{2}, -n'+r'}(\tau) \Bigg\} . \tag{7.3}$$

As in the continuous case, we equate the two alternative forms of the modular transform. We then fix m in the first expression and equate coefficients of linearly independent Θ-functions. The identification of linearly independent contributions is tedious but straightforward. As in the case of continuous characters we then perform a discrete Fourier transform and find:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{j,r}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = & \frac{1}{\sqrt{k(k-2)}} \sum_{2(\alpha'+r') \in \mathbb{Z}_{2k}} e^{\frac{4\pi i}{k}(j+r)(\alpha'+r')} \times \\
& \times \int_0^\infty ds' \frac{\cosh \pi \left(s' \frac{k-4j}{k-2} + i\alpha' \right)}{\cosh \pi (s' + i\alpha')} \hat{\Lambda}_{\frac{1}{2}+is', \alpha'+r'} + \\
& + \frac{i}{\sqrt{k(k-2)}} \sum_{2j'=2}^{k-2} \sum_{r' \in Z_k} e^{-\frac{4\pi i}{k}(j+r)(j'+r')} e^{\frac{4\pi i}{k-2}(j-1/2)(j'-1/2)} \Lambda_{j',r'}(\tau) + \\
& + \frac{i}{2\sqrt{k(k-2)}} \sum_{r' \in \mathbb{Z}_k} \left\{ e^{-\frac{4\pi i}{k}(j+r)(\frac{1}{2}+r')} \Lambda_{\frac{1}{2},r'}(\tau) - e^{-\frac{4\pi i}{k}(j+r)(-\frac{1}{2}+r')} \Lambda_{\frac{k-1}{2},r'}(\tau) \right\}
\end{aligned} \tag{7.4}$$

This is the quantity we wanted to calculate, namely the modular transform of the extended discrete character. The most important and new qualitative aspect of this formula is the mixing between discrete and continuous representations. The method we used can be extended to at least all rational rational values of k, albeit with some technical refinements.

Check for coset. The modular S-matrix is again upper-block diagonal, when we list the representations as a column vector $(\mathit{discrete}, \mathit{continuous})$. When we name the blocks in the S-matrix A, B and D for the left-upper, right-upper and right-lower block, we have already checked earlier (in section 3) that the matrix D squares to the charge conjugation matrix in the continuous sector. The calculation for S^2 is done in detail in the appendix. Using the character identity

$$\hat{\lambda}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+r} = \lambda_{\frac{k-1}{2}, -r} + \lambda_{\frac{1}{2}, -r-1} \tag{7.5}$$

one can then show that the charge conjugation matrix exchanges (j, r) with $(\frac{k}{2} - j, -r)$ for all j in the discrete sector. Again, the split of the continuous representation with odd parity into two discrete representations turned out to be crucial in allowing for a contribution from the "continuous" sector to the discrete sector, thus making for the expected charge conjugation matrix.[17]

[17] Note that we have the character identity:

$$\lambda_{j,r} = \lambda_{k/2-j, -r} ,$$

which shows that charge conjugate representations have equal characters, as required.

JHEP04(2004)043

8. Conclusions

The main result of our paper is the formula for the modular transformation matrix S for both extended continuous and extended discrete $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ coset characters. We were able to derive it by embedding the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ modules into modules of an enlarged $N=2$ superconformal algebra. An interesting aspect of the modular transformation matrix is that, given the presence of discrete representations, it inevitably links those up with both discrete and continuous representations. This is a qualitatively new and important property of the characters of these representations.

It seems important to generalize these results to the case of generic rational and irrational values of the level k, and possibly, to the case of non-extended coset characters. For the latter , one could apply our method on the transformation rules for ordinary $N=2$ characters (see e.g. [31]).

As we have argued, we also view these computations as non-rational analogues of the derivation of the modular transformation properties of string functions, and their connection to the $N=2$ characters with $c<3$. We have thus laid bare a non-trivial modular S-matrix of a non-rational conformal field theory, and its connection to $N=2$ characters with $c>3$. We believe that the features of this S-matrix that we uncovered have analogues in many other examples of more complicated non-rational conformal field theories.

At the heart of our paper lies an extension of the computation of [25] which is based on the technique of shifting an integration contour over momenta and picking up poles corresponding to discrete representations on the way over. This is highly reminiscent of techniques used in other analyses of non-rational conformal field theories (see e.g. [32, 24, 33, 16]).

Given our modular S-transformation matrix one can now wonder whether an analogue of the Verlinde-formula would hold for this non-rational conformal field theory and whether one can classify modular invariants (in particular in the discrete sector). One can also use the modular S-matrix to study possible boundary states [16] (even) more systematically (as has been done for the rational case). It would indeed be interesting to study the systematics of boundary conformal field theories that can be constructed in non-rational conformal field theories once the modular S-matrix is known.

Finally, our study should be a useful tool to analyze the conjectured [23] / proven [34, 35] duality between the supersymmetric coset and $N=2$ Liouville.

Acknowledgments

Thanks to Costas Bachas, Shmuel Elitzur, Hershel Farkas, David Kazhdan, Elias Kiritsis, Boris Pioline, Sylvain Ribault, Volker Schomerus, and especially Costas Kounnas for comments and interesting discussions. AP is supported in part by the Horowitz Foundation. This work is supported in part by the Israeli Science Foundation.

JHEP04(2004)043

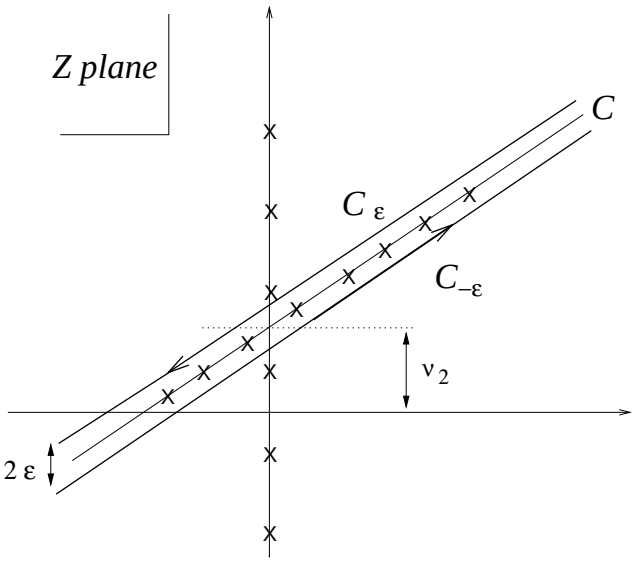

Figure 1: Choice of contour of integration (for $\tau_1 > 0$).

A. Lemma for $N = 2$ transformations

We follow [25] and derive the modular transformation properties of the following function:

$$I(k,a,b;\tau,\nu) = \sum_{r\in Z+\frac{1}{2}} e^{2\pi i(a+\frac{1}{2})(r+\frac{1}{2})} \frac{(zq^r)^{b+\frac{1}{2}}}{1+zq^r} z^{kr/2} q^{kr^2/4} \tag{A.1}$$

where $a, k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ and $b \in \mathbb{C}$. We parameterize ν as: $\nu = \nu_1 - \tau\nu_2$, $\nu_{1,2} \in \mathbb{R}$. Our aim is to extend the proof of [25] — given for $\tau \in i\mathbb{R}$ and $\nu \in \mathbb{R}$ — to generic complex values. We would like to rewrite the S transform of this function as a contour integral in the following way:

$$\begin{aligned} B &= \frac{i}{\tau} e^{-\frac{ik\pi\nu^2}{2\tau}} I\left(k,a,b;-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}\right) \\ &= \frac{e^{i\pi a}}{2i\pi}\left[\int_{\mathcal{C}_{-\epsilon}} + \int_{\mathcal{C}_{+\epsilon}}\right] dZ \frac{\pi}{2} \frac{e^{-2\pi bZ - 2i\pi a(i\tau Z-\nu) + \frac{2i\pi\tau k}{4}Z^2}}{\cosh \pi Z \, \cos \pi(i\tau Z - \nu)} \end{aligned} \tag{A.2}$$

where the parameter ϵ is infinitesimal and positive. The contours encircles the line $\mathcal{C}: \; Z = iy/\tau + i\nu_2$, $y \in \mathbb{R}$ (figure 1). This equality is valid because the contour is such that we pick up all the poles of the integrand inside the contour of integration. These are the zeroes of $\cos \pi(i\tau Z - \nu)$ which occur at $i\tau Z - \nu = -y - \nu_1 \in \mathbb{Z} + 1/2$. At these poles, labeled by a half-integer r:

$$Z = \frac{i}{\tau}(r - \nu)$$

we find residues

$$(-1)^{r+\frac{1}{2}} \frac{i}{\tau} \frac{e^{2\pi ia(r+1/2) - 2i\pi b(r-\nu)/\tau} e^{-ik\pi(r-\nu)^2/(2\tau)}}{e^{i\pi(r-\nu)/\tau} + e^{-i\pi(r-\nu)/\tau}} \, ,$$

JHEP04(2004)043

which leads to the equality quoted above. This equality is valid as long as there are no poles coming from the $\cosh \pi Z$ factor on the contour of integration. These special cases occur only for $\nu_2 \in \mathbb{Z} + 1/2$. We will not consider these special cases, which occur in the Ramond sector and are not crucial for our purposes. We now note that we have the expansions:

$$\frac{1}{2\cos \pi(i\tau Z - \nu)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{\pm(2n+1)\pi i(i\tau Z - \nu)} \tag{A.3}$$

whenever $|e^{\pm i2\pi(i\tau Z-\nu)}|$ is smaller than 1. This is true on the contours $\mathcal{C}_{\mp\epsilon}$. We then plug these expansions into the right hand side of eq. (A.2) and find:

$$B = \sum_{r \in Z+a+\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} dZ \; J^b(r; Z) \tag{A.4}$$

where

$$J^b(r; Z) = i\pi e^{i\pi r} z^r \frac{e^{-2\pi bZ + 2\pi\tau rZ + 2i\pi\tau \frac{kZ^2}{4}}}{\cosh(\pi Z)} \,,$$

since:

$$\begin{aligned} B = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{+\epsilon}} dZ \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(2n+1)\pi i(i\tau Z - \nu)} \frac{e^{\pi ia - 2\pi bZ - 2\pi ia(i\tau Z - \nu) + 2i\pi\tau \frac{kZ^2}{4}}}{\cosh \pi Z} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_{-\epsilon}} dZ \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{+(2n+1)\pi i(i\tau Z - \nu)} \frac{e^{\pi ia - 2\pi bZ - 2\pi ia(i\tau Z - \nu) + 2i\pi\tau \frac{kZ^2}{4}}}{\cosh \pi Z} \end{aligned} \tag{A.5}$$

and we can identify $r = n + a + \frac{1}{2}$ and $r = -n + a - \frac{1}{2}$ in the first and second term respectively to obtain formula (A.4). When taking $\epsilon \to 0$ we also add a minus sign to the contour $\mathcal{C}_{+\epsilon}$ and switch its direction.

Now, in order to obtain the expression for the characters in the right hand side, we wish to *(i)* shift the $\mathcal{C}$ contour of integration by $\frac{2ir}{k} - i\nu_2$, for each term indexed by r and *(ii)* tilt it parallel to the real axis (figure 2). We will then eventually obtain the desired quadratic term $q^{r^2/k}$ which will match onto the quadratic term of continuous characters. The poles we pick up on this occasion arise from the zeroes of the factor $\cosh \pi Z$, at values of Z such that $Z = is$ with $s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. When a pole falls exactly on the shifted contour we will count it with half its value and define the tilted integral over the real axis as a principal value (effectively accounting for the other half of the pole). We obtain two terms for B: one term, $J_1^{a,b}$, corresponds to the contribution of the poles. The second term, $J_2^{a,b}$, corresponds to the shifted contour. This last term is easily obtained:

$$\begin{aligned} J_2^{a,b} &= \sum_{r \in Z+a+\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi i} P \int_{\mathcal{C}+\frac{2ri}{k} - i\nu_2} dZ \, J^b(r; Z) \\ &= \sum_{r \in Z+a+\frac{1}{2}} e^{i\pi r} z^r q^{r^2/k} P \int_{\mathbb{R}} dx \; \frac{e^{-2\pi(b+\frac{1}{2})(x+2ri/k)} q^{kx^2/4}}{1 + e^{-2\pi(x+2ri/k)}} \end{aligned} \tag{A.6}$$

JHEP04(2004)043

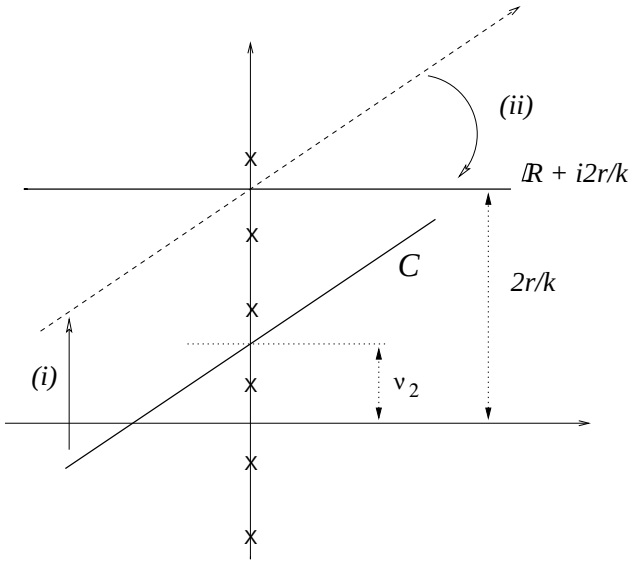

Figure 2: Change of contour of integration (case $r > \frac{k\nu_2}{2}$).

where in the last line the contour has been tilted to obtain an integral along the real axis. No poles are crossed during this deformation. Thus we obtain an integral over continuous characters of $N = 2$.

In the term $J_1^{a,b}$, the poles contribute positively for $r > \frac{k\nu_2}{2}$, and negatively for $r < \frac{k\nu_2}{2}$:

$$J_1^{a,b} = \left(\sum_{r > \frac{k\nu_2}{2}} \sum_{2r/k \geqslant s > \nu_2} - \sum_{r < \frac{k\nu_2}{2}} \sum_{2r/k \leqslant s < \nu_2} \right) \epsilon\left(s - \frac{2r}{k}\right) j^b(r,s) \tag{A.7}$$

where $j^b(r,s)$ is the residue of $J^b(r,Z)$ at the pole $Z = is$ (where $s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$) and $\epsilon(\gamma) = \frac{1}{2}$ for $\gamma = 0$ and $\epsilon(\gamma) = 1$ otherwise (which takes into account the principal value prescription).

In this expression for $J_1^{a,b}$, we wish to perform the sum over r for fixed s. Let us begin with the case $r > k\nu_2/2$. For every $s > \nu_2$ we need to determine those $r > k\nu_2/2$, $r \in Z + a + \frac{1}{2}$ such that $s \leqslant 2r/k$ (we assume $\nu_2 > 0$, but the opposite case is treated in the same way). There is always a number $\delta(a,s) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ such that the pole in s is picked for the values of r given by $r = R + ks/2 + \delta(a,s)$ where $R = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$

Then we consider the case $r < k\nu_2/2$. For every $s < \nu_2$, we have similarly to sum over $r = R + \frac{ks}{2} + \delta(a,s)$ (where now $\delta(a,s) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$), and $R = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$

We thus obtain that J_1 becomes (with r, s half-integer):

$$\begin{aligned} J_1^{a,b} &= \left(\sum_{s > \nu_2} \sum_{R > 0} - \sum_{s < \nu_2} \sum_{R < 0} \right) \epsilon(R + \delta(a,s)) j^b \left(\frac{ks}{2} + R + \delta(a,s), s \right) \\ &= \left(\sum_{s > \nu_2} \sum_{R > 0} - \sum_{s < \nu_2} \sum_{R < 0} \right) \epsilon(R + \delta(a,s)) (-i) e^{2\pi i (\frac{k}{4} - b + \frac{1}{2}) s} (e^{i\pi} z q^s)^{R + \delta(a,s)} z^{\frac{ks}{2}} q^{\frac{ks^2}{4}} . \end{aligned} \tag{A.8}$$

JHEP04(2004)043

Noting that $|zq^s| = e^{-2\pi\tau_2(s-\nu_2)}$ and using the expansions:

$$\frac{1}{(1+x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n \qquad \text{for } |x|<1$$
$$\frac{1}{(1+x)} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{-n} \qquad \text{for } |x|>1$$

we can sum on R. For the values of s such that $|\delta(a,s)| \neq \frac{1}{2}$ we get:

$$J_{1\alpha}^{a,b} = \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\\ |\delta(a,s)|\neq\frac{1}{2}}} e^{2\pi i(k/4-b+\frac{1}{2})s} e^{i\pi\delta(a,s)} \frac{(zq^s)^{\frac{1}{2}+\delta(a,s)}}{1+zq^s} z^{ks/2} q^{ks^2/4} \tag{A.9}$$

while for both cases $\delta(a,s) = \pm\frac{1}{2}$, we get

$$J_{1\beta}^{a,b} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\\ |\delta(a,s)|=\frac{1}{2}}} e^{2\pi i(k/4-b+\frac{1}{2})s} e^{-i\pi/2} \frac{1-zq^s}{1+zq^s} z^{ks/2} q^{ks^2/4}. \tag{A.10}$$

so that

$$J_1^{a,b} = J_{1\alpha}^{a,b} + J_{1\beta}^{a,b}\,. \tag{A.11}$$

This is the lemma of [25] extended to generic τ and ν.

For comparison with [26], note that naming the function used in [26] to obtain the modular transformation of the discrete extended characters $I^{ES}(k,a,b;\tau,\nu)$, we have

$$I^{ES}(k,a,b;\tau,\nu) = e^{-i\pi a} I\left(2k, a-\frac{1}{2}, b-\frac{1}{2}; \tau, \nu\right).$$

B. Computing $S^2 = C$

Modular S-matrix of $N = 2$. The details of the computations of the square of the S-matrices is given in this appendix. For the computation of S^2 for the $N = 2$ extended characters, we simplify the computation slightly, and note on beforehand that the factors $e^{i\pi c/3\nu^2/\tau} \times e^{i\pi c/3(\nu/\tau)^2(-\tau)}$ cancel out in S^2, such that we don't need to take them along. Next, we distinguish the following block matrices in the upper-triangular modular matrix S:

$$\begin{aligned}
A_{j,r}{}^{j',r'} &= \frac{i}{k-2} e^{-\frac{\pi i}{k-2}((2j+2r)(2j'+2r')-(2j-1)(2j'-1))} \qquad \text{for } 2j' = 2,3,\ldots,k-2\\
&= \frac{i}{2(k-2)} e^{-\frac{\pi i}{k-2}(2j+2r)(1+2r')} \qquad \text{for } 2j' = 1\\
&= -\frac{i}{2(k-2)} e^{-\frac{\pi i}{k-2}(2j+2r)(1+2r')} \qquad \text{for } 2j' = k-1\\
B_{j,r}{}^{s',2m'} &= \frac{1}{k-2} e^{-\frac{2i\pi}{k-2}(2j+2r)m'} \frac{\cosh\pi\left(s'+im'+\frac{2s'(1-2j)}{k-2}\right)}{\cosh\pi(s'+im')}
\end{aligned}$$

JHEP04(2004)043

$$D_{s,2m}{}^{s',2m'} = \frac{2}{k-2} e^{-\frac{4i\pi}{k-2}mm'} \cos\frac{4\pi ss'}{k-2}\,. \tag{B.1}$$

We can then compute the squares of A and D:

$$\begin{aligned}
A^2_{j,r}{}^{j'',r''} &= \delta_{j,k/2-j''}\delta_{r,-r''-1} \qquad \text{for } 2j''=2,3,\ldots,k-2\\
&= \frac{1}{2}\delta_{j,(k-1)/2}\delta_{r,-r''-1} - \frac{1}{2}\delta_{1/2,j}\delta_{r,-r''-1} \qquad \text{for } 2j''=1\\
&= \frac{1}{2}\delta_{1/2,j}\delta_{r,-r''-1} - \frac{1}{2}\delta_{(k-1)/2,j}\delta_{r,-r''-1} \qquad \text{for } 2j''=k-1\\
D^2_{s,2m}{}^{s'',2m''} &= \delta^{k-2}_{2m+2m''}\delta(s-s'')\,.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Next, we calculate the off-diagonal block in the square of the modular matrix S:

$$\begin{aligned}
(B\cdot D)_{j,r}{}^{s'',2m''} &= \frac{1}{2(k-2)}\delta^{k-2}_{2j+2r+2m''}[p]\times\\
&\quad\times\Bigg\{\sin^{-1}\frac{\pi}{k-2}(2j-1+2is'') + \sin^{-1}\frac{\pi}{k-2}(2j-1-2is'') +\\
&\qquad + (-1)^p\Bigg(\cot\frac{\pi}{k-2}(2j-1+2is'') +\\
&\qquad\qquad + \cot\frac{\pi}{k-2}(2j-1-2is'')\Bigg)\Bigg\} \qquad \text{for } 2j=2,3,\ldots,k-2\\
&= \frac{1}{4}\sum_{\alpha'}\delta^{k-2}_{1+2r+2m''}[p](-1)^{2\alpha' p}\delta^+(s'') \qquad \text{for } 2j=1\\
&= \frac{1}{4}\sum_{\alpha'}\delta^{k-2}_{1+2r+2m''}[p](-1)^{2\alpha'(p+1)}\delta^+(s'') \qquad \text{for } 2j=k-1
\end{aligned} \tag{B.3}$$

where δ^+ denotes the delta-function on the positive real half-line. We have also introduced the Kronecker symbol mod k; $\delta^k_m[p]$ means that $m=kp$. We also find:

$$\begin{aligned}
(A\cdot B)_{j,r}{}^{s'',2m''} &= \frac{1}{2(k-2)}\delta^{k-2}_{2j+2r+2m''}[p]\times\\
&\quad\times\Bigg\{-\sin^{-1}\frac{\pi}{k-2}(2j-1+2is'') - \sin^{-1}\frac{\pi}{k-2}(2j-1-2is'') +\\
&\qquad + (-1)^p\Bigg(-\cot\frac{\pi}{k-2}(2j-1+2is'') - \cot\frac{\pi}{k-2}(2j-1-2is'')\Bigg)\Bigg\}\,.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Combining the two, we obtain for $A.B+B.D$:

$$\begin{aligned}
A.B+B.D &= 0 \qquad 2j=2,3,\ldots,k-2\\
&= \frac{1}{2}\delta_{-1-2r,2m''}\delta^+(s'') \qquad 2j=1\\
&= \frac{1}{2}\delta_{-1-2r,2m''}\delta^+(s'') \qquad 2j=k-1\,.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Combining this final result with the character identities in the bulk of the paper, one finds the charge conjugation matrix.

JHEP04(2004)043

S^2 computation for the bosonic coset. Details of the computation of S^2 for the coset are as follows. We have:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{i}{\sqrt{k(k-2)}} e^{-\frac{\pi i}{k}(2j+2r)(2j'+2r')} e^{\frac{\pi i}{k-2}(2j-1)(2j'-1)} \qquad \text{for } 2j' = 2, \ldots, k-2 \\
&= \frac{i}{2\sqrt{k(k-2)}} e^{-\frac{\pi i}{k}(2j+2r)(1+2r')} \qquad \text{for } 2j' = 1 \ldots \\
&= -\frac{i}{2\sqrt{k(k-2)}} e^{-\frac{\pi i}{k}(2j+2r)(-1+2r')} \qquad \text{for } 2j' = k-1 \ldots \\
D &= \frac{2}{\sqrt{k(k-2)}} e^{\frac{\pi i}{k}(2\alpha+2r)(2\alpha'+2r')} \cos\left(\frac{4\pi s s'}{k-2}\right) \\
B &= \frac{1}{\sqrt{k(k-2)}} e^{\frac{\pi i}{k}(2j+2r)(2\alpha'+2r')} \frac{\cosh \pi \left(s' \frac{k-4j}{k-2} + i\alpha'\right)}{\cosh \pi (s' + i\alpha')} \,.
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

We can then calculate $A.B$ and $B.D$ respectively, which gives a matrix labeled by discrete and continuous indices (j, r) and $(s'', \alpha'' + r'')$. We find:

$$
\begin{aligned}
A.B &= \frac{1}{2(k-2)} \delta^k_{2j+2r-2\alpha''-2r''}[p] \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{1 + (-1)^p \cos \frac{-i2\pi s'' + \pi(1-2j)}{k-2}}{\sin \frac{\pi}{k-2}(1 - 2j - 2is'')} + \frac{1 + (-1)^p \cos \frac{i2\pi s'' + \pi(1-2j)}{k-2}}{\sin \frac{\pi}{k-2}(1 - 2j + 2is'')} \right\} \\
B.D &= -\frac{1}{2(k-2)} \delta^k_{2j+2r+2\alpha''+2r''}[p] \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{1 + (-1)^p \cos \frac{-i2\pi s'' + \pi(1-2j)}{k-2}}{\sin \frac{\pi}{k-2}(1 - 2j - 2is'')} + \frac{1 + (-1)^p \cos \frac{i2\pi s'' + \pi(1-2j)}{k-2}}{\sin \frac{\pi}{k-2}(1 - 2j + 2is'')} \right\} \\
&\qquad\qquad \text{for } 2j = 2, \ldots, k-2 \\
&= \frac{1}{2} \delta^{2k}_{2r+1+2\alpha''+2r''} \delta^+(s'') \qquad \text{for } 2j = 1 \\
&= \frac{1}{2} \delta^{2k}_{2r-1+2\alpha''+2r''} \delta^+(s'') \qquad \text{for } 2j = k-1 \,.
\end{aligned}
\tag{B.7}
$$

Combining these results with the character identities in the bulk of our paper yields the result $S^2 = C$, where C is the matrix that exchanges the characters labeled (j, r) and $(\frac{k}{2} - j, -r)$ in the discrete sector and $(s, \alpha + r)$ and $(s, -(\alpha + r))$ in the continuous sector.

References

[1] D. Gepner, *Space-time supersymmetry in compactified string theory and superconformal models*, *Nucl. Phys.* **B 296** (1988) 757.

[2] J. Teschner, *On structure constants and fusion rules in the* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathrm{SU}(2)$ *WZNW model*, *Nucl. Phys.* **B 546** (1999) 390 [`hep-th/9712256`].

[3] H. Dorn and H.J. Otto, *Two and three point functions in Liouville theory*, *Nucl. Phys.* **B 429** (1994) 375 [`hep-th/9403141`].

JHEP04(2004)043

[4] A.B. Zamolodchikov and A.B. Zamolodchikov, *Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory*, *Nucl. Phys.* **B 477** (1996) 577 [hep-th/9506136].

[5] S. Elitzur, A. Forge and E. Rabinovici, *Some global aspects of string compactifications*, *Nucl. Phys.* **B 359** (1991) 581.

[6] G. Mandal, A.M. Sengupta and S.R. Wadia, *Classical solutions of two-dimensional string theory*, *Mod. Phys. Lett.* **A 6** (1991) 1685.

[7] E. Witten, *On string theory and black holes*, *Phys. Rev.* **D 44** (1991) 314.

[8] R. Dijkgraaf, H. Verlinde and E. Verlinde, *String propagation in a black hole geometry*, *Nucl. Phys.* **B 371** (1992) 269.

[9] M. Roček, K. Schoutens and A. Sevrin, *Off-shell WZW models in extended superspace*, *Phys. Lett.* **B 265** (1991) 303.

[10] A. Giveon, *Target space duality and stringy black holes*, *Mod. Phys. Lett.* **A 6** (1991) 2843.

[11] L.J. Dixon, M.E. Peskin and J. Lykken, $N = 2$ *superconformal symmetry and* $\mathrm{SO}(2,1)$ *current algebra*, *Nucl. Phys.* **B 325** (1989) 329.

[12] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade and A.N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, Birkhauser, Boston 1985.

[13] C. Vafa and N.P. Warner, *Catastrophes and the classification of conformal theories*, *Phys. Lett.* **B 218** (1989) 51;
E.J. Martinec, *Algebraic geometry and effective lagrangians*, *Phys. Lett.* **B 217** (1989) 431;
E. Witten, *On the Landau-Ginzburg description of* $N = 2$ *minimal models*, *Int. J. Mod. Phys.* **A 9** (1994) 4783 [hep-th/9304026].

[14] J.M. Maldacena and H. Ooguri, *Strings in* AdS_3 *and* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *WZW model, I*, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2929 [hep-th/0001053].

[15] A. Pakman, *Brst quantization of string theory in* AdS_3, *J. High Energy Phys.* **06** (2003) 053 [hep-th/0304230].

[16] S. Ribault and V. Schomerus, *Branes in the 2-D black hole*, *J. High Energy Phys.* **02** (2004) 019 [hep-th/0310024].

[17] I. Bakas and E. Kiritsis, *Beyond the large-N limit: nonlinear w(infinity) as symmetry of the* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$ *coset model*, *Int. J. Mod. Phys.* **A7S1A** (1992) 55–81 [hep-th/9109029].

[18] K. Sfetsos, *Degeneracy of string states in 2-D black hole and a new derivation of* $\mathrm{SU}(1,1)$ *parafermion characters*, *Phys. Lett.* **B 271** (1991) 301.

[19] P.A. Griffin and O.F. Hernandez, *Feigin-fuchs derivation of* $\mathrm{SU}(1,1)$ *parafermion characters*, *Nucl. Phys.* **B 356** (1991) 287.

[20] K. Itoh, H. Kunitomo, N. Ohta and M. Sakaguchi, *Brst analysis of physical states in two-dimensional black hole*, *Phys. Rev.* **D 48** (1993) 3793 [hep-th/9305179].

[21] S. Hwang and P. Roberts, *Interaction and modular invariance of strings on curved manifolds*, hep-th/9211075.

[22] M. Henningson, S. Hwang, P. Roberts and B. Sundborg, *Modular invariance of* $\mathrm{SU}(1,1)$ *strings*, *Phys. Lett.* **B 267** (1991) 350.

JHEP04(2004)043

[23] A. Giveon and D. Kutasov, *Little string theory in a double scaling limit*, *J. High Energy Phys.* **10** (1999) 034 [hep-th/9909110].

[24] A. Hanany, N. Prezas and J. Troost, *The partition function of the two-dimensional black hole conformal field theory*, *J. High Energy Phys.* **04** (2002) 014 [hep-th/0202129].

[25] K. Miki, *The representation theory of the* SO(3) *invariant superconformal algebra*, *Int. J. Mod. Phys.* **A 5** (1990) 1293.

[26] T. Eguchi and Y. Sugawara, *Modular bootstrap for boundary $N = 2$ Liouville theory*, *J. High Energy Phys.* **01** (2004) 025 [hep-th/0311141].

[27] W. Boucher, D. Friedan and A. Kent, *Determinant formulae and unitarity for the $N = 2$ superconformal algebras in two-dimensions or exact results on string compactification*, *Phys. Lett.* **B 172** (1986) 316.

[28] V.K. Dobrev, *Characters of the unitarizable highest weight modules over the $N = 2$ superconformal algebras*, *Phys. Lett.* **B 186** (1987) 43.

[29] E. Kiritsis, *Character formulae and the structure of the representations of the $N = 1$, $N = 2$ superconformal algebras*, *Int. J. Mod. Phys.* **A 3** (1988) 1871.

[30] A. Schwimmer and N. Seiberg, *Comments on the $N = 2$, $N = 3$, $N = 4$ superconformal algebras in two-dimensions*, *Phys. Lett.* **B 184** (1987) 191.

[31] C. Ahn, M. Stanishkov and M. Yamamoto, *One-point functions of $N = 2$ super-Liouville theory with boundary*, *Nucl. Phys.* **B 683** (2004) 177 [hep-th/0311169].

[32] J.M. Maldacena, H. Ooguri and J. Son, *Strings in AdS_3 and the* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *WZW model, II: euclidean black hole*, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2961 [hep-th/0005183].

[33] D. Israel, C. Kounnas and M.P. Petropoulos, *Superstrings on NS5 backgrounds, deformed AdS_3 and holography*, *J. High Energy Phys.* **10** (2003) 028 [hep-th/0306053].

[34] K. Hori and A. Kapustin, *Duality of the fermionic 2d black hole and $N = 2$ liouville theory as mirror symmetry*, *J. High Energy Phys.* **08** (2001) 045 [hep-th/0104202].

[35] D. Tong, *Mirror mirror on the wall: on two-dimensional black holes and Liouville theory*, *J. High Energy Phys.* **04** (2003) 031 [hep-th/0303151].

JHEP04(2004)043

IV

Régularisation de la théorie des petites cordes

En dehors des dualités holographiques de type AdS/CFT dont nous avons donné un exemple dans le chapitre précédent, il existe une autre classe d'espaces-temps holographiques connus en théories des cordes, reliés aux espaces de NS5-branes. Contrairement à celle des espaces-temps anti-de Sitter, cette dualité est encore mal connue, et en particulier la nature de la théorie non-gravitationnelle vivant sur les cinq-branes duale à la théorie des supercordes dans la géométrie qu'elles génèrent. En outre, dans la version la plus simple de cette dualité, la théorie des cordes est fortement couplée ce qui complique l'analyse.

L'étude de cette dualité est cependant d'un grand intérêt, car d'une part l'espace-temps courbe créé par les NS5-branes correspond souvent à des théories de supercordes solubles, et d'autre part la théorie duale, six-dimensionnelle, peut être compactifiée pour construire des théories de jauge applicables à la description du modèle standard.

Dans les publications n°1 et n°3, nous avons décrit des solutions de NS5-branes possédant une description perturbative en théorie des cordes. La publication n°4 concerne la construction de D-branes dans ces géométries.

IV.1. Préambule : la théorie du dilaton linéaire

Il existe une théorie conforme exactement soluble, présentant une forte analogie avec les modèles de WZW pour les groupes non-compacts, appelée théorie du *dilaton linéaire*. Cette théorie se compose simplement d'un boson libre $\rho(z,\bar{z})$ – et du fermion associé ψ – mais le profil du dilaton est linéaire dans cette coordonnée : $\Phi = \Phi_0 + \mathcal{Q}\rho$. Dans la jauge super-conforme, l'action de la théorie est analogue à celle d'un boson libre, mais le tenseur d'énergie-impulsion et le super-courant de la théorie sont modifiés par la «charge du vide» $\mathcal{Q}$, comme :

$$T = -\frac{1}{2}\partial\rho\partial\rho - \frac{1}{2}\mathcal{Q}\,\partial^2\rho\,, -\frac{1}{2}\psi\partial\psi\,, \quad G = \imath\psi\partial\rho + \imath\mathcal{Q}\partial\psi\,,$$

de même pour le secteur droit. La charge centrale de la théorie est déplacée par la charge du vide comme $c = 3/2 + 6\mathcal{Q}^2$. Les opérateurs primaires bosoniques de cette théorie sont du même type que pour une théorie libre non-compacte : $\mathcal{V}_\alpha = \exp \mathcal{Q}\alpha\rho(z,\bar{z})$, où nous avons normalisé l'impulsion avec la charge $\mathcal{Q}$. Cependant, leur dimension conforme est déplacée par la charge du vide, comme

$$h_\alpha = \bar{h}_\alpha = -\frac{\mathcal{Q}^2}{2}\,\alpha(\alpha-1)\,, \quad \mathcal{V}_\alpha = e^{\mathcal{Q}\alpha\rho}. \tag{IV.1}$$

Il existe deux sortes de représentations de cette théorie ; la première catégorie – les représentations continues – correspond aux états asymptotiques, possédant une impulsion réelle déplacée par la charge du vide, $\alpha = \imath P + 1/2$, de dimension conforme strictement positive : $h_P = \frac{\mathcal{Q}^2}{2}(P^2 + 1/4)$. Contrairement à l'espace plat, le profil du dilaton induit une masse minimale pour tous les états asymptotiques de la théorie.

Cependant ces représentations ne sont pas suffisantes pour définir complètement la théorie. En effet lors du calcul de corrélateurs, il faudra satisfaire la conservation du moment, malgré

la présence du déplacement de l'impulsion des représentations continues, et d'une «charge du vide», due au dilaton linéaire, et dépendant du genre de la surface d'univers. Nous devons alors introduire un deuxième type de représentations, les représentations discrètes, correspondant à des états localisés en $\rho = \pm\infty$. Leur impulsion est alors purement imaginaire : $\alpha = j \in \mathbb{R}$.

Du point de vue de la théorie des cordes, cette solution ne correspond pas à un bon vide perturbatif. En effet, la constante de couplage effective des cordes, contrôlant le développement perturbatif, $g_s = e^{\Phi}$, diverge pour $\rho \to \infty$. Nous avions déjà rencontré des divergences de ce type pour les modèles de WZW jaugés, voir par exemple (II.23) ; mais dans ce dernier cas nous avions seulement une divergence de la constante de couplage dans l'action *effective* au premier ordre en $1/k$, la constante de couplage de la théorie conforme, qui n'existe pas nécessairement dans l'action effective exacte. Au contraire, l'action du dilaton linéaire ne reçoit pas de corrections – c'est une théorie libre – et la divergence est réelle. Il est possible de remédier à ce problème en supprimant la région de couplage fort de l'intégrale de chemin à l'aide d'un potentiel, correspondant à une représentation discrète de la théorie. Ainsi, d'après (IV.1), les opérateur suivants sont marginaux : $\delta S = \mu \int d^2z \exp(\mathscr{Q}\alpha_\pm \rho)$, où $\alpha_\pm$ sont les racines de l'équation $\alpha(\alpha-1) + 2/\mathscr{Q}^2 = 0$. Dans le traitement perturbatif de cette théorie, le potentiel est considéré comme une «charge d'écran», dont le nombre d'insertions est dicté par l'annulation de la charge du vide discutée plus haut. La théorie du dilaton linéaire avec un tel potentiel est appelée *théorie de Liouville* [98–100], et correspond à la théorie de la gravitation quantique à deux dimensions. Nous allons revenir plus tard à l'extension N=2 superconforme de cette théorie.

Nous pouvons noter la forte analogie de ces représentations avec celles de $SL(2,\mathbb{R})$; ce lien ce comprend aisément en utilisant la représentation de Wakimoto de l'algèbre affine $SL(2,\mathbb{R})$ [101], dans laquelle les courants et les opérateurs primaires sont représentés à l'aide d'un dilaton linéaire, et d'un système de «fantômes» (β,γ) de dimension $(1,0)$. Il est alors possible de calculer dans cette représentations en champs libres les corrélateurs du modèle de WZW [102], à l'aide de ceux du dilaton linéaire et des champs (β,γ).

Près de l'horizon des NS5-branes. La théorie du dilaton linéaire est importante en théorie des supercordes car elle intervient dans la géométrie créée par des NS5-branes coïncidentes. Considérons en effet la solution correspondant à N_5 NS5-branes, chargées magnétiquement sous la deux-forme $\mathbf{B}_{[2]}$, donnée par (I.13). Dans la limite où nous approchons de l'horizon des cinq-branes, c.-à.-d. $r \to 0$, la solution se simplifie en :

$$\begin{aligned} ds_\sigma^2 &= \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + N_5\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{r^2} + \mathrm{d}\Omega_3\right), \\ \mathscr{H} &= 2N_5\omega_3 \\ \Phi &= \Phi_0 + \frac{1}{2}\log(N_5/r^2). \end{aligned} \tag{IV.2}$$

Par le changement de coordonnées $\rho = \sqrt{N_5/2}\log r$, nous obtenons alors le produit d'un modèle de WZW supersymétrique $SU(2)_{N_5}$ et d'un dilaton linéaire de charge : $\mathscr{Q}^2 = 2/N_5$. Le produit de ces deux théories conformes possède une algèbre superconforme étendue N=4 sur la surface d'univers [103,104]. Les générateurs de cette algèbre s'écrivent en fonction des courants I^a de

$SU(2)$ comme :

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{N_5}\sum_{i=1}^{3} I^i I^i - \frac{1}{2}\partial\rho\partial\rho - \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4}\psi^a\partial\psi^a - \mathscr{Q}\partial^2\rho\,,\\
G^i &= \sqrt{\frac{2}{N_5}}\left[-I^i\psi^\rho + \sum_{j,\ell=1}^{3}\varepsilon^{ij\ell}\left(I^j - \psi^\rho\psi^j\right)\psi^\ell\right] + \imath\psi^i\partial\rho - \imath\mathscr{Q}\partial\psi^i,\\
G^4 &= \sqrt{\frac{2}{N_5}}\sum_{i=1}^{3}\left[I^i\psi^i + \frac{1}{3}\sum_{j,\ell=1}^{3}\varepsilon^{ij\ell}\psi^i\psi^j\psi^\ell\right] + \imath\psi^\rho\partial\rho - \imath\mathscr{Q}\partial\psi^\rho\,,\\
S^i &= \frac{1}{2}\left(\psi^\rho\psi^i + \frac{1}{2}\sum_{j,\ell=1}^{3}\varepsilon^{ij\ell}\psi^j\psi^\ell\right),
\end{aligned}
$$

Nous voyons en particulier que les courants S^i générant l'algèbre affine $SU(2)_1$ correspondant à la symétrie R, s'écrivent uniquement à l'aide de fermions libres ; les contributions de la torsion de $SU(2)$ et du déplacement du dilaton linéaire se compensent exactement. Il est possible de montrer [105] que toutes les théories superconformes N=4 avec torsion correspondent à des distributions de NS5-branes parallèles, dont l'exemple présent est le plus simple. Nous reviendrons plus loin sur une autre configuration exactement soluble en théorie conforme.

IV.2. NS5-branes et holographie

De manière analogue à la dualité AdS/CFT, nous sommes en présence, avec les théories de NS5-branes de deux descriptions complémentaires de la même physique ; d'un côté une solution de théorie des cordes représentant l'espace-temps courbé par les cinq-branes, et de l'autre les degrés de liberté vivant sur la brane. Nous voulons maintenant trouver un régime de la théorie dans lequel ces deux descriptions découplent, et deviendraient *équivalentes* par dualité holographique.

NS5-branes et D5-branes. Examinons premièrement la théorie vivant sur les NS5-branes. Dans l'exemple de la théorie de supercordes IIB, nous pouvons connaître les degrés de liberté vivant sur les cinq-branes en utilisant une dualité S, transformant les NS5-branes en D5-branes. Les opérateurs BPS de la théorie sont conservés lors de cette opération, grâce à la supersymétrie qu'ils préservent. La théorie vivant sur les D5-branes est une théorie de cordes ouvertes, avec une symétrie de jauge $U(N_5)$ et une supersymétrie $N = (1,1)$ à six dimensions. Cette théorie contient un champ de jauge, quatre scalaires à valeurs dans $U(N_5)$, dont les valeurs moyennes correspondent aux positions des cinq-branes dans l'espace tranverse, et leurs partenaires fermioniques. Dans la limite de basse énergie cette théorie se réduit à une théorie de jauge. Remarquons, qu'à l'inverse des D3-branes, cette théorie des champs est non-renormalisable, et doit être complétée à hautes énergies par la description de cordes ouvertes.

La conjecture de dualité. Cette différence se manifeste aussi dans la limite de découplage. En effet, alors que la limite de découplage des D3-branes est une limite de basse énergie, $\alpha' \to 0$, la limite de découplage des NS5-branes conserve toutes les échelles d'énergie de la théorie vivant sur les branes :

$$g_s \to 0\,, \quad \alpha' \text{ fixé}. \tag{IV.3}$$

Remarquons pour commencer que, dans cette limite, la dynamique de la théorie reste non-triviale en raison de la divergence du dilaton – et donc du couplage fort – près des NS5-branes.

La physique de basse énergie sur la brane est décrite par une théorie de jauge, de constante de couplage nue : $g_{\mathrm{YM}}^2 = 1/\alpha'$. [106] Comme cette théorie des champs est non-normalisable, elle devient une théorie libre dans l'infrarouge.

L'effet de la limite de découplage (IV.3) sur la solution de NS5-branes en supergravité, équation (I.13), avec r/g_s fixé[a] est de prendre la limite de la solution près de l'horizon des NS5-branes, voir (IV.2), dans laquelle nous connaissons la description exacte en théorie superconforme $SU(2)_k \times \mathbb{R}_{\mathscr{Q}}$, voir la section IV.1. Nous sommes alors naturellement amenés a la conjecture suivante, formulée dans [107] : la solution de NS5-branes, près de l'horizon, est *duale* de la théorie vivant sur les NS5-branes, au sens holographique. Les fonctions de corrélation impliquant des représentations discrètes du dilaton linéaire, localisées en $\rho \to +\infty$, sont identifiées avec les fonctions de Green de la théorie sur les cinq-branes.

La théorie vivant sur les NS5-branes est appelée «**théorie des petites cordes**», car elle possède beaucoup de caractéristiques communes avec les théories des cordes habituelles, mais ne contient pas la gravitation :

- elle possède une symétrie de dualité T, car les NS5-branes ne sont pas affectées par la dualité T de la théorie des supercordes ;
- l'étude de la théorie des petites cordes à haute température, à l'aide de la description holographique, montre que la théorie des petites cordes possède une transition de phase à haute température de type Hagedorn, due à la croissance exponentielle de la densité d'états [108]. Ce comportement est identique a celui des théories de supercordes ;
- la théorie de basse énergie sur les cinq-branes possède des solutions de cordes, identifiées avec les cordes fondamentales, et nécessaires à la description de la théorie à haute énergie.

Pour connaître les propriétés détaillées de cette théorie nous devons nous reposer sur la description holographique, dans laquelle nous pouvons en principe calculer les fonctions de corrélation caractérisant cette théorie.

NS5-branes et couplage fort. L'obstacle majeur à l'accomplissement de ce programme vient du problème du couplage fort près des NS5-branes, qui invalide les calculs perturbatifs d'amplitudes de la théorie des supercordes. Dans le cas de la théorie des cordes IIB, cette région de couplage fort, pour $\rho \to -\infty$, correspond dans la théorie duale au flot de la théorie de jauge vers une théorie libre dans l'infrarouge extrême. Nous pouvons invoquer la dualité S pour étudier la physique dans ce régime, mais la région intermédiaire $g_s \sim 1$ est alors inaccessible.

La situation dans la théorie des supercordes IIA est très différente. Premièrement, la supersymétrie de la théorie des petites cordes IIA est $N = (2,0)$ à six dimensions ; cette algèbre de supersymétrie admet, contrairement au cas précédent, une extension *superconforme*, ouvrant la possibilité d'avoir un point fixe non-trivial dans l'infrarouge. Ensuite, près des NS5-branes, lorsque le couplage devient fort, nous pouvons utiliser la description en termes de la théorie $\mathscr{M}$, présentée dans la section I.5. Les NS5-branes s'interprètent alors comme des solutions de M5-branes de la supergravité à onze dimensions, voir (I.10), mais distribuées sur la onzième dimension compactifiée. Dans la limite près de l'horizon, nous approchons de l'un des paquets de M5-branes, et la géométrie hendéca-dimensionnelle s'approche de $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$. Dans la limite où la supergravité est valide, nous pouvons alors étudier cette dualité avec les outils de AdS/CFT, mais nous perdons les aspects spécifiques à la théorie des cordes.

Il est cependant possible, comme nous allons le montrer maintenant, de trouver des descriptions *perturbatives* de la petites théorie des cordes, en choisissant un autre point de l'espace des modules des cinq-branes que celui, singulier, correspondant aux NS5-branes coïncidentes.

[a] Cette condition signifie que nous gardons constante la masse des D1-branes étendues entre les NS5-branes si celles-ci sont séparées dans l'espace transverse

IV.3. Déformation nulle de AdS_3 et théorie des petites cordes

La première description perturbative que nous allons décrire s'obtient par déformation du modèle de WZW sur $SL(2,\mathbb{R})$. Cette théorie interpole en effet entre le système NS5/F1 du chapitre précédent et la théorie de NS5-branes du présent chapitre.

Limite de découplage. Le système NS5/F1 occupe une position remarquable parmi les solutions holographiques de la théorie des cordes. Il admet en effet trois limites de découplage parfaitement valables. Cette solution s'obtient par dualité S du système D1/D5, eq. (III.3), et s'écrit, dans les variables duales, en termes des fonctions :

$$H_1 = 1 + \frac{g_s^2\,\alpha' N_1}{v r^2}\ , \quad H_5 = 1 + \frac{\alpha' N_5}{r^2}.$$

La première limite, décrite au chapitre III, correspond à la limite de basse énergie $\alpha' \to 0$, avec g_s et r/α' fixés, et est duale à la théorie des supercordes dans $\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^3$. Dans cette limite nous approchons à la fois des NS5-branes et des cordes fondamentales, et la théorie duale dans l'espace-temps est bidimensionnelle.

La deuxième limite, présentée au début de ce chapitre, s'obtient à partir du système NS5/F1 par : $g_s \to 0$, avec α' et $g_s^2 v$ fixés. Dans cette limite la contribution des cordes fondamentales devient négligeable car elles sont infiniment diluées dans les NS5-branes. Nous obtenons alors la géométrie des seules NS5-branes près de l'horizon, souffrant du problème de couplage fort.

Dans la troisième limite de découplage, que nous avons étudiée dans [78], nous souhaitons conserver la contribution des cordes fondamentales, pour régulariser la région de couplage fort. La solution correspondante, dans laquelle nous sommes près de l'horizon des NS5-branes, mais non des cordes fondamentales, s'obtient dans la limite suivante, en gardant constante la densité de cordes fondamentales : $g_s \to 0$, avec α' et v fixés.[b]

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s_\sigma^2 &= \alpha' N_5 \left\{ \frac{\mathrm{d}u^2}{u^2} + \frac{\mathrm{d}X^2 - \mathrm{d}T^2}{u^2 + 1/M^2} + \mathrm{d}\Omega_3^2 \right\} + \alpha' \sum_{i=6}^{9} (\mathrm{d}x^i)^2, \\
\mathrm{e}^{2\Phi} &= \frac{1}{g_s^2} \frac{u^2}{u^2 + 1/M^2}, \\
\mathscr{H}_{[3]} &= \alpha' N_5 \left\{ \frac{2u}{\left(u^2 + 1/M^2\right)^2} \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}X + 2\omega_3 \right\}.
\end{aligned} \tag{IV.4}$$

Cette géométrie se factorise en un espace-temps AdS_3 déformé par le paramètre M, donné par : $M^2 = \alpha' N_1 / v$, en une trois-sphère et un quatre-tore.

Nous observons que cette solution est faiblement couplée dans tout l'espace-temps. Elle possède deux limites remarquables. Dans la limite $u \to 0$, c.-à.-d. loin des branes, nous obtenons la géométrie près de l'horizon des NS5-branes seules, $SU(2) \times \mathbb{R}_{\mathscr{Q}}$, mais uniquement dans la région de couplage faible. Au contraire, en s'approchant des branes, par $u \to \infty$, la contribution des cordes fondamentales devient significative, et nous approchons la géométrie $\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^3$, mais uniquement la région près de l'horizon. La valeur maximale de la constante de couplage des cordes peut être choisie arbitrairement petite, lorsque $N_1 \gg 1$.

Description en théorie conforme. L'intérêt majeur de la dernière limite de découplage vient de sa description *exacte* en théorie conforme, correspondant à une déformation *parabolique* du modèle de WZW sur $SL(2,\mathbb{R})$.

[b] Dans l'image S-duale de cette limite de découplage, le volume sans dimension v est au contraire envoyé à l'infini.

Considérons à cet effet le modèle sigma dans les coordonnées de Poincaré, adaptées à la base parabolique.

$$S = \frac{k}{2\pi}\int d^2z\left(\frac{\partial u\bar{\partial}u}{u^2}+\frac{\partial X^+\bar{\partial}X^-}{u^2}\right).$$

Les courants paraboliques : $J^+ = u^{-2}\partial X^+$ et $\bar{J}^+ = u^{-2}\bar{\partial}X^-$ correspondent simplement aux translations le long du cône de lumière. Il est alors possible de déformer le modèle de WZW à l'aide de l'opérateur exactement marginal : $\delta S \sim \int \mathrm{d}^2z\, J^+\bar{J}^+$, conduisant au modèle sigma [78,109] :

$$S = \frac{k}{2\pi}\int d^2z\left(\frac{\partial u\bar{\partial}u}{u^2}+\frac{\partial X^+\bar{\partial}X^-}{u^2+1/M^2}\right), \tag{IV.5}$$

ainsi qu'un dilaton donné plus haut (IV.4).

Ce modèle sigma correspond à la solution de supergravité (IV.4), ce qui signifie que nous possédons une description exacte en théorie des supercordes de cette limite de découplage de la petite théorie des cordes, compatible avec l'approche perturbative.

L'effet de cette déformation sur le spectre de la théorie conforme peut s'obtenir en déformant le réseau apparaîssant dans la fonction de partition de $SL(2,\mathbb{R})$ dans une direction nulle [78]. Cependant la compréhension détaillée du spectre de la théorie déformée nécessiterait la décomposition de la fonction de partition en caractères paraboliques, ce qui n'est pas connu à l'heure actuelle. Enfin, la supersymétrie de la solution, manifeste par construction en supergravité, peut s'étudier dans la théorie superconforme à l'aide d'une représentation de $SL(2,\mathbb{R})$ en champs libres.

Interprétation holographique. L'interprétation holographique de cette déformation est un peu délicate. En effet, du point de vue de la surface d'univers de la corde, nous déformons le modèle de WZW sur $SL(2,\mathbb{R})$ avec une perturbation marginale. Cependant, même pour une faible valeur de la perturbation, la géométrie asymptotique de l'espace est changée car les courants de $SL(2,\mathbb{R})$ sont non-normalisables. Du point de vue de la théorie duale dans l'espace-temps, nous perturbons la théorie conforme vivant sur les NS5/F1 par un opérateur *non-pertinent* dans l'infrarouge, c.-à.-d. qui croît à hautes énergies, brisant l'invariance conforme.

Au contraire, il est plus naturel d'étudier cette perturbation du point de vue de la théorie des petites cordes. Dans le contexte de la théorie des supercordes IIB, nous avons mentionné que la théorie sur les cinq-branes évolue dans l'infrarouge vers un point fixe trivial ; le mouvement du dilaton linéaire correspond à ce flot de l'ultraviolet $\rho \to +\infty$ faiblement couplé dans l'espace-temps à l'infrarouge $\rho \to -\infty$, fortement couplé dans l'espace-temps mais faiblement couplé sur les branes. Pour éviter ce flot vers le point fixe libre, conduisant au couplage fort dans l'espace-temps, nous rajoutons à la théorie un opérateur pertinent dans l'infrarouge. Du point de vue de l'espace-temps, nous déformons la théorie conforme $SU(2)_k \times \mathbb{R}_{\mathscr{Q}} \times \mathbb{R}^{5,1}$ par le potentiel suivant :

$$\delta S \sim M^2 \int \mathrm{d}^2z\, \partial X^+\bar{\partial}X^-\, e^{-\sqrt{\frac{2}{k}}\rho}$$

Ce potentiel, de manière analogue à la théorie de Liouville, régularise le problème de couplage fort. D'après la description «miroir» de cette opération, donnée par le modèle sigma (IV.5), cette déformation correspond à ajouter des cordes fondamentales macroscopiques dans le fond de NS5-branes, qui modifient la solution dans l'infrarouge et arrêtent le mouvement du dilaton. Prenons maintenant le point de vue de la théorie vivant sur les cinq-branes. Dans l'image S-duale des D5-branes, la théorie euclidienne de basse énergie est donnée par une théorie de jauge couplée à quatre scalaires $X^a \in U(N_5)$:

$$S_{\mathrm{D5}} = \frac{1}{\alpha' g_s}\int \mathrm{Tr}\left(\mathscr{F}\wedge *\mathscr{F} + \mathrm{D}X^a\wedge *\mathrm{D}X^a + *\left[X^a,X^b\right]^2\right) + \imath g_s \mathbf{C}_{[2]}\wedge \mathrm{Tr}\left(\mathscr{F}\wedge\mathscr{F}\right). \tag{IV.6}$$

Le dernier terme, topologique, provient des corrections à l'action effective sur les D-branes en présence d'un fond non-trivial, dans le cas présent pour la deux-forme de Ramond-Ramond. Il s'agit de l'analogue en dimension six du terme «théta» dans les théories de jauge quadridimensionnelles.

Dans le cas présent, les D1-branes macroscopiques dans le fond gravitationnel sont une source pour la deux-forme de R-R, ce qui conduit au couplage suivant pour ce terme topologique : $\mathbf{C}_{[2]} \to \frac{1}{g_s}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}t$, où nous avons considéré la limite infrarouge de (IV.4). Ce terme est imaginaire car les D1-branes couplent de manière électrique à la deux-forme de R-R, et, en conséquence, la contribution du terme topologique à l'action euclidienne sera réelle. Nous devons donc reconsidérer les vides de la théorie de jauge à six dimensions contribuant à l'intégrale de chemin. Soit en effet une configuration d'instanton à quatre dimensions, c.-à.-d. un champ de jauge classique vérifiant la condition d'auto-dualité à quatre dimensions : $\mathscr{F} = *_4\mathscr{F}$. Cette configuration peut être «oxydée» en une configuration de la théorie de jauge à six dimensions vérifiant une condition d'auto-dualité généralisée, respectant les symétries préservées par le fond de la deux-forme de R-R : $\mathscr{F} \wedge \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x = *_6\mathscr{F}$. Nous observons maintenant, qu'en raison du terme topologique induit par les D1-branes macroscopiques, de telles configurations du champ de jauge donnent une contribution *finie* à l'intégrale de chemin, au contraire de l'action sans terme topologique.[c] Ainsi, la théorie effective de basse énergie se réduit à la théorie effective sur l'espace des modules de ces configurations «instantoniques», qui n'est rien d'autre que la théorie conforme duale à la théorie des cordes dans $\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^3$. Dans le cas présent, nous possédons une description holographique du flot de renormalisation complet de la théorie des petites cordes dans l'ultraviolet vers la théorie conforme dans l'infrarouge. Il serait très intéressant de pouvoir calculer des amplitudes de théories des cordes dans la géométrie AdS_3 déformée pour mieux comprendre cette holographie.

IV.4. Double limite d'échelle

Nous avons étudié précédemment la limite de découplage de la théorie de NS5-branes coïncidentes ; la description holographique de cette théorie est problématique en raison du couplage fort de la théorie des supercordes près des cinq-branes. Nous avons montré qu'il était possible d'obtenir une limite perturbative de cette dualité, en ajoutant des cordes fondamentales macroscopiques, parallèles aux NS5-branes. Il existe cependant une manière alternative pour obtenir un modèle faiblement couplé.

Toute configuration de NS5-branes parallèles préserve la moitié des supersymétries ; en conséquence, celles-ci peuvent être séparées et déplacées dans leur espace transverse commun sans nécessiter aucune énergie.[d] L'*espace des modules* des NS5-branes correspond à l'ensemble de ces configurations. Pour N_5 NS5-branes, il est isomorphe à $\mathbb{R}^{4N_5}/S_{N_5}$, où S_{N_5} est le groupe des permutations à N_5 élements. L'origine de cet espace, qui correspond au point fixe du groupe des permutations, représente la configuration de branes au même point. Nous désirons maintenant séparer toutes les NS5-branes. En effet, les degrés de liberté non-perturbatifs de la théorie de de NS5-branes correspondent (dans les supercordes IIB) aux D1-branes étendues entre elles. Lorsque les cinq-branes sont coïncidentes, ces degrés de liberté deviennent de masse nulle, indiquant le caractère non-perturbatif de la théorie. Au contraire, pour deux NS5-branes situées en $\mathbf{X}_i$ et $\mathbf{X}_j$, la masse des D1-branes se comporte comme : $M_{ij}^{\mathrm{W}} \sim \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|/g_s$. Du point de vue holographique, une telle séparation des branes correspond au *mécanisme de Higgs*. Dans une configuration où toutes les branes sont séparées, la théorie de jauge $U(N_5)$ est brisée en $U(1)^{N_5}$, et les «bosons W»

[c] En effet il est connu qu'en dimension plus grande que quatre il n'existe pas de configurations non-triviales des théories de jauge ayant une action finie.

[d] Ceci vient du fait que, contrairement aux équations du mouvement de la supergravité, les équations de préservation de la supersymétrie sont linéaires.

massifs, correspondant à la symétrie de jauge non-abélienne brisée, sont les D1-branes étendues entre différentes NS5-branes. Ces degrés de liberté non-perturbatifs (du point de vue de l'espace ambiant) étant massifs, nous pouvons nous attendre à une description perturbative. Ce raisonnement présuppose cependant que la géométrie d'une seule NS5-brane est perturbative, comme le suggère [110].

Pour n'importe quelle configuration de NS5-branes complètement séparées, nous pouvons alors définir la **double limite d'échelle** [111] :

$$g_s \to 0\ , \quad \alpha' \text{ fixé} \quad \text{et} \quad \frac{M^{\mathrm{w}}_{ij}}{\sqrt{\alpha'}} \text{ fixé}\ , \quad \forall\, i,j = 1,\cdots,N_5\ ,\ i \neq j.$$

Nous nous attendons à obtenir une description holographique perturbative de la théorie des petites cordes dans cette limite, car la masse des D1-branes est maintenue à une valeur non-nulle. Cependant pour une configuration générique de NS5-branes, la description en théorie conforme sur la surface d'univers est compliquée.

NS5-branes sur un cercle et phase de Higgs. Nous allons concentrer maintenant notre attention sur la configuration la plus simple de NS5-branes, que nous avons étudiée dans la publication n°3. Une configuration préservant un grand nombre de symétries de l'espace transverse est en effet donnée par une distribution uniforme de NS5-branes sur un cercle, de rayon $\sqrt{\alpha'}r_0$. L'isométrie initiale $SO(4)$ de l'espace transverse, pour des branes coïncidentes, est brisée en $\mathbb{Z}_{N_5} \times SO(2)$, où le premier facteur correspond à la symétrie discrète résiduelle dans le plan du cercle (coordonnées x^6, x^7), et le deuxième facteur à la symétrie continue de rotation dans le plan orthogonal au cercle (coordonnées x^8, x^9). Cette configuration correspond à une valeur non-nulle dans le vide du champ scalaire $B = X^6 + \imath X^7$ de l'action (IV.6) de la théorie sur les cinq-branes : $\langle B \rangle = r_0\, \mathrm{diag}(1, e^{2\imath\pi/N_5}, \cdots, e^{2\imath\pi(N_5-1)/N_5})$. Ce vide particulier de la théorie de jauge brise le groupe $U(N_5)$ en $U(1)^{N_5}$. Il est caractérisé par la valeur moyenne dans le vide de l'opérateur invariant de jauge $\mathrm{Tr}\,(B^{N_5})$.

Pour connaître la déformation associée dans la théorie des cordes décrivant l'epace ambiant, nous pouvons utiliser le dictionnaire holographique [112] entre opérateurs chiraux de la théorie sur les cinq-branes et opérateurs chiraux de la théorie superconforme de la surface d'univers des cordes fondamentales. Dans le cas présent, l'opérateur caractérisant le vide correspond à :

$$\mathrm{Tr}(B^{N_5}) \longleftrightarrow \psi^+ \tilde{\psi}^+ \Phi_{N_5/2-1, N_5/2-1, N_5/2-1} e^{-\sqrt{\frac{N_5}{2}}\rho}\ , \tag{IV.7}$$

où $\Phi_{j,m,\bar{m}}$ désigne un opérateur primaire de $SU(2)_{N_5-2}$ bosonique. L'opérateur particulier considéré se décompose en un opérateur unité de la théorie parafermionique, et un terme chargé sous le Cartan de $SU(2)$. À l'aide de la bosonisation : $I^3(z) = \imath\sqrt{(N_5-2)/2}\,\partial X$, nous pouvons écrire l'opérateur comme : $\Phi_{N_5/2-1, N_5/2-1, N_5/2-1} = \exp \imath\sqrt{(N_5-2)/2}\,X$. Nous observons alors que la déformation marginale de la théorie superconforme $N = 2$ à l'aide de l'opérateur chiral (IV.7), voir la section II.4, n'est rien d'autre que l'extension N=2 de la théorie de Liouville, définie par le potentiel[e] :

$$\delta S = \mu \int \mathrm{d}^2 z\, G^-_{-1/2} \bar{G}^-_{-1/2} \psi^+ \tilde{\psi}^+ e^{\sqrt{\frac{N_5-2}{2}}\imath X - \sqrt{\frac{N_5}{2}}\rho} + \text{complexe conjugué}\,.$$

L'ajout de ce terme à l'action sur la surface d'univers supprime effectivement les contributions de la région de couplage fort. Il faut néanmoins tenir compte du fait que le courant $\imath\partial X$ correspond

[e] Cette forme du terme d'interaction de N=2 Liouville n'est pas la plus courante ; elle s'obtient après l'analogue de la rotation chirale des modèles de WZW découplant les fermions.

au Cartan de $SU(2)$, et qu'en conséquence, cette théorie de N=2 Liouville et la théorie de quotient $SU(2)/U(1)$ supersymétrique ne sont pas indépendantes, mais couplées par un orbifold $\mathbb{Z}_{N_5}$, voir II.39 pour l'équivalent bosonique. La description holographique de la phase de Higgs de la théorie des petites cordes, de symétrie $\mathbb{Z}_{N_5} \times SO(2)$, est donc donnée par la théorie superconforme :

$$\frac{SU(2)/U(1) \times [\text{N=2 Liouville}]}{\mathbb{Z}_{N_5}} \times \mathbb{R}^{5,1}.$$

Pour mieux comprendre le contenu de cette théorie il est utile d'en étudier une version duale, au sens de la symétrie miroir.

Dualité entre N=2 Liouville et $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ supersymétrique. Comme nous l'avons déjà mentionné dans la section III.4, l'application naïve des règles de dualité T au modèle de WZW jaugé $SL(2,\mathbb{R})/U(1)|_{\text{axial}}$ mène à une variété singulière appelée «trompette». Cependant, il fut proposé par Fateev, Zamolodchikov et Zamolodchikov (non publié), l'application correcte de la dualité (incluant les corrections perturbatives et non perturbatives du point de vue du modèle sigma) mène à une théorie appelée *Liouville-sinus*. La version supersymétrique de cette dualité relie le quotient N=2 $SL(2,\mathbb{R})/U(1)|_{\text{axial}}$ et la théorie de Liouville N=2 [111]. L'équivalence entre les deux modèles sigma fut étudiée dans [113,114]. Dans la publication n°4 nous avons étudié les aspects algébriques de cette correspondance. Nous avons montré premièrement que les caractères du quotient bosonique $SL(2,\mathbb{R})/U(1)|_{\text{axial}}$ et du courant de symétrie R se combinent, dans la théorie de quotient supersymétrique, de telle manière qu'ils forment des caractères de l'algèbre superconforme $N = 2$ pour $c > 3$. Nous avons également montré dans [88] que la fonction de partition de la théorie de quotient s'exprime bien à l'aide de ces caractères, voir plus loin. Or ces caractères de N=2 constituent les caractères de la théorie de N=2 Liouville, car elle ne possède pas d'autres symétries chirales. Nous concluons donc que ces théories ne peuvent différer que dans le choix relatif des représentations gauches et droites de l'algèbre N=2, ou de manière équivalente des représentations de $SL(2,\mathbb{R})$ dans le quotient. En supposant que seule la combinaison diagonale de représentations existe, les deux fonctions de partition doivent coïncider, à un orbifold près agissant sur les charges des opérateurs primaires de N=2. Nous pouvons formuler la conjecture que l'orbifold $\mathbb{Z}_k$ du quotient $SL(2,\mathbb{R})/U(1)|_{\text{axial}}$, correspondant au quotient vecteur, est la théorie de Liouville N=2. Une fois le spectre donné par la fonction de partition, les fonctions de corrélation peuvent être calculées, en utilisant les contraintes de l'algèbre chirale. En effet, en utilisant un argument inverse à celui de la section III.3, la théorie de Liouville N=2 possède une symétrie N=2 superconforme irreductible, et peut donc être complétée, en ajoutant un boson libre de genre temps, en une théorie possédant une symétrie affine $SL(2,\mathbb{R})$ [115]. En utilisant alors les contraintes obtenues à l'aide des représentations dégénérées de $SL(2,\mathbb{R})$, les corrélateurs peuvent être calculés [83–85].

Dérivation directe de la correspondance. Dans la discussion précédente, nous avons finalement montré que la description holographique de la double limite d'échelle (pour les cinq-branes sur un cercle) est donnée par la théorie superconforme :

$$\frac{SU(2)/U(1) \times SL(2,\mathbb{R})/U(1)}{\mathbb{Z}_{N_5}} \times \mathbb{R}^{5,1}. \tag{IV.8}$$

Cependant la dérivation de cette correspondance impliquait *(i)* une dualité holographique entre des opérateurs de la petite théorie des cordes et des opérateurs de la théorie des supercordes de l'espace ambiant et *(ii)* l'application de la symétrie miroir. Nous souhaitons maintenant montrer, en suivant la publication n°3, que le lien peut être établi directement.

Nous commençons par la solution de supergravité correspondant aux NS5-branes distribuées sur un cercle [116]. Cette solution généralise celle pour des branes coïncidentes, eq. (I.13), de manière analogue à l'électrostatique :

$$H_5 = 1 + \sum_{n=1}^{N_5} \frac{\alpha'}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_n\|^2}.$$

Dans le cas des branes sur un cercle, nous plaçons des cinq-branes aux positions suivantes de l'espace transverse : $X_n^6 + \imath X_n^7 = r_0 \exp 2\imath\pi(n-1)/N_5$, et $X_n^7 + \imath X_n^8 = 0$, voir la description holographique précédente. Il est alors possible de calculer explicitement la somme sur les positions des branes [116]. Nous pouvons prendre la *double limite d'échelle* décrite dans l'introduction de cette section :

$$g_s \to 0\,, \quad \alpha' \text{ fixé}\,, \quad \frac{r_0}{g_s} \text{ fixé}\,, \quad u_i := \frac{X_{i+5}}{g_s} \text{fixé}.$$

Dans cette limite, la solution de supergravité peut s'écrire de manière simple dans les coordonnées :

$$u_1 = \cosh\rho \sin\theta \cos\psi\,, \qquad u_2 = \cosh\rho \sin\theta \sin\psi\,,$$
$$u_3 = \sinh\rho \cos\theta \cos\varphi\,, \qquad u_4 = \sinh\rho \cos\theta \sin\varphi\,.$$

Nous obtenons alors la solution de NS5-branes sur un cercle, dans la double limite d'échelle, sous la forme :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s_\sigma^2 &= \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + N_5 \Lambda_{N_5}(x,\psi)\left[\mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}\theta^2 + \frac{\tan^2\theta\,\mathrm{d}\psi^2 + \tanh^2\rho\,\mathrm{d}\varphi^2}{1+\tan^2\theta\ \tanh^2\rho}\right] \\
\mathbf{B} &= \frac{N_5 \Lambda_{N_5}(x,\psi)}{1+\tan^2\theta\ \tanh^2\rho}\,\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\psi + \frac{N_5\Lambda_{N_5}(x,\psi)\sin N_5\psi}{\tan\theta\ \sinh N_5 x}\,\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta \\
e^{-2\Phi} &= \frac{\alpha'}{N_5} U_0^2 \Lambda_{N_5}^{-1}(x,\psi)\left(\cos^2\theta\cosh^2\rho + \sin^2\theta\sinh^2\rho\right)
\end{aligned} \tag{IV.9}$$

Cette solution dépend de la fonction suivante :

$$\Lambda_{N_5}(x,\psi) = \frac{\sinh N_5 x}{\cosh N_5 x - \cos N_5\psi}\,, \quad \text{avec } e^x = \cosh\rho/\sin\theta. \tag{IV.10}$$

Ce facteur conforme de la métrique transverse donne le caractère discret de la distribution de branes ; en effet, dans la limite d'une distribution continue $N_5 \to \infty$, nous avons $\Lambda_{N_5} \to 1$. Il modifie la métrique près de la localisation des NS5-branes de telle sorte que la singuarité annulaire (en $\rho = 0$, $\theta = \pi/2$) de la limite continue de la distribution disparaisse.

Nous allons maintenant montrer que cette solution de supergravité correspond à une théorie superconforme exacte [88]. Considérons en effet le produit des modèles de WZW supersymétriques $SL(2,\mathbb{R})_{N_5} \times SU(2)_{N_5}$. En dehors des quotients factorisables de $SL(2,\mathbb{R})$ ou $SU(2)$, nous pouvons construire des modèles de WZW jaugés non factorisables. Pour chaque élement (g,g') de $SL(2,\mathbb{R}) \times SU(2)$, nous pouvons jauger l'isométrie $U(1)\times U(1)$ suivante :

$$(g,g') \to (e^{\frac{\imath\sigma_2}{2}\lambda} g e^{\frac{\imath\sigma_2}{2}\mu}, e^{\frac{\imath\sigma_2}{2}\lambda} g' e^{\frac{\imath\sigma_2}{2}\mu}).$$

Les deux jaugements, correspondant respectivement aux isométries paramétrées par λ et μ sont *chiraux*, puisqu'ils n'agissent que sur un secteur, holomorphe et anti-holomorphe de la théorie. Cependant ce jaugement est sans anomalies, car les isométries jaugées correspondent aux courants nuls $J^3 + I^3$ et $\bar{J}^3 + \bar{I}^3$ de $SL(2,\mathbb{R}) \times SU(2)$. Ils vérifient donc les conditions d'annulation des anomalies de la section II.3.1, car Tr (T^2) = Tr $(\tilde{T}^2)$ =0 si les deux modèles de WZW sont au

même niveau. Pour obtenir l'action effective du modèle de WZW jaugé il suffit d'intégrer classi-

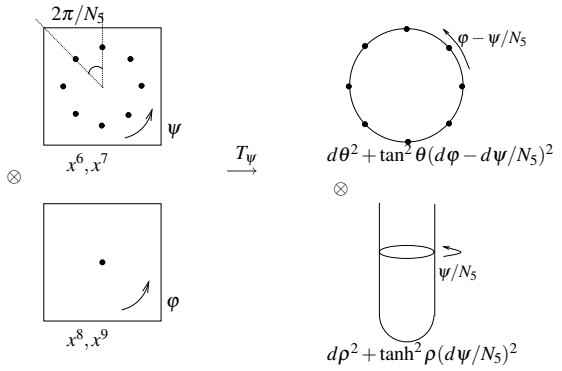

FIG. IV.1. Configuration de branes sur un cercle et description T-duale.

quement les champs de jauge, suivant la méthode générale. Dans le cas présent, le résultat est non seulement valable au premier ordre en $1/k$, mais à tous les ordres du développement perturbatif dans ce paramètre, grâce à la symétrie $N = (4,4)$ superconforme du modèle sigma obtenu. Nous obtenons alors un modèle sigma correspondant exactement à la géométrie des NS5-branes sur un cercle, eq. (IV.9), mais dans la limite $\Lambda_{N_5} \to 1$. Cependant, si nous remarquons que cette fonction peut se développer comme [116] :

$$\Lambda_{N_5}(x,\psi) = 1 + \sum_{m\neq 0} e^{-N_5(|m|x - \imath m\psi)},$$

nous pouvons supposer que ce facteur est généré par les corrections non-perturbatives sur la surface d'univers à l'action effective du modèle de WZW jaugé. Ce développement ressemble en effet à une somme de contributions d'instantons de la surface d'univers, pondérées par N_5, l'inverse de la constante de couplage du modèle sigma. Un résultat analogue fut démontré dans [117] pour une configuration de cinq-branes différente. Pour relier cette description de la double limite d'échelle de la théorie des petites cordes à la description précédente, nous pouvons tout d'abord remarquer qu'une dualité T selon ψ, appliquée au modèle sigma dans le fond (IV.10) obtenu comme théorie de quotient, donne le modèle sigma dual suivant :

$$\begin{aligned} S \;=\; & \frac{N_5}{\pi}\int \mathrm{d}^2 z \left\{ \partial\rho\bar\partial\rho + \partial\theta\bar\partial\theta + \tanh^2\rho\,\frac{\partial\psi\bar\partial\psi}{N_5^2} \right. \\ & \left. + \tan^2\theta\left(\partial\phi - \frac{\partial\psi}{N_5}\right)\left(\bar\partial\phi - \frac{\bar\partial\psi}{N_5}\right) + \mathscr{R}^{(2)}\ln\left(\cosh^2\rho\,\cos^2\theta\right)\right\} \end{aligned}$$

correspondant aux théories de quotient $SL(2,\mathbb{R})/U(1)|_{\text{axial}}$ et $SU(2)/U(1)|_{\text{axial}}$, mais couplées à travers le champ ψ (fig IV.1). Ce champ possède la periodicité suivante, héritée de la variété de groupe $SU(2)$: $\psi \sim \psi + 2\pi$. En conséquence, si nous découplons les modèles sigma par les changements de coordonnées : $\alpha = \psi/N_5$ et $\beta = \phi - \psi/N_5$, ces champs doivent être identifiés selon : $(\alpha,\beta) \sim (\alpha + 2\pi n/N_5, \beta - 2\pi n/N_5 + 2\pi n')$. Cette identification n'est rien d'autre que l'orbifold $\mathbb{Z}_k$ discuté plus haut.

