



**Traitement statistique des processus alpha-stables:
mesures de dépendance et identification des ar stables.
Test séquentiels tronqués**

Ludovic d'Estampes

► **To cite this version:**

Ludovic d'Estampes. Traitement statistique des processus alpha-stables: mesures de dépendance et identification des ar stables. Test séquentiels tronqués. Mathématiques [math]. Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT, 2003. Français. NNT: . tel-00005216

HAL Id: tel-00005216

<https://theses.hal.science/tel-00005216>

Submitted on 4 Mar 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2021

THÈSE
présentée pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE
TOULOUSE

École doctorale : Informatique et télécommunications
Spécialité : Réseaux et Télécommunications

Par

Ludovic d'ESTAMPES

**TRAITEMENT STATISTIQUE DES PROCESSUS ALPHA-STABLES
MESURES DE DEPENDANCE ET IDENTIFICATION DES AR STABLES
TESTS SEQUENTIELS TRONQUES**

Soutenue le 24 octobre 2003 devant le jury composé de :

M. Jean-Marc BARDET	Professeur, Université Paris I	Rapporteur
M. Jean-Marc DESHOILLERS	Professeur, Université de Bordeaux II	Président du jury
M. Christian FRABOUL	Professeur, I.N.P. de Toulouse	Examineur
M. Bernard GAREL	Professeur, I.N.P. de Toulouse	Directeur de thèse
M. Michel HAREL	Professeur, I.U.F.M. de Limoges	Examineur
M. Guy MELARD	Professeur, Université Libre de Bruxelles	Rapporteur

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à adresser ma profonde gratitude au professeur Bernard Garel avec qui je travaille en étroite collaboration depuis maintenant 5 ans. Il m'a permis d'apprécier les joies de l'enseignement et a su trouver en moi les capacités nécessaires pour mener à terme, dans d'excellentes conditions, ce travail de thèse. Il a toujours été présent dans les moments où j'en avais besoin, que ce soit professionnellement ou personnellement. Pour toutes ces raisons, je le remercie chaleureusement. Par mes connaissances en informatique et en L^AT_EX, j'espère lui avoir rendu un petit peu de ce qu'il m'a apporté.

Je remercie profondément le professeur Dag Tjøstheim pour tous les conseils qu'il a pu me fournir. Le mois qu'il a passé au sein du laboratoire et le contact permanent que nous avons gardé après son départ, nous ont permis d'étoffer considérablement notre recherche.

Je remercie sincèrement les professeurs Jean-Marc Bardet et Guy Mélard pour leur travail de rapporteurs. Par leurs questions et remarques constructives, ils m'ont été d'une aide précieuse et m'ont permis d'améliorer de manière significative certaines parties de mon manuscrit.

J'aimerais également remercier les professeurs Jean-Marc Deshouillers, Christian Fraboul et Michel Harel pour avoir accepté de juger ces quelques années de travail en participant au jury de thèse.

J'adresse un remerciement particulier à Michel Doisy qui a su m'apporter une aide opportune et à Françoise Lizion pour sa confiante collaboration.

Je remercie en vrac : Stève ; Joël ; David pour ses histoires drôles ; Patrick pour ses soirées délirantes et sa bonne humeur constante ; Suparman pour m'avoir permis de découvrir une partie de sa culture indonésienne ; Caroline pour avoir amené dans le bureau un parfum de féminité ; Bastien et Valérie, Christian et Isa, Pascal et Olivia, pour me faire garder espoir d'une future vie à deux ; le rock et tous ses acolytes, Filou, Sophie, Catalina, Fréd, Caro, Agnès, Céline... pour m'avoir fait danser pendant des heures au rythme des Elvis Presley, Lou Bega et autres ; Çetin alias tonton pour ses assiettes kebab inégalables ; le foot et ses grands joueurs, Elie, Fabrice... pour me permettre de garder une certaine hygiène de vie ; le forum fctt et ses contributeurs aguerris pour leurs réponses rapides à mes questions pas toujours conventionnelles.

Evidemment, je ne peux pas oublier mon vis à vis du bureau, mon meilleur ennemi, celui qui m'a fait découvrir la musique reggae, ragga, rock alternatif et j'en passe... je veux bien sûr parler de Guillaume.

Ils savent combien ils comptent pour moi : maman, papa, Jacqueline, Fabiola, Rodolphe, Laetitia, Thierry, Cathy, Elie et Félicie.

Je tiens aussi à remercier mes chers cousins, Stéphane, Manu et les autres Céline, Yvan, Marjorine, avec qui j'ai pu m'aérer l'esprit par quelques soirées coïncidences-jeux vidéos-discussions et quelques journées aventures.

Je garde le meilleur pour la fin : ma douce et tendre Eva. Elle m'a redonné confiance au moment où j'en avais le plus besoin. Elle m'a permis de continuer ce travail sans jamais abandonner. Pour tout ça et bien plus encore, je ne la remercierai jamais assez.

J'ai sans aucun doute oublié d'autres personnes. Mais je suis persuadé qu'elles me pardonneront et je suis sûr qu'elles partageront avec moi ce moment d'euphorie tant attendu.

Table des matières

Introduction	1
I Lois stables	7
1 Lois stables univariées	7
1.1 Lois indéfiniment divisibles	7
1.2 Diverses propriétés	11
1.2.1 Densité	11
1.2.2 Stabilité	12
1.2.3 Queues lourdes	12
1.2.4 Calcul des moments	13
1.3 Algorithme de simulation	14
1.3.1 Première étape	14
1.3.2 Deuxième étape	15
1.3.3 Troisième étape	15
1.3.4 Quelques exemples	17
1.4 Statistiques sur les lois symétriques alpha-stables	18
1.4.1 Tests sur la variance	18
1.4.2 Estimations	22
2 Lois stables multivariées	24
2.1 Définition et propriétés	24
2.2 Covariation	30
2.2.1 Covariation pour un vecteur de dimension n	31
2.2.2 Pseudo-bilinéarité et indépendance	32
2.2.3 Norme	34
2.3 Coefficient de covariation	35
2.4 Codifférence	38
II Mesures de dépendance	41
1 Revealing some unexpected dependence properties of linear combinations of stable random variables using symmetric covariation	42
1.1 Introduction	42
1.2 Covariation and symmetric covariation	43
1.3 Some unexpected dependence properties of linear combinations of stable variables	46
1.4 A comparison of dependence measures	51

1.4.1	Other dependence measures	51
1.4.2	Simulations	52
	References	55
2	Compléments de l'article	55
2.1	Généralisation au cas où la dispersion de X_1 est différente de celle de X_2	55
2.2	Indépendance entre Y_1 et Y_2	58
2.3	Calcul de l'erreur quadratique	59
2.3.1	Coefficient de covariation	60
2.3.2	Coefficient de corrélation de Spearman	62
2.3.3	Coefficient de corrélation de Van der Waerden	62
2.4	Autres simulations	62
3	Etude asymptotique de l'estimateur du coefficient de covariation	65
3.1	Comportement asymptotique de l'estimateur	65
3.2	Intervalles de confiance	67
III Processus autorégressif symétrique alpha-stable d'ordre p		69
1	Introduction	70
2	Identification de l'ordre d'un AR	71
2.1	Autocorrélation et autocorrélation partielle	71
2.1.1	Rappels de la méthode d'identification dans le cas de variance finie	71
2.1.2	Traitement du cas stable	73
2.2	Autocovariation	74
2.3	Autocorrélation basée sur les rangs	80
2.3.1	Multiplicateur de Lagrange: introduction	80
2.3.2	Multiplicateur de Lagrange: approche classique	81
2.3.3	Multiplicateur de Lagrange: approche fondée sur les rangs	82
2.3.4	Traitement du cas alpha-stable	84
2.4	Comparaisons par simulation	95
3	Illustrations sur données réelles	99
3.1	Introduction	99
3.2	Stationnarité et variance infinie	99
3.3	Traitement des données	99
3.4	Comparaison avec les résultats de Gallagher	100
IV Fiabilité des systèmes: qualification des équipements d'aide à l'atterrissage		103
1	Test séquentiel: Niveau de confiance après acceptation	103
1.1	Introduction	104
1.2	Borne de confiance, niveau de confiance	104
1.3	Test séquentiel tronqué	106
1.4	Calcul d'un niveau de confiance après acceptation pour une loi exponentielle	109
1.4.1	Probabilités de continuation	110
1.4.2	Calcul des coefficients $c'(i, t'_{(k)})$	112
1.4.3	Borne inférieure de confiance	113
1.4.4	Niveau de confiance	113
1.5	Etude de cas	114

Références	118
2 Programme Matlab: note technique	119

Bibliographie	123
----------------------	------------

A Démonstration de la quatrième étape de la simulation d'une loi stable	129
--	------------

Liste des figures

1 Exemple de réseau Internet	3
I.1 Histogrammes normalisés de lois $S\alpha S$ pour différentes valeurs de α calculés sur 5000 réalisations.	19
I.2 Test graphique 1: variance empirique calculée pas à pas sur l'échantillon de 5000 réalisations d'une loi $S\alpha S$ pour différentes valeurs de α	20
I.3 Test graphique 2 calculé sur l'échantillon de 5000 réalisations d'une loi $S\alpha S$ pour différentes valeurs de α	21
II.1 Plot of 50 realizations of a bivariate $S\alpha S$ random vector with $\alpha = 1.5$. The theoretical regression line $\mathbb{E}(Y_1 Y_2)$ and $\mathbb{E}(Y_2 Y_1)$ are drawn in. This example comes from the system (II.4) with the following parameters: $\gamma_{X_1} = 3$; $\gamma_{X_2} = 2$; $a_1 = 2^{(4/3)}$; $a_2 = 1$; $a_3 = 1$; $a_4 = -3^{(4/3)}$	45
II.2 Histogram of 5000 symmetric coefficients of covariation for system (II.4) with different values of α . The a_i -s have been drawn independently from uniform distribution on $[-1, 1]$	50
III.1 Log-vraisemblances.	81
III.2 Densité d'une loi χ_1^2	86
III.3 Histogrammes normalisés de la statistique quadratique utilisée avec les fonctions scores de Van der Waerden pour différentes valeurs de α et calculée sur n réalisations.	87
III.4 Histogrammes normalisés de la statistique quadratique utilisée avec les fonctions scores de Wilcoxon pour différentes valeurs de α et calculée sur n réalisations.	89
III.5 Histogrammes normalisés de la statistique quadratique utilisée avec les fonctions scores de Spearman pour différentes valeurs de α et calculée sur n réalisations.	91
III.6 Histogrammes normalisés de la statistique quadratique utilisée avec les fonctions scores de Laplace pour différentes valeurs de α et calculée sur n réalisations.	93
III.7 AR(2): $X_t = -\frac{7}{6}X_{t-1} - \frac{1}{3}X_{t-2} + \varepsilon_t$, $n = 50$	96
III.8 AR(2): $X_t = -\frac{7}{6}X_{t-1} - \frac{1}{3}X_{t-2} + \varepsilon_t$, $n = 100$	96
III.9 AR(2): $X_t = 0.5X_{t-1} - 0.15X_{t-2} + \varepsilon_t$, $n = 50$	97
III.10 AR(2): $X_t = 0.5X_{t-1} - 0.15X_{t-2} + \varepsilon_t$, $n = 100$	97
III.11 AR(2): $X_t = -0.2X_{t-1} + 0.3X_{t-2} + \varepsilon_t$, $n = 50$	98
III.12 AR(2): $X_t = -0.2X_{t-1} + 0.3X_{t-2} + \varepsilon_t$, $n = 100$	98

III.13	Températures de la surface de la mer du 01/10/1988 au 05/05/1989	99
III.14	Tests sur la variance des données	100
III.15	Densité de la loi normale (en tirets) et estimation non paramétrique de la densité des résidus en supposant un modèle gaussien (en pointillés).	101
III.16	Densité de la loi α -stable (en tirets) et estimation non paramétrique de la densité des résidus en supposant le modèle α -stable (en pointillés).	101
III.17	Densité de la loi α -stable (en traits pleins) et estimation non paramétrique de la densité des résidus en supposant le modèle α -stable (en tirets).	102
IV.1	Lien entre paramètre et estimation	105
IV.2	Frontières du test séquentiel des rapports des probabilités.	109
IV.3	Etude des trajectoires	113
IV.4	Plan du test séquentiel pour un localiser de catégorie III avec $\theta_1 = 4000$ heures.	115
IV.5	Plan du test séquentiel pour un localiser de catégorie II avec $\theta_1 = 2000$ heures.	116
IV.6	Plan du test séquentiel pour un localiser de catégorie I avec $\theta_1 = 1000$ heures.	116
IV.7	Plan du test séquentiel pour un localiser de catégorie I avec $\theta_1 = 1000$ heures et un minimum de un an d'observation.	117
IV.8	Programme testplan: interface principale.	120
IV.9	Programme testplan: avec temps minimum.	120
IV.10	Programme testplan: borne inférieure de confiance.	121
IV.11	Programme testplan: troncature.	121

Liste des tableaux

I.1	Moyenne et variance empirique calculées sur 5000 réalisations	18
I.2	Valeurs optimales de K en fonction de n et de α	23
I.3	Estimations de α (première valeur de la cellule) et de γ (seconde valeur de la cellule).	24
II.1	Theoretical and estimated values of dependence measures, and rank-based coefficients of correlation for different sets of a_1, a_2, a_3, a_4	54
II.2	Valeurs théoriques et estimées des covariations et des coefficients de corrélation basés sur les rangs pour: $a_1 = 1; a_2 = 1; a_3 = -1; a_4 = -0,8$	63
II.3	Valeurs théoriques et estimées des covariations et des coefficients de corrélation basés sur les rangs pour: $a_1 = 0,28; a_2 = -0,9; a_3 = 0,46; a_4 = 0,95$	63
II.4	Valeurs théoriques et estimées des covariations et des coefficients de corrélation basés sur les rangs pour: $a_1 = 0,99; a_2 = 0,82; a_3 = 0,55; a_4 = 0,80$	64
II.5	Valeurs théoriques et estimées des covariations et des coefficients de corrélation basés sur les rangs pour: $a_1 = -0,84; a_2 = 0,51; a_3 = -0,91; a_4 = -0,06$	64
III.1	Quantiles de la loi de $\sqrt{n}T_n$ sous H_0	85
III.2	Tests d'adéquation pour la statistique de rang Van der Waerden (rappel: 0 pour l'hypothèse H_0 ou 1 pour l'hypothèse H_1).	88
III.3	Tests d'adéquation pour la statistique de rang Wilcoxon (rappel: 0 pour l'hypothèse H_0 ou 1 pour l'hypothèse H_1).	90

III.4 Tests d'adéquation pour la statistique de rang Spearman (rappel: 0 pour l'hypothèse H_0 ou 1 pour l'hypothèse H_1).	92
III.5 Tests d'adéquation pour la statistique de rang Laplace (rappel: 0 pour l'hypothèse H_0 ou 1 pour l'hypothèse H_1).	94
III.6 Calcul de la racine carré des statistiques quadratiques asymptotiquement invariantes sur les données réelles	100
IV.1 Temps réel, en heures, de bon fonctionnement entre deux outages	114

Introduction

En statistique, une des lois les plus utilisées est la loi gaussienne. Ses différentes propriétés, comme la stabilité, le fait que deux paramètres (moyenne et variance) suffisent à la caractériser ou bien encore le théorème de la limite centrale font que cette loi s'adapte bien dans de nombreuses situations. Parmi ces situations, il y a le domaine des séries chronologiques et plus précisément, les modèles autorégressifs à moyenne mobile. Brockwell et Davis (1991) donnent clairement les bases de cette théorie et supposent dans un premier temps que les résidus sont un bruit blanc (c'est-à-dire un processus stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocovariance $\gamma(h)$ nulle pour tout $h > 0$). Par commodité, l'hypothèse de bruit blanc est souvent remplacée par l'hypothèse d'un bruit blanc gaussien (c'est-à-dire un processus indépendant identiquement distribué suivant une loi normale centrée et de variance σ^2). Bien que les calculs (d'estimation, de prévision, ...) soient rapides avec cette nouvelle hypothèse, on se rend compte qu'elle est trop restrictive en particulier dans certains domaines tels que la finance ou les télécommunications pour lesquels il faut prendre en compte une plus grande variabilité des données.

Dans le domaine de la finance, cette variabilité prend toute son ampleur. En effet, si l'on regarde les graphiques boursiers représentant l'évolution du prix d'un titre au cours du temps, des périodes hautes succèdent à des périodes basses qui succèdent à des périodes hautes et ainsi de suite. De plus, dans chaque palier (haut ou bas), on retrouve ces périodes irrégulières. Dans les années 30, Elliott (1938) propose la théorie dite des «vagues d'Elliott». Cette théorie trop subjective reste inexploitée et le problème d'irrégularité des variations boursières doit attendre les fractales de Mandelbrot pour espérer être résolu. Dans les années 60, Mandelbrot étudie ces fluctuations boursières, pour lesquelles il était tout-à-fait clair que le modèle gaussien ne convenait pas. Il s'appuie alors sur les lois de Pareto pour mettre en évidence un nouveau modèle de variation des prix, appelé «lois α -stables». Le paramètre α , compris entre 0 et 2, représente l'exposant caractéristique des lois stables et lorsque celui-ci est strictement inférieur à 2, la *variance* de la loi stable est *infinie*. Bien qu'une certaine réticence persistât à propos de l'utilisation de ces modèles en finance, la théorie de ces lois à variance infinie s'est développée petit à petit. Mandelbrot (1963) confirme que son modèle décrit de façon réaliste la variation des prix pratiqués sur certaines bourses des valeurs. Fama (1965) va valider le modèle précédent sur le prix du marché des actions. Quelques années plus tard, Fama et Roll (1968) donnent les premières tabulations des lois symétriques α -stables ($S\alpha S$), ce qui va permettre de concevoir les premiers estimateurs de ces lois.

Pendant les 20 années suivantes, le travail théorique a porté plus précisément sur l'estimation du paramètre α . En effet, c'est le paramètre le plus controversé car c'est lui qui

indique si la variance est infinie ou non. Il semble donc primordial de pouvoir l'estimer de la manière la plus correcte qui soit. En 1971, Fama et Roll ont utilisé les propriétés relatives aux quantiles. C'est grâce à ces travaux que l'on voit apparaître les premiers tests du modèle iid α -stable. De nouvelles méthodes d'estimation utilisant la forme de la fonction caractéristique vont apparaître dans les années 80 : citons celle de Koutrouvelis (1980) qui semble être la meilleure méthode selon plusieurs études faites par Akgiray et Lamoureux (1989) et Walter (1994).

A la fin des années 80, un grand nombre de travaux semblent rejeter le modèle iid α -stable en finance. Même Fama préfère utiliser une distribution normale pour les variations des prix. On se tourne alors vers le deuxième pivot de la modélisation financière : l'hypothèse d'indépendance des rentabilités successives. Cette hypothèse étant remise en question, on cherche une forme de dépendance entre les rentabilités. Mais cela ne donne aucun résultat. On s'intéresse alors au processus des volatilités, avec la formalisation d'une mémoire courte sur les volatilités, démarche qui a conduit à la modélisation ARCH, puis avec la mise en évidence de mémoire longue sur les volatilités (ou dépendance longue), à la redécouverte des lois d'échelles en finance. Notons toutefois que même si le modèle iid α -stable semble inadapté, il représente un bon compromis entre puissance de modélisation et coût statistique de l'estimation.

Un autre domaine allait offrir un nouveau champ d'application aux lois stables : Internet. Dans le domaine des télécommunications, les travaux effectués sont beaucoup plus récents. En effet, la mise en réseau d'ordinateurs ne voit le jour qu'en 1973 et il faut attendre mars 1989 pour la vraie naissance du World Wide Web. En 1990, l'ancien réseau (ARPAnet) prend le nom d'Internet. En mars 1993, le Web représente 0,1% du trafic sur l'Internet. En septembre de la même année, il représente 1% du trafic. En novembre 1994, il représente 10% du trafic. En avril 1995, le Web représente 20% du trafic. A la fin de 1996, le Web génère alors plus de trafic sur l'Internet que tout autre application. D'un côté, ce trafic, engendré chaque jour par le Web, est en constante progression, tant au niveau du pourcentage de trafic sur l'Internet qu'au niveau du nombre de connectés (et de connections). De l'autre côté, les moyens mis en oeuvre pour assurer ce trafic (pose de fibres optiques, ADSL pour tous,...) n'arrivent pas à assurer de manière correcte le trafic engendré chaque jour. Pour bien comprendre le problème qui va se poser, il faut d'abord comprendre comment le Web fonctionne. La figure 1 nous montre de manière un peu simplifiée l'allure d'un réseau global. Ce qu'il faut retenir, c'est que pour qu'un fichier aille d'un ordinateur A (qu'il soit client ou serveur), à gauche sur la figure, à un ordinateur B , à droite sur la figure, il peut passer par une multitude de chemins. C'est pourquoi le temps d'apparition d'une page peut être plus ou moins long. Par conséquent, lorsqu'on observe par exemple la courbe du temps d'apparition d'une page web, celle-ci indique une forte variabilité qui rappelle certains modèles à variance infinie. A ce sujet, Adler et al. (1998b) donnent divers exemples d'application des lois à queues lourdes. L'ensemble des travaux faits en finance peut donc être repris afin d'être appliqués dans le domaine des télécommunications.

En dépit de l'intérêt que suscitent les lois α -stables en télécommunications ou en finance et de la théorie qui s'est développée depuis une quarantaine d'années, il reste bien des choses à faire surtout en ce qui concerne le cas multivarié. Notre travail de recherche s'est alors axé

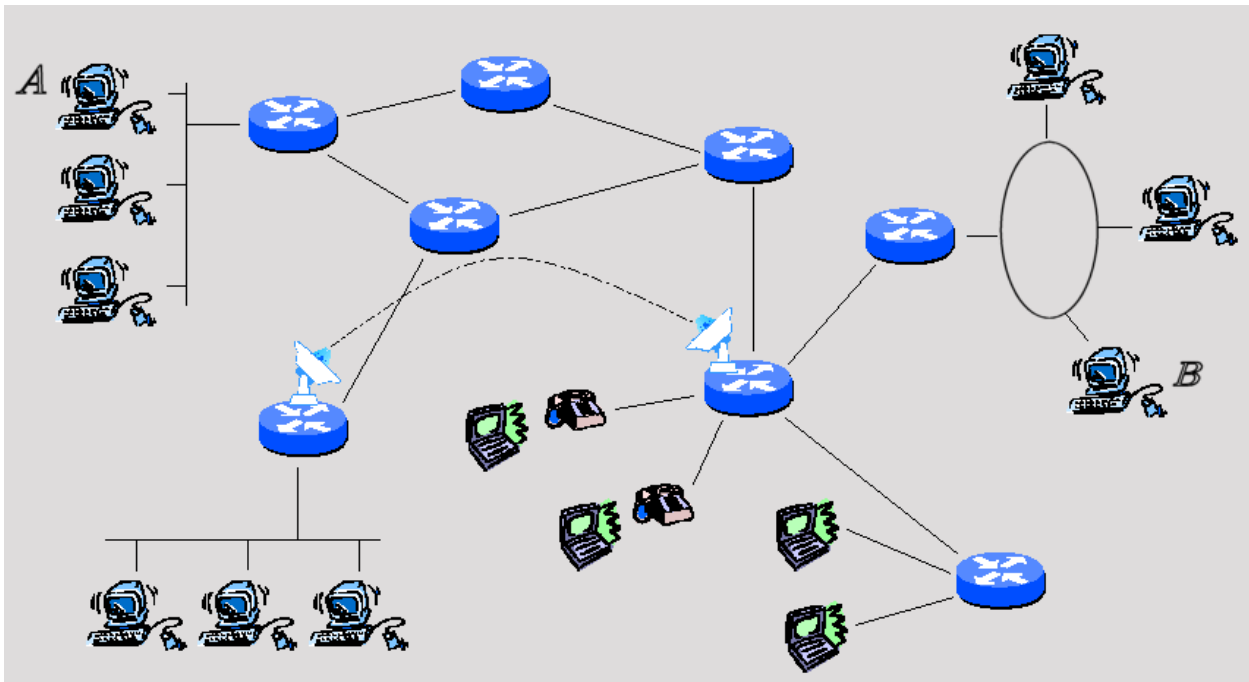


FIG. 1 – Exemple de réseau Internet

dans deux directions : l'une sur les mesures de dépendance pour les lois $S\alpha S$, l'autre sur l'identification de l'ordre d'un processus AR stable.