Une analyse directe de la quantification BRST du quotient nul $\{SL(2,\mathbb{R}) \times SU(2)\}/[U(1)_G \times U(1)_D]$ conduit au même résultat [88]. En effet, l'imposition des contraintes de la cohomologie BRST du quotient sur le spectre de $SL(2,\mathbb{R}) \times SU(2)$, ainsi que l'ajout de la contribution des fantômes, sont équivalents à l'orbifold (IV.8)

Notons pour finir qu'il est possible de construire une ligne de déformations marginales, à l'aide de l'opérateur exactement marginal $(J^3+I^3)(\bar{J}^3+\bar{I}^3)$, interpolant entre $\mathrm{AdS}_3\times\mathrm{S}^3$ et la géométrie des NS5-branes sur un cercle. Explicitement, nous obtenons la métrique suivante (dans la limite $\Lambda_{N_5}\to 1$) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2_\sigma &= \mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}\theta^2+\frac{(\lambda^2+\cosh^2\rho)\cos^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2-(\lambda^2-\cos^2\theta)\cosh^2\rho\,\mathrm{d}t^2}{\cosh^2\rho-\cos^2\theta+\lambda^2}\\
&\quad+\frac{(\lambda^2+\sinh^2\rho)\sin^2\theta\,\mathrm{d}\psi^2+(\lambda^2+\sin^2\theta)\sinh^2\rho\,\mathrm{d}\chi^2}{\cosh^2\rho-\cos^2\theta+\lambda^2}\\
&\quad-2\frac{\cos^2\theta\,\cosh^2\rho\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\phi+\sin^2\theta\,\sinh^2\rho\,\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\psi}{\cosh^2\rho-\cos^2\theta+\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Dans la limite $\lambda\to 0$, nous obtenons la distribution de NS5-branes sur un cercle, ainsi qu'un cône de lumière factorisé. Au contraire pour $\lambda\to\infty$ nous retrouvons l'espace-temps $\mathrm{AdS}_3\times\mathrm{S}^3$. La signification des situations intermédiaires n'est pas claire. Nous pouvons observer que seule la limite $\lambda\to 0$ correspond à une géométrie singulière.

Fonction de partition supersymétrique. Pour connaître le spectre complet de la théorie des supercordes dans la géométrie des NS5-branes sur un cercle, nous désirons calculer la fonction de partition pour l'orbifold (IV.8). Ce résultat est obtenu dans la publication n°3.Tout d'abord, nous avons besoin de la fonction de partition de la théorie superconforme N=2 $SL(2,\mathbb{R})/U(1)|_{\text{axial}}$. Pour l'obtenir nous sommes partis de la fonction de partition du modèle de WZW supersymétrique $SL(2,\mathbb{R})$ au niveau N_5, étudiée au chapitre III. Celle-ci se compose, après rotation chirale, de la fonction de partition bosonique au niveau N_5+2 et de la fonction de partition de trois fermions libres. Pour obtenir maintenant la fonction de partition du quotient, nous pouvons utiliser la déformation marginale de la section III.4, sous sa forme supersymétrique. Pour cela, nous devons factoriser dans la fonction de partition de $SL(2,\mathbb{R})$ le réseau du courant total $\mathscr{J}^3=J^3+:\psi^+\psi^-:$ et ensuite le déformer par changement de rayon. Cette déformation est compatible avec la symétrie superconforme de la théorie des cordes. Pour obtenir la théorie de quotient $SL(2,\mathbb{R})/U(1)|_{\text{axial}}$, il suffit de prendre, par construction, la limite de rayon nul de cette déformation[f] [88]. Une méthode alternative consiste à refaire le calcul de l'intégrale de chemin de la section III.3 dans le cas supersymétrique, voir [118]. Nous avons aussi calculé la fonction de partition de l'orbifold $\mathbb{Z}_{N_5}$ de cette théorie.

Pour constuire la fonction de partition de la configuration de cinq-branes, nous rajoutons maintenant la théorie de quotient supersymétrique $SU(2)/U(1)|_{\text{axial}}$ au niveau N_5, correspondant aux modèles minimaux de l'algèbre N=2. Les caractères [119] et la classification complète des invariants modulaires [120] de cette théorie sont connus. Cependant, le produit tensoriel des deux théories de quotient ne constitue pas encore une théorie de supercordes possédant la supersymétrie d'espace-temps. En effet, les courants gauche et droit de symétrie R de l'algèbre superconforme N=2 pour ces deux facteurs sont donnés par, voir (III.15) :

$$\text{(IV.11)}\qquad J^R=\psi^+\psi^-+\chi^+\chi^-+\frac{2(\mathscr{J}^3-\mathscr{I}^3)}{N_5}\,,\quad \bar{J}^R=\tilde{\psi}^+\tilde{\psi}^-+\tilde{\chi}^+\tilde{\chi}^--\frac{2(\bar{\mathscr{J}}^3-\bar{\mathscr{I}}^3)}{N_5}.$$

À l'inverse de la théorie des supercordes sur $\mathrm{AdS}_3\times\mathrm{S}^3\times T^4$, ici nous pouvons (et devons) conserver uniquement les états dont la charge de symétrie R est entière. La supersymétrie d'espace-temps

[f] Naturellement nous devons d'abord faire un prolongement analytique sur le rayon pour que la limite soit bien définie.

est alors obtenue par le flot spectral de l'algèbre N=2, voir section II.1. Or cette projection se réalise naturellement sur le spectre, simultanément pour le secteur gauche et le secteur droit, par l'orbifold $\mathbb{Z}_{N_5}$ des théories de quotient (IV.8).

Ainsi cet orbifold apparaît selon trois points de vue différents. Premièrement, dans la dérivation holographique de la théorie conforme des branes sur un cercle, ce couplage est hérité de la décomposition de $SU(2)$ en $\{SU(2)/U(1)\times U(1)\}/\mathbb{Z}_{N_5}$. Deuxièmement, nous avons montré que la solution de supergravité pour des branes sur un cercle correspond à une théorie de quotient de $SL(2,\mathbb{R})\times SU(2)$, équivalente à l'orbifold (IV.8). Troisièmement, cet orbifold est nécessaire pour construire les charges de supersymétrie d'espace-temps.

Nous voyons à travers cet exemple que la nécessité de projeter sur les charges entières de symétrie R induit parfois une projection sur le spectre changeant complètement la géométrie de la solution de l'action effective de basse énergie. En effet, dans notre exemple, l'ordre de l'orbifold est N_5, identique au niveau des modèles de WZW, et dans la limite de basse énergie $\alpha'\to 0$, $\alpha' N_5$ fixé, les secteurs déformés de l'orbifold survivent, et correspondent à des champs de fond différents. Cette remarque résout certaines contradictions apparentes entre la supersymétrie apparente préservée par des modèles sigma du type $SL(2,\mathbb{R})/U(1)\times SU(2)/U(1)$, à cause de la symétrie superconforme étendue sur la surface d'univers, et l'absence de supersymétrie de la solution de supergravité correspondante [121]. En effet, la description correcte à basse énergie doit tenir compte de la projection sur les charges entières.

IV.5. D-branes dans la théorie des petites cordes

L'étude du spectre des cordes fermées dans la géométrie des NS5-branes, que nous avons développée dans la section précédente, est utile pour comprendre les degrés de liberté des cordes se propageant dans l'espace ambiant, et fournissent une description holographique de la théorie vivant sur les NS5-branes. Cependant, la théorie conforme peut aussi nous donner des informations sur les degrés de liberté *non-perturbatifs* de la théorie des cordes autour des cinq-branes. L'étude des théories de cordes ouvertes permet en effet d'étudier le spectre des D-branes dans cette géométrie [122]. En particulier nous pouvons de cette manière comprendre la théorie des bosons W de la théorie des petites cordes, correspondant à des D1-branes étendues entre les NS5-branes. Il est possible que cette théorie de cordes ouvertes fournisse une description de la physique de la théorie des petites cordes.

Nous commençons cette construction par l'étude des D-branes dans la théorie de quotient N=2 $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$, ou de manière équivalente, N=2 Liouville. Ce travail est contenu dans la publication n°4. Comme pour la théorie de cordes fermées, nous pouvons utiliser, pour construire les D-branes, le plongement de la théorie dans $SL(2,\mathbb{R})$. Cette méthode fut utilisée dans [123] pour traiter du quotient bosonique. Dans les deux cas nous utilisons les résultats de [124], où les branes dans H_3^+ sont étudiées, en utilisant, comme pour les corrélateurs de cordes fermées, les états nuls des représentations dégénérées de $SL(2,\mathbb{R})$.

Les propriétés physiques d'une D-brane sont contenues dans les *fonctions à un point* des opérateurs de l'espace de Hilbert des cordes fermées, en présence de la D-brane imposant des conditions de bord sur la surface d'univers.[g] Cette quantité contient en effet le couplage de tous les opérateurs primaires de cordes fermées à la D-brane, en particulier sa masse (couplage au graviton) et sa charge de R-R. Les fonctions à un point pour les modes de cordes fermées, avec des conditions au bord α, peuvent être aussi considérées comme les coefficients de l'*état de bord* $|B_\alpha\rangle$ associé

[g] Notre description des D-branes est ici très sommaire, par souci de concision. Une introduction pédagogique utilisant le même formalisme est donnée dans [125] et la thèse [126].

à la D-brane, développé sur la base des solutions élémentaires des conditions aux bords, appelées *états d'Ishibashi* [127].

Cette fonction à un point doit satisfaire un certain nombre de propriétés pour correspondre à un état de bord acceptable de la théorie conforme. La première condition est la dualité cordes ouvertes/cordes fermées, ou condition de Cardy, fig. IV.2. Considérons en effet la surface d'univers

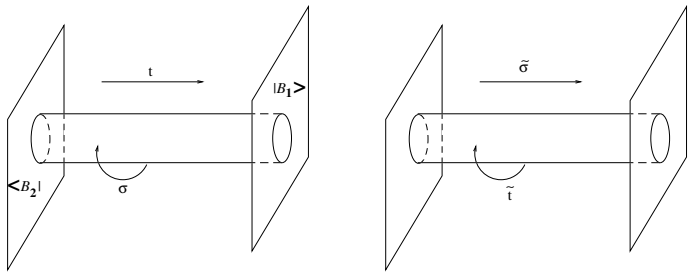

FIG. IV.2. Amplitude sur l'anneau dans le canal des cordes fermées (gauche) et dans le canal des cordes ouvertes (droite).

d'une cordes fermée, paramétrée par (σ, t) et se propageant entre un état de bord $|B_1\rangle$, à $t = 0$, et un état de bord $|B_2\rangle$, à $t = 2\pi$. Nous pouvons interpréter cette amplitude différement, en échangeant le rôle de σ et de t, comme une amplitude à une boucle pour des cordes ouveres finissant sur les D-branes, en $\tilde{\sigma} = 0, \pi$, correspondant aux états de bord ; le changement de canal correspond effectivement à la transformation modulaire sur les caractères $\tau \to -1/\tau$. Dans une théorie conforme rationnelle, nous pouvons exiger que le spectre des cordes ouvertes contienne des caractères de l'algèbre chirale de la théorie conforme, avec des multiplicités entières et positives. Cette condition imposant une contrainte non-linéaire sur les fonctions à un point, est appelée *condition de Cardy* [128]. Les branes obéissant à cette condition sont dites maximalement symétriques car elles préservent une copie de l'algèbre chirale. Des branes plus générales peuvent être construites, en imposant uniquement la préservation de la symétrie superconforme N=1 de la théorie des cordes. D'autres contraintes, liées aux propriétés de factorisation des amplitudes d'opérateurs approchant du bord, doivent être imposées sur les fonctions à un point.

Ces diverses contraintes furent résolues dans [124] pour les branes maximalement symétriques de H_3^+. Les différents types de branes correspondent aux différentes conditions de collage sur les courants de l'algèbre $SL(2,\mathbb{R})$. Ainsi, en général pour des branes symétriques nous pouvons imposer sur le bord les conditions de collage : $J^a = \Omega(\bar{J}^a)$, où Ω est un automorphisme extérieur de l'algèbre affine préservant le tenseur d'énergie impulsion. En utilisant l'expression des courants de symétrie R de la théorie de quotient (IV.11), ces conditions de collage impliquent des conditions de collage sur l'algèbre superconforme N=2, dites de type A ou de type B [115,129]. Enfin, en utilisant la construction BRST des théories de quotient, voir section II.3, nous construisons les fonctions à un point dans le quotient $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ comme le produit de fonctions à un point de $SL(2,\mathbb{R})$ et de $U(1)$, et d'une contribution éventuelles des fantômes. Ces fonctions à un point sont corrélées par la symétrie BRST, et nous pouvons lire de l'expression (II.20) de la charge BRST les conditions au bord à imposer sur le boson supplémentaire pour préserver la symétrie BRST.

En résumé, comme dans le quotient bosonique, nous trouvons trois types de branes dans $SL(2,\mathbb{R})/U(1)|_{\text{axial}}$ supersymétrique / N=2 Liouville :

– des *D0-branes*, localisées à l'extrémité du cigare $\rho = 0$. Elles possèdent un paramètre entier, caractérisant la représentation *finie* de $SL(2,\mathbb{R})$ apparaissant dans le spectre des cordes ouvertes. Ces représentations ne sont pas unitaires ; par conséquent, seule la D0-brane correspondant à la représentation triviale doit être physique. Dans le canal des cordes fermées,

l'état de bord de la D0-brane couple à la fois aux représentations discrètes et continues de $SL(2,\mathbb{R})$. Nous avons aussi construit les D0-branes dans un orbifold $\mathbb{Z}_p$ du cigare. En particulier, si le niveau k de $SL(2,\mathbb{R})$ est entier, nous pouvons construire les branes dans l'orbifold $\mathbb{Z}_k$ qui doit correspondre à N=2 Liouville d'après la discussion de la section IV.4. Notons que nos résultats coïncident alors avec ceux de [92] ;

– des *D1-branes* qui s'étendent à l'infini dans la direction radiale et sont localisées dans la direction angulaire du cigare ;
– des *D2-branes* recouvrant tout le cigare et possédant un champ magnétique localisé près de la pointe du cigare, induisant une charge de D0-brane. Nous nous attendons à trouver des états liés de D2- et de D0-branes. La fonction à un point contient effectivement un couplage aux représentations discrètes, localisées près de la pointe du cigare, mais l'amplitude de l'anneau contient une contribution, certes similaire à celle des D0-branes, mais avec un coefficient $-1/2$. Il semblerait que seule l'amplitude entre deux D2-branes de même paramètre ait alors un sens physique.

En utilisant ces D-branes, ainsi que celles, bien connues [130], de la théorie $SU(2)/U(1)$, nous pouvons alors construire les D-branes dans la géométrie des NS5-branes sur un cercle. Dans ce travail en cours, en collaboration avec Jan Troost et Ari Pakman, nous avons tout d'abord construit la fonction à un point pour les D1-branes – ou bosons W –de la théorie des petites cordes. Nous espérons obtenir des informations sur la dynamique de la petites théorie des cordes grâce à la théorie effective sur les D1-branes. Ensuite, nous construisons les D3-branes dont la géométrie est très intéressante, en raison de l'effet «Hanany–Witten» [131–133]. Lorsque une D3-brane traverse une NS5-brane, nous devons observer une création de D1-branes étendues entre elles.

Publication n°3 : «The partition function of the supersymmetric two-dimensional black hole and little string theory».

Published by Institute of Physics Publishing for SISSA/ISAS

Received: *April 21, 2004*
Accepted: *June 17, 2004*

The partition function of the supersymmetric two-dimensional black hole and little string theory*

Dan Israël,[a] Costas Kounnas,[a] Ari Pakman[ab] and Jan Troost[a]

[a] *Laboratoire de Physique Théorique de l'École Normale Supérieure*†
24, Rue Lhomond 75231 Paris Cedex 05, France, and
[b] *Racah Institute of Physics, The Hebrew University*
Jerusalem 91904, Israel
E-mail: israel@lpt.ens.fr, kounnas@lpt.ens.fr, pakman@phys.huji.ac.il, troost@lpt.ens.fr

Abstract: We compute the partition function of the supersymmetric two-dimensional euclidean black hole geometry described by the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$ superconformal field theory. We decompose the result in terms of characters of the $N=2$ superconformal symmetry. We point out puzzling sectors of states besides finding expected discrete and continuous contributions to the partition function. By adding an $N=2$ minimal model factor of the correct central charge and projecting on integral $N=2$ charges we compute the partition function of the background dual to little string theory in a double scaling limit. We show the precise correspondence between this theory and the background for NS5-branes on a circle, due to an exact description of the background as a null gauging of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathrm{SU}(2)$. Finally, we discuss the interplay between GSO projection and target space geometry.

Keywords: String Duality, Superstring Vacua, Conformal Field Models in String Theory, Black Holes in String Theory.

*Research partially supported by the EEC under the contracts HPRN-CT-2000-00122, HPRN-CT-2000-00131.

†Unité mixte du CNRS et de l'Ecole Normale Supérieure, UMR 8549.

© SISSA/ISAS 2004

JHEP06(2004)033

Contents

1. Introduction **1**

2. The supersymmetric coset by deformation **2**
- 2.1 Partition function for supersymmetric $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 3
- 2.2 Deformation towards the supersymmetric coset 4
- 2.3 Modular invariance 5

3. The character decomposition **7**
- 3.1 The discrete representations 7
- 3.2 The continuous representations 11
- 3.3 Puzzling sectors of states 16
- 3.4 Comments on the Witten index 16

4. The double scaled little string theory **17**
- 4.1 $N = 2$ minimal models: a reminder 17
- 4.2 Combining the two cosets 18
- 4.3 $N = 4$ structure of the double scaled little string theory 19
- 4.4 Spacetime supersymmetry 22

5. The NS5-branes on a circle and the exact coset CFT **23**
- 5.1 The supergravity solution 24
- 5.2 The coset description 24
- 5.3 The spectrum of the coset and comparison with the orbifold 27

6. About spacetime supersymmetry and geometry **28**

7. Conclusions **30**

1. Introduction

Conformal field theories with an $N = 2$ superconformal symmetry have proven to be one of the most important building blocks in superstring theory backgrounds. Firstly, a theorem of Banks and Dixon [1] states than any superstring vacua with (at least) $N = 1$ spacetime supersymmetry in four dimensions is built by combining internal conformal field theories with worldsheet $N = 2$ superconformal symmetry.[1] A large class of examples is provided by Gepner models [3], that use the minimal $N = 2$ theories — constructed with the $\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)$ coset — to obtain non-trivial supersymmetric string compactifications. The $N = 2$ algebra was also used to study Calabi-Yau compactifications in general, leading in particular to the further development of mirror symmetry [4, 5].

[1] See [2] for a generalization to $Ads_3 \times \mathcal{M}$ backgrounds.

JHEP06(2004)033

The non-minimal $N = 2$ theories have been shown in [6] to be intimately related to the (bosonic) coset theory $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$. In this paper we will elaborate on this connection by identifying these non-minimal $N = 2$ representations with the coset representations of the supersymmetric $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ coset [8], i.e. the gauged supersymmetric WZW model. The axial coset has a two-dimensional target space with a cigar geometry, and in two dimensions it has an interpretation as a euclidean black hole [7]. Recent interest for this superconformal field theory derives from the duality with the $N = 2$ super-Liouville theory, conjectured in [9] and studied in [10, 11]. The present work casts some new light on this duality, because we show explicitely that the partition function of the supersymmetric $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ can be decomposed in terms of (extended) $N = 2$ characters, which are the buildings blocks of the $N = 2$ super-Liouville theory [12]. This is natural in the light of the fact that the characters for the two models are identical. Another motivation for this work comes from the double scaling limit of the little string theory [9], corresponding to NS5-branes spread on a (topologically trivial) circle in the transverse space. In [9] the worldsheet CFT corresponding to the bulk geometry was argued to be the orbifold

$$\frac{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k/\,\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)_k/\,\mathrm{U}(1)}{\mathbb{Z}_k}\,.$$

In this work we compute the partition function for this theory, and show explicitly that the $\mathbb{Z}_k$ is completely fixed by the requirement of spacetime supersymmetry, without any a priori assumption on the bulk geometry. Then we argue that this projection changes drastically the low-energy interpretation of the background, and that this orbifold is actually equivalent to a null gauged WZW model:

$$\frac{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k\times\mathrm{SU}(2)_k}{\mathrm{U}(1)_L\times\mathrm{U}(1)_R}\,,$$

whose target space corresponds precisely to a configuration of five-branes on a circle in supergravity, previously written down in [13].

Note added. When this work was near completion, the interesting work [56] appeared on the archive with a large overlap with the present paper. Among the complementary issues we consider are: the supersymmetric marginal deformation method, a precise analysis of the partition function and its decomposition in characters (including multiplicities of non-primary states) and the relationship with the background for five-branes on a circle. On the other hand [56] has other additional and interesting material especially regarding the elliptic genus for these non-compact models.

2. The supersymmetric coset by deformation

Our aim is to find the modular invariant torus partition function for the supersymmetric $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ coset conformal field theory. The strategy we will use is to deform the supersymmetric $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k$ WZW model by a marginal deformation that preserves supersymmetry. It is a very economic way of obtaining the supersymmetric partition function for the supersymmetric coset. As a byproduct, it is interesting on its own right since

JHEP06(2004)033

supersymmetric deformations of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ have only been studied in the asymmetric case (see [16]). In the bosonic case, the partition function of the coset has been computed in [14]. The discrete part has been also studied in [15].

2.1 Partition function for supersymmetric $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

The partition function for the $N=1$ supersymmetric $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ at level k is made of the direct product of a modular invariant factor for the purely bosonic $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ at level $k+2$ and a modular invariant[2] factor for the free fermions, realizing a level -2 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ algebra. The purely bosonic partition function has been obtained in [17] (following methods in [32, 14]). We refer the reader to these works for more detail. Let us start with the type $0B$ partition function (i.e. the partition function diagonal in fermion boundary conditions), for the universal cover of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ algebra — i.e. AdS_3:[3]

$$
\begin{aligned}
Z = {} & \frac{\sqrt{k\tau_2}}{\eta\bar\eta}\int d^2s \frac{e^{2\pi\tau_2 s_1^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)|^2}\times \\
& \times \int_0^1 dt_1\, dt_2 \sum_{n,w\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi n s_2} q^{\frac{1}{4(k+2)}(n-(k+2)(w+s_1-t_1))^2} \bar q^{\frac{1}{4(k+2)}(n+(k+2)(w+s_1-t_1))^2}\times \\
& \times \sum_{\tilde n,\tilde w} e^{2i\pi(n-\tilde n)t_2} q^{-\frac{1}{4(k+2)}(\tilde n+(k+2)(\tilde w+t_1))^2} \bar q^{-\frac{1}{4(k+2)}(\tilde n-(k+2)(\tilde w+t_1))^2}\times \\
& \times \frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1} \vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(\tau,0)\,\bar\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(\tau,0)\,.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

The first two lines are the partition function for the bosonic coset $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ while the third line corresponds to the extra time-like $\mathrm{U}(1)$ that extends the coset theory to $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. They are coupled through the $\mathbb{Z}$ orbifold given by the integral over t_1 and t_2.[4] The fermionic characters are defined as usual:

$$
\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(\tau,\nu) = \sum_{f\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}\left(f+\frac{a}{2}\right)^2} e^{2i\pi\left(\nu+\frac{b}{2}\right)\left(f+\frac{a}{2}\right)}\,.
$$

To proceed, we first integrate over t_2, and obtain the constraint $n=\tilde n$. Then we introduce the spectral flow quantum number: $w_+ = w + w'$. Finally we factorize the supersymmetric $\mathcal{J}^3\bar{\mathcal{J}}^3$ lattice associated to the currents at level k, that will eventually be removed by the gauging:

$$
\begin{aligned}
Z = {} & \frac{\sqrt{k\tau_2}}{\eta\bar\eta}\int_0^1 ds_1\, ds_2 \frac{e^{2\pi\tau_2 s_1^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)^2|^2}\int_0^1 dt_1 \sum_{n,w\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi n s_2}\times \\
& \times q^{\frac{1}{4(k+2)}(n-(k+2)(w+s_1-t_1))^2} \bar q^{\frac{1}{4(k+2)}(n+(k+2)(w+s_1-t_1))^2}\times
\end{aligned}
$$

[2] Or modular covariant factor for superstrings.

[3] We have removed the contribution of the neutral fermions associated to left and right $\mathrm{U}(1)$ currents J^3 and $\bar J^3$ since they play no role in the following derivation.

[4] At least for integer level k, the partition function for the single cover is obtained by using instead a $\mathbb{Z}_{k+2}$ orbifold. But, as it is explained in [17], any cover of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ gives the same axial coset.

JHEP06(2004)033

$$\times \sum_{f,\bar{f},w_+\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2} \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2} e^{i\pi(f-\bar{f})b} \times$$
$$\times q^{\frac{k}{2(k+2)}\left(f+\frac{a}{2}+\frac{n-(k+2)(w-t_1)+(k+2)w_++2f+a}{k}\right)^2} q^{-\frac{1}{k}\left(\frac{n}{2}-\frac{k+2}{2}(w-t_1)+\frac{k+2}{2}w_++f+\frac{a}{2}\right)^2} \times$$
$$\times \bar{q}^{\frac{k}{2(k+2)}\left(\bar{f}+\frac{a}{2}+\frac{-n-(k+2)(w-t_1)+(k+2)w_++2\bar{f}+a}{k}\right)^2} \bar{q}^{-\frac{1}{k}\left(-\frac{n}{2}-\frac{k+2}{2}(w-t_1)+\frac{k+2}{2}w_++\bar{f}+\frac{a}{2}\right)^2} . \quad (2.2)$$

The total current of the elliptic sub-algebra is given by the sum of the purely bosonic current and the fermionic current: $\mathcal{J}^3 = J^3 + :\psi^+\psi^-:$, where the fermions have charge ± 1 under the global U(1).

2.2 Deformation towards the supersymmetric coset

A marginal deformation compatible with the (local) $N = 1$ superconformal symmetry of the supersymmetric $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ theory is given by the current-current operator constructed with the *total* currents of the Cartan sub-algebra.[5] The action is perturbed by the operator:

$$\delta S \sim \int d^2z\ \mathcal{J}^3(z)\bar{\mathcal{J}}^3(\bar{z}) .$$

The action of this deformation at the level of the partition function is obtained by changing the radius of the corresponding lattice of $(\mathcal{J}^3, \bar{\mathcal{J}}^3)$, which we call (P_L, P_R) in the following. We replace:

$$\frac{1}{2}P_L^2 \to -\frac{1}{4k}\left[\left(n+f-\bar{f}\right)\mathcal{R} + \frac{\left(-(k+2)(w-t_1)+(k+2)w_++f+\bar{f}+a\right)}{\mathcal{R}}\right]^2$$
$$\frac{1}{2}P_R^2 \to -\frac{1}{4k}\left[-\left(n+f-\bar{f}\right)\mathcal{R} + \frac{\left(-(k+2)(w-t_1)+(k+2)w_++f+\bar{f}+a\right)}{\mathcal{R}}\right]^2 .$$

The modular invariance is ensured along the line of deformation since it is a $O(1,1,\mathbb{R})$ transformation of a toroidal lattice. This should be understood in a formal sense since it is a divergent sum over timelike momenta. To go from the parent theory $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ to the coset theory $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ we have to remove all the contributions of the U(1) which is gauged. It is known, at least for the bosonic case [18, 17], that it can be done in a modular invariant way by taking an *infinite* marginal deformation, either $\mathcal{R} \to 0$ (axial coset) or $\mathcal{R} \to \infty$ (vector coset). In those limits the contribution of the extra U(1) decouples and can be safely removed. Here, since we would like to find the partition function for the cigar - the axial coset, we have to take the limit where the radius goes to zero. We have to *(i)* do an analytic continuation to get a well-defined sum over the momenta: $\mathcal{R} \to i\mathcal{R}$ and *(ii)* take the limit $\mathcal{R} \to 0$. The validity of this procedure will be checked later by showing explicitely the modular invariance of the resulting partition function. In the zero radius limit (i.e. axial coset), we get the constraint:

$$-(k+2)(w-t_1)+(k+2)w_++f+\bar{f}+a = 0 . \quad (2.3)$$

[5] We have chosen as a Cartan the elliptic sub-algebra, in order to obtain at the end the euclidean black hole. For the minkowskian case one has to consider instead the hyperbolic (non-compact) one.

JHEP06(2004)033

We define also $N = n + f - \bar{f}$. Then we get the following partition function, after dropping the decoupled contribution of the extra U(1):

$$
\begin{aligned}
Z = \sqrt{k\tau_2}\,\frac{1}{2}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2}\int_0^1 ds_1\,ds_2\,\frac{e^{2\pi\tau_2 s_1^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)^2|^2}\,\times \\
\times\sum_{f,\bar{f},N,w_+\in\mathbb{Z}} e^{i\pi(f-\bar{f})b}e^{2i\pi(N-f+\bar{f})s_2}\,\times \\
\times q^{\frac{1}{4(k+2)}(N-2f-a-(k+2)(w_++s_1))^2}\,\bar{q}^{\frac{1}{4(k+2)}\left(N+2\bar{f}+a+(k+2)(w_++s_1)\right)^2}\,\times \\
\times q^{\frac{k}{2(k+2)}\left(f+\frac{a}{2}+\frac{N}{k}\right)^2}\,\bar{q}^{\frac{k}{2(k+2)}\left(\bar{f}+\frac{a}{2}-\frac{N}{k}\right)^2}\,.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

This is the partition function for the supersymmetric coset $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k/\,\mathrm{U}(1)$ we wanted to compute. The central charge of this superconformal field theory is :

$$
c = \frac{3(k+2)}{k}.
$$

We recall that the N=2 R-current of the super-coset, obtained by the standard Kazama-Suzuki procedure [19] is:

$$
J_R =: \psi^+\psi^- : + \frac{2\mathcal{J}^3}{k}\,.
$$

The last line of the partition function, eq. (2.4) corresponds to the lattice of this $N = 2$ R-current by construction. So the left and right N=2 charges of the super-coset are:

$$
\mathcal{Q}_L = f + \frac{a}{2} + \frac{N}{k}\,, \qquad \mathcal{Q}_R = \bar{f} + \frac{a}{2} - \frac{N}{k}\,. \tag{2.5}
$$

2.3 Modular invariance

Our result is by construction modular invariant since it has been obtained as the limiting case of a line of modular invariant theories. Nevertheless we will check the modular invariance directly, by putting the partition function in a form that will be at any rate useful in the following.

Partition function in lagrangian form. First we factorize from the R-current lattice the contribution that came from the free fermions in the parent theory:

$$
\begin{aligned}
Z = \sqrt{k\tau_2}\frac{1}{2}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2}\int_0^1 ds_1\,ds_2\sum_{f,\bar{f},N,w_+\in\mathbb{Z}} e^{i\pi(f-\bar{f})b}\,\times \\
\times e^{2i\pi(N-f+\bar{f})s_2}e^{-2i\pi\tau_1(N-f+\bar{f})s_1}e^{-2\pi\tau_2(f+\bar{f}+a+(k+2)w_+)s_1}e^{-\pi\tau_2 k s_1^2}\,\times \\
\times\frac{1}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)^2|^2}\;q^{\frac{1}{2}\left(f+\frac{a}{2}+w_+\right)^2+\frac{(N-kw_+)^2}{4k}}\,\bar{q}^{\frac{1}{2}\left(\bar{f}+\frac{a}{2}+w_+\right)^2+\frac{(N+kw_+)^2}{4k}}\,.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Then we introduce the flowed fermionic levels, since the spectral flow also has to act on the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ algebra at level -2 made with the fermions, as explained in [20]:

$$
f + w_+ = \tilde{f}\,, \qquad \bar{f} + w_+ = \tilde{\bar{f}}\,.
$$

JHEP06(2004)033

Recast in this form, namely eq. (2.6), the structure of the partition function is transparent. In fact, the weights that will appear in the spectrum will have the following form:

$$L_0 = L_0^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),bosonic} + L_0^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),fermionic} - L_0^{\mathrm{U}(1)_{-k}} ,$$

which is exactly what is expected from the standard GKO construction [21].

To prove modular invariance, we observe that the partition function, (2.6) can be rewritten in the lagrangian form, by a Poisson resummation on the momenta N of the compact boson as follows:

$$\begin{aligned} Z = \frac{k}{2} \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2} \int_0^1 ds_1\, ds_2\, \frac{e^{2\pi\tau_2 s_1^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)^2|^2} \sum_{M,w_+\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{k\pi}{\tau_2}|(w_+ + s_1)\tau - (M+s_2)|^2} \times \\ \times \vartheta\begin{bmatrix} a+2s_1 \\ b+2s_2 \end{bmatrix} \bar{\vartheta}\begin{bmatrix} a+2s_1 \\ b+2s_2 \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{2.7}$$

The modular invariance of this expression is straightforwardly checked since it has the structure of a freely acting (continuous) orbifold (see [17] for more details). The partition function (2.7) is clearly understood as the constrained product of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_{k+2} \times \mathrm{U}(1)_k \times \mathrm{U}(1)_2$.

The twisted super-coset partition function. The super-coset $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ has a discrete chiral symmetry $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$. While the first factor corresponds to the usual $\mathbb{Z}_2$ symmetry of the fermions, the second factor is the symmetry of the non-compact supersymmetric parafermions. Any discrete subgroup of this $\mathbb{Z}$ symmetry can be gauged. We will need for the following the $\mathbb{Z}_k$ orbifold of this theory. Geometrically, this orbifold acts on the translational symmetry along the transverse compact coordinate of the cigar — the euclidean compact time direction of the 2D black hole. It is obtained by acting in the lattice of $\mathrm{U}(1)_k$ as follows:

$$\begin{aligned} Z_{BH} &= \frac{1}{k} \sum_{\gamma,\delta\in\mathbb{Z}_k} Z_{BH}\begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \\ &= \sum_{\gamma,\delta\in\mathbb{Z}_k} \frac{1}{2} \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2} \int_0^1 ds_1\, ds_2\, \frac{e^{2\pi\tau_2 s_1^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)^2|^2} \times \\ &\quad \times \sum_{M,w_+\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{k\pi}{\tau_2}\left|\left(w_+ + s_1 + \frac{\gamma}{k}\right)\tau - \left(M + s_2 + \frac{\delta}{k}\right)\right|^2} \vartheta\begin{bmatrix} a+2s_1 \\ b+2s_2 \end{bmatrix} \bar{\vartheta}\begin{bmatrix} a+2s_1 \\ b+2s_2 \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{2.8}$$

The modular invariance of this expression is manifest. In the hamiltonian representation (i.e. after Poisson resummation), we will have in eq. 2.4: *(i)* to do the replacement $w_+ \to w_+ + \gamma/k$ and *(ii)* to insert the phase $e^{2i\pi N\delta/k}$. So we obtain the following twisted sectors:

$$\begin{aligned} Z_{BH}\begin{bmatrix} a;a \\ b;b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \sqrt{k\tau_2} \int_0^1 ds_1\; ds_2\; \frac{e^{2\pi\tau_2 s_1^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)^2|^2} \times \\ \times \sum_{\tilde{f},\tilde{\tilde{f}},N,w_+\in\mathbb{Z}} e^{i\pi(\tilde{f}-\tilde{\tilde{f}})b} e^{2i\pi(N-\tilde{f}+\tilde{\tilde{f}})s_2} \times \end{aligned}$$

JHEP06(2004)033

$$\times q^{\frac{1}{4(k+2)}\left(N-2\tilde{f}-a-kw_+-\gamma-(k+2)s_1\right)^2}\bar{q}^{\frac{1}{4(k+2)}\left(N+2\tilde{\tilde{f}}+a+kw_++\gamma+(k+2)s_1\right)^2}\times$$
$$\times q^{\frac{k}{2(k+2)}\left(\tilde{f}+\frac{a}{2}+\frac{N-\gamma}{k}-w_+\right)^2}\bar{q}^{\frac{k}{2(k+2)}\left(\tilde{\tilde{f}}+\frac{a}{2}-\frac{N+\gamma}{k}-w_+\right)^2}e^{2i\pi N\frac{\delta}{k}}\,. \tag{2.9}$$

In this expression $\left[\begin{smallmatrix}a;\bar{a}\\ b;\bar{b}\end{smallmatrix}\right]$ denotes the spin structures on the two-torus for the left and right-movers. If the left and right spin structures are not the same, one has to insert an additional phase $e^{-i\pi(b-\bar{b})s_1}$ to ensure modular invariance of the orbifold.

3. The character decomposition

The analysis of the partition function we obtained for the super-coset, eq. (2.4) is carried out by identifying the characters of the super-coset $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ corresponding to the different representations, and then the irreducible characters of the (non-minimal) $N=2$ superconformal algebra. In the following analysis, we will improve on the analyses that are present in the literature in the fact that we will take along multiplicities of all the states in the partition function explicitly.

3.1 The discrete representations

The first step in this decomposition is to expand the ϑ_1 factor coming from the twisted determinant of euclidean $AdS_3=\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\,\mathrm{SU}(2)$ in powers of the holonomies of the gauge field. Explicitely, we have, with $y=e^{2i\pi(s_1\tau-s_2)}$:

$$\frac{1}{\vartheta_1(s_1\tau-s_2|\tau)}=\frac{i\;y^{1/2}q^{-1/12}}{\eta(\tau)}\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-yq^{n-1})(1-y^{-1}q^n)}=\frac{i\;y^{1/2}}{\eta^3}\sum_{r\in\mathbb{Z}}y^rS_r(\tau) \tag{3.1}$$

where the function S_r is defined by (see [23]):

$$S_r(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^nq^{\frac{n(n+2r+1)}{2}}\,. \tag{3.2}$$

Note that the above expansion, eq. (3.1) is valid only for $|q|<|y|<1$ which is indeed the case when $1>s_1>0$. We plug this expansion in the partition function, eq. (2.4), and we also *(i)* integrate over s_2 to get the constraint: $N=r-\bar{r}+\tilde{f}-\tilde{\tilde{f}}$ and *(ii)* introduce a gaussian integral over s to linearize the integral over s_1, as was done in [14] for the bosonic coset. Then we obtain the following expression:

$$Z=(q\bar{q})^{-\frac{c-3}{24}}\frac{\tau_2}{\eta^3\bar{\eta}^3}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2}\int_{-\infty}^{\infty}ds\int_0^1ds_1\sum_{\tilde{f},\tilde{\tilde{f}},N,w_+\in\mathbb{Z}}e^{i\pi(\tilde{f}-\tilde{\tilde{f}})b}\times$$
$$\times\sum_{r,\bar{r}\in\mathbb{Z}}e^{-2\pi\tau_2(2is+1+r+\bar{r}+\tilde{f}+\tilde{\tilde{f}}+a+kw_+)s_1}\delta_{r-\bar{r}+\tilde{f}-\tilde{\tilde{f}},N}S_r\bar{S}_{\bar{r}}\times$$
$$\times q^{\frac{s^2+1/4}{k}+\frac{1}{4(k+2)}\left(-N+2\tilde{f}+a+kw_+\right)^2+\frac{k}{2(k+2)}\left(\tilde{f}+\frac{a}{2}+\frac{N-kw_+}{k}\right)^2}\times$$
$$\times\bar{q}^{\frac{s^2+1/4}{k}+\frac{1}{4(k+2)}\left(N+2\tilde{\tilde{f}}+a+kw_+\right)^2+\frac{k}{2(k+2)}\left(\tilde{\tilde{f}}+\frac{a}{2}-\frac{N+kw}{k}\right)^2}\,. \tag{3.3}$$

JHEP06(2004)033

For the discrete representations first, we can proceed to the character decomposition. Starting from (3.3), we first integrate over s_1 to obtain:

$$
\begin{aligned}
Z = & \frac{1}{\pi}(q\bar{q})^{-\frac{c-3}{24}} \frac{1}{\eta^3\bar{\eta}^3}\frac{1}{2}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2}\int_{-\infty}^{\infty} ds \sum_{\tilde{f},\tilde{\bar{f}},N,w_+\in\mathbb{Z}} e^{i\pi(\tilde{f}-\tilde{\bar{f}})b} \times \\
& \times \sum_{r,\bar{r}\in\mathbb{Z}} \delta_{r-\bar{r}+\tilde{f}-\tilde{\bar{f}},N} S_r\bar{S}_{\bar{r}} \times \\
& \times q^{\frac{s^2+1/4}{k}+\frac{1}{4(k+2)}\left(-N+2\tilde{f}+a+kw_+\right)^2+\frac{k}{2(k+2)}\left(\tilde{f}+\frac{a}{2}+\frac{N-kw_+}{k}\right)^2} \times \\
& \times \bar{q}^{\frac{s^2+1/4}{k}+\frac{1}{4(k+2)}\left(N+2\tilde{\bar{f}}+a+kw_+\right)^2+\frac{k}{2(k+2)}\left(\tilde{\bar{f}}+\frac{a}{2}-\frac{N+kw}{k}\right)^2} \times \\
& \times \frac{1-e^{-2\pi\tau_2(2is+1+r+\bar{r}+\tilde{f}+\tilde{\bar{f}}+a+kw_+)}}{2is+1+r+\bar{r}+\tilde{f}+\tilde{\bar{f}}+a+kw_+} . \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Discrete representations of the coset. The *discrete representations* of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ are either highest weight or lowest weight. When we parameterize the Casimir as: $c_2 = s^2+1/4$, they are labeled by $s = i(1/2-j)$, where $j \in \mathbb{R}_+$ for the unitary representations. The spectrum of the elliptic sub-algebra (i.e. J^3) is: $m = \pm(j+r)$, $r \in \mathbb{N}$. We have also to consider *flowed representations* (see [24, 25]), for which the quantum numbers m equal $m = \tilde{m} + kw_+/2$.

To find the contribution of the discrete representations to the partition function, we observe that the second term in the last line of eq. (3.4) can be completed to a square if we shift the variable s as: $s \to s - ik/2$. We pick up residues between the two contours for:

$$2\Im s = 1 + r + \bar{r} + \tilde{f} + \tilde{\bar{f}} + a + kw_+ .$$

These poles will correspond to the discrete representations of the coset. We find that they are located in the interval:

$$\frac{1}{2} < j < \frac{k+1}{2} , \qquad (3.5)$$

which is precisely the improved unitarity range (for level $k+2$) for the discrete representations found in [25].

Representations $j = 1/2$ and $j = (k+1)/2$. The expression obtained after the integration over s_1, eq. (3.4), has a pole for $s = 0$ whenever we have:

$$1 + r + \bar{r} + \tilde{f} + \tilde{\bar{f}} + a + kw_+ = 0 .$$

This pole corresponds to the discrete representation with $j = 1/2$. Thus we choose to define the integral over s with the principal value prescription (written as usual $P\int$), taking into account half of the pole. After the contour shift in the second term in the last line of eq. (3.4), we will find also half of the pole corresponding to the representation $j = (k+1)/2$.

JHEP06(2004)033

Discrete characters of the bosonic coset. To summarize, we can write the contribution of the discrete spectrum as:

$$
\begin{aligned}
Z_D = \frac{1}{\eta\bar{\eta}}\frac{1}{2}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2}\int_{1/2}^{(k+1)/2} dj \sum_{r,\bar{r},\tilde{f},\tilde{\bar{f}},N,w_+\in\mathbb{Z}} & e^{i\pi(\tilde{f}-\tilde{\bar{f}})b}\,\lambda_r^j(q)\,\lambda_{\bar{r}}^j(\bar{q})\,\times \\
\times q^{\frac{k}{2(k+2)}\left(\tilde{f}+\frac{a}{2}+\frac{N-kw_+}{k}\right)^2}\,\bar{q}^{\frac{k}{2(k+2)}\left(\tilde{\bar{f}}+\frac{a}{2}+\frac{-N-kw_+}{k}\right)^2} & \times \\
\times\delta(2j+r+\bar{r}+kw_++\tilde{f}+\tilde{\bar{f}}+a)\,\delta_{r-\bar{r}+\tilde{f}-\tilde{\bar{f}},N} & \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

where the discrete characters of the bosonic coset $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ are defined as (for several derivations of these characters, see the references [26, 27, 28, 23, 29]):

$$
\lambda_r^j(q) = q^{-\frac{(j-1/2)^2}{k}+\frac{(j+r)^2}{k+2}}\,\frac{S_r(\tau)}{\eta^2(\tau)}\,. \qquad (3.7)
$$

Note that we have found not only the correct conformal weights for the primaries, but also the right multiplicities for all the descendents contained in the characters. The discrete part of the partition function is thus composed of the product of discrete characters of the bosonic coset $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ and $\mathrm{U}(1)$ characters of the $N=2$ R-current, obeying some constraints. The constraints on the $N=2$ charges are those expected for the path integral construction of the supersymmetric coset [30], namely (m_t is the eigenvalue of $\mathcal{J}^3$):

$$
m_t+\bar{m}_t=\tilde{m}_t+\tilde{\bar{m}}_t+kw_+=2j+r+\bar{r}+kw_++\tilde{f}+\tilde{\bar{f}}+a=0\,, \qquad (3.8)
$$

and

$$
m_t-\bar{m}_t=r-\bar{r}+\tilde{f}-\tilde{\bar{f}}=N\,, \qquad (3.9)
$$

The solution of these constraints is: $m_t = N/2$ and $\bar{m}_t = -N/2$, or, for the unflowed quantum numbers:

$$
\tilde{m}_t=\frac{N}{2}-\frac{k}{2}w_+ \quad\text{and}\quad \tilde{\bar{m}}_t=-\frac{N}{2}-\frac{k}{2}w_+. \qquad (3.10)
$$

To proceed we can solve explicitely for the constraints:

- first we trade the integral over j by a sum over half-integer values within the range (3.5)

- then we solve the constraints for r and $\bar{r}$ for a given j:

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{N}{2}-\frac{k}{2}w_+-\left(\tilde{f}+\frac{a}{2}\right)-j \\
\bar{r} &= -\frac{N}{2}-\frac{k}{2}w_+-\left(\tilde{\bar{f}}+\frac{a}{2}\right)-j
\end{aligned} \qquad (3.11)
$$

Since r and $\bar{r}$ have to be integers, we will define in the following the discrete coset characters to be zero if the solutions of the constraints, eq. (3.11) are not integer-valued. With this

JHEP06(2004)033

convention in mind, we can recast the contribution of the discrete representations to the partition function as follows:

$$
\begin{aligned}
Z_D = & \frac{1}{\eta\bar{\eta}}(q\bar{q})^{-c/24}\frac{1}{2}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2}\sum_{2j=1}^{k+1}\Upsilon(2j,1)\sum_{N,w_+\in\mathbb{Z}}\times \\
& \times\sum_{\tilde{f}\in\mathbb{Z}} e^{i\pi b\tilde{f}}\,\lambda^{j}_{\frac{N}{2}-\frac{k}{2}w_+-\left(\tilde{f}+\frac{a}{2}\right)-j}\,q^{\frac{k}{2(k+2)}\left(\tilde{f}+\frac{a}{2}+\frac{N-kw_+}{k}\right)^2}\times \\
& \times\sum_{\tilde{\tilde{f}}\in\mathbb{Z}} e^{-i\pi b\tilde{\tilde{f}}}\,\bar{\lambda}^{j}_{-\frac{N}{2}-\frac{k}{2}w_+-\left(\tilde{\tilde{f}}+\frac{a}{2}\right)-j}\,\bar{q}^{\frac{k}{2(k+2)}\left(\tilde{\tilde{f}}+\frac{a}{2}+\frac{-N-kw_+}{k}\right)^2}.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

In this expression we have defined:

$$
\begin{aligned}
\Upsilon(2j,1) &= \frac{1}{2} \qquad \text{if } 2j=1 \mod k \\
&= 1 \quad \text{otherwise}\,.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Link with extended $N=2$ discrete characters. In this section we would like to make the connection to the decomposition of $N=2$ extended characters in term of the characters of the bosonic coset [31]. In fact, from this analysis it is clear that the extended $N=2$ characters and the extended characters for the supercoset agree. First, we observe that the partition function of the discrete representations, eq. (3.12), is written in terms of the following (twisted) unextended $N=2$ discrete characters:

$$
\begin{aligned}
ch_d(j,r)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(\tau,\nu) &= \frac{1}{\eta^3(\tau)}q^{-\frac{(j-1/2)^2+(j+r+a/2)^2}{k}}z^{\frac{2j+2r+a}{k}}\frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right](\tau,\nu)}{1+(-)^b z\; q^{(1+a)/2+r}} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi b\left(n+\frac{a}{2}\right)}\lambda^{j}_{\frac{k}{2}Q_m-n-\frac{a}{2}-j}\frac{q^{\frac{k}{2(k+2)}\left(n+\frac{a}{2}+Q_m\right)^2}}{\eta(\tau)}z^{n+\frac{a}{2}+Q_m}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

where

$$
Q_m = \frac{2m}{k} = \frac{2(j+r)}{k}
$$

is the $N=2$ charge of the primary, and $z=e^{2i\pi\nu}$. Then we rewrite the discrete partition function as:

$$
\begin{aligned}
Z_D = & \frac{1}{2}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2}\sum_{2j=1}^{k+1}\Upsilon(2j,1)\sum_{N,w_+\in\mathbb{Z}} ch_d\left(j,\frac{N}{2}-\frac{k}{2}w_+-j\right)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(\tau,0)\times \\
& \times\bar{ch}_d\left(j,-\frac{N}{2}-\frac{k}{2}w_+-j\right)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(\bar{\tau},0)
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

The extended characters of the $N=2$ algebra were introduced in [12] because of their nice modular properties. Their decomposition in terms of bosonic coset characters was given in [31]:[6]

$$
\mathrm{Ch}\,(j,r)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \sum_{n'\in\mathbb{Z}} ch_d(j,r+kn')\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(\tau,\nu)
\tag{3.16}
$$

[6] From now we assume that the level k is integer.

JHEP06(2004)033

$$= \sum_{n,n'\in\mathbb{Z}} e^{i\pi b\left(n+\frac{a}{2}\right)} \lambda^{j}_{\frac{k}{2}Q_m-n-\frac{a}{2}-j+kn'} \frac{q^{\frac{k}{2(k+2)}\left(n+\frac{a}{2}+Q_m+2n'\right)^2}}{\eta(\tau)} z^{n+\frac{a}{2}+Q_m+2n'} .$$

They differ from the standard $N = 2$ characters, eq. (3.14) by a sum over even $N = 2$ charges. Now, starting from eq. (3.15), we define: $N = e + kp$. The charge e is defined modulo k. We obtain then:

$$\begin{aligned}
Z_D &= \frac{1}{2} \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2} \sum_{2j=1}^{k+1} \Upsilon(2j,1) \sum_{e\in\mathbb{Z}_k} \sum_{p,w_+\in\mathbb{Z}} ch_d\left(j, \frac{e}{2} + \frac{k}{2}(p-w_+) - j\right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \times \\
&\quad \times \bar{ch}_d\left(j, -\frac{e}{2} - \frac{k}{2}(p+w_+) - j\right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2} \sum_{2j=1}^{k+1} \Upsilon(2j,1) \times \\
&\quad \times \sum_{e\in\mathbb{Z}_k} \left\{ \sum_{n,\bar{n}\,\text{even}} ch_d\left(j, \frac{e}{2} + \frac{kn}{2} - j\right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \bar{ch}_d\left(j, -\frac{e}{2} - \frac{k\bar{n}}{2} - j\right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{n,\bar{n}\,\text{odd}} ch_d\left(j, \frac{e}{2} + \frac{kn}{2} - j\right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \bar{ch}_d\left(j, -\frac{e}{2} - \frac{k\bar{n}}{2} - j\right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\}. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

So we get finally:

$$\begin{aligned}
Z_D &= \frac{1}{2} \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2} \sum_{2j=1}^{k+1} \Upsilon(2j,1) \times \\
&\quad \times \sum_{e\in\mathbb{Z}_k} \left\{ Ch_d\left(j, \frac{e}{2} - j\right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \bar{Ch}_d\left(j, -\frac{e}{2} - j\right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \right. \\
&\qquad \left. + Ch_d\left(j, \frac{e+k}{2} - j\right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \bar{Ch}_d\left(j, -\frac{e+k}{2} - j\right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2} \sum_{2j=1}^{k+1} \Upsilon(2j,1) \sum_{2g\in\mathbb{Z}_{2k}} Ch_d\left(j, g-j\right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \bar{Ch}_d\left(j, -g-j\right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

where the charge $2g$ is defined modulo $2k$. In short, we have proven that, for k integer, the discrete spectrum of the supersymmetric coset $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ can be decomposed in terms of extended discrete characters of the $N = 2$ algebra.

3.2 The continuous representations

Now we would like to identify the contributions coming from the continuous representations of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. These representations are labeled by the Casimir $c_2 = s^2 + 1/4$ with $s \in \mathbb{R}_+$, and their parity $2\alpha \in \mathbb{Z}_2$. These representations are neither highest nor lowest weight, and the spectrum of the elliptic operator is: $m = \alpha + n$, $n \in \mathbb{Z}$. We have flowed representations as well.

JHEP06(2004)033

We start again from eq. (2.4). After extracting the poles corresponding to the discrete spectra, we are left with the following divergent expression:

$$
\begin{aligned}
Z_C = \frac{1}{\pi\eta^3\bar{\eta}^3}\frac{1}{2}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2} P\int_{-\infty}^{\infty} ds (q\bar{q})^{\frac{s^2}{k}} \sum_{N,w_+,\tilde{f},\tilde{\tilde{f}}\in\mathbb{Z}} e^{i\pi(\tilde{f}-\tilde{\tilde{f}})b} \times \\
\times \sum_{r,\bar{r}\in\mathbb{Z}} \delta_{r-\bar{r}+\tilde{f}-\tilde{\tilde{f}},N} \Bigg\{ q^{\frac{1}{4(k+2)}\left(N-2\tilde{f}-a-kw_+\right)^2+\frac{k}{2(k+2)}\left(\tilde{f}+\frac{a}{2}+\frac{N-kw_+}{k}\right)^2} \times \\
\times \bar{q}^{\frac{1}{4(k+2)}\left(N+2\tilde{\tilde{f}}+a+kw_+\right)^2+\frac{k}{2(k+2)}\left(\tilde{\tilde{f}}+\frac{a}{2}+\frac{-N-kw_+}{k}\right)^2} \times \\
\times \frac{S_r\bar{S}_{\bar{r}}}{2is+1+r+\bar{r}+\tilde{f}+\tilde{\tilde{f}}+a+kw_+} - \\
- q^{\frac{1}{4(k+2)}\left(N-2(\tilde{f}+1)-a-k(w_++1)\right)^2+\frac{k}{2(k+2)}\left(\tilde{f}+1+\frac{a}{2}+\frac{N-k(w_++1)}{k}\right)^2+r} \times \\
\times \bar{q}^{\frac{1}{4(k+2)}(N+2(\tilde{\tilde{f}}+1)+a+k(w_++1))^2+\frac{k}{2(k+2)}\left(\tilde{\tilde{f}}+1+\frac{a}{2}+\frac{-N-k(w_++1)}{k}\right)^2+\bar{r}} \times \\
\times \frac{S_r\bar{S}_{\bar{r}}}{2is+1+r+\bar{r}+\tilde{f}+\tilde{\tilde{f}}+a+k(w_++1)} \Bigg\} .
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Shifting in the second term $w_+ + 1 \to w_+$, $\tilde{f}+1 \to \tilde{f}$, $\tilde{\tilde{f}}+1 \to \tilde{\tilde{f}}$ (which is related to performing spectral flow by one unit in both the bosonic and the fermionic sector) and using the following identity:

$$
q^r S_r(\tau) = S_{-r}(\tau) , \tag{3.20}
$$

we obtain finally the expression:

$$
\begin{aligned}
Z_C = \frac{1}{\pi\eta^3\bar{\eta}^3}\frac{1}{2}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2} P\int_{-\infty}^{\infty} ds (q\bar{q})^{\frac{s^2}{k}} \sum_{N,w_+,\tilde{f},\tilde{\tilde{f}}\in\mathbb{Z}} e^{i\pi(\tilde{f}-\tilde{\tilde{f}})b} q^{\frac{1}{4(k+2)}\left(N-2\tilde{f}-a-kw_+\right)^2} \times \\
\times q^{\frac{k}{2(k+2)}\left(\tilde{f}+\frac{a}{2}+\frac{N-kw_+}{k}\right)^2} \bar{q}^{\frac{1}{4(k+2)}\left(N+2\tilde{\tilde{f}}+a+kw_+\right)^2} \bar{q}^{\frac{k}{2(k+2)}\left(\tilde{\tilde{f}}+\frac{a}{2}+\frac{-N-kw_+}{k}\right)^2} \times \\
\times \sum_{r,\bar{r}\in\mathbb{Z}} \delta_{r-\bar{r}+\tilde{f}-\tilde{\tilde{f}},N} \left(S_r\bar{S}_{\bar{r}} - S_{-r-1}\bar{S}_{-\bar{r}-1}\right) \frac{1}{2is+1+r+\bar{r}+\tilde{f}+\tilde{\tilde{f}}+a+kw_+} .
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Then, to proceed, we note that we have the following identity:

$$
S_r + S_{-r-1} = 1 , \tag{3.22}
$$

that expresses the splitting of an $s = 0$ (and $\alpha = 1/2$) continuous representation in two discrete representations. Using this expression we recast the last factor of eq. (3.21) in the following form:

$$
\sum_{r\in\mathbb{Z}} \left(S_r - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2is+1+2r+2\tilde{f}+a-N+kw_+} +
$$

JHEP06(2004)033

$$+\sum_{\bar{r}\in\mathbb{Z}}(\bar{S}_{\bar{r}}-1/2)\frac{1}{2is+1+2\bar{r}+2\tilde{\bar{f}}+a+N+kw_+}\,. \tag{3.23}$$

First we would like to isolate the divergent term from this expression. By expanding $\vartheta\left[{a \atop b}\right](\tau,\nu)/\vartheta_1(\tau,\nu)$ in powers of $e^{2i\pi\nu}$, we can also prove the following generalized identity:

$$\sum_n(-)^{b(n+a/2)}q^{\frac{1}{2}(n+a/2)^2}S_{N-n}+(-)^{ab}\sum_n(-)^{b(n+a/2)}q^{\frac{1}{2}(n+a/2)^2}S_{-N-1-a-n}=\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(\tau,0)\,. \tag{3.24}$$

This allows to split naturally the left-moving and right-moving contributions of eq. (3.23) in sums over positive integers as follows:

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left[\frac{\left(S_{r-\tilde{f}}-1\right)+1/2}{1+2r+2is+a-N+kw_+}+\frac{(-)^{ab}\left(S_{r-\tilde{f}-a}-1\right)+1/2}{1+2r-2is-a+N-kw_+}\right]+$$
$$+\sum_{\bar{r}=0}^{\infty}\left[\frac{\left(\bar{S}_{\bar{r}-\tilde{\bar{f}}}-1\right)+1/2}{1+2\bar{r}+2is+a+N+kw_+}+\frac{(-)^{ab}\left(\bar{S}_{\bar{r}-\tilde{\bar{f}}-a}-1\right)+1/2}{1+2\bar{r}-2is-a-N-kw_+}\right]. \tag{3.25}$$

One could have obtained naturally this decomposition by expanding directly the supersymmetric determinant $|\vartheta\left[{a \atop b}\right]/\vartheta_1|^2$ in powers of the holonomies from the beginning of the computation. The first terms of the expansion of the function S_r, eq. (3.2) are:

$$S_r=1-e^{-2\pi\tau_2(r+1)}e^{2i\pi\tau_1(r+1)}+\mathcal{O}\left(e^{-2\pi\tau_2(2r+3)}\right).$$

Therefore, as $\tau_2>0$ in the fundamental domain, all the terms in the expansion of $S_{r-\tilde{f}}-1$ are sub-leading with respect to the constant $1/2$ term in the sum over $r\in\mathbb{N}$. This leading constant term gives a logarithmic divergence that needs to be correctly regularized. Since this term does not depend on the modular parameter τ it can be interpreted as a density of states.

The density of long string states. The procedure to regularize this divergent factor was already discussed in [32] for thermal AdS_3 and in a closer context in [14] for the bosonic coset. We adopt the same "Liouville wall" regularization as in the aforementioned papers and find contributions like:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-n\epsilon}}{A+n}=\log\epsilon+\frac{d}{dA}\log\Gamma(A)+\mathcal{O}(\epsilon)\,. \tag{3.26}$$

By using this regularization procedure for the four divergent pieces of (3.25) and adding the contributions of $s>0$ and $s<0$ from the integral, we obtain:

$$\rho(s;N,w_+;a)=\frac{1}{\pi}\log\epsilon+ \tag{3.27}$$
$$+\frac{1}{8i\pi}\frac{d}{ds}\log\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-is+\frac{a}{2}-\frac{N}{2}+\frac{k}{2}w_+\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+is+\frac{a}{2}-\frac{N}{2}+\frac{k}{2}w_+\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-is-\frac{a}{2}+\frac{N}{2}-\frac{k}{2}w_+\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+is-\frac{a}{2}+\frac{N}{2}-\frac{k}{2}w_+\right)}\times\right.$$

JHEP06(2004)033

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-is+\frac{a}{2}+\frac{N}{2}+\frac{k}{2}w_+\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+is+\frac{a}{2}+\frac{N}{2}+\frac{k}{2}w_+\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-is-\frac{a}{2}-\frac{N}{2}-\frac{k}{2}w_+\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+is-\frac{a}{2}-\frac{N}{2}-\frac{k}{2}w_+\right)}\Bigg\}.$$

The divergent factor in the first line has been argued in [32] to correspond to the divergence due to the infinite volume available for the long strings. The second one gives the regularized density of continuous representations. Thinking of the duality of the supersymmetric $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ coset with $N=2$ Liouville, we can view this result in terms of the ratio of the reflection amplitudes in two $N=2$ Liouville theories differing by a flipping of sign in the exponential potential. In fact, our result matches the computations of two-point functions in N=2 Super-Liouville,[7] both in the NS and R sectors [33]. This is a method preserving $N=2$ superconformal symmetry to confine the strings to a finite volume and obtain a regularized density of states.[8] If we use the parameterization (3.10) for the the total current $\mathcal{J}^3$ and $\bar{\mathcal{J}}^3$ eigenvalues, this expression is just:

$$\begin{aligned}\rho(s;\tilde{m}_t,\tilde{\bar{m}}_t;a) &= \frac{1}{\pi}\log\epsilon+\frac{1}{8i\pi}\frac{d}{ds}\log\Bigg\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-is+\frac{a}{2}-\tilde{m}_t\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+is+\frac{a}{2}-\tilde{m}_t\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-is-\frac{a}{2}+\tilde{m}_t\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+is-\frac{a}{2}+\tilde{m}_t\right)}\times\\ &\qquad\times\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-is+\frac{a}{2}-\tilde{\bar{m}}_t\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+is+\frac{a}{2}-\tilde{\bar{m}}_t\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-is-\frac{a}{2}+\tilde{\bar{m}}_t\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+is-\frac{a}{2}+\tilde{\bar{m}}_t\right)}\Bigg\}\\ &= \frac{1}{\pi}\log\epsilon+\frac{1}{4i\pi}\frac{d}{ds}\log\Bigg\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-is+\frac{a}{2}-\tilde{m}_t\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+is+\frac{a}{2}-\tilde{m}_t\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-is-\frac{a}{2}+\tilde{\bar{m}}_t\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+is-\frac{a}{2}+\tilde{\bar{m}}_t\right)}\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.28}$$

where we have used in the last line the fact that $\tilde{m}_t-\tilde{\bar{m}}_t\in\mathbb{Z}$. To summarize, we have obtained the continuous spectrum in the following form:

$$Z_C=\frac{1}{2}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2}\sum_{N,w_+\in\mathbb{Z}}P\int_0^\infty ds\rho(s;N,w_+;a)ch_c\left(s,\frac{N}{2}-\frac{k}{2}w_+\right)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\bar{ch}_c\left(s,-\frac{N}{2}-\frac{k}{2}w_+\right)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

We have introduced the following continuous characters of the $N=2$ algebra (with $2m\in\mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned}ch_c(s,m)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(\tau,\nu) &= \frac{1}{\eta^3}q^{\frac{s^2+m^2}{k}}z^{\frac{2m}{k}}\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(\tau,\nu)\\ &= \frac{1}{\eta}\sum_n e^{i\pi b\left(n+\frac{a}{2}\right)}\,z^{\frac{2m}{k}+n+\frac{a}{2}}q^{\frac{k}{2(k+2)}\left(n+\frac{a}{2}+\frac{2m}{k}\right)^2}\hat{\lambda}_{1/2+is,n+\frac{a}{2}-m}(\tau)\,.\end{aligned} \tag{3.30}$$

In the last line, we have decomposed the continuous $N=2$ characters in terms of the coset characters for the continuous representations:

$$\hat{\lambda}_{1/2+is,m}(\tau)=\frac{1}{\eta^2}q^{\frac{s^2}{k}+\frac{m^2}{k+2}}\,. \tag{3.31}$$

[7] These computations correspond to the sector $\tilde{m}_t=\tilde{\bar{m}}_t$.

[8] Note that the potential used to regularize the volume divergence is largely arbitrary and each choice of regularization would lead to a different regularized density of states. In our case, preservation of the extended $N=2$ superconformal symmetry severely limits the choice of regularization.

JHEP06(2004)033

Decomposition in extended continuous $N = 2$ characters. We have already shown that the discrete characters of the supersymmetric coset can be decomposed into extended discrete characters of $N = 2$. Now we would like to introduce the *extended continuous* characters of $N = 2$ [12]. They are also given by (see [31] for details):

$$\begin{aligned} Ch_c(s,m)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\tau,\nu) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} ch_c(s,m+kn)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\tau,\nu) \\ &= q^{\frac{s^2}{k}} \frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right](\tau,\nu)}{\eta(\tau)} \Theta_{2m,k}\left(\tau, \frac{2\nu}{k}\right) \end{aligned} \tag{3.32}$$

where we have introduced the classical theta function at level k:

$$\Theta_{m,k}(\tau,\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{k\left(n+\frac{m}{2k}\right)^2} z^{k\left(n+\frac{m}{2k}\right)} . \tag{3.33}$$

To decompose the partition function in terms of extended characters we need another regulator compatible with them. In fact, the density of continuous representations we obtained before, eq. (3.28), is not invariant under spectral flow shifts by k units. To obtain a invariant regulator, we could have started our computation with the expansion of the full determinant $|\vartheta\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]/\vartheta_1|^2\ \Theta_{m,k}\bar{\Theta}_{-m,k}$ in powers of the holonomies. Then the sum over r can be splitted using the the following identity:

$$\begin{aligned} &\sum_{n,n'} (-)^{b(n+a/2)} q^{\frac{1}{2}(n+a/2)^2+k\left(n'+\frac{m}{2k}\right)^2} S_{N-n-kn'} + \\ &+(-)^{ab}\sum_{n,n'} (-)^{b(n+a/2)} q^{\frac{1}{2}(n+a/2)^2+k\left(n'-\frac{m}{2k}\right)^2} S_{-N-1-a-m-n-kn'} = \vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\tau,0)\Theta_{m,k}(\tau,0) . \end{aligned} \tag{3.34}$$

Now we can split the variable N as for the discrete representations: $N = kp + e$, with $e \in \mathbb{Z}_k$, and then we define the mod $2k$ charge $2g = e + kt$, $t = 0, 1$. We obtain the following anti-symmetric combination of extended continuous $N = 2$ characters:

$$Z_C = \frac{1}{2}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2} P\int_0^\infty ds \sum_{2g\in\mathbb{Z}_{2k}} \rho(s,g,-g;a) Ch_c\left(s,g\right)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \times \bar{Ch}_c\left(s,-g\right)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

with the following density of states:

$$\rho(s,g,\bar{g};a) = \frac{1}{\pi}\log\epsilon + \frac{1}{4i\pi}\frac{d}{ds}\log\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-is+\frac{a}{2}-g\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+is+\frac{a}{2}-g\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-is-\frac{a}{2}+\bar{g}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+is-\frac{a}{2}+\bar{g}\right)}\right\} . \tag{3.36}$$

Note that the leading divergent term is modular invariant by itself, as we now from [12] and [31]. We have learned here that different regularization procedures give different finite parts for the density of states. Finally we would like to stress that, due to the expression of the continuous characters, the leading contribution to the partition function is given by a free field computation.[9]

[9] We thank the referee for this remark.

JHEP06(2004)033

3.3 Puzzling sectors of states

In the last subsections we have succeeded in decomposing the partition function in both discrete and continuous representations of the supersymmetric coset theory $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$. The contribution of the continuous representations came with an infrared divergence, that we regularized. The regularized expression gives a non-trivial density of states. However, the partition function contains also a piece corresponding to the the finite part of the partition function after the extraction of the discrete representations. These new sectors are explicitely given by:

$$\left[\sum_{r\in\mathbb{Z}} \frac{S_r}{\frac{1}{2}+is+\frac{a}{2}-\tilde{m}_t+r} - \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\frac{1}{2}+is+\frac{a}{2}-\tilde{m}_t+r}\right] \frac{q^{\frac{s^2+\tilde{m}_t^2}{k}}}{\eta^3}\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}, \tag{3.37}$$

and we have a similar term with non-trivial contribution from the right-moving sector. These terms cannot be interpreted as coming from usual highest weight representations of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Our regularization procedure is not obviously modular invariant and/or compatible with the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ affine symmetry of the parent theory. A modular invariant regularization is provided by using for the H_3 determinant the function: $1/|\vartheta_1(\nu|\tau)|^{2(1-\epsilon)}$, with $\epsilon>0$. However the explicit integration over the holonomies becomes challenging.

3.4 Comments on the Witten index

The twisted RR sector of the partition function: $\mathrm{Tr}_{RR}(-)^F q^{L_0}(-)^{\bar{F}} q^{\bar{L}_0}$ is a constant — the Witten index [22] — and we observe that it can be computed straightforwardly, using the lagrangian form of the un-decomposed partition function, eq. (2.7):

$$\begin{aligned} I_W &= k\int_0^1 ds_1\, ds_2 \frac{1}{\left|\vartheta\left[\begin{smallmatrix}1+2s_1\\1+2s_2\end{smallmatrix}\right]\right|^2} \sum_{M,w_+\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{k\pi}{\tau_2}|(w_++s_1)\tau-(M+s_2)|^2} \left|\vartheta\begin{bmatrix}1+2s_1\\1+2s_2\end{bmatrix}\right|^2 \\ &= k\int_{\mathbb{R}^2} du_1\, du_2\, e^{-\frac{k\pi}{\tau_2}|u_1\tau-u_2|^2} = 1\,. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Even if the partition function for the super-coset, eq. (2.4) is divergent, as the bosonic coset partition function [14], the Witten index is finite. However the computation is very sensitive to the normalization of the path integral that lead to the expression (2.1). We will explain now how the present computation is consistent with the decomposition of the supersymmetric coset partition function into $N=2$ characters.

Contribution of the extended discrete characters: we recall that the extended discrete characters of $N=2$ are given by:

$$Ch_d(j,r)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(\tau,\nu) = \frac{1}{\eta^3(\tau)}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{-(j-1/2)^2+(j+r+a/2+kn)^2}{k}} z^{\frac{2j+2r+a}{k}} \frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right](\tau,\nu)}{1+(-)^b z\; q^{(1+a)/2+r+kn}}\,. \tag{3.39}$$

Therefore in the twisted Ramond sector we have:

$$Ch_d(j,r)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(\tau,0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{-(j-1/2)^2+(j+r+1/2+kn)^2}{k}}\delta_{r+kn+1,0} = \delta_{r+1,0 \mod k}\,. \tag{3.40}$$

JHEP06(2004)033

So the full contribution of the discrete part of the partition function to the index is:

$$\begin{aligned} I_D &= \sum_{2j=1}^{k+1} \Upsilon(2j,1) \sum_{m\in\mathbb{Z}_{2k}} Ch_d\left(j,\frac{m}{2}-j\right)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\bar{Ch}_d\left(j,-\frac{m}{2}-j\right)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \\ &= \sum_{2j=1}^{k+1} \Upsilon(2j,1) \sum_{m\in\mathbb{Z}_{2k}} \delta_{m-2j,0 \mod 2} \times \delta_{m-2j+2,0 \mod 2k} \times \delta_{m+2j-2,0 \mod 2k} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Therefore only one primary state from the discrete representations: $j=1$, $m=0$ (left and right) contribute to the Witten index in the axial coset.

The continuous representations — and the puzzling sectors as well — do not contribute to the Witten index. So the result is in perfect agreement with the direct computation of the Witten index using the lagrangian partition function.

4. The double scaled little string theory

The little string theory [34, 35] (LST) is the decoupling limit of the theory living on the NS five-branes, obtained by sending the string coupling constant to zero. This theory is non-gravitational but shares many properties with conventional string theories. An holographic description is provided by the near-horizon geometry of the five-branes background, which is an exact superconformal field theory [36, 37, 38] based on (for k five-branes) $\mathrm{SU}(2)_k \times \mathbb{R}_{Q^2=2/k}$. However, because of the linear dilaton this string background is strongly coupled down the throat. The authors of [9] show that this strong coupling problem can be avoided by going to the Higgs phase of the little string theory, and taking a double scaling limit. Using the duality between $N=2$ super-Liouville and the supersymmetric coset $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$, they argue that this background (the DSLST) is given by the following orbifold:

$$\frac{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k/\,\mathrm{U}(1)\times \mathrm{SU}(2)_k/\,\mathrm{U}(1)}{\mathbb{Z}_k}\,.$$

This worldsheet CFT also describes superstrings on a singular non-compact Calabi-Yau space, in this case on an A_{k-1} ALE manifold. [39] Another regularization of the strong coupling problem is given by a null deformation of AdS_3, corresponding to adding a stack of fundamental strings to the five-branes setup [17]. In the following we will compute the partition function for the superconformal field theory of the double scaled little string theory, and show explicitely that it gives a spacetime supersymmetric string background (related issues were considered in [40]).

4.1 $N=2$ minimal models: a reminder

Here we would like to recall the partition function of the supersymmetric $\mathrm{SU}(2)_k/\,\mathrm{U}(1)$ coset. The building blocks are the N=2 minimal models characters which are given by (see [41, 42, 43]):

$$\chi_m^{j(s)}(\tau,\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_{k-2}} c^j_{m+4n-s}(\tau)\Theta_{2m+k(4n-s),2k(k-2)}\left(\tau,\frac{\nu}{k}\right) \tag{4.1}$$

JHEP06(2004)033

where the c_m^j are the $\mathrm{SU}(2)_{k-2}$ string functions. The charge s is defined modulo 4: $s = 0, 2$ are the NS sectors with $(-)^F = +1, -1$ and $s = 1, 3$ are the R sectors with $(-)^F = +1, -1$. Note that in the NS sector, we have $2j + m$ even, while in the R sector, $2j + m$ is odd. We have the following symmetry:

$$\chi_{m+k}^{(k-2)/2-j(s+2)}(\tau, \nu) = \chi_m^{j\,(s)}(\tau, \nu)\,, \tag{4.2}$$

and the modular transformation:

$$\chi_m^{j\,(s)}\Big(-\frac{1}{\tau}, 0\Big) = \frac{1}{k}\sum_{j',m',s'} \sin\left(\pi\frac{(2j+1)(2j'+1)}{k}\right) e^{i\pi\left(\frac{mm'}{k}-\frac{ss'}{2}\right)}\chi_{m'}^{j'\,(s')}(\tau, 0)\,. \tag{4.3}$$

Grouping the NS and R states we obtain the RNS characters:

$$\mathcal{C}_m^j\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \Big(\chi_m^{j\,(a)} + (-)^b\chi_m^{j\,(a+2)}\Big)\, e^{i\pi\frac{ab}{2}} \tag{4.4}$$

with the symmetry:

$$\mathcal{C}_{m+k}^{(k-2)/2-j}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (-)^b\mathcal{C}_m^j\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Then a type 0B modular invariant is given by:

$$Z_{MM} = \frac{1}{2}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2}\sum_{2j,2j'=0}^{k-2}\sum_{n,n'\in\mathbb{Z}_{2k}} N_{jj'}M^{nn'}\mathcal{C}_n^j\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\bar{\mathcal{C}}_{n'}^{j'}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

where $N_{jj'}$ is any modular invariant of SU(2), for example the A-invariant: $N_{jj'} = \delta_{j,j'}$.

For the modular invariant of the level k theta functions $M^{mm'}$ we can choose the diagonal one $\delta_{m,m'}$. Of great importance for the following will be the $\mathbb{Z}_k$ orbifold modular invariant:

$$Z = \sum_{\substack{n-n'=0 \mod 2k \\ n+n'=0 \mod 2}} \Theta_{n,k}\bar{\Theta}_{n',k} = \frac{1}{k}\sum_{\gamma',\delta'\in\mathbb{Z}_k}\sum_{n\in\mathbb{Z}_{2k}} e^{2i\pi(n-\gamma')\frac{\delta'}{k}}\Theta_{n,k}\Theta_{-n+2\gamma',k}\,.$$

Then we have the following orbifold sectors:

$$Z_{MM}\begin{bmatrix} a; a \\ b; b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma' \\ \delta' \end{bmatrix} = \sum_{2j=0}^{k-2}\sum_{m\in\mathbb{Z}_{2k}} \mathcal{C}_m^j\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\bar{\mathcal{C}}_{-m+2\gamma'}^{j'}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{2i\pi(m-\gamma')\frac{\delta'}{k}}\,. \tag{4.7}$$

4.2 Combining the two cosets

From now on we consider the two coset theories together, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ and $\mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)$ with the same supersymmetric level k. The central charges add up to $c = 6$:

$$c = c_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1),\mathrm{susy}} + c_{\mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1),\mathrm{susy}} = \frac{3(k+2)}{k} + \frac{3(k-2)}{k} = 6\,. \tag{4.8}$$

In order to obtain eventually a spacetime supersymmetric background, we have to consider a $\mathbb{Z}_k$ orbifold of this superconformal field theory.

JHEP06(2004)033

$N = 2$ **charges.** Let us begin with the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ part. The N=2 charges of the twisted 2D black hole are, from eq. (2.9):

$$\mathcal{Q}_L = \tilde{f} + \frac{a}{2} + \frac{N - \gamma - kw_+}{k}\,, \qquad \mathcal{Q}_R = \tilde{\bar{f}} + \frac{a}{2} - \frac{N + \gamma + kw_+}{k}\,, \tag{4.9}$$

combined with a projector: $e^{2i\pi N\delta/k}$.

Now let us consider the $\mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)$ factor. From eq. (4.1), The $N = 2$ charges of the twisted $N = 2$ minimal model are:

$$\mathcal{Q}'_L = -\frac{s}{2} + \frac{m}{k} \mod 2\,, \qquad \mathcal{Q}'_R = -\frac{s}{2} + \frac{-m + 2\gamma'}{k} \mod 2 \tag{4.10}$$

combined with a projector: $e^{2i\pi(m-\gamma')\delta'/k}$.

The $\mathbb{Z}_k$ orbifold. If we choose to identify the two projections (i.e. we mod out by a diagonal $\mathbb{Z}_k$), namely $\gamma' = \gamma$, $\delta' = \delta$, we find the following set of total N=2 charges:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_L^{\mathrm{tot}} &= \tilde{f} + \frac{a}{2} - \frac{s}{2} + \frac{m + N - \gamma}{k} - w_+ \mod 2 \\ \mathcal{Q}_R^{\mathrm{tot}} &= \tilde{\bar{f}} + \frac{a}{2} - \frac{s}{2} - \frac{N + m - \gamma}{k} - w_+ \mod 2 \end{aligned} \tag{4.11}$$

with the projector:

$$e^{2i\pi(m-\gamma+N)\frac{\delta}{k}}.$$

Summing over δ gives the constraint

$$m - \gamma + N = 0 \mod k := kp\,, \tag{4.12}$$

such that the left and right $N = 2$ charges are both integer. So the type 0B partition function for this theory is:

$$Z^{(0B)}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)} = \frac{1}{2}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2}\frac{1}{2k}\sum_{\gamma,\delta\in\mathbb{Z}_k} Z_{BH}\begin{bmatrix}a;a\\b;b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma\\\delta\end{bmatrix} Z_{MM}\begin{bmatrix}a;a\\b;b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma\\\delta\end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

Then we conclude that the $\mathbb{Z}_k$ orbifold of the superconformal theory $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k/\,\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)_k/\,\mathrm{U}(1)$ has an integer spectrum of $N = 2$ R-charges. It will then be possible to construct a spacetime supersymmetric vacua using the spectral flow of the $N = 2$ algebra [44]. Now we consider the complete superstring background for the doubly scaled little string theory, i.e. the orbifold of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k/\,\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)_k/\,\mathrm{U}(1)$ times six dimensional Minkowski space. In the light-cone gauge we obtain the following partition function for type $0B$ DSLST:

$$Z^{(0B)}_{DSLST} = \frac{1}{2}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2}\frac{1}{2k}\sum_{\gamma,\delta\in\mathbb{Z}_k} Z_{BH}\begin{bmatrix}a;a\\b;b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma\\\delta\end{bmatrix} Z_{MM}\begin{bmatrix}a;a\\b;b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma\\\delta\end{bmatrix}\frac{1}{(8\pi^2\tau_2)^2\eta^4\bar{\eta}^4}\frac{\vartheta^2\left[{a \atop b}\right]}{\eta^2}\frac{\bar{\vartheta}^2\left[{a \atop b}\right]}{\bar{\eta}^2}\,. \tag{4.14}$$

4.3 $N = 4$ structure of the double scaled little string theory

In this section we would like to study the underlying $N = 4$ structure of the theory, and in particular relate the characters we obtained to the $N = 4$ characters of the near-horizon geometry of coinciding NS5-branes — the $\mathrm{SU}(2)_k \times \mathbb{R}_Q$ SCFT.

JHEP06(2004)033

The $N = 4$ algebra. The superconformal symmetry of the theory $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)$ is enlarged to a small N=4 superconformal algebra, due to the $\mathbb{Z}_k$ orbifold. Explicitely, we have the following supercurrents and $\mathrm{SU}(2)_1$ currents [45]:

$$\begin{aligned}
G^{\pm} &= -\sqrt{\frac{2}{k}}\left[\sqrt{k+2}\,\pi^{-}e^{-i\sqrt{\frac{k-2}{2(k+2)}}H^{-}} + \sqrt{k-2}\,\psi^{-}e^{i\sqrt{\frac{k+2}{2(k-2)}}H^{-}}\right]e^{\pm\frac{i}{\sqrt{2}}H^{+}} \\
\tilde{G}^{\pm} &= \sqrt{\frac{2}{k}}\left[\sqrt{k+2}\,\pi^{+}e^{i\sqrt{\frac{k-2}{2(k+2)}}H^{-}} - \sqrt{k-2}\psi^{+}e^{-i\sqrt{\frac{k+2}{2(k-2)}}H^{-}}\right]e^{\pm\frac{i}{\sqrt{2}}H^{+}} \\
(S^3, S^{\pm}) &= \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\partial H^{+}, e^{\pm i\sqrt{2}H^{+}}\right).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Here $\psi^{\pm}$ are the parafermionic currents of $\mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)$, $\pi^{\pm}$ are those of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ and $H^{\pm}$ are free bosons. The boson H^{+} is compactified at the self-dual radius $R = \sqrt{2}$ — in order to have an $\mathrm{SU}(2)_1$ R-symmetry — and the boson H^{-} is compactified at the radius:

$$R_{H_-} = \sqrt{\frac{2(k+2)}{k-2}}\,.$$

To exhibit the $N = 4$ structure in our partition function, eq. (4.13), we use the identity:

$$\frac{k}{2(k+2)}\mathcal{Q}^2 + \frac{k}{2(k-2)}\mathcal{Q}'^2 = \frac{1}{4}\left(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}'\right)^2 + \frac{k-2}{4(k+2)}\left(\mathcal{Q} - \frac{k+2}{k-2}\mathcal{Q}'\right)^2. \tag{4.16}$$

After the $\mathbb{Z}_k$ orbifold, the charges of the first factor are half-integer as they should be for an $\mathrm{SU}(2)_1$ lattice.

On the equivalence between DSLST and LST superconformal algebras. We rewrite the generators of the $N = 4$ algebra for $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)$, eq. (4.15), with a free field representation for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ piece [28]:

$$\begin{aligned}
G^{\pm} = -\sqrt{\frac{2}{k}}\Bigg[\left(\sqrt{\frac{k+2}{2}}\partial X - i\sqrt{\frac{k}{2}}\partial\rho\right)e^{-i\sqrt{\frac{2}{k+2}}X - i\sqrt{\frac{k-2}{2(k+2)}}H^{-}} + \sqrt{k-2}\,\psi^{-}e^{i\sqrt{\frac{k+2}{2(k-2)}}H^{-}}\Bigg] \times \\
\times \quad e^{\pm\frac{i}{\sqrt{2}}H^{+}},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

and we have a similar expression for the other SU(2) doublet. The fields $X(z)$ and $\rho(z)$ are canonically normalized chiral bosons, with a background charge on ρ: $Q_\rho = \sqrt{2/k}$. Now we perform the following $O(2)$ rotation between the free fields X and H^{-}:

$$\begin{aligned}
H^{-} &= \cos\theta\,\hat{H}^{-} - \sin\theta\,\hat{X} \\
X &= \cos\theta\,\hat{X} + \sin\theta\,\hat{H}^{-}, \qquad \text{with } \cos^2\theta = \frac{k-2}{k+2}\,.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

And one obtains the following supercurrents:

$$\begin{aligned}
\hat{G}^{\pm} = -\sqrt{\frac{2}{k}}\Bigg[\left(\sqrt{\frac{k-2}{2}}\partial\hat{X} + \sqrt{2}\partial\hat{H}^{-} - i\sqrt{\frac{k}{2}}\partial\rho\right)e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}\hat{H}^{-}} + \sqrt{k-2}\,\psi^{-}e^{-i\sqrt{\frac{2}{k-2}}\hat{X} + \frac{i}{\sqrt{2}}\hat{H}^{-}}\Bigg] \times \\
\times \quad e^{\pm\frac{i}{\sqrt{2}}H^{+}},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

JHEP06(2004)033

Now, if we introduce the purely bosonic current of the $\mathrm{SU}(2)_{k-2}$ Cartan sub-algebra:

$$I^3(z) = i\sqrt{\frac{k-2}{2}}\partial\hat{X}\,, \tag{4.20}$$

One obtains exactly the $N=4$ algebra for $\mathrm{SU}(2)_k \times \mathbb{R}_{Q^2=2/k}$ [45], i.e. the near-horizon limit of coincident five-branes background. The theory differs only by the $N=2$ super-Liouville potential, that breaks the SO(4) R-symmetry of the LST (the $\mathrm{SU}(2)_{k-1}\times\mathrm{SU}(2)_{k-1}$ isospin of the N=4 algebra) to the $\mathrm{U}(1)\times\mathbb{Z}_k$ symmetry of the DSLST.

Matching the continuous spectra. Implementing this isomorphism, we expect that the continuous spectrum, that correspond to asymptotic states, will be the same in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)$ — the doubly scaled LST — and in $\mathrm{SU}(2)\times\mathbb{R}_Q$ — the LST. Explicitely we have for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)$ (still in type 0B):

$$\begin{aligned} Z_C = \frac{1}{4k}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2}\sum_{\gamma,\delta\in\mathbb{Z}_k} P\int_0^\infty ds \sum_{2g\in\mathbb{Z}_{2k}} e^{4i\pi g\frac{\delta}{k}}\rho(s,g;\gamma;a)Ch_c\left(s,g-\gamma/2\right)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\times \\ \times\bar{Ch}_c\left(s,-g-\gamma/2\right)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\times\sum_{2j=0}^{k-2}\sum_{m\in\mathbb{Z}_{2k}}\mathcal{C}^j_m\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\bar{\mathcal{C}}^j_{-m+2\gamma}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}e^{2i\pi(m-\gamma)\frac{\delta}{k}}\,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

With the density of states:

$$\rho(s,g;\gamma;a) = \frac{1}{\pi}\log\epsilon + \frac{1}{4i\pi}\frac{d}{ds}\log\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-is+\frac{a}{2}-g+\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+is+\frac{a}{2}-g+\frac{\gamma}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-is-\frac{a}{2}-g-\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+is-\frac{a}{2}+g-\frac{\gamma}{2}\right)}\right\}. \tag{4.22}$$

We should only compare the leading divergent part of the density of states to match the spectra of the two theories, because the regularized density depends on the phase shift of the $N=2$ super-Liouville potential which we used to regularize the partition function. For the divergent part, we obtain then, after solving for the constraints:

$$\begin{aligned} \frac{\log\epsilon}{4k\pi}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2}\sum_{\gamma,\delta\in\mathbb{Z}_k}\sum_{2j=0}^{k-2}\int_0^\infty ds\sum_{m\in\mathbb{Z}_{2k}}\Bigg\{\left(Ch_c\left(s,-\frac{m}{2}\right)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\times\mathcal{C}^j_m\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)\times \\ \times\left(\bar{Ch}_c\left(s,-\frac{m+2\gamma}{2}\right)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\times\bar{\mathcal{C}}^j_{-m+2\gamma}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)+ \\ +\left(Ch_c\left(s,-\frac{m}{2}\right)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\times\mathcal{C}^j_{m+k}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)\times \\ \times\left(\bar{Ch}_c\left(s,-\frac{m+2\gamma}{2}\right)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\times\bar{\mathcal{C}}^j_{-m+2\gamma+k}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Now we use the decomposition of extended continuous characters, eq. (3.32), and obtain:

$$\begin{aligned} \frac{\log\epsilon}{4k\pi}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2}\sum_{\gamma,\delta\in\mathbb{Z}_k}\sum_{2j=0}^{k-2}\int_0^\infty ds\sum_{m\in\mathbb{Z}_{2k}}\Bigg\{\left(\frac{q^{\frac{s^2}{k}}}{\eta^3}\Theta_{-m,k}\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\times\mathcal{C}^j_m\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)\times \\ \times\left(\frac{\bar{q}^{\frac{s^2}{k}}}{\bar{\eta}^3}\bar{\Theta}_{-m+2\gamma,k}\bar{\vartheta}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\times\mathcal{C}^j_{-m+2\gamma}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)+ \end{aligned}$$

JHEP06(2004)033

$$+\left(\frac{q^{\frac{s^2}{k}}}{\eta^3}\Theta_{-m,k}\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\times\mathcal{C}^j_{m+k}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\bar{q}^{\frac{s^2}{k}}}{\bar{\eta}^3}\bar{\Theta}_{-m+2\gamma,k}\bar{\vartheta}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\times\mathcal{C}^j_{-m+2\gamma+k}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)\Bigg\}\,. \quad (4.24)$$

Using the decomposition of SU(2) characters in terms of characters of the $N=2$ minimal models:

$$\chi^j(\tau)\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(\tau,\nu)=\sum_{m\in\mathbb{Z}_{2k}}\mathcal{C}^j_m\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(\tau,\nu)\Theta_{m,k}\left(\tau,-\frac{2\nu}{k}\right), \quad (4.25)$$

and the charge conjugation symmetry of the $N=2$ minimal model characters, eq (4.5), we get finally (see also [46]):

$$\frac{\log\epsilon}{2\pi}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2}\sum_{2j=0}^{k-2}\int_0^\infty ds(q\bar{q})^{\frac{s^2}{k}}\chi^j\bar{\chi}^j\vartheta^2\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\bar{\vartheta}^2\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Putting the extra factors, one obtain for the full DSLST background:

$$\frac{\log\epsilon}{2\pi}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2}\sum_{2j=0}^{k-2}\int_0^\infty ds\ (q\bar{q})^{\frac{s^2}{k}}\chi^j\bar{\chi}^j\vartheta^2\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\bar{\vartheta}^2\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\frac{1}{(8\pi^2\tau_2)^2\eta^4\bar{\eta}^4}\frac{\vartheta^2\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right]}{\eta^2}\frac{\bar{\vartheta}^2\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right]}{\bar{\eta}^2}\,. \quad (4.27)$$

This is actually the type $0B$ partition function for the little string theory [38], i.e. the coincident five-branes background. This result is intuitive. In fact, the spectra of the asymptotic states -continuous representations - match because the asymptotic geometry is insensitive to the fact that the five-branes are distributed on a circle in the transverse space.

4.4 Spacetime supersymmetry

In the previous section we have combined the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ and the $\mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)$ supersymmetric coset with a $\mathbb{Z}_k$ orbifold, such that the $N=2$ charges are all integer, or, equivalently, such that the states of the theory belongs to representations of the small $N=4$ algebra. A spacetime-supersymmetric theory is obtained from a type 0 theory by twisting with the operator $(-)^{F_L}$ acting on the left worldsheet fermion number. Let us consider separately the continuous and discrete part of the spectrum.[10]

Continuous representations. Starting with continuous representations of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$, we get the following piece of the partition function after the twisting:

$$Z^C_{DLST}=\frac{1}{2}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2}(-)^{a+b}\frac{1}{2}\sum_{\bar{a},\bar{b}\mathbb{Z}_2}(-)^{\bar{a}+\bar{b}+\eta\bar{a}\bar{b}}\sum_{2j=0}^{k-2}P\int_0^\infty ds\sum_{m,\bar{m}\in\mathbb{Z}_{2k}}\rho(s;m,\bar{m};a,\bar{a})\times$$

[10] In this analysis we don't consider the case of the new sectors of states since we don't have a good explanation for them — however the twisting of the theory can be done in the same way.

JHEP06(2004)033

$$\times \left(Ch_c\left(s, -\frac{m}{2}\right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \times \mathcal{C}^j_m \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) \left(\bar{C}h_c\left(s, -\frac{\bar{m}}{2}\right) \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{bmatrix} \times \mathcal{C}^j_{\bar{m}} \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{bmatrix} \right) \times$$
$$\times \frac{1}{(8\pi^2\tau_2)^2\eta^4\bar{\eta}^4} \frac{\vartheta^2\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]}{\eta^2} \frac{\bar{\vartheta}^2\left[\begin{smallmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{smallmatrix}\right]}{\bar{\eta}^2} \,. \tag{4.28}$$

In this expression, $\eta = 0$ for type IIB superstrings and $\eta = 1$ for type IIA superstrings. As we have already noticed in the type 0B partition function, the leading divergent part of the density of states gives the partition function for the coincident NS5-brane background.

Discrete representations. We now consider the piece coming from the discrete representations of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$. In the same way, we obtain the following expression:

$$Z^D_{DLST} = \frac{1}{2} \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_2} (-)^{a+b} \frac{1}{2} \sum_{\bar{a},\bar{b}\mathbb{Z}_2} (-)^{\bar{a}+\bar{b}+\eta\bar{a}\bar{b}} \sum_{2j=0}^{k-2} \sum_{2j'=1}^{k+1} \Upsilon(2j',1) \times$$
$$\times \sum_{m,\bar{m}\in\mathbb{Z}_{2k}} \left(Ch_d\left(j', -\frac{m}{2} - j'\right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \times \mathcal{C}^j_m \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) \times$$
$$\times \left(\bar{C}h_d\left(j', -\frac{\bar{m}}{2} - j'\right) \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{bmatrix} \times \mathcal{C}^j_{\bar{m}} \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{bmatrix} \right) \frac{1}{(8\pi^2\tau_2)^2\eta^4\bar{\eta}^4} \frac{\vartheta^2\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]}{\eta^2} \frac{\bar{\vartheta}^2\left[\begin{smallmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{smallmatrix}\right]}{\bar{\eta}^2} \,. \tag{4.29}$$

From this discrete spectrum we can compute the Witten index of the theory, that counts the number of Ramond ground states, for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)$ part of the background. We recall that the contribution to the Witten index of, respectively, the discrete extended characters of the supersymmetric $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ and the $N = 2$ minimal model characters are:

$$Ch_d(j', r) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\tau, 0) = \delta_{r+1,0 \mod k} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{C}^j_m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\tau, 0) = \delta_{2j,m} \,. \tag{4.30}$$

Therefore, the Witten index for the DSLST is:

$$\sum_{2j=0}^{k-2} \sum_{2j'=1}^{k+1} \Upsilon(2j', 1 \mod k) \sum_{m,\bar{m}\in\mathbb{Z}_{2k}} \delta_{2j,m}\delta_{2j,\bar{m}} \times \delta_{m-2j'+2,0}\delta_{\bar{m}-2j'+2,0} = k - 1 \,. \tag{4.31}$$

Note that our result is in agreement with [40]. It matches the cohomology of the A_{k-1} ALE space, which is dual to this worldsheet CFT.

5. The NS5-branes on a circle and the exact coset CFT

In this section we would like to match the holographic description of the little string theory in a double scaling limit — the orbifold of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)$ discussed in the last section — and the concrete supergravity description of the Higgs phase of little string theory, i.e. a distribution of NS5-branes in the transverse space.

JHEP06(2004)033

5.1 The supergravity solution

Following [13], the supergravity for k NS5 branes spread over a circle in the transverse space with $\mathbb{Z}_k$ symmetry is (in the string frame):[11]

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H(\rho,\psi)(dr^2 + r^2 d\phi^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2) \tag{5.1}$$

where the conformal factor is given by the following sum with $\mathbb{Z}_k$ symmetry:

$$\begin{aligned} H &= 1 + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\alpha'}{r^2 + \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0\rho\cos(2\pi n/k - \psi)} \\ &= 1 + \frac{\alpha' k}{2\rho_0\rho\sinh x}\Lambda_k(x,\psi) \end{aligned} \tag{5.2}$$

with:

$$e^x = \frac{r^2 + \rho^2 + \rho_0^2}{2\rho_0\rho} + \sqrt{\left(\frac{r^2 + \rho^2 + \rho_0^2}{2\rho\rho_0}\right)^2 - 1} \tag{5.3}$$

and

$$\Lambda_k(x,\psi) = \frac{\sinh kx}{\cosh kx - \cos k\psi}\,. \tag{5.4}$$

This function captures the discreteness of the distribution of five-branes with $\mathbb{Z}_k$ symmetry. In the large k limit, $\Lambda_k(x,\psi) \to 1$, and we obtain a continuous distribution of NS5-branes. We now take the double scaling limit:

$$g_s \to 0\,, \qquad \alpha' \text{fixed}\,, \qquad U_0 \equiv \frac{\rho_0}{g_s\alpha'}\text{fixed}\,, \qquad u_i \equiv \frac{x^i}{g_s\alpha'}\text{fixed}\,. \tag{5.5}$$

Then, defining the coordinates:

$$\begin{aligned} u_1 &= \rho_0 \sinh\rho\cos\theta\cos\varphi\,, & u_2 &= \rho_0\sinh\rho\cos\theta\sin\varphi \\ u_3 &= \rho_0\cosh\rho\sin\theta\cos\psi\,, & u_4 &= \rho_0\cosh\rho\sin\theta\sin\psi\,. \end{aligned} \tag{5.6}$$

The solution is given by:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + k\Lambda_k(x,\psi)\left[d\rho^2 + d\theta^2 + \frac{\tan^2\theta\, d\psi^2 + \tanh^2\rho\, d\varphi^2}{1 + \tan^2\theta\,\tanh^2\rho}\right] \\ B &= \frac{k\Lambda_k(x,\psi)}{1 + \tan^2\theta\,\tanh^2\rho}\, d\varphi\wedge d\psi + \frac{k\Lambda_k(x,\psi)\sin k\psi}{\tan\theta\,\sinh kx}\, d\varphi\wedge d\theta \\ e^{-2\phi} &= \frac{\alpha'}{k}U_0^2\Lambda_k^{-1}(x,\psi)\left(\cos^2\theta\cosh^2\rho + \sin^2\theta\sinh^2\rho\right). \end{aligned} \tag{5.7}$$

In the double scaling limit we have: $e^x = \cosh\rho/\sin\theta$.

5.2 The coset description

Our next task is to show that this supergravity background, eq. (5.7), corresponds actually to an exact coset conformal field theory. In the following we will consider the supersymmetric coset construction in order to compare directly with the previous results.

[11] We consider a special case of [13], where k stacks of N five-branes with a $\mathbb{Z}_k$ symmetry were considered. We restrict to the special case $N = 1$.

JHEP06(2004)033

Superspace action for the coset. We consider the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k \times \mathrm{SU}(2)_k$ superconformal theory. The supersymmetric WZW model is given by the following action for the matrix superfield $\mathcal{G}$, taking values in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)$:

$$kS(\mathcal{G}) = \frac{k}{2\pi}\int d^2z\, d^2\theta\, \mathrm{Tr}\left(\mathcal{G}^{-1}D\mathcal{G}\mathcal{G}^{-1}\bar{D}\mathcal{G} + \int dt\left\{\mathcal{G}\partial_t\mathcal{G}^{-1}\left(D\mathcal{G}\bar{D}\mathcal{G}^{-1} + \bar{D}\mathcal{G}D\mathcal{G}^{-1}\right)\right\}\right) \tag{5.8}$$

and the superfield $\mathcal{G}$ is parameterized in Euler angles for both group factors as follows:

$$\mathcal{G} = \mathrm{diag}\left(e^{\frac{i\sigma_2}{2}\Phi_L}e^{\frac{\sigma_1}{2}S}e^{\frac{i\sigma_2}{2}\Phi_R}, e^{\frac{i\sigma_2}{2}\tilde{\Phi}_L}e^{i\frac{\sigma_1}{2}\Omega}e^{\frac{i\sigma_2}{2}\tilde{\Phi}_R}\right), \tag{5.9}$$

where the superfields expanded in superspace-coordinates read:

$$\Phi_{L,R} = \phi_{L,R} + \theta\chi_{L,R} + \bar{\theta}\tilde{\chi}_{L,R} + \theta\bar{\theta}f_{L,R}\,, \tag{5.10}$$

and so on. We obtain the following action for $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)$ at level k:

$$\begin{aligned} kS(\mathcal{G}) = \frac{k}{4\pi}\int d^2z\, d^2\theta\Big\{ & DS\bar{D}S - D\Phi_L\bar{D}\Phi_L - D\Phi_R\bar{D}\Phi_R - 2\cosh S\; D\Phi_L\bar{D}\Phi_R \\ & + D\Omega\bar{D}\Omega + D\tilde{\Phi}_L\bar{D}\tilde{\Phi}_L + D\tilde{\Phi}_R\bar{D}\tilde{\Phi}_R + 2\cos\Omega\, D\tilde{\Phi}_L\bar{D}\tilde{\Phi}_R\Big\}\,. \end{aligned} \tag{5.11}$$

We would like to gauge the following $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$ null isometry of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)$:

$$(G, G') \to \left(e^{i\Lambda\sigma_2}Ge^{iM\sigma_2}, e^{i\Lambda\sigma_2}G'e^{iM\sigma_2}\right). \tag{5.12}$$

The isometry belongs to the elliptic subgroup of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.[12] Because the generator of the isometries in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)$ are null, the left and right gaugings are independent (see e.g. [48] for examples of null gaugings). Therefore the resulting target space will be four-dimensional. Note that in order to get a globally well-defined gauge theory, the gauge symmetry acts on U(1) symmetries in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ and SU(2) with the same periodicity. Therefore, one defines this coset with the *single cover* of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ rather than the universal cover which is usually considered.[13] The action of the gauged WZW model is given by adding the chiral projections of two U(1) super-gauge fields, $\mathcal{A}$ and $\bar{\mathcal{A}}$:

$$\begin{aligned} kS(\mathcal{G}|\mathcal{A},\bar{\mathcal{A}}) = kS(\mathcal{G}) + \frac{k}{2\pi}\int d^2z\, d^2\theta\Big\{ & \mathcal{A}\left(\bar{D}\Phi_R + \cosh S\,\bar{D}\Phi_L\right) + \bar{\mathcal{A}}\left(D\Phi_L + \cosh S\; D\Phi_R\right) - \\ & - \cosh S\,\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}} + \mathcal{A}\left(\bar{D}\tilde{\Phi}_R + \cos\Omega\,\bar{D}\tilde{\Phi}_L\right) + \\ & + \bar{\mathcal{A}}\left(D\tilde{\Phi}_L + \cos\Omega\, D\tilde{\Phi}_R\right) + \cos\Omega\,\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}\Big\}\,. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Under the super-gauge transformations the superfields transform as follows:

$$\begin{aligned} \Phi_L &\to \Phi_L + \Lambda\,, & \Phi_R &\to \Phi_R + M \\ \tilde{\Phi}_L &\to \tilde{\Phi}_L + \Lambda\,, & \tilde{\Phi}_R &\to \tilde{\Phi}_R + M \\ \mathcal{A} &\to \mathcal{A} + D\Lambda\,, & \bar{\mathcal{A}} &\to \bar{\mathcal{A}} + \bar{D}M \end{aligned} \tag{5.14}$$

[12] Another gauging involving the hyperbolic subgroup gives the Nappi-Witten cosmological solution [47].

[13] Since the relative normalization of the action of the gauge fields in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ and SU(2) is fixed by anomaly cancellation condition, the structure of the coset is rather rigid.

JHEP06(2004)033

Therefore, we can make the super-gauge choice $\Phi_{L,R} = 0$. We also define new coordinates: $\tilde{\Phi}_{L,R} = \Psi \pm \Phi$, $S = 2R$ and $\Omega = 2\Theta$. After integrating out the super-gauge fields, we find the following sigma-model:

$$S = \frac{k}{\pi} \int d^2z\, d^2\theta \Big\{ DR\bar{D}R + D\Theta\bar{D}\Theta + \frac{\cos^2\Theta \cosh^2 R\, D\Psi\bar{D}\Psi + \sin^2\Theta \sinh^2 R\, D\Phi\bar{D}\Phi}{\cosh^2 R - \cos^2\Theta} + \\ + \frac{\sin^2\Theta \cosh^2 R \left(D\Psi\bar{D}\Phi - \bar{D}\Psi D\Phi \right)}{\cosh^2 R - \cos^2\Theta} \Big\} . \tag{5.15}$$

This sigma-model corresponds actually to the solution describing five-branes on a circle, eq. (5.7), in the limit $\Lambda_k \to 1$. A dilaton is generated by the change of the measure in the path integral, whose expression is given in the supergravity solution. Note that this sigma model receives no perturbative corrections, to all orders in $1/k$, because of $N = (4,4)$ superconformal symmetry. Non-perturbative corrections (i.e. worldsheet instantons) can however appear. Indeed, it has been remarked in [13] that the function Λ_k taking into account the discreteness of the distribution of five-branes, eq. (5.4), can actually be rewritten as the following infinite expansion:

$$\Lambda_k(x,\psi) = 1 + \sum_{m\neq 0} e^{-k(|m|x - im\psi)} , \tag{5.16}$$

which resembles an expansion in worldsheet instantons contributions. Therefore, as was done in [49] for the T-dual of ALF space (using complementary methods), it should be possible to capture the exact supergravity metric by considering instantons of the gauged WZW theory.

The link between this model and the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)$ orbifold can be seen as follows: let us perform a duality transformation along the U(1) isometry generated by the superfield Ψ. Using the standard T-duality rules [50], one finds the following dual action:

$$S = \frac{k}{\pi} \int d^2z\, d^2\theta \Big\{ DR\bar{D}R + D\Theta\bar{D}\Theta + \tanh^2 R \frac{D\Psi\bar{D}\Psi}{k^2} + \\ + \tan^2\Theta \left(D\Phi - \frac{D\Psi}{k} \right) \left(\bar{D}\Phi - \frac{\bar{D}\Psi}{k} \right) + R^{(2)} \ln(\cosh^2 R \cos^2\Theta) \Big\} . \tag{5.17}$$

If we redefine $\Psi/k = \Psi'$ and shift the superfield Φ: $\Phi - \Psi/k = \Phi'$, we get exactly the superspace action for $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)$. We can have an indication of the presence of the $\mathbb{Z}_k$ orbifold for the following reason. The coordinate ψ has a periodicity: $\psi \sim \psi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, inherited from the SU(2) group manifold. After the field redefinitions, the new coordinates have the periodicity: $\psi' \sim \psi' + 2\pi n/k$, and $\varphi' \sim \varphi' + 2\pi m - 2\pi n/k$. Therefore we have an $\mathbb{Z}_k$ orbifold whose action is given by the identifications: $(\psi', \varphi') \sim (\psi' + 2\pi n/k, \varphi' - 2\pi n/k)$. This is the geometrical interpretation of the $\mathbb{Z}_k$ orbifold performed in section 4 to achieve spacetime supersymmetry. To further argue that the theories are indeed the same, we will use below the exact coset description we found to show that the spectrum of the coset $\{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)\}/(\mathrm{U}(1)_L \times \mathrm{U}(1)_R)$ and of the orbifold $\{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)\}/\mathbb{Z}_k$ are explicitely the same.

JHEP06(2004)033

Path integral analysis. We can use the standard techniques (see [30] and [51]) to obtain the spectrum of the CFT described by this supersymmetric coset. One starts with the path integral for the supersymmetric coset:

$$Z = \int [d\mathcal{G}][d\mathcal{A}][d\bar{\mathcal{A}}] e^{-kS(\mathcal{G}|\mathcal{A},\bar{\mathcal{A}})} \,. \tag{5.18}$$

Then one can parameterize the super-gauge fields by superfields taking values in the gauged U(1) subgroup H:

$$\mathcal{A} = \mathcal{H} D \mathcal{H}^{-1} \,, \qquad \bar{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{H}} \bar{D} \tilde{\mathcal{H}}^{-1} \,, \tag{5.19}$$

and using the supersymmetric generalization of the Polyakov-Wiegmann identity [52], one can rewrite the path integral in a product form:

$$Z = \int [d\mathcal{G}][d\mathcal{H}][d\tilde{\mathcal{H}}][dB][dC] e^{-kS(\mathcal{H}^{-1}\mathcal{G}\tilde{\mathcal{H}}) + kS(\mathcal{H}^{-1}\tilde{\mathcal{H}}) - S_{SG}} \,, \tag{5.20}$$

with a super-ghosts action coming from the jacobian of the change of variables (5.19):

$$S_{SG} = \frac{1}{\pi} \int d^2z \, d^2\theta \, B\bar{D}C - \bar{B}D\bar{C} \tag{5.21}$$

with $B = \beta + \theta b$, $C = c + \theta\gamma$, and the same for the antiholomorphic superfields. Then one change the variable $\mathcal{H}^{-1}\mathcal{G}\tilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{G}$ and gauge-fix: $\mathcal{H} = 1$. In the specific case of a null gauging we are considering, the super-WZW action for the null subgroup actually vanishes: $S(\tilde{\mathcal{H}}) = 0$. In short, the path integral for the model is just given by the sum of a $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)$ piece and a superghost action:

$$Z = \int [d\mathcal{G}][dB][dC] e^{-kS(\mathcal{G}) - S_{SG}} \,. \tag{5.22}$$

The theory possesses two chiral BRST currents. The BRST charge for the left-moving symmetry is, in terms of components:

$$\mathcal{Q}_{BRST} = \oint \frac{dz}{2\pi} \, : c\,(\mathcal{J}^3 + \mathcal{I}^3) : + : \gamma\,(\psi^3 + \chi^3) : \tag{5.23}$$

where $\mathcal{J}^3$ and $\mathcal{I}^3$ are respectively the total $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ and SU(2) currents at level k, and ψ^3, χ^3 are the associated fermions. We have a similar BRST charge for the right-movers.

5.3 The spectrum of the coset and comparison with the orbifold

The previous analysis shows that the spectrum of the coset is the spectrum of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2)$ supersymmetric WZW model times the super-ghosts contribution, constrained by the BRST symmetry (5.23). For simplicity let us consider NS ground states. We recall that we have to consider the single cover of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. The weights of the primaries of the coset will be then:

$$\begin{aligned} L_0^{cs} &= \frac{c_2}{k} + \frac{j'(j'+1)}{k} - \frac{w_L}{2} m + \frac{k}{4} w_L^2 \\ \bar{L}_0^{cs} &= \frac{c_2}{k} + \frac{j(j+1)}{k} - \frac{w_R}{2} \bar{m} + \frac{k}{4} w_R^2 \end{aligned} \tag{5.24}$$

JHEP06(2004)033

where c_2 is the second Casimir of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ and $w_{L,R}$ the left and right spectral flows (see [25] for more details). In the BRST cohomology, the eigenvalues $m/2$ of $\mathcal{J}^3$, the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ Cartan, are constrained to be related to $m'/2$, those of $\mathcal{I}^3$, the SU(2) Cartan:

$$\begin{aligned} m &= -m' \equiv j' - r' \,, \qquad r' = 0, \ldots, 2j \\ \bar{m} &= -\bar{m}' \equiv j' - \bar{r}' \,, \qquad \bar{r}' = 0, \ldots, 2j \,. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Now let us refresh our memory about the spectrum of the primaries for the orbifold $\{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)\}/\mathbb{Z}_k$ considered in the previous sections. We also restrict our attention to states that are in the ground state of the NS sector. Then we have the following conformal dimensions:

$$\begin{aligned} L_0^{orb} &= \frac{c_2}{k} + \frac{j'(j'+1)}{k} + \frac{(m-\gamma-kw_+)^2}{4k} - \frac{m'^2}{4k} \\ \bar{L}_0^{orb} &= \frac{c_2}{k} + \frac{j(j+1)}{k} + \frac{(m+\gamma+kw_+)^2}{k} - \frac{(-m'+2\gamma)^2}{4k} \,, \end{aligned} \tag{5.26}$$

and due to the $\mathbb{Z}_k$ orbifold we have the constraint: $m + m' - \gamma = kp$. We do the change of variables: $-m' + 2\gamma \to \bar{m}'$, and find the spectrum:

$$\begin{aligned} L_0^{orb} &= \frac{c_2}{k} + \frac{j'(j'+1)}{k} + \frac{w_+ - p}{2}\, m' + \frac{k}{4}(w_+ - p)^2 \\ \bar{L}_0^{orb} &= \frac{c_2}{k} + \frac{j(j+1)}{k} + \frac{w_+ + p}{2}\, \bar{m}' + \frac{k}{4}(w_+ + p)^2 \,. \end{aligned} \tag{5.27}$$

To match the two spectra of primaries, eqs. (5.24) and (5.27), one has to identify the left and right spectral flows as follows:

$$w_L = w_+ - p \,, \qquad w_R = w_+ + p \tag{5.28}$$

and the matching of the complete spectra follows from the matching of the dimensions of the primaries, since the structure of the characters is the same.

To summarize, we have proven that the background corresponding to NS5-branes on a circle, eq. (5.7) is given by the worldsheet orbifold CFT $\{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)\}/\mathbb{Z}_k$. This was an assumption in [9], used to study little string theory in a double scaling limit. In this section we have given strong arguments for this equivalence, using an exact coset description of the background, and we explicitly matched the spectrum with the orbifold theory.

6. About spacetime supersymmetry and geometry

From this specific example we can draw important conclusions for the construction of supersymmetric string backgrounds in general. Suppose one would like to construct a superstring background that corresponds to the spacetime geometry of the two-dimensional euclidean black hole times some flat coordinates:

$$ds^2 = k(d\rho^2 + \tanh^2\rho\; d\varphi^2) + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \,, \tag{6.1}$$

JHEP06(2004)033

described by an $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k/\,\mathrm{U}(1)\times\mathbb{R}^{d,1}$ SCFT. Then one chooses an internal superconformal field theory such that the total central charge is $c = 15$. In our example, the "internal" CFT was simply $\mathrm{SU}(2)_k/\,\mathrm{U}(1)$, but one can choose more complicated examples as well. For the moment this theory cannot be spacetime supersymmeterized because the spectrum of charges of the $N = 2$ R-current is not integer. To achieve this goal, one has to perform a projection on integral charges, which is realized in string theory as an orbifold, because of the requirement of modular invariance. As in the example we studied in detail in this paper, the order of the orbifold scales like k. Therefore the effective geometry in which the low-energy effective theory lives is deeply altered. Let us illustrate this idea on a simple "toy model". We consider simply a $\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1)$ theory at level k. The spectrum of the zero modes is given by:[14]

$$\begin{aligned}\frac{L_0}{\alpha'} &= \frac{(n-kw)^2}{4\alpha' k} + \frac{(n'-kw')^2}{4\alpha' k}\\ \frac{\bar{L}_0}{\alpha'} &= \frac{(n+kw)^2}{4\alpha' k} + \frac{(n'+kw')^2}{4\alpha' k}\,.\end{aligned}$$

The spectrum of the low energy effective action is obtained in the limit $\alpha' \to 0$, with $\alpha' k$ fixed. In this limit, the left and right contributions are equal and corresponds to states with mass squared $m^2 = (n^2+n'^2)/(\alpha' k)$. The winding sectors are very massive and hence decouple from the low energy action. Now let us consider the $\mathbb{Z}_k$ diagonal orbifold of this theory. We have *(i)* a projection on the states with $n - n' \equiv kp$ (with p integer) and *(ii)* new twisted sectors. The resulting spectrum is:

$$\begin{aligned}\frac{L_0}{\alpha'} &= \frac{[n-k(w+\gamma/k)]^2}{4\alpha' k} + \frac{[n-k(w'+\gamma/k)+kp]^2}{4\alpha' k}\\ \frac{\bar{L}_0}{\alpha'} &= \frac{[n+k(w+\gamma/k)]^2}{4\alpha' k} + \frac{[n+k(w'+\gamma/k)+kp]^2}{4\alpha' k}\,.\end{aligned}$$

Then in the effective theory the contributions to the masses of the physical states will be:

$$\begin{aligned}m^2 &= 2\times\frac{(n-\gamma)^2}{4\alpha' k}\\ \bar{m}^2 &= 2\times\frac{(n+\gamma)^2}{4\alpha' k}\,.\end{aligned}$$

Note in particular that the twisted sectors survive to the low energy limit, precisely because the order of the orbifold is k. This is qualitatively the same behavior as in the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)$ CFT considered in this paper.

Some years ago, the following paradox was pointed out (see [53, 54, 55]): some backgrounds of superstring theory should be supersymmetric, because of worldsheet extended superconformal symmetry. However, the corresponding supergravity solution is manifestly *not* supersymmetric. One of the most obvious examples which was considered was in fact the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)$ background. The string frame metric and dilaton for this solution are:

$$ds^2 = k(d\rho^2 + \tanh^2\rho\, d\varphi^2) + k(d\theta^2 + \tan^2\theta\, d\psi^2)$$

[14] Only in this part, α' is reinstalled in the formulas instead of having being set to two.

JHEP06(2004)033

$$e^{-2\phi} = \cosh^2\rho\cos^2\theta\,. \tag{6.2}$$

Let us consider for example the dilatino variation for type-IIB supergravity in this background. We have:

$$\delta\lambda = \left[\gamma^\mu\partial_\mu\phi\;\sigma_3 - \frac{1}{6}H_{\mu\nu\rho}\gamma^{\mu\nu\rho}\right]\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = \sqrt{k}\left[-\Gamma^\rho\tanh\rho + \Gamma^\theta\tan\theta\right]\sigma_3\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

and therefore all the supersymmetry is explicitely broken.

We now argue for a resolution of this paradox. The requirement of spacetime supersymmetry enforces the projection on integer charges in the underlying worldsheet CFT, hence the $\mathbb{Z}_k$ orbifold. Therefore the supergravity solution (6.2) is *not* the correct low-energy effective background for this theory, since the spectrum we would get for supergravity fluctuations around the background (6.2) wouldn't match the $\alpha' \to 0$ limit (with $\alpha' k$ fixed) of the $\{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)\}\,/\mathbb{Z}_k$ spectrum. Rather the supergravity solution corresponding to this superstring background is given by the solution of five-branes on a circle, eq. (5.7), which is manifestly supersymmetric.

7. Conclusions

In this work we have computed the torus amplitude for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k/\,\mathrm{U}(1)$ supersymmetric coset. We have used a supersymmetric marginal deformation method to obtain this result from the supersymmetric $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ partition function, in analogy to [18] for bosonic SU(2) and [17] for bosonic $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. This is the first time this method is used for a supersymmetric WZW model. Then we have performed the exact decomposition in characters — and not only for the primary states — of the supersymmetric coset, which are the same as the irreducible characters of the $N = 2$ algebra with $c > 3$. This last fact is an important element in favor of the duality between the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ coset and the $N = 2$ super-Liouville theory. Moreover we have seen that the *extended* characters of $N = 2$, which have nice modular transformation properties, appear naturally in the decomposition. The spectrum we have found is composed of discrete representations, filling out exactly the improved range for the spin, and continuous representations accompanied by a divergent factor, due to the infinite volume available for them. Upon regularization, we find a divergent factor, corresponding to this volume divergence, and a finite part related to the reflection amplitude in $N = 2$ super-Liouville theory. Apart from these two pieces corresponding to standard characters of the coset, we find new sectors of states which may depend on the regularization procedure. Note that this is not a particular problem of our computation, but would also appear in the bosonic coset partition function [14] , the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ partition function [17] (and presumably also in thermal AdS_3) if we also consider the *exact* expansion in characters, with the multiplicities, rather than only the expansion for the zero modes. This is an important open problem that deserves clarification.

Then we have considered the little string theory in a double scaling limit, corresponding to the worldsheet CFT $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)$. The integrality of $N = 2$ charges — necessary to achieve spacetime supersymmetry — is obtained by considering a $\mathbb{Z}_k$ orbifold

JHEP06(2004)033

of this CFT, much as in Gepner models [3]. We provide the spacetime supersymmetric partition function for this superstring background. The computation of the Witten index agrees with the expected result for superstrings on an A_{k-1} ALE space. We also give some insight on the relationship between this theory and the theory of coincident NS5-branes, i.e. the $\mathrm{SU}(2)_k \times \mathbb{R}_Q$ worldsheet CFT. We show in particular that the leading part of the partition functions, proportional to the (infinite) volume agree.

We have shown that the supergravity solution for NS5-branes spread on a circle in the transverse space with $\mathbb{Z}_k$ symmetry, given in [13], is actually given by an exact CFT, corresponding to the null gauging: $(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(2))/(\mathrm{U}(1)_L \times \mathrm{U}(1)_R)$. After integrating out the gauge field, we obtain a sigma-model which is perturbatively exact, thanks to $N = (4,4)$ worldsheet superconformal symmetry. The metric, dilaton and NS-NS two form background fields agree with the supergravity solution, up to a multiplicative factor taking into account the discreteness of the distribution of branes. This factor could be interpreted as an expansion in worldsheet instantons contributions, that correct the sigma-model of the coset. Using the standard BRST quantization of gauged WZW model, we have shown that actually the spectrum of the null coset coincides precisely with the spectrum of the $(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k/\,\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)_k/\,\mathrm{U}(1))/\mathbb{Z}_k$ orbifold. This gives further strong arguments for the holographic duality between this worldsheet CFT and the double scaling limit of little string theory.

Getting inspiration from this example, we have discussed the relationship between spacetime supersymmetry of superstring backgrounds and low-energy effective geometry. To achieve spacetime supersymmetry with the $N = 2$ spectral flow one has to project onto integral charges of the $N = 2$ R-current, and this projection has a drastic effect on the interpretation of the corresponding supergravity background. We have illustrated this idea with a very simple $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$ example and of course with the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k/\,\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)_k/\,\mathrm{U}(1)$ model. The correct supergravity description of the corresponding supersymmetric string background is the solution for NS5-branes on a topologically trivial circle. Also in the non-supersymmetric cases, it is not clear when it is possible to make sense of a string theory with non-integer $N = 2$ charges since various OPE's between vertex operators of the theory will become non-local.

Acknowledgments

Thanks to Costas Bachas, Ben Craps, Shmuel Elitzur, Amit Giveon, Elias Kiritsis, Anatoly Konechny, Marios Petropoulos, Boris Pioline, Sylvain Ribault, Volker Schomerus, Amit Sever, and Konstadinos Sfetsos for interesting discussions. AP thanks the ENS-LPT for hospitality during the completion of this work. AP is supported in part by the Horowitz Foundation. This work is supported in part by the Israeli Science Foundation.

References

[1] T. Banks and L.J. Dixon, *Constraints on string vacua with space-time supersymmetry*, *Nucl. Phys.* **B 307** (1988) 93.

JHEP06(2004)033

[2] A. Giveon and A. Pakman, *More on superstrings in $AdS_3 \times N$*, *J. High Energy Phys.* **03** (2003) 056 [hep-th/0302217].

[3] D. Gepner, *Space-time supersymmetry in compactified string theory and superconformal models*, *Nucl. Phys.* **B 296** (1988) 757.

[4] L.J. Dixon, *Some world sheet properties of superstring compactifications, on orbifolds and otherwise*, lectures given at *The 1987 ICTP summer workshop in high energy physics and cosmology*, Trieste, Italy, Jun 29 – Aug 7, 1987, PUPT-1074.

[5] W. Lerche, C. Vafa and N.P. Warner, *Chiral rings in $N = 2$ superconformal theories*, *Nucl. Phys.* **B 324** (1989) 427.

[6] L.J. Dixon, M.E. Peskin and J. Lykken, *$N = 2$ superconformal symmetry and* $\mathrm{SO}(2,1)$ *current algebra*, *Nucl. Phys.* **B 325** (1989) 329.

[7] E. Witten, *On string theory and black holes*, *Phys. Rev.* **D 44** (1991) 314.

[8] S. Nojiri, *Superstring in two-dimensional black hole*, *Phys. Lett.* **B 274** (1992) 41 [hep-th/9108026].

[9] A. Giveon and D. Kutasov, *Little string theory in a double scaling limit*, *J. High Energy Phys.* **10** (1999) 034 [hep-th/9909110].

[10] K. Hori and A. Kapustin, *Duality of the fermionic 2D black hole and $N = 2$ liouville theory as mirror symmetry*, *J. High Energy Phys.* **08** (2001) 045 [hep-th/0104202].

[11] D. Tong, *Mirror mirror on the wall: on two-dimensional black holes and Liouville theory*, *J. High Energy Phys.* **04** (2003) 031 [hep-th/0303151].

[12] T. Eguchi and Y. Sugawara, *Modular bootstrap for boundary $N = 2$ Liouville theory*, *J. High Energy Phys.* **01** (2004) 025 [hep-th/0311141].

[13] K. Sfetsos, *Branes for Higgs phases and exact conformal field theories*, *J. High Energy Phys.* **01** (1999) 015 [hep-th/9811167].

[14] A. Hanany, N. Prezas and J. Troost, *The partition function of the two-dimensional black hole conformal field theory*, *J. High Energy Phys.* **04** (2002) 014 [hep-th/0202129].

[15] S. Hwang and P. Roberts, *Interaction and modular invariance of strings on curved manifolds*, hep-th/9211075.

[16] D. Israel, *Quantization of heterotic strings in a Goedel/anti de Sitter spacetime and chronology protection*, *J. High Energy Phys.* **01** (2004) 042 [hep-th/0310158].

[17] D. Israel, C. Kounnas and M.P. Petropoulos, *Superstrings on ns5 backgrounds, deformed AdS_3 and holography*, *J. High Energy Phys.* **10** (2003) 028 [hep-th/0306053].

[18] A. Giveon and E. Kiritsis, *Axial vector duality as a gauge symmetry and topology change in string theory*, *Nucl. Phys.* **B 411** (1994) 487 [hep-th/9303016].

[19] Y. Kazama and H. Suzuki, *New $N = 2$ superconformal field theories and superstring compactification*, *Nucl. Phys.* **B 321** (1989) 232.

[20] A. Pakman, *Unitarity of supersymmetric* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$ *and no-ghost theorem for fermionic strings in $AdS_3 \times N$*, *J. High Energy Phys.* **01** (2003) 077 [hep-th/0301110].

[21] P. Goddard, A. Kent and D.I. Olive, *Unitary representations of the Virasoro and supervirasoro algebras*, *Commun. Math. Phys.* **103** (1986) 105.

JHEP06(2004)033

[22] E. Witten, *Constraints on supersymmetry breaking*, *Nucl. Phys.* **B 202** (1982) 253.

[23] A. Pakman, *Brst quantization of string theory in AdS_3*, *J. High Energy Phys.* **06** (2003) 053 [hep-th/0304230].

[24] M. Henningson, S. Hwang, P. Roberts and B. Sundborg, *Modular invariance of* $\mathrm{SU}(1,1)$ *strings*, *Phys. Lett.* **B 267** (1991) 350.

[25] J.M. Maldacena and H. Ooguri, *Strings in AdS_3 and* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *WZW model, I*, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2929 [hep-th/0001053].

[26] K. Sfetsos, *Degeneracy of string states in 2-d black hole and a new derivation of* $\mathrm{SU}(1,1)$ *parafermion characters*, *Phys. Lett.* **B 271** (1991) 301.

[27] I. Bakas and E. Kiritsis, *Beyond the large-N limit: nonlinear w(infinity) as symmetry of the* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$ *coset model*, *Int. J. Mod. Phys.* **A7S1A** (1992) 55–81 [hep-th/9109029].

[28] P.A. Griffin and O.F. Hernandez, *Feigin-fuchs derivation of* $\mathrm{SU}(1,1)$ *parafermion characters*, *Nucl. Phys.* **B 356** (1991) 287.

[29] S. Ribault and V. Schomerus, *Branes in the 2-d black hole*, *J. High Energy Phys.* **02** (2004) 019 [hep-th/0310024].

[30] H.J. Schnitzer, *A path integral construction of superconformal field theories from a gauged supersymmetric Wess-Zumino-Witten action*, *Nucl. Phys.* **B 324** (1989) 412.

[31] D. Israel, A. Pakman and J. Troost, *Extended* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$ *characters, or modular properties of a simple non-rational conformal field theory*, *J. High Energy Phys.* **04** (2004) 045 [hep-th/0402085].

[32] J.M. Maldacena, H. Ooguri and J. Son, *Strings in AdS_3 and the* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *WZW model, II. Euclidean black hole*, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2961 [hep-th/0005183].

[33] C. Ahn, M. Stanishkov and M. Yamamoto, *One-point functions of $N = 2$ super-Liouville theory with boundary*, *Nucl. Phys.* **B 683** (2004) 177 [hep-th/0311169].

[34] N. Seiberg, *New theories in six dimensions and matrix description of M-theory on T^5 and $T^5/\mathbb{Z}_2$*, *Phys. Lett.* **B 408** (1997) 98 [hep-th/9705221].

[35] O. Aharony, M. Berkooz, D. Kutasov and N. Seiberg, *Linear dilatons, NS5-branes and holography*, *J. High Energy Phys.* **10** (1998) 004 [hep-th/9808149].

[36] C. Kounnas, M. Porrati and B. Rostand, *On $N = 4$ extended superliouville theory*, *Phys. Lett.* **B 258** (1991) 61.

[37] C.G. Callan Jr., J.A. Harvey and A. Strominger, *World sheet approach to heterotic instantons and solitons*, *Nucl. Phys.* **B 359** (1991) 611.

[38] I. Antoniadis, S. Ferrara and C. Kounnas, *Exact supersymmetric string solutions in curved gravitational backgrounds*, *Nucl. Phys.* **B 421** (1994) 343 [hep-th/9402073].

[39] H. Ooguri and C. Vafa, *Two-dimensional black hole and singularities of CY manifolds*, *Nucl. Phys.* **B 463** (1996) 55 [hep-th/9511164].

[40] S. Yamaguchi, *Gepner-like description of a string theory on a non-compact singular Calabi-Yau manifold*, *Nucl. Phys.* **B 594** (2001) 190 [hep-th/0007069]; *Noncompact gepner models with discrete spectra*, *Phys. Lett.* **B 509** (2001) 346 [hep-th/0102176].

JHEP06(2004)033

[41] E. Kiritsis, *Character formulae and the structure of the representations of the $N = 1$, $N = 2$ superconformal algebras*, *Int. J. Mod. Phys.* **A 3** (1988) 1871.

[42] V.K. Dobrev, *Characters of the unitarizable highest weight modules over the $N = 2$ superconformal algebras*, *Phys. Lett.* **A 186** (1987) 43.

[43] Y. Matsuo, *Character formula of $C < 1$ unitary representation of $N = 2$ superconformal algebra*, *Prog. Theor. Phys.* **77** (1987) 793.

[44] D. Gepner, *Lectures on $N = 2$ string theory*, lectures at *Spring school on superstrings*, Trieste, Italy, Apr 3-14, 1989, PUPT-1121.

[45] C. Kounnas, *Four-dimensional gravitational backgrounds based on $N = 4$, $c = 4$ superconformal systems*, *Phys. Lett.* **B 321** (1994) 26 [hep-th/9304102].

[46] J.L. Petersen and A. Taormina, *Modular properties of doubly extended $N = 4$ superconformal algebras and their connection to rational torus models, 1*, *Nucl. Phys.* **B 354** (1991) 689.

[47] C.R. Nappi and E. Witten, *A closed, expanding universe in string theory*, *Phys. Lett.* **B 293** (1992) 309 [hep-th/9206078].

[48] C. Klimčík and A.A. Tseytlin, *Exact four-dimensional string solutions and Toda like sigma models from 'null gauged' WZNW theories*, *Nucl. Phys.* **B 424** (1994) 71 [hep-th/9402120].

[49] D. Tong, *NS5-branes, T-duality and worldsheet instantons*, *J. High Energy Phys.* **07** (2002) 013 [hep-th/0204186].

[50] T.H. Buscher, *Path integral derivation of quantum duality in nonlinear sigma models*, *Phys. Lett.* **B 201** (1988) 466.

[51] A.A. Tseytlin, *Conformal sigma models corresponding to gauged Wess-Zumino-Witten theories*, *Nucl. Phys.* **B 411** (1994) 509 [hep-th/9302083].

[52] A.M. Polyakov and P.B. Wiegmann, *Theory of nonabelian goldstone bosons in two dimensions*, *Phys. Lett.* **B 131** (1983) 121; *Goldstone fields in two-dimensions with multivalued actions*, *Phys. Lett.* **B 141** (1984) 223.

[53] I. Bakas, *Space-time interpretation of s duality and supersymmetry violations of t duality*, *Phys. Lett.* **B 343** (1995) 103 [hep-th/9410104].

[54] E. Bergshoeff, R. Kallosh and T. Ortin, *Duality versus supersymmetry and compactification*, *Phys. Rev.* **D 51** (1995) 3009 [hep-th/9410230].

[55] I. Bakas and K. Sfetsos, *T duality and world sheet supersymmetry*, *Phys. Lett.* **B 349** (1995) 448 [hep-th/9502065].

[56] T. Eguchi and Y. Sugawara, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$ *supercoset and elliptic genera of non-compact Calabi-Yau manifolds*, *J. High Energy Phys.* **05** (2004) 014 [hep-th/0403193].

JHEP06(2004)033

Publication n°4 : «D-branes in N=2 Liouville and its mirror».

Preprint typeset in JHEP style - HYPER VERSION

LPTENS-04/27
RI-05-04
hep-th/0405259

D-branes in N=2 Liouville theory and its mirror

Dan Israël[1], **Ari Pakman**[2,3] **and Jan Troost**[1]

[1] *Laboratoire de Physique Théorique de l'École Normale Supérieure*[*]
24, Rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

[2] *Racah Institute of Physics, The Hebrew University*
Jerusalem 91904, Israel

[3] *Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics*
Boltzmanngasse 9, A-1090 Vienna, Austria

E-mail: israel@lpt.ens.fr, pakman@phys.huji.ac.il, troost@lpt.ens.fr

Abstract: We study D-branes in the mirror pair $N = 2$ Liouville/supersymmetric $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ coset superconformal field theories. We build D0, D1 and D2 branes, on the basis of the boundary state construction for the H_3^+ conformal field theory. We also construct D0-branes in an orbifold that rotates the angular direction of the cigar. We show how the poles of correlators associated to localized states and bulk interactions naturally decouple in the one-point functions of localized and extended branes. We stress the role played in the analysis of D-brane spectra by primaries in $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ which are descendents of the parent theory.

[*]Unité mixte du CNRS et de l'Ecole Normale Supérieure, UMR 8549.

Contents

1. Introduction **1**

2. The bulk **2**

2.1 The bulk spectrum of the supersymmetric coset 2

2.2 Towards the duality with $N = 2$ Liouville: a bosonic ancestor 3

2.3 The supersymmetric case 6

2.4 Bulk versus localized poles and self-duality 8

2.5 The conformal bootstrap approach 10

3. The boundary **11**

4. D0-branes **13**

4.1 One-point function for the localized branes 13

4.2 Cardy computation for the D0-branes 14

5. D0 branes in a $\mathbb{Z}_p$ orbifold **20**

6. D1 branes **23**

7. D2-branes **25**

7.1 D1-like contribution 26

7.2 D0-like contribution 26

8. Conclusions **28**

A. Computing N=2, c>3 characters **29**

B. Changing basis in $SL(2,\mathbb{R})$ **36**

C. Cardy condition for D0 branes in R/$\widetilde{\mathrm{NS}}$ sectors **38**

D. Embedding $N = 2$ into $SL(2,\mathbb{R})$ **40**

E. Conventions **41**

1. Introduction

We have learned that it is very useful to study non-perturbative objects in string theory, especially when they are related to an implementation of holography. This study has proved instrumental both for understanding gauge theory physics, and for getting to grips with aspects of quantum gravity. In this paper, we will concentrate on constructing boundary conformal field theories for theories with $N = 2$ supersymmetry and central charge $c > 3$. These boundary conformal field theories are arguably the most important missing ingredient in the construction of D-branes in non-compact curved string backgrounds with bulk supersymmetry.

The models we will study in detail are the $N = 2$ Liouville theory [1, 2], and the $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ super-coset [3] theory. These two theories are known to be dual [4, 5](see also [6, 7]), and are mapped to each other by mirror symmetry.

Constructing D-branes in these superconformal field theories will not only increase our knowledge of D-branes in non-minimal $N = 2$ superconformal field theories (see also [10, 11, 12]), but it will also enable us to study holographic dualities in closer detail. There are two conjectured instances of holography where these D-branes are expected to be relevant. The $N = 2$ Liouville/$SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ background is is related to a conjectured calculable version of holography [5] which involves a bulk closed superstring background [8] dual to a non-gravitational non-local Little String Theory [9]. Note for instance that D1-branes stretching between NS5-branes (which can be interpreted as the W-bosons of the Little String Theory) can be constructed using these boundary conformal field theories.

Another natural area where the D-branes built in this model are relevant is the study of matrix models for two-dimensional non-critical superstrings [11] and Type 0 strings in a 2D black hole. For the latter case, it was conjectured in [13], following the ideas of [14], that the decoupled theory of $N \to \infty$ $D0$ branes of ZZ type in $N = 2$ Liouville, leads to a version of the matrix model of [15] with the matrix eigenvalues filling symmetrically both sides of the inverted harmonic oscillator potential. This matrix model would be dual to 2D Type $0A$ string theory in the supersymmetric 2D black hole background.

Our paper is structured as follows. We first review in section 2 the bulk theories, and the duality between $N = 2$ Liouville theory and the supersymmetric coset. In section 3 we go on to discuss how to relate H_3^+ (i.e. Euclidean AdS_3) boundary conformal field theories to the $N = 2$ theories under consideration. In the following sections, we then explicitly construct and study D0-, D1- and D2-branes. We pause in section 5 to explain how to extend our result to an angular orbifold of the cigar. In the appendices, we collect several important remarks. One concerns the fact that the $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ super-coset characters are equal to the characters of the $N = 2, c > 3$ Virasoro algebra. Another treats the Fourier transformation of the one-point functions, while a third appendix analyzes the $SL(2,\mathbb{R})$ symmetry of general $N = 2$ $c > 3$ conformal field theories.

2. The bulk

In this section we will study aspects of the bulk theory in which the D-branes studied in this

paper will be embedded. We give original points of view on some of the topics treated in the literature. We first discuss the spectrum of the supersymmetric $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ conformal field theory for concreteness. We then study the nature of the duality between the susy coset and $N=2$ Liouville (as well as its bosonic counterpart). We next review the pole structure of the bulk correlators and comment upon the pole structure of the one-point functions. We finish by suggesting that from the perspective of recent developments in non-rational conformal field theories, the duality of the two theories is a case of dynamics being completely determined by chiral symmetries.

2.1 The bulk spectrum of the supersymmetric coset

We consider a bulk theory with $N=2$ supersymmetry, namely the axial $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ super-coset conformal field theory [3]. We review the algebraic details of this $N=2$ algebra in Appendix A. The central charge of the conformal field theory is

$$c = 3 + \frac{6}{k}\,, \tag{2.1}$$

where k is the level of the parent (total) $SL(2,\mathbb{R})$ current algebra. The primaries $\Phi^j_{m,\bar{m}}$ in the bulk, coming from $SL(2,\mathbb{R})$ primaries with spin j, can belong either to the NS or R sector of the $N=2$ algebra. They have conformal dimensions and $N=2$ R-charges [13, 8]

$$\begin{aligned}
\Delta_{j,w,n} &= -\frac{j(j-1)}{k} + \frac{m^2}{k} + \frac{(\delta^R_\pm)^2}{8} \qquad & Q_{j,w,n} &= \frac{2m}{k} + \frac{\delta^R_\pm}{2}\,,\\
\bar{\Delta}_{j,w,n} &= -\frac{j(j-1)}{k} + \frac{\bar{m}^2}{k} + \frac{(\delta^R_\pm)^2}{8} \qquad & \bar{Q}_{j,w,n} &= -\frac{2\bar{m}}{k} - \frac{\delta^R_\pm}{2}\,,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

where

$$m = \frac{n+kw}{2} \qquad \bar{m} = -\frac{n-kw}{2}\,, \tag{2.3}$$

with $n, w \in \mathbb{Z}$. The constant $\delta^R_\pm$ is zero in the NS sector and ± 1 in the R sector. The Ramond primaries appear always in pairs due to the double degeneracy of the Ramond vacuum. The numbers $m, \bar{m}$ are the eigenvalues of the left and right elliptic generators of the $SL(2,\mathbb{R})$ Lie algebra. Notice that the conformal dimension $\Delta_{j,w,n}$ is invariant under $j \to -j+1$. The two corresponding primaries are related through

$$\begin{aligned}
\Phi^{-j+1}_{m,\bar{m}} &= R^{NS/R^\pm}(-j+1,m,\bar{m})\ \Phi^j_{m,\bar{m}}\,,\\
&= \frac{1}{R^{NS/R^\pm}(j,m,\bar{m})}\ \Phi^j_{m,\bar{m}}\,,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

where the reflection coefficients $R^{NS/R^\pm}(j,m,\bar{m})$ are given by [13]

$$R^{NS}(j,m,\bar{m}) = \nu^{1-2j}\frac{\Gamma(-2j+1)\Gamma(1+\frac{1-2j}{k})}{\Gamma(2j-1)\Gamma(1-\frac{1-2j}{k})}\frac{\Gamma(j+m)\Gamma(j-\bar{m})}{\Gamma(-j+1+m)\Gamma(-j+1-\bar{m})}\,, \tag{2.5}$$

$$R^{R^\pm}(j,m,\bar{m}) = \nu^{1-2j}\frac{\Gamma(-2j+1)\Gamma(1+\frac{1-2j}{k})}{\Gamma(2j-1)\Gamma(1-\frac{1-2j}{k})}\frac{\Gamma(j+m\pm\frac{1}{2})\Gamma(j-\bar{m}\mp\frac{1}{2})}{\Gamma(-j+1+m\pm\frac{1}{2})\Gamma(-j+1-\bar{m}\mp\frac{1}{2})}\,, \tag{2.6}$$

for primaries of the NS and R sectors, respectively.

The two-dimensional geometry of the axial coset theory is a cigar [16, 17], or Euclidean 2D black hole [18, 19] . It has an asymptotic radius equal to $\sqrt{k\alpha'}$, and the quantum number n is interpreted in the axial $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ coset as the momentum around the compact circle at infinity. The number w denotes the winding number of the closed string states [20], but can be viewed also as the spectral flow parameter of the affine $SL(2,\mathbb{R})$ algebra [21, 22].

The spectrum of the super-coset includes both continuous representations with $j = \frac{1}{2} + iP$ (and $P \in \mathbb{R}_0^+$), and discrete *lowest-weight* representations $\mathcal{D}_j^+$ [20] with values of $j \in \mathbb{R}$ satisfying

$$\frac{1}{2} < j < \frac{k+1}{2}\,, \tag{2.7}$$

and

$$j + r = m\,, \qquad j + \bar{r} = \bar{m}\,, \tag{2.8}$$

where $r, \bar{r}$ are integers (half-integers) for the Neveu-Schwarz (Ramond) sector. The bound for j (2.7) is stricter than the unitarity bound on the coset representations [23] as well as than the bound corresponding to normalizable operators [22]. The improved bound has been shown to apply in all physical settings [5, 22, 24, 25, 26, 8]. Although coset primaries for discrete representations appear for all values of $r, \bar{r}$, only those with $r, \bar{r} \geq 0$ correspond to coset primaries inherited from $SL(2,\mathbb{R})$ primaries, and only for them expressions (2.2) hold. The coset primaries with $r, \bar{r} < 0$ arise from *descendants* of $SL(2,\mathbb{R})$ discrete *lowest-weight* representations $\mathcal{D}_j^+$, but they can be interpreted as *primaries* coming from discrete *highest-weight* representations $\mathcal{D}^-_{\frac{k+2}{2}-j}$ with spin $\frac{k+2}{2} - j$. We discuss the details of the $r, \bar{r} < 0$ primaries in this section, in section 4.1 and in Appendix A.[1]

The spectrum of primaries that we have reviewed above follows from studying the representation of the affine $SL(2,\mathbb{R})$ algebra and from the analysis of the modular invariant partition function of the model [24, 26, 8]. The reflection coefficients (2.5)-(2.6) are related to the dynamics of the theory, i.e. the correlation functions, which we consider now.

2.2 Towards the duality with $N = 2$ Liouville: a bosonic ancestor

Before discussing the duality between the susy coset $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ and $N = 2$ Liouville, we will look at its bosonic counterpart. The correlators of the bosonic $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ theory can be obtained by free field computations in $SL(2,\mathbb{R})$. For this one can use the Wakimoto free field representation of the algebra[2]

$$\begin{aligned} j^+ &= \beta \\ j^3 &= -\beta\gamma - \frac{1}{Q}\partial\phi \\ j^- &= \beta\gamma^2 + \frac{2}{Q}\gamma\partial\phi + k\partial\gamma \end{aligned} \tag{2.9}$$

[1]Note that when we take into account all primaries including those with $r, r' < 0$, there is no need to consider both $\mathcal{D}^+$ and $\mathcal{D}^-$ representations, the $\mathcal{D}^+$ representations being enough to cover all the spectrum.

[2]We will take the $SL(2,\mathbb{R})$ level $k+2$, which is more convenient in order to move to the susy case later. We take $\alpha' = 2$.

where

$$
\begin{aligned}
Q &= \sqrt{\frac{2}{k}} \\
\Delta(\beta,\gamma) &= (1,0) \\
\beta(z)\gamma(w) &\sim \frac{1}{z-w} \\
\phi(w)\phi(z) &\sim -\log(z-w)
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

and the energy momentum tensor of the theory is:

$$
T = \beta\partial\gamma - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{Q}{2}\partial^2\phi\,, \tag{2.11}
$$

with the central charge given by (2.1). The $SL(2,\mathbb{R})$ vertex operators are represented by

$$
\Phi^j_{m,\bar{m}} = \gamma^{j+m-1}\bar{\gamma}^{j+\bar{m}-1}e^{(j-1)Q\phi}\,. \tag{2.12}
$$

Correlators were computed in this formalism first in [27], by using the screening charge[3]

$$
\mathcal{L}_1 = \mu_1\beta\bar{\beta}e^{-Q\phi}\,. \tag{2.13}
$$

The two-point function is

$$
\langle\Phi^j_{m,\bar{m}}\Phi^{j'}_{m,\bar{m}}\rangle = |z_{12}|^{-4\Delta_j}\delta_{n+n'}\delta_{w+w'}\left(\delta(j+j'-1) + R^{NS}(j,m,\bar{m})\delta(j-j')\right) \tag{2.14}
$$

where $R^{NS}(j,m,\bar{m})$ is given in (2.5). Similar free field computations can be performed using a dual screening charge [28, 29, 30]

$$
\mathcal{L}_2 = \mu_2(\beta\bar{\beta})^k e^{-\frac{2}{Q}\phi}\,, \tag{2.15}
$$

and the correlators agree under the identification [29]

$$
\pi\mu_2\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(1-k)} = \left(\pi\mu_1\frac{\Gamma(k^{-1})}{\Gamma(1-k^{-1})}\right)^k\,. \tag{2.16}
$$

The vertex operators (2.12) correspond to the $SL(2,\mathbb{R})$ theory. To obtain the primaries of the coset one multiplies them by the exponential of a free boson, which represents the gauged coordinate. But the nontrivial part of any correlator computed is the same in $SL(2,\mathbb{R})$ or $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ since both interaction terms $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ commute with the gauged current j^3.

The free field formalism actually allows to compute (2.14) by inserting both $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$, and only for those values of j where the anomalous momentum conservation for ϕ is satisfied as

$$
2(j-1)Q - n_1Q - n_2\frac{2}{Q} = -Q\,, \tag{2.17}
$$

[3]Whenever we say screening charge we imply the integrated form $\int d^2z\,\mathcal{L}$.

where $n_1, n_2 = 0, 1, \ldots$ are the number of insertions of $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$, respectively[4]. The results are then analytically continued to arbitrary j.

In the limit $\phi \to \infty$ the potential drops exponentially and the theory becomes weakly coupled. In the cigar geometry, the dilaton becomes linear in ϕ, which has the interpretation of the radial coordinate away from the tip. Following [15], it is easy to see that the relation between $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ is that of a strong-weak coupling duality. For $k \to \infty$, $\mathcal{L}_2$ is supported in the strong coupling region ($\phi \to -\infty$) and $\mathcal{L}_1$ has support in the weak coupling region. This is consistent with the fact the $\mathcal{L}_1$ screening can be obtained from the geometry of the parent theory, by parameterizing AdS_3 with Poincare coordinates, and the geometry of the cigar becomes weakly curved at $k \to \infty$ since the radius tends to infinity. The relation is inverted at the opposite limit $k \to 0$. Notice that all this is consistent with the fact that μ_1 and μ_2 are interchanged under $k \leftrightarrow k^{-1}$ as follows from (2.16).

It was first observed in [4] that correlators computed in the bosonic $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ model coincide with those of the sine-Liouville model, whose fields are a compact boson X at the radius $R = \sqrt{2(k+2)}$ of the cigar, and a non-compact one ϕ with background charge. The stress tensor of the theory is

$$T = -\frac{1}{2}(\partial X)^2 - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{Q}{2}\partial^2\phi\,, \tag{2.18}$$

and the central charge is[5] $c = 2 + \frac{6}{k}$. The $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ primaries are mapped to the following primaries of sine-Liouville:

$$\Phi^j_{m,\bar{m}} = e^{im\sqrt{\frac{2}{k+2}}X_L + i\bar{m}\sqrt{\frac{2}{k+2}}X_R} e^{(j-1)Q\phi}\,. \tag{2.19}$$

The correlation functions are computed in the Coulomb formalism by using the screening charges

$$\mathcal{L}^{\pm}_{sl} = \mu_{sl} e^{\pm i\sqrt{\frac{k+2}{2}}(X_L - X_R)} e^{-\frac{1}{Q}\rho}\,, \tag{2.20}$$

which are primaries of ± 1 winding in the compact boson. The relevant computations can be found in [31] for the two-point functions and in [32] for some three point functions.[6] Using $\mathcal{L}^{\pm}_{sl}$ as screening charges, the anomalous momentum conservation for a two-point function is

$$2(j-1)Q - (n^- + n^+)\frac{1}{Q} = -Q\,, \tag{2.21}$$

where $n^{\pm}$ is the number of insertions of $\mathcal{L}^{\pm}_{sl}$.

An important result of [4] is that in the computation of N-point functions, with $N \geqslant 3$, the correlators can violate winding number by up to $N-2$ units. This result is easily obtained in the sine-Liouville side, as shown in [32], since the integrals to which the correlators

[4]Note that the values of j selected by (2.17) are nothing but $2j = 1 + n_1 + n_2 k$, which correspond to degenerate representations of the affine $SL(2,\mathbb{R})$ algebra.

[5]This central charge differs by 1 from the central charge in (2.1). This corresponds to the addition of a trivial boson as mentioned before.