Le premier chapitre présente les lois stables. Nous rappelons les propriétés de ces lois dans le cas univarié et nous explicitons le calcul des moments et la simulation. Puis nous abordons les vecteurs $S\alpha S$. Dans cette partie, nous introduisons la mesure spectrale, qui joue un rôle important, en particulier pour la caractérisation de l'indépendance. Nous définissons ensuite la covariation introduite par Miller (1978), quantité qui s'apparente à une covariance et qui a permis d'aboutir à une nouvelle mesure de dépendance.

La mesure de dépendance classiquement utilisée dans le cas de variance finie est le coefficient de corrélation. Lorsque la variance est infinie, le coefficient de corrélation n'existe plus. Plusieurs possibilités sont alors envisageables : essayer d'adapter des mesures existantes ou construire d'autres mesures. A partir de la covariation, on obtient facilement le coefficient de covariation. Actuellement, ce coefficient est la mesure de dépendance la plus largement utilisée dans le cas $S\alpha S$. Toutefois, elle possède certains désavantages : elle n'est ni symétrique ni bornée. Par conséquent, l'interprétation d'une telle mesure devient compliquée. C'est aussi dans cette partie que nous parlons de la codifférence.

Dans **le deuxième chapitre**, nous abordons de façon plus large les mesures de dépendance pouvant être utilisées dans le cas $S\alpha S$. Des mesures non paramétriques peuvent être envisagées. Les résultats non paramétriques de Devroye et Györfi (1985) et de Tjøstheim (1996), qui supposent tous les deux disposer d'une densité, permettent de fournir quelques réponses. Seulement, comme nous l'avons vu, même si nous savons que la densité existe, le

fait que sa forme ne soit pas explicite pose certains problèmes d'application et d'implémentation de leurs méthodes.

En revanche, les mesures de dépendance basées sur les rangs se manipulent facilement. L'ouvrage «Inférence non paramétrique : Les statistiques de rangs», édité par Dreesbeke et Fine (1996), constitue une bonne introduction aux statistiques de rang en tant que mesures de dépendance et statistiques de test d'indépendance. Nous présentons le rho de Spearman et le rho de van der Waerden, ainsi que les résultats asymptotiques qui permettent de les utiliser.

Pour corriger certaines faiblesses du coefficient de covariation, nous avons introduit une nouvelle mesure : le coefficient de covariation symétrique. Nous pensons que ce nouveau coefficient est plus facile à interpréter et donc peut donner rapidement des informations supplémentaires sur les données. Il nous a permis en particulier de mettre en évidence des bizarreries spécifiques aux couples α -stables : la dépendance de X_2 sur X_1 peut être positive alors que celle de X_1 sur X_2 peut être négative. On ne rencontre bien sûr jamais ce phénomène dans le cas gaussien.

Afin de pouvoir comparer les mesures de dépendance ainsi définies, nous utilisons un vecteur bivarié dont chaque composante est une combinaison linéaire de deux variables aléatoires $S\alpha S$ indépendantes, c'est-à-dire $Y_1 = a_1X_1 + a_2X_2$, $Y_2 = a_3X_1 + a_4X_2$. Le choix d'une combinaison linéaire s'est fait pour plusieurs raisons.

- La simplicité des simulations : nous savons générer des lois $S\alpha S$ univariées (cf chapitre I). Il est donc facile de simuler notre système.
- La présence d'une dépendance : dans le cas gaussien, il est facile de voir que Y_1 et Y_2 sont indépendantes si $a_1a_3 \text{Var}(X_1) + a_2a_4 \text{Var}(X_2) = 0$. Pour le cas α -stable, certains résultats similaires ont été montrés.
- La possibilité de calculer la valeur théorique associée à certaines mesures de dépendance. Le fait de prendre un système linéaire nous permet de faire d'une pierre deux coups puisque d'un côté, on calcule facilement les valeurs théoriques des mesures de dépendance comme le coefficient de covariation et de l'autre, on vérifie que les estimateurs choisis pour ces mesures sont «bons».

Enfin, pour aller plus loin dans l'étude de ces mesures de dépendance et de leurs estimateurs associés, l'étude asymptotique de ces estimateurs s'est avérée nécessaire. Nous les avons étudiés dans le cas de l'indépendance. Ne l'ayant trouvé dans aucun ouvrage, nous avons démontré que l'estimateur du coefficient de covariation converge en loi vers une loi $S\alpha S$. Dans ce résultat, une chose est importante : le coefficient de normalisation ($n^{1-1/\alpha}$) qui donne une continuité avec le résultat dans le cas gaussien (on retrouve $\sqrt{n}$). En ce qui concerne le coefficient de covariation symétrique, plusieurs pistes théoriques ont été envisagées : le produit de deux variables aléatoires qui convergent presque-sûrement ou dans L^1 , la transformée de Mellin. Toutefois, même si cette dernière nous a permis de pousser nos investigations, l'ensemble de ces tentatives a été infructueux.

Dans le **troisième chapitre**, nous abordons le problème d'identification des processus AR à innovations stables. Le modèle s'écrit :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t ,$$

où les $\{\varepsilon_t\}$ sont un processus de type bruit blanc $S\alpha S$. En supposant le processus causal, on peut l'écrire sous la forme :

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} .$$

L'identification de l'ordre d'un AR à variance finie se fait à l'aide de la fonction d'autocorrélation partielle. Dans le cas de variance infinie, cette quantité ne s'utilise pas aussi simplement. Comme pour les mesures de dépendance pour les variables aléatoires réelles, nous avons alors deux possibilités : utiliser les outils déjà existants et tenter de les adapter au cas $S\alpha S$ ou bien construire de nouveaux outils.

Le principal écueil de l'extension de l'autocorrélation partielle au cas $S\alpha S$ provient du fait que les résultats asymptotiques dépendent explicitement de la valeur de α , en général inconnue.

La covariation en série chronologique s'appelle l'autocovariation et dans les années 2000, Gallagher utilise cette fonction pour estimer les paramètres de l'AR. En fournissant un résultat asymptotique sur les estimateurs, il développe une technique pour identifier l'ordre de l'AR.

Toutefois, les deux méthodes présentées ci-dessus comportent quelques inconvénients, dus à deux choses : l'estimation du α d'une part et le calcul des ψ_j , lorsque l'ordre de l'AR est plus grand que 1 d'autre part. Pour tenter de résoudre ce problème, nous proposons d'utiliser les statistiques de rang.

L'idée de cette méthode consiste à remplacer les autocorrélations par des autocorrélations basées sur les rangs. Si les résidus estimés étaient égaux aux vrais résidus, la distribution des autocorrélations partielles basées sur les rangs ne dépendrait pas de la loi du bruit blanc. Mais ce n'est en général pas le cas puisque les résidus sont calculés en ajustant un modèle $AR(k)$ (cf Garel et Hallin (2000)). Les autocorrélations partielles basées sur les rangs des résidus estimés perdent toutes les propriétés intéressantes de statistiques non paramétriques. C'est pourquoi, s'inspirant de la statistique de test du multiplicateur de Lagrange, Hallin et Puri (1994) ont introduit des statistiques quadratiques asymptotiquement invariantes qui permettent de tester un $AR(k-1)$ contre un $AR(k)$. Leur distribution asymptotique est alors un χ_1^2 . Ce résultat a été obtenu sous l'hypothèse d'une variance finie.

Nous avons vérifié dans quelle mesure ce résultat restait vrai dans le cas $S\alpha S$, puis nous avons utilisé ces statistiques pour l'identification des AR. Nous concluons le chapitre 3 par la mise en pratique des méthodes ci-dessus et leur comparaison.

Enfin, **le chapitre 4** concerne les tests séquentiels tronqués. Il fait suite à deux contrats de recherche pour les Services Techniques de la Navigation Aérienne (S.T.N.A.). Ce contrat nous a permis de financer une partie de notre recherche et de développer un concept jusqu'à assez obscur : le niveau de confiance après test. Dans la première partie du chapitre, nous introduisons cette notion et appliquons cette théorie dans le cadre de la qualification d'appareils d'atterrissage ou Instrument Landing System (ILS) au moyen de tests séquentiels tronqués. Une fois le test effectué et, quelle que soit la réponse du test, se pose aux ingénieurs le problème de savoir ce qu'ils vont faire des appareils testés. Nous pensons que la notion

que nous mettons en évidence, de niveau de confiance après test, peut les aider à prendre cette décision.

Dans la seconde partie du chapitre 4, nous donnons une note technique sur l'utilisation du programme Matlab que nous avons écrit dans le cadre du contrat ci-dessus et dont le but est de construire des plans de tests séquentiels tronqués.

De la statistique à variance infinie à la théorie des tests séquentiels tronqués avec temps minimum d'observation, nous avons souhaité explorer des domaines moins connus des praticiens mais qui peuvent encore révéler des spécificités théoriques intéressantes et trouver des applications nouvelles.

Chapitre I

Lois stables

Lorsque nous faisons du traitement de données, en particulier pour les séries chronologiques, il nous arrive fréquemment d'utiliser la variance empirique. Comme le nombre d'observations est fini, cette variance est évidemment finie. Il semble alors logique d'employer des méthodes, de proposer des modèles, de faire des estimations utilisant une variance finie. Dans certains cas cependant, la variance empirique est très grande. La question se pose alors de savoir si la variance théorique est finie ou infinie.

Dans le cadre des distributions à variance infinie sont apparues les lois alpha-stables, dont le moment d'ordre 2 est infini dès que α est strictement inférieur à 2. Ces lois sont utilisées dans de nombreux domaines tels que la télécommunication (voir Bestavros et al. (1998)), la finance (voir Bassi et al. (1998)),...

Plusieurs livres sont consacrés à ces lois : Zolotarev (1986) qui a étudié les lois alpha-stables dans le contexte univarié ; Samorodnitsky et Taqqu (1994) qui ont étudié de manière approfondie beaucoup de propriétés de ces lois dans le cas univarié comme dans le cas multivarié ; Nikias et Shao (1995) qui ont appliqué ces lois dans le domaine du traitement du signal, pour n'en citer que trois (c'est dans ces livres que la plupart des résultats de ce premier chapitre sont démontrés).

Dans une première partie, le cas univarié est traité. Les lois sont définies et diverses propriétés sont présentées. Puis, sont abordés le problème du test d'une variance finie ou infinie ainsi que l'estimation des deux paramètres caractérisant une loi symétrique alpha-stable.

Dans une seconde partie, le cas multivarié est traité. En particulier, certaines quantités telles que la covariation, le coefficient de covariation et la codifférence sont introduites ainsi que leurs propriétés.

1 Lois stables univariées

1.1 Lois indéfiniment divisibles

Avant de définir les lois α -stables, nous allons introduire une famille de lois plus générale : les lois indéfiniment divisibles. C'est à partir de ces lois que sera précisée la forme de la

fonction caractéristique des lois stables.

L'intérêt principal de telles lois réside dans la solution du problème suivant : comment détermine-t-on toutes les distributions qui s'expriment comme limite d'une somme de n variables aléatoires réelles (V.A.R.) indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) ?

Intuitivement, si une suite de V.A.R. T_n converge en loi vers une V.A.R. T et que ces T_n s'expriment comme une somme de n V.A.R. indépendantes de même loi, alors T va aussi s'exprimer de la même manière. Introduisons alors la définition suivante.

Définition 1 Une V.A.R. X a une distribution *indéfiniment divisible* si et seulement si

$$\forall n, \exists X_1, \dots, X_n \text{ indépendantes et de même loi telles que} \\ X \stackrel{d}{=} X_1 + \dots + X_n \quad .^1$$

Remarque 1 Les V.A.R. X_i n'ont pas même loi que X . En revanche, comme nous verrons dans les exemples suivants, elles appartiennent à la même famille de loi.

Cette classe de V.A.R. permet de résoudre notre problème. En effet, on a le théorème suivant.

Théorème 1 Une V.A.R. X est la limite d'une somme de n V.A.R. i.i.d. si et seulement si X est indéfiniment divisible.

La démonstration est détaillée dans Shiriyayev (1984, pages 336).

Remarque 2 Une des caractérisations des lois indéfiniment divisibles est que leur fonction caractéristique peut s'écrire comme puissance $n^{\text{ème}}$ d'une autre fonction caractéristique.

Théorème 2 (LEVY-KHINCHIN) Si X a une distribution indéfiniment divisible, alors sa fonction caractéristique s'écrit

$$\varphi_X(t) = \exp \left\{ i\mu t + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1 - it \sin x}{x^2} M(dx) \right\} \quad ,$$

où μ est un réel et M est une mesure qui attribue une masse finie à tout intervalle fini et telle que les deux intégrales suivantes

$$M^+(x) = \int_x^{+\infty} y^{-2} M(dy) \quad \text{et} \quad M^-(-x) = \int_{-\infty}^{-x} y^{-2} M(dy)$$

sont convergentes pour tout $x > 0$.

La démonstration est détaillée dans Feller (1971, pages 554–565).

¹ $\stackrel{d}{=}$: égal en distribution.

Exemples 1 Beaucoup de lois connues sont indéfiniment divisibles. Si une V.A.R. X suit :

- la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$: sa fonction caractéristique s'écrit

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \exp \left\{ imt - \frac{t^2 \sigma^2}{2} \right\} \\ &= \left[\exp \left\{ i \frac{m}{n} t - \frac{t^2 \frac{\sigma^2}{n}}{2} \right\} \right]^n\end{aligned}$$

comme puissance $n^{\text{ème}}$ de la fonction caractéristique d'une loi normale $\mathcal{N}(\frac{m}{n}, \frac{\sigma^2}{n})$.

- la loi de Cauchy $\mathcal{C}(c)$: sa fonction caractéristique s'écrit

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \exp(-c|t|) \\ &= \left[\exp\left(-\frac{c}{n}|t|\right) \right]^n\end{aligned}$$

comme puissance $n^{\text{ème}}$ de la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy $\mathcal{C}(\frac{c}{n})$.

- la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$: sa fonction caractéristique s'écrit

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \exp \{ \lambda (e^{it} - 1) \} \\ &= \left[\exp \left\{ \frac{\lambda}{n} (e^{it} - 1) \right\} \right]^n\end{aligned}$$

comme puissance $n^{\text{ème}}$ de la fonction caractéristique d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\frac{\lambda}{n})$.

- la loi Gamma $\Gamma(r, \lambda)$: sa fonction caractéristique s'écrit

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \frac{1}{\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^r} \\ &= \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{\frac{r}{n}}} \right)^n\end{aligned}$$

comme puissance $n^{\text{ème}}$ de la fonction caractéristique d'une loi Gamma $\Gamma(\frac{r}{n}, \lambda)$.

Il en va de même pour la loi exponentielle (égale à $\Gamma(1, \lambda)$) et la loi du χ_m^2 (égale à $\Gamma(\frac{m}{2}, \frac{1}{2})$).

- *contre exemples* :

- une loi à support borné (hormis la dirac en un point !) n'est pas indéfiniment divisible,
- un mélange fini de lois normales n'est pas indéfiniment divisible.

Pour se rapprocher du théorème de la limite centrale et afin d'avoir une forme explicite de la fonction caractéristique, nous allons définir une famille de lois dont les propriétés seront intéressantes.

Définition 2 Une V.A.R. X a une distribution *stable* si et seulement si pour tout k et toute famille $X_1, \dots, X_k$ i.i.d. de même loi que X , il existe $a_k > 0$ et b_k , deux réels, tels que

$$X_1 + \dots + X_k \stackrel{d}{=} a_k X + b_k \quad .$$

Lorsque $b_k = 0$, on parle de distribution *strictement stable*.

Remarque 3 On peut montrer qu'il existe une constante α , $0 < \alpha \leq 2$, telle que $a_k = k^{1/\alpha}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. La démonstration est détaillée dans Feller (1971, pages 170-171).

Proposition 1 Si X est stable, X est indéfiniment divisible.

La réciproque est fautive (voir dans l'exemple 2, ci-dessous, la loi de Poisson).

Preuve de la proposition 1

Il suffit de prendre des V.A.R. $Y_j = \frac{X_j - \frac{b_n}{n}}{a_n}$, $j = 1, \dots, n$.

Comme les X_j sont indépendantes, les Y_j sont aussi indépendantes et

$$Y_1 + \dots + Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{a_n} - \frac{b_n}{a_n}.$$

Or $X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} a_n X + b_n$, d'où $Y_1 + \dots + Y_n \stackrel{d}{=} X$.

■

Théorème 3 Une V.A.R. X est la limite en distribution des V.A.R. $\frac{(X_1 + \dots + X_n - b_n)}{a_n}$, $a_n > 0$, si et seulement si X est stable.

La démonstration est détaillée dans Shirayev (1984, pages 338-339).

Corollaire 1 (Levy-Khinchin) Si X a une distribution stable, alors sa fonction caractéristique s'écrit :

- si $\alpha = 1$, $\varphi_X(t) = \exp \left\{ i\mu t - \gamma |t| \left[1 + i\beta \operatorname{sign}(t) \frac{2}{\pi} \ln |t| \right] \right\}$,
- si $\alpha \neq 1$, $\varphi_X(t) = \exp \left\{ i\mu t - \gamma |t|^\alpha \left[1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right] \right\}$.

La démonstration est détaillée dans Gnedenko et Kolmogorov (1968).

Une loi stable est définie par quatre paramètres :

- α : paramètre principal, $0 < \alpha \leq 2$. Il caractérise les queues de distribution. Plus α diminue, plus les queues sont lourdes. C'est pourquoi on parle aussi de lois α -stables ;
- μ : paramètre de position. Il caractérise la moyenne de la loi (lorsque $\alpha > 1$) ;
- γ : paramètre de dispersion. Par exemple, c'est la moitié de la variance dans le cas où $\alpha = 2$. On utilise également la notation γ_X pour le paramètre de dispersion associé à la variable aléatoire X ;
- β : paramètre de symétrie, $-1 \leq \beta \leq 1$. ATTENTION : il ne faut pas confondre symétrie et symétrique par rapport à 0. Si $\beta = 0$, la loi est symétrique par rapport au paramètre μ . Si de plus, $\mu = 0$, la loi est dite symétrique α -stable, de fonction caractéristique $\varphi_X(t) = \exp \{-\gamma |t|^\alpha\}$.

Par convention, $S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$ représentera une loi stable de paramètres $\alpha, \mu, \gamma, \beta$ et $S_\alpha S(\gamma)$ une loi symétrique alpha-stable de paramètre γ . Enfin, il est assez courant dans la littérature de définir la fonction caractéristique de cette loi par $\varphi_X(t) = \exp\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha\}$.

Exemples 2 Là aussi, certaines des lois connues appartiennent à cette classe.

- la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est une loi $S_2(m, \beta, \frac{\sigma^2}{2})$ (et réciproquement une loi $S_2(\mu, \beta, \gamma)$ est une loi normale $\mathcal{N}(\mu, 2\gamma)$),
- la loi de Cauchy généralisée de densité $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x - m)^2}$ est une loi $S_1(m, 0, \sigma)$,
- la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ n'est pas stable.

Preuve

En effet, soient X_1 et X_2 deux V.A.R. suivant une loi de Poisson. Supposons que X_1 et X_2 sont stables, alors il existe $a > 0$ et b tels que

$$X_1 + X_2 \stackrel{d}{=} aX_1 + b.$$

Par égalité des moyennes et des variances, nous pouvons voir que

$$\begin{cases} 2\lambda = a\lambda + b \\ 2\lambda = a^2\lambda \end{cases} \implies \begin{cases} b = (2 - \sqrt{2})\lambda \\ a = \sqrt{2} \end{cases},$$

ce qui entraîne une contradiction car $X_1 + X_2$ a ses valeurs uniquement dans $\mathbb{N}$ alors que $\sqrt{2}X_1 + (2 - \sqrt{2})\lambda$ n'a pas que des valeurs dans $\mathbb{N}$.

■

1.2 Diverses propriétés

Dans cette partie, quelques propriétés des lois α -stables seront présentées ; en particulier, celles du calcul des moments et de la simulation,...

1.2.1 Densité

Pour la plupart des lois connues, nous avons une forme explicite de la densité (normale, Cauchy, gamma,...). Pour la loi α -stable, nous n'avons que la forme explicite de la fonction caractéristique. A l'aide de la transformée inverse de la fonction caractéristique, donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itx) \varphi_X(t) dt,$$

nous pouvons obtenir f sous la forme d'une intégrale

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-t^\alpha) \cos[xt + \beta t^\alpha w(t, \alpha)] dt.$$

1.2.2 Stabilité

Propriété 1 Pour $\alpha \neq 1$, nous avons l'équivalence suivante

$$X \text{ suit une loi } S_\alpha(\mu, \beta, \gamma) \iff Y = \frac{X - \mu}{\gamma^{1/\alpha}} \text{ suit une loi } S_\alpha(0, \beta, 1).$$

Preuve de la propriété 1

Tout d'abord, remarquons que $\varphi_{mX+p}(t) = \mathbb{E}[e^{it(mX+p)}] = e^{itp} \varphi_X(mt)$.

Condition nécessaire : prenons $m = \frac{1}{\gamma^{1/\alpha}}$ et $p = -\frac{\mu}{\gamma^{1/\alpha}}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \exp\left(-\frac{i\mu t}{\gamma^{1/\alpha}}\right) \varphi_X\left(\frac{t}{\gamma^{1/\alpha}}\right) \\ \varphi_Y(t) &= \exp\left(-\frac{i\mu t}{\gamma^{1/\alpha}}\right) \exp\left\{\frac{i\mu t}{\gamma^{1/\alpha}} - \gamma \left|\frac{t}{\gamma^{1/\alpha}}\right|^\alpha \left[1 - i\beta \operatorname{sign}\left(\frac{t}{\gamma^{1/\alpha}}\right) \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right]\right\} \end{aligned}$$

Or $\operatorname{sign}\left(\frac{t}{\gamma^{1/\alpha}}\right) = \operatorname{sign}(t)$ car $\gamma > 0$, donc $\varphi_Y(t) = \exp\{-|t|^\alpha [1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \frac{\alpha\pi}{2}]\}$, qui est bien la forme de la fonction caractéristique d'une loi $S_\alpha(0, \beta, 1)$.

Condition suffisante : la démonstration est similaire à la condition nécessaire en prenant $m = \gamma^{1/\alpha}$ et $p = \mu$. ■

Remarque 4 Pour la simulation (qui sera présentée plus loin, page 14), il suffit de générer des lois $S_\alpha(0, \beta, 1)$ et par changement de variables, nous pouvons obtenir des lois $S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$.

1.2.3 Queues lourdes

Propriété 2 Soit X une V.A.R. $S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$, on a les deux résultats suivants

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \mathbb{P}(X > t) = \gamma C(\alpha)^{\frac{1+\beta}{2}}, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \mathbb{P}(X < -t) = \gamma C(\alpha)^{\frac{1-\beta}{2}}, \end{cases}$$

$$\text{où } C(\alpha) = \left(\int_0^{+\infty} x^{-\alpha} \sin x \, dx \right)^{-1}.$$

La démonstration est détaillée dans Samorodnitsky et Taqqu (1994, pages 16–18).

Remarque 5 L'égalité précédente nous fait penser à la caractérisation des lois de Pareto. En effet, une V.A.R. suit une loi du type Pareto si :

$$\mathbb{P}(X \geq x) = x^{-\alpha} h(x),$$

où $h(x)$ est une fonction à variation lente, c'est-à-dire pour tout $t > 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = 1$.

Mandelbrot (1962) a montré que pour les lois α -stables, nous avons

$$\mathbb{P}(X \geq x) = x^{-\alpha} [f_1(\alpha) + f_2(\alpha) x^{-\alpha} + o(x^{-2\alpha})].$$

Par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$, on s'aperçoit que les lois stables sont asymptotiquement parétiennes.

1.2.4 Calcul des moments

Propriété 3 Si X suit une loi $S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$, alors

1. Si $\alpha = 2$, $\forall p$, $\mathbb{E}|X|^p < +\infty$,
2. Si $0 < \alpha < 2$, $\begin{cases} \forall 0 \leq p < \alpha, \mathbb{E}|X|^p < +\infty, \\ \forall p \geq \alpha, \mathbb{E}|X|^p = +\infty. \end{cases}$

Preuve de la propriété 3

En fait pour la première partie de la propriété 3, nous avons vu dans l'exemple 2 que le cas $\alpha = 2$ correspond au cas gaussien. Et nous savons que les variables aléatoires gaussiennes ont toutes leurs moments finis.