[6]The analytical structure of correlators computed in [32], was recently shown in [33] to agree with that obtained in the $SL(2,\mathbb{R})$ approach for winding-violating processes.

reduce in the Coulomb formalism, to vanish when the difference $n^- - n^+$ does not have the correct value. The same result, of course, appears in the $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ side, though through some hard work [29, 34]. Note that as a consequence, the perturbative computation of a two-point function requires $n^- = n^+$, and thus an even amount of insertions of $\mathcal{L}_{sl}^{\pm}$.

In terms of strong-weak coupling duality, the sine-Liouville $\mathcal{L}_{sl}^{\pm}$ interaction belongs to the same side of the duality as the interaction Lagrangian $\mathcal{L}_2$. The relation between the coupling constants μ_{sl} and μ_1 was shown in [35] to be

$$\left(\frac{\pi\mu_{sl}}{k}\right)^{\frac{2}{k}} = \pi\mu_1 \frac{\Gamma(k^{-1})}{\Gamma(1-k^{-1})} \tag{2.22}$$

from which, using (2.16) it follows that

$$\left(\frac{\pi\mu_{sl}}{k}\right)^{2} = \pi\mu_2 \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(1-k)}. \tag{2.23}$$

This quadratic relation between μ_2 and μ_{sl} is consistent with KPZ scaling, since it is clear from (2.17) that any value of j which is screened with n_2 insertions of $\mathcal{L}_2$, can be equally screened with twice as much insertions of $\mathcal{L}_{sl}^{\pm}$.

2.3 The supersymmetric case

The supersymmetric version of the equivalence between the bosonic coset $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ and the sine-Liouville theory, is the celebrated mirror duality between the supersymmetric coset $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ and the $N=2$ Liouville theory. This duality was conjectured in [5]. It was then shown in [6] that the equivalence between the actions of this two $N=2$ theories follows from mirror symmetry, using the techniques of [36]. The same equivalence was shown in [7] to follow from an analysis of the dynamics of domain walls.

In both analyses of [6] and [7], crucial use is made of the explicit $N=2$ supersymmetry in the action. On the other hand, it is easy to see that the computational content of the duality, i.e., the identity of the correlators, is exactly the same as that of the bosonic version. In the supersymmetric coset $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ side, the primaries are obtained from the parent susy $SL(2,\mathbb{R})_k$ model. In the latter, one can decouple the fermions and shift the level $k \to k+2$ (see Appendix B), so that the NS primary states are the product of a bosonic $SL(2,\mathbb{R})_{k+2}$ primary and the fermionic vacuum. Descending to the coset involves removing a free $U(1)$ boson, so the correlators reduce to those of a purely bosonic model at level $k+2$, with the screening charges given by (2.13) and (2.15). In the Ramond sector, a coset primary is obtained by extracting the contribution of the gauged $U(1)$ from the product of an $SL(2,\mathbb{R})_{k+2}$ primary and a spin field of the decoupled fermions (see e.g. [13]). The computation reduces also to that of the bosonic case, but the dependence on the quantum number m is now shifted to $m \pm \frac{1}{2}$, as can be seen in (2.6).

The $N=2$ Liouville is an interacting theory for a complex chiral super-field Φ, with a Liouville potential. For some previous works on $N=2$ Liouville see [1, 2, 37, 38]. The super-field Φ has a non-compact real component ϕ with background charge, a compact

imaginary component Y, and the corresponding fermions. The stress tensor is

$$T = -\frac{1}{2}(\partial Y)^2 - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{Q}{2}\partial^2\phi - \frac{1}{2}\psi_{\rm Y}\partial\psi_{\rm Y} - \frac{1}{2}\psi_\phi\partial\psi_\phi \tag{2.24}$$

with a central charge given by (2.1). The compactness of Y actually allows to define the the following chiral/anti-chiral superfields in N=(2,2) superspace of coordinates $(z, \theta^\pm; \bar{z}, \bar{\theta}^\pm)$:

$$\Phi^\pm = \phi \pm i(Y_L - Y_R) + i\theta^\pm(\tilde{\psi}_\phi \mp i\tilde{\psi}_{\rm Y}) - i\bar{\theta}^\pm(\psi_\phi \pm i\psi_{\rm Y}) + i\theta^\pm\bar{\theta}^\pm F^\pm\,. \tag{2.25}$$

Correspondingly we have the following two $N = 2$ Liouville chiral interactions:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\pm_{N=2} &= \mu_2 \int d^2\theta^\pm e^{-\frac{1}{Q}\Phi^\pm} \\ &= \frac{\mu_2}{Q^2} e^{-\frac{1}{Q}[\phi \pm i(Y_L - Y_R)]}(\psi_\phi \pm i\psi_{\rm Y})(\tilde{\psi}_\phi \mp i\tilde{\psi}_{\rm Y})\,.\end{aligned} \tag{2.26}$$

In the expansion we have set to zero the auxiliary field $F^\pm$. Its presence only contributes contact terms in the correlators, so it can be ignored [39]. At this point it is convenient to bosonize the fermions as

$$\begin{aligned}\frac{\psi_\phi \pm i\psi_{\rm Y}}{\sqrt{2}} &= e^{\pm iH_L} \\ \frac{\tilde{\psi}_\phi \pm i\tilde{\psi}_{\rm Y}}{\sqrt{2}} &= e^{\pm iH_R}\end{aligned} \tag{2.27}$$

so that the interaction terms become[7]

$$\mathcal{L}^\pm_{N=2} = k\mu_2\, e^{-\frac{1}{Q}\phi} e^{\pm i[\frac{1}{Q}Y_L + H_L]} e^{\mp i[\frac{1}{Q}Y_R + H_R]}\,. \tag{2.28}$$

We will now rotate the two bosons Y_L and H_L as

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{k+2}{2}} X_L &= \frac{1}{Q}Y_L + H_L \\ \sqrt{\frac{k+2}{2}} Z_L &= -Y_L + \frac{1}{Q}H_L\end{aligned} \tag{2.29}$$

and similarly for X_R, Z_R. The two bosons X_L, Z_L commute and are canonically normalized. Making this change of variables in the interaction (2.28), we see that Z_L completely decouples from the interaction term, and $\mathcal{L}^\pm_{N=2}$ becomes identical to the bosonic $\mathcal{L}^\pm_{sl}$, as announced. This change of variables is actually the $N = 2$ Liouville equivalent of the chiral rotation in susy $SL(2,\mathbb{R})$ that allows to decouple the fermions by shifting the level k to $k + 2$. We again arrived to a form of the screening charge without fermions, and the coefficient of the compact boson in the interaction has been shifted from $\frac{1}{Q} = \sqrt{\frac{k}{2}}$ to $\sqrt{\frac{k+2}{2}}$. The NS primaries of the model are given by (2.19). The Ramond sector is treated as in the $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ case with the same result.

[7] The interaction (2.28) is the $N = 2$ point in a continuous family of theories studied in [31].

By bosonizing the fermions, we have lost explicit $N = 2$ supersymmetry at the level of the action, which was so important in the approaches of [6, 7]. This is not uncommon in conformal field theories, where fermions are typically bosonized in order to compute correlators[8]. In our case it is a signal that the reason for the identity of the correlators may not lie in the form of the action of the theory (see later).

A dual, non-chiral interaction term is also allowed by the N=2 symmetry of the N=2 Liouville theory :

$$\tilde{\mathcal{L}}_{N=2} = \tilde{\mu}_2 \int d^4\theta \; e^{\frac{Q}{2}(\Phi^+ + \Phi^-)}. \tag{2.30}$$

We now observe [38] that this screening charge coincides with the screening charge of the $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ super-coset, i.e. the supersymmetric equivalent of (2.13). Using the same steps of bosonization and field redefinitions one can reduce this equivalence to the bosonic one already discussed. Thus this circle of ideas clarifies the fact that the $N = 2$ Liouville duality proposed in [37] is nothing but the bosonic duality of [4] discussed in the previous section.

2.4 Bulk versus localized poles and self-duality

Poles in the correlators of our model can be either of "bulk" or "localized" type. Bulk poles correspond to interactions taking place along the infinite direction of the (asymptotic) linear dilaton. On the other hand, localized poles are associated to discrete normalizable states living near the tip of the cigar[9].

In particular, in the two-point function (2.5), the first two gamma functions of the numerator have bulk poles, and the last two gamma functions, with $m, \bar{m}$ dependence, have localized poles. We analyze here the NS two-point function, the R case being similar.

Let us consider first the bulk poles. The first gamma function has single poles at values $2j = 1, 2, \cdots$. From (2.17), we see that these values of j are screened by $n_1 = 2j - 1$ charges of type $\mathcal{L}_1$, and no $\mathcal{L}_2$ charges. In the Coulomb formalism, one first separates the non-compact field into $\phi = \phi_0 + \tilde{\phi}$, and then the integral of the zero mode ϕ_0 over its infinite volume gives the pole [41]. The second gamma function has poles at $\frac{(2j-1)}{k} = 1, 2....$ These values of j are screened in $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ by $n_2 = \frac{(2j-1)}{k}$ charges of type $\mathcal{L}_2$, and no $\mathcal{L}_1$ charges. In the sine-Liouville theory, these corresponds to having $n_{sl}^+ = \frac{(2j-1)}{k}$ charges of $\mathcal{L}_{sl}^+$, *and* the same amount of $\mathcal{L}_{sl}^-$. This follows from (2.21) and the condition $n_{sl}^- = n_{sl}^+$ for two-point functions.

The same phenomenon of having two families of bulk poles occurs in bosonic Liouville theory, where the two-point function has two sets of poles, their semi-classical origin being the insertion of either the Liouville interaction $\mu_L e^{-2b\phi}$ or its dual $\tilde{\mu}_L e^{-\frac{2}{b}\phi}$, with a relation between μ_L and $\tilde{\mu}_L$ similar to (2.16) [42].

[8] Explicit $N = 2$ supersymmetry at the level of the action is not necessary for a conformal field theory to have $N = 2$ supersymmetry in its spectrum and in its chiral algebra. For example, an $N = 2$ minimal model with central charge $c = 1$ can be realized through a free compact boson. We thank A.Giveon for comments on this point.

[9] See [40] for a recent discussion on this double nature of poles in the context of holographic descriptions of Little String Theories.

The bulk poles in (2.5) are simple poles, except at the level $k = 1$. At this level, corresponding to $c = 9$, both the first *and* second gamma functions in (2.5) have each a pole at $2j = 2, 3....$ This is signaled by the fact that the two dual charges $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ become equal for $k = 1$, including $\mu_1 = \mu_2$, so this the self-dual point of the theory. There is only one single bulk pole left at $k = 1$, that comes from the first gamma function of (2.5) at $2j = 1$. But this is the expected result since for this j no screening charges are needed to satisfy the anomalous momentum conservation (2.17), and the single pole comes from the infinite volume of the zero mode of ϕ.[10]

Notice that although one can interpret $\mathcal{L}_1$ as being a strong-weak dual to both $\mathcal{L}_2$ and $\mathcal{L}_{sl}^{\pm}$, the sine-Liouville interaction remains outside the liaison between the Wakimoto pair $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$, and this becomes more manifest at the self-dual point $k = 1$.

As mentioned, localized poles occur in the third and fourth gamma functions of the numerator of (2.5). They signal the presence of normalizable bound states in the strong coupling region associated with the residue of the singularity. We will consider here the case $m = \bar{m} = kw/2$, which is the relevant case for the D-brane analysis. At values of $r = kw/2 - j \geqslant 0$, corresponding to primaries of $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ coming from primaries of $SL(2,\mathbb{R})$, the fourth gamma function in the numerator of (2.5) has a localized pole. On the other hand, at values of $r = kw/2 - j < 0$ corresponding to primaries of $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ which are descendants of $SL(2,\mathbb{R})$, the two-point function has a zero from a pole in the third gamma function in the denominator of (2.5). We will return to this issue in sect. 4.1.

A qualitative feature that we wish to stress is that, for the theories with boundary that we will construct, *the two kinds of poles naturally decouple.* One-point functions of localized D0-branes will have only poles associated to the discrete normalizable states, and those of extended D1-branes will have only "bulk" poles associated to the zero-mode of the radial coordinate. Intuitively, on the one hand, the D0-branes are localized near the tip of the cigar, as are the normalizable bound states, and on the other hand, the D1-branes stretch along the radial direction and only couple to momentum modes, thus forbidding the coupling to discrete bound states that all carry a non-trivial winding charge. In the last case of D2-branes, we have both type of poles since these non-compact branes have a induced D0-brane charge localized at the tip of the cigar [43].

A similar decoupling phenomenon can be observed for the one-point functions of bosonic (and $N = 1$ [44]) Liouville theory. In this case, the ZZ one-point functions [45] have no poles and the FZZT one-point functions [46] have the bulk Liouville poles mentioned above.

2.5 The conformal bootstrap approach

We have reviewed above how perturbative calculations with different screening charges lead to the same correlators in both theories. The perturbative approach leads to physical insights related to the nature of the poles, strong-weak coupling regimes, etc. Also, in the

[10] The importance of the self-dual point at $k = 1$ has recently been stressed in [33]. The same self-duality phenomenon, with single poles becoming double poles, occurs in Liouville at $c = 25$ ($b = 1$). It would be interesting to see if these features of the $k = 1$ point are captured in the matrix model for the 2D black hole proposed in [15], which is an extension of a matrix model for $c = 25$ Liouville (coupled to $c = 1$ matter).

last years a new powerful approach to compute correlators in non-rational conformal field theories has appeared [47]. In non-rational conformal field theories the normalizable states have a continuous spectrum (in H_3^+ they correspond to the continuous representations of $SL(2,\mathbb{R})$) and appear in the intermediate channels of the correlators. The new approach consists in assuming that a general property of the conformal bootstrap, namely the factorization constraints, can be analytically continued to primary states corresponding to non-normalizable degenerate operators with discrete spectrum. This assumption, together with assuming that a strong-weak coupling duality is present in the theory (of the type between $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ above), leads to constraints for two and three point functions which have a unique solution. We will not review this method here, and we refer the reader to [47, 42, 46] for details.

A natural question is what new light can be shed on the equivalence between $N = 2$ Liouville and the susy $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ through these methods. This question is related to the more general issue of what role the action or the perturbative screening charges play in this approach. The method essentially reduces to a minimum the dynamical information needed to solve the theory. It asks as an input two pieces of information: *i)* the quantum numbers of a degenerate operator, which are given by the chiral symmetries of the theory, and *ii)* the value of certain fixed correlators involving one or two screenings. As an output we get the value of arbitrary correlators. In the sine-Liouville/ $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ context, this method has been exploited in [35] to obtain the relation (2.22) between coupling constants μ_1 and μ_{sl}.

Now, at least in some cases, it turns out that the second piece of input, namely, the perturbative fixed correlators, can be obtained by considering factorization constraints implied by higher level degenerate operators[11]. This means that the chiral algebra of the model would fully fix the correlators, through the family of its degenerate primaries. The argument holds both for bulk and boundary theories. In this way, for example, in [48], factorization constraints for the boundary H_3^+ theory were obtained without introducing a boundary action. In other words, under certain analyticity assumptions one could in principle achieve for non-rational conformal field theories, what is known to hold for rational ones, namely, that the chiral symmetries of the theory completely fix the correlation functions (under a certain prescription as to how left and right fields are glued). Notice that in our theory many factors of the two-point function (2.5) can be seen as the result of Fourier-transforming the same object from a basis of primaries where the $SL(2,\mathbb{R})$ chiral symmetry is realized through differential operators (see Appendix B). So the idea would be to push these symmetry constraints further to their very end.

Carrying this program in our case, the $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ and $N = 2$ Liouville theories would appear just as different realizations of the same chiral structure. The latter would be nothing but the common core of their respective chiral algebras, affine $SL(2,\mathbb{R})$ and $N = 2, c > 3$ Virasoro, which are [23] related by a free boson which does not affect the correlators. In appendix D we show how an $N = 2, c > 3$ algebra yields always an $SL(2,\mathbb{R})$ algebra by adding a free boson. Concerning the possible additional "geometrical"

[11] We thank V. Schomerus for this crucial comment.

information, namely, the way left and right chiral fields are glued, there is only one known modular invariant with $N = 2, c > 3$ spectrum [26, 8], up to discrete orbifolds acting on the N=2 charges.

That is the idea behind a central assumption of our paper, namely, that boundary CFT quantities computed in H_3^+, which descend naturally to $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$, describe also the boundary theory of $N = 2$ Liouville.

3. The boundary

The bosonic coset

Recall that for the bosonic coset we have that the one-point functions [43] are given in terms of the product of one-point functions for H_3^+ and the one-point functions for an auxiliary boson X (at radius $R = \sqrt{\alpha' k}$) which we can give the geometric interpretation of being the angular variable in the coset. The left and right chiral $U(1)$ quantum numbers of H_3^+ (labeled n_H and p_H) and X are related as:

$$\left(\frac{n_H + ip_H}{2}, -\frac{n_H - ip_H}{2}\right) = \left(\frac{n + kw}{2}, \frac{n - kw}{2}\right) \tag{3.1}$$

where the relative minus sign arises because we gauge axially. We then use the factorization of the one-point function:

$$\langle \Phi_{n,w}^{j,coset} \rangle = \langle \Phi_{n,w}^{j,H_3} \rangle \langle V_{n,w}^{X} \rangle \tag{3.2}$$

to obtain the one-point function in the coset [43]. Since X has the geometric interpretation of being the angular variable, Dirichlet conditions on X (i.e. Neumann conditions on the H_3^+ gauged current) have the interpretation of branes localized in the angular direction.[12] Note that we have assumed the ghost contribution to the one-point function to be trivial. (We can detect non-trivial renormalizations through the Cardy check.) Note also that our derivation is only valid for coset primaries that are associated to *primaries* in the parent theory. Coset primaries associated to descendents in the original model require special care.

The super-coset

For the super-coset, we can tell an analogous story. We have that the one-point functions are given by a product of one-point functions for H_3^+ at level $k+2$, for a $U(1)$ associated to the fermions, and for an auxiliary boson X that has again the interpretation of the angular direction. The one-point functions factorize, and we have:

$$\langle \Phi_{n,w}^{j,supercoset} \rangle = \langle \Phi_{n,w}^{j,H_3} \rangle \langle V_{n,w}^{X} \rangle \langle V_F \rangle. \tag{3.3}$$

We can be more precise about the relationship between the boundary condition for the various currents. The left and right $N = 2$ R-currents are given in terms of the total

[12] See next paragraph for a more rigorous argument based on BRST symmetry.

currents J^3, $\bar{J}^3$ as follows (see appendix A for conventions) :

$$J^R = \psi^+\psi^- + \frac{2J^3}{k} \text{ and } \quad \bar{J}^R = \tilde{\psi}^+\tilde{\psi}^- - \frac{2\bar{J}^3}{k}. \tag{3.4}$$

The *A-type* boundary conditions of the N=2 algebra [49] are defined through the *twisted* gluing conditions (in the closed string channel) : $J^R = \bar{J}^R$, $G^\pm = i\eta\tilde{G}^\mp$, $\eta = \pm 1$ being the choice of spin structure. Thus we see from (3.4) – and the expressions for the supercurrents – that the total currents of the $SL(2,\mathbb{R})$ algebra has to satisfy *untwisted* boundary conditions: $J^{3,\pm} = -\bar{J}^{3,\pm}$. As we know from [50, 48] this corresponds to AdS_2 branes in AdS_3. The axial super-coset has a BRST charge corresponding to the gauge-fixed local symmetry, whose expression is (see e.g. [51]) :

$$\mathcal{Q}_{BRST} = \oint \frac{dz}{2i\pi} \left\{ c\left(J^3 + i\partial X\right) + \gamma\left(\psi^3 + \psi^{\mathrm{X}}\right) \right\} - \oint \frac{d\bar{z}}{2i\pi} \left\{ \tilde{c}\left(\bar{J}^3 - i\bar{\partial} X\right) + \bar{\gamma}\left(\tilde{\psi}^3 - \tilde{\psi}^{\mathrm{X}}\right) \right\}. \tag{3.5}$$

Thus the preservation of the BRST current will impose that the extra boson X has the boundary conditions $\partial X = \bar{\partial} X$ in the closed string channel, i.e. Dirichlet conditions. The net effect of the (β, γ) super-ghosts will be to remove the contributions of the fermions ψ^3 associated to J^3 and ψ^{X} associated to X, leaving the fermions $\psi^\pm$ with (relative) A-type boundary conditions. In the cigar these are the D1-branes, extending to infinity [52, 43].

The *B-type* boundary conditions of the N=2 algebra [49] are defined through the *untwisted* gluing conditions (in the closed string channel) : $J^R = -\bar{J}^R$, $G^\pm = i\eta\tilde{G}^\pm$. Using the same lines of reasoning we find that these boundary conditions corresponds to *twisted* boundary conditions for the $SL(2,\mathbb{R})$ currents, $J^3 = \bar{J}^3, J^\pm = -\bar{J}^\mp$. These are either H_2 branes or S^2 of imaginary radius. In the former case we obtain D2-branes in the cigar, and in the latter D0-branes localized at the tip of the cigar [52, 43]. In both cases the extra field X has to satisfy Neumann boundary conditions.

To summarize, the one-point functions for the super-coset are as in [43] (but, importantly, the basis of Ishibashi states to which they correspond is a basis of Ishibashi states that preserves $N = 2$ superconformal symmetry and the level is shifted by two units), with an additional factor corresponding to two real fermions.

We move on to apply the dictionary above to the particular cases of D0-, D1- and D2-branes in the supersymmetric $N = 2$ theories. We will be using the quantum number notations traditional for the $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ super-coset, for convenience of comparison with (technically similar) results in the bosonic coset [43]. But it should always be kept in mind that the construction equally well applies to $N = 2$ Liouville theory, since the primaries in one theory can be associated to unique primaries in its dual and since the characters in both theories are identical.

4. D0-branes

The first type of branes we discuss are the B-type branes localized at the tip of the cigar $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ conformal field theory.

4.1 One-point function for the localized branes

These one point functions for the D0-branes of N=2 Liouville are similar to those of the ZZ branes [45] for bosonic Liouville theory. Their expression is (see Appendix B) :

$$\langle \Phi^j_{nw} \rangle^{D0}_u = \delta_{n,0} \frac{\Psi_u(j,w)}{|z-\bar{z}|^{\Delta_{j,w}}} \tag{4.1}$$

where

$$\begin{aligned}
\Psi^{NS}_u(j,w) &= k^{-\frac{1}{2}}(-1)^{uw}\nu^{\frac{1}{2}-j}\frac{\Gamma(j+\frac{kw}{2})\Gamma(j-\frac{kw}{2})}{\Gamma(2j-1)\Gamma(1-\frac{1-2j}{k})}\frac{\sin\frac{\pi}{k}u(2j-1)}{\sin\frac{\pi}{k}(2j-1)} \\
\Psi^{\widetilde{NS}}_u(j,w) &= i^w \Psi^{NS}_u(j,w) \\
\Psi^{R^\pm}_u(j,w) &= k^{-\frac{1}{2}}(-1)^{uw}\nu^{\frac{1}{2}-j}\frac{\Gamma(j+\frac{kw}{2}\pm\frac{1}{2})\Gamma(j-\frac{kw}{2}\mp\frac{1}{2})}{\Gamma(2j-1)\Gamma(1-\frac{1-2j}{k})}\frac{\sin\frac{\pi}{k}u(2j-1)}{\sin\frac{\pi}{k}(2j-1)}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

The normalization constant $k^{-\frac{1}{2}}(-1)^{uw}$ (and i^w) is fixed to satisfy the Cardy condition (see next section).

The numbers $u = 1, 2...$ are inherited from the one-point functions of localized D-branes in H_3^+, and they correspond to finite dimensional representations of $SL(2,\mathbb{R})$ of spin $j = -\frac{(u-1)}{2}$. The latter are only a subset of the degenerate representations of the $SL(2,\mathbb{R})$ affine algebra[13]. Remember that in the bosonic and $N = 1$ Liouville theory, the localized ZZ branes [45, 44] have *two* quantum numbers, associated to all the degenerate representations of the ($N = 1$) Virasoro algebra. This suggests that more general solutions of the factorization constraints in [48] are expected, which in turn would imply a bigger family of D-branes for our $N = 2$ model.

For a discrete state with pure winding, the numbers j and w are correlated as [8]

$$j + r = \frac{kw}{2} \tag{4.3}$$

with $r \in \mathbb{Z}$ for the NS sector and $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ for the R sector. Moreover, the unitarity bound (2.7) for j implies that for every r there is a unique pair of j, w such that (4.3) holds.

Given a j in the unitary bound (2.7) and satisfying (4.3), the one point functions (4.2) have poles at values of $r \geq 0, w > 0$. The case $r < 0$ should be treated differently, since from the point of view of the parent H_3^+ – or $SL(2,\mathbb{R})$ – theory, the states with $w > 0$ and $w \leqslant 0$ are of very different origin. Indeed in the former case, the equation (4.3) can be solved with $r \geqslant 0$, hence those states descend from flowed primaries of a lowest weight representation $\mathcal{D}_+^{j,w}$ of the $SL(2,\mathbb{R})$ affine algebra, see [21, 22]. Accordingly the formulae (4.2) are obtained from descent of the H_3^+ ones – as in [43] – valid for primaries of H_3^+. The one-point function has simple poles for all these states, coming form the second Gamma function in the numerator of (4.2). On the contrary, in the latter case $w \leqslant 0$, the solution of (4.3) is solved with $r < 0$. Those states, while primaries of the coset,[14]

[13] They correspond to $n_2 = 0$ in footnote 4.

[14] In fact these "diagonal" states are obtained from the lowest weight state of the representation. In a bosonic model they are: $(J^-_{-1})^r|j,j\rangle$. For the supersymmetric case, see appendix A.

are *descendents* of the $SL(2,\mathbb{R})$ flowed algebra. To use nevertheless the formulas of the H_3^+ branes, we have to use the isomorphism of representations : $\mathcal{D}_j^{+,w} \sim \mathcal{D}_{j'}^{-,w-1}$, with $j' = \frac{k+2}{2} - j$. Applying this mapping on the one-point functions, we find poles coming form the first Gamma function in the numerators of (4.2).

4.2 Cardy computation for the D0-branes

In this section we will verify that the one-point functions of localized D-branes obtained in section 4.1. satisfy the Cardy condition relating the open and closed string channels. We distinguish between three cases for the open string spectrum: NS, R and $\widetilde{\text{NS}}$. As usual [53], they correspond to NS, $\widetilde{\text{NS}}$ and R sectors in the closed string channel, respectively. We will show below the computation in detail for the NS/NS case. For the other cases, we state the result, and defer details to Appendix C.

For the annulus partition function of a NS open string stretching between a brane labeled by $u = 1, 2...$ and the basic brane with $u' = 1$ we consider

$$\begin{aligned} Z_{u,1}^{NS}(\tau,\nu) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}} ch_f^{NS}(u,r;\tau,\nu) \\ &= \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} \sum_{s\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \frac{1}{1+yq^s}(q^{\frac{s^2-su}{k}} y^{\frac{2s-u}{k}} - q^{\frac{s^2+su}{k}} y^{\frac{2s+u}{k}}) \ . \end{aligned} \tag{4.4}$$

We have taken the $N = 2$ NS characters (A.37) associated to the u-dimensional representations of $SL(2,\mathbb{R})$ of spin $j = -\frac{(u-1)}{2}$, and we have summed over the whole spectral flow orbit. For an open string stretching between two branes with general boundary conditions u and u', we expect, as in [54, 48, 43], that the partition function is obtained by summing $Z_{u,1}^{NS}$ over the irreducible representations appearing in the fusion of the representations associated to u and u'. Calling the latter $\mathbf{j} = |j|$ and $\mathbf{j}' = |j'|$, we have

$$\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}' = |\mathbf{j} - \mathbf{j}'| \ \oplus \ |\mathbf{j} - \mathbf{j}'| + 1 \oplus \cdots \oplus \ \mathbf{j} + \mathbf{j}' \, . \tag{4.5}$$

In terms of the u, u' indices, this decomposition implies

$$Z_{u,u'}^{NS}(\tau,\nu) = \sum_{n=0}^{\min(u,u')-1} Z_{u+u'-2n-1,1}^{NS}(\tau,\nu) \, . \tag{4.6}$$

In order to verify the Cardy condition on these branes, we will perform a modular transformation of $Z_{u,u'}^{NS}$ to the closed string channel[15]. Let us start with the $Z_{u,1}^{NS}$ partition function (4.4). We will parameterize ν as: $\nu = \nu_1 - \tau\nu_2$, $\nu_{1,2} \in \mathbb{R}$. The modular transform of $Z_{u,1}^{NS}(\tau,\nu)$ can be expressed as

$$\begin{aligned} e^{-i\pi\frac{c}{3}\frac{\nu^2}{\tau}} \ \ Z_{u,1}^{NS}(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}) &= \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} \\ \times \ \frac{1}{2i\pi}\left[\int_{\mathcal{C}_{-\epsilon}} + \int_{\mathcal{C}_{+\epsilon}}\right] dZ \ (-i\pi)\, e^{\pi Z + \frac{2i\pi\tau}{k}Z^2} \ \frac{\sinh(2\pi\frac{Z}{k}u)}{\cosh(\pi Z)} \frac{e^{i\pi(i\tau Z-\nu)}}{\cos\pi(i\tau Z-\nu)} \end{aligned} \tag{4.7}$$

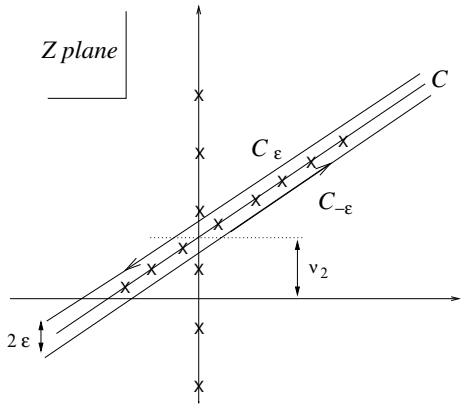

Figure 1: Choice of contour of integration (for $\tau_1 > 0$).

where the parameter ϵ is infinitesimal and positive. The contour encircles the line $\mathcal{C}:\ Z = iy/\tau + i\nu_2,\ y \in \mathbb{R}$ (see fig. 1). This identity is valid because we pick up all the poles of the integrand inside the contour. These are the zeroes of $\cos\pi(i\tau Z - \nu)$ which occur at $\nu - i\tau Z = y + \nu_1 = s \in \mathbb{Z} + 1/2$. At these poles, the contour integral yields the residues

$$-\frac{2}{\tau}\frac{e^{i\pi(s-\nu)/\tau}\ \sin(2\pi\frac{u}{k}(s-\nu)/\tau)\ e^{-i2\pi(s-\nu)^2/(k\tau)}}{e^{i\pi(s-\nu)/\tau} + e^{-i\pi(s-\nu)/\tau}}, \tag{4.8}$$

which lead to the identity (4.7). This identity is valid as long as there are no poles coming from the $\cosh\pi Z$ factor on the contour of integration. These special cases occur only for $\nu_2 \in \mathbb{Z} + 1/2$ and we assume that ν_2 does not take these values. We now note that we have the expansions:

$$\frac{e^{i\pi(i\tau Z-\nu)}}{2\cos\pi(i\tau Z-\nu)} = \sum_{w=0}^{\infty}(-1)^w e^{-2\pi i w(i\tau Z-\nu)} \quad \text{for} \quad |e^{-i2\pi(i\tau Z-\nu)}| < 1 \tag{4.9}$$

and

$$\frac{e^{i\pi(i\tau Z-\nu)}}{2\cos\pi(i\tau Z-\nu)} = -\sum_{w=-\infty}^{-1}(-1)^w e^{-2\pi i w(i\tau Z-\nu)} \quad \text{for} \quad |e^{+i2\pi(i\tau Z-\nu)}| < 1\,. \tag{4.10}$$

The expansion (4.9) is valid in $\mathcal{C}_{+\epsilon}$ and (4.10) is valid in $\mathcal{C}_{-\epsilon}$. Plugging these expansions into the right hand side of eq. (4.7) we get

$$e^{-i\pi\frac{c}{3}\frac{\nu^2}{\tau}} Z^{NS}_{u,1}(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}) = \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\sum_{w\in\mathbb{Z}}\int_{\mathcal{C}} dZ\ (-1)^w\ \frac{\sinh(2\pi\frac{Z}{k}u)}{\cosh(\pi Z)}e^{\pi Z}\ y^w q^{-iwZ+\frac{Z^2}{k}}\,. \tag{4.11}$$

When taking $\epsilon \to 0$ we added a minus sign to the contour $\mathcal{C}_{+\epsilon}$ and switched its direction. To obtain the corresponding expression for the general case (4.6) of $Z^{NS}_{u,u'}$, we use the identity

$$\sum_{n=0}^{\min(u,u')-1}\sinh\left(2\pi\frac{Z}{k}(u+u'-2n-1)\right) = \frac{\sinh(2\pi\frac{Z}{k}u)\sinh(2\pi\frac{Z}{k}u')}{\sinh(2\pi\frac{Z}{k})} \tag{4.12}$$

[15] The result for the NS/NS case follows as a particular case of an identity proved in [55, 56], and the other cases considered below ($\widetilde{\text{NS}}$/R, R/$\widetilde{\text{NS}}$ and $\mathbb{Z}_p$ orbifold) are variations thereof. We perform the computation here for completeness and in order to adapt the notation to our present purposes.

so we get

$$e^{-i\pi\frac{c}{3}\frac{\nu^2}{\tau}} Z^{NS}_{u,u'}(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}) =$$
$$\frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\sum_{w\in\mathbb{Z}}\int_{\mathcal{C}} dZ\ (-1)^w\ \frac{\sinh(2\pi\frac{Z}{k}u)\sinh(2\pi\frac{Z}{k}u')}{\cosh(\pi Z)\sinh(2\pi\frac{Z}{k})} e^{\pi Z}\ y^w q^{-iwZ+\frac{Z^2}{k}}\ . \quad (4.13)$$

Note that the exponent of q is complex. In order to get a real exponent for q we will *(i)* shift the $\mathcal{C}$ contour of integration by $\frac{iwk}{2}-i\nu_2$, for each term indexed by w and *(ii)* tilt it parallel to the real axis (see fig. 2). The resulting exponent of q will be that needed to get the characters of the continuous representations. As we shift the contour we pick poles which

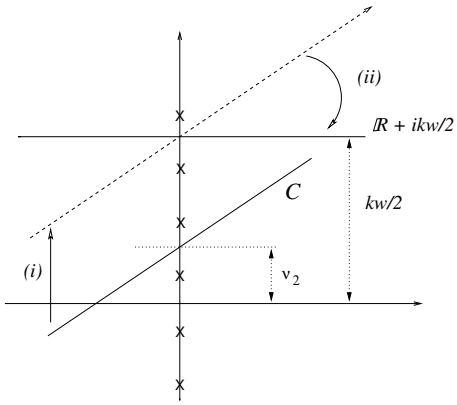

Figure 2: Change of contour of integration (case $w > \frac{k\nu_2}{2}$).

will make up the contributions of the $N=2$ discrete representations to the closed string channel amplitude. No poles are picked when tilting to the real axis. So the modular transform of $Z^{NS}_{u,u'}$ is decomposed into

$$e^{-i\pi\frac{c}{3}\frac{\nu^2}{\tau}} Z^{NS}_{u,u'}(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}) = Z^{NS,c}_{u,u'} + Z^{NS,d}_{u,u'}\ . \quad (4.14)$$

The first term comes from the continuous integral, which after shifting and tilting the contour, becomes

$$Z^{NS,c}_{u,u'} = \sum_{w\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty} dP \frac{e^{\pi(\frac{iwk}{2}+P)}\sinh(2\pi\frac{P}{k}u)\sinh(2\pi\frac{P}{k}u')}{(-1)^{w(u-u')}\cosh(\pi(P+i\frac{wk}{2}))\sinh(2\pi\frac{P}{k})} \quad (4.15)$$
$$\times\ q^{\frac{P^2+(wk/2)^2}{k}} y^w \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\ .$$

In the last factor we get a continuous character $ch^{NS}_c(P,\frac{wk}{2};\tau,\nu)$ (see (A.20)), corresponding to a pure winding state with $m=\frac{kw}{2}$, as expected. And since $ch_c(P,\frac{wk}{2};\tau,\nu)$ is even in P we can rewrite this as

$$Z^{NS,c}_{u,u'} = \sum_{w\in\mathbb{Z}}\int_0^{+\infty} dP \frac{2\sinh(2\pi P)\sinh(2\pi\frac{P}{k}u)\sinh(2\pi\frac{P}{k}u')}{(-1)^{w(u-u')}[\cosh(2\pi P)+\cos(\pi kw)]\sinh(2\pi\frac{P}{k})} ch^{NS}_c(P,\frac{wk}{2};\tau,\nu)\ . \quad (4.16)$$

This expression is equal to

$$Z^{NS,c}_{u,u'} = \sum_{w\in\mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dP\ \Psi_u\left(\frac{1}{2}-iP,-w\right)\Psi_{u'}\left(\frac{1}{2}+iP,w\right)\ ch_c^{NS}(P,\frac{wk}{2};\tau,\nu) \quad (4.17)$$

so we get the expected continuous spectrum from the overlap between D0 boundary states[16].

The poles picked up arise from the zeroes of the factor $\cosh \pi Z$ in (4.13), at values of Z such that $Z = is$ with $s \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$. Note that for irrational k the shifted contour will never fall on a pole, and we will assume this to be the case. The poles will contribute with positive sign for $s > \nu_2$ and with negative sign for $s < \nu_2$. Let us consider the former case. A given $s \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ will give a pole contribution for all the terms in (4.11) with $w \geqslant w_s$, where w_s is the only integer satisfying

$$w_s > \frac{2s}{k} > w_s - 1\,. \quad (4.18)$$

For poles corresponding to $s < \nu_2$, we get contributions for all the terms in (4.11) with $w \leqslant w_s - 1$, where w_s is also defined by (4.18). Summing all these residues we get

$$Z^{NS,d}_{u,u'} = -2\frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\left[\sum_{s>\nu_2}\sum_{w=w_s}^{\infty} - \sum_{s<\nu_2}\sum_{-\infty}^{w_s-1}\right]\frac{\sin\left(2\pi\frac{s}{k}u\right)\sin\left(2\pi\frac{s}{k}u'\right)}{(-1)^w\sin\left(2\pi\frac{s}{k}\right)}\ y^w q^{sw-\frac{s^2}{k}}\,. \quad (4.19)$$

Noting that $|yq^s| = e^{-2\pi\tau_2(s-\nu_2)}$ is smaller (bigger) than 1 for $s > \nu_2$ ($s < \nu_2$), we can sum on w for every s to get

$$Z^{NS,d}_{u,u'} = -2\sum_{s\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}}(-1)^{w_s}\frac{\sin\left(2\pi\frac{s}{k}u\right)\sin\left(2\pi\frac{s}{k}u'\right)}{\sin\left(2\pi\frac{s}{k}\right)}\ \frac{y^{w_s}q^{sw_s-\frac{s^2}{k}}}{1+yq^s}\frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\,. \quad (4.20)$$

This result can be recast in a more transparent fashion as follows. Calling $s = r+\frac{1}{2}$ with $r \in \mathbb{Z}$, a character of the $N=2$ NS discrete representations corresponding to a pure winding mode $J_0^3 = j+r = \frac{kw}{2}$ is given by (see (A.31))

$$ch_d^{NS}(j,r;\tau,\nu) = \frac{y^w q^{sw-\frac{s^2}{k}}}{1+yq^s}\frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\,. \quad (4.21)$$

Now, for every $r \in \mathbb{Z}$ there is *only one* value of w, such that $j = -r+\frac{kw}{2}$ lies in the improved unitary bound (2.7). This is exactly the value of w fixed by the condition (4.18). Moreover, *all* possible representations corresponding to pure winding states and such that j lies inside the unitary bound are covered by taking all $r \in \mathbb{Z}$ and fixing w_s as in (4.18). Calling j_r the spin of the representation associated to each r, then (4.20) is equal to

$$Z^{NS,d}_{u,u'} = \sum_{r\in\mathbb{Z}}(-1)^{w_r(u-u')}\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{k}(2j_r-1)u\right)\sin\left(\frac{\pi}{k}(2j_r-1)u'\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{k}(2j_r-1)\right)}\ ch_d^{NS}(j_r,r;\tau,\nu) \quad (4.22)$$

[16]Note that in the "out" boundary state we take the opposite $U(1)$ charge, as follows from CPT conjugation [57].

where w_s has been renamed w_r.

As shown in section 4.1, the product $\Psi_u(-j+1,-w)\Psi_{u'}(j,w)$ has a single pole for every discrete, pure-winding state. It is natural to expect the discrete part of the annulus amplitude (in the closed string channel) to be given by the residue of this pole. This is indeed the case, and one can check that (4.22) is equal to

$$Z^{NS,d}_{u,u'} = 2\pi \sum_{r\in\mathbb{Z}} Res\left[\Psi^{NS}_u(-j_r+1,-w_r)\Psi^{NS}_{u'}(j_r,w_r)\right]\ ch^{NS}_d(j_r,r;\tau,\nu)\,, \tag{4.23}$$

where the residue is computed when considering the bracketed expression as an analytic function of j. More details about this last step are given in section 7 that treats D2-branes. We have thus verified the Cardy consistency condition for the D0 branes in the NS/NS sector.

The computation for the R/$\widetilde{\text{NS}}$ and $\widetilde{\text{NS}}$/R cases is basically the same, *mutatis mutandi*. We state here the results and provide the details of the computation in Appendix C for the interested reader. For the open string sector we take the partition functions

$$Z^{R}_{u,1}(\tau,\nu) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} ch^{R}_f(u,r;\tau,\nu)\,, \tag{4.24}$$

$$Z^{\widetilde{NS}}_{u,1}(\tau,\nu) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} ch^{\widetilde{NS}}_f(u,r;\tau,\nu)\,, \tag{4.25}$$

and $Z^{R/\widetilde{NS}}_{u,u'}(\tau,\nu)$ is given by a sum as in (4.6). The modular transforms are

$$\begin{aligned} &e^{-i\pi\frac{c}{3}\frac{\nu^2}{\tau}} Z^{R}_{u,u'}(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}) = \\ &\sum_{w\in\mathbb{Z}}\int_0^{+\infty} dP\ \Psi^{\widetilde{NS}}_u\left(\frac{1}{2}-iP,-w\right)\Psi^{\widetilde{NS}}_{u'}\left(\frac{1}{2}+iP,w\right)\ ch^{\widetilde{NS}}_c(P,\frac{wk}{2};\tau,\nu) \\ &\quad +2\pi\sum_{r\in\mathbb{Z}} Res\left[\Psi^{\widetilde{NS}}_u(-j_r+1,-w_r)\Psi^{\widetilde{NS}}_{u'}(j_r,w_r)\right]\ ch^{\widetilde{NS}}_d(j_r,r;\tau,\nu)\,, \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} &e^{-i\pi\frac{c}{3}\frac{\nu^2}{\tau}} Z^{\widetilde{NS}}_{u,u'}(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}) = \\ &\sum_{w\in\mathbb{Z}}\int_0^{+\infty} dP\ \Psi^{R}_u\left(\frac{1}{2}-iP,-w\right)\Psi^{R}_{u'}\left(\frac{1}{2}+iP,w\right)\ ch^{R}_c(P,\frac{wk}{2};\tau,\nu) \\ &\quad +2\pi\sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} Res\left[\Psi^{R}_u(-j_r+1,-w_r)\Psi^{R}_{u'}(j_r,w_r)\right]\ ch^{R}_d(j_r,r;\tau,\nu)\,, \end{aligned} \tag{4.27}$$

where j_r and w_r are defined in the same way as for the NS/NS case, but notice that in the the R case r is half-integer. In both (4.26) and (4.27) the residues are again computed considering the bracketed expression as a function of j.

Some comments are in order.

- Although the Cardy condition holds for arbitrary boundary conditions u, u', there are reasons to argue that only the $u = u' = 1$ case corresponds to physical D-branes. Firstly, for $u, u' \neq 1$ the open string partition function is built from *non-unitary* $N = 2$ representations. An alternative argument was given in [43], based on comparing higher values of u to expectations for the physics of coinciding single D0-branes.

- From the case of the D0 branes we draw an important lesson, which will remain valid for the D1 and D2 branes. Although the open string partition function is built out of $N = 2$ characters, the product of the one point functions in the closed string channel is the same as that of the *bosonic* 2D black hole studied in [43] at level $k+2$. Using identities developed in [56] (see also [58]) to relate sums of characters of $N = 2$ representations to characters of a bosonic $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ model, one can expand the partition function (4.4) of a string stretching between a u-brane and a basic brane as

$$Z^{NS}_{u,1}(\tau,\nu) = \frac{1}{\eta(\tau)} \sum_{n,r\in\mathbb{Z}} z^{\frac{(j+r)}{k/2}+n} q^{\frac{k/2}{k+2}(\frac{(j+r)}{k/2}+n)^2} \left[\lambda_{j,r-n}(\tau) - \lambda_{-j+1,r-n-u}(\tau)\right] \quad (4.28)$$

where $j = -\frac{(u-1)}{2}$ and

$$\lambda_{j,r}(\tau) = \eta(\tau)^{-2} q^{-\frac{(j-\frac{1}{2})^2}{k}+\frac{(j+r)^2}{k+2}} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s q^{\frac{1}{2}s(s+2r+1)} \quad (4.29)$$

are the characters of the bosonic coset $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ descending from bosonic $SL(2,\mathbb{R})$ primaries with $J^3_0 = j + r$. On the other hand, the open string partition function of a bosonic open string stretching between similar D-branes in the bosonic cigar background is given by [43]

$$Z^{bosonic}_{u,1}(\tau,\nu) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \left[\lambda_{j,r}(\tau) - \lambda_{-j+1,r}(\tau)\right] . \quad (4.30)$$

Notice that the partition functions (4.28) and (4.30) differ by characters of a $U(1)$ boson. This is the $U(1)$ R-current of $N = 2$, who is the responsible for the extension of the bosonic $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ algebra into $N = 2$ [23]. It is a free boson, and it is coupled in a way that is of mild consequence to the modular matrix and to the one-point functions.

5. D0 branes in a $\mathbb{Z}_p$ orbifold

Before proceeding to the D1 branes, we will discuss a natural and interesting generalization of the D0 branes considered in the previous section.

In the annulus partition function (4.4) we summed over the whole infinite spectral flow orbit, and this was essential in order to obtain a discrete spectrum of $U(1)$ charges in the closed string channel. But a consistent result is also obtained if the sum is taken with

jumps of p units of spectral flow. As we will see, this correspond to D0 branes living in a $\mathbb{Z}_p$ orbifold of the original background, and in this framework we will be able to connect with previous works on boundary $N=2$ Liouville theory [10, 11, 12].

The orbifold acts freely as a shift of $2\pi/p$ on the angular direction of the cigar. As for a compact free boson, we expect that the orbifold theory is equivalent to the original one with the radius divided by p. This implies a spectrum of charges given by

$$J_0^3+\bar{J}_0^3=m+\bar{m}=\frac{kw}{p}\ , \quad J_0^3-\bar{J}_0^3=m-\bar{m}=pn. \tag{5.1}$$

Moreover, since the (infinite) volume of the target space decreases now by a factor $1/p$, we expect that the one point functions should be renormalized by $\sqrt{1/p}$. For k integer one can mod out the theory by $\mathbb{Z}_k$ (see below), and we get the spectrum of single cover of the vector coset $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ [25], which has the target space geometry of the trumpet, at first order in $1/k$.

By applying the same method of descent from H_3^+ we can compute the one-point function for this orbifold. For simplicity, we will study here the NS/NS case, with $u=u'=1$, and we omit the NS/u/u' labels.. The other sectors are similar.

We obtain the following one-point function for the D0-branes :

$$\Psi_{p,a}(j,w)=\frac{1}{\sqrt{pk}}e^{-2\pi i a\frac{w}{p}}\nu^{\frac{1}{2}-j}\frac{\Gamma(j+\frac{kw}{2p})\Gamma(j-\frac{kw}{2p})}{\Gamma(2j-1)\Gamma(1-\frac{1-2j}{k})} \tag{5.2}$$

where $a\in\mathbb{Z}_p$ is an additional quantum number of these D-branes and the phase $e^{-2\pi i a\frac{w}{p}}$ is fixed by the Cardy condition.

Let us start with the open string partition function for an open string stretching between two such D0-branes, for which we consider

$$\begin{aligned} Z_{p;a,a'}(\tau,\nu) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}p+a-a'} ch_f(1,r;\tau,\nu) \\ &= \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\left[\sum_{s\in\mathbb{Z}p+a-a'+\frac{1}{2}}\frac{q^{\frac{s^2-s}{k}}y^{\frac{2s-1}{k}}}{1+yq^s}-\sum_{s\in\mathbb{Z}p-1+a-a'+\frac{1}{2}}\frac{q^{\frac{s^2+s}{k}}y^{\frac{2s+1}{k}}}{1+yq^s}\right]. \end{aligned} \tag{5.3}$$

We have summed over all the representations of the spectral flow with p-jumps, with the starting point $r=a-a'$ coming from the additional parameters of these D0-branes.

In order to check the Cardy condition, we will perform a modular transformation of $Z_{p;a,a'}$ to the closed string channel. The computation is very similar to that of the previous section, so we will indicate only the major steps. We start with

$$\begin{aligned} e^{-i\pi\frac{c}{3}\frac{\nu^2}{\tau}}\ \ Z_{p;a,a'}(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}) &= \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\ \times \\ &\left\{\frac{1}{2i\pi}\left[\int_{\mathcal{C}_{-\epsilon}}+\int_{\mathcal{C}_{+\epsilon}}\right]dZ\ \frac{(-i\pi)}{p}\frac{e^{\pi Z+2\pi\frac{Z}{k}+\frac{2i\pi\tau}{k}Z^2}}{\cosh(\pi Z)}\frac{e^{-i\pi(\frac{\nu-i\tau Z-1/2-(a-a')}{p}+\frac{1}{2})}}{2\cos\pi(\frac{\nu-i\tau Z-1/2-(a-a')}{p}+\frac{1}{2})}\right. \\ &\left.-\ \frac{1}{2i\pi}\left[\int_{\mathcal{C}_{-\epsilon}}+\int_{\mathcal{C}_{+\epsilon}}\right]dZ\ \frac{(-i\pi)}{p}\frac{e^{\pi Z-2\pi\frac{Z}{k}+\frac{2i\pi\tau}{k}Z^2}}{\cosh(\pi Z)}\frac{e^{-i\pi(\frac{\nu-i\tau Z+1/2-(a-a')}{p}+\frac{1}{2})}}{2\cos\pi(\frac{\nu-i\tau Z+1/2-(a-a')}{p}+\frac{1}{2})}\right\}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

The contour of integration is the same as in the previous section, but now the last factor of the integrand has poles at values $\nu - i\tau Z = p\mathbb{Z} + a - a' + \frac{1}{2}$ in the first term, and at $\nu - i\tau Z = p\mathbb{Z} + a - a' - \frac{1}{2}$ for the second. Expanding the last factor of (5.4) as in (4.9)-(4.10), and taking $\epsilon \to 0$ in the contours $\mathcal{C}_{\pm\epsilon}$, yields,

$$e^{-i\pi\frac{c}{3}\frac{\nu^2}{\tau}} Z_{p;a,a'}(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}) = \\ \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\sum_{w\in\mathbb{Z}}\int_{\mathcal{C}} dZ\ e^{-2i\pi(a-a')\frac{w}{p}}\frac{\sinh(\pi(\frac{2Z}{k}-\frac{iw}{p}))}{p\cosh(\pi Z)}e^{\pi Z}\ y^{\frac{w}{p}}q^{-i\frac{wZ}{p}+\frac{Z^2}{k}}\ . \tag{5.5}$$

In order to express (5.5) as a sum over characters we shift the contour in each term by an amount of $\frac{iwk}{2p} - i\nu_2$. As in the previous section, we pick poles for $Z = is$, with $s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, corresponding to the discrete representations. Defining $w_s \in \mathbb{Z}$ as

$$w_s > \frac{2ps}{k} > w_s - 1\ , \tag{5.6}$$

the poles with $s > \nu_2$ ($s < \nu_2$) are picked with positive (negative) sign, by all the values $w \geq w_s$ ($w < w_s$) in (5.5). The sum of all the poles is

$$-2\frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\left[\sum_{s>\nu_2}\sum_{w=w_s}^{\infty} - \sum_{s<\nu_2}\sum_{-\infty}^{w_s-1}\right] e^{-2\pi i(a-a')\frac{w}{p}}\sin\left(2\pi\frac{s}{k}-\frac{\pi w}{p}\right)\ y^{\frac{w}{p}}q^{\frac{sw}{p}-\frac{s^2}{k}} \tag{5.7}$$

$$= -2\frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\sum_{s\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}_p} e^{-2\pi i(a-a')\frac{w_s+n}{p}}\sin\left(2\pi\frac{s}{k}-\pi\frac{(w_s+n)}{p}\right)\ \frac{y^{\frac{w_s+n}{p}}q^{\frac{s(w_s+n)}{p}-\frac{s^2}{k}}}{1+yq^s}\ .$$

Collecting the continuous and discrete contributions, we get finally

$$e^{-i\pi\frac{c}{3}\frac{\nu^2}{\tau}} Z_{p;a,a'}(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}) = \tag{5.8}$$
$$\sum_{w\in\mathbb{Z}}\int_0^{+\infty} dP\ \Psi_{p,a'}\left(\frac{1}{2}-iP,-w\right)\Psi_{p,a}\left(\frac{1}{2}+iP,w\right)\ ch_c^{NS}(P,\frac{kw}{2p};\tau,\nu)$$
$$+2\pi\sum_{r\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}_p} Res\left[\Psi_{p,a'}(-j_{r,n}+1,-w_s-n)\Psi_{p,a}(j_{r,n},w_s+n)\right]\ ch_d^{NS}(j_{r,n},r;\tau,\nu)\,,$$

where as usual the residue is computed when considering the bracketed expression as a function of j. The spins $j_{r,n}$ of the discrete representations are defined through

$$j_{r,n} + r = \frac{k(w_s+n)}{2p} \tag{5.9}$$

where $s = r + \frac{1}{2}$, and $j_{r,n}$ satisfies the unitary bound (2.7). Moreover, from (5.6) it follows that the width $k/2$ of the unitary bound (2.7) is sliced into p intervals, and for each $n \in \mathbb{Z}_p$ we have

$$\frac{1}{2}+\frac{kn}{2p} < j_{r,n} < \frac{k(n+1)}{2p}+\frac{1}{2}\,. \tag{5.10}$$

Finally, note that the choice of a in the open string channel, which is a statement about the *spectrum*, becomes a *phase* in the closed string channel.

The $\mathbb{Z}_k$ and $\mathbb{Z}_\infty$ cases

In this context, we can now construe previous studies of D-branes in $N = 2$ Liouville theory as particular cases of the orbifold discussed here.

In [10] D-branes were built in a $N = 2$ model with rational central charge $c = 3 + \frac{6K}{N}$, with K, N positive integers, and the D0-brane open string partition function was taken with jumps of N spectral flow units (for $u = u' = 1$). This corresponds to level $k = \frac{N}{K}$ and $p = N$ in our case. In particular, for $K = 1$, the asymptotic radius shrinks from $R = \sqrt{k\alpha'}$ to $\frac{R}{k} = \frac{\alpha'}{R}$, which is the T-dual radius[17]. Indeed, notice that for $p = k$, the spectrum of pure winding modes in (5.1) becomes pure momentum in the T-dual picture. Note that we strengthen some of the results in [10], since our construction is explicitly based on branes which have been checked to satisfy factorization constraints in the parent theory [48]. Moreover, our results our based on a systematic analysis of a solution to the branes preserving the full chiral algebra in the parent theory, and do not depend on the central charge being rational. Apart from these bonuses, we also clarified the connection to the semi-classical geometrical (mirror) cigar-picture.

Another interesting case to consider is the limit $p \to \infty$. This corresponds to the cigar radius shrinking to zero, so that the spectrum (5.1) of m for pure winding states becomes continuous, thus yielding a continuum of R-charges in the closed string channel. As shown in [25] it corresponds to the vector gauging of the *universal cover* of $SL(2, \mathbb{R})$.

At the level of the Cardy computation, naively taking the limit $p \to \infty$ in (5.8) gives zero in the closed string channel, since $\Psi_{p,a}(j, w)$ goes to zero, see (5.2). The correct way of proceeding is to notice that equation (5.5) becomes a Riemann sum, which leads to an integral over $t = \frac{w}{p} \in \mathbb{R}$. We can moreover express $t = x + g,\ g \in \mathbb{Z},\ x \in [0, 1)$. The sum over w in (5.5) becomes

$$\frac{1}{p}\sum_{w} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dt \longrightarrow \int_0^1 dx \sum_{g\in\mathbb{Z}} . \tag{5.11}$$

One can show that the resulting expression for the closed string channel is equivalent to starting with

$$Z_{1,1}(x; \tau, \nu) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i x r} ch_f^{NS}(1, r; \tau, \nu) , \tag{5.12}$$

and computing

$$\int_0^1 dx\ e^{-2\pi i x d} e^{-i\pi \frac{c}{3}\frac{\nu^2}{\tau}} Z_{1,1}(x, -\frac{1}{\tau}, \frac{\nu}{\tau}) , \tag{5.13}$$

where $d \in \mathbb{Z}$ depends on the precise way the limit is taken in (5.11). The computation of (5.13) itself can be performed with an identity proved in [55, 56], to which we refer for details. The resulting expression can be found in [12].

[17] In the case of rational k there will be additional discrete terms in the closed string channel partition function, coming from poles falling exactly on the displaced contour of section 4. But taking them into account does not change the orbifold picture.

6. D1 branes

In this section, we check the relative Cardy condition for D1-branes in the $N = 2$ Liouville/supersymmetric coset conformal field theory. In this and the next sections, we will work in the NS sector. The other sectors are obtained straightforwardly. Following the general logic, we assume that the one-point functions for closed string primaries in the presence of a D1-brane labeled by the parameters (r, θ_0) is given by (see Appendix B):

$$\langle \Phi^j_{nw}(z,\bar{z})\rangle^{D1}_{r,\theta_0} = \delta_{w,0}\,\frac{\Psi_{r,\theta_0}(j,n)}{|z-\bar{z}|^{\Delta_{j,n}}}\ , \tag{6.1}$$

with

$$\Psi_{r,\theta_0}(j,n) = \mathcal{N}_1 e^{in\theta_0}\left\{e^{-r(-2j+1)} + (-1)^n e^{r(-2j+1)}\right\}\nu^{\frac{1}{2}-j}\,\frac{\Gamma(-2j+1)\Gamma(1+\frac{1-2j}{k})}{\Gamma(-j+1+\frac{n}{2})\Gamma(-j+1-\frac{n}{2})} \tag{6.2}$$

We put a normalization factor $\mathcal{N}_1$ up front that will be fixed during the Cardy computation.

Note that the only poles in the one-point function originate from infinite volume divergences (i.e. they are bulk poles). Thus the only contributions to the closed string channel amplitude between two D1-branes originate from continuous representations (unlike the D0- and D2-brane computations where poles associated to discrete representations require special attention). The closed string channel amplitude will only contain contributions proportional to the continuous character:

$$ch^{NS}_c(P,\frac{n}{2};-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}) = \tilde{q}^{\frac{P^2}{k}+\frac{n^2}{4k}}\tilde{y}^{\frac{n}{k}}\,\frac{\vartheta_3(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau})}{\eta^3(-\frac{1}{\tau})}. \tag{6.3}$$

We compute the closed string channel amplitude between two branes with identical boundary conditions both labeled by (r, θ_0), for simplicity. The computation can then easily be generalized to include the case of differing boundary conditions, following [59]. For our case, we find the partition function:

$$\begin{aligned} Z^{D1}_{r,\theta_0} &= \int_0^\infty dP \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{r,\theta_0}(P,n)\Psi_{r,\theta_0}(-P,-n)\ ch_c\left(P,\frac{n}{2};-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}\right) \\ &= \frac{4\mathcal{N}_1^2}{k}\int_0^\infty dP\ \frac{1}{\sinh 2\pi P \sinh\frac{2\pi P}{k}} \\ &\quad \left(\sum_{n\in 2Z}\cos^2 2rP\cosh^2\pi P\ ch^{NS}_c(P,\frac{n}{2}) + \sum_{n\in 2Z+1}\sin^2 2rP\sinh^2\pi P\ ch^{NS}_c(P,\frac{n}{2})\right). \end{aligned} \tag{6.4}$$

We modular transform the characters to obtain the annulus amplitude suitable for interpretation in the open string channel:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{ci\pi\nu^2}{3\tau}} Z^{D1}_{r,\theta_0} &= \frac{8\mathcal{N}_1^2}{k}\int_0^\infty dP\int_0^\infty dP' \sum_{w\in\frac{\mathbb{Z}}{2}}\cos\frac{4\pi PP'}{k} \\ &\quad \times\frac{\cos^2 2rP\cosh^2\pi P + (-1)^{2w}\sin^2 2rP\sinh^2\pi P}{\sinh 2\pi P\sinh\frac{2\pi P}{k}}\ ch^{NS}_c(P',kw;\tau,\nu) \end{aligned} \tag{6.5}$$

Since the transformation properties of continuous $N = 2$ characters are analogous to the transformation properties of purely bosonic coset characters, we can discuss the results similarly as for the bosonic coset [43]. To make the discussion more explicit, and in particular to match on to the boundary reflection amplitude, we follow [48, 43] to check the relative Cardy condition. We compare the regularized density of states obtained in the open string channel with the one we expect from a reflection amplitude which is the natural $N = 2$ generalization of the reflection amplitude in [48, 59, 43] (which satisfies factorization). To this end, we subtract a reference amplitude labeled by r^*, and use trigonometric identities and the change of variables $t = 2\pi P$ to obtain:

$$e^{-\frac{ci\pi\nu^2}{3\tau}}(Z^{D1}_{r,\theta_0} - Z^{D1}_{r^*,\theta_0}) = \frac{8\mathcal{N}_1^2}{k}\int_0^\infty dP'\ ch_c^{NS}(P', kw)\ \times \tag{6.6}$$
$$\frac{\partial}{\partial P'}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\frac{k}{16\pi}\frac{\cosh^2\frac{t}{2} - (-1)^{2w}\sinh^2\frac{t}{2}}{\sinh t\sinh\frac{t}{k}}\left\{\sin\frac{2t}{k}(P' + \frac{rk}{\pi}) + \sin\frac{2t}{k}(P' - \frac{rk}{\pi}) - (r \to r^*)\right\}.$$

To link the relative density of continuous states in the open string channel to the boundary reflection amplitude it is convenient to define the special functions:

$$\begin{aligned}\log S_k^{(0)}(x) &= i\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(\frac{\sin\frac{2tx}{k}}{2\sinh\frac{t}{k}\sinh t} - \frac{x}{t}\right),\\ \log S_k^{(1)}(x) &= i\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(\frac{\cosh t\sin\frac{2tx}{k}}{2\sinh\frac{t}{k}\sinh t} - \frac{x}{t}\right).\end{aligned} \tag{6.7}$$

We can then write our ansatz for the boundary reflection amplitudes as:

$$\begin{aligned}R(P, w\in\mathbb{Z}|r) &= \nu^{iP}\frac{\Gamma_k^2(-\frac{1}{2} - iP + k)\Gamma_k(2iP + k)S_k^{(0)}(P + \frac{rk}{\pi})}{\Gamma_k^2(\frac{1}{2} + iP + k)\Gamma_k(-2iP + k)S_k^{(0)}(-P + \frac{rk}{\pi})}\\ \tilde{R}(P, w\in\mathbb{Z} + \frac{1}{2}|r) &= \nu_k^{iP}\frac{\Gamma_k^2(-\frac{1}{2} - iP + k)\Gamma_k(2iP + k)S_k^{(1)}(P + \frac{rk}{\pi})}{\Gamma_k^2(\frac{1}{2} + iP + k)\Gamma_k(-2iP + k)S_k^{(1)}(-P + \frac{rk}{\pi})}.\end{aligned} \tag{6.8}$$

For the definition of the generalized gamma-functions, we refer to e.g. [43] – they immediately drop out of the computation of the relative partition function. Using the reflection amplitudes (and the fact that they are parity odd) we can show that the relative Cardy condition holds:

$$\begin{aligned}e^{-\frac{ci\pi\nu^2}{3\tau}}(Z^{D1}_{r,\theta_0} - Z^{D1}_{r^*,\theta_0}) = \frac{\mathcal{N}_1^2}{\pi i}\int_0^\infty dP'\Bigg\{&\sum_{w\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\partial}{\partial P'}\log\frac{R(P, w|r)}{R(P, w|r^*)}\right)ch_c^{NS}(P', kw)\\ &+\sum_{w\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial P'}\log\frac{\tilde{R}(P, w|r)}{\tilde{R}(P, w|r^*)}\right)ch_c^{NS}(P', kw)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{6.9}$$

To obtain agreement with the density of states expected on the basis of the boundary reflection amplitude, we can fix $\mathcal{N}_1^2 = 1/2$. Note that in the course of our computation, we

have made use of the simple fact that the standard definition of mass in the open string channel differs by a factor 4 from the mass in the closed string channel which leads us to interpret the open strings as having half-integer or integer winding number which is natural in terms of the D1-brane semi-classical geometry [43]. We have thus verified that the relative Cardy condition is satisfied by our $D1$-branes. In summary, in this section we have argued that the relative Cardy condition holds, given the one-point functions for the D1-branes we started out with, and the extension of the boundary reflection amplitudes of [48, 59] to $N = 2$ theories. The computation follows the lines of [43] due to the close connection between (continuous) $N = 2$ characters and those of the bosonic coset, and their modular properties (see comment at the end of Section 4). Note that the D1-branes couple to continuous bulk states with zero winding only.

7. D2-branes

In this section, we analyze the Cardy condition for the D2-branes which we can construct from the H_2 branes in Euclidean AdS_3. They correspond to type B branes w.r.t. the N=2 superconformal algebra. We find some puzzling features when trying to perform the Cardy check. Following [43] and the general logic outlined before, we propose the following one-point function for the D2-branes parameterized by σ, in the NS sector :

$$\langle \Phi^j_{nw}(z,\bar{z})\rangle^{D2}_{\sigma} = \delta_{n,0}\,\frac{\Psi_\sigma(j,w)}{|z-\bar{z}|^{\Delta_{j,w}}}\ , \quad \text{with :}$$
$$\Psi_\sigma(j,w) = \mathcal{N}_2\,\nu^{\frac{1}{2}-j}\,\frac{\Gamma(j+\frac{kw}{2})\Gamma(j-\frac{kw}{2})}{\Gamma(2j-1)\Gamma(1-\frac{1-2j}{k})}\,\frac{e^{i\sigma(1-2j)}\sin\pi(j-\frac{kw}{2})+e^{-i\sigma(1-2j)}\sin\pi(j+\frac{kw}{2})}{\sin\pi(1-2j)\sin\pi\frac{1-2j}{k}} \tag{7.1}$$

This one point function has poles corresponding to the discrete representations, and therefore will couple both to localized and asymptotic states. This is expected on general grounds since these D2-branes carry D0-brane charge.

The annulus partition function in the closed string channel, for general Casimir labeled by j, in the NS sector, becomes:

$$Z^{D2}_{\sigma\sigma'}(-1/\tau,\nu/\tau) = -k\mathcal{N}_2^2\int dj\sum_{w\in\mathbb{Z}}\frac{ch^{NS}\left(j,\frac{kw}{2};-1/\tau,\nu/\tau\right)}{\sin\pi(1-2j)\sin\pi\frac{(1-2j)}{k}} \tag{7.2a}$$
$$\Big\{2\cos(\sigma+\sigma')(1-2j)-2\cos(\sigma-\sigma')(1-2j)\cos 2\pi j \tag{7.2b}$$
$$+\frac{2\cos(\sigma-\sigma')(1-2j)\sin^2 2\pi j}{\cos\pi kw-\cos 2\pi j}-\frac{2i\sin(\sigma-\sigma')(1-2j)\sin 2\pi j\sin\pi kw}{\cos\pi kw-\cos 2\pi j}\Big\} \tag{7.2c}$$

We can read from this expression that the different terms will contribute in a very different fashion.

7.1 D1-like contribution

The two terms of the second line (7.2b) will give a contribution similar to the D1-branes (which is an expected contribution, on the basis of the fact that the D2-branes also stretch along the radial direction), with imaginary parameter though. Explicitely, we have in the closed channel :

$$Z^{D2,(b)}_{\sigma\sigma'}(-1/\tau,\nu/\tau) = 2k\mathcal{N}_2^2 \int_0^\infty dP \sum_{w\in\mathbb{Z}} \frac{ch_c^{NS}\left(P,\frac{kw}{2};-1/\tau,\nu/\tau\right)}{\sinh 2\pi P \sinh 2\pi P/k} \left[\cosh 2P(\sigma+\sigma') + \cosh 2P(\sigma-\sigma')\cosh 2\pi P\right] . \quad (7.3)$$

As for the D1-branes, we consider the *relative partition function* w.r.t. the annulus amplitude for reference branes of parameters (σ_0,σ_0'). Going through the same steps as in the previous sections, we obtain the open string channel amplitude :

$$Z^{D2,(b)}_{\sigma\sigma'}(\tau,\nu) = 4k\mathcal{N}_2^2 \int dP' \frac{\partial}{2i\pi\,\partial P'} \log\left\{\frac{R(P'|i\frac{\sigma+\sigma'}{2})\,\tilde{R}(P'|i\frac{\sigma-\sigma'}{2})}{R(P'|i\frac{\sigma_0+\sigma_0'}{2})\,\tilde{R}(P'|i\frac{\sigma_0-\sigma_0'}{2})}\right\} \sum_{n\in\mathbb{Z}} ch_c^{NS}(P',n;\tau,\nu) \quad (7.4)$$

in terms of reflections amplitudes similar as before, see (6.8), but with imaginary parameters $i(\sigma\pm\sigma')/2$. We fix the normalization constant to $\mathcal{N}_2^2 = \frac{1}{4k}$.

7.2 D0-like contribution

Now we concentrate on the last two terms (7.2c) of the annulus amplitude. As we will see this will give a contribution similar to those of D0-branes, hence with both discrete and continuous contributions. Let's first concentrate on the latter. Since the last term is odd in w, it will cancel from the amplitude and we are left with :

$$Z^{D2,(c)}_{\sigma\sigma',cont}(-1/\tau,\nu/\tau) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty dP \sum_{w\in\mathbb{Z}} \frac{\cosh 2P(\sigma-\sigma')\sinh^2 2\pi P\; ch_c^{NS}\left(P,\frac{kw}{2};-1/\tau,\nu/\tau\right)}{(\cosh 2\pi P + \cos\pi kw)\sinh 2\pi P \sinh 2\pi P/k} \quad (7.5)$$

Assuming that $\sigma-\sigma' = 2\pi m/k$, $m\in\mathbb{Z}$, we recognize a D0 amplitude for two branes of same parameter m :

$$Z^{D2,(c)}_{\sigma\sigma',cont}\left(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}\right) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty dP \sum_{w\in\mathbb{Z}} \frac{\left(2\sinh^2(2\pi Pm/k)+1\right)\sinh 2\pi P}{(\cosh 2\pi P + \cos\pi kw)\sinh 2\pi P/k} \times \quad ch_c^{NS}\left(P,\frac{kw}{2};-1/\tau,\nu/\tau\right) , \quad (7.6)$$

up to the constant term in the bracketed expression, that will drop from the relative partition function. The normalization $-1/2$ of this expression has to be compared with the normalization $(-)^{w(m-m)} = 1$ of the D0 computation (4.16).

Discrete representations

We can also make the identification with a D0-like contribution as follows. First we consider the more straightforward case $w > 0$. Then we pick the poles of the discrete representations in the domain : $j \in D = \left(\frac{kw}{2} - \mathbb{N}\right) \cap \left]\frac{1}{2}; \frac{k+1}{2}\right[$. For each pole we will have a contribution of 2π times the residue :

$$-\frac{1}{2}\sum_{j\in D}\sum_{w>0}(-)^{j-\frac{kw}{2}}\frac{\cos 2\pi m\frac{2j-1}{k}\ \sin\pi(2j-1) - i\sin 2\pi m\frac{2j-1}{k}\ \sin\pi kw}{\sin\pi(j+\frac{kw}{2})\sin\pi\frac{2j-1}{k}}ch_d^{NS}(j,-kw/2-j) \tag{7.7}$$

We write $j = \frac{kw}{2} - r$, with $r \in \mathbb{N}$. Then for every r, there is only one value of w, that we'll call w_r such that j is in the correct range. Explicitely w_r is given by: $w_r = \lfloor\frac{2r+1}{k}\rfloor + 1$. We call also j_r the value of j that has been picked. With this procedure we get :

$$-\frac{1}{2}\sum_{r\in\mathbb{N}}(-)^{w_r}\frac{\cos 2\pi m\frac{2r+1}{k} - i\sin 2\pi m\frac{2r+1}{k}}{\sin\pi\frac{2r+1}{k}}ch_d^{NS}(j_r,r) \tag{7.8}$$

Let us now consider the case $w \leqslant 0$. In this case we have to use the isomorphism of representations : $\mathcal{D}_j^{+,w} \simeq \mathcal{D}_{j'}^{-,w-1}$, with $j' = \frac{k+2}{2} - j$. We have then $j' = -\frac{k}{2}(w-1) - r'$, $r' \in \mathbb{N}$, and the value of w is fixed to : $w_{r'} = -\lfloor\frac{2r'+1}{k}\rfloor$. This leads to the following contribution to the annulus amplitude:

$$-\frac{1}{2}\sum_{r'\in\mathbb{N}}(-)^{w'_r-1}\frac{\cos 2\pi m\frac{2r'+1}{k} + i\sin 2\pi m\frac{2r'+1}{k}}{\sin\pi\frac{2r'+1}{k}}ch_d^{NS}(j'_{r'},-r') \tag{7.9}$$

Then it is possible to add the two contributions, which cancels the imaginary part, and leaves us with :

$$Z^{D2,(c)}_{\sigma\sigma',disc}\left(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{r\in\mathbb{Z}}(-)^{\lfloor\frac{2r+1}{k}\rfloor}\frac{2\sin^2 2\pi m\frac{r+1/2}{k} - 1}{\sin 2\pi\frac{r+1/2}{k}}ch_d^{NS}\left(j_r,r;-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}\right). \tag{7.10}$$

This is again $-1/2$ of the expression of the amplitude for two D0's of parameter m, eq. (4.22), up to the irrelevant constant term.

Some comments on D2-branes physics

The following comments are in order:

- in the computation we assumed that the difference of the parameters of the D2 in the annulus amplitude is quantized: $\sigma' - \sigma = 2\pi m/k$, $m \in \mathbb{Z}$. This relative quantization condition is discussed in [43] for the bosonic coset. Indeed the difference of the D2-branes parameters is the net induced D0-charge, hence it should be quantized. To be more precise it is believed that a D2-brane with parameter σ' is a bound state of a brane of parameter σ with m D0-branes (for the $\sigma' > \sigma$ case , otherwise one has to reverse the picture)

- as a corollary, the one-point functions for the D2-branes have poles *both* of the localized type and of the bulk type

- the computation of the annulus amplitude gives a continuous spectrum of open strings attached to the D2-branes, with a sensible density of states, and also a contribution similar to the D0 – see the previous remark about the induced D0 charge – but with a normalization $(-1/2)$ which complicates the task of making sense of the open string spectrum, and blurs the physical picture of bound states. The only open string spectrum leading to a good physical picture would seem to correspond to two D2-branes with the same parameter σ.

Clearly further study of the physics of D2-branes is needed to clarify their interpretation.

8. Conclusions

We constructed D-branes in $N = 2$ Liouville theory and the $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ super-coset conformal field theory, and checked the (relative) Cardy condition as well as consistency with the proposed boundary reflection amplitudes, which were proven earlier to satisfy the factorization constraints. The one-point functions that we constructed remarkably decouple the poles in bulk amplitudes (notably the reflection amplitude) into poles associated to infinite volume and the ones associated to normalizable discrete states. It would be interesting to investigate whether the boundary decoupling phenomenon aids in understanding more aspects of the conjectured holographic duality in the (doubly scaled) little string theory.

We have shown (for the particular but extendable) case of the D0-branes how to generalize the results to other sectors of the supersymmetric Hilbert space, and to orbifolds of the cigar conformal field theory.

We have pointed out throughout this work some similarities of the one-point functions for $N = 2$ Liouville with those of the $N = 0, 1$ cases, like the decoupling of the bulk poles. It would be interesting to see also whether the interesting relations uncovered in [60, 61] between the boundary states associated to localized and extended branes have also any manifestation in the $N = 2$ theory.