Pour la seconde partie de la propriété 3, remarquons tout d'abord que pour toute V.A.R. positive et intégrable, on a

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y > v) dv.$$

En posant $Y = |X|^p$ et $v = u^p$, nous avons

$$\mathbb{E}(|X|^p) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|X|^p > u^p) pu^{p-1} du \quad (\text{I.1})$$

$$\text{Or } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^{p-1} \mathbb{P}(|X| > u)}{u^{p-1}} = \lim_{u \rightarrow 0} \mathbb{P}(|X| > u) = 1, \text{ donc}$$

$$u^{p-1} \mathbb{P}(|X| > u) \underset{0}{\sim} u^{p-1}$$

$$\text{et } \int_0^M u^{p-1} \mathbb{P}(|X| > u) du < +\infty \Leftrightarrow \int_0^M u^{p-1} du < +\infty \Leftrightarrow p > 0.$$

$$\text{Or } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^{p-1} \mathbb{P}(|X| > u)}{u^{p-\alpha-1}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^\alpha \mathbb{P}(|X| > u) = \gamma C(\alpha), \text{ donc}$$

$$u^{p-1} \mathbb{P}(|X| > u) \underset{+\infty}{\sim} u^{p-\alpha-1}$$

$$\text{et } \int_M^{+\infty} u^{p-1} \mathbb{P}(|X| > u) du < +\infty \Leftrightarrow \int_M^{+\infty} u^{p-\alpha-1} du < +\infty \Leftrightarrow p < \alpha.$$

Conclusion : d'après (I.1), il est facile de voir que $\mathbb{E}|X|^p < +\infty$

$$\text{lorsque } \begin{cases} \int_0^M u^{p-1} \mathbb{P}(|X| > u) du < +\infty \\ \int_M^{+\infty} u^{p-1} \mathbb{P}(|X| > u) du < +\infty \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire lorsque } 0 < p < \alpha.$$

■

Remarques 6

1. Dès que α est strictement inférieur à 2, la variance d'une loi α -stable est infinie. Dès que α est strictement inférieur à 1, c'est la moyenne qui devient infinie.

2. Si α est plus grand que 1, la moyenne d'une loi α -stable est μ .

Preuve

Nous savons que $\varphi'_X(0) = i \mathbb{E}(X)$.

Or nous savons aussi que $\varphi_X(t) = \exp \{i\mu t - \gamma |t|^\alpha g(\text{sign}(t))\}$ où

$$g(\text{sign}(t)) = 1 - i\beta \text{sign}(t) \tan \frac{\alpha\pi}{2}$$

et donc que

$$\varphi'_X(t) = (i\mu - \gamma \text{sign}(t) |t|^{\alpha-1} g(\text{sign}(t))) \exp \{i\mu t - \gamma |t|^\alpha g(\text{sign}(t))\}$$

ce qui entraîne que

$$\varphi'_X(0) = i\mu \quad \text{d'où} \quad \mathbb{E}(X) = \mu .$$

■

Propriété 4 Si X suit une loi $S_\alpha(0, \beta, \gamma)$, alors on a

$$\forall 0 < p < \alpha, \quad \mathbb{E}|X|^p = C(\alpha, \beta, p) \gamma^{\frac{p}{\alpha}}$$

$$\text{où } C(\alpha, \beta, p) = \frac{2^{p-1} \Gamma(1 - \frac{p}{\alpha})}{p \int_0^{+\infty} u^{-p-1} \sin^2 u du} \left(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\alpha\pi}{2}\right)^{p/2\alpha} \cos\left(\frac{p}{\alpha} \arctan\left(\beta \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right) .$$

La démonstration se trouve dans l'article de Hardin (1984).

1.3 Algorithme de simulation

Pour simuler les lois stables, il existe un algorithme développé par Chambers et al. (1976). Celui-ci permet de générer une loi $S_\alpha(0, \beta, 1)$. Pour obtenir une loi $S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$, il suffit de faire un changement de variables (section I-1.2.2, page 12).

1.3.1 Première étape

Elle consiste à générer une loi Φ uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et une loi W exponentielle de paramètre 1. Pour cela, il faut d'abord générer 2 V.A.R. uniformes sur $]0; 1[$ (notées U_1 et U_2). Puis en utilisant le changement de variables suivant

$$\begin{cases} \Phi = \pi U_1 - \frac{\pi}{2} \\ W = -\log(1 - U_2) \end{cases}$$

on obtient bien le résultat désiré (la démonstration ne pose aucun problème).

1.3.2 Deuxième étape

Elle consiste à calculer différentes quantités (fonction de Φ et de W).

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \varepsilon & = & 1 - \alpha , \\ a & = & \tan \frac{\Phi}{2} , \\ b & = & \tan \frac{\varepsilon \Phi}{2} , \\ \tau & = & -\varepsilon \tan(\alpha \phi_0) , \\ B & = & \frac{b}{\frac{\varepsilon \Phi}{2}} , \\ d & = & \frac{z^{\varepsilon/1-\varepsilon} - 1}{\varepsilon} , \\ z & = & \frac{\cos(\varepsilon \Phi) - \tan(\alpha \phi_0) \sin(\varepsilon \Phi)}{W \cos \Phi} . \end{array} \right.$$

1.3.3 Troisième étape

Elle consiste à générer une loi Y stable $S_\alpha(0, \beta, 1)$. Pour obtenir cela, il faut utiliser la proposition suivante

Proposition 2 Soit Φ une loi uniforme sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$ et W une loi exponentielle de paramètre 1, si nous posons

$$\begin{aligned} & - \text{ pour } \alpha \neq 1, \\ Y &= (\cos(\alpha \phi_0))^{1/\alpha} \left\{ \frac{2(a-b)(1+ab) - \Phi \tau B [b(1-a^2) - 2a]}{(1-a^2)(1+b^2)} \cdot (1 + \varepsilon d) + \tau \left(d + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right\} \\ &= \frac{\sin \alpha(\Phi - \phi_0)}{(\cos \Phi)^{1/\alpha}} \cdot \left(\frac{\cos(\Phi - \alpha(\Phi - \phi_0))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \\ & \quad \text{où } \phi_0 = -\frac{\pi \beta}{2} \cdot \frac{1 - |1 - \alpha|}{\alpha}, \\ & - \text{ pour } \alpha = 1, Y = \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{1}{2} \pi + \beta \Phi \right) \tan \Phi - \beta \log \left(\frac{\frac{1}{2} \pi W \cos \Phi}{\frac{1}{2} \pi + \beta \Phi} \right) \right) . \end{aligned}$$

alors la V.A.R. Y suit une loi $S_\alpha(0, \beta, 1)$.

Exemples 3

- Dans le cas d'une loi $S_\alpha S$ (c'est-à-dire $\beta = 0$), nous avons

$$Y = \frac{\sin(\alpha \Phi)}{(\cos \Phi)^{1/\alpha}} \cdot \left(\frac{\cos((1-\alpha)\Phi)}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} .$$

- Plus particulièrement, dans le cas où α est égal à 2, nous avons

$$Y = \frac{\sin 2\Phi}{\sqrt{\cos \Phi}} \cdot \left(\frac{\cos \Phi}{W} \right)^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{W} \sin \Phi .$$

Nous reconnaissons la représentation de Box-Müller.

- Enfin, dans le cas où α est égal à 1 et β égal à 0, nous avons

$$Y = \tan \Phi ,$$

formule connue, qui permet de simuler une loi de Cauchy.

Preuve de la proposition 2

Pour le cas $\alpha \neq 1$, la démonstration du passage de la première ligne à la seconde se trouve en Annexe A, page 129.

Remarque : Soit f la densité d'une loi stable, nous pouvons voir facilement que $f(-x, \alpha, \beta) = f(x, \alpha, -\beta)$. Nous pouvons donc supposer sans perte de généralité soit $x \geq 0$, soit $\beta \geq 0$.

Zolotarev (1966) a démontré que la fonction de répartition d'une loi $S_\alpha(0, \beta, 1)$ peut s'écrire pour $y > 0$

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \beta) + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta}^{\frac{\pi}{2}} \exp[-V_\alpha(y, \theta)] d\theta & \text{si } \alpha < 1 \\ 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta \frac{1-|1-\alpha|}{\alpha}}^{\frac{\pi}{2}} \exp[-V_\alpha(y, \theta)] d\theta & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} V_\alpha(y, \theta) &= y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left[\frac{\sin(\alpha\theta + \frac{\pi}{2}\beta(1 - |1-\alpha|))}{\cos \theta} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{\cos[(\alpha-1)\theta + \frac{\pi}{2}\beta(1 - |1-\alpha|)]}{\cos \theta} \\ &= y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\theta). \end{aligned}$$

La densité se déduit de la fonction de répartition et s'écrit de la façon suivante

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\alpha}{\alpha-1} y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}-1} a(\theta) \exp\left[-y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\theta)\right] d\theta & \text{si } \alpha < 1 \\ -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta \frac{1-|1-\alpha|}{\alpha}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\alpha}{\alpha-1} y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}-1} a(\theta) \exp\left[-y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\theta)\right] d\theta & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

qui peut s'écrire plus simplement en rappelant que $\phi_0 = -\frac{\pi\beta}{2} \cdot \frac{1-|1-\alpha|}{\alpha}$.

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{|\alpha-1|} y^{\frac{1}{\alpha-1}} \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} a(\theta) \exp\left[-y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\theta)\right] d\theta, \quad \forall \alpha \neq 1.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $Y \left(= h(\Phi, W) = \left(\frac{a(\Phi)}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right)$ a bien comme densité celle qui précède. Pour cela, posons le changement de variables suivant

$$\begin{aligned} (\Phi, W) &\xrightarrow{T} (\Phi, Y) = \left(\Phi, \left(\frac{a(\Phi)}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right) \\ (\Phi, Y) &\xrightarrow{T^{-1}} (\Phi, W) = \left(\Phi, \frac{a(\Phi)}{Y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \right) \end{aligned}$$

Le calcul du déterminant de la matrice jacobienne donne

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \bullet & a(\Phi) \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha} \right) Y^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}-1} \end{vmatrix} = a(\Phi) \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha} \right) Y^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}-1}. \quad (\text{I.2})$$

Rappelons enfin que Φ suit une loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, que W suit une loi exponentielle de paramètre 1, que Φ et W sont indépendantes et donc que

$$f_{\Phi, W}(\phi, w) = f_{\Phi}(\phi) f_W(w) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[}(\phi) e^{-w} \mathbb{1}_{]0; +\infty[}(w). \quad (\text{I.3})$$

(I.2) et (I.3) entraînent que

$$f_{\Phi, Y}(\phi, y) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[}(\phi) \exp\left(-y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\phi)\right) \mathbb{1}_{]0; +\infty[}\left(a(\phi) y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right) \left| a(\phi) \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha} \right) y^{\frac{1}{\alpha-1}} \right|.$$

Nous obtenons donc pour $y > 0$,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{|1-\alpha|} y^{\frac{1}{\alpha-1}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a(\phi) \exp\left[-y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\phi)\right] \mathbb{1}_{]0; +\infty[}(a(\phi)) d\phi.$$

Or $a(\phi) > 0 \iff \phi > \phi_0$, ceci démontre le résultat voulu car $\phi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. ■

Remarque 7 Le cas $\alpha = 1$ se résout de manière similaire.

1.3.4 Quelques exemples

Nous avons simulé 5000 réalisations de lois $S_{\alpha}S$ pour différentes valeurs de α . La figure I.1 présente les histogrammes faits à partir de ces simulations. Pour le cas α égal à 2, on peut reconnaître l'histogramme d'une loi normale de moyenne 0 et de variance 2. Le tableau suivant représente la moyenne et la variance empirique des 5000 réalisations.

Ces résultats confirment l'équation sur le calcul des moments. En effet, lorsque α décroît vers 1, la variance explose et lorsque α devient plus petit que 1, c'est la moyenne qui commence à exploser.

α	2	1,7	1,5	1,2	1	0,9
moyenne	0,02	0,02	0,03	0,01	-0,33	27,58
variance	2,02	6,70	36,96	150,97	2071,94	3214.206,71

TAB. I.1 – Moyenne et variance empirique calculées sur 5000 réalisations

1.4 Statistiques sur les lois symétriques alpha-stables

Dans cette partie, nous allons nous attarder sur les différentes manières de tester et d'estimer les paramètres d'une loi symétrique alpha-stable ($S\alpha S$) dont je rappelle la forme de la fonction caractéristique : $\varphi_X(t) = \exp\{-\gamma|t|^\alpha\}$. Que ce soit pour les problèmes de test de variance ou d'estimation des paramètres, nous supposons pour la suite que nous avons la suite d'observations $(x_1, \dots, x_n)$ de la V.A.R. X définie juste avant par sa fonction caractéristique.

1.4.1 Tests sur la variance

Nous allons voir deux façons de tester si on est en présence d'une loi à variance infinie ou non (ces deux tests graphiques sont aussi valables pour n'importe quelle loi stable, symétrique ou non).

a) Test graphique 1

Ce premier test est très simple et se décompose en 2 étapes :

- calculer la variance empirique $s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ (où $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$) pour différentes valeurs de n ,
- tracer le graphique (n, s_n^2) .

Intuitivement, lorsque n augmente et lorsque la variance est finie, le tracé doit converger. Au contraire, si on est en présence d'une loi à variance infinie, le tracé diverge.

b) Test graphique 2

Ce deuxième test est basé sur le fait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \mathbb{P}(|X| > t) = \gamma C(\alpha)$. Donc en $+\infty$, $\frac{d \log \mathbb{P}(|X| > t)}{d \log t}$ est équivalent à α . Là aussi, 2 étapes sont nécessaires :

- fixer t et calculer la quantité $g(t) = \log\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{|X_i| > t}\right)$,
- tracer le graphique $(\log t, g(t))$ et voir si la pente devient finie à partir d'une certaine valeur de t .

c) Quelques exemples

Pour cela, nous avons repris les simulations de la section précédente. Les graphiques de la figure I.2 représentent le test graphique 1. Ceux de la figure I.3 représentent le test graphique 2. On peut remarquer que seul le cas α égal à 2 fait converger la variance. Pour tous les autres cas, il y a divergence.

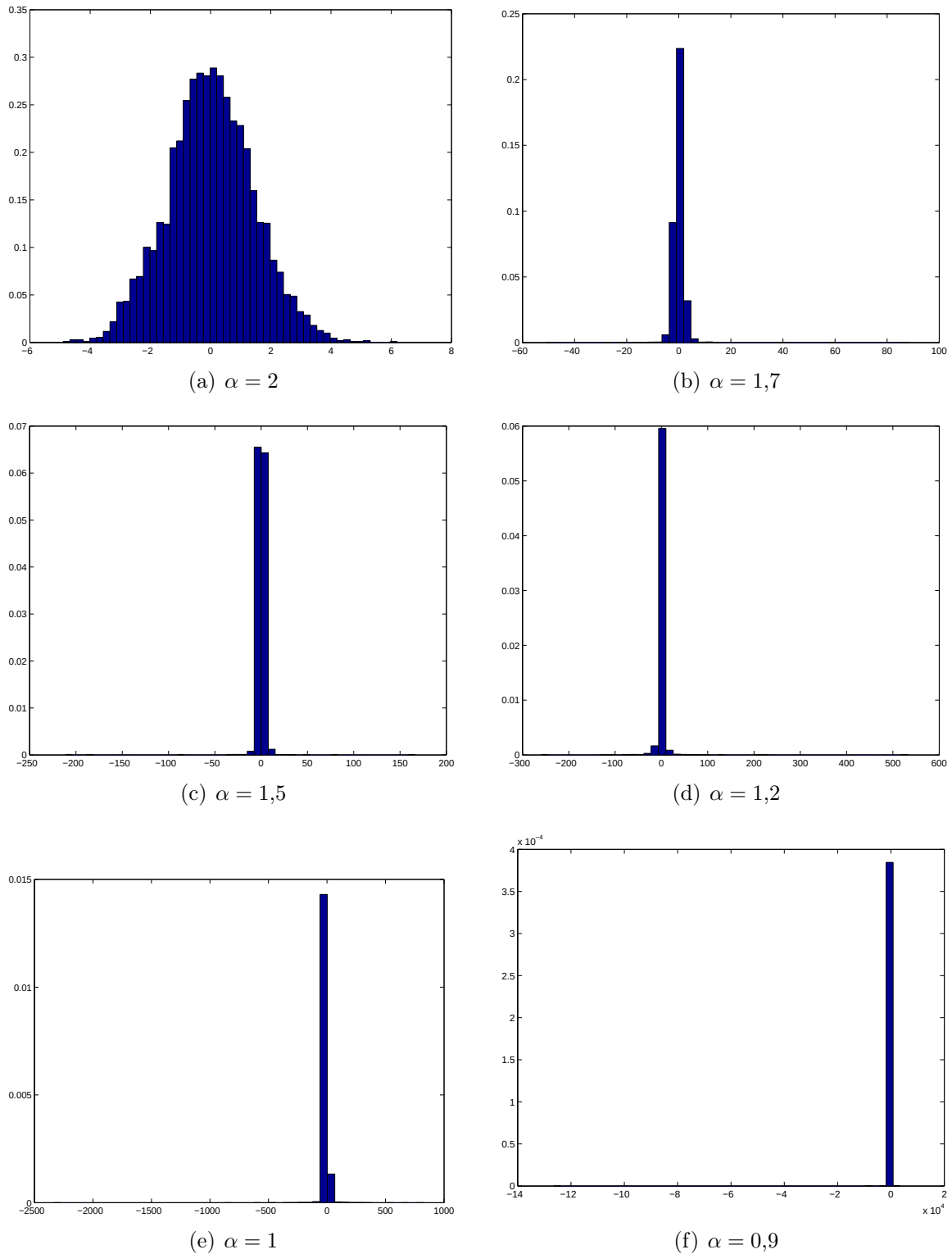


FIG. I.1 – Histogrammes normalisés de lois $S\alpha S$ pour différentes valeurs de α calculés sur 5000 réalisations.

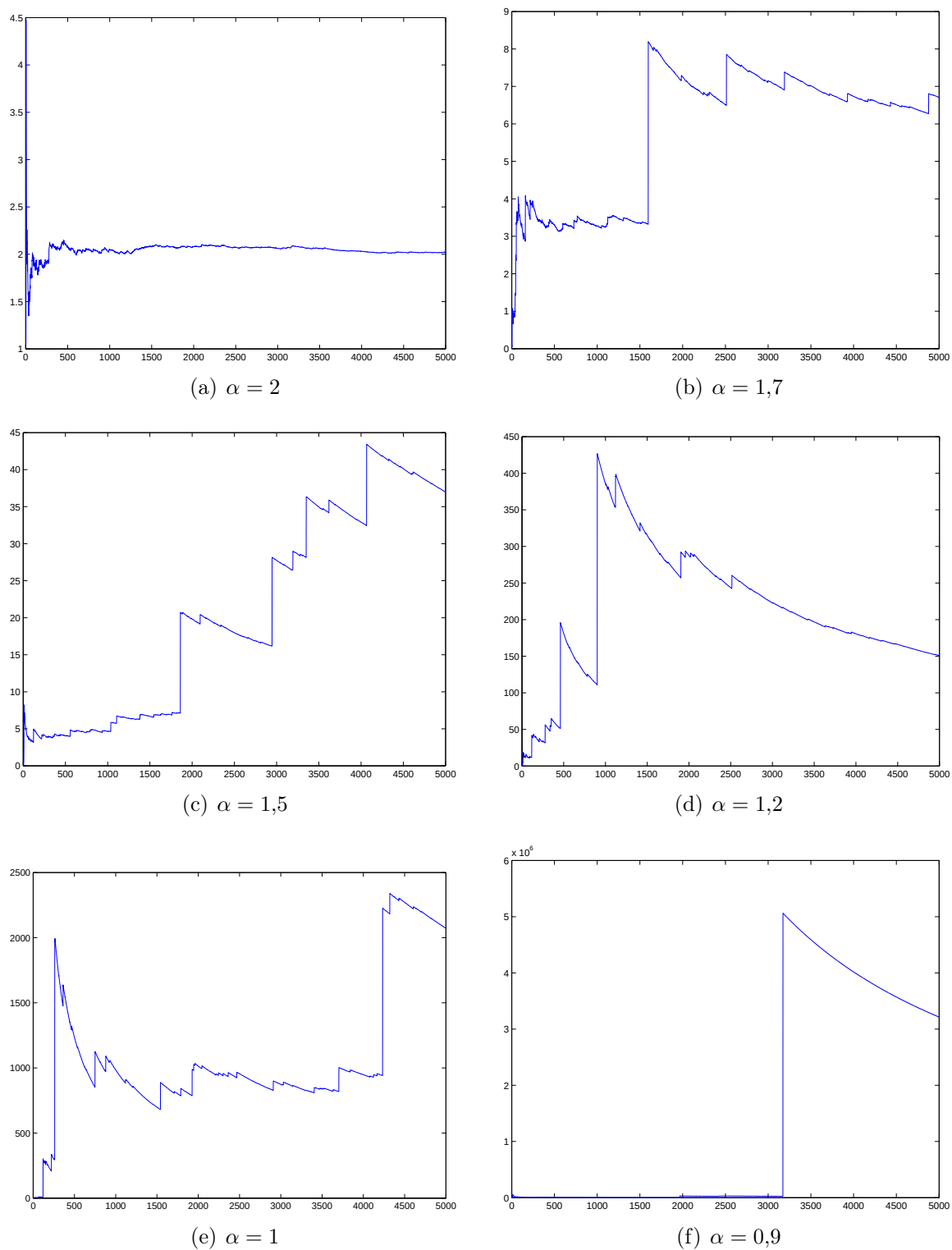


FIG. I.2 – Test graphique 1 : variance empirique calculée pas à pas sur l'échantillon de 5000 réalisations d'une loi $S\alpha S$ pour différentes valeurs de α .

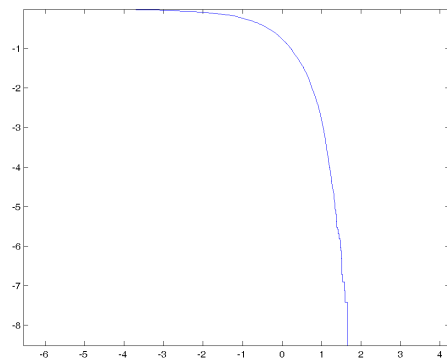
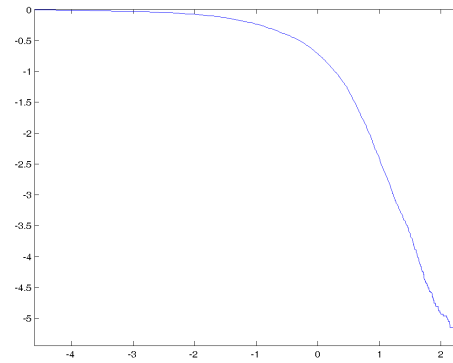
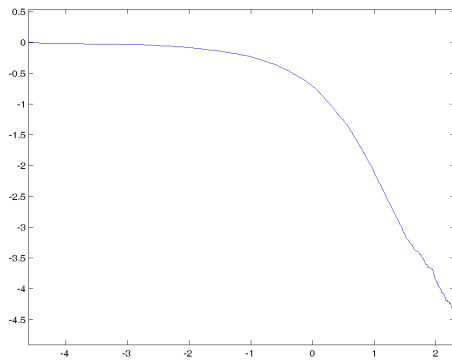
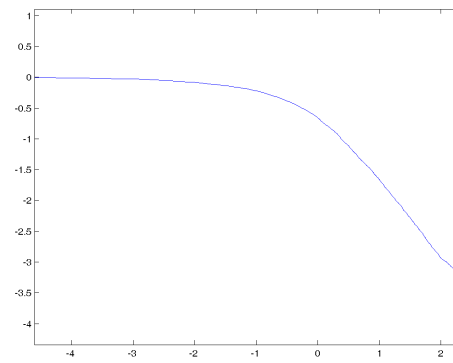
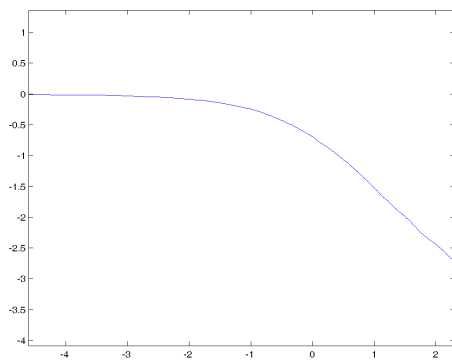
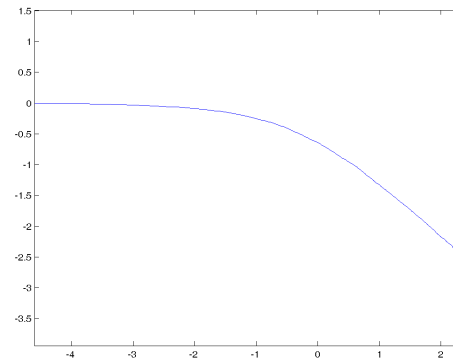
(a) $\alpha = 2$ (b) $\alpha = 1,7$ (c) $\alpha = 1,5$ (d) $\alpha = 1,2$ (e) $\alpha = 1$ (f) $\alpha = 0,9$

FIG. I.3 – Test graphique 2 calculé sur l'échantillon de 5000 réalisations d'une loi $S\alpha S$ pour différentes valeurs de α .

1.4.2 Estimations

Pour une loi $S\alpha S$, il y a deux paramètres à fixer, α et γ . Il existe plusieurs méthodes d'estimation : maximum de vraisemblance, utilisation des fractiles de cette loi, régression utilisant la fonction caractéristique,...

Dans cette partie, nous allons détailler la méthode de régression. La particularité de cette méthode est que pour n observations $x_1, \dots, x_n$ de X , nous pouvons construire une infinité d'estimations.

Rappelons que pour X V.A.R. $S\alpha S$, nous avons $\varphi_X(t) = \exp \{-\gamma |t|^\alpha\}$, ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} |\varphi_X(t)|^2 &= \exp \{-2\gamma |t|^\alpha\} \\ \log [-\log |\varphi_X(t)|^2] &= \log 2\gamma + \alpha \log |t|. \end{aligned}$$

Posons pour $k = 1, \dots, K$, $y_k = \log [-\log |\varphi_X(t_k)|^2]$, $\lambda = \log 2\gamma$, $w_k = \log |t_k|$; l'égalité précédente implique que

$$y_k = \lambda + \alpha w_k.$$

Si on pose

$$\widehat{y}_k = \log (-\log |\widehat{\varphi}_X(t_k)|^2)$$

où $|\widehat{\varphi}_X(t_k)|^2 = \frac{1}{n^2} \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \cos(t_k x_i) \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n \sin(t_k x_i) \right]^2 \right\}$, on peut alors proposer comme modèle, le modèle linéaire suivant :

$$\widehat{Y} = \lambda + \alpha W + \varepsilon.$$

Remarques 8

1. D'après la définition, on sait que la partie imaginaire de la fonction caractéristique est nulle. On peut estimer la fonction caractéristique sans la partie sinus. On a alors :

$$|\widehat{\varphi}_X(t_k)|^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \cos(t_k x_i)}{n} \right)^2.$$

2. Le choix des t_k , ainsi que le choix de K par rapport à n , se fait suivant la méthode décrite par Koutrouvelis (1980), c'est-à-dire

$$\forall k \in \llbracket 1; K \rrbracket, t_k = \frac{\pi k}{25}$$

et le paramètre K est choisi suivant le tableau (I.2) ci-dessous.

$\alpha \backslash n$	1,9	1,7	1,5	1,3	1,1	0,9	0,7	0,5	0,3
200	9	10	11	22	24	28	30	86	134
800	9	10	11	16	18	22	24	68	124
1600	10	10	11	14	15	18	20	56	118

TAB. I.2 – Valeurs optimales de K en fonction de n et de α **a) Estimation du paramètre α**

Par régression linéaire, on obtient

$$\hat{\alpha} = \frac{K \sum_{k=1}^K w_k \hat{y}_k - \sum_{k=1}^K w_k \sum_{k=1}^K \hat{y}_k}{K \sum_{k=1}^K w_k^2 - \left(\sum_{k=1}^K w_k \right)^2}.$$

Si on prend $\sum_{k=1}^K w_k = 0$, l'estimation précédente est égale à

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^K w_k \hat{y}_k}{\sum_{k=1}^K w_k^2}.$$

b) Estimation du paramètre γ

De même, par régression linéaire, on obtient

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{k=1}^K w_k^2 \sum_{k=1}^K \hat{y}_k - \sum_{k=1}^K w_k \sum_{k=1}^K w_k \hat{y}_k}{K \sum_{k=1}^K w_k^2 - \left(\sum_{k=1}^K w_k \right)^2}.$$

On peut prendre $\sum_{k=1}^K w_k = 0$, l'estimation devient alors

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{y}_k.$$

Ce qui entraîne que

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{2} \exp \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{y}_k \right).$$

c) Exemples

Nous avons simulé des lois SαS pour différentes valeurs de α (γ est pris égal à 1) et calculé les estimations de ces deux paramètres. Signalons que les estimateurs précédents sont convergents et d'autre part, approximativement sans biais même pour des valeurs de n peu élevées.

$\alpha \backslash n$	1,9	1,7	1,5	1,3	1,1	0,9	0,7	0,5	0,3
200	1,86 0,89	1,75 0,97	1,46 1,09	1,27 1,07	1,08 1,07	0,94 1,06	0,64 0,88	0,52 1,11	0,31 1,05
800	1,90 1,11	1,65 0,97	1,49 0,96	1,35 1,03	1,15 1,00	0,87 1,06	0,70 0,96	0,49 1,07	0,30 0,98
1600	1,91 1,02	1,69 0,96	1,48 1,01	1,34 1,01	1,11 0,97	0,93 0,98	0,69 1,05	0,55 0,96	0,29 1,00

TAB. I.3 – Estimations de α (première valeur de la cellule) et de γ (seconde valeur de la cellule).

Le tableau confirme la bonne performance de ces estimateurs, quelque soit la valeur de α . De plus, les estimations s'améliorent lorsque n croît.

2 Loïs stables multivariées

2.1 Définition et propriétés

Définition 3 Le vecteur aléatoire $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ est *alpha-stable* si pour tout k et pour tout vecteur $\underline{X}^{(1)}, \dots, \underline{X}^{(k)}$ de même loi que $\underline{X}$, il existe $a_k > 0$ et $D^{(k)}$ tels que :

$$\underline{X}^{(1)} + \dots + \underline{X}^{(k)} \stackrel{d}{=} a_k \underline{X} + D^{(k)} \quad .$$

Lorsque $D^{(k)}$ est le vecteur nul, on parle de loi *strictement stable*.

Remarques 9

1. L'égalité en distribution des vecteurs précédents entraîne l'égalité en distribution de chaque composante, c'est-à-dire

$$X_j^{(1)} + \dots + X_j^{(k)} \stackrel{d}{=} a_k X_j + D_j^{(k)} \quad .$$

2. Une conséquence de la proposition suivante est que le paramètre a_k joue le même rôle que dans le cas univarié. Il existe alors une constante α , $0 < \alpha \leq 2$, telle que $a_k = k^{1/\alpha}$.

Proposition 3 Pour $\underline{X}$ un vecteur α -stable, toute combinaison linéaire des composantes de $\underline{X}$ est une V.A.R. α -stable.

Preuve de la proposition 3

Soit $Y = \sum_{j=1}^n l_j X_j$. Prenons alors k répliques $Y_1 = \sum_{j=1}^n l_j X_j^{(1)}, \dots, Y_k = \sum_{j=1}^n l_j X_j^{(k)}$

de Y et calculons la distribution de la somme des Y_j :

$$\begin{aligned}
 Y_1 + \cdots + Y_k &\stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^n l_j X_j^{(1)} + \cdots + \sum_{j=1}^n l_j X_j^{(k)} \\
 &\stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^n l_j \left(X_j^{(1)} + \cdots + X_j^{(k)} \right) \\
 &\stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^n l_j \left(a_k X_j + D_j^{(k)} \right) \quad \text{d'après la remarque précédente} \\
 &\stackrel{d}{=} a_k \sum_{j=1}^n l_j X_j + \sum_{j=1}^n l_j D_j^{(k)} \\
 Y_1 + \cdots + Y_k &\stackrel{d}{=} a_k Y + b_k .
 \end{aligned}$$

D'après la définition 2, page 10, la V.A.R. Y est bien α -stable. ■

Définition 4 Le vecteur $\underline{X}$ est symétrique alpha-stable ($S\alpha S$) si $\underline{X}$ est un vecteur alpha-stable et si $-\underline{X}$ a même loi que $\underline{X}$.

Théorème 4 Soit $\underline{X}$ un vecteur α -stable, on a les résultats suivants.

1. Si toute combinaison linéaire des composantes de $\underline{X}$ a une distribution strictement stable, alors $\underline{X}$ est un vecteur strictement stable.
2. Si toute combinaison linéaire des composantes de $\underline{X}$ a une distribution symétrique α -stable, alors $\underline{X}$ est un vecteur $S\alpha S$.
3. Si toute combinaison linéaire des composantes de $\underline{X}$ a une distribution α -stable, où $\alpha \geq 1$, alors $\underline{X}$ est un vecteur α -stable.

La démonstration est détaillée dans Samorodnitsky et Taqqu (1994, pages 59–62).

Proposition 4 Soit $0 < \alpha < 2$, $\underline{X}$ est un vecteur α -stable si sa fonction caractéristique s'écrit pour tout $\underline{t} \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) = \mathbb{E} \left(e^{i \langle \underline{t}, \underline{X} \rangle} \right) = \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign}(\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle) \tan \frac{\pi \alpha}{2} \right) d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) + i \langle \underline{t}, \mu^0 \rangle \right\}$$

où $\left\{ \begin{array}{l} \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est le produit scalaire usuel dans } \mathbb{R}^n, \mu^0 \text{ est un vecteur de } \mathbb{R}^n, \\ \text{et } \mu_{S^{n-1}} \text{ est une mesure sur l'ensemble des boréliens de la sphère unité.} \end{array} \right.$
 Cette mesure est aussi appelée «mesure spectrale».

La paire $(\mu_{S^{n-1}}, \mu^0)$ est unique.

La démonstration est détaillée dans Kuelbs (1973).

Remarques 10

1. Pour $\alpha = 2$, on obtient le même résultat à savoir que la fonction caractéristique s'écrit pour tout $\underline{t} \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) = \mathbb{E}(e^{i\langle \underline{t}, \underline{X} \rangle}) = \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} (\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle)^2 d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) + i \langle \underline{t}, \mu^0 \rangle \right\}.$$

La seule différence avec le résultat précédent réside dans le fait que pour $\alpha = 2$, il n'y a pas forcément unicité de la mesure spectrale (cf remarque 15, page 59).

2. Lorsque $n = 1$, on retrouve la forme de la fonction caractéristique du cas univarié avec :

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha, \\ \mu &= \mu_1^0, \\ \gamma &= \mu_{S^0}(1) + \mu_{S^0}(-1), \\ \beta &= \frac{\mu_{S^0}(1) - \mu_{S^0}(-1)}{\mu_{S^0}(1) + \mu_{S^0}(-1)}. \end{aligned}$$

Proposition 5 Soit $0 < \alpha < 2$. Les V.A.R. $X_1, \dots, X_n$, où pour tout $j = 1, \dots, n$ X_j a pour loi $S_\alpha(\mu_j, \beta_j, \gamma_j)$, sont n V.A.R. indépendantes si et seulement si le vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ est α -stable et sa mesure spectrale est discrète et concentrée sur les points d'intersection entre les axes et la sphère unité.

Lemme 1 Considérons la mesure spectrale suivante (discrète et concentrée sur les points d'intersection entre les axes et la sphère unité) :

$$\mu_{S^{n-1}} = \sum_{k=1}^n a_k \delta(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k^{\text{ème}} \text{ place}}}{1}, 0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^n b_j \delta(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j^{\text{ème}} \text{ place}}}{-1}, 0, \dots, 0) \text{ où } a_k \geq 0 \text{ et } b_j \geq 0.$$

On a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign}(\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) + i \langle \underline{t}, \mu^0 \rangle \right\} \\ &= \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n |t_j|^\alpha \left[(a_j + b_j) - i(a_j - b_j) \operatorname{sign}(t_j) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right] + i \sum_{j=1}^n t_j \mu_j^0 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

Preuve du lemme 1

D'après la forme de la mesure spectrale, on a :

$$\begin{aligned}
& \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign}(\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) + i \langle \underline{t}, \mu^0 \rangle \right\} \\
&= \exp \left\{ - \sum_{k=1}^n a_k |t_k|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign}(t_k) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^n b_j |-t_j|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign}(-t_j) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) + i \sum_{j=1}^n t_j \mu_j^0 \right\} \\
&= \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n |t_j|^\alpha \left[(a_j + b_j) - i (a_j - b_j) \operatorname{sign}(t_j) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right] + i \sum_{j=1}^n t_j \mu_j^0 \right\} .
\end{aligned}$$

■

Preuve de la proposition 5

Condition nécessaire : Si les V.A.R. X_j sont indépendantes et de loi $S_\alpha(\mu_j, \beta_j, \gamma_j)$, la fonction caractéristique du vecteur s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
\varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) &= \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t_j) = \prod_{j=1}^n \exp \left\{ i\mu_j t_j - \gamma_j |t_j|^\alpha \left[1 - i\beta_j \operatorname{sign}(t_j) \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right] \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \left(i\mu_j t_j - \gamma_j |t_j|^\alpha \left[1 - i\beta_j \operatorname{sign}(t_j) \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right] \right) \right\} \\
\varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) &= \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n |t_j|^\alpha \left[\gamma_j - i\gamma_j \beta_j \operatorname{sign}(t_j) \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right] + i \sum_{j=1}^n \mu_j t_j \right\} . \quad (\text{I.5})
\end{aligned}$$

Posons $a_k = \gamma_k \left(\frac{1 + \beta_k}{2} \right)$, $b_j = \gamma_j \left(\frac{1 - \beta_j}{2} \right)$ et $\mu_j^0 = \mu_j$. Remarquons que a_k et b_j sont positifs ou nuls et que :

$$\begin{cases} a_j + b_j &= \gamma_j \\ a_j - b_j &= \gamma_j \beta_j \end{cases}$$

Le lemme 1 nous donne alors l'égalité suivante :

$$\varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) = \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign}(\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) + i \langle \underline{t}, \mu^0 \rangle \right\} ,$$

qui est bien la fonction caractéristique d'un vecteur α -stable dont la mesure spectrale est discrète et concentrée sur les points d'intersection entre les axes et la sphère unité.

Condition suffisante : Si $(X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur α -stable dont la mesure spectrale est discrète et concentrée sur les points d'intersection entre les axes et la sphère unité, le lemme 1 dit que la fonction caractéristique de $\underline{X}$ s'écrit

$$\varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) = \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n |t_j|^\alpha \left[(a_j + b_j) - i (a_j - b_j) \operatorname{sign}(t_j) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right] + i \sum_{j=1}^n t_j \mu_j^0 \right\}$$

Posons alors $\gamma_j = a_j + b_j$, $\beta_j = \frac{a_j - b_j}{a_j + b_j}$ et $\mu_j = \mu_j^0$. L'équation précédente s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) &= \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n |t_j|^\alpha \left[\gamma_j - i \gamma_j \beta_j \operatorname{sign}(t_j) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right] + i \sum_{j=1}^n t_j \mu_j \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \left(i \mu_j t_j - \gamma_j |t_j|^\alpha \left[1 - i \beta_j \operatorname{sign}(t_j) \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right] \right) \right\} \\ &= \prod_{j=1}^n \exp \left\{ i \mu_j t_j - \gamma_j |t_j|^\alpha \left[1 - i \beta_j \operatorname{sign}(t_j) \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right] \right\} = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t_j) .\end{aligned}$$

Les V.A.R. X_j sont donc bien indépendantes et l'on reconnaît pour chaque X_j , la fonction caractéristique d'une loi $S_\alpha(\mu_j, \beta_j, \gamma_j)$. ■

Théorème 5 Soit $0 < \alpha < 2$. Le vecteur $\underline{X}$ est symétrique α -stable ($S_\alpha S$) si et seulement si sa fonction caractéristique s'écrit :

$$\varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) = \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle|^\alpha d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) \right\} . \quad (\text{I.6})$$

Remarquons que la mesure spectrale d'un tel vecteur est forcément symétrique.

Preuve du théorème 5

Nous savons que :

$$\begin{aligned}\varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) &= \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign}(\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) + i \langle \underline{t}, \mu^0 \rangle \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle|^\alpha d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ i \left(\int_{S^{n-1}} \operatorname{sign}(\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle) \tan \frac{\pi\alpha}{2} d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) + \langle \underline{t}, \mu^0 \rangle \right) \right\} \\ \varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) &= \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle|^\alpha d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) \right\} \exp \{ i A(\underline{t}, \mu^0, \alpha) \} .\end{aligned}$$

Il est facile de voir que $A(-\underline{t}, \mu^0, \alpha) = -A(\underline{t}, \mu^0, \alpha)$. On en déduit alors que la fonction caractéristique du vecteur $-\underline{X}$ s'écrit :

$$\varphi_{-\underline{X}}(\underline{t}) = \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle|^\alpha d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) \right\} \exp \{ -i A(\underline{t}, \mu^0, \alpha) \} .$$

Pour que le vecteur $\underline{X}$ soit $S_\alpha S$, il faut et il suffit que la loi de $\underline{X}$ soit la même que la loi de $-\underline{X}$, ce qui revient à avoir l'égalité des fonctions caractéristiques. On a alors :

$$\begin{aligned}\varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) = \varphi_{-\underline{X}}(\underline{t}) &\iff \exp \{ i A(\underline{t}, \mu^0, \alpha) \} = \exp \{ -i A(\underline{t}, \mu^0, \alpha) \} \\ &\iff A(\underline{t}, \mu^0, \alpha) = 0 .\end{aligned}$$

On retrouve donc la forme de l'équation (I.6).

Montrons maintenant que cette mesure est forcément symétrique. Si l'on pose, pour tout A borélien de la sphère unité, $\tilde{\mu}_{S^{n-1}}(A) = \frac{1}{2}(\mu_{S^{n-1}}(A) + \mu_{S^{n-1}}(-A))$, il est clair que cette mesure est symétrique et nous avons :

$$\begin{aligned} \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle|^\alpha d\tilde{\mu}_{S^{n-1}}(\underline{x}) \right\} \\ = \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle|^\alpha \frac{1}{2} d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) - \int_{S^{n-1}} |\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle|^\alpha \frac{1}{2} d\mu_{S^{n-1}}(-\underline{x}) \right\} \\ = \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle|^\alpha \frac{1}{2} d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) - \int_{S^{n-1}} |\langle \underline{t}, \underline{y} \rangle|^\alpha \frac{1}{2} d\mu_{S^{n-1}}(\underline{y}) \right\} \\ = \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle|^\alpha d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) \right\} . \end{aligned}$$

Par unicité de la mesure spectrale, on obtient $\mu_{S^{n-1}} = \tilde{\mu}_{S^{n-1}}$. ■

Proposition 6 Soit M une matrice $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $\underline{X}$ un vecteur $S\alpha S$ de dimension n , alors $\underline{Y} = M\underline{X}$ est un vecteur $S\alpha S$ de dimension m .

De plus, si les (X_j) sont n V.A.R. indépendantes deux à deux de loi $S_\alpha(\mu_j, \beta_j, \gamma_j)$, alors la mesure spectrale de $\underline{Y}$ est discrète.

Preuve de la proposition 6

Soient $b_1, \dots, b_m$, m réels et $\underline{X}$ un vecteur $S\alpha S$, nous avons

$$\sum_{j=1}^m b_j Y_j \text{ } S\alpha S \iff \underline{b} \underline{Y} \text{ } S\alpha S \iff \underline{b} M \underline{X} \text{ } S\alpha S \iff \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m b_i M_{ij} \right) X_j \text{ } S\alpha S .$$

Or $\underline{X}$ est un vecteur $S\alpha S$ ce qui entraîne que (cf proposition 3), quels que soient les a_i , $\sum_{j=1}^n a_j X_j$ est une V.A.R. $S\alpha S$. Par conséquent, $\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m b_i M_{ij}) X_j$ est une V.A.R. $S\alpha S$, ce qui entraîne, d'après les équivalences successives, que $\sum_{j=1}^m b_j Y_j$ est une V.A.R. $S\alpha S$. En conclusion, (cf point 2 théorème 4) $\underline{Y}$ est un vecteur $S\alpha S$.

Pour la deuxième partie de la proposition (sur la mesure spectrale de $\underline{Y}$), la démonstration est détaillée dans Samorodnitsky et Taqqu (1994, exemple 2.3.6, page 69).

Notons tout de même la forme de la mesure spectrale de $\underline{Y}$ (dans le cas général) :

$$\begin{aligned} \mu_{S^{m-1}} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1 + \beta_k}{2} \gamma_k \left(\sum_{j=1}^m M_{jk}^2 \right)^{\alpha/2} \delta \left(\frac{M_{1k}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^m M_{jk}^2 \right)}}, \dots, \frac{M_{mk}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^m M_{jk}^2 \right)}} \right) \right. \\ \left. + \frac{1 - \beta_k}{2} \gamma_k \left(\sum_{j=1}^m M_{jk}^2 \right)^{\alpha/2} \delta \left(\frac{-M_{1k}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^m M_{jk}^2 \right)}}, \dots, \frac{-M_{mk}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^m M_{jk}^2 \right)}} \right) \right] . \end{aligned}$$

Dans le cas $S\alpha S$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_{S^{m-1}} = & \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{2} \left(\sum_{j=1}^m M_{jk}^2 \right)^{\alpha/2} \left[\delta \left(\frac{M_{1k}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^m M_{jk}^2 \right)}}, \dots, \frac{M_{mk}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^m M_{jk}^2 \right)}} \right) + \right. \\ & \left. \delta \left(\frac{-M_{1k}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^m M_{jk}^2 \right)}}, \dots, \frac{-M_{mk}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^m M_{jk}^2 \right)}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

■

Remarque 11 Pour les vecteurs $S\alpha S$, nous retrouvons toutes les propriétés des vecteurs gaussiens hormis celles concernant la matrice de variances-covariances (qui définit les vecteurs gaussiens). En effet, nous avons déjà vu que dès que α est strictement inférieur à 2, les moments d'ordre 2 sont infinis pour les lois stables et donc la matrice de variances-covariances n'existe pas. Une notion analogue a cependant été introduite.

2.2 Covariation

Pour toute cette partie, nous supposons que $1 < \alpha \leq 2$.

Définition 5 Soient (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$ bivarié avec α strictement supérieur à 1, la *covariation* de X_1 sur X_2 est la quantité

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S^1} x_1 x_2^{\langle \alpha-1 \rangle} d\mu_{S^1}(x_1, x_2) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mu_{S^1} \text{ est la mesure spectrale} \\ \text{et} \\ u^{\langle v \rangle} = \text{sign } u |u|^v. \end{cases}$$

Cette covariation possède plusieurs propriétés et va permettre de construire une mesure de dépendance : le coefficient de covariation que nous verrons plus loin (page 35).

Mais avant de voir les différentes propriétés de la covariation, il est important de donner une nouvelle définition de cette dernière (équivalente à la définition précédente) qui nous permettra de démontrer plus facilement les résultats suivants.

Proposition 7 Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$, la covariation de X_1 sur X_2 peut s'écrire

$$[X_1, X_2]_\alpha = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \gamma(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta_1=0, \theta_2=1}$$

où $\gamma(\theta_1, \theta_2)$ est le paramètre de dispersion de la V.A.R. $\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2$.

Preuve de la proposition 7

La démonstration se fait aisément en se rappelant que

$$\gamma(\theta_1, \theta_2) = \int_{S^1} |\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2|^\alpha d\mu_{S^1}(x_1, x_2) \quad .$$

■

2.2.1 Covariation pour un vecteur de dimension n

Proposition 8 Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur $S\alpha S$.