In appendices, we argued for the general use of the $SL(2,\mathbb{R})$ symmetry that can be obtained by enhancing $N = 2$ theories with an orthogonal free scalar, and we suggested that this tool provides some technical support for an attempt to interpret the variables $(x, \bar{x})$ – parameterizing the $SL(2,\mathbb{R})$ quantum numbers in position space on the boundary of AdS_3 – as new worldsheet variables. We showed in great detail the fact that super-coset characters agree with $N = 2$ characters, and the $N = 2$ spectral flow has a natural interpretation in terms of $SL(2,\mathbb{R})$ quantum numbers.

Note that we have constructed D-branes for generic values of the level k. It is known that the conformal field theory correlators depend strongly on whether k is rational or irrational (for instance via the shift equations, or the structure of the poles in the bulk correlators). It seems important to further clarify the relation between the construction of branes at rational and irrational values of k (for instance by further comparing the techniques developed in [56] to the results of [43]), as well as the dependence of bulk correlators on this most intriguing distinguishing feature.

The branes we constructed form an integral part of the construction of D-branes in non-compact non-trivially curved supersymmetric string theory backgrounds. One particular application amongst these is the construction of D1-branes and D3-branes in the Little String Theory background in the double scaling limit (see also e.g. [62, 63, 64]). Indeed, when we consider the doubly scaled limit for NS5-branes which are evenly distributed over a topologically trivial circle, we obtain a closed string background which is supposed to represent a holographic dual of the Higgs phase of the Little String Theory living on the NS5-branes [5], whose partition function has been studied in [26, 8]. The role of the W-bosons in the LST is played by the D1-branes stretching between the NS5-branes. One can construct at least the one-point functions corresponding to these D-branes by combining the D0-brane in the $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ theory and a D1-brane in the supersymmetric $SU(2)/U(1)$ coset theory, properly taking into account the discrete orbifold operation. The construction of these one-point functions is now straightforward. We will return to some of these issues in the near future [65].

Acknowledgments

We thank Shmuel Elitzur, Angelos Fotopoulos, Stefan Fredenhagen, Gastón Giribet, Amit Giveon, Anton Kapustin, Elias Kiritsis, Costas Kounnas, David Kutasov, Marios Petropoulos, Boris Pioline, Sylvain Ribault, Adam Schwimmer and especially Volker Schomerus for comments and discussions. AP thanks the Laboratoire de Physique Théorique de l'École Normale Supérieure for hospitality during the first part of this work, and the organizers of the ESI Workshop "String Theory in Curved Backgrounds and Boundary Conformal Field Theory". AP is supported by the Horowitz Foundation and by an ESI Junior Fellowhip. This work is supported in part by the Israeli Science Foundation and by the EEC under the contracts HPRN-CT-2000-00122, HPRN-CT-2000-00131.

A. Computing N=2, c>3 characters

In this appendix we will compute the $N = 2, c > 3$ characters appearing in the spectrum of the D-branes studied in the paper. We will obtain them as characters of the supersymmetric coset $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$, through a rather standard procedure. The same characters can be computed by subtracting the null-vectors modules from the free action of the $N = 2$ generators, as has been done in [66, 67, 68]. The $N = 2$ representations that we consider are both unitary and non-unitary. The characters of the former have been computed in those papers and coincide with our results, while for non-unitary representations we present the characters for the first time. The fact that the coset yields *irreducible* $N = 2$ characters can be traced back to the fact that the $SL(2,\mathbb{R})$ characters we start with correspond to irreducible representations of the $SL(2,\mathbb{R})$ algebra.

Notice that we have here a non-minimal version of a similar situation for ($N = 1, 2$ supersymmetric) unitary minimal models, where the (supersymmetric) Virasoro characters coincide with the characters of certain cosets involving $SU(2)$ factors which realize the minimal models [69].

Moreover, this coincidence of the two ways of computing the characters, which was independently noticed in [26] and [8], is central to the fact that the D-branes that we build in this paper belong to the class of objects, such as the correlation functions [4, 35, 32] or the modular-invariant partition function [26, 8], for which there is no distinction as to whether we are in the $N = 2$ Liouville or in the supersymmetric cigar.

Let us review first how the $N = 2$ algebra arises in the susy $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ coset [3]. The supersymmetric $SL(2,\mathbb{R})$ model at level k has currents J^a, ψ^b $(a, b = 1, 2, 3)$, with OPEs

$$\begin{aligned} J^a(z)J^b(w) &\sim \frac{g^{ab}k/2}{(z-w)^2} + \frac{f^{ab}{}_c\, J^c(w)}{z-w}\,, \\ J^a(z)\psi^b(w) &\sim \frac{f^{ab}{}_c\psi^c(w)}{z-w}\,, \\ \psi^a(z)\psi^b(w) &\sim \frac{g^{ab}}{z-w} \end{aligned} \tag{A.1}$$

where $g^{ab} = \mathrm{diag}(+,+,-)$, $f^{123} = 1$ and indices in the antisymmetric f^{abc} are raised and lowered with g^{ab}.

We first define

$$\begin{aligned} j^a &= J^a - \hat{J}^a \\ \hat{J}^a &= -\frac{i}{2} f^a{}_{bc}\psi^b\psi^c \end{aligned} \tag{A.2}$$

The currents j^a commute with the three fermions and generate a *bosonic* $SL(2,\mathbb{R})$ model at level $k+2$. The currents $\hat{J}^a, \psi^a$ form a supersymmetric $SL(2,\mathbb{R})$ model at level -2. The Hilbert space of the original supersymmetric $SL(2,\mathbb{R})_k$ theory is the direct product of the Hilbert space of the bosonic $SL(2,\mathbb{R})_{k+2}$ and that of the three free fermions.

We are interested in the coset obtained by gauging the $U(1)$ symmetry generated by J^3, ψ^3. This coset has an $N = 2$ algebra generated by

$$\begin{aligned} G^\pm &= \sqrt{\frac{2}{k}}\ \psi^\pm j^\mp \\ J^R &= \frac{2}{k} j^3 + \frac{k+2}{k}\ \hat{J}^3 = \frac{2}{k} J^3 + \psi^+\psi^- \\ T &= T_{SL(2,\mathbb{R})} - T_{U(1)} \end{aligned} \tag{A.3}$$

where $\sqrt{2}\psi^\pm = \psi^1 \pm i\psi^2$ and

$$T_{U(1)} = -\frac{1}{k} J^3 J^3 + \frac{1}{2}\psi^3\partial\psi^3\,. \tag{A.4}$$

The currents (A.3) commute with J^3, ψ^3 and satisfy the $N = 2$ superconformal algebra

$$\begin{aligned} J^R(z)J^R(w) &\sim \frac{c/3}{(z-w)^2}\,, \\ J^R(z)G^\pm(w) &\sim \pm\frac{G^\pm(w)}{(z-w)}\,, \\ G^+(z)G^-(w) &\sim \frac{2c/3}{(z-w)^3} + \frac{2J^R(w)}{(z-w)^2} + \frac{1}{(z-w)}\left(2T(w) + \partial J^R(w)\right)\,. \end{aligned} \tag{A.5}$$

with the central charge

$$c = 3 + \frac{6}{k}\,. \tag{A.6}$$

A highest-weight representation of the $N = 2$ algebra with a given central charge c is determined by the conformal dimension h and the $U(1)$ charge Q of the highest weight state. By building the $N = 2$ representations through the $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ coset, we can parameterize h, Q by means of $SL(2,\mathbb{R})$ quantum numbers as follows from the zero modes of J^3, T in (A.3).

The states of the coset are all those states in the parent $SL(2,\mathbb{R})$ theory annihilated by the modes $J^3_{n>0}, \psi^3_{n>0}$, and a *primary* state of the coset is a coset state which is also a primary of the $N = 2$ algebra. Every primary state of the parent theory is clearly a primary of the coset. In addition, for the discrete and finite-dimensional representations of j^a, there are also *descendent* states of the parent theory which are *primaries* of the coset.

The Hilbert space of the parent theory can be decomposed into subspaces with definite J^3_0 eigenvalue m. Since the $N = 2$ algebra commutes with J^3_0, from a given $SL(2,\mathbb{R})$ representation with spin j, we will obtain a different $N = 2$ representation for each value of m. The use of j, m labels is most convenient, because performing integer spectral flow in $N = 2$ just amounts to an integer shift in m, as we will see below.

For a given $SL(2,\mathbb{R})$ representation, we are interested in the characters

$$ch^{NS}_{j,m}(q,y) = q^{-\frac{c}{24}} \mathrm{Tr}_{NS}\; q^{L_0} y^{J^R_0} \tag{A.7}$$

$$ch^{\widetilde{NS}}_{j,m}(q,y) = q^{-\frac{c}{24}} \mathrm{Tr}_{NS}\; (-1)^F q^{L_0} y^{J^R_0} \tag{A.8}$$

$$ch^{R}_{j,m}(q,y) = q^{-\frac{c}{24}} \mathrm{Tr}_{R}\; q^{L_0} y^{J^R_0} \tag{A.9}$$

where the trace is taken on the Hilbert space of the coset. We will compute in all the cases the NS character first. The Ramond characters will be obtained by half-spectral flow [70] as

$$ch^R(\tau,\nu) = q^{\frac{6}{c}(\frac{1}{2})^2} y^{\frac{c}{3}\frac{1}{2}} ch^{NS}(\tau, \nu + \frac{\tau}{2}) \tag{A.10}$$

where $q = e^{i2\pi\tau}, y = e^{i2\pi\nu}$. As for the $\widetilde{\mathrm{NS}}$ characters, it is easy to see that they are given by

$$ch^{\widetilde{NS}}_{j,m}(q,y) = -ch^{NS}_{j,m}(q,-y) \tag{A.11}$$

The NS characters can be obtained from

$$\chi_j(q,x,y) = \mathrm{Tr}\; q^{L_0 - \frac{c+3/2}{24}}\; x^{J^3_0} y^{J^R_0} = \sum_m x^m\, \xi_m(q)\, ch^{NS}_{j,m}(q,y) \tag{A.12}$$

where

$$\xi_m(q) = q^{-\frac{3}{48} - \frac{m^2}{k}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + q^{n-\frac{1}{2}})}{(1 - q^n)} \tag{A.13}$$

The trace in (A.12) is taken on the whole NS Hilbert space of the supersymmetric $SL(2,\mathbb{R})_k$ model and J_0^R is well-defined even before going to the coset. We have expanded $\chi_j(q,x,y)$ into terms with definite J_0^3 charge m and factored in each such term a supersymmetric $U(1)$ character $\xi_m(q)$ with highest weight $\Delta = -\frac{m^2}{k}$, generated by the modes of J^3, ψ^3.

The computation of $\chi_j(q,x,y)$ itself goes as follows. In the factorized $SL(2,\mathbb{R})_{k+2} \otimes \{\psi^a\}$ theory we can easily compute

$$\chi_j(q,z,w) = q^{-\frac{c+3/2}{24}} \text{ Tr } q^{L_0} z^{j_0^3} \times \text{Tr } q^{L_0} w^{\hat{j}_0^3} \,, \tag{A.14}$$

and then from (A.2) and (A.3) it follows that $\chi_j(q,x,y)$ is given from $\chi_j(q,z,w)$ by the replacements

$$\begin{aligned} z &\to xy^{\frac{2}{k}} \,, \\ w &\to xy^{\frac{k+2}{k}} \,. \end{aligned} \tag{A.15}$$

In (A.14), the trace over the fermions NS Hilbert space is

$$\begin{aligned} \text{Tr } q^{L_0} w^{\hat{j}_0^3} &= \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{n-\frac{1}{2}})(1+wq^{n-\frac{1}{2}})(1+w^{-1}q^{n-\frac{1}{2}}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{n-\frac{1}{2}})}{(1-q^n)} \sum_{p\in\mathbb{Z}} w^p q^{\frac{p^2}{2}} \,. \end{aligned} \tag{A.16}$$

For the first factor in (A.14), we should consider the different possible representations of the j^a algebra. We take $q = e^{i2\pi\tau}, y = e^{i2\pi\nu}$.

Continuous representations

The j^a representations are built by acting with $j^a_{n<0}$ on representations of the zero modes j^a_0. For the continuous representations we have $j = \frac{1}{2} + iP$, $P \in \mathbb{R}^+$. The $SL(2,\mathbb{R})$ primaries are $|P,m\rangle$, with $m = r+\alpha$, $r \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in [0,1)$ and conformal weight

$$-\frac{j(j-1)}{k} = \frac{\frac{1}{4}+P^2}{k} \,. \tag{A.17}$$

These primaries of j^a are multiplied by the fermionic NS vacuum to get the full primaries, so $j_0^3 = J_0^3 = m$ on these states. Considered as primaries of $N=2$, they give rise to unitary $N=2$ representations [23] with (see (A.3))

$$h_{P,m} = \frac{\frac{1}{4}+P^2+m^2}{k} \,, \qquad Q_m = \frac{2m}{k} \tag{A.18}$$

The character of the susy $SL(2,\mathbb{R})$ representation is

$$\begin{aligned} \chi_j(q,z,w) &= q^{-\frac{c+3/2}{24}} \text{ Tr } q^{L_0} z^{j_0^3} \times \text{Tr } q^{L_0} w^{\hat{j}_0^3} \,, \\ &= q^{-\frac{c+3/2}{24}} q^{\frac{1/4+P^2}{k}} \sum_{r,p\in\mathbb{Z}} z^{\alpha+r} w^p q^{\frac{p^2}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{n-\frac{1}{2}})}{(1-q^n)^4} \end{aligned} \tag{A.19}$$

and applying the steps described above it is immediate to obtain the $N=2$ characters

$$\begin{aligned} ch_c^{NS}(P,m;\tau,\nu) &= \text{Tr } q^{L_0-c/24}\, y^{J_0^R} \\ &= q^{\frac{P^2+m^2}{k}} y^{\frac{2m}{k}} \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} \end{aligned} \tag{A.20}$$

$$ch_c^{\widetilde{NS}}(P,m;\tau,\nu) = q^{\frac{P^2+m^2}{k}} y^{\frac{2m}{k}} \frac{\vartheta_4(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} \tag{A.21}$$

$$ch_c^{R}(P,m';\tau,\nu) = q^{\frac{P^2+m'^2}{k}} y^{\frac{2m'}{k}} \frac{\vartheta_2(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} \tag{A.22}$$

where $m' = m+\frac{1}{2}$ when the Ramond character is obtained by half-spectral flow from (A.20).

Discrete representations

Let us consider discrete lowest-weight representations $\mathcal{D}_j^+$ of j^a, with primaries $|j,r\rangle$, with $m=j+r$ and $r\in\mathbb{Z}, r>0$, and with $j\in\mathbb{R}, j>0$. For $0<j<\frac{k+2}{2}$ they give rise to $N=2$ unitary representations [71, 23, 72]. This bound is further constrained in physical settings to be $\frac{1}{2}<j<\frac{k+1}{2}$. For each value of $m=j+r, r\in\mathbb{Z}$ the $N=2$ primaries are

$$\begin{array}{ll} r\geq 0 & |j,j+r\rangle \\ r<0 & (j_{-1}^-)^{-r-1}\psi^-_{-\frac{1}{2}}|j,j\rangle \end{array} \tag{A.23}$$

The quantum numbers are:

$$\begin{array}{llll} r\geq 0 & h_{j,r} = \frac{-j(j-1)+(j+r)^2}{k} & Q_{j,r} = \frac{2(j+r)}{k} \\ r<0 & h_{j,r} = \frac{-j(j-1)+(j+r)^2}{k} - r - \frac{1}{2} & Q_{j,r} = \frac{2(j+r)}{k} - 1 \\ & \quad = \frac{-(\frac{k+2}{2}-j)(\frac{k+2}{2}-j-1)+(\frac{k+2}{2}-j-r-1)^2}{k} & \quad = -\frac{2(\frac{k+2}{2}-j-r-1)}{k} \end{array} \tag{A.24}$$

The second line in the $r<0$ case shows that these states are similar to the $r\geq 0$ states when built from $\mathcal{D}^-_{\frac{k+2}{2}-j}$. Note that $r=0,-1$ correspond to chiral and anti-chiral primaries respectively, as follows from $h_{j,0}=Q_{j,0}/2$ and $h_{j,-1}=-Q_{j,-1}/2$. These states are mapped to fermionic null states of relative charge ± 1 along the spectral flow orbit.

To compute the characters we start with

$$\begin{aligned} \chi_j(q,z,w) &= q^{-\frac{c}{24}}\ \text{Tr } q^{L_0} z^{j_0^3} \times \text{Tr } q^{L_0} w^{\hat{J}_0^3} \\ &= \frac{q^{-\frac{c}{24}-\frac{j(j-1)}{k}} z^j}{\prod_{n=1}^\infty (1-zq^{n-1})(1-z^{-1}q^n)(1-q^n)} \times \text{Tr } q^{L_0} w^{\hat{J}_0^3} \end{aligned} \tag{A.25}$$

Using[18]

$$\frac{1}{\prod_{n=1}^\infty (1-q^{n-1}z)(1-q^n z^{-1})} = \frac{1}{\prod_{n=1}^\infty (1-q^n)^2} \sum_{t=-\infty}^{\infty} z^t S_t(q)\,, \tag{A.26}$$

where

$$S_t(q) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s q^{\frac{1}{2}s(s+2t+1)} \tag{A.27}$$

[18] See [73] for a proof of this identity.

the character (A.25) can be expanded into

$$\chi_j(q,z,w) = q^{-\frac{c}{24}-\frac{j(j-1)}{k}} \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-\frac{1}{2}}) \sum_{p,t\in\mathbb{Z}} \frac{S_t(q)\, q^{\frac{p^2}{2}}\, z^{j+t}\, w^p}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^4} \tag{A.28}$$

After the replacement (A.15), and defining $r = t+p$, we get the decomposition as in (A.12)

$$\chi_j(q,x,y) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} x^{j+r}\, \xi_{j+r}(q) \;\times\; \frac{q^{\frac{-(j-1/2)^2+(j+r)^2}{k}}\, y^{\frac{2(j+r)}{k}}}{\eta(\tau)^3} \sum_{p\in\mathbb{Z}} S_{r-p}(q) y^p q^{\frac{p^2}{2}} \;. \tag{A.29}$$

Using

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} S_{r-p}(q)\, y^p q^{\frac{p^2}{2}} = \frac{\sum_{p\in\mathbb{Z}} y^p q^{\frac{p^2}{2}}}{1+yq^{r+1/2}} = \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{1+yq^{r+1/2}} \tag{A.30}$$

we get finally

$$\begin{aligned} ch_d^{NS}(j,r;\tau,\nu) &= \mathrm{Tr}\; q^{L_0-c/24} y^{J_0^R} \\ &= q^{-\frac{(j-1/2)^2}{k}+\frac{(j+r)^2}{k}}\, y^{\frac{2(j+r)}{k}} \frac{1}{1+yq^{1/2+r}} \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\,, \\ &= q^{-\frac{(j-1/2)^2}{k}+\frac{(j+r)^2}{k}-r-\frac{1}{2}}\, y^{\frac{2(j+r)}{k}-1} \frac{1}{1+y^{-1}q^{-1/2-r}} \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\,. \end{aligned} \tag{A.31}$$

We wrote the characters in two forms, each form reflecting the structure of the representation for a different range of r (see (A.23)). For the other sectors we get

$$ch_d^{\widetilde{NS}}(j,r;\tau,\nu) = q^{-\frac{(j-1/2)^2}{k}+\frac{(j+r)^2}{k}}\, y^{\frac{2(j+r)}{k}} \frac{1}{1-yq^{1/2+r}} \frac{\vartheta_4(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} \tag{A.32}$$

$$ch_d^{R}(j,r';\tau,\nu) = q^{-\frac{(j-1/2)^2}{k}+\frac{(j+r')^2}{k}}\, y^{\frac{2(j+r')}{k}} \frac{1}{1+yq^{1/2+r'}} \frac{\vartheta_2(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} \tag{A.33}$$

where $r' = r+\frac{1}{2}$ when the Ramond character is obtained by half-spectral flow from (A.31).

Finite dimensional representations

In this case the spin takes the values $j = -\frac{(u-1)}{2}, u = 1,2....$ The highest weights are u-dimensional representations of j_0^a given by $|j,m\rangle$, with $m = j, j+1, \cdots - j$. Only for $u = 1$ the induced $N = 2$ representation is unitary. For every $m = j+r, r\in\mathbb{Z}$ the $N = 2$ primaries are

$$\begin{array}{ll} r<0 & (j_{-1}^-)^{-r-1}\psi^-_{-\frac{1}{2}}|j,j\rangle \\ 0\le r\le u-1 & |j,j+r\rangle \\ r>u-1 & (j_{-1}^+)^{r-u}\psi^+_{-\frac{1}{2}}|j,-j\rangle \end{array} \tag{A.34}$$

with quantum numbers

$$\begin{array}{lll} r<0 & h_{j,r} = \frac{-j(j-1)+(r+j)^2}{k} - r - \frac{1}{2} & Q_{j,r} = \frac{2(r+j)}{k} - 1 \\ 0\le r\le u-1 & h_{j,r} = \frac{-j(j-1)+(r+j)^2}{k} & Q_{j,r} = \frac{2(r+j)}{k} \\ r>u-1 & h_{j,r} = \frac{-j(j-1)+(r+j)^2}{k} + r - u + \frac{1}{2} & Q_{j,r} = \frac{2(r+j)}{k} + 1 \end{array} \tag{A.35}$$

In order to compute the characters, we start with

$$\begin{aligned}\chi_j(q,z,w) &= q^{-\frac{c}{24}}\ \mathrm{Tr}\ q^{L_0} z^{j_0^3} \times \mathrm{Tr}\ q^{L_0} w^{\hat{j}_0^3} \\ &= \frac{q^{-\frac{c}{24}-\frac{j(j-1)}{k}}(z^{-\frac{(u-1)}{2}} - z^{\frac{u+1}{2}})}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-zq^{n-1})(1-z^{-1}q^n)(1-q^n)} \times \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+q^{n-\frac{1}{2}})}{(1-q^n)}\sum_{p\in\mathbb{Z}} w^p q^{\frac{p^2}{2}}\end{aligned} \tag{A.36}$$

The expansion goes along similar lines to the discrete representations and is left as an exercise. The resulting $N=2$ characters are

$$\begin{aligned}ch_f^{NS}(u,r;\tau,\nu) &= \mathrm{Tr}\ q^{L_0-c/24} z^{J_0^R} \\ &= q^{-\frac{(j-1/2)^2}{k}+\frac{(r+j)^2}{k}-r-1/2} y^{\frac{2(r+j)}{k}-1} \quad \frac{(1-q^u)}{(1+y^{-1}q^{-1/2-r})(1+y^{-1}q^{u-1/2-r})}\frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\ , \\ &= q^{-\frac{(j-1/2)^2}{k}+\frac{(r+j)^2}{k}} y^{\frac{2(r+j)}{k}} \quad \frac{(1-q^u)}{(1+yq^{+1/2+r})(1+y^{-1}q^{u-1/2-r})}\frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\ , \\ &= q^{-\frac{(j-1/2)^2}{k}+\frac{(r+j)^2}{k}+r+2j-\frac{1}{2}} y^{\frac{2(r+j)}{k}+1} \quad \frac{(1-q^u)}{(1+yq^{1/2+r})(1+yq^{r-u+1/2})}\frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\ .\end{aligned} \tag{A.37}$$

Again, we expressed the characters in forms reflecting the structure of the representation for different ranges of r. These characters can also be expressed as

$$\begin{aligned}ch_f^{NS}(u,r;\tau,\nu) &= ch_d^{NS}(j,r;\tau,\nu) - ch_d^{NS}(-j+1,r-u;\tau,\nu) \\ &= \frac{\vartheta_3(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} q^{\frac{s^2-su}{k}} y^{\frac{2s-u}{k}}\left[\frac{1}{1+yq^s} - \frac{1}{1+yq^{s-u}}\right]\end{aligned} \tag{A.38}$$

with $s = r+\frac{1}{2}$. For the other sectors we get

$$\begin{aligned}ch_f^{\widetilde{NS}}(u,r;\tau,\nu) &= q^{-\frac{(j-1/2)^2}{k}+\frac{(r+j)^2}{k}} y^{\frac{2(r+j)}{k}} \quad \frac{(1-q^u)}{(1-yq^{+1/2+r})(1-y^{-1}q^{u-1/2-r})}\frac{\vartheta_4(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} \\ ch_f^{R}(u,r';\tau,\nu) &= q^{-\frac{(j-1/2)^2}{k}+\frac{(r'+j)^2}{k}} y^{\frac{2(r'+j)}{k}} \quad \frac{(1-q^u)}{(1+yq^{+1/2+r'})(1+y^{-1}q^{u-1/2-r'})}\frac{\vartheta_2(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\end{aligned} \tag{A.39}$$

where $r' = r+\frac{1}{2}$ when the Ramond character is obtained by half-spectral flow from (A.37).

Spectral flow

The $N=2$ algebra has the spectral flow automorphism [70]

$$\begin{aligned}L_n &\to L_n + wJ_n + \frac{c}{6}w^2\delta_{n,0} \\ J_n &\to J_n + \frac{c}{3}\delta_{n,o} \\ G_m^{\pm} &\to G_{m\pm w}^{\pm}\end{aligned} \tag{A.40}$$

which maps a representation into another one. The spectrum of the flowed representations is obtained by measuring the flowed L_0, J_0 on the original representation. The character of the spectrally flowed representation is then given by

$$ch(\tau,\nu) \to q^{\frac{c}{6}w^2}\ y^{\frac{c}{3}w}\ ch(\tau,\nu+w\tau) \tag{A.41}$$

Using (E.5), it is immediate to verify that in the characters considered above the spectral flow by w integer units is equivalent to a shift $m \to m + w$, thus verifying our claim that m keeps track of the $N = 2$ spectral flow orbit.

Finally, notice that in the discrete and finite cases, $SL(2, \mathbb{R})$ representations in which the generators act freely give rise to an $N = 2$ representations with null descendents due to the semi-infinite/finite base in $SL(2, \mathbb{R})$. To get some insight into the form of the characters, note that the free action of the modes $L_{-n}, J_{-n}, G^{\pm}_{-n+1/2}$ on the highest weight state gives the contribution (in the NS sector),

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + q^{n-\frac{1}{2}} y)(1 + q^{n-\frac{1}{2}} y^{-1})}{(1 - q^n)^2} = q^{1/8} \frac{\vartheta_3(\tau, \nu)}{\eta(\tau)^3} \tag{A.42}$$

In the discrete and finite representations the character is further modded out by the null descendents.

B. Changing basis in $SL(2, \mathbb{R})$

In this appendix we recall how to Fourier transform the one-point functions of [48] into the form in which they were used in [43], and in the bulk of our paper, in our conventions.

Reflection amplitude

We use a quadratic Casimir for $SL(2, R)$ representation of the form:

$$c_2 = -j(j - 1) \tag{B.1}$$

and we adopt conventions in which the bulk two-point functions are:

$$\begin{aligned} \langle \Phi^j(x^1, \bar{x}^1) \Phi^{j'}(x^2, \bar{x}^2) \rangle &= |z_{12}|^{-4\Delta_j} \left(\delta^2(x^1 - x^2) \delta(j + j' - 1) + \frac{B(j)}{|x_{12}|^{4j}} \delta(j - j') \right) \\ B(j) &= \frac{k}{\pi} \nu^{1-2j} \frac{\Gamma(1 - \frac{2j-1}{k})}{\Gamma(\frac{2j-1}{k})} \end{aligned} \tag{B.2}$$

which leads after Fourier transformation

$$\Phi^j_{nw} = \frac{1}{4\pi^2} \int d^2x^{j-1+m} \bar{x}^{j-1+\bar{m}} \Phi^j(x, \bar{x}) \tag{B.3}$$

to

$$\begin{aligned} \langle \Phi^j_{nw} \Phi^{j'}_{n'w'} \rangle &= |z_{12}|^{-4\Delta_j} \delta_{n+n'} \delta_{w+w'} \left(\delta(j + j' - 1) + R(j, n, w) \delta(j - j') \right) \\ R(j, n, w) &= \nu^{1-2j} \frac{\Gamma(-2j + 1)\Gamma(j + m)\Gamma(j - \bar{m})\Gamma(1 + \frac{1-2j}{k})}{\Gamma(2j - 1)\Gamma(-j + 1 + m)\Gamma(-j + 1 - \bar{m})\Gamma(1 - \frac{1-2j}{k})}. \end{aligned} \tag{B.4}$$

In the super-coset, we identify the elliptic eigenvalues of $SL(2, R)$ with the geometric angular momentum and winding by:

$$\begin{aligned} m &= (n + kw)/2 \\ \bar{m} &= (-n + kw)/2. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Localized branes

Starting from the one-point function for spherical branes in H_3 [48]:

$$\langle \Phi^j(x|z)\rangle_s = -\frac{1}{2\pi}(1+x\bar{x})^{-2j}\frac{\Gamma(1+(-2j+1)/k)}{\Gamma(1-1/k)}\frac{\sin s(-2j+1)}{\sin s}\nu^{-j+1}|z-z'|^{-2\Delta_j}, \tag{B.6}$$

we find its Fourier transform:

$$\begin{aligned}\langle \Phi^j_{np}(z)\rangle_s &= \int d^2x e^{inarg(x)}|x|^{2j-2-ip}\langle \Phi^j(x|z)\rangle_s \\ &= \frac{1}{2}\delta_{n,0}\frac{\Gamma(j-ip/2)\Gamma(j+ip/2)\Gamma(1+1/k)}{\Gamma(2j-1)\Gamma(1-(-2j+1)/k)}\frac{\sin\pi/k\sin s(-2j+1)}{\sin s\sin\pi(-2j+1)/k},\end{aligned} \tag{B.7}$$

where we made use of the integral:

$$\int_0^\infty drr^{2j-1-ip}(1+r^2)^{-2j} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(j-ip/2)\Gamma(j+ip/2)}{\Gamma(2j)}. \tag{B.8}$$

Up to normalization, this corresponds to the one-point function in the bosonic and supersymmetric coset.

Extended AdS_2 branes

Starting from the one-point function for extended branes in H_3 (where $\sigma = \mathrm{sgn}(x+\bar{x})$):

$$\langle \Phi^j(x|z)\rangle_r = \frac{\mathcal{N}k}{\pi}|x-\bar{x}|^{-2j}\nu^{-j+1/2}\Gamma(1+(-2j+1)/k)e^{(1-2j)r\sigma}|z-z'|^{-2\Delta_j}, \tag{B.9}$$

we find the transformed coset one-point function:

$$\begin{aligned}\langle \Phi^j_{np}(z)\rangle_r &= \int dx^2 e^{inarg(x)}|x|^{2j-2-ip}\langle \Phi^j(x|z)\rangle_r \\ &= 2\pi k\delta(p)\mathcal{N}\nu^{-j+1/2}\frac{\Gamma(-2j+1)\Gamma(1+(-2j+1)/k)}{\Gamma(-j+1+n/2)\Gamma(-j+1-n/2)}((-1)^n e^{r(-2j+1)}+e^{-r(-2j+1)}).\end{aligned} \tag{B.10}$$

We used the integrals:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi e^{in\phi}(2\cos\phi)^{-2j} &= \frac{\pi\,\Gamma(-2j+1)}{\Gamma(1-j+n/2)\Gamma(1-j-n/2)} \\ \int_0^\infty drr^{-1-ip} &= 2\pi\delta(p).\end{aligned} \tag{B.11}$$

Thus we have reviewed the connection between the one-point functions in [48] and the one-point functions for the coset [43] in our conventions.

C. Cardy condition for D0 branes in R/$\widetilde{\text{NS}}$ sectors

In this appendix we will provide some more details of the Cardy computation for D0 branes in the R and $\widetilde{NS}$ sectors, along the lines of section 4.

Let us start Ramond sector in the open string channel. For the partition function in the $(u,1)$ case we take

$$\begin{aligned} Z^R_{u,1}(\tau,\nu) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} ch^R_f(u,r;\tau,\nu) \\ &= \frac{\vartheta_2(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\sum_{s\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+yq^s}(q^{\frac{s^2-su}{k}}y^{\frac{2s-u}{k}} - q^{\frac{s^2+su}{k}}y^{\frac{2s+u}{k}}), \end{aligned} \tag{C.1}$$

where we have summed over the whole spectral flow orbit of the $N=2$ Ramond characters associated with the u-dimensional representation of $SL(2,\mathbb{R})$. For the general (u,u') case we make a sum as in (4.6). The computation is very similar to the NS/NS case, so we will only indicate the major steps.

We start with the modular transform of $Z^R_{u,1}(\tau,\nu)$, given by

$$\begin{aligned} e^{-i\pi\frac{c}{3}\frac{\nu^2}{\tau}}\ \ Z^R_{u,1}(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}) &= \frac{\vartheta_4(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\ \ \times \\ \frac{1}{2i\pi}\left[\int_{\mathcal{C}_{-\epsilon}}+\int_{\mathcal{C}_{+\epsilon}}\right] dZ\ (-i\pi)\, e^{\pi Z+\frac{2i\pi\tau}{k}Z^2}\ \frac{\sinh(2\pi\frac{Z}{k}u)}{\cosh(\pi Z)}\frac{e^{i\pi(i\tau Z-\nu+\frac{1}{2})}}{\cos\pi(i\tau Z-\nu+\frac{1}{2})} \end{aligned} \tag{C.2}$$

The contour of integration is the same as in section 4, and the integrand has poles at $\nu - i\tau Z = s \in \mathbb{Z}$. Expanding the last factor of the integrand as a sum over w as in (4.9-4.10), taking $\varepsilon\to 0$ and shifting the contour by $\frac{iwk}{2} - i\nu_2$ in each term, we arrive, for general (u,u'), to a decomposition

$$e^{-i\pi\frac{c}{3}\frac{\nu^2}{\tau}} Z^R_{u,u'}(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}) = Z^{R,c}_{u,u'} + Z^{R,d}_{u,u'} \tag{C.3}$$

where the first term is an integral over the shifted contour and the second is the sum of poles picked during the shift. These terms are

$$\begin{aligned} Z^{R,c}_{u,u'} &= \sum_{w\in\mathbb{Z}}\int_0^{+\infty} dP \frac{2\sinh(2\pi P)\sinh(2\pi\frac{P}{k}u)\sinh(2\pi\frac{P}{k}u')}{(-1)^{w(u+u'+1)}[\cosh(2\pi P)+\cos(\pi k w)]\sinh(2\pi\frac{P}{k})} \\ &\qquad\qquad \times\ q^{\frac{P^2+(kw/2)^2}{k}} y^{\frac{2(kw/2)}{k}}\frac{\vartheta_4(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} \\ &= \sum_{w\in\mathbb{Z}}\int_0^{+\infty} dP\ \Psi^{\widetilde{NS}}_u\left(\frac{1}{2}-iP,w\right)\Psi^{\widetilde{NS}}_{u'}\left(\frac{1}{2}+iP,w\right)\ ch^{\widetilde{NS}}_c(P,\frac{wk}{2};\tau,\nu) \end{aligned} \tag{C.4}$$

and

$$\begin{aligned} Z^{R,d}_{u,u'} &= \sum_{r\in\mathbb{Z}}\frac{2\sin\left(\frac{2\pi}{k}(2j_r-1)u\right)\sin\left(\frac{2\pi}{k}(2j_r-1)u'\right)}{(-1)^{w_r(u+u'+1)}\sin\left(\frac{2\pi}{k}(2j_r-1)\right)}\ \ \frac{\vartheta_4(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3}\frac{y^{w_r}q^{sw_r-\frac{s^2}{k}}}{1-yq^s} \\ &= 2\pi\sum_{r\in\mathbb{Z}} Res\left[\Psi^{\widetilde{NS}}_u(-j_r+1,w_r)\Psi^{\widetilde{NS}}_{u'}(j_r,w_r)\right]\ ch^{\widetilde{NS}}_d(j_r,r;\tau,\nu) \end{aligned} \tag{C.5}$$

where j_r and w_r are defined in the same way as in section 4 and $s = r + \frac{1}{2}$ as usual. We see thus that the Cardy condition is verified.

For the open string partition function in the $\widetilde{NS}$ sector, which computes the open string Witten index [74], we start with

$$\begin{aligned} Z^{\widetilde{NS}}_{u,1}(\tau,\nu) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}} ch^{\widetilde{NS}}_f(u,r;\tau,\nu) \\ &= \frac{\vartheta_4(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} \sum_{s\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \frac{1}{1-yq^s}(q^{\frac{s^2-su}{k}} y^{\frac{2s-u}{k}} - q^{\frac{s^2+su}{k}} y^{\frac{2s+u}{k}}) \end{aligned} \tag{C.6}$$

Its modular transform is

$$\begin{aligned} e^{-i\pi\frac{c}{3}\frac{\nu^2}{\tau}} \quad Z^{\widetilde{NS}}_{u,1}(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}) &= \frac{\vartheta_2(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} \\ \times \quad \frac{1}{2i\pi}\left[\int_{\mathcal{C}_{-\epsilon}} + \int_{\mathcal{C}_{+\epsilon}}\right] dZ\ (-i\pi)\, e^{\pi Z + \frac{2i\pi\tau}{k}Z^2}\ \frac{\sinh(2\pi\frac{Z}{k}u)}{\sinh(\pi Z)} \frac{e^{i\pi(i\tau Z-\nu)}}{\cos\pi(i\tau Z-\nu)} \end{aligned} \tag{C.7}$$

with the same contour as before, but now the integrand has poles at $\nu - i\tau Z = s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Expanding again the last factor of the integrand as in (4.9-4.10), taking $\varepsilon \to 0$ and shifting the contour by $\frac{iwk}{2} - i\nu_2$ in each term, we arrive, for general (u,u'), to

$$e^{-i\pi\frac{c}{3}\frac{\nu^2}{\tau}} Z^{\widetilde{NS}}_{u,u'}(-\frac{1}{\tau},\frac{\nu}{\tau}) = Z^{\widetilde{NS},c}_{u,u'} + Z^{\widetilde{NS},d}_{u,u'} \tag{C.8}$$

where

$$\begin{aligned} Z^{\widetilde{NS},c}_{u,u'} &= \sum_{w\in\mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dP \frac{2\sinh(2\pi P)\sinh(2\pi\frac{P}{k}u)\sinh(2\pi\frac{P}{k}u')}{(-1)^{w(u+u')}[\cosh(2\pi P)-\cos(\pi k w)]\sinh(2\pi\frac{P}{k})} \\ &\qquad\qquad \times\ q^{\frac{P^2+(kw/2)^2}{k}} y^{\frac{2(kw/2)}{k}} \frac{\vartheta_2(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} \\ &= \sum_{w\in\mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dP\ \Psi^{R^-}_u\left(\frac{1}{2}-iP,-w\right)\Psi^{R^+}_{u'}\left(\frac{1}{2}+iP,w\right)\ ch^R_c(P,\frac{wk}{2};\tau,\nu) \end{aligned} \tag{C.9}$$

and

$$\begin{aligned} Z^{\widetilde{NS},d}_{u,u'} &= \sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} (-1)^{w_r(u+u')} \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{k}(2j_r-1)u\right)\sin\left(\frac{\pi}{k}(2j_r-1)u'\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{k}(2j_r-1)\right)} \frac{y^{w_s}q^{sw_s-\frac{s^2}{k}}}{1+yq^s} \frac{\vartheta_2(\tau,\nu)}{\eta(\tau)^3} \\ &= 2\pi \sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} Res\left[\Psi^{R^-}_u(-j_r+1,-w_r)\Psi^{R^+}_{u'}(j_r,w_r)\right]\ ch^R_d(j_r,r;\tau,\nu)\,, \end{aligned} \tag{C.10}$$

with j_r and w_r defined as in section 4, but now taking $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$.

In both $Z^{R,d}_{u,u'}$ and $Z^{\widetilde{NS},d}_{u,u'}$ the residues are computed when considering the bracketed expressions as analytical functions of j.

D. Embedding $N = 2$ into $SL(2, \mathbb{R})$

Our goal in this appendix is to elaborate on the relation between the $N = 2, c > 3$ chiral algebra and the $SL(2, \mathbb{R})$ algebra, showing how the former always lead to the latter. These ideas go back to [23].

Consider an $N = 2$ algebra with $c > 3$. We can write the supercurrents and the $U(1)$ R-current in the following form:

$$\begin{aligned} G^{\pm} &= \sqrt{\frac{2c}{3}}\pi^{\pm}e^{\pm i\sqrt{\frac{3}{c}}\phi} \\ J^R &= i\sqrt{\frac{c}{3}}\partial\phi \end{aligned} \tag{D.1}$$

where we made use of a canonically normalized scalar ϕ and the fact that the supercurrents carry $U(1)$ R-charge ± 1. The fields $\pi^{\pm}$ are the first parafermionic currents of $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$. We now observe that if we add a trivial auxiliary $U(1)$ to the theory, parameterized by an anti-hermitean scalar field T, we can define the following currents:

$$\begin{aligned} j^3 &= i\sqrt{\frac{k+2}{k}}\partial\phi + \frac{(k+2)}{\sqrt{2k}}\partial T = J^R + \frac{(k+2)}{\sqrt{2k}}\partial T \\ j^{\pm} &= \sqrt{k+2}\,\pi^{\pm}e^{\mp\sqrt{\frac{2}{k+2}}\left(i\sqrt{\frac{2}{k}}\phi + \sqrt{\frac{k+2}{k}}T\right)} \end{aligned} \tag{D.2}$$

which satisfy an $SL(2, R)$ algebra at level $k + 2$:[19]

$$\begin{aligned} j^3(z)j^3(w) &\sim -\frac{k+2}{2(z-w)^2}, \\ j^3(z)j^{\pm}(w) &\sim \pm\frac{j^{\pm}(w)}{z-w}, \\ j^+(z)j^-(w) &\sim \frac{k+2}{(z-w)^2} - \frac{2j^3(w)}{z-w}. \end{aligned} \tag{D.4}$$

To make use of the purely bosonic current algebra when solving the theory, we will need to introduce primary fields for the $N = 2$ algebra combined with the $U(1)$ that transform as standard representations of the $SL(2, R)$ current algebra. This can be achieved as follows. When we denote $Z_{j;r,\bar{r}}$ a primary of the $N = 2$ algebra with conformal weight $\Delta_{j,r} = -j(j-1)/k + m^2/k$ and $U(1)$ R-charge $m = j + r$, we can introduce the new primaries $\hat{Z}_{j,r,\bar{r}}$:

$$\hat{Z}_{j,r,\bar{r}} = Z_{j,r,\bar{r}}e^{\alpha_{j,r}T_L + \alpha_{j,\bar{r}}T_R}, \tag{D.5}$$

[19] If we wish, we can add a super-partner for the boson T, and view the linear combination of $\partial\phi$ and ∂T orthogonal to I^3 as bosonized complex fermion:

$$i\sqrt{\frac{k+2}{k}}\partial\phi + \sqrt{\frac{2}{k}}\partial T =: \psi^+\psi^- : . \tag{D.3}$$

The three fermions then complete an $N = 1$ supersymmetric $SL(2, \mathbb{R})_k$ theory, containing a purely bosonic $SL(2, \mathbb{R})_{k+2}$.

where we choose $\alpha_{j,r}$ such that

$$\Delta(\hat{Z}_{j,r,\bar{r}}) = -\frac{j(j-1)}{k} = \Delta_{j,r} - \frac{\alpha_{j,r}^2}{2} \tag{D.6}$$

(i.e. the momentum of the boson T is coupled to the $N = 2$ $U(1)$ R-charge). The new primaries can be checked to transform in a standard fashion as operators of $SL(2,R)$, in a basis labeled by the spectrum of an elliptic generator. To go to the hyperbolic basis we can Fourier transform:

$$\Phi_j(z,\bar{z},x,\bar{x}) = \sum_{m,\bar{m}} \hat{Z}_{j,r,\bar{r}}\ x^{j-1+m}\bar{x}^{j-1+\bar{m}}. \tag{D.7}$$

We can now compute correlators of these fields, which are linear combinations of primaries of the $N = 2$ algebra "dressed" with an orthogonal and free $U(1)$, using a full chiral $SL(2,R)$. Thus, if the solution of the H_3^+ theory is purely based on symmetries, this holds for any $N = 2$ theory with $c > 3$. [20]

We note also that the construction above shows that the "x-variables" basis will remain an efficient formalism for computation as long as $N = 2$ supersymmetry is preserved. This complements the remarks in [40] where it was suggested that these variables should be interpreted as parameterizing a new worldsheet, at any point in the moduli space.

E. Conventions

We take $q = e^{i2\pi\tau}, y = e^{i2\pi\nu}$, and we define:

$$\eta(\tau) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \tag{E.1}$$

$$\vartheta_2(\tau,\nu) = q^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^n y)(1+q^{n-1}y^{-1}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} q^{\frac{n^2}{2}}y^n \tag{E.2}$$

$$\vartheta_3(\tau,\nu) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^{n-\frac{1}{2}}y)(1+q^{n-\frac{1}{2}}y^{-1}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{n^2}{2}}y^n \tag{E.3}$$

$$\vartheta_4(\tau,\nu) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^{n-\frac{1}{2}}y)(1-q^{n-\frac{1}{2}}y^{-1}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{n^2}{2}}y^n. \tag{E.4}$$

A shift in the second argument of the third theta-function can be compensated for as follows ($w \in \mathbb{Z}$):

$$\vartheta_3(\tau,\eta+w\tau) = q^{-\frac{w^2}{2}}y^{-w}\vartheta_3(\tau,\eta). \tag{E.5}$$

[20] We assume that the $N = 2$ theory does not split into subtheories with $c < 3$. This assumes the irreducibility of the representations space of the $N = 2, c > 3$ algebra. Otherwise, a similar $SU(2)$ algebra would be a more appropriate tool to solve the theory.

References

[1] L. Girardello, A. Pasquinucci and M. Porrati, "N=2 Morse-Liouville Theory And Nonminimal Superconformal Theories," Nucl. Phys. **B352**, 769 (1991).

[2] D. Kutasov and N. Seiberg, "Noncritical Superstrings," Phys. Lett. **B251**, 67 (1990).

[3] Y. Kazama and H. Suzuki, "New N=2 Superconformal Field Theories And Superstring Compactification," Nucl. Phys. **B321**, 232 (1989).

[4] V. Fateev, A. Zamolodchikov, A. Zamolodchikov, unpublished notes.

[5] A. Giveon and D. Kutasov, "Little string theory in a double scaling limit," JHEP **9910**, 034 (1999) [arXiv: hep-th/9909110].

[6] K. Hori and A. Kapustin, "Duality of the fermionic 2d black hole and N = 2 Liouville theory as mirror symmetry," JHEP **0108**, 045 (2001) [arXiv: hep-th/0104202].

[7] D. Tong, "Mirror mirror on the wall: On two-dimensional black holes and Liouville theory," JHEP **0304**, 031 (2003) [arXiv: hep-th/0303151].

[8] D. Israel, C. Kounnas, A. Pakman and J. Troost, "The partition function of the supersymmetric two-dimensional black hole and little string theory," arXiv: hep-th/0403237.

[9] N. Seiberg, "New theories in six dimensions and matrix description of M-theory on T**5 and T**5/Z(2)," Phys. Lett. **B408**, 98 (1997) [arXiv:hep-th/9705221]; M. Berkooz, M. Rozali and N. Seiberg, "On transverse fivebranes in M(atrix) theory on T**5," Phys. Lett. **B408**, 105 (1997) [arXiv: hep-th/9704089].

[10] T. Eguchi and Y. Sugawara, "Modular bootstrap for boundary N = 2 Liouville theory," JHEP **0401**, 025 (2004) [arXiv: hep-th/0311141].

[11] J. McGreevy, S. Murthy and H. Verlinde, "Two-dimensional superstrings and the supersymmetric matrix model," JHEP **0404**, 015 (2004) [arXiv: hep-th/0308105].

[12] C. Ahn, M. Stanishkov and M. Yamamoto, "One-point functions of N = 2 super-Liouville theory with boundary," Nucl. Phys. **B683**, 177 (2004) [arXiv: hep-th/0311169].

[13] A. Giveon, A. Konechny, A. Pakman and A. Sever, "Type 0 strings in a 2-d black hole," JHEP **0310**, 025 (2003) [arXiv:hep-th/0309056].

[14] M. R. Douglas, I. R. Klebanov, D. Kutasov, J. Maldacena, E. Martinec and N. Seiberg, "A new hat for the c = 1 matrix model," arXiv:hep-th/0307195.

[15] V. Kazakov, I. K. Kostov and D. Kutasov, "A matrix model for the two-dimensional black hole," Nucl. Phys. **B622**, 141 (2002) [arXiv: hep-th/0101011].

[16] S. Elitzur, A. Forge and E. Rabinovici, "Some Global Aspects Of String Compactifications," Nucl. Phys. **B359**, 581 (1991).

[17] G. Mandal, A. M. Sengupta and S. R. Wadia, "Classical solutions of two-dimensional string theory," Mod. Phys. Lett. **A6**, 1685 (1991).

[18] E. Witten, "On string theory and black holes," Phys. Rev. **D44**, 314 (1991).

[19] A. Giveon, "Target space duality and stringy black holes," Mod. Phys. Lett. **A6**, 2843 (1991).

[20] R. Dijkgraaf, H. Verlinde and E. Verlinde, "String propagation in a black hole geometry," Nucl. Phys. **B371**, 269 (1992).

[21] M. Henningson, S. Hwang, P. Roberts and B. Sundborg, "Modular invariance of SU(1,1) strings," Phys. Lett. **B267**, 350 (1991).

[22] J. M. Maldacena and H. Ooguri, "Strings in AdS(3) and SL(2,R) WZW model. I," J. Math. Phys. **42**, 2929 (2001) [arXiv: hep-th/0001053].

[23] L. J. Dixon, M. E. Peskin and J. Lykken, "N=2 Superconformal Symmetry And SO(2,1) Current Algebra," Nucl. Phys. **B325**, 329 (1989).

[24] A. Hanany, N. Prezas and J. Troost, "The partition function of the two-dimensional black hole conformal field theory," JHEP **0204**, 014 (2002) [arXiv: hep-th/0202129].

[25] D. Israel, C. Kounnas and M. P. Petropoulos, "Superstrings on NS5 backgrounds, deformed AdS(3) and holography," JHEP **0310**, 028 (2003) [arXiv:hep-th/0306053].

[26] T. Eguchi and Y. Sugawara, "SL(2,R)/U(1) supercoset and elliptic genera of non-compact Calabi-Yau manifolds," JHEP **0405** (2004) 014 [arXiv: hep-th/0403193].

[27] K. Becker and M. Becker, "Interactions in the SL(2,IR) / U(1) black hole background," Nucl. Phys. **B418**, 206 (1994) [arXiv: hep-th/9310046].

[28] V. S. Dotsenko, "The Free Field Representation Of The SU(2) Conformal Field Theory," Nucl. Phys. **B338**, 747 (1990); V. S. Dotsenko, "Solving The SU(2) Conformal Field Theory With The Wakimoto Free Field Representation," Nucl. Phys. **B358**, 547 (1991).

[29] G. Giribet and C. Nunez, "Correlators in AdS(3) string theory," JHEP **0106**, 010 (2001) [arXiv: hep-th/0105200].

[30] D. M. Hofman and C. A. Nunez, "Free field realization of superstring theory on AdS3," arXiv: hep-th/0404214.

[31] P. Baseilhac and V. A. Fateev, "Expectation values of local fields for a two-parameter family of integrable models and related perturbed conformal field theories," Nucl. Phys. **B532**, 567 (1998) [arXiv: hep-th/9906010].

[32] T. Fukuda and K. Hosomichi, "Three-point functions in sine-Liouville theory," JHEP **0109**, 003 (2001) [arXiv: hep-th/0105217].

[33] G. Giribet and D. Lopez-Fogliani, "Remarks on free field realization of SL(2,R)/U(1) x U(1) WZNW model," arXiv: hep-th/0404231.

[34] J. M. Maldacena and H. Ooguri, "Strings in AdS(3) and the SL(2,R) WZW model. III: Correlation functions," Phys. Rev. **D65**, 106006 (2002) [arXiv: hep-th/0111180].

[35] A. Giveon and D. Kutasov, "Notes on AdS(3)," Nucl. Phys. B **621**, 303 (2002) [arXiv:hep-th/0106004].

[36] K. Hori and C. Vafa, "Mirror symmetry," arXiv: hep-th/0002222.

[37] C. Ahn, C. Kim, C. Rim and M. Stanishkov, "Duality in N = 2 super-Liouville theory," arXiv:hep-th/0210208.

[38] Y. Nakayama, "Liouville field theory: A decade after the revolution," arXiv: hep-th/0402009.

[39] M. B. Green and N. Seiberg, "Contact Interactions In Superstring Theory," Nucl. Phys. **B299**, 559 (1988).

[40] O. Aharony, A. Giveon and D. Kutasov, "LSZ in LST," arXiv: hep-th/0404016.

[41] M. Goulian and M. Li, "Correlation Functions In Liouville Theory," Phys. Rev. Lett. **66**, 2051 (1991); P. Di Francesco and D. Kutasov, "World sheet and space-time physics in two-dimensional (Super)string theory," Nucl. Phys. **B375**, 119 (1992) [arXiv:hep-th/9109005].

[42] J. Teschner, "Liouville theory revisited," Class. Quant. Grav. **18**, R153 (2001) [arXiv: hep-th/0104158].

[43] S. Ribault and V. Schomerus, "Branes in the 2-D black hole," JHEP **0402**, 019 (2004) [arXiv: hep-th/0310024].

[44] T. Fukuda and K. Hosomichi, "Super Liouville theory with boundary," Nucl. Phys. **B635**, 215 (2002) [arXiv: hep-th/0202032].

[45] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, "Liouville field theory on a pseudosphere," arXiv: hep-th/0101152.

[46] V. Fateev, A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, "Boundary Liouville field theory. I: Boundary state and boundary two-point function," arXiv: hep-th/0001012; J. Teschner, "Remarks on Liouville theory with boundary," arXiv: hep-th/0009138.

[47] J. Teschner, "On the Liouville three point function," Phys. Lett. **B363**, 65 (1995) [arXiv: hep-th/9507109]; J. Teschner, "On structure constants and fusion rules in the SL(2,C)/SU(2) WZNW model," Nucl. Phys. **B546**, 390 (1999) [arXiv: hep-th/9712256].

[48] B. Ponsot, V. Schomerus and J. Teschner, "Branes in the Euclidean AdS(3)," JHEP **0202**, 016 (2002) [arXiv: hep-th/0112198].

[49] H. Ooguri, Y. Oz and Z. Yin, "D-branes on Calabi-Yau spaces and their mirrors," Nucl. Phys. B **477** (1996) 407 [arXiv: hep-th/9606112].

[50] C. Bachas and M. Petropoulos, "Anti-de-Sitter D-branes," JHEP **0102** (2001) 025 [arXiv: hep-th/0012234].

[51] H. Rhedin, "Gauged supersymmetric WZNW model using the BRST approach," Phys. Lett. **B373** (1996) 76 [arXiv: hep-th/9511143].

[52] A. Fotopoulos, "Semiclassical description of D-branes in SL(2)/U(1) gauged WZW model," Class. Quant. Grav. **20**, S465 (2003) [arXiv: hep-th/0304015].

[53] Y. Matsuo and S. Yahikozawa, "Superconformal Field Theory With Modular Invariance On A Torus," Phys. Lett. **B178**, 211 (1986).

[54] A. Giveon, D. Kutasov and A. Schwimmer, "Comments on D-branes in AdS(3)," Nucl. Phys. **B615**, 133 (2001) [arXiv: hep-th/0106005].

[55] K. Miki, "The Representation Theory Of The SO(3) Invariant Superconformal Algebra," Int. J. Mod. Phys. **A5**, 1293 (1990).

[56] D. Israel, A. Pakman and J. Troost, "Extended SL(2,R)/U(1) characters, or modular properties of a simple non-rational conformal field theory," JHEP **0404** (2004) 045 [arXiv: hep-th/0402085].

[57] A. Recknagel and V. Schomerus, "D-branes in Gepner models," Nucl. Phys. B **531**, 185 (1998) [arXiv:hep-th/9712186].

[58] I. Bakas and E. Kiritsis, "Beyond the large N limit: Nonlinear W(infinity) as symmetry of the SL(2,R) / U(1) coset model," Int. J. Mod. Phys. **A7**, 55 (1992) [arXiv: hep-th/9109029].

[59] S. Ribault, "Two AdS(2) branes in the Euclidean AdS(3)," JHEP **0305**, 003 (2003) [arXiv:hep-th/0210248].

[60] E. J. Martinec, "The annular report on non-critical string theory," arXiv:hep-th/0305148.

[61] N. Seiberg and D. Shih, "Branes, rings and matrix models in minimal (super)string theory," JHEP **0402**, 021 (2004) [arXiv:hep-th/0312170].

[62] S. Elitzur, A. Giveon, D. Kutasov, E. Rabinovici and G. Sarkisian, "D-Branes In The Background Of Ns Fivebranes," Int. J. Mod. Phys. **A16** (2001) 880.

[63] O. Pelc, "On the quantization constraints for a D3 brane in the geometry of NS5 branes," JHEP **0008**, 030 (2000) [arXiv: hep-th/0007100].

[64] S. Ribault, "D3-branes in NS5-branes backgrounds," JHEP **0302**, 044 (2003) [arXiv: hep-th/0301092].

[65] D. Israel, A. Pakman and J. Troost, "D-branes in Little String Theory", to appear.

[66] V. K. Dobrev, "Structure Of Verma Modules And Characters Of Irreducible Highest Weight Modules Over N=2 Superconformal Algebras," in "CLAUSTHAL 1986, PROCEEDINGS, DIFFERENTIAL GEOMETRIC METHODS IN THEORETICAL PHYSICS", 289-307.

[67] V. K. Dobrev, "Characters Of The Unitarizable Highest Weight Modules Over The N=2 Superconformal Algebras," Phys. Lett. **B186**, 43 (1987).

[68] E. Kiritsis, "Character Formulae And The Structure Of The Representations Of The N=1, N=2 Superconformal Algebras," Int. J. Mod. Phys. **A3**, 1871 (1988).

[69] P. Goddard, A. Kent and D. I. Olive, "Virasoro Algebras And Coset Space Models," Phys. Lett. **B152**, 88 (1985); P. Goddard, A. Kent and D. I. Olive, "Unitary Representations Of The Virasoro And Supervirasoro Algebras," Commun. Math. Phys. **103**, 105 (1986); Z. a. Qiu, "Modular Invariant Partition Functions For N=2 Superconformal Field Theories," Phys. Lett. B **198**, 497 (1987).

[70] A. Schwimmer and N. Seiberg, "Comments On The N=2, N=3, N=4 Superconformal Algebras In Two-Dimensions," Phys. Lett. **B184**, 191 (1987).

[71] W. Boucher, D. Friedan and A. Kent, "Determinant Formulae And Unitarity For The N=2 Superconformal Algebras In Two-Dimensions Or Exact Results On String Compactification," Phys. Lett. **B172**, 316 (1986).

[72] A. Pakman, "Unitarity of supersymmetric SL(2,R)/U(1) and no-ghost theorem for fermionic strings in AdS(3) x N," JHEP **0301**, 077 (2003) [arXiv: hep-th/0301110].

[73] A. Pakman, "BRST quantization of string theory in AdS(3)," JHEP **0306**, 053 (2003) [arXiv: hep-th/0304230].

[74] M. R. Douglas and B. Fiol, "D-branes and discrete torsion. II," arXiv: hep-th/9903031.

V

Champs électromagnétiques en théorie des cordes

L'espace des modules des théories de cordes hétérotiques est plus large que celui des supercordes de type II, en raison du secteur de jauge qui peut également être déformé. Nous avons déjà mentionné ce fait dans la section II.4 à propos des modèles toroïdaux. Dans ce chapitre nous allons aborder l'étude des fonds électromagnétiques dans les cordes hétérotiques. Nous voulons construire des théories conformes exactes, prenant correctement en compte la modification de la géométrie due au champ électromagnétique. Un exemple particulièrement intéressant de telles solution est l'univers de Gödel, que nous avons étudié dans la publication n°5. Nous montrerons ensuite que dans certains cas les déformations électromagnétiques possèdent une valeur critique pour laquelle nous obtenons une variété de quotient géométrique. Cette construction est abordée dans la publication n°6.

V.1. L'univers de Gödel

L'univers de Gödel est apparu historiquement comme solution de la relativité générale, pour une constante cosmologique négative, en présence d'un fluide parfait, en rotation et de pression nulle [134]. La métrique à quatre dimensions de cette solution est donnée par :

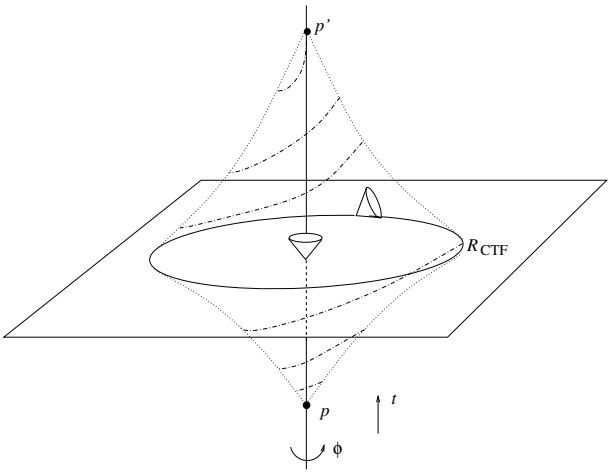

FIG. V.1. Géométrie de l'univers de Gödel. Les courbes de genre temps fermées apparaissent au rayon critique R_{CTF}. Une géodésique de genre lumière, du point p au point p' est aussi tracée.

$$\mathrm{d}s^2 = 2\omega^{-2}\left(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + (\sinh^2 r - \sinh^4 r)\,\mathrm{d}\phi^2 + 2\sqrt{2}\sinh^2 r\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}t\right) + \mathrm{d}z^2\,, \tag{V.1}$$

avec $\phi \sim \phi + 2\pi$ pour éviter d'avoir une singularité conique en $r = 0$. La coordonnée z ne joue aucun rôle dans l'analyse.

La propriété principale de cet espace-temps est la présence de courbe de genre temps fermées, le long du vecteur ∂_ϕ, au delà d'un rayon critique, $R_{\text{CTF}} = \log(1+\sqrt{2})$. En effet le cône de lumière s'incline lorsque r augmente, jusqu'à contenir la direction compacte ϕ, voir la figure V.1. Notons que cet espace-temps est homogène. Par conséquent ces courbes de genre temps fermées existent autour de tout point. Elles ne sont cependant parcourues par aucune géodésique. Sur la figure V.1 nous avons donné l'exemple d'une géodésique de genre lumière ; un rayon lumineux émis en $r = 0$ décrit une hélice atteignant le rayon critique R_{CTF} mais est ensuite refocalisé en $r = 0$. Cependant des particules accélérées peuvent se propager le long de ces courbes de genre temps fermées, mettant en danger la causalité. Une autre conséquence de ces propriétés est l'impossibilité de définir une énergie dans cet espace-temps, car la variété ne peut être foliée avec des hypersurfaces du genre espace.

Univers de Gödel en supergravité. Des solutions similaires à l'univers de Gödel sont réapparues récemment en supergravité. En effet, il est apparu dans la classification complète des solutions supersymétriques de la supergravité minimale à cinq dimensions [135] que l'existence de courbes de genre temps fermées est générique ; en d'autres termes, les solutions supersymétriques sans courbes de genres temps fermées sont de mesure nulle. D'autres solutions furent ensuite trouvées dans les supergravités de type II, qui sont reliées par dualité T à des solutions d'ondes gravitationnelles avec des champs de R-R [136]. Il est finalement possible d'obtenir des courbes de genre temps fermées en considérant des trous noirs chargés, construits à l'aide de D-branes, en rotation très rapide [137].

La question importante que nous pouvons maintenant nous poser concerne la viabilité de telles solutions en théorie des cordes. En effet ces solutions classiques ne sont peut être pas compatibles avec la théorie de la gravitation quantique fournie par la théorie des supercordes. Il existe en particulier une conjecture de «protection de la chronologie» [138] postulant l'incompatibilité des courbes de genres temps fermées avec une théorie quantique de la gravitation. Nous pouvons pour cela étudier la dynamique d'objets quantiques dans ces espaces-temps, perturbatifs, comme les cordes fondamentales, ou non-perturbatifs, comme les D-branes. Dans le premier cas il est possible d'étudier les univers de Gödel duaux aux ondes gravitationnelles, exactement solubles. Cependant il est nécessaire d'utiliser la jauge du cône de lumière et d'effectuer une dualité T, et il n'est pas clair qu'alors les phénomènes liés aux courbes de genre temps fermées soient visibles. Dans le deuxième cas, la dynamique classique de D2-branes cylindriques, appelées supertubes, fut étudiée dans [139].

L'univers de Gödel hétérotique. Nous voulons maintenant montrer, en suivant la publication n°5, comment construire une théorie superconforme *exacte* décrivant la propagation des cordes hétérotiques dans une classe d'univers de Gödel, incluant la solution originale, eq. (V.1). Il sera alors possible de calculer exactement le spectre, la fonction de partition ou les fonctions de corrélations, dans un formalisme covariant. Nous verrons que cette solution est instable à cause des courbes de genre temps fermées.

Construction de la solution. Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, l'espace des déformations des modèles de WZW est élargi dans la théorie des cordes hétérotiques, car nous pouvons aussi agir sur l'algèbre des courants $SO(32)$ ou $E_8 \times E_8$ au niveau un du secteur de jauge.

Dans le cas présent nous considérons la théorie des cordes hétérotiques dans $\text{AdS}_3 \times \text{S}^3 \times \text{K}3$, c.-à.-d. la limite près de l'horizon d'un système de NS5-branes et de cordes fondamentales. Cette solution s'obtient à partir de celles des cordes de type II par l'application hétérotique [56] ; nous remplaçons simplement les dix fermions du secteur droit par les trente-deux fermions du secteur de jauge, avec les conditions de periodicités appropriées pour respecter l'invariance modulaire.

En choisissant un courant arbitraire dans le secteur de jauge, par exemple $\bar{J}_g(\bar{z}) = \imath\lambda^1\lambda^2$, générant une algèbre $U(1)$ au niveau 2, nous pouvons ajouter un champ magnétique dans AdS_3 à l'aide de l'opérateur exactement marginal :

$$\delta S \sim \mathrm{H} \int \mathrm{d}^2 z \; \mathscr{J}^3 \bar{J}_g$$

où $\mathscr{J}^3$ est le courant elliptique total de $SL(2,\mathbb{R})$ supersymétrique, voir (III.6). Comme pour la déformation symétrique déjà présentée dans la section III.4, nous pouvons intégrer cette déformation pour une valeur finie du paramètre, et nous obtenons la solution suivante, au premier ordre en $1/k$ [140], pour la métrique, la deux-forme de NS–NS et le champ de jauge :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= k\left\{\mathrm{d}\rho^2 - \cosh^2\rho\ \mathrm{d}t^2 + \sinh^2\rho\ \mathrm{d}\phi^2 - 2\mathrm{H}^2\left(\cosh^2\rho\ \mathrm{d}t + \sinh^2\rho\ \mathrm{d}\phi\right)^2\right\}, \\ \mathbf{B} &= \frac{k}{2}\cosh 2\rho\ \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}t, \\ \mathscr{F} &= \mathrm{d}\mathbf{A} = \sqrt{k}\mathrm{H}\sinh 2\rho\ (\mathrm{d}t + \mathrm{d}\phi) \wedge \mathrm{d}\rho. \end{aligned} \tag{V.2}$$

Le dilaton reste constant tout le long de cette ligne de déformation paramétrée par H. Contrairement aux déformations symétriques, la géométrie de ce type de déformation est *exacte*, car le modèle sigma peut se mettre sous la forme (non factorisée) de la somme du modèle de WZW pour $SL(2,\mathbb{R})$ et pour $U(1)$ [141].

L'espace-temps AdS_3 correspond à $\mathrm{H} = 0$, tandis que la métrique de l'univers de Gödel original, voir (V.1), apparaît pour la valeur $\mathrm{H}_{\text{GÖDEL}} = 1/\sqrt{2}$, qui n'a ici rien de remarquable. Pour toute valeur non nulle du paramètre de déformation, il existe des courbes de genre temps fermées, le long du cercle paramétré par ϕ, au delà du rayon critique : $R_{\mathrm{CTF}} = \operatorname{arcsinh} 1/\sqrt{2}\mathrm{H}$. En réécrivant la métrique de AdS_3 comme une fibration de Hopf du genre temps, nous pouvons réinterpréter ces solutions comme un changement de rayon de la fibre.

Cette famille de métriques était déjà connue en relativité générale [142], mais nous avons montré qu'elle correspondait à une famille de théories conformes exactes. Par construction, cette famille de solution possède une symétrie affine $SL(2,\mathbb{R})$, provenant de l'algèbre des courants du secteur droit laissée intacte par la deformation. Il est possible de montrer que toute la supersymétrie est brisée par cet opérateur marginal. Par contre, dans les supercordes de type II, il est possible de construire un univers de Gödel supersymétrique. Nous choisissons en effet un boson compact X de la variété de compactification, et déformons par l'opérateur $\mathscr{J}^3\bar{\partial}X$. Lorsque le rayon de cette coordonnée est petit, nous pouvons faire une réduction de Kaluza-Klein, et nous obtenons alors la même solution (V.2), avec une supersymétrie d'espace-temps provenant du secteur droit fermionique.

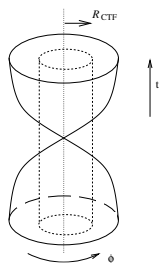

FIG. V.2. Cordes longues dans l'univers de Gödel, enroulées autour des courbes de genre temps fermées.

Analyse du spectre. La description de cette famille d'univers de Gödel comme une déformation marginale de $SL(2,\mathbb{R})$ permet de calculer de manière très simple la fonction de partition et

d'en déduire le spectre. En effet, suivant la logique générale de la section II.4, cette déformation agit comme une rotation $SO(2)$ entre le réseau gauche du courant $\mathscr{J}^3$ et la réseau droit du courant de jauge $U(1)$. Cette rotation est paramétrée comme : $\cos^2\xi = \frac{1}{1+2\mathrm{H}^2}$.

À partir de cette fonction de partition nous pouvons étudier le spectre physique des cordes hétérotiques dans cet univers de Gödel [140]. Nous ne présenterons ici que les résultats qualitatifs. Notons pour commencer que l'unitarité du spectre physique dans $SL(2,\mathbb{R})$ est préservée par la déformation. Le comportement est très différent pour les deux types de représentations de $SL(2,\mathbb{R})$:

- le spectre de *cordes longues*, construites avec les représentations continues de $SL(2,\mathbb{R})$, devient instable lorsque le champ magnétique est non-nul. Ce comportement se comprend à l'aide des solutions de cordes classiques ; en effet les cordes longues peuvent toujours devenir macroscopiques, et s'enroulent autour des courbes de genre temps fermées au bout d'un temps fini, voir fig. V.2. Ce comportement se manifeste dans le spectre par l'apparition d'un terme quadratique pour l'énergie avec le mauvais signe ;
- Le spectre d'*états liés*, construits avec les représentations discrètes de $SL(2,\mathbb{R})$, ne présente pas de modes instables ; ceux-ci n'existent pas pour les valeurs autorisées pour le spin, données par (III.9). Ces états correspondent en effet à des surfaces d'univers localisées dans l'espace-temps AdS_3/Gödel, et elles ne ressentent pas les courbes de genre temps fermées qui sont «topologiquement grandes».

Suppression des courbes de genre temps fermées. Cette instabilité des cordes longues dans l'espace-temps anti-de Sitter/Gödel doit conduire à une modification de la géométrie de l'espace-temps, par un mécanisme qui pourrait être lié à une condensation de cordes longues. Cependant la dynamique de ce processus n'est pas accessible dans l'approche de première quantification dans laquelle est formulée la théorie des cordes. Nous attendons cependant que cette instabilité se résolve par une modification des champs de fond, et nous pouvons tenter de trouver la théorie conforme sur la surface d'univers obtenue par ce processus.

Nous considérons pour cela une déformation marginale additionnelle, la déformation symétrique $\mathscr{J}^3\bar{J}^3$ étudiée dans la section III.4. Cette déformation est compatible avec la déformation magnétique car chacune d'entre elles préserve les courants chiraux qui génèrent l'autre. La solution obtenue, paramétrée par (H,λ) est la suivante [140] :

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{k}\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}r^2 - \frac{(\lambda^2+1)^2+(8\mathrm{H}^2\lambda^2-(\lambda^2-1)^2)\cosh^2 r}{(\lambda^2+1+(\lambda^2-1)\cosh r)^2}\mathrm{d}\alpha^2 \\
&\quad -\frac{(\lambda^2+1)^2+8\mathrm{H}^2\lambda^2-(\lambda^2-1)^2\cosh^2 r}{(\lambda^2+1+(\lambda^2-1)\cosh r)^2}\mathrm{d}\beta^2 \\
&\quad -2\frac{4\lambda^2(1+2\mathrm{H}^2)\cosh r-(\lambda^4-1)\sinh^2 r}{(\lambda^2+1+(\lambda^2-1)\cosh r)^2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \\
B &= \frac{k}{4}\frac{\lambda^2-1+(\lambda^2+1)\cosh r}{\lambda^2+1+(\lambda^2-1)\cosh r}\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}\alpha \\
A &= \frac{2\sqrt{k}\mathrm{H}\lambda}{\lambda^2+1+(\lambda^2-1)\cosh r}(\mathrm{d}\beta+\cosh r\mathrm{d}\alpha) \\
e^{2\Phi} &= \frac{\lambda\, e^{2\Phi_0}}{\lambda^2+1+(\lambda^2-1)\cosh r}
\end{aligned}
$$

Nous pouvons maintnenant nous demander si la nouvelle déformation paramétrée par λ est capable de supprimer les courbes de genre temps fermées. Nous observons que les courbes de genre temps fermées disparaissent pour $\lambda^2 \leqslant \frac{1}{1+2\mathrm{H}^2}$.

Cependant, dans ce régime, la solution développe une singularité pour la courbure, le dilaton, le champ de jauge et la deux-forme en $r = \operatorname{arccosh}\left(\lambda^2+1/1-\lambda^2\right)$. Lorsque la valeur de λ diminue, cette singularité annulaire se rapproche de l'origine des coordonnées, et les courbes de genre temps fermées disparaissent précisément lorsque cette singularité se situe au rayon R_{CTF} pour lequel se développe une courbe de genre lumière fermée. Il est donc tentant de faire l'hypothèse que cette singularité correspond à une condensation de cordes longues à l'endroit où elles enroulent des courbes de genre temps fermées. Bien sûr, le processus de nucléation proposé ici brise l'homogénéïté de l'espace-temps de Gödel. L'étude du spectre de la théorie des cordes, en utilisant les mêmes méthodes que précédemment, est en accord avec l'étude de la géométrie. Le terme quadratique dans l'énergie, responsable de l'instabilité, disparaît en effet pour $\lambda = \frac{1}{1+2\mathrm{H}^2}$.

Ce processus peut aussi s'étudier d'un point de vue complémentaire. Nous pouvons commencer par la théorie des cordes hétérotiques sur $\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^3$, déformée par l'opérateur $\mathscr{J}^3\bar{J}^3$. L'espace-temps possède alors un «mur de domaine» que nous avons discuté plus haut créant une singularité annulaire. Nous pouvons ajouter à cette solution un champ magnétique, correspondant à un mur de domaine chargé, mais celui-ci ne peut dépasser une valeur maximale. Cette description est proche de la physique des supertubes discutée dans [139], mais nous avons ici l'avantage de posséder une description exacte de la théorie des cordes dans ces espaces-temps.

V.2. Quotients géométriques

Les variétés de groupe s'écrivant comme une fibration du genre espace possèdent une propriété remarquable, qui n'existe pas dans l'univers de Gödel. En effet, pour une valeur finie de la déformation électromagnétique, la fibre se décompactifie et découple du reste de la théorie conforme ; nous obtenons alors un *quotient géométrique*, par opposition aux modèles de WZW jaugés. Nous avons commencé l'étude de ces théories dans la publication n°6, pour la trois-sphère et AdS_3.

La généralisation de cette construction aux autres groupes, plus compliqués mais plus riches, est l'objet d'un travail en cours.