1. Posons $Y = \sum_{j=1}^n a_j X_j$ et $Z = \sum_{j=1}^n b_j X_j$, nous avons l'égalité suivante :

$$[Y, Z]_\alpha = \int_{S^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^n a_j x_j \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j x_j \right)^{\langle \alpha-1 \rangle} d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) .$$

2. Soit γ_j le paramètre de dispersion de X_j , alors on a :

$$[X_j, X_j]_\alpha = \gamma_j .$$

Preuve de la proposition 8

1. Appliquons le résultat de la proposition 7 à Y et Z . Nous obtenons

$$[Y, Z]_\alpha = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \gamma(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \Big|_{\lambda_1=0, \lambda_2=1}$$

où $\gamma(\lambda_1, \lambda_2)$ est le paramètre de dispersion de la V.A.R. $\lambda_1 Y + \lambda_2 Z$. Or

$$\begin{aligned} \lambda_1 Y + \lambda_2 Z &= \lambda_1 \sum_{j=1}^n a_j X_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^n b_j X_j \\ \lambda_1 Y + \lambda_2 Z &= \sum_{j=1}^n (\lambda_1 a_j + \lambda_2 b_j) X_j . \end{aligned}$$

Donc on a

$$\gamma(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{S^{n-1}} \left| \sum_{j=1}^n (\lambda_1 a_j + \lambda_2 b_j) x_j \right|^\alpha d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) .$$

Il reste à dériver l'expression de droite par rapport à λ_1 et prendre $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$ pour obtenir le résultat voulu, soit

$$[Y, Z]_\alpha = \int_{S^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^n a_j x_j \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j x_j \right)^{\langle \alpha-1 \rangle} d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) .$$

2. Pour cette seconde partie, nous savons par définition que

$$\varphi_{(X_1, \dots, X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^n t_j X_j \right) \right] .$$

Ceci entraîne que la fonction caractéristique de X_j s'écrit en fonction de la fonction caractéristique conjointe de la manière suivante

$$\varphi_{X_j}(t_j) = \varphi_{(X_1, \dots, X_n)}(0, \dots, 0, t_j, 0, \dots, 0)$$

et donc que

$$\begin{aligned}\varphi_{X_j}(t_j) &= \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |t_j x_j|^\alpha d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) \right\} \\ \varphi_{X_j}(t_j) &= \exp \left\{ - \left(\int_{S^{n-1}} |x_j|^\alpha d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) \right) |t_j|^\alpha \right\} .\end{aligned}\quad (\text{I.8})$$

De plus, nous savons par hypothèse que

$$\varphi_{X_j}(t_j) = \exp \{ -\gamma_j |t_j|^\alpha \} . \quad (\text{I.9})$$

Nous déduisons directement de (I.8) et de (I.9) que

$$\int_{S^{n-1}} |x_j|^\alpha d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) = \gamma_j .$$

Enfin, le premier point de la proposition nous permet de conclure sur l'égalité qui nous intéresse. En effet, il est facile de voir que

$$\begin{aligned}[X_j, X_j]_\alpha &= \int_{S^{n-1}} x_j x_j^{\langle \alpha-1 \rangle} d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) \\ [X_j, X_j]_\alpha &= \int_{S^{n-1}} |x_j|^\alpha d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) .\end{aligned}$$

■

2.2.2 Pseudo-bilinéarité et indépendance

Propriété 5 1. Le cas α égal à 2 donne la moitié de la covariance, c'est-à-dire que si (X, Y) est un vecteur $S\alpha S$

$$[X, Y]_2 = \frac{1}{2} \text{Cov}(X, Y) .$$

2. Si X et Y sont deux V.A.R. indépendantes alors, $[X, Y]_\alpha = 0$.
3. Si (X_1, X_2, Y) est un vecteur $S\alpha S$, il y a linéarité à gauche de la covariation, c'est-à-dire

$$\forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2, [a_1 X_1 + a_2 X_2, Y]_\alpha = a_1 [X_1, Y]_\alpha + a_2 [X_2, Y]_\alpha .$$

4. Si (X, Y_1, Y_2) est un vecteur $S\alpha S$ et que Y_1 et Y_2 sont indépendantes, il y a pseudo-linéarité à droite de la covariation, c'est-à-dire

$$\forall (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2, [X, b_1 Y_1 + b_2 Y_2]_\alpha = b_1^{\langle \alpha-1 \rangle} [X, Y_1]_\alpha + b_2^{\langle \alpha-1 \rangle} [X, Y_2]_\alpha .$$

Preuve de la propriété 5

1- D'une part, nous savons que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \{ \exp [i (t_1 X + t_2 Y)] \} &= \exp \left\{ - \int_{S^1} (t_1 x + t_2 y)^2 d\mu_{S^1} (x, y) \right\} \\
 \mathbb{E} \{ \exp [i (t_1 X + t_2 Y)] \} &= \exp \left\{ - \left(t_1^2 \int_{S^1} x^2 d\mu_{S^1} (x, y) + t_2^2 \int_{S^1} y^2 d\mu_{S^1} (x, y) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2t_1 t_2 \int_{S^1} xy d\mu_{S^1} (x, y) \right) \right\} \\
 \mathbb{E} \{ \exp [i (t_1 X + t_2 Y)] \} &= \exp \left\{ - \left(t_1^2 \int_{S^1} x^2 d\mu_{S^1} (x, y) + t_2^2 \int_{S^1} y^2 d\mu_{S^1} (x, y) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2t_1 t_2 [X, Y]_\alpha \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

D'autre part, nous savons aussi que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \{ \exp [i (t_1 X + t_2 Y)] \} &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Var} (t_1 X + t_2 Y) \right\} \\
 \mathbb{E} \{ \exp [i (t_1 X + t_2 Y)] \} &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} (t_1^2 \text{Var} (X) + t_2^2 \text{Var} (Y) + 2t_1 t_2 \text{Cov} (X, Y)) \right\}.
 \end{aligned}$$

Plusieurs résultats découlent de cette égalité. En prenant $t_2 = 0$, puis $t_1 = 0$,

$$\begin{aligned}
 \int_{S^1} x^2 d\mu_{S^1} (x, y) &= \frac{1}{2} V(X) \\
 \int_{S^1} y^2 d\mu_{S^1} (x, y) &= \frac{1}{2} V(Y) \\
 [X, Y]_\alpha &= \frac{1}{2} \text{Cov} (X, Y).
 \end{aligned}$$

2- La démonstration est détaillée dans Samorodnitsky et Taqqu (1994, page 91).

3- Soit μ_{S^2} la mesure spectrale du vecteur $S\alpha S (X_1, X_2, Y)$, d'après la proposition 8 (page 31), nous avons

$$\begin{aligned}
 [a_1 X_1 + a_2 X_2, Y]_\alpha &= \int_{S^2} (a_1 x_1 + a_2 x_2) y^{(\alpha-1)} d\mu_{S^2} (x_1, x_2, y) \\
 &= \int_{S^2} (a_1 x_1) y^{(\alpha-1)} d\mu_{S^2} (x_1, x_2, y) + \int_{S^2} (a_2 x_2) y^{(\alpha-1)} d\mu_{S^2} (x_1, x_2, y) \\
 &= a_1 \int_{S^2} x_1 y^{(\alpha-1)} d\mu_{S^2} (x_1, x_2, y) + a_2 \int_{S^2} x_2 y^{(\alpha-1)} d\mu_{S^2} (x_1, x_2, y) \\
 [a_1 X_1 + a_2 X_2, Y]_\alpha &= a_1 [X_1, Y]_\alpha + a_2 [X_2, Y]_\alpha.
 \end{aligned}$$

4- La démonstration est détaillée dans Samorodnitsky et Taqqu (1994, pages 91–94). ■

2.2.3 Norme

Dans la proposition 8, nous avons vu que

$$[X_j, X_j]_\alpha = \gamma_{X_j} .$$

Posons par convention

$$\gamma_{X_j} = \|X_j\|_\alpha^\alpha .$$

Nous allons montrer que cette quantité définit bien une norme.

Proposition 9 La quantité $\|\cdot\|_\alpha$ définie ci-dessus est une norme sur l'espace vectoriel des vecteurs aléatoires $S\alpha S$.

Preuve de la proposition 9

Il suffit de vérifier les 3 axiomes. Soit X une V.A.R. $S\alpha S$, on a

- $\|X\|_\alpha = 0$ si et seulement si $\gamma_X = 0$ (d'après ce qui précède) et donc $X \stackrel{p.s.}{=} 0$ (car $\varphi_X(t) = 1$).
- il est facile de voir que si X a pour paramètre de dispersion γ_X alors le paramètre de dispersion de aX est $|a|\gamma_X$. Et donc, on obtient

$$\|aX\|_\alpha = |a|\gamma_X = |a|\|X\|_\alpha .$$

- Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$, on a déjà vu dans la première partie de cette proposition que

$$\begin{aligned} \|X_1 + X_2\|_\alpha &= [X_1 + X_2, X_1 + X_2]_\alpha^{1/\alpha} \\ &= \left(\int_{S^1} |x_1 + x_2|^\alpha d\mu_{S^1}(x_1, x_2) \right)^{1/\alpha} \\ &\leq \left(\int_{S^1} |x_1|^\alpha d\mu_{S^1}(x_1, x_2) + \int_{S^1} |x_2|^\alpha d\mu_{S^1}(x_1, x_2) \right)^{1/\alpha} \\ &\leq \left(\int_{S^1} |x_1|^\alpha d\mu_{S^1}(x_1, x_2) \right)^{1/\alpha} + \left(\int_{S^1} |x_2|^\alpha d\mu_{S^1}(x_1, x_2) \right)^{1/\alpha} \\ &\leq \|X_1\|_\alpha + \|X_2\|_\alpha . \end{aligned}$$

Les 3 axiomes définissant une norme étant vérifiés, $\|\cdot\|_\alpha$ définit bien une norme sur l'espace vectoriel des vecteurs $S\alpha S$. ■

Propriété 6 Soit (X, Y) un vecteur $S\alpha S$, on a

$$|[X, Y]_\alpha| \leq \|X\|_\alpha \|Y\|_\alpha^{\alpha-1} .$$

Preuve de la propriété 6

Par l'inégalité de Hölder, on a directement

$$\begin{aligned} |[X, Y]_\alpha| &= \left| \int_{S^2} xy^{\langle \alpha-1 \rangle} d\mu_{S^2}(x, y) \right| \\ &\leq \left(\int_{S^2} |x|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y) \right)^{1/\alpha} \left(\int_{S^2} |y|^{\frac{\alpha-1}{1-1/\alpha}} d\mu_{S^2}(x, y) \right)^{1-1/\alpha} \\ &\leq \|X\|_\alpha \|Y\|_\alpha^{\alpha-1} . \end{aligned}$$

■

2.3 Coefficient de covariation

Rappelons que nous travaillons avec (X, Y) vecteur $S_\alpha S$ où α est strictement supérieur à 1.

Définition 6 Le *coefficient de covariation* de X sur Y est la quantité

$$\{X, Y\}_\alpha = \frac{[X, Y]_\alpha}{[Y, Y]_\alpha}$$

où $[X, Y]_\alpha$ est la covariation entre X et Y , voir la définition 5, page 30.

Proposition 10 Le coefficient de covariation peut être calculé en utilisant des moments d'ordre strictement inférieur à α , de la manière suivante

$$\{X, Y\}_\alpha = \frac{\mathbb{E}(XY^{\langle p-1 \rangle})}{\mathbb{E}(|Y|^p)} \quad \text{avec } 1 \leq p < \alpha.$$

Remarque 12 Il faut faire attention dans l'interprétation de ce résultat. Il serait facile de croire que le coefficient ne dépend plus de α , alors que c'est faux (cf tableau II.1, page 54). Par exemple, le dénominateur, égal au moment d'ordre p de Y , dépend de la loi de Y , qui elle-même dépend directement de α .

Preuve de la proposition 10

D'après le théorème 5, page 28, appliqué au vecteur (X, Y) , on a

$$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{E} \{ \exp [i(t_1 X + t_2 Y)] \} = \exp \left\{ - \int_{S^2} |t_1 x + t_2 y|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y) \right\}.$$

En prenant $\begin{cases} t_1 = \lambda t \\ t_2 = t \end{cases}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \exp [i(\lambda t X + t Y)] \} &= \exp \left\{ - \int_{S^2} |\lambda t x + t y|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y) \right\} \\ \varphi_{\lambda X + Y}(t) &= \exp \left\{ - \left(\int_{S^2} |\lambda x + y|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y) \right) |t|^\alpha \right\} . \end{aligned}$$

De plus, définissons Y_0 tel que $\mathbb{E} \{ \exp(itY_0) \} = \exp \{ -|t|^\alpha \}$. Nous obtenons

$$\mathbb{E} \left\{ \exp \left[it \left(\int_{S^2} |\lambda x + y|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y) \right)^{\frac{1}{\alpha}} Y_0 \right] \right\} = \exp \left\{ - \left(\int_{S^2} |\lambda x + y|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y) \right) |t|^\alpha \right\}$$

$$\varphi_{\left(\int_{S^2} |\lambda x + y|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y) \right)^{\frac{1}{\alpha}} Y_0}(t) = \varphi_{\lambda X + Y}(t).$$

La fonction caractéristique déterminant la loi, l'égalité précédente montre que

$$\lambda X + Y \stackrel{d}{=} \left(\int_{S^2} |\lambda x + y|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y) \right)^{\frac{1}{\alpha}} Y_0.$$

Ceci entraîne que, pour $1 \leq p < \alpha$,

$$\mathbb{E} |\lambda X + Y|^p = \mathbb{E} \left[\left(\int_{S^2} |\lambda x + y|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y) \right)^{\frac{p}{\alpha}} |Y_0|^p \right]$$

$$\mathbb{E} |\lambda X + Y|^p = \left(\int_{S^2} |\lambda x + y|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y) \right)^{\frac{p}{\alpha}} \mathbb{E} (|Y_0|^p) \quad . \quad (I.10)$$

Pour le membre de gauche, on peut démontrer que $\frac{\partial}{\partial \lambda} |\lambda x + y|^p \Big|_{\lambda=0} = pxy^{<p-1>}$ ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbb{E} |\lambda X + Y|^p \Big|_{\lambda=0} = p \mathbb{E} (XY^{<p-1>}) \quad . \quad (I.11)$$

Pour le membre de droite, on a

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\int_{S^2} |\lambda x + y|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y) \right)^{\frac{p}{\alpha}} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial \lambda} u(\lambda)^{\frac{p}{\alpha}} \Big|_{\lambda=0} = \frac{p}{\alpha} u'(0) [u(0)]^{\frac{p}{\alpha}-1}$$

où $u(\lambda) = \int_{S^2} |\lambda x + y|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y)$.

Si on applique à nouveau la formule sur la dérivée de la puissance p -ième, on obtient

$$u'(0) = \alpha \int_{S^2} xy^{<\alpha-1>} d\mu_{S^2}(x, y)$$

et donc que

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\int_{S^2} |\lambda x + y|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y) \right)^{\frac{p}{\alpha}} \Big|_{\lambda=0} = p \int_{S^2} xy^{<\alpha-1>} d\mu_{S^2}(x, y) \left[\int_{S^2} |y|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y) \right]^{\frac{p-\alpha}{\alpha}} \quad . \quad (I.12)$$

Enfin, on a vu que les valeurs (I.11) et (I.12) sont égales, ce qui entraîne que

$$p \mathbb{E} (XY^{<p-1>}) = p \left(\int_{S^2} xy^{<\alpha-1>} d\mu_{S^2}(x, y) \left[\int_{S^2} |y|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y) \right]^{\frac{p-\alpha}{\alpha}} \right) \mathbb{E} (|Y_0|^p) \quad .$$

Pour conclure cette démonstration, on peut remarquer que l'équation (I.10) permet de voir que $\mathbb{E}|Y|^p = \left(\int_{S^2} |y|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y)\right)^{\frac{p}{\alpha}} \mathbb{E}(|Y_0|^p)$ et donc qu'en remplaçant $\mathbb{E}(|Y_0|^p)$ par $\frac{\mathbb{E}|Y|^p}{\left(\int_{S^2} |y|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y)\right)^{\frac{p}{\alpha}}}$ dans l'équation qui précède, on obtient

$$\frac{\mathbb{E}(XY^{<p-1>})}{\mathbb{E}|Y|^p} = \frac{\int_{S^2} xy^{<\alpha-1>} d\mu_{S^2}(x, y)}{\int_{S^2} |y|^\alpha d\mu_{S^2}(x, y)} \stackrel{\text{def}}{=} \{X, Y\}_\alpha .$$

■

Propriété 7

1. Soit $\{X, Y\}$ un vecteur $S\alpha S$. Pour tout couple $\{a, b\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*$, on a

$$\{aX, bY\}_\alpha = \frac{a}{b} \{X, Y\}_\alpha . \quad (\text{I.13})$$

2. Soit $\{X, Y, Z\}$ un vecteur $S\alpha S$. On a

$$\{X + Y, Z\}_\alpha = \{X, Z\}_\alpha + \{Y, Z\}_\alpha . \quad (\text{I.14})$$

Preuve de la propriété 7

1. D'après la définition du coefficient de covariation, on a

$$\begin{aligned} \{aX, bY\}_\alpha &= \frac{[aX, bY]_\alpha}{[bY, bY]_\alpha} = \frac{ab^{<\alpha-1>} [X, Y]_\alpha}{|b|^\alpha [Y, Y]_\alpha} \\ \{aX, bY\}_\alpha &= \frac{a}{b} \frac{[X, Y]_\alpha}{[Y, Y]_\alpha} = \frac{a}{b} \{X, Y\}_\alpha . \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \{X + Y, Z\}_\alpha &= \frac{[X + Y, Z]_\alpha}{[Z, Z]_\alpha} = \frac{[X, Z]_\alpha + [Y, Z]_\alpha}{[Z, Z]_\alpha} \\ &= \frac{[X, Z]_\alpha}{[Z, Z]_\alpha} + \frac{[Y, Z]_\alpha}{[Z, Z]_\alpha} \\ \{X + Y, Z\}_\alpha &= \{X, Z\}_\alpha + \{Y, Z\}_\alpha . \end{aligned}$$

■

Enfin, pour conclure cette section, nous allons faire quelques remarques sur ce coefficient.

Propriété 8 Le coefficient de covariation entre X et Y n'est pas symétrique et n'est pas borné.

Preuve de la propriété 8

Prenons par exemple, $X = aY$; avec $a \neq \pm 1$, il est aisé de voir que

$$\begin{aligned}\{X, Y\}_\alpha &= \frac{[aY, Y]_\alpha}{[Y, Y]_\alpha} = a \\ \{Y, X\}_\alpha &= \frac{[Y, aY]_\alpha}{[aY, aY]_\alpha} = \frac{1}{a} \ ,\end{aligned}$$

et donc que $\{X, Y\}_\alpha \neq \{Y, X\}_\alpha$. La symétrie n'est donc pas vérifiée.

Gardons le même exemple qu'au-dessus, on a vu que $\{X, Y\}_\alpha = a$. Le coefficient de covariation n'est donc pas borné. ■

2.4 Codifférence

Pour toute cette partie, nous supposons que $0 < \alpha \leq 2$.

Avec le coefficient de covariation (vu dans la section précédente, page 35), la codifférence fait partie des quantités qui permettent de mesurer la dépendance entre deux V.A.R. $S_\alpha S$. Nous verrons dans le chapitre suivant (Mesures de dépendance, page 41) que ce ne sont pas les seules et surtout que ce ne sont pas les plus performantes.

Définition 7 La *codifférence* entre X et Y est la quantité

$$\tau_{X,Y} = \|X\|_\alpha^\alpha + \|Y\|_\alpha^\alpha - \|X - Y\|_\alpha^\alpha \ .$$

où $\|\cdot\|_\alpha$ est une quantité définie dans la proposition 8 (page 31).

Propriété 9

1. Comme le coefficient de covariation, dans le cas où α est égal à 2, la codifférence est liée à la covariance.

$$\tau_{X,Y} = \text{Cov}(X, Y) \ .$$

2. De plus, la codifférence est symétrique.

Preuve de la propriété 9

1. On a vu, dans la section 2.2.2 (page 32), que

$$[X, Y]_2 = \frac{1}{2} \text{Cov}(X, Y)$$

et dans la proposition 8 (page 31) que

$$\|X\|_\alpha^\alpha = [X, X]_\alpha \ .$$

Ceci entraîne que

$$\begin{aligned}\|X\|_2^2 &= [X, X]_2 = \frac{1}{2} \text{Cov}(X, X) \\ \|X\|_2^2 &= \frac{1}{2} V(X)\end{aligned}$$

et donc

$$\tau_{X,Y} = \frac{1}{2} \text{Var}(X) + \frac{1}{2} \text{Var}(Y) - \frac{1}{2} \text{Var}(X - Y).$$

Or $\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2 \text{Cov}(X, Y)$, ce qui donne le résultat souhaité soit

$$\tau_{X,Y} = \text{Cov}(X, Y)$$

2. Pour la symétrie, il suffit de montrer que

$$\|X - Y\|_{\alpha}^{\alpha} = \|Y - X\|_{\alpha}^{\alpha}.$$

Or on a vu que $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme et donc que quelle que soit X V.A.R. $S\alpha S$, on a

$$\|X\|_{\alpha} = \|-X\|_{\alpha}.$$

Il suffit d'appliquer ce résultat à la V.A.R. $X - Y$ pour démontrer la symétrie.

■

Chapitre II

Mesures de dépendance

Lorsque deux VAR (Y_1 et Y_2), que nous désirons comparer, ont chacune une variance finie, la mesure classique que l'on utilise est la corrélation. Cette dernière est égale à

$$\frac{\mathbb{E}(Y_1 Y_2) - \mathbb{E}(Y_1) \mathbb{E}(Y_2)}{\sqrt{\text{Var}(Y_1) \text{Var}(Y_2)}}$$

et est notée $\rho(Y_1, Y_2)$. Celle-ci s'interprète très simplement :

- si $|\rho(Y_1, Y_2)| = 1$, on dit que Y_1 et Y_2 sont linéairement corrélées. Plus la corrélation en valeur absolue est proche de 1, plus la dépendance est forte. De plus, si la corrélation est positive (resp. négative), on parle de dépendance positive (resp. négative),
- si $\rho(Y_1, Y_2) = 0$, on dit que Y_1 et Y_2 sont non corrélées. De plus dans le cas où (Y_1, Y_2) est un couple gaussien, il y a équivalence entre le fait que Y_1 et Y_2 sont indépendantes et $\rho(Y_1, Y_2)$ égal à zéro.

Rappelons que pour les lois stables, le moment d'ordre p (avec $p \geq \alpha, 0 < \alpha < 2$) est infini. Par conséquent, hormis le cas gaussien, la variance d'une loi stable est infinie. Ce qui entraîne que la corrélation, en tant que mesure de dépendance, n'est plus valable. Il faut alors trouver d'autres mesures de dépendance utilisant des moments d'ordre inférieur à α (covariation, codifférence,...) ou n'utilisant aucun moment (corrélations basées sur les rangs, sur les densités,...)

Un article, cosigné avec B. Garel et D. Tjøstheim, fait l'objet de la première section de ce chapitre. Dans cet article, après quelques rappels, nous construisons une nouvelle mesure de dépendance. L'utilisation de cette nouvelle mesure dans des cas particuliers simples nous permet de mettre en évidence certaines particularités surprenantes des lois stables concernant la structure de dépendance.

Dans la plupart des résultats de l'article, nous avons pris par hypothèse que la dispersion de X_1 est la même que celle de X_2 . Dans la deuxième section, nous allons généraliser au cas où la dispersion de X_1 est différente de celle de X_2 et aborder les problèmes de biais et de convergence pour les estimateurs du coefficient de covariation et du coefficient de covariation symétrique. Dans une troisième section, nous allons parler du comportement asymptotique du coefficient de covariation. Notamment, nous allons fournir les intervalles de confiance dans le cas d'indépendance.

De plus, à partir de maintenant et jusqu'à la fin du manuscrit, nous supposons que le paramètre α est tel que $1 < \alpha \leq 2$.

1 Revealing some unexpected dependence properties of linear combinations of stable random variables using symmetric covariation

Written by Ludovic d'Estampes^a, Bernard Garel^a and Dag Tjøstheim^b

^aStochastic Models, ENSEEIHT, B.P.7122,
2, rue Camichel 31071 Toulouse Cedex 7, France.

^bDepartment of Mathematics, University of Bergen,
Johs. Brunsgt. 12, N-5008 Bergen, Norway.

Abstract

The covariation is one of the possible dependence measures for variables where distribution is symmetric alpha-stable with parameter alpha between one and two. We introduce a symmetrized and normalized version of the covariation which enables us to reveal some unexpected dependence properties of stable variables.

Key words: dependence measure, covariation, rank, correlation, alpha-stable, infinite variance

1.1 Introduction

In many practical situations of interest in statistics, the observed data cannot be adequately described by a Gaussian distribution. Usually in such cases a distribution with heavier tails is needed, particularly in the fields of telecommunications and finance. From a theoretical point of view, the class of stable distributions is the most satisfying heavy-tail generalization. It contains the Gaussian distribution as a special case, and it retains at least some of its properties. For example, it is infinitely divisible, linear combinations of stable variables are still stable and the conditional expectation, granted that it exists, of a stable variable X with respect to another variable Y is still a linear function of Y . Moreover an extensive asymptotic theory has been developed (see Samorodnitsky and Taqqu (1994)).

A main problem with non-Gaussian models has been the complexity of calculations, but recent developments of data processing techniques have made both model fitting with stable distributions and simulation of stable variables practical. On the other hand, because of the infinite variance of these distributions, the much applied correlation tool for assessing dependence cannot be used. So, other dependence measures are needed using moments of orders less than two.

Samorodnitsky and Taqqu (1994) in chapter 4 of their book discuss several alternatives that have been used. Most of the interest seems to center around the so-called covariation measure. This measure was treated in the early papers by Miller (1978) and Cambanis and Miller (1981). Since then there has been a number of papers with many of the results summed up in Nikias and Shao (1995). A recent alternative contribution is Pinkse (1998) which introduced a non parametric serial dependence measure with the help of the characteristic function. General measures of dependence and resulting tests of independence are surveyed by Tjøstheim (1996). Further developments can be found in Hong (1998) and Hong and White (2003).

In this paper we will focus on dependence properties of linear combinations of stable variables. Our main tool is introduced in section 1.2. It is a normalized and symmetrized version of the covariation measure. We use it to reveal some unexpected dependence properties in section 1.3. For instance, it will be shown that linear combinations exist that display both positive and negative dependence at the same time. Finally, in section 1.4, we present some finite sample results for the new symmetrized covariation measure and compare it to some other standard measures.

1.2 Covariation and symmetric covariation

We start by giving some basic properties of symmetric alpha-stable distributions.

Definition 8 A vector $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ has a symmetric alpha-stable ($S\alpha S$) distribution if and only if (iff) its characteristic function φ is given by

$$\forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi_{(X_1, \dots, X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle|^\alpha d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) \right\}$$

where $\left\{ \begin{array}{l} \mu_{S^{n-1}} \text{ is a symmetric measure, called the spectral measure, on the} \\ \text{Borel sets of the unit sphere } S^{n-1} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}, \\ \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ represents the usual scalar product on } \mathbb{R}^n, \\ \alpha \in]0; 2]; \underline{t} = (t_1, \dots, t_n); \underline{x} = (x_1, \dots, x_n). \end{array} \right.$

Definition 9 A real random variable X has a $S\alpha S$ distribution, with parameters (γ, α) where $\gamma > 0$ is called the dispersion of X , iff its characteristic function is given by

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \exp \{ -\gamma |t|^\alpha \}.$$

Remarks 13

1. If $\underline{X}$ is a $S\alpha S$ vector, then every component X_i is a $S\alpha S$ random variable with parameters (γ_{X_i}, α) . We have

$$\gamma_{X_i} = \int_{S^{n-1}} |x_i|^\alpha d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) \quad \text{and} \quad \varphi_{X_i}(t_i) = \varphi_{(X_1, \dots, X_n)}(0, \dots, 0, t_i, 0, \dots, 0).$$

2. The random vector $\underline{X}$ is a $S\alpha S$ random vector iff all linear combination $\sum_{j=1}^n a_j X_j$ is a $S\alpha S$ random variable.
3. If X_1 and X_2 are two independent $S\alpha S$ random variables, then (X_1, X_2) is a $S\alpha S$ random vector.

The following proposition follows directly from point 2 of the preceding remarks.

Proposition 11 Let $\underline{X}$ be a $S\alpha S$ random vector and M a $m \times n$ real matrix. If $\underline{Y} = M\underline{X}$, then $\underline{Y}$ is a $S\alpha S$ random vector.

For the rest of the paper, we assume that α is greater than 1. The covariation generalizes the covariance to the situation where there are no second moments.

Definition 10 Let (Y_1, Y_2) be a $S\alpha S$ random vector, the covariation of Y_1 on Y_2 is equal to

$$[Y_1, Y_2]_\alpha = \int_{S^1} y_1 y_2^{\langle \alpha-1 \rangle} d\mu_{S^1}(y_1, y_2)$$

where μ_{S^1} is the spectral measure on the unit sphere S^1 and where we have used the notation

$$u^{\langle v \rangle} = \text{sign}(u) \cdot |u|^v.$$

Moreover, the **coefficient of covariation** of Y_1 on Y_2 , is the quantity:

$$\{Y_1, Y_2\}_\alpha = \frac{[Y_1, Y_2]_\alpha}{[Y_2, Y_2]_\alpha}.$$

For $\alpha = 2$, $[Y_1, Y_2]_2 = \frac{1}{2} \text{Cov}(Y_1, Y_2)$. Note that $[Y, Y]_\alpha = \gamma_Y$.

Properties of the covariation are given in Samorodnitsky and Taqqu (1994, pp. 63-64). Note that if X and Y are two independent $S\alpha S$ random variables then $[X, Y]_\alpha = 0$. Furthermore, for $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $[aX, bY]_\alpha = ab^{\langle \alpha-1 \rangle} [X, Y]_\alpha$, from which it follows that for $c \neq 0$,

$$\{cX, X\}_\alpha = \frac{[cX, X]_\alpha}{[X, X]_\alpha} = c \quad \text{and} \quad \{X, cX\}_\alpha = \frac{[X, cX]_\alpha}{[cX, cX]_\alpha} = \frac{1}{c}.$$

The two preceding equalities demonstrate the well-known fact that the coefficient of covariation is not symmetric and is not bounded. Using theorem 4.1.2 of Samorodnitsky and Taqqu (1994, p.175), we have for the conditional expectation

$$\mathbb{E}(Y_2 | Y_1) = \{Y_2, Y_1\}_\alpha Y_1, \tag{II.1}$$

so that in general $\mathbb{E}(Y_2 | Y_1) \neq \mathbb{E}(Y_1 | Y_2)$. In the Gaussian case ($\alpha = 2$) we also have $\mathbb{E}(Y_2 | Y_1) \neq \mathbb{E}(Y_1 | Y_2)$ unless $\text{Var}(Y_1) = \text{Var}(Y_2)$. But the dependence is unambiguous in the sense that $\rho(Y_1, Y_2) = \rho(Y_2, Y_1)$ where ρ denotes ordinary correlation and the regression line $\mathbb{E}(Y_1 | Y_2)$ has a positive slope iff $\mathbb{E}(Y_2 | Y_1)$ has a positive slope. It will be shown in subsection 3 that for stable variables with $\alpha < 2$, the dependence is ambiguous. It is possible to find examples where the slope of $\mathbb{E}(Y_2 | Y_1)$ is positive ($\{Y_2, Y_1\}_\alpha > 0$), whereas the slope of $\mathbb{E}(Y_1 | Y_2)$ is negative ($\{Y_1, Y_2\}_\alpha < 0$). An example is given in the following scatter diagram.

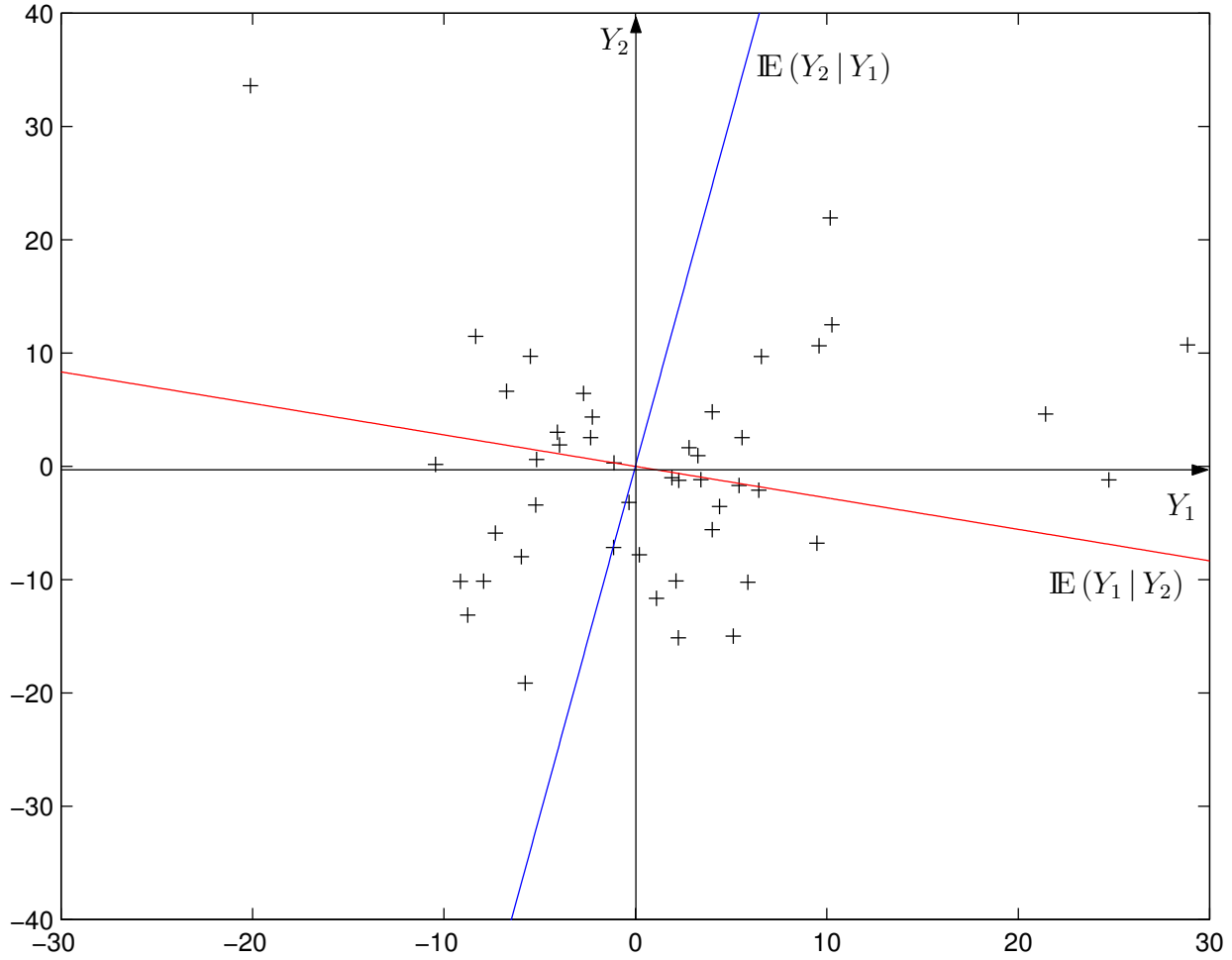


Figure II.1: Plot of 50 realizations of a bivariate $S\alpha S$ random vector with $\alpha = 1.5$. The theoretical regression line $\mathbb{E}(Y_1 | Y_2)$ and $\mathbb{E}(Y_2 | Y_1)$ are drawn in. This example comes from the system (II.4) with the following parameters: $\gamma_{X_1} = 3; \gamma_{X_2} = 2; a_1 = 2^{(4/3)}; a_2 = 1; a_3 = 1; a_4 = -3^{(4/3)}$.

An important instrument needed to derive the results of the next section is the symmetric coefficient of covariation. We build this measure by multiplying the coefficient of covariation of Y_1 on Y_2 and the coefficient of covariation of Y_2 on Y_1 .

Definition 11 Let (Y_1, Y_2) be a $S\alpha S$ random vector. The **symmetric coefficient of covariation** between Y_1 and Y_2 is equal to

$$\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = \{Y_1, Y_2\}_\alpha \{Y_2, Y_1\}_\alpha = \frac{[Y_1, Y_2]_\alpha [Y_2, Y_1]_\alpha}{[Y_1, Y_1]_\alpha [Y_2, Y_2]_\alpha}. \quad (\text{II.2})$$

Remark 14 Our first objective was to symmetrize the coefficient of covariation. A few possibilities could come to mind. For instance, it would be possible to take the average

$$\frac{1}{2} \left(\{Y_1, Y_2\}_\alpha + \{Y_2, Y_1\}_\alpha \right). \quad (\text{II.3})$$

It is clear from the conditional expectation (II.1) that the coefficients of covariation measure the linear dependence. It is easy to come up with examples where one of the two coefficients $\{Y_1, Y_2\}_\alpha$ and $\{Y_2, Y_1\}_\alpha$ is 0 while the other is non zero. In this case, the product (II.2) is 0. The advantage of the average (II.3) is to preserve the indication of a linear dependence, excepted in specific cases where $\{Y_1, Y_2\}_\alpha$ and $\{Y_2, Y_1\}_\alpha$ would have opposite sign and the same magnitude, which lead to 0 also. However, this average keeps the unboundedness drawback. Therefore, the idea of our proposal is to retrieve some fine properties of the correlation coefficient (see proposition 12 and 14).

First we show that $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2)$ is bounded, taking values between -1 and 1.

Proposition 12 Let (Y_1, Y_2) be a $S\alpha S$ random vector. We have

1- $|\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2)| \leq 1$.

2- If Y_1 and Y_2 are two independent $S\alpha S$ random variables, then $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = 0$.

Proof

1- We know that (see Samorodnitsky and Taqqu (1994, Property 2.8.4, p.96))

$$| [Y_1, Y_2]_\alpha | \leq \|Y_1\|_\alpha \|Y_2\|_\alpha^{\alpha-1} ,$$

$$\text{and } | [Y_2, Y_1]_\alpha | \leq \|Y_2\|_\alpha \|Y_1\|_\alpha^{\alpha-1} \text{ where } \|U\|_\alpha = ([U, U]_\alpha)^{1/\alpha} .$$

$$\text{So } | [Y_1, Y_2]_\alpha | \times | [Y_2, Y_1]_\alpha | \leq \|Y_1\|_\alpha \|Y_2\|_\alpha^{\alpha-1} \times \|Y_2\|_\alpha \|Y_1\|_\alpha^{\alpha-1}$$

$$\text{which entails that } \left| \frac{[Y_1, Y_2]_\alpha [Y_2, Y_1]_\alpha}{[Y_1, Y_1]_\alpha [Y_2, Y_2]_\alpha} \right| \leq 1 .$$

2- We know that $[Y_1, Y_2]_\alpha$ is equal to zero. Because the denominator is different from 0, we obtain $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = \frac{[Y_1, Y_2]_\alpha [Y_2, Y_1]_\alpha}{[Y_1, Y_1]_\alpha [Y_2, Y_2]_\alpha} = 0$.

■

In the Gaussian case (for $\alpha = 2$), $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = \rho^2(Y_1, Y_2)$, so that the symmetric coefficient of covariation is only measuring the magnitude of the dependence not its direction. One would perhaps expect that $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) \geq 0$ also for $\alpha < 2$, but it turns out that we may have $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) < 0$, meaning that $[Y_1, Y_2]_\alpha$ and $[Y_2, Y_1]_\alpha$ may have different signs, one indicating positive dependence, the other negative. Hence $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2)$ does not only have the capability of measuring the strength of what we may call concordant dependence, but also the degree of discordant dependence between two variables Y_1 and Y_2 . A value of $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = -1$ will indicate a very high degree of discordance in the dependence relationship between Y_1 and Y_2 . It will be seen next that such a value is possible as a limiting case.

1.3 Some unexpected dependence properties of linear combinations of stable variables

Let X_1 and X_2 be independent $S\alpha S$ variables with $1 < \alpha \leq 2$ and let

$$Y_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2 \text{ and } Y_2 = a_3 X_1 + a_4 X_2 . \quad (\text{II.4})$$

In the Gaussian case ($\alpha = 2$), we have

$$\mathbb{E}(Y_1 Y_2) = a_1 a_3 \mathbb{E}(X_1^2) + a_2 a_4 \mathbb{E}(X_2^2) + (a_1 a_4 + a_2 a_3) \mathbb{E}(X_1 X_2).$$

With no restriction we assume that $\mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{E}(X_2^2)$. It is seen that Y_1 and Y_2 are independent iff $a_1 a_3 = -a_2 a_4$. In this case, $\mathbb{E}(Y_1 | Y_2) = \mathbb{E}(Y_2 | Y_1) = 0$. However, as will be seen in the next proposition, such linear combinations in general yield $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) < 0$. By (II.1) and (II.2), this means that if Y_2 increases with Y_1 in the regression of Y_2 on Y_1 , then Y_1 decreases with increasing Y_2 in the regression of Y_1 on Y_2 . Again, mainly to ease notation, we assume $[X_1, X_1]_\alpha = \gamma_{X_1} = \gamma_{X_2} = [X_2, X_2]_\alpha$, which corresponds to $\mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{E}(X_2^2)$ in the Gaussian case.

Proposition 13 Consider the system (II.4) for $1 < \alpha \leq 2$. Then

$$\begin{aligned} \text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = & \frac{a_1 a_3 \text{sign}(a_1 a_3) |a_1 a_3|^{\alpha-1} + a_2 a_4 \text{sign}(a_2 a_4) |a_2 a_4|^{\alpha-1}}{(|a_3|^\alpha + |a_4|^\alpha)(|a_1|^\alpha + |a_2|^\alpha)} \\ & + \frac{a_1 a_4 \text{sign}(a_2 a_3) |a_2 a_3|^{\alpha-1} + a_2 a_3 \text{sign}(a_1 a_4) |a_1 a_4|^{\alpha-1}}{(|a_3|^\alpha + |a_4|^\alpha)(|a_1|^\alpha + |a_2|^\alpha)}. \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

If $a_1 a_3 = -a_2 a_4$, this simplifies to

$$\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = -\frac{(a_1 a_3)^2 \left\{ |a_2 a_3|^{\frac{\alpha}{2}-1} - |a_1 a_4|^{\frac{\alpha}{2}-1} \right\}^2}{(|a_1|^\alpha + |a_2|^\alpha)(|a_3|^\alpha + |a_4|^\alpha)} \quad (\text{II.6})$$

which is negative.

Proof

Using independence between X_1 and X_2 in (II.4), we have

$$\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = \frac{a_1 a_3^{\langle \alpha-1 \rangle} + a_2 a_4^{\langle \alpha-1 \rangle}}{|a_3|^\alpha + |a_4|^\alpha} \times \frac{a_3 a_1^{\langle \alpha-1 \rangle} + a_4 a_2^{\langle \alpha-1 \rangle}}{|a_1|^\alpha + |a_2|^\alpha}.$$

Using the definition of $u^{(v)}$ (definition 10, page 44), we obtain (II.5). Inserting $a_1 a_3 = -a_2 a_4$, we have:

$$\begin{aligned} a_1 a_3 \text{sign}(a_1 a_3) |a_1 a_3|^{\alpha-1} + a_2 a_4 \text{sign}(a_2 a_4) |a_2 a_4|^{\alpha-1} &= 2 |a_1|^\alpha |a_3|^\alpha \\ &= 2 |a_1|^{\frac{\alpha}{2}} |a_2|^{\frac{\alpha}{2}} |a_3|^{\frac{\alpha}{2}} |a_4|^{\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Moreover,

$$\begin{aligned} a_1 a_4 \text{sign}(a_2 a_3) |a_2 a_3|^{\alpha-1} &= \text{sign}(a_1 a_2 a_3 a_4) |a_1| |a_4| |a_2|^{\alpha-1} |a_3|^{\alpha-1} \\ &= -|a_1| |a_4| |a_2|^{\alpha-1} |a_3|^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

where $\text{sign}(a_1 a_2 a_3 a_4) = -1$ because $a_1 a_3 = -a_2 a_4$. Similarly, we have

$$a_2 a_3 \text{sign}(a_1 a_4) |a_1 a_4|^{\alpha-1} = -|a_2| |a_3| |a_1|^{\alpha-1} |a_4|^{\alpha-1}.$$

Inserted in (II.5), this yields

$$\begin{aligned} \text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) &= \frac{2 |a_1|^{\frac{\alpha}{2}} |a_2|^{\frac{\alpha}{2}} |a_3|^{\frac{\alpha}{2}} |a_4|^{\frac{\alpha}{2}}}{(|a_3|^\alpha + |a_4|^\alpha) (|a_1|^\alpha + |a_2|^\alpha)} \\ &\quad - \frac{|a_1| |a_4| |a_2|^{\alpha-1} |a_3|^{\alpha-1} + |a_2| |a_3| |a_1|^{\alpha-1} |a_4|^{\alpha-1}}{(|a_3|^\alpha + |a_4|^\alpha) (|a_1|^\alpha + |a_2|^\alpha)}, \\ \text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) &= \frac{-|a_1 a_2 a_3 a_4| \left(|a_2 a_3|^{\alpha-2} - 2 |a_2 a_3|^{\frac{\alpha}{2}-1} |a_1 a_4|^{\frac{\alpha}{2}-1} + |a_1 a_4|^{\alpha-2} \right)}{(|a_3|^\alpha + |a_4|^\alpha) (|a_1|^\alpha + |a_2|^\alpha)} \end{aligned}$$

from which (II.6) follows by setting $|a_1 a_3| = |a_2 a_4|$. ■

It is seen from (II.6) that once $a_1 a_3 = -a_2 a_4$ holds, $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = 0$ if $\alpha = 2$ irrespective of the values of a_1, a_2, a_3, a_4 . This is of course the Gaussian independence case. We have $\text{Corr}_\alpha = 0$ also if one of the a_i -s is equal to zero or if $|a_2 a_3| = |a_1 a_4|$. The latter case does not imply independence for $\alpha < 2$ (cf Samorodnitsky and Taqqu (1994, Proposition 2.9.5, p.102)). In fact it follows from this proposition that for the system (II.4) we cannot have independence between Y_1 and Y_2 for $\alpha < 2$ if $a_1 a_2 a_3 a_4 \neq 0$.

It is possible to obtain a maximum case of ambiguity in the dependence relationship between Y_1 and Y_2 in that $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) \rightarrow -1$ as $\alpha \rightarrow 1$, $a_1 = a_4 \rightarrow 0$ and $|a_3| = |a_2|$. In this limiting case, the regression lines $\mathbb{E}(Y_2 | Y_1)$ and $\mathbb{E}(Y_1 | Y_2)$ are orthogonal to each other.

It is fully possible to obtain $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) < 0$ also when the condition $a_1 a_3 = -a_2 a_4$ does not hold. One can also say something about how often this will occur. To see this, rewrite $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2)$ as

$$\begin{aligned} \text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) &= \left(\frac{|a_1| |a_3|^{\alpha-1} \text{sign}(a_1 a_3) + |a_2| |a_4|^{\alpha-1} \text{sign}(a_2 a_4)}{|a_3|^\alpha + |a_4|^\alpha} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{|a_3| |a_1|^{\alpha-1} \text{sign}(a_1 a_3) + |a_4| |a_2|^{\alpha-1} \text{sign}(a_2 a_4)}{|a_1|^\alpha + |a_2|^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Next, note that there are four possible combinations for the $\text{sign}(a_1 a_3)$ and $\text{sign}(a_2 a_4)$.

- (i) $\text{sign}(a_1 a_3) = \text{sign}(a_2 a_4) = +1$,
- (ii) $\text{sign}(a_1 a_3) = \text{sign}(a_2 a_4) = -1$,
- (iii) $\text{sign}(a_1 a_3) = +1$; $\text{sign}(a_2 a_4) = -1$,
- (iv) $\text{sign}(a_1 a_3) = -1$; $\text{sign}(a_2 a_4) = +1$.

In situations (i) and (ii), we have

$$\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = \frac{(|a_1| |a_3|^{\alpha-1} + |a_2| |a_4|^{\alpha-1}) (|a_3| |a_1|^{\alpha-1} + |a_4| |a_2|^{\alpha-1})}{(|a_3|^\alpha + |a_4|^\alpha) (|a_1|^\alpha + |a_2|^\alpha)}$$

which is positive, whereas in situations **(iii)** and **(iv)**, we have

$$\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = \frac{(|a_1| |a_3|^{\alpha-1} - |a_2| |a_4|^{\alpha-1}) (|a_3| |a_1|^{\alpha-1} - |a_4| |a_2|^{\alpha-1})}{(|a_3|^\alpha + |a_4|^\alpha) (|a_1|^\alpha + |a_2|^\alpha)}.$$

It is seen that the last expression can be negative as soon as $\alpha < 2$.