L'exemple de la trois-sphère. La déformation magnétique de la trois-sphère fut considérée pour la première fois dans [143–145]. L'objectif de ces travaux était de régulariser les divergences infrarouges de la théorie des cordes, et d'étudier l'effet des champs magnétiques, en remplaçant l'espace plat par $SU(2) \times \mathbb{R}_Q$, pour que l'opérateur de champ magnétique soit exactement marginal. L'effet de la déformation $\delta S = \int \mathrm{d}^2 z\, \mathscr{J}^3 \bar{J}_g$ s'obtient de manière très similaire au cas précédent. Nous obtenons donc une fibration déformée sur la deux-sphère :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \frac{k}{4}\left[\mathrm{d}\beta^2 + \sin^2\beta\,\mathrm{d}\alpha^2 + (1-2\mathrm{H}^2)(\mathrm{d}\gamma + \cos\beta\,\mathrm{d}\alpha)^2\right], \\
\mathbf{B} &= \frac{k}{4}\sin\beta\,\mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}\gamma, \\
\mathbf{A} &= \sqrt{k}\,\mathrm{H}\,(\mathrm{d}\gamma + \cos\beta\,\mathrm{d}\alpha)\,.
\end{aligned}$$

Nous voyons clairement que dans cet exemple le point $\mathrm{H} = 1/\sqrt{2}$ est particulier. En effectuant le changement de coordonnées : $y = \sqrt{k(1/2 - \mathrm{H}^2)/2}\,\gamma$, nous observons que le cercle paramétré par y se décompactifie et la métrique se factorise [141] :

$$S^3 \xrightarrow[\mathrm{H}^2 \to 1/2]{} \mathbb{R} \times S^2$$

À ce point le champ électromagnétique atteint une valeur maximale [145], alors que la torsion s'annule. Nous obtenons donc la deux-sphère comme une théorie conforme exacte, en présence d'un flux électromagnétique. Notons que la deux-sphère correspond au quotient géométrique : $SU(2)/U(1)$, qui diffère du modèle de WZW jaugé. La quantification du flux magnétique à travers la deux-sphère impose la condition suivante sur le niveau de $SU(2)$:

$$k = 2p^2 \,, \quad p \in \mathbb{N} \,. \tag{V.3}$$

Remarquons que cette limite de décompactification peut aussi s'obtenir comme un quotient hétérotique [146].

Nous avons calculé la fonction de partition de la déformation magnétique de la trois-sphère, premièrement en décomposant les caractères supersymétriques de $SU(2)$ en fonction des caractères des modèles minimaux de $N = 2$, deuxièmement en effectuant une «transformation de Lorentz» $SO(1,1)$, de paramètre $\cosh^2 x = \frac{1}{1-2\mathrm{H}^2}$. entre le réseau gauche du courant total $\mathscr{J}^3$ et le réseau droit des fermions du groupe de jauge. Nous observons ensuite, que dans la limite de champ magnétique critique où nous trouvons la deux sphère, le niveau de $SU(2)$ doit prendre les valeurs (V.3), en accord avec la quantification de la charge. Nous obtenons ainsi la fonction de partition pour la deux-sphère, contenant dans le secteur gauche des caractères du quotient $SU(2)/U(1)$ et dans le secteur droit des caractères de $SU(2)$ [141].

Remarquons pour finir que si nous considérons des champs magnétiques supérieurs à la valeur critique – en d'autres termes nous effectuons un prolongement analytique – nous obtenons un *univers de Gödel compact*, qui est un espace homogène, possédant une isométrie $SU(2)$ et des courbes de genre temps fermées.

Champs électriques dans $\mathbf{AdS}_3$. Le deuxième exemple que nous avons étudié est celui d'AdS_3. Nous considérons maintenant une déformation électromagétique utilisant le générateur *hyperbolique* de l'algèbre $SL(2,\mathbb{R})$. D'un point de vue géométrique, nous écrivons l'espace-temps AdS_3 comme une fibration du genre espace sur AdS_2, et nous déformons la fibre selon :

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{k}{4}\left[\mathrm{d}r^2 - \sinh^2 r\mathrm{d}t^2 + (1-2\mathrm{H}^2)(\mathrm{d}\phi + \cosh r\mathrm{d}t)^2\right].$$

Là encore, lorsque le champ électrique atteint sa valeur critique pour $\mathrm{H} = 1/\sqrt{2}$, la géométrie se factorise comme :

$$\mathrm{AdS}_3 \xrightarrow[\mathrm{H}^2 \to 1/2]{} \mathbb{R} \times \mathrm{AdS}_2$$

Cependant, contrairement à la variété compacte S^2, la flux électrique dans AdS_2 n'impose pas de quantification du niveau de l'algèbre.

Comme nous l'avons déjà mentionné, les caractères de $SL(2,\mathbb{R})$ dans la base hyperbolique ne sont pas connnus. Cependant nous pouvons suivre la variation de la dimension des opérateurs primaires le long de la ligne de déformation, et ainsi connaître le spectre correspondant dans AdS_2 [141]. Notons que, le spectre du générateur hyperbolique étant continu, nous n'obtenons pas non plus dans cette analyse de restriction sur le niveau.

La connaissance de la théorie des cordes dans ces espaces de quotient est très utile, car l'espace-temps $\mathrm{AdS}_2 \times \mathrm{S}^2$ correspond à la limite près de l'horizon d'un trou noir chargé à quatre dimensions – dit de Reissner-Nordström – de masse M et de charge Q :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -\left(1-\frac{r_+}{r}\right)\left(1-\frac{r_-}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{\left(1-\frac{r_+}{r}\right)\left(1-\frac{r_-}{r}\right)} + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2 \,, \\ \mathscr{F} &= \frac{Q}{r^2}\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}r \qquad\qquad \text{avec} \quad r_\pm = G_4\left(M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}\right) \,, \end{aligned}$$

dans la limite extrémale $r_- \to r_+$. Nous pouvons construire cet espace-temps à l'aide des quotients géométriques AdS_2 et S^2, au même niveau entier k. Cependant, il faut encore effectuer une projection sur les charges électromagnétiques, similaire à celle de la section IV.4, pour réaliser la supersymétrie d'espace-temps.

Nous pouvons ainsi espérer comprendre la physique des trous noirs grâce à la théorie des cordes. En particulier, la dualité AdS/CFT de la section III.1 peut être étendue à l'espace-temps anti-de Sitter à deux dimensions. Nous attendons ici une dualité avec une mécanique quantique superconforme. Cette dualité a été explorée dans le cadre des supercordes IIB, où le trou noir est construit à l'aide de D3-branes enroulées dans des variétés de Calabi-Yau.

Nous pouvons donc utiliser notre construction hétérotique – liée à la précédente par une dualité S – pour mieux comprendre cette holographie. En particulier le calcul de fonctions de corrélation dans AdS_2 est très intéressant.

Autres modèles. Ces méthodes peuvent être utilisées pour construire d'autres solutions intéressantes de la théorie des cordes hétérotiques. Premièrement, nous pouvons générer une solution électromagnétique à l'aide du générateur *parabolique* de $SL(2,\mathbb{R})$, du genre lumière. Nous obtenons de cette manière la superposition d'une onde plane électromagnétique et gravitationnelle avec AdS_3 :

$$\mathrm{d}s^2 = k\left[\frac{\mathrm{d}u^2}{u^2} + \frac{\mathrm{d}x^+\mathrm{d}x^-}{u^2} - 2\mathrm{H}^2\left(\frac{\mathrm{d}x^+}{u^2}\right)^2\right].$$

Il serait très intéressant d'explorer les propriétés holographiques de cette solution, car à la fois AdS_3 et les ondes planes [147] ont une interprétation holographique connue.

De manière plus générale, toutes les déformations électromagnétiques de $SL(2,\mathbb{R})$ préservent l'algèbre affine chirale du secteur droit, et autorisent ainsi la construction d'une copie de l'algèbre de Virasoro d'espace-temps. Ce phénomène indique qu'il doit exister une holographie générale de ces espaces-temps, incluant l'univers de Gödel.

Trous noirs. Une autre généralisation de ce travail est le plongement de trous noirs dans ces espaces-temps. En effet, les trous noirs en rotation des théories de gravitation à trois dimensions avec une constante cosmologique négative, appelés BTZ, sont obtenus simplement par des identifications de l'espace-temps anti-de Sitter [148,149]. Du point de vue de la théorie des cordes, il faut alors considérer un orbifold du modèle de WZW par une symétrie discrète, voir par exemple [150]. Cependant une bonne compréhension de la base hyperbolique de $SL(2,\mathbb{R})$ est nécessaire pour comprendre ces solutions.

L'identification correspondant aux trous noirs non-extrémaux – la masse est différente du moment angulaire – s'obtient par des identifications selon des isométries correspondant aux générateurs *hyperboliques* des algèbres chirales $SL(2,\mathbb{R})$. Cet orbifold est donc compatible avec la déformation électrique interpolant entre AdS_3 et $\mathrm{AdS}_2 \times \mathbb{R}$. Cependant l'analyse précise de la structure causale de cette solution est nécessaire pour comprendre les propriétés de ces trous noirs. Dans le cas extrémal, la solution de trou noir est obtenue par une identification *parabolique* de l'algèbre gauche et une identification hyperbolique de l'algèbre droite. Elle est donc compatible avec la solution onde gravitationnelle/anti-de Sitter, qui préserve l'algèbre parabolique gauche et toute l'algèbre $SL(2,\mathbb{R})$ droite.

Publication n°5 : «Quantization of heterotic strings in a Gödel/Anti de Sitter spacetime and chronology protection».

Published by Institute of Physics Publishing for SISSA/ISAS

Received: *November 13, 2003*
Accepted: *January 20, 2004*

Quantization of heterotic strings in a Gödel/anti de Sitter spacetime and chronology protection*

Dan Israël

Laboratoire de Physique Théorique de l'Ecole Normale Supérieure†
24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France
E-mail: israel@lpt.ens.fr

Abstract: We show that a Gödel-like deformation of AdS_3 in heterotic string theory can be realized as an exact string background. Indeed this class of solutions is obtained as an exactly marginal deformation of the worldsheet conformal field theory describing the NS5/F1 heterotic background. It can also be embedded in type-II superstrings by Kaluza-Klein reduction. We compute the spectrum of this model as well as the genus one modular invariant partition function. We discuss the issue of closed timelike curves and the propagation of long strings. They destabilize completely the background, although we construct another exact string background that may describe the result of the condensation of these long strings. Closed timelike curves are avoided in that case.

Keywords: Superstring Vacua, Conformal Field Models in String Theory.

*Research partially supported by the EEC under the contracts HPRN-CT-2000-00122, HPRN-CT-2000-00131.

†Unité mixte du CNRS et de l'Ecole Normale Supérieure, UMR 8549.

© SISSA/ISAS 2004

JHEP01(2004)042

Contents

1. Introduction **1**

2. The Gödel/AdS$_3$ solution **2**
- 2.1 The worldsheet conformal field theory 2
- 2.2 Causal structure 4
- 2.3 Conformal invariance 4
- 2.4 Target-space supersymmetry 5

3. The string spectrum and one-loop partition function **6**
- 3.1 Exact string spectrum in the Gödel/AdS spacetime 6
- 3.2 One-loop vacuum amplitude 7

4. The fate of long strings **8**
- 4.1 Classical analysis 8
  - 4.1.1 Long strings in AdS$_3$ 8
  - 4.1.2 Long strings in AdS$_3$/Gödel 9
- 4.2 Unitarity of the physical spectrum 9
- 4.3 Long strings spectrum 10

5. Can gravitational deformation cure the pathology? **12**
- 5.1 Switching on more background fields 12
- 5.2 Long string spectrum and chronology protection 13

6. Discussion and conclusions **14**

A. The SL$(2,\mathbb{R})$ partition function **15**

B. Coordinate systems and geodesics **17**

C. No-ghost theorem for string theory on Gödel/AdS$_3$: sketch of a proof **17**

1. Introduction

The fate of closed timelike curves (CTC's) in general relativity is a long standing problem. There is in particular a conjecture by Hawking [1] — the "Chronology Protection Conjecture" — which states that, in quantum gravity, a causally safe background cannot develop closed timelikes curves. One of the oldest known nontrivial spacetime with this pathology is the Gödel universe [2]. Spacetimes of this kind have been recently embedded in various

JHEP01(2004)042

supergravity theories [3, 4, 5, 6], in the hope that string/M theory would cast a new light on the fate of closed timelike curves in these spacetimes. All these works are based on an analysis of the low energy effective action and therefore do not take into account the full quantum string effects. Nevertheless some interesting observations were made while considering extended BPS objects (branes and supertubes) as probes in these spacetimes, which may destabilize the background [7]. Besides one type of Gödel universe is T-dual to an exact type-IIA pp-waves background. This opened the door for exact quantization of string probes [8, 9, 6, 10], albeit only in the lighthcone gauge.

In this note we would like to point out that a one parameter class of spacetimes interpolating between AdS_3 and the Gödel universe constructed in [11] — and recently discussed in [12] in the context of general relativity — can actually be embedded as an *exact heterotic string background*. It turns out that it is obtained as an asymmetric deformation of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_L \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_R$ conformal field theory (all the left-right symmetric deformations have been considered in a previous paper [13]) and of the current algebra of the gauge group. If we want to consider type-II superstrings — and in that case the background will be supersymmetric — we can choose an internal compact U(1) instead. The CFT description of this background allows us to compute the exact string spectrum and partition function. We can also trace back the different kind of states which appear in the spectrum in terms of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ representations, and show that the no-ghost theorem for $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ can be extended to the deformed theory.

Then we discuss long string states to see if something special happens due to the closed timelike curves around which they can wind. We will show explicitly that the long strings seems to destabilize the background, because their spectrum becomes highly tachyonic. We propose a mechanism to solve the causality problem, by the condensation of a ring of fundamental strings, akin to the enhancon mechanism [14]. The endpoint of this condensation can also be realized as an exact conformal field theory, which does not contain instabilities as we shall see. This can be interpreted as a stringy chronology protection.

The paper is organized as follows. In section 2, we study the sigma model corresponding to the Gödel/AdS_3 solution, i.e. the solution for the background fields. In section 3 we compute the spectrum for all the string excitations in this background, and then the modular invariant partition function at genus one. In section 4 we consider the long string solutions, classically and at the level of the exact string background. We propose a scenario in section 5 to solve the instability by condensing fundamental strings. Finally in section 6 we summarize the main results of the paper and discuss holography. Appendix A is a short review of the spectrum and partition function for AdS_3; in appendix B we give several coordinate systems on the Gödel/AdS_3 spacetime. An outline of the proof of the no-ghost theorem is given in appendix C.

2. The Gödel/AdS_3 solution

2.1 The worldsheet conformal field theory

We start with the $AdS_3 \times S^3 \times K3$ supersymmetric background of heterotic string theory. It represents a configuration of wrapped NS5-branes and fundamental strings [15, 16, 17].

JHEP01(2004)042

The part of the worldsheet action which is relevant to discuss the deformation comprises the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k$ — AdS_3 — part and the worldsheet right-moving current algebra:

$$S = \frac{1}{4\pi}\int d^2z\,\frac{k}{2}\left(\partial r\bar{\partial}r - \partial\alpha\bar{\partial}\alpha - \partial\beta\bar{\partial}\beta - 2\cosh r\partial\alpha\bar{\partial}\beta\right) + \eta_{\mu\nu}\psi^\mu\bar{\partial}\psi^\nu + \lambda^I\partial\lambda^I \tag{2.1}$$

Here the ψ^μ are the worldsheet fermions of the holomorphic CFT (supersymmetric side), while the antiholomorphic fermions λ^I are the internal fermions of the gauge sector, with currents: $\bar{J}^{IJ} = i : \lambda^I(\bar{z})\lambda^J(\bar{z}) :$. We would like to turn on a gauge field by switching on the operator:

$$V(z,\bar{z}) = \left(J^3 + i\psi^+\psi^-\right)\bar{J}^a\,, \tag{2.2}$$

where

$$J^3 = k\left(\partial\beta + \cosh r\,\partial\alpha\right). \tag{2.3}$$

Such a deformation is not possible around flat space because the corresponding operator:

$$V_{\text{flat}} = F^a_{ij}\left(\frac{1}{2}x^i\partial x^j + \psi^i\psi^j\right)\bar{J}^a$$

is not marginal. However a magnetic deformation of the NS5-branes background has been studied some years ago [18]. It was first introduced in the context of infrared regularization of superstrings [19].[1]

Our treatment of AdS_3 deformation will be close in spirit. Switching on this gauge field in the bulk, and taking into account the back-reaction on the metric and the other fields, we obtain the solution of the sigma-model equations:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{k}ds^2 &= dr^2 - (1+2H^2\cosh^2 r)d\alpha^2 - (1+2H^2)d\beta^2 - 2(1+2H^2)\cosh r\,d\alpha d\beta \\
B &= \frac{k}{4}\cosh r\,d\beta\wedge d\alpha \\
A &= -g\sqrt{k}H\left[\cosh r\,d\alpha + d\beta\right].
\end{aligned} \tag{2.4}$$

The metric can be also rewritten as a squashed AdS_3 geometry, as was first noticed in [20]:

$$ds^2 = \frac{k}{4}\left[dr^2 + \sinh^2 r d\alpha^2 - (1+2H^2)\left(d\beta + \cosh r\,d\alpha\right)^2\right]. \tag{2.5}$$

The propagation of scalar fields in this spacetime has been recently addressed in [12]. The original Gödel spacetime is obtained for the special value of the deformation parameter:

$$H_{\text{Gödel}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

The relation with AdS_3 in global coordinates becomes more obvious after the change of coordinates:

$$\alpha = t + \phi\,, \qquad \beta = t - \phi\,, \qquad r = 2\rho\,.$$

[1] Other magnetic backgrounds for the heterotic string have been constructed in [9].

JHEP01(2004)042

Then we obtain the solution:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}ds^2 &= d\rho^2 - \cosh^2\rho\, dt^2 + \sinh^2\rho\, d\phi^2 - 2H^2\left(\cosh^2\rho\, dt + \sinh^2\rho\, d\phi\right)^2 \\
B &= \frac{k}{2}\cosh 2\rho\, d\phi \wedge dt \\
F &= dA = g\sqrt{k}H\sinh 2\rho\,(dt + d\phi)\wedge d\rho\,.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

By construction, the isometry group of this spacetime is $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathrm{U}(1)$.

2.2 Causal structure

This section is a short review of the results of [20, 12] that we give for completeness. The striking feature of the class of backgrounds (2.5) is that there are closed timelike curves spanned by the coordinate ϕ above the critical radius:

$$G_{\phi\phi} = k\sinh^2\rho_c(1 - 2H^2\sinh^2\rho_c) = 0 \;\rightarrow\; \rho_c = \mathrm{arcsinh}\frac{1}{\sqrt{2}H}\,. \tag{2.7}$$

These closed timelike curves are contractible, hence the spacetime is topologically trivial. Since the spacetime is homogeneous, they are closed timelike curves going through each point of the manifold. Although translation in the coordinate t corresponds to a globally defined timelike Killing vector, we cannot globally define a time function because the sections of the spacetime at constant t are not spacelike hypersurfaces, due to the closed timelike curves. The Cauchy problem is not well-defined in this spacetime.

The analysis of the geodesics in these backgrounds has been made in hyperbolic coordinates, see appendix B. The authors of [12] observed that the null and timelike geodesics projects onto full circles of arbitrary center. For the spacelike geodesics it is true only for those with $\rho > \rho_c$, i.e. those projecting onto closed timelike curves. In AdS_3, it has been shown [23] that the action of spectral flow on spacelike geodesics produces long strings that can reach the boundary of anti de Sitter and wind around the ϕ-coordinate; in the Gödel-deformed background, as we will see, these long string states are still present, and can wind around the closed timelike curves, causing a potential instability.

2.3 Conformal invariance

We now have to show that the deformation of the conformal field theory is truly marginal to all orders in the deformation. We bosonize the right-moving gauge current used for the deformation as: $\bar{J}^a = i\bar{\partial}Y$. We will work in bosonic strings for simplicity; in that case $\bar{J}^a$ has a left-moving partner. Then $Y(z,\bar{z})$ can be viewed as an internal coordinate, and the background will be obtained by a Kaluza-Klein reduction. We write the relevant part of the sigma-model for the deformed geometry in the Kaluza-Klein form as:

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{def}} = \frac{1}{4\pi}\int d^2z\,\frac{k}{2}\Big\{&\partial r\bar{\partial}r - \partial\alpha\bar{\partial}\alpha - \partial\beta\bar{\partial}\beta - 2\cosh r\,\partial\alpha\bar{\partial}\beta - \\
&- 2H^2\left[\cosh^2 r\,\partial\alpha\bar{\partial}\alpha + \partial\beta\bar{\partial}\beta + \cosh r\left(\partial\alpha\bar{\partial}\beta + \partial\beta\bar{\partial}\alpha\right)\right]\Big\} + \\
&+ \left[\partial Y - \sqrt{k}H\left(\cosh r\,\partial\alpha + \partial\beta\right)\right]\left[\bar{\partial}Y - \sqrt{k}H\left(\cosh r\,\bar{\partial}\alpha + \bar{\partial}\beta\right)\right].
\end{aligned} \tag{2.8}$$

JHEP01(2004)042

To prove conformal invariance, we note, as in [18] that one may rewrite the action as:

$$S_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}(r,\alpha,\beta) + \frac{1}{4\pi}\int d^2z\,\partial Y\bar{\partial}Y - \frac{\sqrt{k}H}{2\pi}\int d^2z\,(\partial\beta + \cosh r\,\partial\alpha)\,\bar{\partial}Y =$$
$$= S_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}\left(r,\alpha,\beta + \frac{2H}{\sqrt{k}}Y\right) + \frac{1+2H^2}{4\pi}\int d^2z\,\partial Y\bar{\partial}Y \qquad (2.9)$$

where we have dropped out a total derivative:

$$2\sqrt{k}H\int d^2z\,\left(\partial Y\bar{\partial}\beta - \bar{\partial}Y\partial\beta\right);$$

this term will however give rise to topological contributions to the spectrum. So this background is an exactly conformal invariant sigma-model, to all orders in α'. It turns out that the last expression (2.9) is exactly the same as the sigma-model of the deformed background, eq. (2.8). In section 3 we will compute explicitely the spectrum for the heterotic background. We get also from eq. (2.9) the modified expression for the J^3 current:

$$J^3_d = k\,(\partial\beta + \cosh r\partial\alpha) + 2H\sqrt{k}\partial Y\,, \qquad (2.10)$$

and the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_L$ symmetry is broken down to U(1). Of course, the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_R$ is preserved by the deformation.

2.4 Target-space supersymmetry

The supersymmetry variations for the gaugino, the dilatino and the gravitino are:

$$\begin{aligned}
\delta\chi &= F_{ab}\gamma^{ab}\,\epsilon \\
\delta\lambda &= \left(\gamma^a\partial_a\phi - \frac{1}{6}H_{abc}\gamma^{abc}\right)\epsilon \\
\delta\Psi_a &= \left[\partial_a + \frac{1}{4}\left(\omega^{bc}_a - H^{bc}_a\right)\gamma_{ab}\right]\epsilon\,.
\end{aligned} \qquad (2.11)$$

From the dilatino variation we obtain:

$$\left[\Gamma^3\Gamma^4\Gamma^5 - \frac{1}{\sqrt{1+2H^2}}\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\right]\epsilon = 0 \qquad (2.12)$$

where 0,1,2 are the tangent space indices for AdS_3 and 3,4,5 those of S^3. Thus, the supersymmetry is completely broken by the deformation. The analysis of the gaugino and the gravitino equations would lead to the same conclusion. However for the consistency of the string theory one still has to perform the GSO projection; the possible appearance of tachyonic modes will be addressed in section 4. If this solution is embedded in type-II superstrings, as a Kaluza-Klein reduction — see eq. (2.8) — the background is a supersymmetric solution of the corresponding Kaluza-Klein supergravity, as in [21]. It will be shown in section 3.

JHEP01(2004)042

3. The string spectrum and one-loop partition function

The partition function for type-IIB superstring theory on $AdS_3 \times S^3 \times K3$ was obtained in [13]. The extension to heterotic case is straightforward, by using the heterotic map [22]. For concreteness, we consider an $E_8 \times E_8 \to E_8 \times E_7 \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)^4$ compactification:

$$Z(\tau) = \frac{\mathrm{Im}\,\tau}{\eta^2\bar{\eta}^{14}} Z_{\mathrm{SU}(2)} Z_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} \frac{1}{2}\sum_{h,g=0}^{1} Z_{4,4}\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1} (-)^{a+b}\,\vartheta^2\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix} a+h \\ b+g \end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix} a-h \\ b-g \end{bmatrix}$$
$$\times \bar{\Gamma}_{E_8} \times \frac{1}{2}\sum_{\gamma,\delta=0}^{1} \bar{\vartheta}\begin{bmatrix} \gamma+h \\ \delta+g \end{bmatrix}\bar{\vartheta}\begin{bmatrix} \gamma-h \\ \delta-g \end{bmatrix}\bar{\vartheta}^6\begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

The twisted torus conformal blocks are:

$$Z_{4,4}\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} = \frac{\Gamma_{4,4}}{\eta^4\bar{\eta}^4} \quad \text{for} \quad h = g = 0\,, \qquad \text{and} \qquad Z_{4,4}\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} = \frac{16\eta^2\bar{\eta}^2}{\left|\vartheta\left[\begin{smallmatrix} 1-h \\ 1-g \end{smallmatrix}\right](0|\tau)\right|^4} \quad \text{otherwise.} \tag{3.2}$$

The $\mathrm{SU}(2)_k$ bosonic conformal block is chosen to be the standard diagonal invariant:

$$Z_{\mathrm{SU}(2)} = \sum_{l=0}^{k} \chi_k^l \bar{\chi}_k^l\,, \tag{3.3}$$

and the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_{k+4}$ partition function is given in appendix A.

3.1 Exact string spectrum in the Gödel/AdS spacetime

Now we would like to perform the marginal deformation (2.2) in this CFT heterotic background. As it is known generically for conformal field theories based on affine algebras, the deformation will act on the weight lattice of the subgroup along which the deformation is performed (see [24] for a recent discussion):

- The abelian *elliptic subgroup* of the supersymmetric $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_{k+2}$, generated by $\mathcal{J}^3 = J^3 + i\psi^+\psi^-$, for the left-movers,
- a U(1) subgroup of the gauge group for the right-movers.

The left and right weights of the relevant lattices are:

$$L_0 = -\frac{1}{k+4}\left(\tilde{m} + \frac{k+4}{2}w_+\right)^2 + \frac{1}{2}\left(n + \frac{a}{2}\right)^2$$
$$= -\frac{1}{k+2}\left(\tilde{m} + \frac{k+4}{2}w_+ + n + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{k+4}{2(k+2)}\left(n + \frac{a}{2} + w_+ + \frac{2\tilde{m}}{k+4}\right)^2 \tag{3.4}$$
$$\bar{L}_0 = -\frac{1}{k+4}\left(\bar{\tilde{m}} + \frac{k+4}{2}w_+\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\bar{n} + \frac{\gamma}{2}\right)^2. \tag{3.5}$$

Here $n+a/2$ corresponds to the charges of the left fermionic current $\psi^+\psi^-$, and $a = 0, 1$ are respectively the NS and the R sector, as in the partition function. Also $\bar{n}+\gamma/2$ corresponds to the weights lattice of the gauge current which is picked out by the deformation. In the expression for L_0, eq. (3.4), we have explicitely factorized the supersymmetric weights of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_{k+2}$. Then the deformation acts as a $O(2)$ rotation between these weights and the

JHEP01(2004)042

right weights of the U(1) gauge field,[2] parameterized by the angle ζ; we obtain then:

$$
\begin{aligned}
L_0^{\rm def} &= -\left[\frac{\cos\zeta}{\sqrt{k+2}}\left(\tilde{m}+\frac{k+4}{2}w_+ + n + \frac{a}{2}\right) + \frac{\sin\zeta}{\sqrt{2}}\left(\bar{n}+\frac{\gamma}{2}\right)\right]^2 + \\
&\quad + \frac{k+4}{2(k+2)}\left(n+\frac{a}{2}+w_+ + \frac{2\tilde{m}}{k+4}\right)^2 \qquad (3.6)\\
\bar{L}_0^{\rm def} &= -\frac{1}{k+4}\left(\bar{\tilde{m}}+\frac{k+4}{2}w_+\right)^2 + \\
&\quad + \left[\frac{\cos\zeta}{\sqrt{2}}\left(\bar{n}+\frac{\gamma}{2}\right) - \frac{\sin\zeta}{\sqrt{k+2}}\left(\tilde{m}+\frac{k+4}{2}w_+ + n + \frac{a}{2}\right)\right]^2 \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

where the relation between this parameterization and the vev of the gauge field is:

$$
\cos^2\zeta = \frac{1}{1+2H^2}\,. \qquad (3.8)
$$

Note that there is no maximal value for the gauge field, unlike the magnetic NS5-brane background [18].

In the type-II superstrings (Kaluza-Klein reduction), we replace the lattice from the right-moving heterotic gauge sector by the right lattice of a compact internal coordinate. In this case it is obvious that the deformation preserves 8 supercharges coming from the right-moving fermionic sector, left untouched by the deformation.

3.2 One-loop vacuum amplitude

To compute the partition function for heterotic strings on Gödel/$\mathrm{AdS}_3\times S^3\times K3$ one simply has to combine the previous analysis of the spectrum with the remaining ingredients. Then the partition function of the deformed model reads (see appendix A):

$$
\begin{aligned}
Z_{\rm Gödel}(\tau) &= \frac{\mathrm{Im}\,\tau}{\eta^3\bar{\eta}^{15}} Z_{\rm SU(2)} \frac{1}{2}\sum_{h,g=0}^{1} Z_{4,4}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix} \times \\
&\times \frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-)^{a+b}\,\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}a+h\\b+g\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}a-h\\b-g\end{bmatrix} \times \\
&\times \bar{\Gamma}_{E_8} \times \frac{1}{2}\sum_{\gamma,\delta=0}^{1}\bar{\vartheta}\begin{bmatrix}\gamma+h\\\delta+g\end{bmatrix}\bar{\vartheta}\begin{bmatrix}\gamma-h\\\delta-g\end{bmatrix}\bar{\vartheta}^5\begin{bmatrix}\gamma\\\delta\end{bmatrix} \times \\
&\times \int d^2t\, Z_{\rm cigar}\begin{bmatrix}-t_1\\-t_2\end{bmatrix} \sum_{N,W,n,\bar{n}\in\mathbb{Z}} e^{i\pi\left(2Nt_2+b(n+\frac{a}{2})-\delta(\bar{n}+\frac{\gamma}{2})\right)} \times \\
&\times q^{-\left[\frac{\cos\zeta}{\sqrt{k+2}}\left(\frac{N}{2}+\frac{k+4}{2}(W+t_1)+n+\frac{a}{2}\right)+\frac{\sin\zeta}{\sqrt{2}}\left(\bar{n}+\frac{\gamma}{2}\right)\right]^2+\frac{k+4}{2(k+2)}\left(n+\frac{a}{2}+(W+t_1)+\frac{2N}{k+4}\right)^2} \times \\
&\times \bar{q}^{-\frac{1}{k+4}\left(\frac{N}{2}-\frac{k+4}{2}(W+t_1)\right)^2+\left[\frac{\cos\zeta}{\sqrt{2}}\left(\bar{n}+\frac{\gamma}{2}\right)-\frac{\sin\zeta}{\sqrt{k+2}}\left(N+\frac{k+4}{2}(W+t_1)+n+\frac{a}{2}\right)\right]^2}\,. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

[2] It is of course the analytic continuation of the usual $O(1,1)$ transformation of toroidal lattices, but here the lattice of J^3 is timelike.

JHEP01(2004)042

This partition function is modular invariant by construction since it is obtained as an $O(2,2,\mathbb{R})$ rotation of an even self-dual lattice. Due to the mixing between the fermionic characters and the lattice of J^3, it is not possible to use a Jacobi identity to prove target space supersymmetry; all the supersymmetry is broken in this background, as expected from the target space analysis.

4. The fate of long strings

The long strings, corresponding to the continuous representations of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ are the natural probes for the closed timelike curves since they can wind around the coordinate ϕ and become macroscopic. Such long strings in Gödel universe T-dual to pp-waves have been considered recently in [10], both from the classical and quantum point of view in a light-cone gauge appropriate to this problem. No tachyons were found in that case, although the authors pointed out a possibility of unitarity violation. Another analysis for M2-branes in M-theory Gödel universes has been made in [25].

4.1 Classical analysis

We would like to understand the behavior of simple long strings solutions. We will consider classical solutions to the Nambu-Goto action:

$$S = -T_1 \int d^2\xi \sqrt{G} + T_1 \int B_{[2]} \tag{4.1}$$

4.1.1 Long strings in $\mathbf{AdS}_3$

In the undeformed AdS_3 geometry, we parameterize a long string wrapping w times the ϕ coordinate, without angular momentum, as:

$$\begin{cases} t = w_+ \tau \\ \phi = w_+ \sigma \\ \rho = \rho(\tau) \end{cases} \tag{4.2}$$

where we have used the static gauge for the time coordinate. So the classical Nambu-Goto action for a F1-string probe is:

$$S = -\pi k w_+ T_1 \int d\tau \left(\sinh\rho \sqrt{w_+^2 \cosh^2\rho - \dot{\rho}^2} - w_+ \cosh^2\rho \right) \tag{4.3}$$

with the equation of motion:

$$-\frac{d}{d\tau} \frac{\dot{\rho}\sinh\rho}{\sqrt{w_+^2\cosh^2\rho - \dot{\rho}^2}} = \frac{w_+^2 \cosh 2\rho - \dot{\rho}^2}{\sqrt{w_+^2\cosh^2\rho - \dot{\rho}^2}} \cosh\rho - w_+ \sinh 2\rho \,.$$

We have a long string solution:

$$\rho = w_+ |\tau| \,;$$

so the long string reach the boundary of AdS_3 for $t = \pm\infty$. Qualitatively this behavior appears because the attractive force due to the string tension and the repulsive force due to the NS-NS two-form cancel. This simple solution corresponds to the spectral flow of a spacelike geodesic. More general solutions have being obtained using a group manifold approach in [23].

JHEP01(2004)042

4.1.2 Long strings in AdS$_3$/Gödel

Now we would like to examine long string solutions in the AdS/Gödel space. The crucial feature is to check if such long strings can reach the critical radius and then wrap closed timelike curves. We consider classical macroscopic strings which are uncharged under the gauge group for simplicity. As in the previous case, we are looking for solutions winding around ϕ, without angular momentum, eq. (4.2). Then the Nambu-Goto action is given by:

$$S = -\pi k w_+ T_1 \int d\tau \left(\sinh\rho \sqrt{(1+2H^2) w_+^2 \cosh^2\rho - (1-2H^2\sinh^2\rho)\dot{\rho}^2} - w_+ \cosh^2\rho \right). \tag{4.4}$$

So we obtain the equation of motion for $\rho(\tau)$:

$$-\frac{d}{d\tau} \frac{(1-2H^2\sinh^2\rho)\sinh\rho\,\dot{\rho}}{\sqrt{(1+2H^2)w_+^2\cosh^2\rho - (1-2H^2\sinh^2\rho)\dot{\rho}^2}} =$$
$$= \frac{(1+2H^2)w_+^2\cosh\rho(\cosh^2\rho+\sinh^2\rho) + (4H^2\sinh^2\rho - 1)\cosh\rho\dot{\rho}^2}{\sqrt{(1+2H^2)w_+^2\cosh^2\rho - (1-2H^2\sinh^2\rho)\dot{\rho}^2}} \cosh\rho - w_+ \sinh 2\rho\,.$$

We still have also long string solutions with:

$$\rho(\tau) = \sqrt{1+2H^2}\; w_+ |\tau|\,.$$

The radius of the worldsheet of these long strings grows linearly with time, until they eventually wrap the closed timelike curves. We conclude that the Gödel deformation changes the on-shell values of the momenta, but otherwise leads to the same qualitative behavior of the long string solutions as in AdS$_3$: long strings can escape to infinity with a finite energy.

4.2 Unitarity of the physical spectrum

Naively, we would expect that the string spectrum would contain ghosts for long string solutions. In fact, the kinetic term for the field $\phi(z,\bar{z})$ in the Polyakov action is:

$$\mathcal{L} \sim k \sinh^2 r (1 - 2H^2 \sinh^2 r) \partial\phi\bar{\partial}\phi\,,$$

so, for $r > r_c$ it seems that the sign of the kinetic term for the fluctuations of ϕ become negative. But the off-diagonal term between $\phi(z,\bar{z})$ and $t(z,\bar{z})$ makes the analysis more subtle; indeed, the determinant of the metric of the deformed spacetime is:

$$-g = (1+2H^2)\left(\frac{k}{4}\right)^3 \sinh^2 r\,,$$

which is always of the same sign.

To have a precise answer to this crucial issue, we will adapt the no-ghost theorem for SL$(2,\mathbb{R})$, to the case of the Gödel-deformed SL$(2,\mathbb{R})$. We would like to see if the modification of the structure of the zero modes changes the conclusion about the suppression of negative-norm states by the Virasoro conditions. A outline of the no-ghost theorem proof is given in appendix C. The conclusion is: *the spectrum doesn't contain negative-norm states.*

JHEP01(2004)042

4.3 Long strings spectrum

Now we consider the exact string spectrum. We would like to see if the spectrum contains tachyons, i.e. on-shell states with an imaginary value for the energy:[3]

$$E = \mathcal{J}_0^3 + \bar{J}_0^3 = \tilde{m} + \bar{\tilde{m}} + n + \frac{a}{2} + (k+2)w_+ \,. \tag{4.5}$$

The mass-shell condition for the continuous representations reads (*"other"* indicates the internal CFT):

$$\begin{aligned} L_0 = & \frac{s^2+1/4}{k+2} - w_+\left(\tilde{m}+\tilde{n}+\frac{a}{2}\right) - \frac{k+2}{4}w_+^2 + \frac{1}{2}\left(\tilde{n}+\frac{a}{2}\right)^2 + \\ & + \frac{\sin\zeta}{k+2}\left\{\left[\left(\tilde{m}+\frac{k+2}{2}w_+ + \tilde{n}+\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{k+2}{2}\left(\bar{n}+\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]\sin\zeta - \right. \\ & \left. - \sqrt{2(k+2)}\left(\tilde{m}+\frac{k+2}{2}w_+ + \tilde{n}+\frac{a}{2}\right)\left(\bar{n}+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\zeta\right\} + N + h_{\text{other}} - \frac{1}{2} \\ = & \; 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_0 = & \frac{s^2+1/4}{k+2} - w_+\bar{\tilde{m}} - \frac{k+4}{4}w_+^2 + \frac{1}{2}\left(\bar{n}+\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \\ & + \frac{\sin\zeta}{k+2}\left\{\left[\left(\tilde{m}+\frac{k+2}{2}w_+ + \tilde{n}+\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{k+2}{2}\left(\bar{n}+\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]\sin\zeta - \right. \\ & \left. - \sqrt{2(k+2)}\left(\tilde{m}+\frac{k+2}{2}w_+ + \tilde{n}+\frac{a}{2}\right)\left(\bar{n}+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\zeta\right\} + \bar{N} + \bar{h}_{\text{other}} - 1 \\ = & \; 0\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

In a supersymmetric WZW model, the spectral flow must act also on the fermions, so $n = \tilde{n} - w_+$ in the w_+-flowed sector (see [26]); it amounts to redefining the vacuum. We also have to act with the spectral flow in the gauge sector, in order to satisfy the matching condition $L_0 = \bar{L}_0$. At this point we have to decide if we act on the U(1) along which we switch on a field strength — *choice (i)* — or an other unbroken Cartan generator — *choice (ii)*. Since we have constructed the deformation such that it preserves $L_0 - \bar{L}_0$, both choices are equally acceptable. However the spectrum is slightly different. In both cases, the matching condition will be satisfied, provided that:

$$w_+\left(\tilde{m} - \bar{\tilde{m}}\right) = w_+\ell = h_{\text{other}} - \bar{h}_{\text{other}}\,,$$

where ℓ is the angular momentum.

We take for example the "massless" state:

- left : $|s,p\rangle \otimes \psi^{\text{other}}_{-1/2}|0\rangle_{NS}$
- right: $\bar{\alpha}^{\text{other}}_{-1}|s,\bar{p}\rangle \otimes |0\rangle_{NS}$.

[3] As we have seen there is no globally defined notion of energy in this spacetime. At any rate, we will take the same definition as in AdS_3 — the conjugate to the t translations — since the corresponding isometry is unbroken by the deformation.

JHEP01(2004)042

Then we have, with the embedding of the spectral flow *(ii)*:

$$L_0^{(ii)} = \frac{s^2 + 1/4 + \tilde{m}^2 \sin^2\zeta}{k+2} - \frac{k+2}{4} w_+^2 \cos^2\zeta - w_+ \tilde{m} \cos^2\zeta + \frac{1}{2}p^2 \,. \tag{4.8}$$

So we have the mass-shell condition for the state under consideration:

$$\frac{s^2 + 1/4}{k+2} + \frac{k+2}{4} w_+^2 - w_+ \frac{E}{2} + \frac{\sin^2\zeta}{4(k+2)} E^2 + \frac{1}{2}p^2 = 0 \,. \tag{4.9}$$

And

$$E = \frac{k+2}{\sin^2\zeta} \left(w_+ \pm \sqrt{w_+^2 \cos^2\zeta - \frac{4\sin^2\zeta}{k+2} \left(\frac{s^2+1/4}{k+2} + \frac{1}{2}p^2 \right)} \right) . \tag{4.10}$$

If for example we increase the mass of the state with some momentum p in the compact internal CFT, the energy of the state will eventually become imaginary. This strange behavior is due to the quadratic term in the energy with a positive sign. The critical value is:

$$\frac{s^{(ii)\ 2} + 1/4}{k+2} + \frac{1}{2}p^2 = \frac{k+2}{4} w_+^2 \operatorname{cotan}^2\zeta \,.$$

For a more general state with oscillators, the same statement holds. An infinite number of massive long string states will become tachyonic when the Gödel deformation is turned on (other tachyonic instabilities in magnetic fields have been discussed in [9]); these instabilities are likely due to the wrapping of closed timelike curves.

For the other embedding of spectral flow — *choice (i)* — we have instead:

$$\begin{aligned} L_0^{(i)} = & \frac{s^2 + 1/4 + \tilde{m}^2 \sin^2\zeta}{k+2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{k+2}{2}} \cos\zeta + \sin\zeta \right)^2 w_+^2 - \\ & - \cos\zeta \left(\cos\zeta + \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin\zeta \right) w_+ \tilde{m} + \frac{1}{2}p^2 \end{aligned} \tag{4.11}$$

and we find a correction to the critical value of momenta:

$$\frac{s^{(i)\ 2} + 1/4}{k+2} + \frac{1}{2}p^2 = \frac{k+2}{4} w_+^2 \left[\operatorname{cotan}\zeta + \sqrt{\frac{2}{k+2}} \right]^2 ,$$

but otherwise the conclusions are the same.

Behavior of short strings. Since the discrete representations correspond to strings trapped in the center of the spacetime (around $r = 0$), we expect that the corresponding spectrum is well-behaved. For the discrete representations, we have:

$$is = \frac{1}{2} - \tilde{j} \,,$$

and also a relation between the spin $\tilde{j}$ and the $\tilde{J}^3$ eigenvalue: $\tilde{m} = \tilde{j} + q$, with $q \in \mathbb{N}$, for the primaries of the lowest weight representations. The spin is also restricted for unitarity to

$$\frac{1}{2} < \tilde{j} < \frac{(k+3)}{2} \tag{4.12}$$

JHEP01(2004)042

We can solve the mass-shell condition for $\tilde{j}$:

$$L_0^{\mathcal{D}^+} = -\frac{\tilde{j}(\tilde{j}-1)}{k+2} - \frac{k+2}{4}w_+^2\cos^2\zeta - w_+(\tilde{j}+q)\cos^2\zeta + \frac{\sin^2\zeta}{k+2}(\tilde{j}+q)^2 + h_{\rm int} = 0\,, \quad (4.13)$$

and find:

$$\begin{aligned}\tilde{j} = {} & \frac{1}{2\cos^2\zeta} - \frac{k+2}{2}w_+ + q\tan^2\zeta + \\ & + \frac{1}{\cos^2\zeta}\sqrt{\frac{1}{4} + (k+2)\left(N_w + h_{\rm int} - \frac{w_+}{2}\right)\cos^2\zeta + q(q+1)\sin^2\zeta}\,, \end{aligned} \quad (4.14)$$

where $N_w \equiv N - w_+ q$ is the level of the algebra after spectral flow. So we observe that the only effect of the Gödel deformation will be that the range of values for the spin allowed by the unitary bound (4.12) will impose different constraints on the internal weights. It would be interesting to relate this short string spectrum with the analysis of energy levels for a point particle in [25] and [12]. It was observed that this setup can be mapped onto a Landau problem.

5. Can gravitational deformation cure the pathology?

We have seen that the Gödel deformation of AdS_3, supersymmetric or not, completely destabilizes the background. Then we expect some kind of closed tachyon condensation; the description of this process is out of reach at present, but we can try to find the background that would correspond to the endpoint of the tachyon decay. In other words we are looking for another point in the moduli space of worldsheet conformal field theories which could have this interpretation.

5.1 Switching on more background fields

There is an additional deformation of the background which is exactly marginal, generated by the bilinear of the unbroken currents

$$V_g \sim (J^3 + i\psi^+\psi^-)(\bar{J}^3 - i\bar{\psi}^+\bar{\psi}^-)\,.$$

We would like to check if such a deformation can eliminate the closed timelike curves. This deformation have been studied in [13] around the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ point. Here we would like to perform this deformation *in combination with Gödel deformation*. This is possible since each deformation preserves the $\mathrm{U}(1)_L \times \mathrm{U}(1)_R$ symmetry generating the other one. The solution of the sigma-model equations gives (see [18]):

$$\begin{aligned}\frac{4}{k}ds^2 = {} & dr^2 - \frac{(\lambda^2+1)^2 + (8H^2\lambda^2 - (\lambda^2-1)^2)\cosh^2 r}{(\lambda^2+1+(\lambda^2-1)\cosh r)^2}d\alpha^2 - \\ & - \frac{(\lambda^2+1)^2 + 8H^2\lambda^2 - (\lambda^2-1)^2\cosh^2 r}{(\lambda^2+1+(\lambda^2-1)\cosh r)^2}d\beta^2 - \\ & - 2\frac{4\lambda^2(1+2H^2)\cosh r - (\lambda^4-1)\sinh^2 r}{(\lambda^2+1+(\lambda^2-1)\cosh r)^2}d\alpha d\beta\end{aligned}$$

JHEP01(2004)042

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{k}{4}\frac{\lambda^2-1+(\lambda^2+1)\cosh r}{\lambda^2+1+(\lambda^2-1)\cosh r}d\beta\wedge d\alpha \\
A &= \frac{2g\sqrt{k}H\lambda}{\lambda^2+1+(\lambda^2-1)\cosh r}\left(d\beta+\cosh r d\alpha\right) \\
e^{2\Phi} &= \frac{\lambda e^{2\Phi_0}}{\lambda^2+1+(\lambda^2-1)\cosh r}\,.
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

The model without $J^3\bar{J}^3$ deformation corresponds to $\lambda = 1$. The scalar curvature of this manifold is given by:

$$
R(H,\lambda) = -\frac{8}{k}\frac{5\lambda^2-1-\lambda^4-2H^2\lambda^2+(1-\lambda^4)\cosh r}{(1+\lambda^2+(\lambda^2-1)\cosh r)^2}\,. \tag{5.2}
$$

We want to check if this spacetime has closed timelike curves. The $(\phi-\phi)$-component of the metric is:

$$
G_{\phi\phi} = k\frac{2\lambda^2(1+2H^2)\cosh r+(1-\lambda^2(1+2H^2))\cosh^2 r-(1+\lambda^2(1+2H^2))}{(1+\lambda^2+(\lambda^2-1)\cosh r)^2}\,. \tag{5.3}
$$

We would like to know for which values of λ the numerator is always positive. The conclusion is:

$$
\text{No CTC's} \leftrightarrow \lambda^2 \leq \frac{1}{1+2H^2}\,. \tag{5.4}
$$

However, in this range, the background (5.1) becomes singular. The scalar curvature, eq. (5.2), blows up at:

$$
r_{\text{sing}} = \operatorname{arccosh}\frac{\lambda^2+1}{1-\lambda^2}\,.
$$

But the worldsheet conformal field theory is well-defined. This singularity corresponds to a ring of positive tension objects which are electrically charged under the NS-NS two form and charged under the gauge field. To have a more precise picture, we take for λ the limiting value that avoids closed timelike curves: $\lambda^2 = 1/(1+2H^2)$. Then we find that the singularity is located at:

$$
r_{\text{sing}} = 2\rho_{\text{sing}} = 2\operatorname{arcsinh}\frac{1}{\sqrt{2}H}\,. \tag{5.5}
$$

We observe that the locus of the annular singularity corresponds exactly to the critical radius above which closed timelike curves occurs, eq. (2.7). Furthermore the long strings become tachyonic in the Gödel/AdS$_3$ spacetime because they can wind around these closed timelike curves. Therefore, it is very tempting to interpret this annular singularity as a ring of condensed fundamental strings, protecting the causally unsafe region, in the same spirit as the supertubes domain walls considered in [7]. It would be interesting to make the connection with the D1/D5 black rings of [27].

5.2 Long string spectrum and chronology protection

Now we would like to know the expression of the long string spectrum as a function of the parameters of deformation H and λ. By turning on the gravitational deformation λ, the

JHEP01(2004)042

mass-shell condition (4.9) becomes (see [13]):

$$L_0 = \frac{s^2+1/4}{k+2} + \frac{k+2}{4} w_+^2 - w_+ \frac{E}{2} + \frac{1}{4(k+2)} \left(1 - \frac{\cos^2\zeta}{\lambda^2}\right) E^2 + h = 0 \tag{5.6}$$

and the energy will be given by:

$$E = (k+2)\left(1 - \frac{\cos^2\zeta}{\lambda^2}\right)^{-1} \left\{ w_+ \pm \sqrt{w_+^2 \frac{\cos^2\zeta}{\lambda^2} + \frac{4}{k+2}\left(\frac{\cos^2\zeta}{\lambda^2} - 1\right)\left(\frac{s^2+1/4}{k+2} + h\right)} \right\}. \tag{5.7}$$

so we find that there are no tachyonic behavior any longer in the spectrum, provided that

$$\lambda^2 \leq \cos^2\zeta\,.$$

Comparing with the relation (3.8), *this is exactly the same as the condition (5.4) required to avoid closed timelike curves!* Therefore, we see that there string theory offers a natural mechanism for chronology protection in Gödel-like universes.

6. Discussion and conclusions

We have studied a class of string backgrounds of the Gödel type, which are homogeneous and contain closed timelike curves. We have shown that these solutions are in fact exact conformal field theories obtained by a truly marginal deformation of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ CFT. In heterotic superstrings, this deformation switches on a non-trivial gauge field in the bulk, and breaks all the supersymmetry. Embedded in type-II superstrings as a Kaluza-Klein reduction, this background preserves 8 supercharges coming from the right-movers, if we start with the $AdS_3 \times S^3 \times K3$ background describing NS5 branes and fundamental strings. We were able to construct the exact string spectrum for this solution, as well as the modular invariant partition function. We showed that the Gödel deformation preserves the unitarity of the physical spectrum, by proving a no-ghost theorem.

We then discussed the issue of long strings, which can wrap the closed timelike curves, first by showing that such classical solutions still exists in the deformed background. Then we studied the long string spectrum, expecting some pathology due to the closed timelike curves. We found that the spectrum of these long strings is highly tachyonic, for any nonzero value of the deformation parameter. We are aware that since there is no good definition of energy in this background, the notion of tachyon in this class of backgrounds is not completely well-defined. We expect that these long strings will destabilize the background. On the contrary, the spectrum of short strings is not pathologic, as we could infer because they are trapped in the center of the spacetime.

A possible resolution of the causality problem in this background has been proposed, by turning on another marginal deformation. It turned out that the closed timelike curves can be avoided, at the expense of going to a region of the moduli space where the background becomes singular. We observed that an annular singularity occurred precisely at the radius where the Gödel/AdS space started developing closed timelike curves, which were the source of instability for the long string probes. We showed that the spectrum of the resulting

JHEP01(2004)042

background is well-behaved. Therefore, we have interpreted this curvature, NS-NS two form and gauge field singularity as the result of the condensation of a ring of fundamental heterotic strings, in the same spirit as the supertubes of [7]. The proper description of this process would require a second-quantized framework — closed string field theory. If this is indeed the proper interpretation, it would be the first example of a stringy chronology protection in an exact string theory framework.

Since this background is continuously connected to $AdS_3 \times S^3 \times K3$ — the NS5/F1 background — we can expect some holographic interpretation. This issue have already been discussed in [5]. The authors showed that if one applies the covariant prescription of Bousso [28], on finds that the holographic screen, which is observer-dependent, encloses a *the causally safe region*; they argued that it leads to an "holographic protection" of these spacetimes. The radius of this cylindrical screen was shown to be:

$$r_{\text{screen}} = 2 \operatorname{arcsinh} \frac{1}{2H} \,. \tag{6.1}$$

This holographic screen is at finite distance, and the $H \to 0$ limit gives the usual holographic screen of AdS_3 at infinity. It is difficult to interpret the Gödel deformation of AdS_3 in terms of the boundary theory of AdS_3, and to make the connection with the aforementionned proposal. In fact, in AdS_3, the currents are non-normalizable operators and marginal current-current deformations corresponds to IR *irrelevant* deformations of the dual CFT. Such an observation has been made in [4] for another class of Gödel universe. Nevertheless, one might hope to understand the instability of the Gödel/AdS spacetime due to long string states as some instability in the boundary theory, triggered by some irrelevant operator, and then have an holographic picture of the bulk tachyon condensation. It have been shown [29] on a related example (BMPV black hole), that if we allow closed timelike curves in the bulk by increasing the rotation of the black hole, the states of the dual CFT will violate the unitarity bound. Since the spacetime we obtain after the condensation of the ring of fundamental strings seems stable, it would be really interesting to understand holography in this background, if any. We will address this problem in a future work.

Acknowledgments

I would like to thank C. Bachas, Y. Dolivet, M. Petropoulos, B. Pioline, J. Troost and especially C. Kounnas for very useful discussions and comments. I thank also M. Berkooz and E. Rabinovici for very interesting discussions about the first version of this paper. I am grateful to C. Kounnas, M. Petropoulos and B. Pioline for a careful reading of the manuscript.

A. The $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ partition function

The computation of the one-loop vacuum amplitude has been done in [13], using a mixture of path integral and algebraic techniques. The result is, for the universal cover of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

JHEP01(2004)042

at level $k+4$:

$$Z_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}(\tau) = \frac{4(k+4)\sqrt{k+2}}{\tau_2^{1/2}} \sum_{n,w,N,W} \int_0^1 ds_1 ds_2 dt_1 dt_2 \frac{e^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau - s_2))^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)|^2} \times$$
$$\times\, e^{-\frac{(k+4)\pi}{\tau_2}|(s_1-t_1+w)\tau-(s_2-t_2+n)|^2} e^{\frac{(k+4)\pi}{\tau_2}|(t_1+W)\tau-(t_2+N)|^2} . \tag{A.1}$$

The integration over the constraints s_1 and s_2 gives the spectra for all the flowed and unflowed representations (see [13] for details). The spectrum of primary states gives:

- *Discrete representations* representing strings trapped in the center of AdS_3; they appear in the range $\frac{1}{2} < \tilde{j} < \frac{k+3}{2}$. Their conformal weights are:

$$L_0 = -\frac{\tilde{j}(\tilde{j}-1)}{k+2} + w_+ \left(-\tilde{m} - \frac{k+4}{4} w_+\right).$$

- *Continuous representations* with $\tilde{j} = -\frac{1}{2} + is$, $s \in \mathbb{R}_+$. They correspond to long strings that can reach the boundary of AdS_3. The spectral flow quantum number $w_+ = w + W$ represents their winding around the center near the boundary [23]. The weights are:

$$L_0 = \frac{s^2 + 1/4}{k+2} + w_+ \left(-\tilde{m} - \frac{k+4}{4} w_+\right).$$

The relation between the unflowed and flowed eigenvalues follows from:

$$\tilde{J}^3_n = J^3_n - \frac{k+4}{2} w_+ \delta_{n,0} ,$$

and the spacetime energy is given by:

$$E = \tilde{m} + \bar{\tilde{m}} + (k+4) w_+ = (k+4)(W + t_1) .$$

For latter convenience, it is useful to rewrite the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ partition function as a twisted product of the coset $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)$ (the "cigar" 2d euclidean black hole) and a time-like $\mathrm{U}(1)$:

$$Z_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} = \frac{1}{\eta\bar{\eta}} \int d^2t\, Z_{\mathrm{cigar}} \begin{bmatrix} -t_1 \\ -t_2 \end{bmatrix} \times \tag{A.2}$$
$$\times \sum_{N,W} q^{-\frac{1}{2}\left(\frac{N}{\sqrt{2(k+4)}} - \sqrt{\frac{k+4}{2}}(W+t_1)\right)^2} \bar{q}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{N}{\sqrt{2(k+4)}} - \sqrt{\frac{k+4}{2}}(W+t_1)\right)^2} e^{-2i\pi N t_2} ,$$

where (see [36]):

$$Z_{\mathrm{cigar}} \begin{bmatrix} -t_1 \\ -t_2 \end{bmatrix} = 4\sqrt{(k+2)(k+4)} \sum_{m,w} \int d^2s \frac{\eta\bar{\eta}\, e^{\frac{2\pi}{\tau_2}(\mathrm{Im}(s_1\tau - s_2))^2}}{|\vartheta_1(s_1\tau - s_2|\tau)|^2} \times$$
$$\times\, e^{-\frac{(k+4)\pi}{\tau_2}|(s_1-t_1+w)\tau-(s_2-t_2+m)|^2} .$$

JHEP01(2004)042

B. Coordinate systems and geodesics

In cylindrical coordinates, the metric of the AdS/Gödel form is (see eq. (2.5):

$$ds^2 = dr^2 + \sinh^2 r d\alpha^2 - \left(d\tau + 4\Omega \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right) d\alpha\right)^2 \qquad \text{with } 2\Omega = \sqrt{1+2H^2}\,.$$

One can go to cartesian coordinates by the coordinate transformation:

$$\begin{cases} e^{2x} = \cosh(2r) + \cos\left(\frac{\phi+\tau}{\Omega}\right)\sinh r \\ ye^{2x} = \frac{\Omega}{2}\sinh(2r)\sin\left(\frac{\phi+\tau}{\Omega}\right) \\ \tan\left(\frac{T+(\phi-\tau)/2}{\Omega}\right) = e^{-2r}\tan\left(\frac{\phi-\tau}{2\Omega}\right) \end{cases}$$

Then the metric reads:

$$ds^2 = dx^2 + \frac{1}{2}e^{2x}dy^2 - \left(dT + \sqrt{2}\Omega e^x dy\right)^2 .$$

The last useful coordinate system corresponds to the hyperbolic coordinates. It is obtained by:

$$x = -\ln X\,, \qquad y = \sqrt{2}Y\,.$$

Then one obtains:

$$ds^2 = \frac{dX^2 + dY^2 - \left(X^2 dT + 2\Omega dY\right)^2}{X^2}\,.$$

In these coordinates, the geodesic equation gives [12]:

$$\begin{aligned} \dot{T} &= (1+2H^2)E - \sqrt{1+2H^2}Xp_x \\ \dot{X} &= p_x X(Y - Y_0) \\ \dot{Y} &= -\sqrt{1+2H^2}EX + p_x X^2 \end{aligned}$$

where the energy E is the charge associated to the Killing vector ∂_T, and p_x the momentum associated to the Killing vector ∂_x.

C. No-ghost theorem for string theory on Gödel/AdS$_3$: sketch of a proof

Here we would like to outline the main steps of the no-ghost theorem for strings on AdS_3 and check whether it is still valid or not, in the case of the Gödel deformation. Unitarity for a theory living in a spacetime containing closed timelike curves is maybe not a well-defined concept. Nevertheless, we would like to know if, as in AdS_3, the Virasoro constraints are able to remove all the negative-norm states from the worldsheet conformal field theory. We will follow [30, 31, 32] and the appendix A of [23].[4] We consider string theory on (deformed) SL$(2,\mathbb{R})$ times a unitary "internal" CFT. The important observation is: writing the action for the deformed model as eq. (2.9), we see that, with a field redefinition, the actions of the deformed and the undeformed model are the same, *except that the structure of*

[4] It is also possible to use BRST methods, see [33] and [34].

JHEP01(2004)042

the zero modes is different. The mixing in the zero modes have been given in eqs. (3.6) and (3.7). Note that the part of the CFT corresponding to the coset CFT $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k/\,\mathrm{U}(1)$ is left untouched. Here we consider for simplicity the case of bosonic strings, and the Gödel deformation is constructed as a Kaluza-Klein reduction along a coordinate $Y(z,\bar{z})$ compactified at the fermionic point:

$$Q_y^2 = \frac{1}{2}\left(p - \frac{q}{2}\right)^2 , \qquad \bar{Q}_y^2 = \frac{1}{2}\left(p + \frac{q}{2}\right)^2 .$$

The extension to heterotic or type-II superstrings is straightforward. Since only the zero mode structure differs from the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{U}(1) \times CFT_{\text{internal}}$, given a representation of the zero modes, the structure of the Verma modules and the affine representations are the same, provided that no new null vectors appear. For convenience we will include the spectral flow quantum number in the parafermionic theory,[5] writing, for the undeformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k$:

$$\tilde{L}_0^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} = \tilde{L}_0^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)} - L_0^{(3)} \equiv \frac{c_2}{k-2} + \frac{1}{k}\left(m - \frac{k}{2}w_+\right)^2 - \frac{m^2}{k} \tag{C.1}$$

where c_2 is the second Casimir of the group, and:

$$L_n^{(3)} \equiv -\frac{1}{2k}\sum_m : J_m^3 J_{n-m}^3 : \ .$$

The proof of the no-ghost theorem can be carried out in three steps.

Step one: we define $\mathcal{F}$ as the subspace of the Hilbert space $\mathcal{H}$ consisting in states $|f\rangle \in \mathcal{F}$ such that:

$$L_n|f\rangle = J_n^3|f\rangle = 0 \qquad \text{for } n > 0\,.$$

Then we have to show that the states of the form

$$L_{-n_1}\cdots L_{-n_N} J_{-m_1}^3 \cdots J_{-m_M}^3|f\rangle \qquad \text{with } n_1 \geq \cdots \geq n_N\,,\ m_1 \geq \cdots \geq m_M\,, \tag{C.2}$$

form a basis of $\mathcal{H}$. First, to prove that these states are linearly independent, we use an orthogonal decomposition of the Virasoro generators: $L_n = L_n^c - L_n^{(3)}$, and the fact that the states (C.2) are in one to one correspondence with the similar states constructed with the L_n^c's. The Virasoro algebra corresponding to the L_n^c's has a central charge $c^c = 25$, and therefore the associated Verma modules will contain no null states, provided that the conformal weights are strictly positive. The conformal weights for the "parafermionic" theory are, from eqns (3.6) and (3.7):

$$\begin{aligned} L_0^c &= L_0^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)} + \frac{1}{2}Q^2 + N_y + h_{\text{internal}}, \\ \bar{L}_0^c &= \bar{L}_0^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\,\mathrm{U}(1)} + \frac{1}{2}\left(\bar{Q}\cos\zeta - \sqrt{\frac{2}{k}}\,m\sin\zeta\right)^2 + \bar{N}_y + \bar{h}_{\text{internal}}, \end{aligned}$$

[5] Usually the spectral flow is embedded in the $J^3\bar{J}^3$ lattice, by expressing the spectrum in terms of $\tilde{m}$ rather than in terms of m. Nevertheless, our expression of the spectrum of the coset looks like in [35] and [36].

JHEP01(2004)042

and it is known that the coset theory $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_k/\,\mathrm{U}(1)$ is unitary and the weights are strictly positive, provided that the spin of the discrete representations is restricted to: $0 < j < k/2$. So the states (C.2) are linearly independent and form a basis of $\mathcal{H}$.

Step 2: we have to show that a physical state can be chosen such that it can be written as (C.2) with no L_{-n}.

Using the basis (C.2), we write any state $|\psi\rangle$ of $\mathcal{H}$ as:

$$|\psi\rangle = |sp\rangle + |\varphi\rangle\,,$$

where $|sp\rangle$ is a spurious state, i.e. with some n_i's non zero, and $|\varphi\rangle$ has all its n_i's being zero. Then we use the fact that, for a critical string background ($c = 26$), if we act on a on-shell (i.e. $L_0 = 1$) spurious state with $L_{n>0}$, we obtain again a spurious state. So we can map every physical state to a state $|\phi\rangle$ such that $L_{n>0}|\phi\rangle = 0$.

Step 3: we have to show that if a physical state $|\varphi\rangle$ can be written as (C.2) with no L_{-n}, then $J^3_{n>0}|\phi\rangle = 0$. First, this implies that

$$L^{(3)}_{n>0}|\varphi\rangle = 0\,. \tag{C.3}$$

We want to show that the states (C.3) are such that: $J^3_{n>0}|\varphi\rangle = 0$. It will be true if there are no null states in the Virasoro descendents of $L^{(3)}$ for the left-movers, and $\bar{L}^{(3)}$ for the right-movers. The weights of this $c = 1$ conformal field theory are:

$$\begin{aligned} L^{(3)}_0 &= -\frac{1}{k}\left(m\ \cos\zeta + \sqrt{\frac{k}{2}}\,\sin\zeta\,\bar{Q}\right)^2 \\ \bar{L}^{(3)}_0 &= -\frac{1}{k}\bar{m}^2\,. \end{aligned}$$

So, this statement would be true if $L^{(3)}_0 \neq 0$ and $\bar{L}^{(3)}_0 \neq 0$ for all on-shell states. What remains to do is to examine separately the states with $J^{(3)}_0 = 0$ or $\bar{J}^{(3)}_0 = 0$.

- For the right algebra, the mass-shell condition (4.7) for $\bar{m} = 0$ reads:

  $$\bar{L}_0 = \frac{c_2}{k-2} + \frac{k}{4}w^2 + \bar{N}_{\text{coset}} + \frac{\cos\zeta}{2}\bar{Q}^2 + \bar{N}_3 + \bar{h}_{\text{internal}} = 1$$

  where $\bar{N}_{\text{coset}}$ is the grade of the state with respect to the currents $\bar{J}^{\pm}$ and $\bar{N}_3$ is the grade w.r.t. the current $\bar{J}^3$. So, since $\bar{h}_{\text{internal}} > 0$ there are no on-shell states obtained by the action of $\bar{J}^3_{-n}$ (i.e. with $\bar{N}_3 \neq 0$) for the continuous representations. It is also true for the discrete representations, provided that $0 < \tilde{j} < k/2$, as in the undeformed $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

- For the left algebra, we are looking for states with

  $$m\cos\zeta + \sqrt{\frac{k}{2}}\,\sin\zeta\,\bar{Q} = 0\,. \tag{C.4}$$

JHEP01(2004)042

We have the corresponding on-shell condition:

$$L_0 = \frac{c_2}{k-2} + N_{\text{coset}} + \frac{1}{k}\left(m - \frac{k}{2}w_+\right)^2 + N_3 + \frac{1}{2}Q^2 + N + h_{\text{internal}} = 1\,.$$

In a representation $\mathcal{D}^+_{\tilde{j}}$, we have $\tilde{m} = \tilde{j} + q$, $q \in \mathbb{Z}$, and, if q is negative:

$$-q \leq N_{\text{coset}}. \tag{C.5}$$

So we have for the weights of the coset part:

$$\begin{aligned} L_0^{\text{coset}} &= \frac{-\tilde{j}(\tilde{j}-1)}{k-2} + \frac{\tilde{m}^2}{k} + N_{\text{coset}} \\ &= \frac{q^2}{k} + \frac{\tilde{j}}{k-2}\left[1 - \frac{2\tilde{j}}{k}\right] + \frac{2}{k}\tilde{j}q + N_{\text{coset}} \end{aligned}$$

If $\tilde{j}$ is taken in the range $0 < \tilde{j} < k/2$, then with the inequality (C.5) we obtain that $L_0^{\text{coset}} > 0$. So there are no on-shell states with $N_3 \geq 1$.

This completes the proof of the no-ghost theorem.

References

[1] S.W. Hawking, *The chronology protection conjecture*, *Phys. Rev.* **D 46** (1992) 603.

[2] K. Gödel, *An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of graviation*, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 447.

[3] J.P. Gauntlett, J.B. Gutowski, C.M. Hull, S. Pakis and H.S. Reall, *All supersymmetric solutions of minimal supergravity in five dimensions*, *Class. and Quant. Grav.* **20** (2003) 4587 [hep-th/0209114].

[4] C.A.R. Herdeiro, *Spinning deformations of the D1-D5 system and a geometric resolution of closed timelike curves*, *Nucl. Phys.* **B 665** (2003) 189 [hep-th/0212002].

[5] E.K. Boyda, S. Ganguli, P. Hořava and U. Varadarajan, *Holographic protection of chronology in universes of the Gödel type*, *Phys. Rev.* **D 67** (2003) 106003 [hep-th/0212087].

[6] T. Harmark and T. Takayanagi, *Supersymmetric Gödel universes in string theory*, *Nucl. Phys.* **B 662** (2003) 3 [hep-th/0301206].

[7] N. Drukker, B. Fiol and J. Simon, *Gödel's universe in a supertube shroud*, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 231601 [hep-th/0306057].

[8] J.G. Russo and A.A. Tseytlin, *Constant magnetic field in closed string theory: an exactly solvable model*, *Nucl. Phys.* **B 448** (1995) 293 [hep-th/9411099].

[9] J.G. Russo and A.A. Tseytlin, *Heterotic strings in uniform magnetic field*, *Nucl. Phys.* **B 454** (1995) 164 [hep-th/9506071].

[10] D. Brace, C.A.R. Herdeiro and S. Hirano, *Classical and quantum strings in compactified PP-waves and Gödel type universes*, hep-th/0307265.

[11] M.J. Rebouças and J. Tiomno, *On the homogeneity of riemannian space-times of Gödel type*, *Phys. Rev.* **D 28** (1983) 1251.

JHEP01(2004)042

[12] N. Drukker, B. Fiol and J. Simon, *Gödel-type universes and the Landau problem*, hep-th/0309199.

[13] D. Israel, C. Kounnas and M.P. Petropoulos, *Superstrings on NS5 backgrounds, deformed AdS_3 and holography*, *J. High Energy Phys.* **10** (2003) 028 [hep-th/0306053].

[14] C.V. Johnson, A.W. Peet and J. Polchinski, *Gauge theory and the excision of repulson singularities*, *Phys. Rev.* **D 61** (2000) 086001 [hep-th/9911161].

[15] I. Antoniadis, C. Bachas and A. Sagnotti, *Gauged supergravity vacua in string theory*, *Phys. Lett.* **B 235** (1990) 255.

[16] H.J. Boonstra, B. Peeters and K. Skenderis, *Brane intersections, anti-de Sitter spacetimes and dual superconformal theories*, *Nucl. Phys.* **B 533** (1998) 127 [hep-th/9803231].

[17] J.M. Maldacena and A. Strominger, *AdS_3 black holes and a stringy exclusion principle*, *J. High Energy Phys.* **12** (1998) 005 [hep-th/9804085].

[18] E. Kiritsis and C. Kounnas, *Infrared behavior of closed superstrings in strong magnetic and gravitational fields*, *Nucl. Phys.* **B 456** (1995) 699 [hep-th/9508078].

[19] E. Kiritsis and C. Kounnas, *Infrared regularization of superstring theory and the one loop calculation of coupling constants*, *Nucl. Phys.* **B 442** (1995) 472 [hep-th/9501020].

[20] M. Rooman and P. Spindel, *Gödel metric as a squashed anti-de Sitter geometry*, *Class. and Quant. Grav.* **15** (1998) 3241 [gr-qc/9804027].

[21] M.M. Caldarelli and D. Klemm, *Supersymmetric Gödel-type universe in four dimensions*, *Class. and Quant. Grav.* **21** (2004) L17 [hep-th/0310081].

[22] D. Gepner, *Space-time supersymmetry in compactified string theory and superconformal models*, *Nucl. Phys.* **B 296** (1988) 757.

[23] J.M. Maldacena and H. Ooguri, *Strings in AdS_3 and* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *WZW model, I*, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2929 [hep-th/0001053].

[24] S. Förste and D. Roggenkamp, *Current current deformations of conformal field theories and WZW models*, *J. High Energy Phys.* **05** (2003) 071 [hep-th/0304234].

[25] Y. Hikida and S.-J. Rey, *Can branes travel beyond CTC horizon in Gödel universe?*, *Nucl. Phys.* **B 669** (2003) 57 [hep-th/0306148].

[26] A. Pakman, *Unitarity of supersymmetric* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$ *and no-ghost theorem for fermionic strings in $AdS_3 \times N$*, *J. High Energy Phys.* **01** (2003) 077 [hep-th/0301110].

[27] H. Elvang and R. Emparan, *Black rings, supertubes and a stringy resolution of black hole non-uniqueness*, *J. High Energy Phys.* **11** (2003) 035 [hep-th/0310008].

[28] R. Bousso, *Holography in general space-times*, *J. High Energy Phys.* **06** (1999) 028 [hep-th/9906022].

[29] C.A.R. Herdeiro, *Special properties of five dimensional BPS rotating black holes*, *Nucl. Phys.* **B 582** (2000) 363 [hep-th/0003063].

[30] P.M.S. Petropoulos, *Comments on* $\mathrm{SU}(1,1)$ *string theory*, *Phys. Lett.* **B 236** (1990) 151.

[31] S. Hwang, *Cosets as gauge slices in* $\mathrm{SU}(1,1)$ *strings*, *Phys. Lett.* **B 276** (1992) 451 [hep-th/9110039].

JHEP01(2004)042

[32] J.M. Evans, M.R. Gaberdiel and M.J. Perry, *The no-ghost theorem for AdS_3 and the stringy exclusion principle*, *Nucl. Phys.* **B 535** (1998) 152 [hep-th/9806024].

[33] A. Pakman, *Brst quantization of string theory in AdS_3*, *J. High Energy Phys.* **06** (2003) 053 [hep-th/0304230].

[34] M. Asano and M. Natsuume, *The brst quantization and the no-ghost theorem for AdS_3*, *J. High Energy Phys.* **09** (2003) 018 [hep-th/0304254].

[35] R. Dijkgraaf, H. Verlinde and E. Verlinde, *String propagation in a black hole geometry*, *Nucl. Phys.* **B 371** (1992) 269.

[36] A. Hanany, N. Prezas and J. Troost, *The partition function of the two-dimensional black hole conformal field theory*, *J. High Energy Phys.* **04** (2002) 014 [hep-th/0202129].

JHEP01(2004)042

Publication n°6 : «Electric/magnetic deformations of S^3 and AdS_3, and geometric cosets».

Preprint typeset in JHEP style - HYPER VERSION

LPTENS-04/26
CPTH-RR014.0404
hep-th/0405213

Electric/magnetic deformations of S^3 and AdS_3 , and geometric cosets*

Dan Israël[◇], **Costas Kounnas**[◇], **Domenico Orlando**[♠], **P. Marios Petropoulos**[♠]

[◇] *Laboratoire de Physique Théorique de l'Ecole Normale Supérieure*[†]
24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France
[♠] *Centre de Physique Théorique, Ecole Polytechnique*[‡]
91128 Palaiseau, France

E-mail: israel@lpt.ens.fr, kounnas@lpt.ens.fr, orlando@cpht.polytechnique.fr, marios@cpht.polytechnique.fr

Abstract: We analyze asymmetric marginal deformations of $SU(2)_k$ and $SL(2,\mathbb{R})_k$ WZW models. These appear in heterotic string backgrounds with non-vanishing Neveu–Schwarz three-forms plus electric or magnetic fields, depending on whether the deformation is elliptic, hyperbolic or parabolic. Asymmetric deformations create new families of exact string vacua. The geometries which are generated in this way, deformed S^3 or AdS_3, include in particular *geometric cosets* such as S^2, AdS_2 or H_2. Hence, the latter are consistent, exact conformal sigma models, with electric or magnetic backgrounds. We discuss various geometric and symmetry properties of the deformations at hand as well as their spectra and partition functions, with special attention to the supersymmetric $\mathrm{AdS}_2 \times S^2$ background. We also comment on potential holographic applications.