If we let $\alpha \rightarrow 1$, possibilities **(i)** and **(ii)** mean that $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) \rightarrow 1$. On the other hand, possibilities **(iii)** and **(iv)** both imply

$$\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) \longrightarrow \frac{(|a_1| - |a_2|) (|a_3| - |a_4|)}{(|a_3| + |a_4|) (|a_1| + |a_2|)}.$$

Thus if the coefficients are drawn at random from uniform distributions on $[-1; 1]$, say, then in the long run 50% will give $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) \approx 1$, which is the greatest possible value of the symmetric coefficient of covariation. The remaining 50% will be approximately symmetrically distributed around zero, i.e. about 25% will result in an ambiguous dependence relationship. This is confirmed in the four simulation plots in Figure II.2.

From the above expressions, it is easy to find values a_1, a_2, a_3, a_4 for which $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = 0$. Moreover, we can also find values where $\{Y_1, Y_2\}_\alpha = 0$ and $\{Y_2, Y_1\}_\alpha \neq 0$. For $\alpha < 2$ neither of these examples would in general imply independence due to Samorodnitsky and Taqqu (1994, Proposition 2.9.5, p.102).

One can also ask the question as to when $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = 1$.

Proposition 14 Consider the system (II.4) for $1 < \alpha \leq 2$. Then

$$\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = 1 \iff a_1 a_4 = a_2 a_3 \quad .$$

Proof

By (II.5), we have

$$\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = \frac{|a_1 a_3|^\alpha + |a_2 a_4|^\alpha + \text{sign}(a_1 a_2 a_3 a_4) (|a_1 a_4| |a_2 a_3|^{\alpha-1} + |a_2 a_3| |a_1 a_4|^{\alpha-1})}{(|a_3|^\alpha + |a_4|^\alpha) (|a_1|^\alpha + |a_2|^\alpha)}.$$

Hence, $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = 1$ iff

$$\text{sign}(a_1 a_2 a_3 a_4) (|a_1 a_4| |a_2 a_3|^{\alpha-1} + |a_2 a_3| |a_1 a_4|^{\alpha-1}) = |a_1 a_4|^\alpha + |a_2 a_3|^\alpha \quad . \quad (\text{II.7})$$

At this point, there are two cases.

First case, $\text{sign}(a_1 a_2 a_3 a_4) = 0$; then first we can take $a_1 = 0$. Inserting in the preceding equation, we have

$$|a_2 a_3|^\alpha = 0 \Rightarrow a_2 a_3 = 0.$$

In the same way, we have the three following implications

$$\begin{aligned} a_3 = 0 &\Rightarrow a_1 a_4 = 0, \\ a_2 = 0 &\Rightarrow a_1 a_4 = 0, \\ a_4 = 0 &\Rightarrow a_2 a_3 = 0, \quad \text{and so, we have } \text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = 1 \Leftrightarrow a_1 a_4 = a_2 a_3. \end{aligned}$$

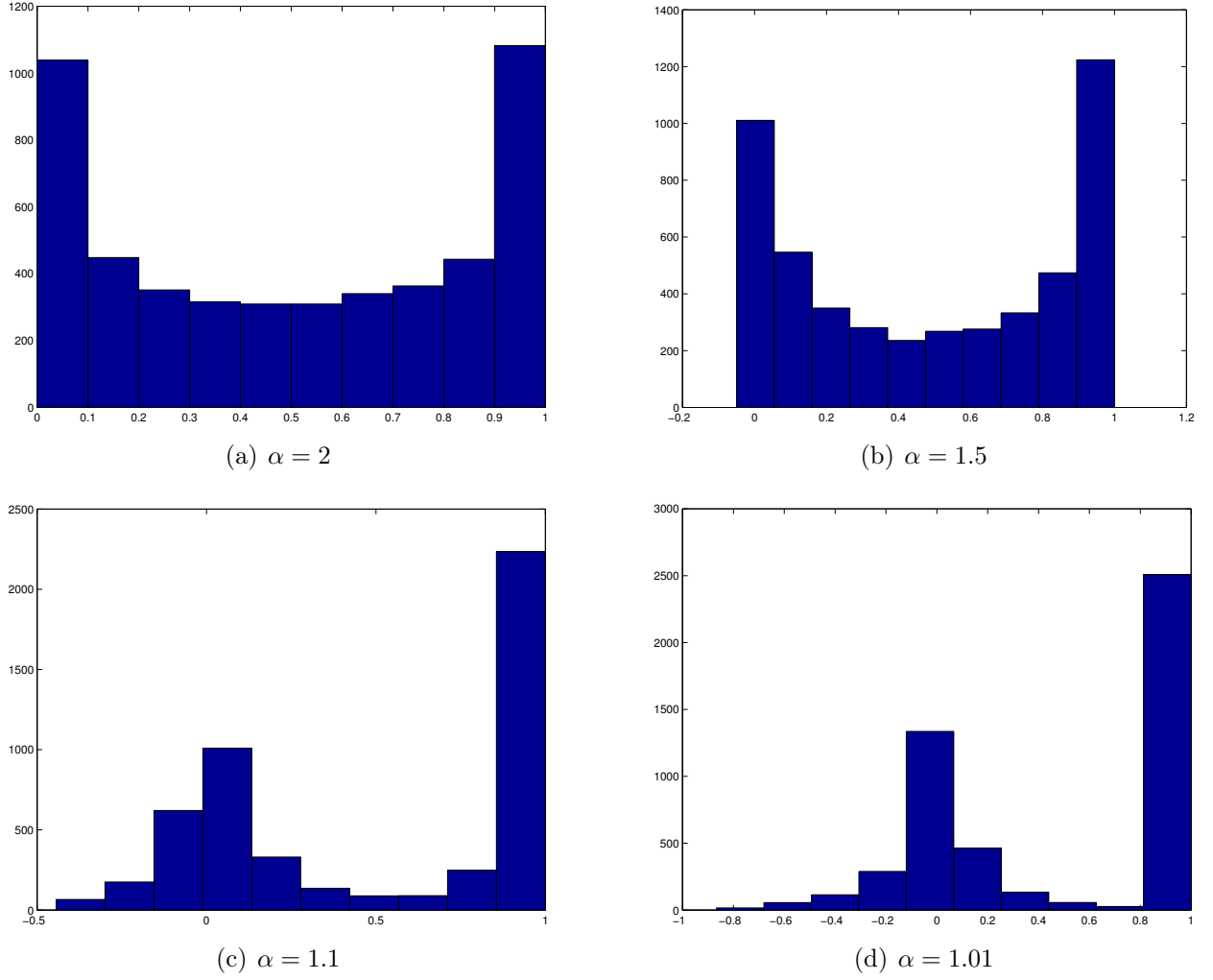


Figure II.2: Histogram of 5000 symmetric coefficients of covariation for system (II.4) with different values of α . The a_i -s have been drawn independently from uniform distribution on $[-1, 1]$.

Second case, $\text{sign}(a_1 a_2 a_3 a_4) \neq 0$; then equation (II.7) is equivalent to

$$[|a_1 a_4| - \text{sign}(a_1 a_2 a_3 a_4) |a_2 a_3|] [|a_1 a_4|^{\alpha-1} - \text{sign}(a_1 a_2 a_3 a_4) |a_2 a_3|^{\alpha-1}] = 0 .$$

If $\text{sign}(a_1 a_2 a_3 a_4) = -1$, then there is no solution.

If $\text{sign}(a_1 a_2 a_3 a_4) = +1$, then $a_1 a_4 = a_2 a_3$.

■

In the Gaussian case, $\rho^2(Y_1, Y_2) = \text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = 1$ is equivalent to $Y_1 = kY_2$ for some constant k . In the general case for $1 < \alpha < 2$, it is easily seen from proposition 14 that if $X_1 \neq 0$ then $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = 1$ is equivalent to $a_4 Y_1 = a_2 Y_2$, again Y_1 being a multiple of Y_2 .

1.4 A comparison of dependence measures

We close this paper by examining some finite sample properties of the symmetric covariation $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2)$ and comparing to other dependence measures for stable variables, namely the covariation $\{Y_1, Y_2\}_\alpha$ and two rank-based measures.

1.4.1 Other dependence measures

We consider two rank-based measures of dependence: the Spearman and the van der Waerden rank correlation coefficients.

Definition 12 Let $(X_1, \dots, X_n)$ be n real random variables. The associated vector of ranks, $(R_1, \dots, R_n)$ is defined by

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, R_i = 1 + \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{]0; +\infty[}(X_i - X_j) \quad .$$

Suppose that $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ is a sample of a continuous distribution on $\mathbb{R}^2$. If we associate to X (resp. Y) the vector of ranks $(R_i)_{i=1, \dots, n}$ (resp. $(S_i)_{i=1, \dots, n}$), we calculate two measures of dependence.

Definition 13 With the preceding notations, the **Spearman correlation coefficient** r_S and the **van der Waerden correlation coefficient** r_W are given by

$$\begin{aligned} r_S &= 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n (R_i - S_i)^2, \\ r_W &= \frac{\sum_{i=1}^n \Phi^{-1}\left(\frac{R_i}{n+1}\right) \Phi^{-1}\left(\frac{S_i}{n+1}\right)}{\sum_{i=1}^n \left[\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) \right]^2}, \end{aligned}$$

where Φ^{-1} is the inverse cumulative distribution function of a standard normal variable.

These coefficients exist independently of the existence of any moments. So it is tempting to use them as a measure of dependence for alpha stable random variables. In particular, we have the following result.

Proposition 15 Under the hypothesis of independence of X and Y , we have the asymptotic result

$$\begin{aligned} \sqrt{n-1} r_S &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0; 1), \\ \sqrt{n-1} r_W &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0; 1), \end{aligned}$$

where $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ denotes convergence in distribution.

1.4.2 Simulations

We will compare the new measure $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2)$ to the other measures by simulations. We recall an important property of the coefficient of covariation.

Proposition 16 Let (Y_1, Y_2) be a $S\alpha S$ random vector with $\alpha > 1$, we have for all $1 \leq p < \alpha$,

$$\{Y_1, Y_2\}_\alpha = \frac{[Y_1, Y_2]_\alpha}{[Y_2, Y_2]_\alpha} = \frac{\mathbb{E} [Y_1 Y_2^{(p-1)}]}{\mathbb{E} |Y_2|^p}.$$

Samorodnitsky and Taqqu (1994, pp.94-95) gave the proof of this result for $1 < p < \alpha$. Following the same lines as Samorodnitsky and Taqqu, the property is easily obtained for $p = 1$. Note that this last result is used by several authors, such as Nikias and Shao (1995, p.47, equation (4.4)) or Gallagher (2001, p.382, equation (1.5)).

Taking $p = 1$ in the preceding equation leads to a very convenient estimator of $\{Y_1, Y_2\}_\alpha$.

Let $(Y_{1,i})_{1 \leq i \leq n}$ and $(Y_{2,i})_{1 \leq i \leq n}$ be two vectors of realizations of Y_1 and Y_2 . To estimate $\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2)$, we used the following quantity

$$\widehat{\text{Corr}}_\alpha(Y_1, Y_2) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_{1,i} \text{sign}(Y_{2,i})}{\sum_{i=1}^n |Y_{2,i}|} \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_{2,i} \text{sign}(Y_{1,i})}{\sum_{i=1}^n |Y_{1,i}|} \right)$$

which is the product of the estimator of the covariation $\{Y_1, Y_2\}_\alpha$ by the estimator of the covariation $\{Y_2, Y_1\}_\alpha$.

The algorithm of Chambers et al. (1976) is used to simulate $S\alpha S$ independent random variables.

We simulated 500 realizations of X_1 and X_2 , with the same dispersion $\gamma_{X_1} = \gamma_{X_2} = 1$. Then, we calculated the different measures of dependence between Y_1 and Y_2 generated by (II.4). We made 100 replications. In Table 1 there are two types of cells:

1. with a single value in the cell, it represents the theoretical value of the dependence measure (respectively the coefficient of covariation of Y_1 on Y_2 , the coefficient of covariation of Y_2 on Y_1 and the symmetric coefficient of covariation between Y_1 and Y_2);
2. with three values; they represent the mean (upper value in the cell), the mean deviation (center value in the cell) and the 68% interquartile difference (lower value in the cell) of the 100-sample dependence measures (respectively the coefficient of covariation of Y_1 on Y_2 , the coefficient of covariation of Y_2 on Y_1 , the symmetric coefficient of covariation between Y_1 and Y_2 , the Spearman correlation coefficient and the van der Waerden correlation coefficient).

We only study two sets of the four parameters a_1, a_2, a_3 and a_4 . For the first case, shown in Table 1-(a), we have independence between Y_1 and Y_2 . In the second case, shown in

Table 1-(b), the parameters were drawn at random from uniform distributions, resulting in $a_1 = 0.09, a_2 = 0.53, a_3 = -0.77, a_4 = -0.88$.

We recall that for model (II.4), we have

$$\{Y_1, Y_2\}_\alpha = \frac{a_1 a_3^{\langle \alpha-1 \rangle} + a_2 a_4^{\langle \alpha-1 \rangle}}{|a_3|^\alpha + |a_4|^\alpha}.$$

Note that, of the three statistics based on the coefficient of covariation, only $\widehat{\{Y_1, Y_2\}}_\alpha$ can be used to estimate the slope of the regression line.

In Table 1-(a), we see that the sample coefficients of covariation have a much bigger mean deviation and interquartile difference than the other measures. Surprisingly the value of $\widehat{\text{Corr}}_\alpha$ is quite constant around 2×10^{-3} , but its mean deviation and its interquartile difference are growing when α decays. However this variation is very small, possibly allowing a better identification of independence as the two rank-based coefficients of correlation do it.

For the Table 1-(b) we remark:

1. The absolute theoretical value of $\{Y_1, Y_2\}_\alpha$ decreases as α goes to 1 whereas the absolute theoretical value of $\{Y_2, Y_1\}_\alpha$ increases. It seems to be another drawback of this measure of dependence.
2. In the Gaussian case, the dependence between Y_1 and Y_2 is negative. The direction of dependence is detected by the two rank-based coefficients of correlation and $\{Y_1, Y_2\}_\alpha$ but not of course by the symmetric coefficient of covariation.
3. Even the distribution-free, rank-based coefficients of correlation vary when alpha tends to 1. This means that there is a possible change in the dependence structure for alpha close to 1 (the smaller α , the stronger the dependence). However in terms of mean deviation and interquartile difference the three last coefficients seem quite efficient.

We made a number of additional simulations, with different sets of parameters (a_1, a_2, a_3, a_4) and different dispersions $(\gamma_{X_1}, \gamma_{X_2})$. They gave similar results: the rank-based coefficients of correlation and the symmetric coefficient of covariation appear to be more precise in terms of mean deviation and interquartile difference.

Acknowledgements The authors thank the Referee and the Editor for their helpful comments and suggestions which improved the presentation of the paper.

(a) $a_1 = 1; a_2 = 0; a_3 = 0; a_4 = 1$

α	2	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1
$\{Y_1, Y_2\}_\alpha$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\widehat{\{Y_1, Y_2\}}_\alpha$	-0.0006 0.0486 0.1317	0.0022 0.0538 0.1203	0.0078 0.0672 0.1477	-0.0037 0.0853 0.1651	-0.0107 0.0969 0.1933	-0.0137 0.1251 0.2300	0.0369 0.1832 0.2832	-0.0188 0.1583 0.3576	0.1093 0.3718 0.4933	-0.1033 0.2606 0.5110
$\{Y_2, Y_1\}_\alpha$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\widehat{\{Y_2, Y_1\}}_\alpha$	0.0012 0.0450 0.1106	-0.0043 0.0521 0.1226	0.0066 0.0605 0.1404	-0.0230 0.1055 0.1561	0.0029 0.1087 0.2150	0.0284 0.0964 0.2105	-0.0201 0.1312 0.2591	0.0097 0.2063 0.4024	-0.0871 0.2961 0.4405	-0.5173 1.2912 0.7531
Corr_α	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\widehat{\text{Corr}}_\alpha$	0.0024 0.0029 0.0060	0.0020 0.0035 0.0053	0.0026 0.0048 0.0078	0.0018 0.0063 0.0125	0.0023 0.0071 0.0147	0.0024 0.0095 0.0176	0.0024 0.0141 0.0312	-0.0041 0.0215 0.0410	0.0016 0.0370 0.0700	0.0016 0.0410 0.0784
r_S	-0.0007 0.0363 0.0994	-0.0007 0.0394 0.0907	0.0035 0.0315 0.0730	-0.0037 0.0354 0.0994	-0.0025 0.0322 0.0801	0.0030 0.0388 0.0959	-0.0053 0.0389 0.1018	0.0012 0.0327 0.0906	-0.0037 0.0355 0.0883	-0.0053 0.0327 0.0833
r_W	-0.0033 0.0364 0.0943	0.0009 0.0393 0.1026	0.0006 0.0331 0.0851	-0.0054 0.0343 0.0863	-0.0029 0.0359 0.0903	0.0024 0.0382 0.0979	-0.0050 0.0395 0.1055	0.0024 0.0329 0.0826	-0.0014 0.0358 0.0815	-0.0026 0.0326 0.0849

(b) $a_1 = 0.09; a_2 = 0.53; a_3 = -0.77; a_4 = -0.88$

α	2	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1
$\{Y_1, Y_2\}_\alpha$	-0.3918	-0.3902	-0.3886	-0.3870	-0.3854	-0.3838	-0.3822	-0.3806	-0.3790	-0.3774
$\widehat{\{Y_1, Y_2\}}_\alpha$	-0.3912 0.0087 0.0204	-0.3910 0.0110 0.0260	-0.3874 0.0149 0.0350	-0.3876 0.0164 0.0378	-0.3861 0.0213 0.0486	-0.3810 0.0287 0.0614	-0.3813 0.0311 0.0687	-0.3917 0.0369 0.0927	-0.3767 0.0455 0.1071	-0.3865 0.0519 0.1157
$\{Y_2, Y_1\}_\alpha$	-1.8536	-1.8899	-1.9326	-1.9830	-2.0421	-2.1113	-2.1921	-2.2858	-2.3943	-2.5189
$\widehat{\{Y_2, Y_1\}}_\alpha$	-1.8551 0.0501 0.1332	-1.8892 0.0623 0.1626	-1.9359 0.0767 0.1990	-1.9835 0.0944 0.2105	-2.0387 0.1080 0.2694	-2.1333 0.1610 0.3224	-2.1811 0.1900 0.3322	-2.2088 0.1899 0.4852	-2.3879 0.3188 0.5433	-2.4357 0.3661 0.6875
Corr_α	0.7262	0.7374	0.7510	0.7674	0.7870	0.8103	0.8378	0.8700	0.9074	0.9506
$\widehat{\text{Corr}}_\alpha$	0.7257 0.0254 0.0681	0.7382 0.0241 0.0579	0.7488 0.0249 0.0584	0.7662 0.0246 0.0596	0.7839 0.0279 0.0698	0.8046 0.0309 0.0710	0.8213 0.0328 0.0760	0.8533 0.0318 0.0733	0.8730 0.0332 0.0798	0.9056 0.0292 0.0717
r_S	-0.8393 0.0118 0.0279	-0.8404 0.0127 0.0288	-0.8405 0.0136 0.0344	-0.8434 0.0125 0.0305	-0.8461 0.0137 0.0334	-0.8451 0.0131 0.0301	-0.8481 0.0150 0.0354	-0.8546 0.0137 0.0332	-0.8568 0.0154 0.0355	-0.8684 0.0153 0.0387
r_W	-0.8486 0.0102 0.0235	-0.8516 0.0107 0.0271	-0.8521 0.0130 0.0333	-0.8555 0.0113 0.0287	-0.8588 0.0124 0.0312	-0.8604 0.0125 0.0324	-0.8632 0.0130 0.0300	-0.8710 0.0130 0.0298	-0.8748 0.0139 0.0331	-0.8861 0.0135 0.0339

Table II.1: Theoretical and estimated values of dependence measures, and rank-based coefficients of correlation for different sets of a_1, a_2, a_3, a_4 .

References

- Cambanis S. and Miller G.** (1981). *Linear problems in p th order and stable processes*. SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 41, n°1. pages 43–69.
- Chambers J. M., Mallows C. L. and Stuck B. W.** (1976). *A method for simulating stable random variables*. Journal of the American Statistical Association, vol. 71, n°354. pages 340–344.
- Gallagher C. M.** (2001). *A method for fitting stable autoregressive models using the autocovariation function*. Statistics & Probability Letters, vol. 53, n°4. pages 381–390.
- Hong Y.** (1998). *Testing for pairwise serial independence via the empirical distribution function*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B. Statistical Methodology, vol. 60, n°2. pages 429–453.
- Hong Y. and White H.** (2003). *Asymptotic distribution theory for nonparametric entropy measures of serial dependence*. Preprint.
- Miller G.** (1978). *Properties of certain symmetric stable distributions*. Journal of Multivariate Analysis, vol. 8, n°3. pages 346–360.
- Nikias C. and Shao M.** (1995). *Signal processing with alpha-stable distributions and applications*. Wiley-Interscience.
- Pinkse J.** (1998). *A consistent nonparametric test for serial independence*. Journal of Econometrics, vol. 84, n°2. pages 205–231.
- Samorodnitsky G. and Taqqu M. S.** (1994). *Stable non-Gaussian random processes*. Stochastic Modeling. Chapman & Hall, New York-London.
- Tjøstheim D.** (1996). *Measures of dependence and tests of independence*. Statistics. A Journal of Theoretical and Applied Statistics, vol. 28, n°3. pages 249–284.

2 Compléments de l'article

2.1 Généralisation au cas où la dispersion de X_1 est différente de celle de X_2

Nous allons généraliser les deux propositions 13 et 14 de la section précédente.

Lemme 2 Suivant les mêmes hypothèses que la section précédente, à savoir l'égalité des dispersions de X_1 et de X_2 , l'équation (II.5) peut s'écrire

$$\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = \frac{|a_1 a_3|^\alpha + |a_2 a_4|^\alpha + a_1 a_4 (a_2 a_3)^{(\alpha-1)} + a_2 a_3 (a_1 a_4)^{(\alpha-1)}}{|a_1 a_3|^\alpha + |a_2 a_4|^\alpha + |a_2 a_3|^\alpha + |a_1 a_4|^\alpha} \quad (\text{II.8})$$

et l'équation (II.6) peut s'écrire

$$\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = \frac{-|a_1 a_2 a_3 a_4| \left\{ |a_2 a_3|^{\frac{\alpha}{2}-1} - |a_1 a_4|^{\frac{\alpha}{2}-1} \right\}^2}{\left\{ |a_2 a_3|^{\frac{\alpha}{2}} + |a_1 a_4|^{\frac{\alpha}{2}} \right\}^2}. \quad (\text{II.9})$$

Preuve du lemme 2

On a de manière évidente les 3 égalités suivantes

$$\begin{aligned} a_1 a_3 \text{sign}(a_1 a_3) |a_1 a_3|^{\alpha-1} &= |a_1 a_3|^\alpha, \\ a_1 a_4 \text{sign}(a_2 a_3) |a_2 a_3|^{\alpha-1} &= (a_1 a_4) (a_2 a_3)^{(\alpha-1)}, \\ (|a_1|^\alpha + |a_2|^\alpha) (|a_3|^\alpha + |a_4|^\alpha) &= |a_1 a_3|^\alpha + |a_1 a_4|^\alpha + |a_2 a_3|^\alpha + |a_2 a_4|^\alpha. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on peut remarquer que l'équation (II.5), page 47, s'écrit bien comme l'équation (II.8).