*Research partially supported by the EEC under the contracts HPRN-CT-2000-00122, HPRN-CT-2000-00131, HPRN-CT-2000-00148.

[†]Unité mixte du CNRS et de l'Ecole Normale Supérieure, UMR 8549.

[‡]Unité mixte du CNRS et de l'Ecole Polytechnique, UMR 7644.

Contents

1. Introduction **1**

2. Magnetic deformation of S^3 **3**
- 2.1 Squashing the three-sphere 4
- 2.2 Critical magnetic field and the geometric coset 6
- 2.3 Character formulas and modular invariance 8

3. Electric/magnetic deformations of AdS_3 **10**
- 3.1 Elliptic deformation: magnetic background 12
- 3.2 Hyperbolic deformation: electric background 14
  - 3.2.1 The background and its CFT realization 14
  - 3.2.2 The spectrum of primaries 15
- 3.3 Parabolic deformation: electromagnetic-wave background 16
- 3.4 A remark on discrete identifications 18

4. Limiting geometries: AdS_2 and H_2 **19**

5. $\mathrm{AdS}_2 \times S^2$ **22**
- 5.1 The spectrum 22
- 5.2 $\mathrm{AdS}_2 \times S^2 \times \mathcal{M}$ and space–time supersymmetry 23

6. Outlook **24**

A. Geometric deformations **27**

B. The three-sphere **28**

C. AdS_3 **30**

D. Equations of motion **33**

1. Introduction

Near-horizon geometries of NS5-branes [1, 2, 3], NS5/F1 or S-dual versions of those [4, 5] have been thoroughly analyzed over the past years. These involve AdS_3 or S^3 spaces and turn out to be exact string backgrounds, tractable beyond the supergravity approximation. They offer a unique setting in which to analyze AdS/CFT correspondence, black-hole physics, little-string theory...

An important, and not yet unravelled aspect of such configurations is the investigation of their moduli space. String propagation in the above backgrounds is described in terms of some exact two-dimensional conformal field theory. Hence, marginal deformations of the latter provide the appropriate tool for exploring the moduli of the corresponding string vacua.

A well-known class of marginal deformations for WZW models are those driven by left-right current bilinears [6, 7]: $\int \mathrm{d}^2z\ J\bar{J}$. These can be "symmetric" in the sense that both J and $\bar{J}$ are generators of the affine algebra of the WZW model. However, asymmetric deformations can also be considered, where either J or $\bar{J}$ correspond to some other $U(1)$, living outside of the chiral algebra of the WZW model. These deformations describe the response of the system to a finite (chromo) electric or magnetic background field and since these deformations are exactly marginal, the gravitational back-reaction is properly taken into account at any magnitude of the external field [8, 9].

The purpose of this note is to report on the asymmetric deformations of the $SL(2,\mathbb{R})_k$ heterotic string background. Since $SL(2,\mathbb{R})$ has time-like, null and space-like generators, three distinct asymmetric deformations are possible, corresponding respectively to magnetic, electromagnetic and electric field backgrounds. The former case has been recently analyzed from this perspective [10] and the corresponding deformation was shown to include Gödel space–time, which is therefore promoted to an exact string background (despite the caveats of closed time-like curves). The latter case, on the other hand, corresponds to a new deformation, which connects AdS_3 with $\mathbb{R}\times\mathrm{AdS}_2$.

This observation is far reaching: while symmetric deformations usually connect WZW models to some $U(1)$-gauged version of them [11], asymmetric deformations turn out to connect the original theory to some *geometric coset,* with *electric* or *magnetic* background fields. This holds for the $SU(2)_k$, where the limiting magnetic deformation has $\mathbb{R}\times S^2$ geometry, and can be generalized to any WZW model: geometric cosets with electric or magnetic background fields provide thus *exact* string vacua. Here we focus on the S^2 and AdS_2 examples, previously discussed as heterotic coset constructions in [12] (see also [13]). Moreover, they both enter in the near-horizon geometry of the four-dimensional Reissner–Nordström extremal black hole, $\mathrm{AdS}_2\times S^2$, which is here shown to be an exact string vacuum. We also show how H_2 appears as an exact CFT, although this background is of limited interest for string theory because of lack of unitarity.

The paper is organized as follows. First we review the magnetic deformation of S^3, appearing in the framework of the $SU(2)_k$ WZW model. The appearance of the two-sphere plus magnetic field as exact string background is described in Sec. 2, where we also determine the corresponding partition function. The AdS_3 case is analyzed in Sec. 3, where its asymmetric deformations are described in detail from geometrical and two-dimensional-CFT points of view. We also investigate their spectra. Limiting deformations are discussed in Sec. 4. There, we show how to reach the $\mathrm{AdS}_2 = SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ geometric coset with electric field. These backgrounds are consistent and exact string vacua.

The H_2 geometric coset of AdS_3 is also shown to appear on the line of magnetic deformation, with imaginary magnetic field though. The near-horizon geometry of the four-dimensional Reissner–Nordström extremal black hole is further discussed in Sec. 5. Section

6 contains a collection of final comments, where we sort various geometries that should be investigated in order to get a comprehensive picture of the general AdS_3 landscape, and its connection to other three-dimensional geometries. Four appendices provide some complementary/technical support. Appendix A sets the general framework for geometric deformations of a metric, designed to keep part of its original isometry. Appendices B and C contain material about $SU(2)$ and $SL(2,\mathbb{R})$ groups manifolds. A reminder of low-energy field equations for the bosonic degrees of freedom of heterotic string is given in App. D.

2. Magnetic deformation of S^3

$SU(2)_k$ WZW model magnetic deformations were analyzed in [8, 9], for both type II and heterotic string backgrounds. For concreteness, we will concentrate here on the latter case. In contrast to what happens in flat space–time, these deformations are truly marginal in the background of a three-sphere plus NS flux, and preserve $N = (1,0)$ world-sheet supersymmetry.

Consider heterotic string on $\mathbb{R}^{1,3} \times S^3 \times T^4$. The theory is critical provided we have a linear dilaton living on the $\mathbb{R}^{1,3}$, with background charge $Q = 1/\sqrt{k+2}$, where k is the level of the $SU(2)_{\mathrm{L}} \times SU(2)_{\mathrm{R}}$ affine algebra. The target-space geometry is the near-horizon limit of the solitonic NS5-brane [1, 2, 3].

The two-dimensional $N = (1,0)$ world-sheet action corresponding to the S^3 factor is

$$S_{SU(2)_k} = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}^2 z \left\{ \frac{k}{4} \left(\partial\alpha\, \bar\partial\alpha + \partial\beta\, \bar\partial\beta + \partial\gamma\, \bar\partial\gamma + 2\cos\beta\, \partial\alpha\, \bar\partial\gamma \right) + \sum_{a=1}^{3} \psi^a\, \bar\partial\psi^a \right\}, \quad (2.1)$$

where ψ^a are the left-moving free fermions, superpartners of the bosonic $SU(2)_k$ currents, and (α, β, γ) are the usual Euler angles parameterizing the $SU(2)$ group manifold (see App. B for a reminder). In this parameterization, the chiral currents of the Cartan subalgebra read:

$$J^3 = k\left(\partial\gamma + \cos\beta\, \partial\alpha \right) \ , \quad \bar J^3 = k\left(\bar\partial\alpha + \cos\beta\, \bar\partial\gamma \right) \quad (2.2)$$

(Tab. 1) with the following short-distance expansion:

$$J^3(z) J^3(0) = \frac{k}{2z^2} + \text{reg.} \quad (2.3)$$

and similarly for the right-moving one. The left-moving fermions transform in the adjoint of $SU(2)$. There are no right-moving superpartners but a right-moving current algebra with total central charge $c = 16$ (realized *e.g.* in terms of right-moving free fermions). The currents of the latter are normalized so that the Cartan generators $\bar J^i_G$ of the group factor G satisfy the following short-distance expansion:

$$\bar J^i_G(z) \bar J^j_G(0) = \frac{k_G h^{ij}}{2\bar z^2} + \text{reg.} \ , \quad i,j = 1,\ldots,\mathrm{rank}(G) \quad (2.4)$$

with $h^{ij} = f^{ik}{}_{\ell}\, f^{\ell j}{}_{k}/g^*$, $f^{ij}{}_{k}$ and g^* being the structure constants and dual Coxeter number of the group G.

The background metric and NS two-form are read off directly from (2.1):

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{k}{4}\left[\mathrm{d}\beta^2 + \sin^2\beta\,\mathrm{d}\alpha^2 + (\,\mathrm{d}\gamma + \cos\beta\,\mathrm{d}\alpha)^2\right], \tag{2.5}$$

$$B = \frac{k}{4}\cos\beta\,\mathrm{d}\alpha\wedge\,\mathrm{d}\gamma. \tag{2.6}$$

They describe a three-sphere of radius $L = \sqrt{k}$ and a NS three-form whose field strength is $\mathrm{d}B = \frac{2}{\sqrt{k}}\,\omega_{[3]}$ ($\omega_{[3]}$ stands for the volume form given in Eq. (B.8)).

A comment is in order here. In general, the background fields G_{ab}, B_{ab}, ... receive quantum corrections due to two-dimensional renormalization effects controlled by α' (here set equal to one). This holds even when the world-sheet theory is exact. Conformal invariance requires indeed the background fields to solve Eqs. (D.11) that receive higher-order α' corrections. The case of WZW models is peculiar in the sense that the underlying symmetry protects G_{ab} and B_{ab} from most corrections; these eventually boil down to the substitution $k \to k+2$ in Eqs. (2.5) and (2.6), see *e.g.* [14].

Notice finally that the $SU(2)_k$ plus linear dilaton background introduces a mass gap with respect to flat space: $\mu^2 = 1/(k+2)$. This plays the role of infra-red regulator, consistent with all string requirements including worldsheet supersymmetry.

2.1 Squashing the three-sphere

We now turn to the issue of conformal deformations. As already advertised, we will not consider left-right symmetric ones, which are purely gravitational. Instead, we will switch the following $N = (1,0)$ world-sheet supersymmetry compatible perturbation on

$$\delta S_{\text{magnetic}} = \frac{\sqrt{kk_G}H}{2\pi}\int \mathrm{d}^2z\left(J^3 + \imath\psi^1\psi^2\right)\bar{J}_G; \tag{2.7}$$

$\bar{J}_G$ being any Cartan current of the group factor G.

Although one may easily show the *integrability* of this marginal perturbation out of general arguments (see *e.g.* [6]) it is instructive to pause and write an explicit proof. If we limit ourselves to the bosonic sector, we can bosonize the $\bar{J}_G$ current as $\bar{J}_G = \imath\bar{\partial}\varphi$ and interpret $\varphi\,(z,\bar{z})$ as an internal degree of freedom (see App. D for a more precise discussion). Incorporating the kinetic term for the φ field, the deformed action reads:

$$S = S_{SU(2)_k}(\alpha,\beta,\gamma) + \delta S_{\text{magnetic}} + \frac{k_G}{4\pi}\int \mathrm{d}^2z\,\partial\varphi\bar{\partial}\varphi, \tag{2.8}$$

where $S_{SU(2)_k}$ (Eq. (2.1)) now contains the bosonic degrees of freedom only. The terms in previous expression can be recollected so to give:

$$S = S_{SU(2)_k}\left(\alpha,\beta,\gamma + \sqrt{\frac{k_G}{k}}H\varphi\right) + \frac{k_G\left(1-2H^2\right)}{4\pi}\int \mathrm{d}^2z\,\partial\varphi\bar{\partial}\varphi, \tag{2.9}$$

which is manifestly an exact CFT. As a corollary, we observe that in the present setting, $\mathcal{O}(\alpha')$ solutions of Eqs. (D.11) are automatically promoted to all-order *exact* solutions by simply shifting $k \to k+2$, just like for an "ordinary" WZW model.

The effect of the deformation at hand is to turn a (chromo)magnetic field on along some Cartan direction inside G, which in turn induces a gravitational back-reaction on the metric and the three-form antisymmetric tensor. Following the previous discussion and App. D (*i.e.* by using Kaluza–Klein reduction), it is straightforward to read off the space–time backgrounds from (2.1) and (2.7). We obtain:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{k}{4}\left[\mathrm{d}\beta^2 + \sin^2\beta\,\mathrm{d}\alpha^2 + \left(1-2H^2\right)\left(\mathrm{d}\gamma + \cos\beta\,\mathrm{d}\alpha\right)^2\right] \tag{2.10}$$

and

$$A = \sqrt{\frac{2k}{k_G}}H\left(\mathrm{d}\gamma + \cos\beta\,\mathrm{d}\alpha\right) \tag{2.11}$$

for the metric and gauge field, whereas neither the B-field nor the dilaton are altered. The three-form field strength is however modified owing to the presence of the gauge field (see Eqs. (D.11)):

$$H_{[3]} = \mathrm{d}B - \frac{k_G}{4}A\wedge\mathrm{d}A = \frac{k}{4}\left(1-2H^2\right)\sin\beta\,\mathrm{d}\alpha\wedge\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}\gamma \tag{2.12}$$

(the non-abelian structure of the gauge field plays no role since the non-vanishing components are in the Cartan subalgebra[1]).

The deformed geometry (2.10) is a *squashed* three-sphere: its volume decreases with respect to the original S^3 while its curvature increases. These properties are captured in the expressions of the volume form and Ricci scalar:

$$\omega_{[3]} = \left(\frac{k}{4}\right)^{3/2}\sqrt{|1-2H^2|}\,\sin\beta\,\mathrm{d}\alpha\wedge\mathrm{d}\beta\wedge\mathrm{d}\gamma, \tag{2.13}$$

$$R = \frac{2}{k}(3+2H^2). \tag{2.14}$$

The latter is constant and the background under consideration has $U(1)\times SU(2)$ isometry generated by the Killing vectors $\{L_3, R_1, R_2, R_3\}$ whose explicit expression is reported in App. B, Tab. 1.

This situation should be compared to the symmetric deformation generated by the the marginal operator $\left(J^3 + i\psi^1\psi^2\right)\bar{J}^3$. This is purely gravitational and alters the metric, the B-field and the dilaton [11]. The isometry is in that case broken to $U(1)\times U(1)$ and the curvature is not constant.

At this point one might wonder to what extent the constant curvature of the asymmetric deformation is due to the large (almost maximal) residual isometry $U(1)\times SU(2)$. This question is answered in App. A, where it is shown, in a general framework, that the isometry requirement is not stringent enough to substantially reduce the moduli space of deformations. In particular, the resulting curvature is in general not constant.

In the case under consideration, however, the geometric deformation is driven by an integrable marginal perturbation of the sigma-model. Combined with the left-over isometry, this requirement leads to the above geometry with constant curvature, Eq. (2.14). From

[1]Similarly, the (chromo)magnetic field strength is given by $F = \mathrm{d}A$.

a purely geometrical point of view (i.e. ignoring the CFT origin), such a deformation joins the subclass of one-parameter families described in App. A, obtained by demanding stability *i.e.* integrability on top of the symmetry.

Notice finally that the $U(1) \times SU(2)$ isometry originates from an affine symmetry at the level of the sigma-model. The asymmetric marginal deformation under consideration breaks the original affine $SU(2)_{\rm L}$ down to $U(1)_{\rm L}$, while it keeps the affine $SU(2)_{\rm R}$ unbroken.

It is worthwhile stressing that this asymmetric and the previously quoted symmetric deformations of the three-sphere background are mutually compatible and can be performed simultaneously [8, 9].

All the above discussion about integrability, geometry and isometries of the $SU(2)_k$ magnetic perturbation is valid for the various asymmetric deformations of $SL(2,\mathbb{R})$ that will be analysed in Sec. 3.

2.2 Critical magnetic field and the geometric coset

It was made clear in [11] that the symmetric deformation of $SU(2)_k$ WZW is a well-defined theory for any value of the deformation parameter. For an infinite deformation, the sigma-model becomes a gauged WZW model $SU(2)_k/U(1)$ (*bell* geometry) times a decoupled boson. In some sense, the two $U(1)$ isometries present on the deformation line act, for extreme deformation, on two disconnected spaces: the bell and the real line.

As already stressed, the magnetic deformation of $SU(2)_k$ preserves a larger symmetry, namely a $U(1) \times SU(2)$, and has constant curvature. We are in the framework discussed in App. A, Eqs. (A.1) and (A.3) with $h = 2H^2$. This deformation has an end-point where the space is expected to factorize into a line with $U(1)$ isometry and a two-dimensional constant-curvature space with $SU(2)$ isometry, which can only be a two-sphere.

These statements can be made more precise by considering the background (2.10). The deformation parameter H^2 is clearly bounded: $H^2 \leqslant 1/2$ (the boundary $H^2_{\rm max} = 1/2$ of the moduli space is reminiscent of the $\mathrm{Im}\,(U) \to \infty$ limit in a two-dimensional toroidal compactification). In general, a three sphere can be seen as an S^1-Hopf fibration over a base S^2. It is clear from expressions (2.10) and (2.13) that the effect of the magnetic field consists in changing the radius of the fiber. At $H^2 = H^2_{\rm max}$, this radius vanishes. The corresponding dimension decompactifies, and factorizes from the three-dimensional geometry:

$$S^3 \xrightarrow[H^2 \to H^2_{\rm max}]{} \mathbb{R} \times S^2, \tag{2.15}$$

where S^2 is the *geometric coset* $SU(2)/U(1)$. The $M_H \to SU(2)/U(1)$ fibration trivializes in this limit. This can be made more transparent by introducing a new coordinate:

$$y = \sqrt{\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2} - H^2\right)}\,\gamma. \tag{2.16}$$

The metric and volume form now read:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{k}{4}\left[\mathrm{d}\beta^2 + \sin^2\beta\,\mathrm{d}\alpha^2\right] + \mathrm{d}y^2 + 2\sqrt{\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2} - H^2\right)}\cos\beta\;\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}y + \frac{k}{2}\left(\frac{1}{2} - H^2\right)\cos^2\beta\,\mathrm{d}\alpha^2 \tag{2.17}$$

and

$$\omega_{[3]} = \frac{k}{4}\,\sin\beta\,\mathrm{d}\alpha\wedge\,\mathrm{d}\beta\wedge\,\mathrm{d}y. \tag{2.18}$$

For H^2 close to $H^2_{\max}$, the y-direction factorizes

$$\mathrm{d}s^2 \xrightarrow[H^2\to H^2_{\max}]{} \mathrm{d}y^2 + \frac{k}{4}\left[\,\mathrm{d}\beta^2 + \sin^2\beta\,\mathrm{d}\alpha^2\right], \tag{2.19}$$

while the curvature ($R \to 8/k$) is entirely supported by the remaining two-sphere of radius $\sqrt{k/4}$. The other background fields read:

$$F = \sqrt{\frac{2k}{k_G}}H\sin\beta\,\mathrm{d}\alpha\wedge\,\mathrm{d}\beta \xrightarrow[H^2\to H^2_{\max}]{} \sqrt{\frac{k}{k_G}}\sin\beta\,\mathrm{d}\alpha\wedge\,\mathrm{d}\beta, \tag{2.20}$$

$$H_{[3]} = \sqrt{\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2}-H^2\right)}\sin\beta\,\mathrm{d}\alpha\wedge\,\mathrm{d}\beta\wedge\,\mathrm{d}y \xrightarrow[H^2\to H^2_{\max}]{} 0. \tag{2.21}$$

The above analysis deserves several comments. Our starting point was a marginal deformation of the $SU(2)_k$ WZW model embedded in heterotic strings and induced by a space–time (chromo)magnetic field. Our observation is here that the corresponding moduli space has a boundary, where the background is $\mathbb{R}\times S^2$, with finite magnetic field and no three-form NS background. Being a marginal deformation, this background is *exact*, showing thereby that the geometric coset is as good as a gauged WZW model background. The latter appears similarly as the end-point of a purely gravitational deformation; it carries neither magnetic field nor $H_{[3]}$, but has a non-trivial dilaton.

Notice also that it was observed in the past that S^2 could provide part of a string vacuum in the presence of RR fluxes [15], but as usual when dealing with RR fluxes, no exact conformal field theory description is available.

The procedure we have developed so far for obtaining the two-sphere as an exact background in the presence of a magnetic field is easily generalizable to other geometric cosets of compact or non-compact groups. We will focus on the latter case is Sec. 3, and analyze the electric/magnetic deformations of AdS_3.

Our last comment concerns the quantization of the magnetic flux. Indeed the two-sphere appears naturally as a factor of magnetic monopoles backgrounds [16]. At the limiting value of the deformation, the flux of the gauge field through the two-sphere is given by:

$$\mathcal{Q} = \int_{S^2} F = \sqrt{\frac{k}{k_G}}\int_{S^2}\hat{\omega}_2 = \sqrt{\frac{k}{k_G}}4\pi, \tag{2.22}$$

where $\hat{\omega}_2$ stands for the volume form of a unit-radius two-sphere. Therefore, a quantization of the magnetic charge is only compatible with levels of the affine algebras such that:

$$\frac{k}{k_G} = p^2\ ,\quad p\in\mathbb{Z}. \tag{2.23}$$

Actually, it was shown in [12] that the model corresponding to the critical magnetic field can be obtained directly with the following asymmetric gauged WZW model:

$$\frac{SU(2)_k\times U(1)_{k_G}}{U(1)}, \tag{2.24}$$

where the left gauging lies in the $SU(2)_k$ WZW model and the right gauging in the $U(1)_{k_G}$ of the gauge sector. The cancellation of the anomalies of the coset dictates a condition on the level of $SU(2)_k$ similar to (2.23).

2.3 Character formulas and modular invariance

We will here construct the contribution of the squashed three-sphere to the partition function. This contribution is modular-covariant, and combines with the remaining degrees of freedom into a modular-invariant result. Our computation will also include the S^2 limiting geometry. We will consider the case $k_G = 2$, *i.e.* a $U(1)$ algebra generated by one right-moving complex fermion. We begin with the following combination of $SU(2)_{k-2}$ supersymmetric characters and fermions from the gauge sector:

$$Z\begin{bmatrix} a; h \\ b; g \end{bmatrix} = \sum_{j,\bar{\jmath}=0}^{(k-2)/2} M^{j\bar{\jmath}}\, \chi^j\, \frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]}{\eta}\, \bar{\chi}^{\bar{\jmath}}\, \frac{\bar{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix} h \\ g \end{smallmatrix}\right]}{\bar{\eta}}. \tag{2.25}$$

where the χ^j's are the characters of bosonic $SU(2)_{k-2}$, (a, b) are the $\mathbb{Z}_2$ boundary conditions for the left-moving fermions[2] and (h, g) those of the right-moving – gauge-sector – ones. We can choose any matrix $M^{j\bar{\jmath}}$ compatible with modular invariance of $SU(2)_{k-2}$. Furthermore, the supersymmetric $SU(2)_k$ characters can be decomposed in terms of those of the $N = 2$ minimal models:

$$\chi^j(\tau)\, \vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\tau, \nu) = \sum_{m\in\mathbb{Z}_{2k}} \mathcal{C}^j_m \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Theta_{m,k}\left(\tau, -\frac{2\nu}{k}\right), \tag{2.26}$$

where the $N = 2$ minimal-model characters, determined implicitly by this decomposition, are given in [17, 18, 19, 20].

Our aim is to implement the magnetic deformation in this formalism. The deformation acts as a boost on the left-lattice contribution of the Cartan current of the supersymmetric $SU(2)_k$ and on the right current from the gauge sector:

$$\begin{aligned} \Theta_{m,k}\, \bar{\vartheta}\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} &= \sum_{n,\bar{n}} \mathrm{e}^{-\imath\pi g\left(\bar{n}+\frac{h}{2}\right)} q^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{2k}n+\frac{m}{\sqrt{2k}}\right)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}\left(\bar{n}+\frac{h}{2}\right)^2} \\ &\longrightarrow \sum_{n,\bar{n}} \mathrm{e}^{-\imath\pi g\left(\bar{n}+\frac{h}{2}\right)}\, q^{\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2k}n+\frac{m}{\sqrt{2k}}\right)\cosh x+\left(\bar{n}+\frac{h}{2}\right)\sinh x\right]^2} \\ &\qquad \times \bar{q}^{\frac{1}{2}\left[\left(\bar{n}+\frac{h}{2}\right)\cosh x+\left(\sqrt{2k}n+\frac{m}{\sqrt{2k}}\right)\sinh x\right]^2}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

The boost parameter x is related to the vacuum expectation value of the gauge field as follows:

$$\cosh x = \frac{1}{1-2H^2}. \tag{2.28}$$

[2] We have removed the contribution of the fermion associated to J^3 since it is neutral in the deformation process.

We observe that, in the limit $H^2 \to H^2_{\max}$, the boost parameter diverges ($x \to \infty$), and the following constraints arise:

$$4(k+2)n + 2m + 2\sqrt{2k}\bar{n} + \sqrt{2k}h = 0. \tag{2.29}$$

Therefore, the limit is well-defined only if the level of the supersymmetric $SU(2)_k$ satisfies a quantization condition:

$$k = 2p^2 \ , \quad p \in \mathbb{Z}. \tag{2.30}$$

This is exactly the charge quantization condition for the flux of the gauge field, Eq. (2.23). Under this condition, the constraints (2.29) lead to

$$m + ph \equiv 0 \mod 2p =: 2pN, \tag{2.31a}$$

$$\bar{n} = 2pn + N, \quad N \in \mathbb{Z}_{2p}. \tag{2.31b}$$

As a consequence, the $U(1)$ corresponding to the combination of charges orthogonal to (2.29) decouples (its radius vanishes), and can be removed. We end up with the following expression for the S^2 partition function contribution:

$$Z_{S^2}\begin{bmatrix} a; h \\ b; g \end{bmatrix} = \sum_{j,\bar{j}} M^{j\bar{j}} \sum_{N\in\mathbb{Z}_{2p}} \mathrm{e}^{\imath\pi g\left(N+\frac{h}{2}\right)}\, \mathcal{C}^{j}_{p(2N-h)}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \bar{\chi}^{\bar{j}}, \tag{2.32}$$

in agreement with the result found in [21] by using the coset construction. The remaining charge N labels the magnetic charge of the state under consideration. As a result, the R-charges of the left $N=2$ superconformal algebra are:

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{R}} = n + \frac{a}{2} - \frac{N - h/2}{p} \mod 2. \tag{2.33}$$

We now turn to the issue of modular covariance. Under the transformation $\tau \to -1/\tau$, the minimal-model characters transform as:

$$\mathcal{C}^{j}_{m}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{k}\mathrm{e}^{\imath\frac{\pi}{2}ab} \sum_{j'=0}^{(k-2)/2} \sin\left(\frac{\pi(2j+1)(2j'+1)}{k}\right) \sum_{m'\in\mathbb{Z}_{2k}} \mathrm{e}^{\imath\pi\frac{mm'}{k}} \mathcal{C}^{j'}_{m'}\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}(\tau). \tag{2.34}$$

On the one hand, the part of the modular transformation related to j is precisely compensated by the transformation of $\bar{\chi}^{\bar{j}}$, in Eq. (2.32). On the other hand, the part of the transformation related to the spin structure (a, b) is compensated by the transformation of the other left-moving fermions in the full heterotic string construction. We can therefore concentrate on the transformation related to the m charge, coming from the transformation of the theta-functions at level k. We have

$$\sum_{N\in\mathbb{Z}_{2p}} \mathrm{e}^{-\imath\pi g\left(N+\frac{h}{2}\right)}\, \mathcal{C}^{j}_{p(2N-h)}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2k}} \sum_{m'\in\mathbb{Z}_{4p^2}} \sum_{N\in\mathbb{Z}_{2p}} \mathrm{e}^{\frac{\imath\pi}{2}\left(g-\frac{m'}{p}\right)h} \mathrm{e}^{2\imath\pi\frac{N(m'+pg)}{2p}} \mathcal{C}^{j}_{m'}\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}; \tag{2.35}$$

summing over N in $\mathbb{Z}_{2p}$ leads to the constraint:

$$m' + pg \equiv 0 \mod 2p := -2pN' \ , \ N' \in \mathbb{Z}_{2p}. \tag{2.36}$$

So we end up with the sum

$$\mathrm{e}^{-\frac{\imath\pi}{2}hg} \sum_{N'\in\mathbb{Z}_{2p}} \mathrm{e}^{-\imath\pi h\left(N'+\frac{g}{2}\right)} \mathcal{C}^{j}_{p(2N'-g)} \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}. \tag{2.37}$$

combining this expression with the modular transformation of the remaining right-moving fermions of the gauge sector, we obtain a modular invariant result.

In a similar way one can check the invariance of the full heterotic string CFT under $\tau \to \tau + 1$.

3. Electric/magnetic deformations of AdS_3

Anti-de-Sitter space in three dimensions is the (universal covering of the) $SL(2,\mathbb{R})$ group manifold. It provides therefore an exact string vacuum with NS background, described in terms of the $SL(2,\mathbb{R})_k$ WZW model, where time is embedded in the non-trivial geometry. We will consider it as part of some heterotic string solution such as $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times T^4$ with NS three-form field in $\mathrm{AdS}_3 \times S^3$ (near-horizon NS5/F1 background). The specific choice of a background is however of limited importance for our purpose.

The issue of AdS_3 deformations has been raised in several circumstances. It is richer than the corresponding S^3 owing to the presence of elliptic, hyperbolic or parabolic elements in $SL(2,\mathbb{R})$. The corresponding generators are time-like, space-like or light-like. Similarly, the residual symmetry of a deformed AdS_3 has $U(1)$ factors, which act in time, space or light direction.

Marginal *symmetric* deformations of the $SL(2,\mathbb{R})_k$ WZW are driven by bilinears $J\bar{J}$ where both currents are in $SL(2,\mathbb{R})$ and are of the same kind [22, 23]. These break the $SL(2,\mathbb{R})_{\mathrm{L}} \times SL(2,\mathbb{R})_{\mathrm{R}}$ affine symmetry to $U(1)_{\mathrm{L}} \times U(1)_{\mathrm{R}}$ and allow to reach, at extreme values of the deformation, gauged $SL(2,\mathbb{R})_k/U(1)$ WZW models with an extra free decoupled boson. We can summarize the results as follows:

(a) $\underline{J^3\bar{J}^3}$ These are time-like currents (for conventions see App. C) and the corresponding deformations connect $SL(2,\mathbb{R})_k$ with $U(1) \times SL(2,\mathbb{R})_k/U(1)|_{\text{axial or vector}}$. The $U(1)$ factor stands for a decoupled, non-compact time-like free boson[3]. The gauged WZW model $SL(2,\mathbb{R})_k/U(1)|_{\text{axial}}$ is the *cigar* (two-dimensional Euclidean black hole) obtained by gauging the $g \to hgh$ symmetry with the $h = \exp i\frac{\lambda}{2}\sigma^2$ subgroup, whereas $SL(2,\mathbb{R})_k/U(1)|_{\text{vector}}$ corresponds to the $g \to hgh^{-1}$ gauging. This is the *trumpet* and is T-dual to the cigar[4]. The generators of the affine residual symmetry $U(1)_{\mathrm{L}} \times U(1)_{\mathrm{R}}$ are both time-like (the corresponding Killing vectors are not orthogonal though). For extreme deformation, the time coordinate decouples and the antisymmetric tensor is trade for a dilaton. The isometries are time-translation invariance and rotation invariance in the cigar/trumpet.

[3] The extra bosons are always non-compact.

[4] Actually this statement holds only for the vector coset of the *single cover* of $SL(2,\mathbb{R})$. Otherwise, from the n-th cover of the group manifold one obtains the n-th cover of the trumpet [23].

(b) $\underline{J^2\bar{J}^2}$ The deformation is now induced by space-like currents. So is the residual affine symmetry $U(1)_{\rm L}\times U(1)_{\rm R}$ of the deformed model. Extreme deformation points are T-dual: $U(1)\times SL(2,\mathbb{R})_k/U(1)$ where the $U(1)$ factor is space-like, and the $U(1)$ gauging of $SL(2,\mathbb{R})_k$ corresponds to $g\to hgh^{(-1)}$ with $h=\exp-\frac{\lambda}{2}\sigma^3$ [24]. The corresponding manifold is (some sector of) the Lorentzian two-dimensional black hole with a non-trivial dilaton.

(c) $\underline{(J^1+J^3)(\bar{J}^1+\bar{J}^3)}$ This is the last alternative, with both null currents. The deformation connects AdS_3 with $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{1,1}$ plus a dilaton linear in the first factor. The $U(1)_{\rm L}\times U(1)_{\rm R}$ left-over current algebra is light-like[5]. Tensorized with an $SU(2)_k$ CFT, this background describes a decoupling limit of the NS5/F1 setup [23], where the fundamental strings regularize the strong coupling regime.

Our purpose here is to analyze *asymmetric* deformations of AdS_3. Following App. A and the similar analysis of Sec. 2.1 for S^3, we expect those deformations to preserve a $U(1)_{\rm L}\times SL(2,\mathbb{R})_{\rm R}$ symmetry appearing as affine algebra from the sigma-model point of view, and as isometry group for the background. The residual $U(1)_{\rm L}$ factor can be time-like, space-like or null depending on the current that has been used to perturb the WZW model.

It is worth to stress that some deformations of AdS_3 have been studied in the past irrespectively of any conformal sigma-model or string theory analysis. In particular it was observed in [25], following [26] that the three-dimensional[6] Gödel solution of Einstein equations could be obtained as a member of a one-parameter family of AdS_3 deformations that precisely enters the class we discuss in App. A. Gödel space-time is a constant-curvature Lorentzian manifold. Its isometry group is $U(1)\times SL(2,\mathbb{R})$, and the $U(1)$ factor is generated by a time-like Killing vector ; these properties hold for generic values of the deformation parameter. In fact the deformed AdS_3 under consideration can be embedded in a seven-dimensional flat space with appropriate signature, as the intersection of four quadratic surfaces. Closed time-like curves as well as high symmetry are inherited from the multi-time maximally symmetric host space. Another interesting property resulting from this embedding is the possibility for changing the sign of the curvature along the continuous line of deformation, without encountering any singular behaviour (see Eq. (3.2)).

It seems natural to generalize the above results to *new* AdS_3 deformations and promote them to *exact* string backgrounds. Our guideline will be the requirement of a $U(1)\times SL(2,\mathbb{R})$ isometry group, with space-like or light-like $U(1)$'s, following the procedure developed in App. A.

We will first review the time-like (elliptic) deformation of AdS_3 of [25] and recently studied from a string perspective in [10]. Hyperbolic (space-like) and parabolic (light-like) deformations will be analyzed in Secs. 3.2 and 3.3. All these deformations are of the type (A.1) and (A.3) or (A.4). We show in the following how to implement these deformations

[5]The isometry is actually richer by one (two translations plus a boost), but the extra generator (the boost) is not promoted to an affine symmetry of the sigma-model.

[6]In fact, the original Gödel solution is four-dimensional, but the forth space dimension is a flat spectator. In the following, we will systematically refer to the three-dimensional non-trivial factor.

as exact marginal perturbations in the framework of the $SL(2,\mathbb{R})_k$ WZW model embedded in heterotic string.

3.1 Elliptic deformation: magnetic background

Consider AdS_3 in the (ρ, t, ϕ) coordinates, with metric given in (C.10). In these coordinates, two manifest Killing vectors are $L_3 \sim \partial_t$ and $R_2 \sim \partial_\phi$, time-like and space-like respectively (see App. C, Tab. 2).

The deformation studied in [25] and quoted as "squashed anti de Sitter" reads, in the above coordinates:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{L^2}{4}\left[\mathrm{d}\rho^2 + \cosh^2\rho\,\mathrm{d}\phi^2 - \left(1+2H^2\right)\left(\mathrm{d}t + \sinh\rho\,\mathrm{d}\phi\right)^2\right]. \tag{3.1}$$

It preserves a $U(1)\times SL(2,\mathbb{R})$ isometry group. The $U(1)$ is generated by the *time-like* vector L_3 of one original $SL(2,\mathbb{R})$, while the right-moving $SL(2,\mathbb{R})$ is unbroken (the expressions for the $\{L_3, R_1, R_2, R_3\}$ Killing vectors in Tab. 2 remain valid at any value of the deformation parameter). The Ricci scalar is constant

$$R = -\frac{2}{L^2}(3-2H^2), \tag{3.2}$$

while the volume form reads:

$$\omega_{[3]} = \frac{L^3}{8}\sqrt{|1+2H^2|}\,\cosh\rho\;\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

For $H^2 = 1/2$, this deformation coincides with the Gödel metric. It should be stressed, however, that nothing special occurs at this value of the deformation parameter. The properties of Gödel space are generically reproduced at any $H^2 > 0$.

From a physical point of view, as it stands, this solution is pathological because it has topologically trivial closed time-like curves through each point of the manifold, like Gödel space-time which belongs to this family. Its interest mostly relies on the fact that it can be promoted to an exact string solution, with appropriate NS and magnetic backgrounds. The high symmetry of (3.1), is a severe constraint and, as was shown in [10], the geometry at hand does indeed coincide with the unique marginal deformation of the $SL(2,\mathbb{R})_k$ WZW that preserves a $U(1)_{\mathrm{L}}\times SL(2,\mathbb{R})_{\mathrm{R}}$ affine algebra with time-like $U(1)_{\mathrm{L}}$.

It is interesting to observe that, at this stage, the deformation parameter H^2 *needs not be positive.*: (3.1) solves the Einstein-Maxwell-scalar equations [26] for any H^2. Furthermore, for $H^2 < 0$, there are no longer closed time-like curves[7]. This statement is based on a simple argument[8]. Consider a time-like curve $x^\mu = x^\mu(\lambda)$. By definition the tangent vector ∂_λ is negative-norm, which, by using Eq. (3.1), translates into

$$\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \cosh^2\rho\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 - \left(1+2H^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} + \sinh\rho\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 < 0. \tag{3.4}$$

[7] As mentioned previously, the geometry at hand can be embedded in a seven-dimensional flat space, with signature $\varepsilon - - - + + +$, $\varepsilon = \mathrm{sign}(-H^2)$ [25]. This clarifies the origin of the symmetry as well as the presence or absence of closed time-like curves for positive or negative H^2.

[8] This argument is local and must in fact be completed by global considerations on the manifold (see [25]).

If the curve is closed, $\mathrm{d}t/\,\mathrm{d}\lambda$ must vanish somewhere. At the turning point, the resulting inequality,

$$\left(2H^2\sinh^2\rho-1\right)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\rho}\right)^2>1 \tag{3.5}$$

is never satisfied for $H^2<0$, whereas it is for large enough[9] ρ otherwise.

This apparent *regularization of the causal pathology*, unfortunately breaks down at the string level. In fact, as we will shortly see, in order to be considered as a string solution, the above background requires a (chromo)magnetic field. The latter turns out to be proportional to H, and becomes *imaginary* in the range where the closed time-like curves disappear. Hence, at the string level, unitarity is trade for causality. It seems that no regime exists in the magnetic deformation of AdS_3, where these fundamental requirements are simultaneously fulfilled.

In the heterotic backgrounds considered here, of the type $\mathrm{AdS}_3\times S^3\times T^4$, the two-dimensional $N=(1,0)$ world-sheet action corresponding to the AdS_3 factor is

$$S_{SL(2,\mathbb{R})_k}=\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}^2z\left\{\frac{k}{4}\left(\partial\rho\,\bar\partial\rho-\,\partial t\,\bar\partial t+\,\partial\phi\,\bar\partial\phi-2\sinh\rho\,\partial\phi\,\bar\partial t\right)+\eta_{ab}\,\psi^a\,\bar\partial\psi^b\right\}, \tag{3.6}$$

where $\eta_{ab}=\mathrm{diag}\,(++-)$, $a=1,2,3$ and ψ^a are the left-moving superpartners of the $SL(2,\mathbb{R})_k$ currents (see Tab. 2). The corresponding background fields are the metric (Eq. (C.10)) with radius $L=\sqrt{k}$ and the NS B-field:

$$B=-\frac{k}{4}\sinh\rho\,\mathrm{d}\phi\wedge\,\mathrm{d}t. \tag{3.7}$$

The three-form field strength is $H_{[3]}=\,\mathrm{d}B=-\frac{2}{\sqrt{k}}\,\omega_{[3]}$ with $\omega_{[3]}$ displayed in Eq. (C.11).

The asymmetric perturbation that preserves a $U(1)_{\mathrm{L}}\times SL(2,\mathbb{R})_{\mathrm{R}}$ affine algebra with time-like $U(1)_{\mathrm{L}}$ is $\delta S_{\mathrm{magnetic}}$ given in Eq. (2.7), where J^3 now stands for the left-moving time-like $SL(2,\mathbb{R})_k$ current given in App. C, Tab. 2. This perturbation corresponds to switching on a (chromo)magnetic field, like in the $SU(2)_k$ studied in Sec. 2. It is marginal and can be integrated for finite values of H, and is compatible with the $N=(1,0)$ world-sheet supersymmetry. The resulting background fields, extracted in the usual manner from the deformed action are the metric (3.1) with radius $L=\sqrt{k}$ and the following gauge field:

$$A=H\sqrt{\frac{2k}{k_g}}\left(\,\mathrm{d}t+\sinh\rho\,\mathrm{d}\phi\right). \tag{3.8}$$

The NS B-field is not altered by the deformation, (Eq. (3.7)), whereas the three-form field strength depends explicitly on the deformation parameter H, because of the gauge-field contribution:

$$H_{[3]}=\,\mathrm{d}B-\frac{k_G}{4}A\wedge\,\mathrm{d}A=-\frac{k}{4}\left(1+2H^2\right)\cosh\rho\,\mathrm{d}\rho\wedge\,\mathrm{d}\phi\wedge\,\mathrm{d}t. \tag{3.9}$$

[9]This means $\rho>\rho_{\mathrm{c}}$ where ρ_{c} is the radius where the norm of ∂_ϕ vanishes and switches to negative ($\|\,\partial_\phi\|^2=L^2\left(1-2H^2\sinh^2\rho\right)/4$). This never occurs for $H^2<0$.

One can easily check that the background fields (3.1), (3.8) and (3.9) solve the lowest-order equations of motion (D.11). Of course the solution we have obtained is exact, since it has been obtained as the marginal deformation of an exact conformal sigma-model. The interpretation of the deformed model in terms of background fields $\{G_{ab}, B_{ab}, F^G_{ab}\}$ receives however the usual higher-order correction summarized by the shift $k \to k+2$ as we have already seen for the sphere in Sec. 2.1.

Let us finally mention that it is possible to extract the spectrum and write down the partition function of the above theory [10], since the latter is an exact deformation of the $SL(2,\mathbb{R})_k$ WZW model. This is achieved by deforming the associated elliptic Cartan subalgebra. The following picture emerges then from the analysis of the spectrum. The short-string spectrum, corresponding to world-sheets trapped in the center of the space–time (for some particular choice of coordinates) is well-behaved, because these world-sheets do not feel the closed time-like curves which are "topologically large". On the contrary, the long strings can wrap the closed time-like curves, and their spectrum contains many tachyons. Hence, the caveats of Gödel space survive the string framework, at any value of $H^2 > 0$. One can circumvent them by slightly deviating from the Gödel line with an extra purely gravitational deformation, driven by $J^3\bar{J}^3$. This deformation isolates the causally unsafe region, $\rho > \rho_c$ (see [10] for details). It is similar in spirit with the supertubes domain-walls of [27] curing the Gödel-like space-times with RR backgrounds.

As already stressed, one could alternatively switch to negative H^2. Both metric and antisymmetric tensor are well-defined and don't suffer of causality problems. The string picture however breaks down because the magnetic field (Eq. (3.8)) becomes imaginary.

3.2 Hyperbolic deformation: electric background

3.2.1 The background and its CFT realization

We will now focus on a different deformation. We use coordinates (C.12) with metric (C.13), where the manifest Killing vectors are $L_2 \sim \partial_x$ (space-like) and $R_3 \sim \partial_\tau$ (time-like) (see App. C, Tab. 3). This time we perform a deformation that preserves a $SO(1,1) \times SL(2,\mathbb{R})$ isometry. The $SO(1,1)$ corresponds to the non-compact space-like Killing vector L_2, whereas the $SL(2,\mathbb{R})$ is generated by R_1, R_2, R_3, which are again not altered by the deformation. This is achieved by implementing Eqs. (A.1) and (A.3) in the present set up, with $\xi = \partial_x$ and $h = 2H^2$. The resulting metric reads:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{L^2}{4}\left[\mathrm{d}r^2 - \cosh^2 r\,\mathrm{d}\tau^2 + \left(1-2H^2\right)\left(\mathrm{d}x + \sinh r\,\mathrm{d}\tau\right)^2\right]. \tag{3.10}$$

The scalar curvature of this manifold is constant

$$R = -\frac{2}{L^2}\left(3+2H^2\right) \tag{3.11}$$

and the volume form

$$\omega_{[3]} = \frac{L^3}{8}\sqrt{|1-2H^2|}\,\cosh^2 r\;\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}x. \tag{3.12}$$

Following the argument of Sec. 3.1, one can check whether closed time-like curves appear. Indeed, assuming their existence, the following inequality must hold at the turning point *i.e.* where $\mathrm{d}t/\,\mathrm{d}\lambda$ vanishes (λ being the parameter that describes the curve):

$$\left(2H^2-1\right)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^2>1. \tag{3.13}$$

The latter cannot be satisfied in the regime $H^2<1/2$. Notice that the manifold at hand is well behaved, even for negative H^2.

Let us now leave aside these questions about the classical geometry, and address the issue of string realization of the above background. As already advertised, this is achieved by considering a world-sheet-supersymmetric marginal deformation of the $SL(2,\mathbb{R})_k$ WZW model that implements (chromo)electric field. Such a deformation is possible in the heterotic string at hand:

$$\delta S_{\text{electric}}=\frac{\sqrt{kk_G}H}{2\pi}\int \mathrm{d}^2z\left(J^2+i\psi^1\psi^3\right)\bar{J}_G, \tag{3.14}$$

($\bar{J}_G$ is any Cartan current of the group G and J^2 is given in App. C, Tab. 3), and corresponds, as in previous cases, to an integrable marginal deformation. The deformed conformal sigma-model can be analyzed in terms of background fields. The metric turns out to be (3.10), whereas the gauge field and three-form tensor are

$$A=H\sqrt{\frac{2k}{k_g}}\left(\,\mathrm{d}x+\sinh r\,\mathrm{d}\tau\right), \tag{3.15}$$

$$H_{[3]}=\frac{k}{4}\left(1-2H^2\right)\cosh r\,\mathrm{d}r\wedge\,\mathrm{d}\tau\wedge\,\mathrm{d}x. \tag{3.16}$$

As expected, these fields solve Eqs. (D.11).

The background under consideration is a new string solution generated as a hyperbolic deformation of the $SL(2,\mathbb{R})_k$ WZW model. In contrast to what happens for the elliptic deformation (magnetic background analyzed in Sec. 3.1), the present solution is perfectly sensible, both at the classical and at the string level.

3.2.2 The spectrum of primaries

The electric deformation of AdS_3 is an exact string background. The corresponding conformal field theory is however more difficult to deal with than the one for the elliptic deformation. In order to write down its partition function, we must decompose the $SL(2,\mathbb{R})_k$ partition function in a hyperbolic basis of characters, where the implementation of the deformation is well-defined and straightforward; this is a notoriously difficult exercise. On the other hand the spectrum of primaries is known[10] from the study of the representations of the Lie algebra in this basis (see *e.g.* [28], and [24] for the spectrum of the hyperbolic gauged WZW model). The part of the heterotic spectrum of interest contains the expression

[10] In the following we do not consider the issue of the spectral-flow representations. The spectral-flow symmetry is apparently broken by the deformation considered here.

for the primaries of $N=(1,0)$ affine $SL(2,\mathbb{R})$ at purely bosonic level[11] $k+2$, together with some $U(1)$ from the lattice of the heterotic gauge group:

$$L_0 = -\frac{j(j-1)}{k} - \frac{1}{2}\left(n+\frac{a}{2}\right)^2, \tag{3.17}$$

$$\bar{L}_0 = -\frac{j(j-1)}{k} + \frac{1}{2}\left(\bar{n}+\frac{h}{2}\right)^2, \tag{3.18}$$

where the second Casimir of the representation of the $SL(2,\mathbb{R})$ algebra, $-j(j-1)$, explicitly appears. The spectrum contains *continuous representations*, with $j=\frac{1}{2}+\imath s$, $s\in\mathbb{R}_+$. It also contains *discrete representations*, with $j\in\mathbb{R}_+$, lying within the unitarity range $1/2<j<(k+1)/2$ (see [29, 30]). In both cases the spectrum of the hyperbolic generator J^2 is $\mu\in\mathbb{R}$. The expression for the left conformal dimensions, Eq. (3.17), also contains the contribution from the world-sheet fermions associated to the $\imath\psi^1\psi^3$ current. The sector (R or NS) is labelled by $a\in\mathbb{Z}_2$. Note that the unusual sign in front of the lattice is the natural one for the fermions of the light-cone directions. In the expression (3.18) we have similarly the contribution of the fermions of the gauge group, where h labels the corresponding sector.

We are now in position to follow the procedure, familiar from the previous examples: we have to (i) isolate from the left spectrum the lattice of the supersymmetric hyperbolic current $J^2+\imath\psi^1\psi^3$ and (ii) perform a boost between this lattice and the fermionic lattice of the gauge field. We hence obtain the following expressions:

$$\begin{aligned} L_0 = -\frac{j(j-1)}{k} - \frac{\mu^2}{k+2} - \frac{k+2}{2k}\left(n+\frac{a}{2}+\frac{2\mu}{k+2}\right)^2 + \\ + \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{2}{k}}\left(\mu+n+\frac{a}{2}\right)\cosh x + \left(\bar{n}+\frac{h}{2}\right)\sinh x\right]^2, \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\bar{L}_0 = -\frac{j(j-1)}{k} + \frac{1}{2}\left[\left(\bar{n}+\frac{h}{2}\right)\cosh x + \sqrt{\frac{2}{k}}\left(\mu+n+\frac{a}{2}\right)\sinh x\right]^2. \tag{3.20}$$

The relation between the boost parameter x and the deformation parameter H^2 is given in Eq. (2.28), as for the case of the $SU(2)_k$ deformation. In particular it is worth to remark that the first three terms of (3.19) correspond to the left weights of the worldsheet-supersymmetric two-dimensional Lorentzian black hole, *i.e.* the $SL(2,\mathbb{R})/O(1,1)$ gauged super-WZW model.

3.3 Parabolic deformation: electromagnetic-wave background

In the deformations of Secs. 3.1 and 3.2, one $SL(2,\mathbb{R})$ isometry breaks down to a $U(1)$ generated either by a time-like or by a space-like Killing vector. Deformations which preserve a light-like isometry do also exist and are easily implemented in Poincaré coordinates.

[11] More precisely we consider primaries of the purely bosonic affine algebra with an arbitrary state in the fermionic sector.

We require that the isometry group is $SO(1,1) \times SL(2,\mathbb{R})$ with a null Killing vector for the $SO(1,1)$ factor. Following the deformation procedure described in App. A for the particular case of light-like residual isometry, Eq. (A.4) with $h = 2H^2$, we are lead to

$$\mathrm{d}s^2 = L^2 \left[\frac{\mathrm{d}u^2}{u^2} + \frac{\mathrm{d}x^+ \, \mathrm{d}x^-}{u^2} - 2H^2 \left(\frac{\mathrm{d}x^+}{u^2} \right)^2 \right]. \tag{3.21}$$

The light-like $SO(1,1)$ Killing vector is $L_1 + L_3 \sim \partial_-$ (see App. C, Tab. 4). The remaining $SL(2,\mathbb{R})$ generators are $\{R_1 + R_3, R_1 - R_3, R_2\}$ and remain unaltered after the deformation.

The above deformed anti-de-Sitter geometry looks like a superposition of AdS_3 and of a plane wave. As usual, the sign of H^2 is free at this stage, and $H^2 < 0$ are equally good geometries. In the near-horizon region ($|u| \gg |H^2|$) the geometry is not sensitive to the presence of the wave. On the contrary, this plane wave dominates in the opposite limit, near the conformal boundary.

The volume form is not affected by the deformation, and it is still given in (C.17); neither is the Ricci scalar modified:

$$R = -\frac{6}{L^2}. \tag{3.22}$$

Notice also that the actual value of $|H|$ is not of physical significance: it can always be absorbed into a reparameterization $x^+ \to x^+/|H|$ and $x^- \to x^-|H|$. The only relevant values for H^2 can therefore be chosen to be $0, \pm 1$.

We now come to the implementation of the geometry (3.21) in a string background. The only option is to perform an asymmetric exactly marginal deformation of the heterotic $SL(2,\mathbb{R})_k$ WZW model that preserves a $U(1)_{\mathrm{L}} \times SL(2,\mathbb{R})_{\mathrm{R}}$ affine symmetry. This is achieved by introducing

$$\delta S_{\text{electric}-\text{magnetic}} = -4\sqrt{k k_G} H \int \mathrm{d}^2 z \left(J^1 + J^3 + i \left(\psi^1 + \psi^3 \right) \psi^2 \right) \bar{J}_G, \tag{3.23}$$

($J^1 + J^3$ is defined in App. C, Tab. 4). The latter perturbation is integrable and accounts for the creation of an (chromo)electromagnetic field

$$A = 2\sqrt{\frac{2k}{k_G}} H \frac{\mathrm{d}x^+}{u^2}. \tag{3.24}$$

It generates precisely the deformation (3.21) and leaves unperturbed the NS field, $H_{[3]} = \mathrm{d}B = -\frac{2}{\sqrt{k}} \omega_{[3]}$.

As a conclusion, the AdS_3 plus plane-wave gravitational background is described in terms of an exact conformal sigma model, that carries two extra background fields: a NS three-form and an electromagnetic two-form. Similarly to the symmetric parabolic deformation [23], the present asymmetric one can be used to construct a space–time supersymmetric background. The $SL(2,\mathbb{R})_k$-CFT treatment of the latter deformation would need the knowledge of the parabolic characters of the affine algebra, not available at present.

As already stressed for the elliptic deformation (end of Sec. 3.1), the residual affine symmetry leaves the possibility for an extra, purely gravitational, symmetric marginal

deformation. Although the systematic analysis of the full AdS_3 landscape is beyond the present scope, we would like to quote the effect of such a deformation on the parabolic line. The perturbation which is turned on is $\sim \int d^2z\ J^+\bar{J}^+$ (the currents are given in Eqs. (C.7) and Tab. 4), with parameter $1/M^2$. In the absence of electromagnetic background [23], this deformation connects the NS5/F1 background to the pure NS5 dilatonic solution. Here it is performed on top of the asymmetric one, which introduces an electromagnetic wave, and we find:

$$ds^2 = k\left[\frac{du^2}{u^2} + \frac{dx^+\,dx^-}{u^2+1/M^2} - 2H^2\left(\frac{dx^+}{u^2+1/M^2}\right)^2\right], \tag{3.25a}$$

$$B = \frac{k}{2}\frac{1}{u^2+1/M^2}\,dx^+\wedge dx^-, \tag{3.25b}$$

$$e^{2\Phi} = kg_s^2\frac{u}{u^2+1/M^2}, \tag{3.25c}$$

plus an electromagnetic field:

$$A = 2\sqrt{\frac{2k}{k_G}}H\frac{dx^+}{u^2+1/M^2}. \tag{3.25d}$$

At $M^2\to\infty$, we recover the solution (3.21) and (3.24), whereas at $M^2\to 0$ the present solution asymptotes the linear dilaton background. Therefore, in an NS5/F1 setup, the deformation at hand may be relevant for investigating the holography of little string theories [31].

3.4 A remark on discrete identifications

Before closing the chapter on AdS_3, we would like to discuss briefly the issue of discrete identifications. So far we have focused on continuous deformations as a procedure for generating new backgrounds. It appeared that under specific symmetry and integrability requirements, the moduli of such deformations are unique, and the corresponding backgrounds are described in terms of exact two-dimensional conformal models.

In the presence of isometries, discrete identifications provide alternatives for creating new backgrounds. Those have the *same* local geometry – except at possible fixed points – but differ with respect to their global properties. Whether these identifications can be implemented as orbifolds, at the level of the underlying two-dimensional model is very much dependent on each specific case.

For AdS_3, the most celebrated geometry obtained by discrete identification is certainly the BTZ black hole [32]. The discrete identifications are made along the integral lines of the following Killing vectors (defined in Eqs. (C.5)):

$$\text{extremal case}: \quad \xi = 2\imath r_+R_2 - \imath\,(R_1-R_3) - \imath\,(L_1+L_3)\,, \tag{3.26a}$$

$$\text{non-extremal case}: \quad \xi' = \imath\,(r_++r_-)\,R_2 - \imath\,(r_+-r_-)\,L_2, \tag{3.26b}$$

where r_+ and r_- are the outer and inner horizons, coinciding for the extremal black hole. Many subtleties arise, which concern *e.g.* the appearance of closed time-like curves; a

comprehensive analysis of these issues can be found in [33]. At the string theory level, this projection is realized as an *orbifold*, which amounts to realize the projection of the string spectrum onto invariant states and to add twisted sectors [34, 35].

Besides the BTZ solution, other locally AdS_3 geometries are obtained, by imposing identification under purely left (or right) isometries, refereed to as self-dual (or anti-self-dual) metrics. These were studied in [36]. Their classification and isometries are exactly those of the asymmetric deformations studied in the present chapter. The Killing vector used for the identification is (A) time-like (elliptic), (B) space-like (hyperbolic) or (C) null (parabolic), and the isometry group is $U(1) \times SL(2,\mathbb{R})$. It was pointed out in [36] that the resulting geometry was free of closed time-like curves only in the case (B).

We could clearly combine the continuous deformations with the discrete identifications – whenever these are compatible – and generate thereby new backgrounds. This offers a large variety of possibilities that deserve further investigation (issue of horizons, closed time-like curves ...). One can *e.g.* implement the non-extremal BTZ identifications (3.26b) on the hyperbolic continuous deformation (3.10) since the isometry group of the latter contains the vectors of the former.

Furthermore, it can be used to generate new interesting solutions of Einstein equations by performing discrete identifications in the spirit of [36]. In the latter, the residual isometry group was precisely the one under consideration here, so that our deformation is compatible with their discrete identification.

Similarly, the extremal BTZ identifications (3.26a) are compatible with the isometries of the parabolic deformation (3.21). One could thus create extremal black holes out of this AdS/plane-wave solution.

4. Limiting geometries: AdS_2 and H_2

We have analyzed in Sec. 2.2 the behaviour of the magnetic deformation of $SU(2)_k$, at some critical (or boundary) value of the modulus H^2, where the background factorizes as $\mathbb{R} \times S^2$ with vanishing NS three-form and finite magnetic field. We would like to address this question for the asymmetric deformations of the $SL(2,\mathbb{R})_k$ model and show the existence of limiting situations where the geometry indeed factorizes, in agreement with the expectations following the general analysis of App. A.

In general, exact deformations of string backgrounds as those we are considering here, are carried by a modulus that controls the string spectrum. The modulus might exhibit critical or boundary values, where a whole sector of states becomes massless or infinitely massive, and decouples. Such a phenomenon corresponds to the decompactification of some compact coordinate, which decouples from the remaining geometry. This is exactly what happens for the magnetic deformation of $SU(2)_k$ WZW where the S^3 is more and more squashed, and eventually shrinks to a $\mathbb{R} \times S^2$. Not only is the geometry affected, but the antisymmetric tensor disappears in this process, and the S^2 is left with a finite magnetic field that ensures the consistency of the string theory.

What can we expect in the framework of the $SL(2,\mathbb{R})_k$ asymmetric deformations? Any limiting geometry must have the generic $U(1) \times SL(2,\mathbb{R})_k$ isometry that translates

the affine symmetry of the conformal model. If a line decouples, it accounts for the $U(1)$, and the remaining two-dimensional surface must be $SL(2,\mathbb{R})$-invariant. Three different situations may arise: AdS_2, H_2 or dS_2. Anti de Sitter in two dimensions is Lorentzian with negative curvature; the hyperbolic plane H_2 (also called Euclidean anti de Sitter) is Euclidean with negative curvature; de Sitter space is Lorentzian with positive curvature.

Three deformations are available for AdS_3 and these have been analyzed in Sec. 3. For unitary string theory, all background fields must be real and consequently $H^2 > 0$ is the only physical regime. In this regime, only the hyperbolic (electric) deformation exhibits a critical behaviour at $H^2_{\max} = 1/2$. For $H^2 < 1/2$, the deformation at hand is a Lorentzian manifold with no closed time-like curves (see Sec. 3.2). When $H^2 > 1/2$, $\det \mathbf{g} > 0$ and *two* time-like directions appear. At $H^2 = H^2_{\max}$, $\det \mathbf{g}$ vanishes, and this is the signature that some direction indeed decompactifies.

We proceed therefore as in Sec. 2.2, and define a rescaled coordinate in order to keep the decompactifying direction into the geometry and follow its decoupling:

$$y = \sqrt{\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2} - H^2\right)}\, x \ . \tag{4.1}$$

The metric and volume form now read:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}y^2 + \frac{k}{4}\left[\mathrm{d}r^2 - \left(1 + 2H^2 \sinh^2 r\right)\, \mathrm{d}\tau^2\right] + \sqrt{k\,(1-2H^2)}\sinh r\ \mathrm{d}\tau\ \mathrm{d}y \tag{4.2}$$

and

$$\omega_{[3]} = \frac{k}{4}\cosh r\ \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}y. \tag{4.3}$$

For H^2 close to $H^2_{\max}$, the y-direction factorizes

$$\mathrm{d}s^2 \xrightarrow[H^2 \to H^2_{\max}]{} \mathrm{d}y^2 + \frac{k}{4}\left[\mathrm{d}r^2 - \cosh^2 r\ \mathrm{d}\tau^2\right]. \tag{4.4}$$

The latter expression captures the phenomenon we were expecting:

$$\mathrm{AdS}_3 \xrightarrow[H^2 \to H^2_{\max}]{} \mathbb{R} \times \mathrm{AdS}_2. \tag{4.5}$$

It also shows that the two-dimensional anti de Sitter has radius $\sqrt{k/4}$ and supports entirely the curvature of the limiting geometry, $R = -8/k$ (see expression (3.11)).

The above analysis shows that, starting from the $SL(2,\mathbb{R})_k$ WZW model, there is a line of continuous exact deformation (driven by a (chromo)electric field) that leads to a conformal model at the boundary of the modulus H^2. This model consists of a free non-compact boson times a geometric coset $\mathrm{AdS}_2 \equiv SL(2,\mathbb{R})/U(1)$, with a finite electric field:

$$F = \sqrt{\frac{k}{k_G}}\cosh r\ \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\tau \tag{4.6}$$

and vanishing NS three-form background. The underlying geometric structure that makes this phenomenon possible is that AdS_3 can be considered as a non-trivial S^1 fibration over

an AdS_2 base. The radius of the fiber couples to the electric field, and vanishes at $H^2_{\max}$. The important result is that this enables us to promote the geometric coset AdS_2 to an exact string vacuum.

We would like finally to comment on the fate of dS_2 and H_2 geometries, which are both $SL(2,\mathbb{R})$-symmetric. De Sitter and hyperbolic geometries are not expected to appear in physical regimes of string theory. The H_3 sigma-model, for example, is an exact conformal field theory, with imaginary antisymmetric tensor background though [37, 38]. Similarly, imaginary NS background is also required for de Sitter vacua to solve the low-energy equations (D.11). It makes sense therefore to investigate regimes with $H^2 < 0$, where the electric or magnetic backgrounds are indeed imaginary.

The elliptic (magnetic) deformation studied in Sec. 3.1 exhibits a critical behaviour in the region of negative H^2, where the geometry does not contain closed time-like curves. The critical behaviour appears at the minimum value $H^2_{\min} = -1/2$, below which the metric becomes Euclidean. The vanishing of $\det \mathbf{g}$ at this point of the deformation line, signals the decoupling of the time direction. The remaining geometry is nothing but a two-dimensional hyperbolic plane H_2. It is Euclidean with negative curvature $R = -8/k$ (see Eq. (3.2) with $L^2 = k$).

All this can be made more precise by introducing a rescaled time coordinate:

$$T = \sqrt{\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2} + H^2\right)}\, t. \tag{4.7}$$

The metric and volume form now read:

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}T^2 + \frac{k}{4}\left[\mathrm{d}\rho^2 + \left(1 - 2H^2 \sinh^2\rho\right)\,\mathrm{d}\phi^2\right] - \sqrt{k\,(1+2H^2)}\sinh\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}T \tag{4.8}$$

and

$$\omega_{[3]} = \frac{k}{4}\cosh\rho\,\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}T. \tag{4.9}$$

For H^2 close to $H^2_{\min}$, the T-direction factorizes

$$\mathrm{d}s^2 \xrightarrow[H^2 \to H^2_{\max}]{} -\,\mathrm{d}T^2 + \frac{k}{4}\left[\mathrm{d}\rho^2 + \cosh^2\rho\,\mathrm{d}\phi^2\right]. \tag{4.10}$$

The latter expression proves the above statement:

$$\mathrm{AdS}_3 \xrightarrow[H^2 \to H^2_{\min}]{} \mathbb{R} \times H_2, \tag{4.11}$$

and the two-dimensional hyperbolic plane has radius $\sqrt{k/4}$.

Our analysis finally shows that the continuous line of exactly marginal (chromo)magnetic deformation of the $SL(2,\mathbb{R})$ conformal model, studied in Sec. 3.1, has a boundary at $H^2 = -1/2$ where its target space is a free time-like coordinate times a hyperbolic plane. The price to pay for crossing $H^2 = 0$ is an imaginary magnetic field, which at $H^2 = -1/2$ reads:

$$F = \sqrt{-\frac{k}{k_G}}\cosh\rho\;\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\rho. \tag{4.12}$$

The NS field strength vanishes at this point, and the geometric origin of the decoupling at hand is again the Hopf fibration of the AdS_3 in terms of an H_2.

5. $\mathrm{AdS}_2 \times S^2$

The $\mathrm{AdS}_2 \times S^2$ geometry appeared first in the context of Reissner–Nordström black holes. The latter are solutions of Maxwell–Einstein theory in four dimensions, describing charged, spherically symmetric black holes. For a black hole of mass M and charge Q, the solution reads:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{r_+}{r}\right)\left(1-\frac{r_-}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{\left(1-\frac{r_+}{r}\right)\left(1-\frac{r_-}{r}\right)} + r^2\,\mathrm{d}\Omega_2^2\,, \tag{5.1a}$$

$$F = \frac{Q}{r^2}\;\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}r \quad \text{with} \quad r_\pm = G_4\left(M \pm \sqrt{M^2-Q^2}\right); \tag{5.1b}$$

r_+ and r_- are the outer and inner horizons, and G_4 is Newton's constant in four dimensions.

In the extremal case, $r_+ = r_- = r_0$ ($M^2 = Q^2$), and the metric approaches the $\mathrm{AdS}_2 \times S^2$ geometry in the near-horizon[12] limit $r \to r_0$. This solution can of course be embedded in various four-dimensional compactifications of string theory, and will be supersymmetric in the extremal case (see e.g. [39] for a review). In this paper we are dealing with some heterotic compactification.

In particular the $\mathrm{AdS}_2 \times S^2$ geometry appears in type IIB superstring theory, but with RR backgrounds [15]. The black hole solution is obtained by wrapping D3-branes around 3-cycles of a Calabi–Yau three-fold; in the extremal limit, one obtains the $\mathrm{AdS}_2 \times S^2$ solution, but at the same time the CY moduli freeze to some particular values. A hybrid Green–Schwartz sigma-model action for this model has been presented in [40] (see also [41] for AdS_2). The interest for $\mathrm{AdS}_2 \times S^2$ space–time is motivated by the fact that it provides an interesting candidate for AdS/CFT correspondence [42]. In the present case the dual theory should correspond to some superconformal quantum mechanics [5, 43, 44, 45]. According to some recent works [46, 47], these string theory black holes are deeply related to topological strings on the Calabi-Yau manifold, leading to a prediction for their entropy.

5.1 The spectrum

As a first step in the computation of the $\mathrm{AdS}_2 \times S^2$ string spectrum, we must determine the spectrum of the AdS_2 factor, by using the same limiting procedure as in Sec. 2.3 for the sphere. The spectrum of the electrically deformed AdS_3, is displayed in Eqs. (3.19) and (3.20). The AdS_2 limit is reached for $\cosh x \to \infty$, which leads to the following constraint on the charges of the primary fields:

$$\bar{n} + \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{2}{k}}\left(\mu + n + \frac{a}{2}\right) = 0. \tag{5.2}$$

In contrast with the S^2 case, since μ is any real number – irrespectively of the kind of $SL(2,\mathbb{R})$ representation – there is *no extra* quantization condition for the level to make

[12] With the near-horizon coordinates $U = (1 - r_0/r)^{-1}$ and $T = t/r_0$, the near-horizon geometry is

$$\mathrm{d}s^2 = r_0^2\left(-\frac{\mathrm{d}T^2}{U^2} + \frac{\mathrm{d}U^2}{U^2} + \mathrm{d}\Omega_2^2\right).$$

Both AdS_2 and S^2 factors have the same radius r_0.

this limit well-defined. In this limit, the extra $U(1)$ decompactifies as usual and can be removed. Plugging the constraint (5.2) in the expressions for the dimensions of the affine primaries, we find

$$L_0 = -\frac{j(j-1)}{k} - \frac{1}{2}\left(\bar{n} + \frac{h}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(n + \frac{a}{2}\right)^2, \tag{5.3a}$$

$$\bar{L}_0 = -\frac{j(j-1)}{k}. \tag{5.3b}$$

In addition to the original AdS_3 spectrum, Eqs. (3.17) and (3.18), the right-moving part contain an extra fermionic lattice corresponding to the states charged under the electric field. Despite the absence of $N = 2$ superconformal symmetry due to the Lorentzian signature, the theory has a "fermion-number" left symmetry, corresponding to the current:

$$J = \imath\psi^1\psi^3 + \frac{2}{k}\left(J^2 + \imath\psi^1\psi^3\right). \tag{5.4}$$

The charges of the primaries (5.3) are

$$\mathcal{Q}_F = n + \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{2}{k}}\left(\bar{n} + \frac{h}{2}\right). \tag{5.5}$$

5.2 $\mathrm{AdS}_2 \times S^2 \times \mathcal{M}$ and space–time supersymmetry

Let us now consider the complete heterotic string background which consists of the $\mathrm{AdS}_2 \times S^2$ space–time times an $N = 2$ internal conformal field theory $\mathcal{M}$, that we will assume to be of central charge $\hat{c} = 6$ and with integral R-charges. Examples of thereof are toroidal or flat-space compactifications, as well as Gepner models [48].

The levels k of $SU(2)$ and $\hat{k}$ of $SL(2,\mathbb{R})$ are such that the string background is critical:

$$\hat{c} = \frac{2(k-2)}{k} + \frac{2(\hat{k}+2)}{\hat{k}} = 4 \implies k = \hat{k}. \tag{5.6}$$

This translates into the equality of the radii of the corresponding S^2 and AdS_2 factors, which is in turn necessary for supersymmetry. Furthermore, the charge quantization condition for the two-sphere (Sec. 2.2) restricts further the level to $k = 2p^2$, $p \in \mathbb{N}$.

In this system the total fermionic charge is

$$\mathcal{Q} = n + \frac{a}{2} - \frac{N - h/2}{p} + n' + \frac{a}{2} - \frac{\bar{n}' + h/2}{p} + \mathcal{Q}_{\mathcal{M}}. \tag{5.7}$$

Hence, assuming that the internal $N = 2$ charge $\mathcal{Q}_{\mathcal{M}}$ is integral, further constraints on the electromagnetic charges of the theory are needed in order to achieve space–time supersymmetry. Namely, we must only keep states such that

$$N + \bar{n}' = 0 \mod p. \tag{5.8}$$

This projection is some kind of generalization of Gepner models. Usually, such a projection is supplemented in string theory by new twisted sectors. We then expect that, by adding on

top of this projection the usual GSO projection on odd fermion number, one will obtain a space–time supersymmetric background. However, the actual computation would need the knowledge of hyperbolic coset characters of $SL(2,\mathbb{R})$ (i.e. Lorentzian black-hole characters), and of their modular properties. We can already observe that this "Gepner-like" orbifold keeps only states which are "dyonic" with respect to the electromagnetic field background. Notice that, by switching other fluxes in the internal theory $\mathcal{M}$ one can describe more general projections.

6. Outlook

The main motivation of this work was to analyze the landscape of the S^3 and AdS_3 deformation. This analysis is performed from the geometrical viewpoint with the symmetry as a guideline. The deformations obtained in that way are then shown to be target spaces of exact marginal perturbations of the $SU(2)_k$ and $SL(2,\mathbb{R})_k$ WZW models.

An important corollary of our analysis is that geometric cosets like $S^2 = SU(2)/U(1)$ or $\mathrm{AdS}_2 = SL(2,\mathbb{R})/U(1)_{\mathrm{space-like}}$ can be realized, with appropriate (chromo) magnetic or electric fields, as exact conformal models, which hence provide new string backgrounds. They appear as limiting asymmetric marginal deformations of WZW models, and are therefore tractable conformal field theories leading to unitary strings.

The two-dimensional hyperbolic space $H_2 = SL(2,\mathbb{R})/U(1)_{\mathrm{time-like}}$ does also appear in the same manner, although the accompanying magnetic field is imaginary. We display in Fig. 1 the summary of the various situations analyzed here.

We have presented the spectrum and the partition function of the $SU(2)_k$ magnetic deformation with $S^2 \times \mathbb{R}$ as extreme target space reached at $H^2_{\max} = 1/2$. At this value the fiber S^1 decompactifies, as we have seen in Sec. 2.2. We can go across and explore the deformation for $H^2 > 1/2$. The geometry (metric given in Eq. (2.10)) is now Lorentzian and all other fields are real. This exact solution is still a marginal deformation of S^3, of a peculiar type though: it appears after a signature flip, has positive constant curvature (see Fig. 1) and $U(1) \times SU(2)$ isometry, where some of the $SU(2)$ Killing vectors are time-like[13]. In order to avoid trivial closed time-like curves, we must promote the angle γ to $\gamma \in \mathbb{R}$. Unfortunately this is not enough to ensure consistency, and closed time-like curves *à la* Gödel appear whenever $\cos^2\beta > 1/2H^2$, as one can check by using standard arguments (Sec. 3).

The space–time under consideration is a *compact Gödel universe* ("compact" refers to the angle β), already discussed in the context of general relativity [49]. Our approach promotes it to the level of exact string background, and we have in principle the tools to investigate its spectrum. The latter may be obtained from the partition function (2.27) with the replacement:

$$\cosh x = \frac{\imath}{2H^2-1}\ , \qquad \sinh x = \imath\sqrt{\frac{2H^2}{2H^2-1}}. \tag{6.1}$$

[13] In the regime $H^2 > 1/2$, ∂_γ is time-like since $\|\partial_\gamma\|^2 = -k\left(2H^2-1\right)/4$, whereas ∂_α becomes time-like for $\cos^2\beta > 1/2H^2$.

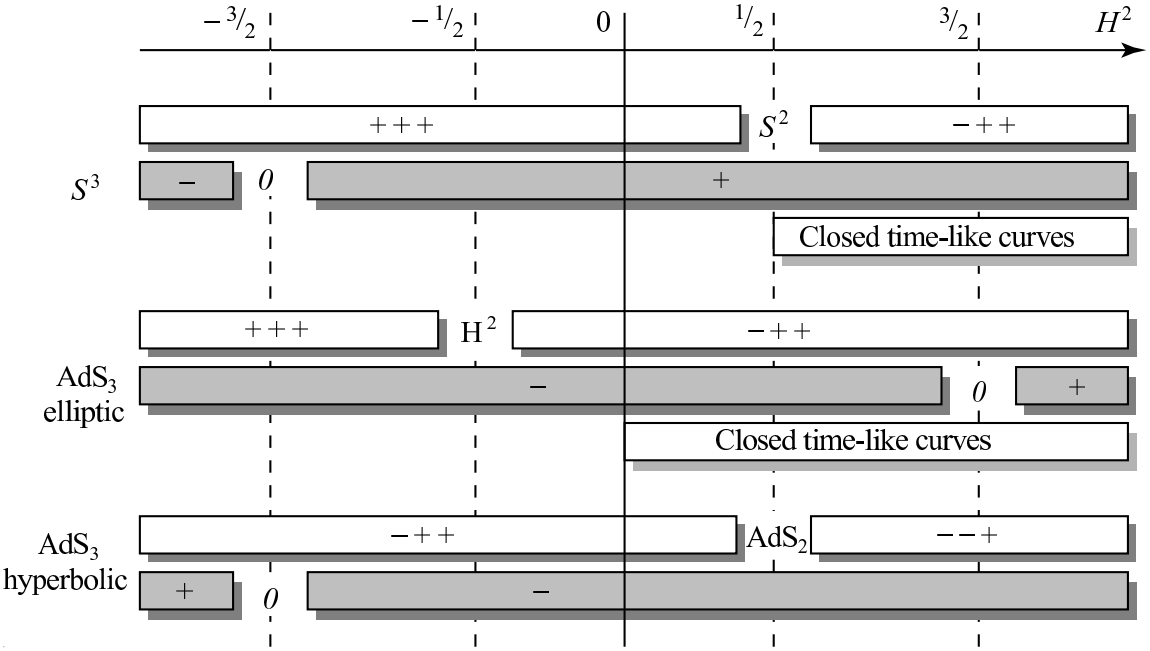

Figure 1: We have summarized the various regimes appearing in magnetic/electric deformations of the $SU(2)_k$ and $SL(2,\mathbb{R})_k$ WZW models. Lighter bars indicate the signature, darker ones the sign of the curvature. Regions with $H^2 < 0$ have well-defined geometries with imaginary gauge field. Their string interpretation is therefore questionable.

Such a straightforward approach is however questionable since it involves a sort of analytic continuation. We will not expand further on this issue.

The hyperbolic deformation of $SL(2,\mathbb{R})_k$, leading precisely to AdS_2, is an important achievement of this work. It is however technically involved: no description is presently available for quantities like the partition function, and our handling over the spectrum remains incomplete[14]. For the elliptic deformation, the partition function is available in the "Gödel regime" ($H^2 > 0$) where the geometry is spoiled by closed time-like curves. The continuation to the negative-H^2 region, free of closed time-like curves, is not straightforward since it requires an analytic continuation to imaginary magnetic field. The string theory is no longer unitary, but it might still be useful to investigate this regime for pure CFT purposes.

Several other non-unitary regimes appear in the deformed geometries at hand, either with Euclidean or with Lorentzian signature, and positive or negative curvature (see Fig. 1). Whether these could be connected to the H_3 or dS_3 spaces is an open question. Three-dimensional hyperbolic plane, H_3, and de Sitter, dS_3, are respectively negative and positive constant-curvature symmetric spaces, with Euclidean and Lorentzian signatures. The dif-

[14]Much like in the compact Gödel universe quoted previously, one may try to give sense to the electric deformation for $H^2 > 1/2$. There, we have two times (see Fig. 1). We can however perform an overall flip to reverse the signature $\{--+\} \to \{++-\}$ and obtain a well-defined geometry. As usual, the important issue is to implement all the sign flips and analytic continuations at the level of the CFT.

ferences with respect to the S^3 or AdS_3 are that they have the opposite signature/curvature combination, and are not group manifolds: H_3 and dS_3 are $SL(2,\mathbb{C})$ cosets. A non-unitary conformal sigma model can be defined on H_3, and considerable progress has been made to understand its structure. In the case of dS_3, nothing similar is available, despite the growing interest for cosmological applications. Any hint in that direction could be important.

New backgrounds arise by introducing extra deformations. Since the residual affine symmetry of the asymmetric marginal deformations is $U(1)_{\mathrm{L}} \times SL(2,\mathbb{R})_{\mathrm{R}}$, there is room, at any point, for a extra modulus generated by a $U(1)_{\mathrm{L}} \times U(1)_{\mathrm{R}} \subset U(1)_{\mathrm{L}} \times SL(2,\mathbb{R})_{\mathrm{R}}$ bilinear. This freedom has been used *e.g* in [10] in order to cure the causal problem of the magnetic deformation (*i.e.* the Gödel universe), by slightly deviating from the pure magnetic line. One can readily repeat this analysis in the new regimes we have presented here, as already sketched for the parabolic deformation – end of Sec. 3.3 – and further investigate the AdS_3 landscape and its connections to other three-dimensional constant-curvature spaces of physical interest.

Our analysis deserves some extra comments. We are in position now to describe $\mathrm{AdS}_2 \times S^2$ as the target space of a two-dimensional conformal model. This supersymmetric setting is the near-horizon geometry of the extremal Reissner–Nordström four-dimensional black hole. In our approach, this geometry arises as a marginal deformation of the near-horizon geometry of the NS5/F1 set up ($\mathrm{AdS}_3 \times S^3$). The crucial question that remains to be answered is how to deviate from this supersymmetric geometry towards a non-extremal configuration of the charged four-dimensional black hole.

We should also stress that the new string backgrounds we have constructed may have interesting applications for holography. For example, the AdS/plane-wave background (3.21) is a superposition of two solutions with known holographic interpretation. The line of geometries relating AdS_3 and AdS_2 (hyperbolic deformation), which are both candidates for AdS/CFT, can possibly have some holographic dual for all values of the modulus H^2. It is important to remark that all the families of conformal field theories considered in this paper preserve one chiral $SL(2,\mathbb{R})$ affine algebra, hence allow to contruct one space–time Virasoro algebra by using the method given in [50].

Finally, concerning the general technique that we have used, it clearly opens up new possibilities for compactifications. Asymmetric deformations can be performed on any group-G manifold. The high residual symmetry $G \times U(1)^{\mathrm{rank}\ G}$ forces the geometry along the line as well as at the boundary of the modulus. There, we are naturally led to the geometric coset $G/U(1)^{\mathrm{rank}\ G}$ times rank G decoupled, non compact, free bosons. A magnetic field drives this asymmetric deformation in the case of compact groups, whereas in non-compact cases a variety of situations can arise as we showed for the $SL(2,\mathbb{R})$ WZW model.

Acknowledgments

We have enjoyed very useful discussions with C. Bachas, I. Bakas, E. Cremmer, B. Julia, E. Kiritsis and J. Troost.

A. Geometric deformations

In this appendix, we would like to present some selected results about geometric deformations. Since most of the material discussed in this paper deals with deformations of backgrounds that preserve part of the original isometries, it is interesting to understand how such deformations can be implemented in a controllable way. Whether these are the most general, or can be promoted to exact marginal lines in the underlying two-dimensional sigma model, are more subtle issues that we analyze in the main part of the paper for S^3 and AdS_3.

Consider a manifold with metric $\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta$. We assume the existence of an isometry generated by a Killing vector ξ. The components of its dual form are $\varpi_\alpha = g_{\alpha\beta}\xi^\beta$. We will consider the following family of geometries:

$$g^{\mathrm{def}}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + f\left(\|\xi\|^2\right)\varpi_\alpha\varpi_\beta \tag{A.1}$$

with f an arbitrary function of the norm of the Killing vector. Each member of the family corresponds to a specific choice of f.

Deformation (A.1) provides a simple and straightforward recipe for perturbing a background in a way that keeps under control its isometries. Indeed, the vector ξ is still an isometry generator ($\mathcal{L}_\xi\|\xi\|^2 = 0$; $\mathcal{L}_\xi\varpi = 0$). So are all Killing vectors which commute with ξ, whereas for a generic $f\left(\|\xi\|^2\right)$ those of the original isometry group which do not commute with ξ are no longer Killing vectors. Therefore, the "deformed" isometry group contains only a subgroup of the simple component to which ξ belongs, times the other simple components, if any. These symmetry properties hold for generic functions $f\left(\|\xi\|^2\right)$. Accidental enhancements can occur though, where a larger subgroup of the original group is restored (at least locally).

The deformed dual form of ξ is computed by using (A.1):

$$\varpi^{\mathrm{def}}_\alpha = \varpi_\alpha\left\{1 + \|\xi\|^2 f\left(\|\xi\|^2\right)\right\}. \tag{A.2}$$

Clearly, the symmetry requirement is not strong enough to reduce substantially the freedom of the deformation. We would like to focus on a specific subset of deformations for which

$$h = -\|\xi\|^2 f\left(\|\xi\|^2\right) \tag{A.3}$$

is a real constant. This family is interesting for several reasons. It is stable under repetition of the deformation: by repeating this deformation we stay in the same class, but reach a different point of it. This is a sort of integrability property that leads to a *one-parameter family* of continuous deformations. The value $h = 1$ is a *critical* value of the deformation parameter. At this value the metric degenerates. This is a sign for the decoupling of one dimension. For $h > 1$, the signature flips and the decoupled dimension reenters the geometry, with reversed signature though.

In the presence of Lorentzian geometries, light-like Killing vectors can also be used. For those, Eq. (A.1) is *necessarily* of the form

$$g^{\mathrm{def}}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - h\varpi_\alpha\varpi_\beta \text{ if } \|\xi\|^2 = 0. \tag{A.4}$$

The symmetry constraint is here very powerful. Furthermore, since now $\varpi_\alpha^{\rm def} = \varpi_\alpha$, no critical phenomenon occurs in this case, at least for *finite* values of h.

Deformations of the kind (A.1) with (A.3) arise naturally as background geometries of integrable marginal deformations of WZW models. The integrability requirement for the CFT deformation selects the above one-parameter family of geometries. In turn, these families exhibit limiting spaces.

It is useful to notice that deformations (A.1) with (A.3) become trivial if ξ is of the form $\xi = \partial_1$ with $g_{\alpha\beta}$ block diagonal: $g_{\alpha 1} = g_{11}\,\delta_{\alpha 1}$. In this case, $\varpi = g_{11}\,{\rm d}x^1$, and $g_{\alpha\beta}$ is unaffected for $(\alpha,\beta) \neq (1,1)$, whereas $g_{11}^{\rm def} = g_{11}\,(1-h)$. The net effect of the deformation is a rescaling of the coordinate x^1. The isometry group remains unaltered, at least locally. In fact, if x^1 is an angle (ξ is a compact generator), the deformation amounts to introducing an angle deficit, which brakes globally the original isometry group to the subgroup described previously and introduces a conical singularity.

We can illustrate the latter "degenerate" situation with a simple example: the case of the two-dimensional Euclidean plane. The isometry group has three generators: one rotation and two translations. Consider the rotation and perform the deformation as in (A.1), (A.3). The resulting manifold is a cone. Although translation generators do not commute with the rotation generator, translation invariance is still a symmetry, locally – since the only effect of the rotation is to rescale the polar angle. Translation is however broken globally. The critical value of the deformation ($h = 1$) corresponds to the maximal angle deficit, where the cone degenerates into a half-line.

Many deformations driven by $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \ldots$ can be performed simultaneously along the previous lines of thought. In order to keep $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \ldots$ in the isometry group of the deformed metric, these must commute, hence must belong to the Cartan subgroup of the original isometry group. The full deformed group also contains those among the original Killing vectors, which commute with the set $\{\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \ldots\}$.

Curvature tensors (Riemann, Ricci, Gauss) can be computed for the deformed geometries under consideration (Eq. (A.1)), in terms of the original ones. How much they are altered depends on the left-over symmetry and on the function f. We will not expand further in this direction.

B. The three-sphere

The commutation relations for the generators of $SU(2)$ are

$$\left[J^1, J^2\right] = \imath J^3 \qquad \left[J^2, J^3\right] = \imath J^1 \qquad \left[J^3, J^1\right] = \imath J^2. \tag{B.1}$$

A two-dimensional realization is obtained by using the standard Pauli matrices[15] σ^a: $J^a = \sigma^a/2$.

The Euler-angle parameterization for $SU(2)$ is defined as:

$$g = {\rm e}^{\imath\frac{\gamma}{2}\sigma^3}\,{\rm e}^{\imath\frac{\beta}{2}\sigma^1}\,{\rm e}^{\imath\frac{\alpha}{2}\sigma^3}. \tag{B.2}$$

[15] The normalization of the generators with respect to the Killing product in $\mathfrak{su}(2)$: $\kappa(X,Y) = {\rm tr}\,(XY)$ is such that $\kappa\left(J^a, J^b\right) = 1/2$ and correspondingly the root has length squared $\psi = 2$.

The $SU(2)$ group manifold is a unit-radius three-sphere. A three-sphere can be embedded in flat Euclidean four-dimensional space with coordinates (x^1, x^2, x^3, x^4), as $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = L^2$. The corresponding $SU(2)$ element g is the following:

$$g = L^{-1} \begin{pmatrix} x^4 + \imath x^2 & x^3 + \imath x^1 \\ -x^3 + \imath x^1 & x^4 - \imath x^2 \end{pmatrix}. \tag{B.3}$$

In general, the invariant metric of a group manifold can be expressed in terms of the left-invariant Cartan–Maurer one-forms. In the $SU(2)$ case under consideration (unit-radius S^3),

$$\mathcal{J}^1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\left(\sigma^1 g^{-1}\,\mathrm{d}g\right), \qquad \mathcal{J}^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\left(\sigma^2 g^{-1}\,\mathrm{d}g\right), \qquad \mathcal{J}^3 = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\left(\sigma^3 g^{-1}\,\mathrm{d}g\right) \tag{B.4}$$

and

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{3} \mathcal{J}^i \otimes \mathcal{J}^i \tag{B.5}$$

The volume form reads:

$$\omega_{[3]} = \mathcal{J}^1 \wedge \mathcal{J}^2 \wedge \mathcal{J}^3. \tag{B.6}$$

In the Euler-angle parameterization, Eq. (B.5) reads (for a radius-L three-sphere):

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{L^2}{4}\left(\mathrm{d}\alpha^2 + \mathrm{d}\gamma^2 + 2\cos\beta\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\gamma + \mathrm{d}\beta^2\right), \tag{B.7}$$

whereas (B.6) leads to

$$\omega_{[3]} = \frac{L^3}{8}\sin\beta\,\mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\gamma. \tag{B.8}$$

The Levi–Civita connection has scalar curvature $R = 6/L^2$.

The isometry group of the $SU(2)$ group manifold is generated by left or right actions on g: $g \to hg$ or $g \to gh$ $\forall h \in SU(2)$. From the four-dimensional point of view, it is generated by the rotations $\zeta_{ab} = i\,(x_a\partial_b - x_b\partial_a)$ with $x_a = \delta_{ab}x^b$. We list here explicitly the six generators, as well as the group action they correspond to:

$$L_1 = \frac{1}{2}\left(-\zeta_{32} + \zeta_{41}\right), \qquad g \to \mathrm{e}^{-\imath\frac{\lambda}{2}\sigma^1} g, \tag{B.9a}$$

$$L_2 = \frac{1}{2}\left(-\zeta_{43} - \zeta_{12}\right), \qquad g \to \mathrm{e}^{\imath\frac{\lambda}{2}\sigma^2} g, \tag{B.9b}$$

$$L_3 = \frac{1}{2}\left(-\zeta_{31} - \zeta_{42}\right), \qquad g \to \mathrm{e}^{\imath\frac{\lambda}{2}\sigma^3} g, \tag{B.9c}$$

$$R_1 = \frac{1}{2}\left(\zeta_{41} + \zeta_{32}\right), \qquad g \to g\mathrm{e}^{\imath\frac{\lambda}{2}\sigma^1}, \tag{B.9d}$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\left(-\zeta_{43} + \zeta_{12}\right), \qquad g \to g\mathrm{e}^{\imath\frac{\lambda}{2}\sigma^2}, \tag{B.9e}$$

$$R_3 = \frac{1}{2}\left(\zeta_{31} - \zeta_{42}\right), \qquad g \to g\mathrm{e}^{\imath\frac{\lambda}{2}\sigma^3}. \tag{B.9f}$$

Both sets satisfy the algebra (B.1). The norms squared of the Killing vectors are all equal to $L^2/4$.

The currents of the $SU(2)_k$ WZW model are easily obtained as:

$$J^i = -k\,\mathrm{tr}\,\left(\imath\sigma^i\,\partial g g^{-1}\right) \qquad\qquad \bar{J}^i = -k\,\mathrm{tr}\,\left(\imath\sigma^i g^{-1}\,\bar{\partial} g\right), \tag{B.10}$$

where $L = \sqrt{k}$, at the classical level. Explicit expressions are given in Tab. 1.

sector	Killing vector	Current
left moving	$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\,\partial_\alpha + \cos\gamma\,\partial_\beta - \frac{\sin\gamma}{\tan\beta}\,\partial_\gamma$	$k\,(\sin\beta\sin\gamma\,\partial\alpha + \cos\gamma\,\partial b)$
	$\frac{\cos\gamma}{\sin\beta}\,\partial_\alpha - \sin\gamma\,\partial_\beta - \frac{\cos\gamma}{\tan\beta}\,\partial_\gamma$	$k\,(\cos\gamma\sin\beta\,\partial\alpha - \sin\gamma\,\partial\beta)$
	∂_γ	$k\,(\,\partial\gamma + \cos\beta\,\partial\alpha)$
right moving	$-\frac{\sin\alpha}{\tan\beta}\,\partial_\alpha + \cos\alpha\,\partial_\beta + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,\partial_\gamma$	$k\left(\cos\alpha\,\bar{\partial}\beta + \sin\alpha\sin\beta\,\bar{\partial}\gamma\right)$
	$\frac{\cos\alpha}{\tan\beta}\,\partial_\alpha + \sin\alpha\,\partial_\beta - \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\,\partial_\gamma$	$k\left(\sin\alpha\,\bar{\partial}\beta - \cos\alpha\sin\beta\,\bar{\partial}\gamma\right)$
	∂_α	$k\left(\,\bar{\partial}\alpha + \cos\beta\,\bar{\partial}\gamma\right)$

Table 1: Killing vectors $\{\imath L_1, \imath L_2, \imath L_3\}$ and $\{\imath R_1, \imath R_2, \imath R_3\}$, and holomorphic and anti-holomorphic currents (as defined in Eqs. (B.9) and (B.10)) in Euler angles.

C. AdS$_3$

The commutation relations for the generators of the $SL(2,\mathbb{R})$ algebra are

$$\left[J^1, J^2\right] = -\imath J^3 \qquad\qquad \left[J^2, J^3\right] = \imath J^1 \qquad\qquad \left[J^3, J^1\right] = \imath J^2. \tag{C.1}$$

The sign in the first relation is the only difference with respect to the $SU(2)$ in Eq. (B.1).

The three-dimensional anti-de-Sitter space is the universal covering of the $SL(2,\mathbb{R})$ group manifold. The latter can be embedded in a Lorentzian flat space with signature $(-,+,+,-)$ and coordinates (x^0, x^1, x^2, x^3):

$$g = L^{-1}\begin{pmatrix} x^0 + x^2 & x^1 + x^3 \\ x^1 - x^3 & x^0 - x^2 \end{pmatrix}, \tag{C.2}$$

where L is the radius of AdS$_3$. On can again introduce Euler-like angles

$$g = \mathrm{e}^{\imath(\tau+\varphi)\sigma_2/2}\mathrm{e}^{\rho\sigma_1}\mathrm{e}^{\imath(\tau-\varphi)\sigma_2/2}, \tag{C.3}$$

which provide good global coordinates for AdS$_3$ when $\tau \in]-\infty, +\infty[$, $\rho \in [0, \infty[$, and $\varphi \in [0, 2\pi]$.

An invariant metric (see Eq. (B.5)) can be introduced on AdS$_3$. In Euler angles, the latter reads:

$$\mathrm{d}s^2 = L^2\left[-\cosh^2\rho\;\mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \sinh^2\rho\;\mathrm{d}\varphi^2\right]. \tag{C.4}$$

The Ricci scalar of the corresponding Levi–Civita connection is $R = -6/L^2$.

The isometry group of the $SL(2,\mathbb{R})$ group manifold is generated by left or right actions on g: $g \to hg$ or $g \to gh$ $\forall h \in SL(2,\mathbb{R})$. From the four-dimensional point of view, it is generated by the Lorentz boosts or rotations $\zeta_{ab} = i\left(x_a\partial_b - x_b\partial_a\right)$ with $x_a = \eta_{ab}x^b$. We list here explicitly the six generators, as well as the group action they correspond to:

$$L_1 = \frac{1}{2}\left(\zeta_{32} - \zeta_{01}\right), \qquad g \to \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}\sigma^1} g, \tag{C.5a}$$

$$L_2 = \frac{1}{2}\left(-\zeta_{31} - \zeta_{02}\right), \qquad g \to \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}\sigma^3} g, \tag{C.5b}$$

$$L_3 = \frac{1}{2}\left(\zeta_{03} - \zeta_{12}\right), \qquad g \to \mathrm{e}^{\imath\frac{\lambda}{2}\sigma^2} g, \tag{C.5c}$$

$$R_1 = \frac{1}{2}\left(\zeta_{01} + \zeta_{32}\right), \qquad g \to g\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}\sigma^1}, \tag{C.5d}$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\left(\zeta_{31} - \zeta_{02}\right), \qquad g \to g\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}\sigma^3}, \tag{C.5e}$$

$$R_3 = \frac{1}{2}\left(\zeta_{03} + \zeta_{12}\right), \qquad g \to g\mathrm{e}^{\imath\frac{\lambda}{2}\sigma^2}. \tag{C.5f}$$

Both sets satisfy the algebra (C.1). The norms of the Killing vectors are the following:

$$\|\imath L_1\|^2 = \|\imath R_1\|^2 = \|\imath L_2\|^2 = \|\imath R_2\|^2 = -\|\imath L_3\|^2 = -\|\imath R_3\|^2 = \frac{L^2}{4}. \tag{C.6}$$

Moreover $L_i \cdot L_j = 0$ for $i \neq j$ and similarly for the right set. Left vectors are not orthogonal to right ones.

The isometries of the $SL(2,\mathbb{R})$ group manifold turn into symmetries of the $SL(2,\mathbb{R})_k$ WZW model, where they are realized in terms of conserved currents[16]:

$$J^1(z) \pm J^3(z) = -k\,\mathrm{tr}\left(\left(\sigma^1 \mp \imath\sigma^2\right)\partial g g^{-1}\right), \qquad J^2(z) = -k\,\mathrm{tr}\left(\sigma^3\,\partial g g^{-1}\right), \tag{C.7a}$$

$$\bar{J}^1(\bar{z}) \pm \bar{J}^3(\bar{z}) = k\,\mathrm{tr}\left(\left(\sigma^1 \pm \imath\sigma^2\right) g^{-1}\,\bar{\partial} g\right), \qquad \bar{J}^2(\bar{z}) = -k\,\mathrm{tr}\left(\sigma^3 g^{-1}\,\bar{\partial} g\right). \tag{C.7b}$$

At the quantum level, these currents, when properly normalized, satisfy the following affine $SL(2,\mathbb{R})_k$ OPA[17]:

$$J^3(z)J^3(0) \sim -\frac{k}{2z^2}, \tag{C.8a}$$

$$J^3(z)J^\pm(0) \sim \pm\frac{J^\pm}{z}, \tag{C.8b}$$

$$J^+(z)J^-(0) \sim \frac{2J^3}{z} - \frac{k}{z^2}, \tag{C.8c}$$

[16] When writing actions a choice of gauge for the NS potential is implicitly made, which breaks part of the symmetry: boundary terms appear in the transformations. These must be properly taken into account in order to reach the conserved currents. Although the expressions for the latter are not unique, they can be put in an improved-Noether form, in which they have only holomorphic (for L_i's) or anti-holomorphic (for R_j's) components.

[17] In some conventions the level is $x = -k$. This allows to unify commutation relations for the affine $SL(2,\mathbb{R})_x$ and $SU(2)_x$ algebras. Unitarity demands $x < -2$ for the former and $0 < x$ with integer x for the latter.

and similarly for the right movers. The central charge of the enveloping Virasoro algebra is $c = 3 + 6/(k-2)$.

We will introduce three different coordinate systems where the structure of AdS_3 as a Hopf fibration is more transparent. They are explicitly described in the following.

- The (ρ, t, ϕ) coordinate system used to describe the magnetic deformation in Sec. 3.1 is defined as follows:

$$\begin{cases} \frac{x_0}{L} &= \cosh\frac{\rho}{2}\cosh\frac{\phi}{2}\cos\frac{t}{2} - \sinh\frac{\rho}{2}\sinh\frac{\phi}{2}\sin\frac{t}{2} \\ \frac{x_1}{L} &= -\sinh\frac{\rho}{2}\sinh\frac{\phi}{2}\cos\frac{t}{2} - \cosh\frac{\rho}{2}\sinh\frac{\phi}{2}\sin\frac{t}{2} \\ \frac{x_2}{L} &= -\cosh\frac{\rho}{2}\sinh\frac{\phi}{2}\cos\frac{t}{2} + \sinh\frac{\rho}{2}\cosh\frac{\phi}{2}\sin\frac{t}{2} \\ \frac{x_3}{L} &= -\sinh\frac{\rho}{2}\sinh\frac{\phi}{2}\cos\frac{t}{2} - \cosh\frac{\rho}{2}\cosh\frac{\phi}{2}\sin\frac{t}{2}. \end{cases} \tag{C.9}$$

  The metric (B.5) reads:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{L^2}{4}\left(\mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}\phi^2 - \mathrm{d}t^2 - 2\sinh\rho\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\phi\right) \tag{C.10}$$

  and the corresponding volume form is:

$$\omega_{[3]} = \frac{L^3}{8}\cosh\rho.\,\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}t \tag{C.11}$$

  Killing vectors and currents are given in Tab. 2. It is worth to remark that this coordinate system is such that the t-coordinate lines coincide with the integral curves of the Killing vector $\imath L_3$, whereas the ϕ-lines are the curves of $\imath R_2$.

- The (r, x, τ) coordinate system used to describe the electric deformation in Sec. 3.2 is defined as follows:

$$\begin{cases} \frac{x_0}{L} &= \cosh\frac{r}{2}\cosh\frac{x}{2}\cos\frac{\tau}{2} + \sinh\frac{r}{2}\sinh\frac{x}{2}\sin\frac{\tau}{2} \\ \frac{x_1}{L} &= -\sinh\frac{r}{2}\cosh\frac{x}{2}\cos\frac{\tau}{2} + \cosh\frac{r}{2}\sinh\frac{x}{2}\sin\frac{\tau}{2} \\ \frac{x_2}{L} &= -\cosh\frac{r}{2}\sinh\frac{x}{2}\cos\frac{\tau}{2} - \sinh\frac{r}{2}\cosh\frac{x}{2}\sin\frac{\tau}{2} \\ \frac{x_3}{L} &= \sinh\frac{r}{2}\sinh\frac{x}{2}\cos\frac{\tau}{2} - \cosh\frac{r}{2}\cosh\frac{x}{2}\sin\frac{\tau}{2}. \end{cases} \tag{C.12}$$

  For $\{r, x, \tau\} \in \mathbb{R}^3$, this patch covers exactly once the whole AdS_3, and is regular everywhere [36]. The metric is then given by

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{L^2}{4}\left(\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}\tau^2 + 2\sinh r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\right) \tag{C.13}$$

  and correspondingly the volume form is

$$\omega_{[3]} = \frac{L^3}{8}\cosh r\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}\tau. \tag{C.14}$$

  Killing vectors and currents are given in Tab. 3. In this case the x-coordinate lines coincide with the integral curves of the Killing vector $\imath R_2$, whereas the τ-lines are the curves of $\imath R_3$.

- The Poincaré coordinate system used in Sec. 3.3 to obtain the electromagnetic-wave background is defined by

$$\begin{cases} x^0 + x^2 &= \frac{L}{u} \\ x^0 - x^2 &= Lu + \frac{Lx^+x^-}{u} \\ x^1 \pm x^3 &= \frac{Lx^\pm}{u}. \end{cases} \tag{C.15}$$

For $\{u, x^+, x^-\} \in \mathbb{R}^3$, the Poincaré coordinates cover once the $SL(2\mathbb{R})$ group manifold. Its universal covering, AdS_3, requires an infinite number of such patches. Moreover, these coordinates exhibit a Rindler horizon at $|u| \to \infty$; the conformal boundary is at $|u| \to 0$. Now the metric reads:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{L^2}{u^2}\left(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}x^+\,\mathrm{d}x^-\right) \tag{C.16}$$

and the volume form:

$$\omega_{[3]} = \frac{L^3}{2u^3}\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}x^- \wedge \mathrm{d}x^+. \tag{C.17}$$

In these coordinates it is simple to write certain a linear combination of the Killing vector so to obtain explicitly a light-like isometry generator. For this reason in Tab. 4 we report the $\{L_1 + L_3, L_1 - L_3, L_2, R_1 + R_3, R_1 - R_3, R_2\}$ isometry generators and the corresponding $\{J_1 + J_3, J_1 - J_3, J_2, \bar{J}_1 + \bar{J}_3, \bar{J}_1 - \bar{J}_3, \bar{J}_2\}$ currents.

sector	Killing vector	Current
left moving	$\cos t\,\partial_\rho + \frac{\sin t}{\cosh\rho}\,\partial_\phi - \sin t \tanh\rho\,\partial_t$	$k\,(\cos t\,\partial\rho + \cosh\rho \sin t\,\partial\phi)$
	$-\sin t\,\partial_\rho + \frac{\cos t}{\cosh\rho}\,\partial_\phi - \cos t \tanh\rho\,\partial_t$	$k\,(\cos t \cosh\rho\,\partial\phi - \sin t\,\partial\rho)$
	$-\partial_t$	$k\,(\partial t + \sinh\rho\,\partial\phi)$
right moving	$\cosh\phi\,\partial_\rho - \sinh\phi \tanh\rho\,\partial_\phi - \frac{\sinh\phi}{\cosh\rho}\,\partial_t$	$-k\left(\cosh\phi\,\bar{\partial}\rho + \cosh\rho \sinh\phi\,\bar{\partial}t\right)$
	∂_ϕ	$k\left(\bar{\partial}\phi - \sinh\rho\,\bar{\partial}t\right)$
	$\sinh\phi\,\partial_\rho - \cosh\phi \tanh\rho\,\partial_\phi - \frac{\cosh\phi}{\cosh\rho}\,\partial_t$	$k\left(\cosh\rho \cosh\phi\,\bar{\partial}t + \sinh\phi\,\bar{\partial}\rho\right)$

Table 2: Killing vectors $\{\imath L_1, \imath L_2, \imath L_3\}$ and $\{\imath R_1, \imath R_2, \imath R_3\}$, and holomorphic and anti-holomorphic currents (as defined in Eqs. (C.5) and (C.7)) for the (ρ, t, ϕ) coordinate system (elliptic base).

D. Equations of motion

The general form for the marginal deformations we have studied is given by:

$$S = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^2z\,\left(G^{\mathrm{WZW}}_{\mu\nu} + B^{\mathrm{WZW}}_{\mu\nu}\right)\partial x^\mu \bar{\partial} x^\nu + \frac{\sqrt{kk_G}H}{2\pi}\int \mathrm{d}^2z\,J\bar{J}_G. \tag{D.1}$$

sector	Killing vector	Current
left moving	$\cosh x\,\partial_r - \sinh x \tanh r\,\partial_x + \dfrac{\sinh x}{\cosh r}\,\partial_\tau$	$k\,(\cosh x\,\partial r - \cosh r \sinh x\,\partial\tau)$
	∂_x	$k\,(\,\partial x + \sinh r\,\partial\tau)$
	$-\sinh x\,\partial_r + \cosh x \tanh r\,\partial_x - \dfrac{\cosh x}{\cosh r}\,\partial_\tau$	$k\,(\cosh r \cosh x\,\partial\tau - \sinh x\,\partial r)$
right moving	$-\cos\tau\,\partial_r + \dfrac{\sin\tau}{\cosh\tau}\,\partial_x - \sin\tau\tanh\tau\,\partial_\tau$	$k\left(-\cos\tau\,\bar\partial r + \cosh r \sin\tau\,\bar\partial r\right)$
	$\dfrac{(\cos\tau + \sin\tau\tanh r)\,\partial_x + \left(\cos\tau\sinh r - \frac{\sin\tau}{\cosh r}\right)\,\partial_\tau}{\cosh r}$	$k\left(\cos\tau\cosh r\,\bar\partial x + \sin\tau\,\bar\partial r\right)$
	$-\partial_\tau$	$k\left(\,\bar\partial\tau - \sinh r\,\bar\partial x\right)$

Table 3: Killing vectors $\{\imath L_1, \imath L_2, \imath L_3\}$ and $\{\imath R_1, \imath R_2, \imath R_3\}$, and holomorphic and anti-holomorphic currents (as defined in Eqs. (C.5) and (C.7)) for the (r, x, τ) coordinate system (hyperbolic base).

sector	Killing vector	Current
left moving	$-\partial_-$	$-2k\dfrac{\partial x^+}{u^2}$
	$ux^-\,\partial_u - u^2\,\partial_+ + \left(x^-\right)^2\,\partial_-$	$2k\left(2x^-\dfrac{\partial u}{u} - \partial x^- + (x^-)^2\dfrac{\partial x^+}{u^2}\right)$
	$\dfrac{u}{2}\,\partial_u + x^-\,\partial_-$	$2k\left(\dfrac{\partial u}{u} + x^-\dfrac{\partial x^+}{u^2}\right)$
right moving	∂_+	$2k\dfrac{\bar\partial x^-}{u^2}$
	$-ux^+\,\partial_u - \left(x^+\right)^2\,\partial_+ + u^2\,\partial_-$	$2k\left(-2x^+\dfrac{\bar\partial u}{u} + \bar\partial x^+ - (x^+)^2\dfrac{\bar\partial x^-}{u^2}\right)$
	$\dfrac{u}{2}\,\partial_u + x^+\,\partial_+$	$2k\left(\dfrac{\bar\partial u}{u} + x^+\dfrac{\bar\partial x^-}{u^2}\right)$

Table 4: Killing vectors, and holomorphic and anti-holomorphic currents (as defined in Eqs. (C.5) and (C.7)) in Poincaré coordinates (parabolic base). The $\{\imath L_1 + \imath L_3, \imath L_1 - \imath L_3, \imath L_2, \imath R_1 + \imath R_3, \imath R_1 - \imath R_3, \imath R_2\}$ isometry generators and the corresponding $\{J_1 + J_3, J_1 - J_3, J_2, \bar J_1 + \bar J_3, \bar J_1 - \bar J_3, \bar J_2\}$ currents are represented so to explicitly obtain light-like isometry generators.

It is not completely trivial to read off the deformed background fields that correspond to this action. In this appendix we will present a method involving a Kaluza–Klein reduction, following [51]. For simplicity we will consider the bosonic string with vanishing dilaton. The right-moving gauge current $\bar J_G$ used for the deformation has now a left-moving partner and can hence be bosonized as $\bar J_G = \imath\bar\partial\varphi$, $\varphi\,(z, \bar z)$ being interpreted as an internal degree of freedom. The sigma-model action is recast as

$$S = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^2 z\ \left(G_{\mathrm{MN}} + B_{\mathrm{MN}}\right)\partial x^{\mathrm{M}}\bar\partial x^{\mathrm{N}}, \tag{D.2}$$

where the $x^{\mathrm{M}}, \mathrm{M} = 1, \ldots, 4$ embrace the group coordinates $x^\mu, \mu = 1, 2, 3$ and the internal

$x^4 \equiv \varphi$:

$$x^{\mathrm{M}} = \left(\frac{x^\mu}{x^4} \right). \tag{D.3}$$

If we split accordingly the background fields, we obtain the following decomposition:

$$G_{\mathrm{MN}} = \left(\begin{array}{c|c} G_{\mu\nu} & A_\mu \\ \hline A_\mu & G_{\varphi\varphi} \end{array} \right), \qquad B_{\mathrm{MN}} = \left(\begin{array}{c|c} B_{\mu\nu} & B_{\mu 4} \\ \hline -B_{\mu 4} & 0 \end{array} \right), \tag{D.4}$$

and the action becomes:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}z^2 \left\{ \left(G_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}\right) \partial x^\mu \, \bar{\partial} x^\nu + \left(A_\mu + B_{\mu 4}\right) \partial x^\mu \, \bar{\partial}\varphi \right. \\ \left. + \left(A_\mu - B_{\mu 4}\right) \partial\varphi \, \bar{\partial} x^\mu + G_{\varphi\varphi} \, \partial\varphi \, \bar{\partial}\varphi \right\}. \tag{D.5}$$

We would like to put the previous expression in such a form that space–time gauge invariance,

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \lambda, \tag{D.6}$$

$$B_{\mu 4} \to B_{\mu 4} + \partial_\mu \eta, \tag{D.7}$$

is manifest. This is achieved as follows:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}^2 z \, \left\{ \left(\hat{G}_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} \right) \partial x^\mu \, \bar{\partial} x^\nu + B_{\mu 4} \left(\partial x^\mu \bar{\partial}\varphi - \partial\varphi \bar{\partial} x^\mu \right) \right. \\ \left. + G_{\varphi\varphi} \left(\partial\varphi + A_\mu \partial x^\mu \right) \left(\bar{\partial}\varphi + A_\mu \bar{\partial} x^\mu \right) \right\}, \tag{D.8}$$

where $\hat{G}_{\mu\nu}$ is the Kaluza–Klein metric

$$\hat{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - G_{\varphi\varphi} A_\mu A_\nu. \tag{D.9}$$

Expression (D.2) coincides with (D.1) after the following identifications:

$$\hat{G}_{\mu\nu} = G^{\mathrm{WZW}}_{\mu\nu} - \frac{k_G}{2} A_\mu A_\nu, \tag{D.10a}$$

$$B_{\mu\nu} = B^{\mathrm{WZW}}_{\mu\nu}, \tag{D.10b}$$

$$A_\mu = B_{\mu 4} = H \sqrt{\frac{k}{2k_G}} J_\mu, \tag{D.10c}$$

$$G_{\varphi\varphi} = \frac{k_G}{2}. \tag{D.10d}$$

The various backgrounds we have found throughout this paper correspond to truly marginal deformations of WZW models. Thus, they are target spaces of exact CFT's. They solve, however, the lowest-order (in α') equations since all higher-order effects turn out to be captured in the shift $k \to k + 2$. These $\mathcal{O}(\alpha')$ equations are obtained by using the

bosonic action (D.2), or equivalently by writing the heterotic string equations of motion for the fields in (D.10). They read [52]:

$$\delta c = -R + \frac{k_G}{16} F_{\ \mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{D.11a}$$

$$\beta^G{}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} H_{\mu\rho\sigma} H_\nu{}^{\rho\sigma} - \frac{k_G}{4} F_{\mu\rho} F^a{}_\mu{}^\rho = 0, \tag{D.11b}$$

$$\beta^B{}_{\nu\rho} = \nabla^\mu H_{\mu\nu\rho} = 0, \tag{D.11c}$$

$$\beta^A{}_\mu = \nabla^\nu F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} F^{\nu\rho} H_{\mu\nu\rho} = 0, \tag{D.11d}$$

where

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{D.12}$$

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} - \frac{k_G}{4} A_\mu F_{\nu\rho} + \text{cyclic}. \tag{D.13}$$

References

[1] C. Kounnas, M. Porrati, and B. Rostand, *On N=4 extended superLiouville theory*, *Phys. Lett.* **B258** (1991) 61–69.

[2] J. Callan, Curtis G., J. A. Harvey, and A. Strominger, *World sheet approach to heterotic instantons and solitons*, *Nucl. Phys.* **B359** (1991) 611–634.

[3] I. Antoniadis, S. Ferrara, and C. Kounnas, *Exact supersymmetric string solutions in curved gravitational backgrounds*, *Nucl. Phys.* **B421** (1994) 343–372, [hep-th/9402073].

[4] I. Antoniadis, C. Bachas, and A. Sagnotti, *Gauged supergravity vacua in string theory*, *Phys. Lett.* **B235** (1990) 255.

[5] H. J. Boonstra, B. Peeters, and K. Skenderis, *Brane intersections, anti-de Sitter spacetimes and dual superconformal theories*, *Nucl. Phys.* **B533** (1998) 127–162, [hep-th/9803231].

[6] S. Chaudhuri and J. A. Schwartz, *A criterion for integrably marginal operators*, *Phys. Lett.* **B219** (1989) 291.

[7] S. Forste and D. Roggenkamp, *Current current deformations of conformal field theories, and wzw models*, *JHEP* **05** (2003) 071, [hep-th/0304234].

[8] E. Kiritsis and C. Kounnas, *Infrared regularization of superstring theory and the one loop calculation of coupling constants*, *Nucl. Phys.* **B442** (1995) 472–493, [hep-th/9501020].

[9] E. Kiritsis and C. Kounnas, *Infrared behavior of closed superstrings in strong magnetic and gravitational fields*, *Nucl. Phys.* **B456** (1995) 699–731, [hep-th/9508078].

[10] D. Israël, *Quantization of heterotic strings in a Gödel/anti de Sitter spacetime and chronology protection*, *JHEP* **01** (2004) 042, [hep-th/0310158].

[11] A. Giveon and E. Kiritsis, *Axial vector duality as a gauge symmetry and topology change in string theory*, *Nucl. Phys.* **B411** (1994) 487–508, [hep-th/9303016].

[12] C. V. Johnson, *Heterotic coset models*, *Mod. Phys. Lett.* **A10** (1995) 549–560, [hep-th/9409062].

[13] D. A. Lowe and A. Strominger, *Exact four-dimensional dyonic black holes and bertotti-robinson space-times in string theory*, *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994) 1468–1471, [hep-th/9403186].

[14] A. A. Tseytlin, *Conformal sigma models corresponding to gauged Wess-Zumino- Witten theories*, *Nucl. Phys.* **B411** (1994) 509–558, [hep-th/9302083].

[15] S. Ferrara, R. Kallosh, and A. Strominger, *N=2 extremal black holes*, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 5412–5416, [hep-th/9508072].

[16] D. Kutasov, F. Larsen, and R. G. Leigh, *String theory in magnetic monopole backgrounds*, *Nucl. Phys.* **B550** (1999) 183–213, [hep-th/9812027].

[17] E. Kiritsis, *Character formulae and the structure of the representations of the N=1, N=2 superconformal algebras*, *Int. J. Mod. Phys.* **A3** (1988) 1871.

[18] V. K. Dobrev, *Characters of the unitarizable highest weight modules over the N=2 superconformal algebras*, *Phys. Lett.* **B186** (1987) 43.

[19] Y. Matsuo, *Character formula of $C < 1$ unitary representation of N=2 superconformal algebra*, *Prog. Theor. Phys.* **77** (1987) 793.

[20] F. Ravanini and S.-K. Yang, *Modular invariance in N=2 superconformal field theories*, *Phys. Lett.* **B195** (1987) 202.

[21] P. Berglund, C. V. Johnson, S. Kachru, and P. Zaugg, *Heterotic coset models and (0,2) string vacua*, *Nucl. Phys.* **B460** (1996) 252–298, [hep-th/9509170].

[22] S. Forste, *A truly marginal deformation of SL(2, R) in a null direction*, *Phys. Lett.* **B338** (1994) 36–39, [hep-th/9407198].

[23] D. Israël, C. Kounnas, and M. P. Petropoulos, *Superstrings on NS5 backgrounds, deformed AdS(3) and holography*, *JHEP* **10** (2003) 028, [hep-th/0306053].

[24] R. Dijkgraaf, H. Verlinde, and E. Verlinde, *String propagation in a black hole geometry*, *Nucl. Phys.* **B371** (1992) 269–314.

[25] M. Rooman and P. Spindel, *Goedel metric as a squashed anti-de sitter geometry*, *Class. Quant. Grav.* **15** (1998) 3241–3249, [gr-qc/9804027].

[26] M. J. Reboucas and J. Tiomno, *On the homogeneity of riemannian space-times of Gödel type*, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 1251–1264.

[27] N. Drukker, B. Fiol, and J. Simon, *Gödel's universe in a supertube shroud*, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 231601, [hep-th/0306057].

[28] N. J. Vilenkin and A. Klimyk, *Representation of Lie groups and special functions.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[29] J. M. Maldacena and H. Ooguri, *Strings in AdS(3) and SL(2,R) WZW model. I*, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2929–2960, [hep-th/0001053].

[30] P. M. S. Petropoulos, *Comments on SU(1,1) string theory*, *Phys. Lett.* **B236** (1990) 151.

[31] O. Aharony, M. Berkooz, D. Kutasov, and N. Seiberg, *Linear dilatons, NS5-branes and holography*, *JHEP* **10** (1998) 004, [hep-th/9808149].

[32] M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, *The black hole in three-dimensional space-time*, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1849–1851, [hep-th/9204099].

[33] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim, and J. Zanelli, *Geometry of the (2+1) black hole*, *Phys. Rev.* **D48** (1993) 1506–1525, [gr-qc/9302012].

[34] M. Natsuume and Y. Satoh, *String theory on three dimensional black holes*, *Int. J. Mod. Phys.* **A13** (1998) 1229–1262, [hep-th/9611041].

[35] S. Hemming and E. Keski-Vakkuri, *The spectrum of strings on BTZ black holes and spectral flow in the SL(2,R) WZW model*, *Nucl. Phys.* **B626** (2002) 363–376, [hep-th/0110252].

[36] O. Coussaert and M. Henneaux, *Self-dual solutions of 2+1 Einstein gravity with a negative cosmological constant*, hep-th/9407181.

[37] K. Gawedzki, *Noncompact WZW conformal field theories*, hep-th/9110076.

[38] J. Teschner, *On structure constants and fusion rules in the SL(2,C)/SU(2) wznw model*, *Nucl. Phys.* **B546** (1999) 390–422, [hep-th/9712256].

[39] D. Youm, *Black holes and solitons in string theory*, *Phys. Rept.* **316** (1999) 1–232, [hep-th/9710046].

[40] N. Berkovits, M. Bershadsky, T. Hauer, S. Zhukov, and B. Zwiebach, *Superstring theory on AdS(2) $\times$ S(2) as a coset supermanifold*, *Nucl. Phys.* **B567** (2000) 61–86, [hep-th/9907200].

[41] H. Verlinde, *Superstrings on AdS(2) and superconformal matrix quantum mechanics*, hep-th/0403024.

[42] J. M. Maldacena, *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231–252, [hep-th/9711200].

[43] P. Claus *et. al.*, *Black holes and superconformal mechanics*, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 4553–4556, [hep-th/9804177].

[44] G. W. Gibbons and P. K. Townsend, *Black holes and Calogero models*, *Phys. Lett.* **B454** (1999) 187–192, [hep-th/9812034].

[45] M. Cadoni, P. Carta, D. Klemm, and S. Mignemi, *AdS(2) gravity as conformally invariant mechanical system*, *Phys. Rev.* **D63** (2001) 125021, [hep-th/0009185].

[46] H. Ooguri, A. Strominger, and C. Vafa, *Black hole attractors and the topological string*, hep-th/0405146.

[47] C. Vafa, *Two dimensional yang-mills, black holes and topological strings*, hep-th/0406058.

[48] D. Gepner, *Space-time supersymmetry in compactified string theory and superconformal models*, *Nucl. Phys.* **B296** (1988) 757.

[49] N. Drukker, B. Fiol, and J. Simon, *Goedel-type universes and the Landau problem*, hep-th/0309199.

[50] A. Giveon, D. Kutasov, and N. Seiberg, *Comments on string theory on AdS(3)*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 733–780, [hep-th/9806194].

[51] G. T. Horowitz and A. A. Tseytlin, *A new class of exact solutions in string theory*, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 2896–2917, [hep-th/9409021].

[52] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, *Quantum string theory effective action*, *Nucl. Phys.* **B261** (1985) 1–27.

Conclusions et perspectives

Le travail de thèse décrit dans ce manuscrit visait à mieux comprendre la physique des supercordes dans les espaces-temps courbes. Il semble en effet impératif de connaître le comportement de cette théorie, qui a pour ambition d'unifier la gravitation et les autres interactions fondamentales, dans les régions de l'espace-temps fortement courbées.

Nous avons exploré plusieurs régions de l'espace des modules des solutions de NS5-branes, pour lesquelles nous pouvons trouver des descriptions exactes en théorie superconforme, à l'aide de modèles de WZW et de leurs quotients. Les déformations marginales de ces théories furent un outil très précieux pour trouver de nouvelles solutions de ce type. Nous avons ainsi par exemple trouvé la théorie conforme d'une nouvelle limite de découplage de la théorie des petites cordes, et obtenu une description exacte de l'univers de Gödel en théorie des cordes hétérotiques.

Au delà de l'identification de nouveaux espaces-temps de plongement pour la théorie des cordes, nous nous sommes efforcés d'étudier le spectre de telles théories. Ainsi, nous avons calculé la fonction de partition de la théorie conforme $SL(2,\mathbb{R})$, que nous avons ensuite utilisée pour construire celle des autres modèles. Nous avons par exemple appliqué ce résultat à la construction de la double limite d'échelle de la théorie des petites cordes – grâce à une description de celle-ci comme une théorie de quotient – et à l'étude des courbes de genre temps fermées dans l'univers de Gödel, ainsi qu'à leur résolution. De manière complémentaire, nous avons étudié les caractères du modèle jaugé $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$, pour calculer leurs transformations modulaires et comprendre, dans le cas supersymétrique, la dualité avec la théorie de Liouville N=2.

Une extension évidente et indispensable de ces travaux est la construction des D-branes dans ces espaces-temps, en utilisant les méthodes algébriques de la théorie conforme avec bord. Nous avons déjà abordé cette étude avec la théorie superconforme $SL(2,\mathbb{R})/U(1)$, afin d'obtenir les D-branes de la double limite d'échelle de la petite théorie des cordes. L'étude de ces objets non-perturbatifs dans les autres espaces-temps décrits dans cette thèse constitue un objectif de recherche intéressant pour la suite.

La compréhension de l'holographie de ces solutions est pour l'instant très incomplète. De façon générale, nous avons discuté le lien entre ces solutions et les descriptions holographiques connues de la théorie des petites cordes et de l'espace-temps anti-de Sitter à trois dimensions. Une étude plus approfondie nécessiterait premièrement l'établissement d'un dictionnaire holographique entre les opérateurs primaires de la théorie des cordes dans l'espace ambiant et les opérateurs de la théorie duale. Deuxièment, les corrélateurs de la théorie des cordes doivent être étudiés en détail, et interprétés de manière holographique. L'exemple de AdS_2 est particulièrement intéressant, pour comprendre l'holographie des trous noirs.

Les espaces-temps les plus intéressants dans la perspective de l'étude de la gravitation quantique sont évidemment les solutions de trous noirs non-extrémales, ainsi que les modèles cosmologiques. Nous pouvons ainsi espérer comprendre la physique des premiers instants de l'univers grâce à la théorie des supercordes, et éventuellement prédire l'existence de phénomènes typiquement «cordistes» observables dans les expériences cosmologiques futures. Cependant, dans

le cadre que nous nous sommes assigné – la description en théorie conforme des espaces-temps courbes – ces projets se heurtent à des obstacles techniques importants. Ainsi nombre de ces solutions nécessitent une compréhension approfondie de l'algèbre affine $SL(2,\mathbb{R})$ dans des bases *non-compactes* qui ne sont pas encore bien maîtrisées. Nous espérons faire des progrès dans cette direction durant les années à venir.

En outre, il faut s'assurer que la production de cordes fondamentales dans ces espaces-temps ne diverge pas – en raison de la croissance exponentielle du nombre d'états massifs en théorie des cordes – ce qui rendrait leur description en première quantification inappropriée.

De manière plus fondamentale, des problèmes importants, situés au delà du cadre de la théorie des cordes, doivent être résolus pour étudier la physique des espaces-temps cosmologiques, comme celui de la stabilité de ces solutions par rapport à de petites perturbations, ou celui du prolongement analytique, nécessaire pour obtenir une théorie euclidienne bien définie.

References

[1] R. M. Wald, "General relativity,". Chicago, Usa : Univ. Pr. (1984) 491p.

[2] T. P. Cheng and L. F. Li, "Gauge theory of elementary particle physics,". Oxford, Uk : Clarendon (1984) 536 P. (Oxford Science Publications).

[3] A. Bilal, "Introduction to supersymmetry," hep-th/0101055.

[4] E. Cremmer, B. Julia, and J. Scherk, "Supergravity theory in 11 dimensions," *Phys. Lett.* B76 (1978) 409.

[5] M. J. Duff, B. E. W. Nilsson, and C. N. Pope, "Kaluza-Klein supergravity," *Phys. Rept.* 130 (1986) 1–142.

[6] P. Hořava and E. Witten, "Heterotic and type I string dynamics from eleven dimensions," *Nucl. Phys.* B460 (1996) 506, hep-th/9510209.

[7] K. S. Stelle, "BPS branes in supergravity," hep-th/9803116.

[8] R. I. Nepomechie, "Magnetic monopoles from antisymmetric tensor gauge fields," *Phys. Rev.* D31 (1985) 1921.

[9] G. T. Horowitz and A. Strominger, "Black strings and p-branes," *Nucl. Phys.* B360 (1991) 197–209.

[10] E. G. Gimon and J. Polchinski, "Consistency conditions for orientifolds and D-manifolds," *Phys. Rev.* D54 (1996) 1667–1676, hep-th/9601038.

[11] L. Cornalba, M. S. Costa, and C. Kounnas, "A resolution of the cosmological singularity with orientifolds," *Nucl. Phys.* B637 (2002) 378–394, hep-th/0204261.

[12] J. Polchinski, "String theory. vol. 1 : An introduction to the bosonic string,". Cambridge, UK : Univ. Pr. (1998) 402 p.

[13] J. Polchinski, "String theory. vol. 2 : Superstring theory and beyond,". Cambridge, UK : Univ. Pr. (1998) 531 p.

[14] E. Kiritsis, "Introduction to superstring theory," hep-th/9709062.

[15] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, "Superstring theory. vol. 1 : Introduction,". Cambridge, Uk : Univ. Pr. (1987) 469 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).

[16] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, "Superstring theory. vol. 2 : Loop amplitudes, anomalies and phenomenology,". Cambridge, Uk : Univ. Pr. (1987) 596 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).

[17] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec, and R. Rohm, "Heterotic string theory. 1. the free heterotic string," *Nucl. Phys.* B256 (1985) 253.

[18] C. M. Hull and E. Witten, "Supersymmetric sigma models and the heterotic string," *Phys. Lett.* B160 (1985) 398–402.

[19] A. M. Polyakov, "Quantum geometry of bosonic strings," *Phys. Lett.* B103 (1981) 207–210.

[20] L. Alvarez-Gaume and E. Witten, "Gravitational anomalies," *Nucl. Phys.* B234 (1984) 269.

[21] M. B. Green and J. H. Schwarz, "Anomaly cancellation in supersymmetric d=10 gauge theory and superstring theory," *Phys. Lett.* B149 (1984) 117–122.

[22] J. Polchinski, "Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond charges," *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995) 4724–4727, hep-th/9510017.

[23] T. H. Buscher, "A symmetry of the string background field equations," *Phys. Lett.* B194 (1987) 59.

[24] C. M. Hull and P. K. Townsend, "Unity of superstring dualities," *Nucl. Phys.* B438 (1995) 109–137, hep-th/9410167.

[25] P. K. Townsend, "The eleven-dimensional supermembrane revisited," *Phys. Lett.* B350 (1995) 184–187, hep-th/9501068.

[26] E. Witten, "String theory dynamics in various dimensions," *Nucl. Phys.* B443 (1995) 85–126, hep-th/9503124.

[27] A. Sen, "An introduction to non-perturbative string theory," hep-th/9802051.

[28] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, "Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory," *Nucl. Phys.* B241 (1984) 333–380.

[29] D. Friedan, E. J. Martinec, and S. H. Shenker, "Conformal invariance, supersymmetry and string theory," *Nucl. Phys.* B271 (1986) 93.

[30] F. Gliozzi, J. Scherk, and D. I. Olive, "Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model," *Nucl. Phys.* B122 (1977) 253–290.

[31] M. Ademollo *et al.*, "Dual string with U(1) color symmetry," *Nucl. Phys.* B111 (1976) 77–110.

[32] T. Banks and L. J. Dixon, "Constraints on string vacua with space-time supersymmetry," *Nucl. Phys.* B307 (1988) 93–108.

[33] A. Schwimmer and N. Seiberg, "Comments on the N=2, N=3, N=4 superconformal algebras in two-dimensions," *Phys. Lett.* B184 (1987) 191.

[34] D. Gepner, "Lectures on N=2 string theory,". Lectures at Spring School on Superstrings, Trieste, Italy, Apr 3-14, 1989.

[35] A. Sevrin, W. Troost, and A. Van Proeyen, "Superconformal algebras in two-dimensions with N=4," *Phys. Lett.* B208 (1988) 447.

[36] E. Witten, "Nonabelian bosonization in two dimensions," *Commun. Math. Phys.* 92 (1984) 455–472.

[37] P. Di Vecchia, V. G. Knizhnik, J. L. Petersen, and P. Rossi, "A supersymmetric wess-zumino lagrangian in two-dimensions," *Nucl. Phys.* B253 (1985) 701.

[38] H. W. Braden, "Parallelizing torsion and anomalies," *Phys. Rev.* D33 (1986) 2411.

[39] V. G. Kac, "Infinite dimensional lie algebras,". Cambridge, UK : Univ. Pr. (1990) 400 p.

[40] H. Sugawara, "A field theory of currents," *Phys. Rev.* 170 (1968) 1659–1662.

[41] M. B. Halpern, E. Kiritsis, N. A. Obers, and K. Clubok, "Irrational conformal field theory," *Phys. Rept.* 265 (1996) 1–138, hep-th/9501144.

[42] D. Gepner and E. Witten, "String theory on group manifolds," *Nucl. Phys.* B278 (1986) 493.

[43] M. Dine, P. Y. Huet, and N. Seiberg, "Large and small radius in string theory," *Nucl. Phys.* B322 (1989) 301.

[44] K. Bardakci, E. Rabinovici, and B. Saering, "String models with $c < 1$ components," *Nucl. Phys.* B299 (1988) 151.

[45] K. Gawedzki and A. Kupiainen, "G/H conformal field theory from gauged WZW model," *Phys. Lett.* B215 (1988) 119–123.

[46] P. H. Ginsparg and F. Quevedo, "Strings on curved space-times : Black holes, torsion, and duality," *Nucl. Phys.* B385 (1992) 527–557, hep-th/9202092.

[47] A. A. Tseytlin, "Conformal sigma models corresponding to gauged Wess-Zumino- Witten theories," *Nucl. Phys.* B411 (1994) 509–558, hep-th/9302083.

[48] D. Karabali, Q.-H. Park, H. J. Schnitzer, and Z. Yang, "A GKO construction based on a path integral formulation of gauged Wess-Zumino-Witten actions," *Phys. Lett.* B216 (1989) 307.

[49] P. Goddard, A. Kent, and D. I. Olive, "Unitary representations of the virasoro and supervirasoro algebras," *Commun. Math. Phys.* 103 (1986) 105.

[50] S. Hwang and H. Rhedin, "The BRST formulation of G/H WZNW models," *Nucl. Phys.* B406 (1993) 165–186, hep-th/9305174.

[51] V. G. Kač and D. A. Kazhdan, "Structure of representations with highest weight of infinite dimensional Lie algebras," *Adv. Math.* 34 (1979) 97–108.

[52] D. Gepner, "New conformal field theories associated with Lie algebras," *Nucl. Phys.* B290 (1987) 10.

[53] K. Bardacki, M. J. Crescimanno, and E. Rabinovici, "Parafermions from coset models," *Nucl. Phys.* B344 (1990) 344–370.

[54] Y. Kazama and H. Suzuki, "New N=2 superconformal field theories and superstring compactification," *Nucl. Phys.* B321 (1989) 232.

[55] A. B. Zamolodchikov, "'irreversibility' of the flux of the renormalization group in a 2-D field theory," *JETP Lett.* 43 (1986) 730–732.

[56] D. Gepner, "Space-time supersymmetry in compactified string theory and superconformal models," *Nucl. Phys.* B296 (1988) 757.

[57] W. Lerche, C. Vafa, and N. P. Warner, "Chiral rings in N=2 superconformal theories," *Nucl. Phys.* B324 (1989) 427.

[58] A. Giveon, M. Porrati, and E. Rabinovici, "Target space duality in string theory," *Phys. Rept.* 244 (1994) 77–202, hep-th/9401139.

[59] S. Chaudhuri and J. A. Schwartz, "A criterion for integrably marginal operators," *Phys. Lett.* B219 (1989) 291.

[60] S. Forste and D. Roggenkamp, "Current current deformations of conformal field theories, and WZW models," *JHEP* 05 (2003) 071, hep-th/0304234.

[61] P. Di Francesco, H. Saleur, and J. B. Zuber, "Generalized Coulomb gas formalism for two-dimensional critical models based on SU(2) coset construction," *Nucl. Phys.* B300 (1988) 393.

[62] E. Kiritsis, "Duality in gauged WZW models," *Mod. Phys. Lett. A* 6 (1991) 2871.

[63] E. Kiritsis, "Exact duality symmetries in CFT and string theory," *Nucl. Phys.* B405 (1993) 109, hep-th/9302033.

[64] A. Giveon and E. Kiritsis, "Axial vector duality as a gauge symmetry and topology change in string theory," *Nucl. Phys.* B411 (1994) 487–508, hep-th/9303016.

[65] J. Scherk and J. H. Schwarz, "Dual models for nonhadrons," *Nucl. Phys.* B81 (1974) 118–144.

[66] G. 't Hooft, "A planar diagram theory for strong interactions," *Nucl. Phys.* B72 (1974) 461.

[67] J. M. Maldacena, "The large N limit of superconformal field theories and supergravity," *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998) 231–252, hep-th/9711200.

[68] E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography," *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998) 253–291, hep-th/9802150.

[69] H. J. Boonstra, B. Peeters, and K. Skenderis, "Duality and asymptotic geometries," *Phys. Lett.* B411 (1997) 59–67, hep-th/9706192.

[70] A. Strominger and C. Vafa, "Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy," *Phys. Lett.* B379 (1996) 99–104, hep-th/9601029.

[71] J. D. Brown and M. Henneaux, "Central charges in the canonical realization of asymptotic symmetries : An example from three-dimensional gravity," *Commun. Math. Phys.* 104 (1986) 207–226.

[72] I. Antoniadis, C. Bachas, and A. Sagnotti, "Gauged supergravity vacua in string theory," *Phys. Lett.* B235 (1990) 255.

[73] J. Balog, L. O'Raifeartaigh, P. Forgacs, and A. Wipf, "Consistency of string propagation on curved space-times : An SU(1,1) based counterexample," *Nucl. Phys.* B325 (1989) 225.

[74] P. M. S. Petropoulos, "Comments on SU(1,1) string theory," *Phys. Lett.* B236 (1990) 151.

[75] N. J. Vilenkin and A. Klimyk, *Representation of Lie groups and special functions*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[76] M. Henningson, S. Hwang, P. Roberts, and B. Sundborg, "Modular invariance of SU(1,1) strings," *Phys. Lett.* B267 (1991) 350–355.

[77] J. M. Maldacena and H. Ooguri, "Strings in AdS_3 and SL(2,$\mathbb{R}$) WZW model. I," *J. Math. Phys.* 42 (2001) 2929–2960, hep-th/0001053.

[78] D. Israël, C. Kounnas, and P. Petropoulos, "Superstrings on NS5 backgrounds, deformed AdS_3 and holography," *JHEP* 10 (2003) 028, hep-th/0306053.

[79] S. Elitzur, A. Forge, and E. Rabinovici, "Some global aspects of string compactifications," *Nucl. Phys.* B359 (1991) 581–610.

[80] E. Witten, "On string theory and black holes," *Phys. Rev.* D44 (1991) 314–324.

[81] L. J. Dixon, M. E. Peskin, and J. Lykken, "N=2 superconformal symmetry and SO(2,1) current algebra," *Nucl. Phys.* B325 (1989) 329–355.

[82] R. Dijkgraaf, H. Verlinde, and E. Verlinde, "String propagation in a black hole geometry," *Nucl. Phys.* B371 (1992) 269–314.

[83] J. Teschner, "On structure constants and fusion rules in the SL(2,$\mathbb{C}$)/SU(2) WZNW model," *Nucl. Phys.* B546 (1999) 390–422, hep-th/9712256.

[84] J. Teschner, "Operator product expansion and factorization in the H_3^+ WZNW model," *Nucl. Phys.* B571 (2000) 555–582, hep-th/9906215.

[85] J. Teschner, "Crossing symmetry in the H_3^+ WZNW model," *Phys. Lett.* B521 (2001) 127–132, hep-th/0108121.

[86] K. Gawedzki, "Noncompact WZW conformal field theories," hep-th/9110076.

[87] A. Hanany, N. Prezas, and J. Troost, "The partition function of the two-dimensional black hole conformal field theory," *JHEP* 04 (2002) 014, hep-th/0202129.

[88] D. Israël, C. Kounnas, A. Pakman, and J. Troost, "The partition function of the supersymmetric two-dimensional black hole and little string theory," *JHEP* 06 (2004) 033, hep-th/0403237.

[89] J. M. Maldacena, H. Ooguri, and J. Son, "Strings in AdS_3 and the SL(2,$\mathbb{R}$) WZW model. II : Euclidean black hole," *J. Math. Phys.* 42 (2001) 2961–2977, hep-th/0005183.

[90] I. Bakas and E. Kiritsis, "Beyond the large N limit : Nonlinear W(∞) as symmetry of the SL(2,$\mathbb{R}$) / U(1) coset model," *Int. J. Mod. Phys.* A7S1A (1992) 55–81, hep-th/9109029.

[91] A. Pakman, "Brst quantization of string theory in AdS(3)," *JHEP* 06 (2003) 053, hep-th/0304230.

[92] T. Eguchi and Y. Sugawara, "Modular bootstrap for boundary N = 2 Liouville theory," *JHEP* 01 (2004) 025, hep-th/0311141.

[93] D. Israël, A. Pakman, and J. Troost, "Extended SL(2,$\mathbb{R}$)/U(1) characters, or modular properties of a simple non-rational conformal field theory," *JHEP* 04 (2004) 043, hep-th/0402085.

[94] A. Giveon, D. Kutasov, and N. Seiberg, "Comments on string theory on AdS_3," *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998) 733–780, hep-th/9806194.

[95] M. Bershadsky, C. Vafa, and V. Sadov, "D-branes and topological field theories," *Nucl. Phys.* B463 (1996) 420–434, hep-th/9511222.

[96] E. Kiritsis, "The dual faces of string theory," hep-th/9309101.

[97] E. Kiritsis, "Duality symmetries and topology change in string theory," hep-th/9309064.

[98] J.-L. Gervais and A. Neveu, "The dual string spectrum in polyakov's quantization. 1," *Nucl. Phys.* B199 (1982) 59.

[99] J.-L. Gervais and A. Neveu, "Dual string spectrum in polyakov's quantization. 2. mode separation," *Nucl. Phys.* B209 (1982) 125.

[100] N. Seiberg, "Notes on quantum liouville theory and quantum gravity," *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 102 (1990) 319–349.

[101] M. Wakimoto, "Fock representations of the affine lie algebra A1(1)," *Commun. Math. Phys.* 104 (1986) 605–609.

[102] K. Becker and M. Becker, "Interactions in the SL(2,$\mathbb{R}$) / U(1) black hole background," *Nucl. Phys.* B418 (1994) 206–230, hep-th/9310046.

[103] C. Kounnas, M. Porrati, and B. Rostand, "On N=4 extended superLiouville theory," *Phys. Lett.* B258 (1991) 61–69.

[104] I. Antoniadis, S. Ferrara, and C. Kounnas, "Exact supersymmetric string solutions in curved gravitational backgrounds," *Nucl. Phys.* B421 (1994) 343–372, hep-th/9402073.

[105] E. Kiritsis, C. Kounnas, and D. Lust, "A large class of new gravitational and axionic backgrounds for four-dimensional superstrings," *Int. J. Mod. Phys.* A9 (1994) 1361–1394, hep-th/9308124.

[106] N. Seiberg, "New theories in six dimensions and matrix description of M- theory on T^5 and $T^5/\mathbb{Z}_2$," *Phys. Lett.* B408 (1997) 98–104, hep-th/9705221.

[107] O. Aharony, M. Berkooz, D. Kutasov, and N. Seiberg, "Linear dilatons, NS5-branes and holography," *JHEP* 10 (1998) 004, hep-th/9808149.

[108] D. Kutasov and D. A. Sahakyan, "Comments on the thermodynamics of little string theory," *JHEP* 02 (2001) 021, hep-th/0012258.

[109] S. Forste, "A truly marginal deformation of $SL(2,\mathbb{R})$ in a null direction," *Phys. Lett.* B338 (1994) 36–39, hep-th/9407198.

[110] D.-E. Diaconescu and N. Seiberg, "The coulomb branch of (4,4) supersymmetric field theories in two dimensions," *JHEP* 07 (1997) 001, hep-th/9707158.

[111] A. Giveon and D. Kutasov, "Little string theory in a double scaling limit," *JHEP* 10 (1999) 034, hep-th/9909110.

[112] A. Giveon and D. Kutasov, "Comments on double scaled little string theory," *JHEP* 01 (2000) 023, hep-th/9911039.

[113] K. Hori and A. Kapustin, "Duality of the fermionic 2d black hole and N = 2 liouville theory as mirror symmetry," *JHEP* 08 (2001) 045, hep-th/0104202.

[114] D. Tong, "Mirror mirror on the wall : On two-dimensional black holes and liouville theory," *JHEP* 04 (2003) 031, hep-th/0303151.

[115] D. Israël, A. Pakman, and J. Troost, "D-branes in N = 2 Liouville theory and its mirror," hep-th/0405259.

[116] K. Sfetsos, "Branes for Higgs phases and exact conformal field theories," *JHEP* 01 (1999) 015, hep-th/9811167.

[117] D. Tong, "NS5-branes, T-duality and worldsheet instantons," *JHEP* 07 (2002) 013, hep-th/0204186.

[118] T. Eguchi and Y. Sugawara, "$SL(2,\mathbb{R})/U(1)$ supercoset and elliptic genera of non-compact calabi-yau manifolds," *JHEP* 05 (2004) 014, hep-th/0403193.

[119] E. Kiritsis, "Character formulae and the structure of the representations of the N=1, N=2 superconformal algebras," *Int. J. Mod. Phys.* A3 (1988) 1871.

[120] F. Ravanini and S.-K. Yang, "Modular invariance in N=2 superconformal field theories," *Phys. Lett.* B195 (1987) 202.

[121] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume, and I. Bakas, "T duality and space-time supersymmetry," *Nucl. Phys.* B457 (1995) 3–26, hep-th/9507112.

[122] S. Elitzur, A. Giveon, D. Kutasov, E. Rabinovici, and G. Sarkissian, "D-branes in the background of NS five-branes," *JHEP* 08 (2000) 046, hep-th/0005052.

[123] S. Ribault and V. Schomerus, "Branes in the 2-D black hole," *JHEP* 02 (2004) 019, hep-th/0310024.

[124] B. Ponsot, V. Schomerus, and J. Teschner, "Branes in the Euclidean AdS_3," *JHEP* 02 (2002) 016, hep-th/0112198.

[125] V. Schomerus, "Lectures on branes in curved backgrounds," *Class. Quant. Grav.* 19 (2002) 5781–5847, hep-th/0209241.

[126] S. Ribault, "Cordes et D-branes dans les espaces-temps courbes. (Thèse de doctorat)," hep-th/0309272.

[127] N. Ishibashi, "The boundary and crosscap states in conformal field theories," *Mod. Phys. Lett.* A4 (1989) 251.

[128] J. L. Cardy, "Boundary conditions, fusion rules and the Verlinde formula," *Nucl. Phys.* B324 (1989) 581.

[129] H. Ooguri, Y. Oz, and Z. Yin, "D-branes on Calabi-Yau spaces and their mirrors," *Nucl. Phys.* B477 (1996) 407–430, hep-th/9606112.

[130] J. M. Maldacena, G. W. Moore, and N. Seiberg, "Geometrical interpretation of D-branes in gauged WZW models," *JHEP* 07 (2001) 046, hep-th/0105038.

[131] A. Hanany and E. Witten, "Type IIB superstrings, BPS monopoles, and three-dimensional gauge dynamics," *Nucl. Phys.* B492 (1997) 152–190, hep-th/9611230.

[132] O. Pelc, "On the quantization constraints for a D3 brane in the geometry of NS5 branes," *JHEP* 08 (2000) 030, hep-th/0007100.

[133] S. Ribault, "D3-branes in NS5-branes backgrounds," *JHEP* 02 (2003) 044, hep-th/0301092.

[134] K. Gödel, "An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of graviation," *Rev. Mod. Phys.* 21 (1949) 447–450.

[135] J. P. Gauntlett, J. B. Gutowski, C. M. Hull, S. Pakis, and H. S. Reall, "All supersymmetric solutions of minimal supergravity in five dimensions," *Class. Quant. Grav.* 20 (2003) 4587–4634, hep-th/0209114.

[136] E. K. Boyda, S. Ganguli, P. Horava, and U. Varadarajan, "Holographic protection of chronology in universes of the Gödel type," *Phys. Rev.* D67 (2003) 106003, hep-th/0212087.

[137] J. C. Breckenridge, R. C. Myers, A. W. Peet, and C. Vafa, "D-branes and spinning black holes," *Phys. Lett.* B391 (1997) 93–98, hep-th/9602065.

[138] S. W. Hawking, "The chronology protection conjecture," *Phys. Rev.* D46 (1992) 603–611.

[139] N. Drukker, B. Fiol, and J. Simon, "Gödel's universe in a supertube shroud," *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003) 231601, hep-th/0306057.

[140] D. Israël, "Quantization of heterotic strings in a Gödel/Anti de Sitter spacetime and chronology protection," *JHEP* 01 (2004) 042, hep-th/0310158.

[141] D. Israël, C. Kounnas, D. Orlando, and P. Petropoulos, "Electric/magnetic deformations of S^3 and AdS_3, and geometric cosets," hep-th/0405213.

[142] M. J. Reboucas and J. Tiomno, "On the homogeneity of riemannian space-times of Gödel type," *Phys. Rev.* D28 (1983) 1251–1264.

[143] E. Kiritsis and C. Kounnas, "Curved four-dimensional space-times as infrared regulator in superstring theories," *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 41 (1995) 331–340, hep-th/9410212.

[144] E. Kiritsis and C. Kounnas, "Infrared regularization of superstring theory and the one loop calculation of coupling constants," *Nucl. Phys.* B442 (1995) 472–493, hep-th/9501020.

[145] E. Kiritsis and C. Kounnas, "Infrared behavior of closed superstrings in strong magnetic and gravitational fields," *Nucl. Phys.* B456 (1995) 699–731, hep-th/9508078.

[146] P. Berglund, C. V. Johnson, S. Kachru, and P. Zaugg, "Heterotic coset models and (0,2) string vacua," *Nucl. Phys.* B460 (1996) 252–298, hep-th/9509170.

[147] D. Berenstein, J. M. Maldacena, and H. Nastase, "Strings in flat space and pp waves from N = 4 super Yang Mills," *JHEP* 04 (2002) 013, hep-th/0202021.

[148] M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, "The black hole in three-dimensional space-time," *Phys. Rev. Lett.* 69 (1992) 1849–1851, hep-th/9204099.

[149] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim, and J. Zanelli, "Geometry of the (2+1) black hole," *Phys. Rev.* D48 (1993) 1506–1525, gr-qc/9302012.

[150] S. Hemming and E. Keski-Vakkuri, "The spectrum of strings on BTZ black holes and spectral flow in the $SL(2,\mathbb{R})$ WZW model," *Nucl. Phys.* B626 (2002) 363–376, hep-th/0110252.

SUPERCORDES EN ESPACE-TEMPS COURBE ET THÉORIES CONFORMES

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude des théories de supercordes dans les espaces-temps courbes. Nous étudions en particulier l'espace des modules des solutions de NS5-branes et de cordes fondamentales, à l'aide des techniques de déformations marginales de théories conformes.

Parmi les exemples étudiés se trouvent les espaces-temps anti-de Sitter à trois ou deux dimensions, différentes limites de découplage de la théorie des petites cordes et l'univers de Gödel.

Nous étudions également les fonctions de partitions de ces théories conformes, ainsi que les D-branes de certaines d'entre elles. Les applications holographiques potentielles de ces théories sont soulignées.

Mots-clefs. Théorie des cordes, gravitation, théories conformes, holographie, D-branes.

SUPERSTRINGS IN CURVED SPACE-TIMES AND CONFORMAL FIELD THEORY

Abstract

This thesis is devoted to the analysis of superstring theory in curved space-times. In particular we scan the moduli space of NS5-branes and fundamental strings solutions using marginal deformations techniques.

Among the examples we consider, are the two and three dimensional anti-de Sitter space, several decoupling limits of little string theory and the Gödel universe.

We also consider the partition function of these theories, as well as the construction of D-branes for some of them. We highlight the possible holographic interpretations of these theories.

Keywords. String theory, gravitation, conformal field theory, holography, D-branes.