De plus si on suppose que $a_1 a_3 = -a_2 a_4$, on a

$$\begin{aligned} (a_1 a_3)^2 &= (a_1 a_3) (a_1 a_3) \\ &= (a_1 a_3) (-a_2 a_4) \\ &= -a_1 a_2 a_3 a_4 \\ (a_1 a_3)^2 &= |a_1 a_2 a_3 a_4| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (|a_1|^\alpha + |a_2|^\alpha) (|a_3|^\alpha + |a_4|^\alpha) &= |a_1 a_3|^\alpha + |a_1 a_4|^\alpha + |a_2 a_3|^\alpha + |a_2 a_4|^\alpha \\ &= 2 |a_1 a_3|^\alpha + |a_1 a_4|^\alpha + |a_2 a_3|^\alpha \\ &= 2 |a_1 a_4|^{\alpha/2} |a_2 a_3|^{\alpha/2} + |a_1 a_4|^\alpha + |a_2 a_3|^\alpha \\ (|a_1|^\alpha + |a_2|^\alpha) (|a_3|^\alpha + |a_4|^\alpha) &= \left\{ |a_1 a_4|^{\alpha/2} |a_2 a_3|^{\alpha/2} \right\}^2. \end{aligned}$$

Ces deux égalités et l'équation (II.6), page 47, entraînent l'équation (II.9) ■

Proposition 17 Soit (Y_1, Y_2) un vecteur $S\alpha S$ défini par le système (II.4) avec $1 < \alpha \leq 2$, on a

$$\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = \frac{|a_1 a_3|^\alpha \gamma_{X_1}^2 + |a_2 a_4|^\alpha \gamma_{X_2}^2 + \gamma_{X_1} \gamma_{X_2} \left[a_1 a_4 (a_2 a_3)^{(\alpha-1)} + a_2 a_3 (a_1 a_4)^{(\alpha-1)} \right]}{|a_1 a_3|^\alpha \gamma_{X_1}^2 + |a_2 a_4|^\alpha \gamma_{X_2}^2 + \gamma_{X_1} \gamma_{X_2} [|a_2 a_3|^\alpha + |a_1 a_4|^\alpha]}. \quad (\text{II.10})$$

De plus, si on suppose que $a_1 a_3 \gamma_{X_1}^{\frac{2}{\alpha}} = -a_2 a_4 \gamma_{X_2}^{\frac{2}{\alpha}}$, on a le même résultat que dans le lemme précédent, c'est-à-dire

$$\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = \frac{-|a_1 a_2 a_3 a_4| \left\{ |a_2 a_3|^{\frac{\alpha}{2}-1} - |a_1 a_4|^{\frac{\alpha}{2}-1} \right\}^2}{\left\{ |a_2 a_3|^{\frac{\alpha}{2}} + |a_1 a_4|^{\frac{\alpha}{2}} \right\}^2}.$$

Preuve de la proposition 17

En utilisant l'indépendance de X_1 et de X_2 et les propriétés de pseudo-linéarité, on a

$$\begin{aligned}\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) &= \frac{\left(a_1 a_3^{\langle\alpha-1\rangle} \gamma_{X_1} + a_2 a_4^{\langle\alpha-1\rangle} \gamma_{X_2}\right) \left(a_3 a_1^{\langle\alpha-1\rangle} \gamma_{X_1} + a_4 a_2^{\langle\alpha-1\rangle} \gamma_{X_2}\right)}{(|a_1|^\alpha \gamma_{X_1} + |a_2|^\alpha \gamma_{X_2}) (|a_3|^\alpha \gamma_{X_1} + |a_4|^\alpha \gamma_{X_2})} \\ \text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) &= \frac{|a_1 a_3|^\alpha \gamma_{X_1}^2 + |a_2 a_4|^\alpha \gamma_{X_2}^2 + \gamma_{X_1} \gamma_{X_2} \left[a_1 a_4 (a_2 a_3)^{\langle\alpha-1\rangle} + a_2 a_3 (a_1 a_4)^{\langle\alpha-1\rangle} \right]}{|a_1 a_3|^\alpha \gamma_{X_1}^2 + |a_2 a_4|^\alpha \gamma_{X_2}^2 + \gamma_{X_1} \gamma_{X_2} [|a_2 a_3|^\alpha + |a_1 a_4|^\alpha]}\end{aligned}$$

ce qui entraîne la première partie de la proposition.

Si on pose $a'_1 = a_1 \gamma_{X_1}^{\frac{1}{\alpha}}$, $a'_2 = a_2 \gamma_{X_2}^{\frac{1}{\alpha}}$, $a'_3 = a_3 \gamma_{X_1}^{\frac{1}{\alpha}}$ et $a'_4 = a_4 \gamma_{X_2}^{\frac{1}{\alpha}}$, l'équation (II.10) s'écrit

$$\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = \frac{|a'_1 a'_3|^\alpha + |a'_2 a'_4|^\alpha + a'_1 a'_4 (a'_2 a'_3)^{\langle\alpha-1\rangle} + a'_2 a'_3 (a'_1 a'_4)^{\langle\alpha-1\rangle}}{|a'_1 a'_3|^\alpha + |a'_2 a'_4|^\alpha + |a'_2 a'_3|^\alpha + |a'_1 a'_4|^\alpha}$$

et la condition $a_1 a_3 \gamma_{X_1}^{\frac{2}{\alpha}} = -a_2 a_4 \gamma_{X_2}^{\frac{2}{\alpha}}$ s'écrit $a'_1 a'_3 = -a'_2 a'_4$. On se retrouve alors dans les conditions du lemme précédent et de la proposition 13. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) &= \frac{-|a'_1 a'_2 a'_3 a'_4| \left\{ |a'_2 a'_3|^{\frac{\alpha}{2}-1} - |a'_1 a'_4|^{\frac{\alpha}{2}-1} \right\}^2}{\left\{ |a'_2 a'_3|^{\frac{\alpha}{2}} + |a'_1 a'_4|^{\frac{\alpha}{2}} \right\}^2} \\ \text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) &= \frac{-|a_1 a_2 a_3 a_4| (\gamma_{X_1} \gamma_{X_2})^{\frac{2}{\alpha}} \left\{ |a'_2 a'_3|^{\frac{\alpha}{2}-1} - |a'_1 a'_4|^{\frac{\alpha}{2}-1} (\gamma_{X_1} \gamma_{X_2})^{\frac{\alpha/2-1}{\alpha}} \right\}^2}{\left\{ |a'_2 a'_3|^{\frac{\alpha}{2}} + |a'_1 a'_4|^{\frac{\alpha}{2}} (\gamma_{X_1} \gamma_{X_2})^{\frac{\alpha/2}{\alpha}} \right\}^2} \\ \text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) &= \frac{-|a_1 a_2 a_3 a_4| \left\{ |a_2 a_3|^{\frac{\alpha}{2}-1} - |a_1 a_4|^{\frac{\alpha}{2}-1} \right\}^2}{\left\{ |a_2 a_3|^{\frac{\alpha}{2}} + |a_1 a_4|^{\frac{\alpha}{2}} \right\}^2}\end{aligned}$$

ce qui démontre la deuxième partie de la proposition. ■

Proposition 18 Soit (Y_1, Y_2) un vecteur $S\alpha S$ défini par le système (II.4) avec $1 < \alpha \leq 2$, on a l'équivalence suivante

$$\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = 1 \iff a_1 a_4 = a_2 a_3 .$$

Preuve de la proposition 18

C'est immédiat si l'on considère le même changement de variables qu'à la proposition précédente ($a_i \rightarrow a'_i$). On sait que

$$\begin{aligned}
\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = 1 &\iff a'_1 a'_4 = a'_2 a'_3 \\
\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = 1 &\iff a_1 \gamma_{X_1}^{\frac{1}{\alpha}} a_4 \gamma_{X_2}^{\frac{1}{\alpha}} = a_2 \gamma_{X_2}^{\frac{1}{\alpha}} a_3 \gamma_{X_1}^{\frac{1}{\alpha}} \\
\text{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = 1 &\iff a_1 a_4 = a_2 a_3 .
\end{aligned}$$

■

2.2 Indépendance entre Y_1 et Y_2

Proposition 19 Soit (Y_1, Y_2) un vecteur $S\alpha S$ défini par le système (II.4) avec $1 < \alpha < 2$, on a l'équivalence suivante

$$Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ sont indépendantes} \iff \begin{cases} a_2 = a_3 = 0 \\ \text{ou} \\ a_1 = a_4 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Preuve de la proposition 19

Par hypothèse, les V.A.R. X_1 et X_2 sont indépendantes. D'après la proposition 5, page 26, le vecteur (X_1, X_2) est $S\alpha S$ et sa mesure spectrale est discrète. D'après la proposition 6, page 29, le vecteur (Y_1, Y_2) est aussi $S\alpha S$ et sa mesure spectrale est aussi discrète de la forme (cf équation (I.7), page 30) :

$$\begin{aligned}
\mu_{S^1} = & \frac{\gamma_1}{2} (a_1^2 + a_3^2)^{\alpha/2} \left[\delta \left(\frac{a_1}{\sqrt{(a_1^2 + a_3^2)}}, \frac{a_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_3^2)}} \right) + \delta \left(\frac{-a_1}{\sqrt{(a_1^2 + a_3^2)}}, \frac{-a_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_3^2)}} \right) \right] \\
& + \frac{\gamma_2}{2} (a_2^2 + a_4^2)^{\alpha/2} \left[\delta \left(\frac{a_2}{\sqrt{(a_2^2 + a_4^2)}}, \frac{a_4}{\sqrt{(a_2^2 + a_4^2)}} \right) + \delta \left(\frac{-a_2}{\sqrt{(a_2^2 + a_4^2)}}, \frac{-a_4}{\sqrt{(a_2^2 + a_4^2)}} \right) \right]
\end{aligned}$$

Toujours, d'après la proposition 5, page 26, pour que Y_1 et Y_2 soient deux V.A.R. indépendantes, il faut et il suffit que la mesure spectrale du vecteur (Y_1, Y_2) soit discrète et concentrée sur les points d'intersection entre les axes et la sphère unité. De plus, on ne perd rien en généralité à supposer les a_i positifs ou nuls. On a donc :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \delta \left(\frac{a_1}{\sqrt{(a_1^2 + a_3^2)}}, \frac{a_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_3^2)}} \right) = \delta(1, 0) \text{ ou } \delta \left(\frac{a_1}{\sqrt{(a_1^2 + a_3^2)}}, \frac{a_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_3^2)}} \right) = \delta(0, 1) \\ \text{et} \\ \delta \left(\frac{a_2}{\sqrt{(a_2^2 + a_4^2)}}, \frac{a_4}{\sqrt{(a_2^2 + a_4^2)}} \right) = \delta(1, 0) \text{ ou } \delta \left(\frac{a_2}{\sqrt{(a_2^2 + a_4^2)}}, \frac{a_4}{\sqrt{(a_2^2 + a_4^2)}} \right) = \delta(0, 1) \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} a_1 \text{ quelconque, } a_3 = 0 & \text{ou} & a_1 = 0, a_3 \text{ quelconque} \\ \text{et} \\ a_2 \text{ quelconque, } a_4 = 0 & \text{ou} & a_2 = 0, a_4 \text{ quelconque.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme on ne peut pas avoir $a_1 = a_2 = 0$ ou $a_3 = a_4 = 0$, il ne nous reste que les deux possibilités suivantes :

$$\begin{cases} a_2 = a_3 = 0 , \\ ou \\ a_1 = a_4 = 0 . \end{cases}$$

■

Remarque 15 *La démonstration précédente n'est pas valable pour le cas $\alpha = 2$. En effet, elle se base sur l'unicité de la mesure spectrale et cette dernière n'est pas unique dans le cas gaussien. Soient les deux mesures spectrales suivantes :*

$$\begin{cases} \mu_{S^1}^{(1)} = \gamma_1 \delta(1, 0) + \gamma_2 \delta(0, 1) , \\ \mu_{S^1}^{(2)} = \gamma_1 \delta(-1, 0) + \gamma_2 \delta(0, -1) . \end{cases}$$

Par intégration par rapport à ces deux mesures, on obtient la même fonction caractéristique, à savoir :

$$\varphi_{(X_1, X_2)}(t_1, t_2) = \exp \{ -\gamma_1 |t_1|^2 - \gamma_2 |t_2|^2 \} .$$

Pour que Y_1 et Y_2 , définies par le système (II.4) avec $\alpha = 2$, soient deux V.A.R. indépendantes, il faut donc une condition plus générale que (II.11). On a en fait l'équivalence suivante

$$Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ sont indépendantes} \iff a_1 a_3 \mathbb{E}(X_1^2) + a_2 a_4 \mathbb{E}(X_2^2) = 0 .$$

2.3 Calcul de l'erreur quadratique

Pour calculer une erreur quadratique, deux quantités sont indispensables : le paramètre à estimer (m) et l'estimateur de ce paramètre ($\widehat{m}$). L'erreur quadratique est alors la quantité

$$\text{E.q.m.}(\widehat{m}, m) = \mathbb{E}[(\widehat{m} - m)^2] .$$

Si l'estimateur est sans biais, on a

$$\text{E.q.m.}(\widehat{m}, m) = \mathbb{E}(\widehat{m}^2) - m^2 .$$

Les estimateurs que nous utilisons estiment une mesure de dépendance entre deux V.A.R. $S\alpha S$ (coefficient de covariation, coefficient de corrélation basé sur les rangs, ...). Lorsqu'elles existent, il est très difficile voire impossible de calculer explicitement la moyenne et/ou la variance de ces estimateurs. Par conséquent, le calcul de l'erreur quadratique théorique est aussi impossible. C'est pourquoi dans l'article, les valeurs calculées sont des valeurs empiriques. Dans cette partie, nous allons donc donner pour chaque mesure de dépendance empirique (définies dans les parties précédentes), les paramètres qu'elles estiment. Nous donnerons alors les différentes propriétés de ces estimateurs (biais, convergence).

2.3.1 Coefficient de covariation

On a vu dans la section précédente que la quantité

$$\widehat{\{X, Y\}}_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \operatorname{sign} Y_i}{\sum_{i=1}^n |Y_i|}$$

semble être un «bon» estimateur du coefficient de covariation. En effet, nous avons la proposition suivante.

Proposition 20

1. La quantité $\widehat{\{X, Y\}}_\alpha$ est un estimateur convergent du coefficient de covariation de X sur Y .
2. Si les V.A.R. X_i et Y_i sont indépendantes, alors l'estimateur précédent est aussi sans biais, c'est-à-dire que, dans ce cas, son espérance est nulle.

Preuve de la proposition 20

1. D'après la loi forte des grands nombres, on a les deux convergences suivantes

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \operatorname{sign} Y_i &\xrightarrow[L^1]{p.s.} \mathbb{E}(X \operatorname{sign} Y) , \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Y_i| &\xrightarrow[L^1]{p.s.} \mathbb{E}|Y| . \end{aligned}$$

De plus, si X_n converge presque-sûrement vers X et Y_n converge presque-sûrement vers Y , alors le quotient X_n/Y_n converge presque-sûrement vers X/Y . Appliquons ce résultat à ce qui précède, on obtient

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \operatorname{sign} Y_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Y_i|} = \widehat{\{X, Y\}}_\alpha \xrightarrow{p.s.} \frac{\mathbb{E}(X \operatorname{sign} Y)}{\mathbb{E}|Y|} = \{X, Y\}_\alpha .$$

2. On a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\widehat{\{X, Y\}}_\alpha \right) &= \mathbb{E} \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i \operatorname{sign} Y_i}{\sum_{i=1}^n |Y_i|} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left(\frac{X_i \operatorname{sign} Y_i}{\sum_{i=1}^n |Y_i|} \right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left(X_i \times \frac{\operatorname{sign} Y_i}{\sum_{i=1}^n |Y_i|} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E} \left(\frac{\operatorname{sign} Y_i}{\sum_{i=1}^n |Y_i|} \right) \quad \text{car pour tout } j, X_i \text{ est indépendant de } Y_j \\
\mathbb{E} \left(\widehat{\{X, Y\}}_\alpha \right) &= 0 \quad \text{car pour tout } i, \mathbb{E}(X_i) = 0.
\end{aligned}$$

■

Remarque 16 De manière symétrique (entre X et Y), le résultat précédent s'applique pour l'estimateur du coefficient de covariation de Y sur X .

Corollaire 2 L'estimateur du coefficient de covariation symétrique, défini par

$$\widehat{\operatorname{Corr}}_\alpha(Y_1, Y_2) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_{1,i} \operatorname{sign}(Y_{2,i})}{\sum_{i=1}^n |Y_{2,i}|} \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_{2,i} \operatorname{sign}(Y_{1,i})}{\sum_{i=1}^n |Y_{1,i}|} \right)$$

est un estimateur convergent du coefficient de covariation symétrique.

Preuve du corollaire 2

D'après ce qui précède, on a les deux convergences suivantes

$$\begin{aligned}
\widehat{\{X, Y\}}_\alpha &\xrightarrow{p.s.} \{X, Y\}_\alpha, \\
\widehat{\{Y, X\}}_\alpha &\xrightarrow{p.s.} \{Y, X\}_\alpha.
\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que le produit des deux termes de gauche, c'est-à-dire l'estimateur du coefficient de covariation symétrique, converge presque-sûrement vers le coefficient de covariation symétrique.

■

2.3.2 Coefficient de corrélation de Spearman

Définition 14 Soient Y_1, Y_2 deux V.A.R. et F_1, F_2 leurs fonctions de répartition respectives. On définit le *rho de Spearman* par la quantité suivante

$$\rho_S = \rho(F_1(Y_1), F_2(Y_2)).$$

Cette quantité est aussi appelée coefficient de corrélation gradé.

Proposition 21 Le coefficient de corrélation de Spearman (cf définition 13, page 51) est un estimateur asymptotiquement sans biais et convergent du rho de Spearman.

La démonstration est détaillée dans Gibbons (1985, chapitre 12, page 205).

2.3.3 Coefficient de corrélation de Van der Waerden

Nous pensons qu'un résultat similaire à la proposition 21, qui lie le coefficient de corrélation de Spearman (estimateur) et le rho de Spearman (paramètre à estimer), existe pour le coefficient de corrélation de van der Waerden. C'est pourquoi nous introduisons la définition suivante.

Définition 15 Soient Y_1, Y_2 deux V.A.R. et F_1, F_2 leurs fonctions de répartition respectives. On définit le *rho de Van der Waerden* par la quantité suivante

$$\rho_{vdW} = \rho(\Phi^{-1}(F_1(Y_1)), \Phi^{-1}(F_2(Y_2))).$$

Conjecture 1 Le coefficient de corrélation de van der Waerden (cf définition 13, page 51) est un estimateur asymptotiquement sans biais et convergent du rho de van der Waerden.

2.4 Autres simulations

Dans cette section, nous allons compléter les simulations de l'article par d'autres simulations.

Le premier des 4 tableaux a été choisi pour que, dans le cas gaussien, la dépendance linéaire entre Y_1 et Y_2 soit très forte (la corrélation est égale à $-0,99$). Pour les trois autres tableaux, les valeurs des 4 paramètres a_1, a_2, a_3 et a_4 ont été choisies suivant une loi uniforme sur $[-1; 1]$.

Les remarques de l'article s'appliquent aussi à nos simulations complémentaires. Les tableaux II.2 et II.3 confirment le fait que le coefficient de covariation symétrique ne capte pas, dans certains cas, la dépendance négative contrairement aux statistiques de rang.

De plus, on peut constater que les différents coefficients de covariation varient beaucoup en fonction de α . Les statistiques de rang sont beaucoup plus équilibrées.

α	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
$\{Y_1, Y_2\}_\alpha$	-1,0976	-1,0989	-1,1002	-1,1016	-1,1029	-1,1043	-1,1056	-1,1070	-1,1084	-1,1097
$\widehat{\{Y_1, Y_2\}}_\alpha$	-1,0982 0,0057 0,0133	-1,1002 0,0062 0,0153	-1,1014 0,0064 0,0155	-1,1029 0,0094 0,0226	-1,1012 0,0115 0,0229	-1,1041 0,0125 0,0300	-1,1067 0,0145 0,0360	-1,1055 0,0191 0,0483	-1,1064 0,0296 0,0706	-1,1071 0,0272 0,0623
$\{Y_2, Y_1\}_\alpha$	-0,9	-0,9	-0,9	-0,9	-0,9	-0,9	-0,9	-0,9	-0,9	-0,9
$\widehat{\{Y_2, Y_1\}}_\alpha$	-0,8991 0,0045 0,0112	-0,8991 0,0055 0,0133	-0,8993 0,0049 0,0119	-0,8992 0,0075 0,0176	-0,9014 0,0093 0,0182	-0,9000 0,0101 0,0229	-0,8989 0,0119 0,0279	-0,9013 0,0158 0,0390	-0,9019 0,0242 0,0549	-0,9021 0,0220 0,0515
Corr_α	0,9878	0,9890	0,9902	0,9914	0,9926	0,9938	0,9951	0,9963	0,9975	0,9988
$\widehat{\text{Corr}}_\alpha$	0,9873 0,0025 0,0069	0,9892 0,0025 0,0060	0,9904 0,0021 0,0052	0,9916 0,0019 0,0048	0,9925 0,0021 0,0051	0,9934 0,0018 0,0042	0,9944 0,0016 0,0040	0,9958 0,0014 0,0035	0,9968 0,0013 0,0031	0,9976 0,0010 0,0023
r_S	-0,9928 0,0007 0,0017	-0,9932 0,0005 0,0013	-0,9936 0,0005 0,0012	-0,9939 0,0006 0,0016	-0,9942 0,0006 0,0013	-0,9945 0,0006 0,0013	-0,9949 0,0005 0,0014	-0,9953 0,0005 0,0012	-0,9955 0,0006 0,0014	-0,9958 0,0008 0,0017
r_W	-0,9932 0,0005 0,0014	-0,9936 0,0004 0,0011	-0,9940 0,0004 0,0011	-0,9944 0,0004 0,0010	-0,9948 0,0004 0,0010	-0,9951 0,0005 0,0010	-0,9955 0,0004 0,0009	-0,9959 0,0004 0,0010	-0,9962 0,0005 0,0011	-0,9965 0,0006 0,0013

TAB. II.2 – Valeurs théoriques et estimées des covariations et des coefficients de corrélation basés sur les rangs pour : $a_1 = 1; a_2 = 1; a_3 = -1; a_4 = -0,8$.

α	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
$\{Y_1, Y_2\}_\alpha$	-0,6443	-0,6266	-0,6081	-0,5888	-0,5688	-0,5480	-0,5264	-0,5042	-0,4813	-0,4576
$\widehat{\{Y_1, Y_2\}}_\alpha$	-0,6504 0,0281 0,0725	-0,6313 0,0318 0,0807	-0,6173 0,0368 0,0799	-0,5987 0,0463 0,0959	-0,5745 0,0475 0,1128	-0,5622 0,0628 0,1325	-0,5197 0,0989 0,1905	-0,5339 0,0946 0,2033	-0,5011 0,1172 0,2488	-0,4843 0,1598 0,3570
$\{Y_2, Y_1\}_\alpha$	-0,8109	-0,7841	-0,7546	-0,7224	-0,6873	-0,6492	-0,6079	-0,5633	-0,5154	-0,4641
$\widehat{\{Y_2, Y_1\}}_\alpha$	-0,8207 0,0330 0,0798	-0,7935 0,0424 0,1180	-0,7674 0,0450 0,1048	-0,7404 0,0613 0,1235	-0,6879 0,0614 0,1249	-0,6665 0,0795 0,1616	-0,5818 0,1420 0,2092	-0,6051 0,1259 0,2419	-0,5474 0,1646 0,3463	-0,5057 0,2231 0,4575
Corr_α	0,5225	0,4913	0,4588	0,4253	0,3909	0,3557	0,3200	0,2840	0,2480	0,2124
$\widehat{\text{Corr}}_\alpha$	0,5335 0,0290 0,0686	0,5018 0,0414 0,1020	0,4760 0,0465 0,1081	0,4483 0,0645 0,1417	0,4000 0,0620 0,1305	0,3842 0,0829 0,1768	0,3462 0,0930 0,2300	0,3505 0,1071 0,2424	0,3124 0,1316 0,3187	0,3055 0,1718 0,4126
r_S	-0,7143 0,0174 0,0454	-0,6923 0,0233 0,0551	-0,6721 0,0243 0,0615	-0,6533 0,0293 0,0696	-0,6181 0,0293 0,0643	-0,5955 0,0270 0,0689	-0,5606 0,0315 0,0802	-0,5419 0,0392 0,0954	-0,5084 0,0321 0,0743	-0,4740 0,0371 0,0969
r_W	-0,7280 0,0146 0,0386	-0,7075 0,0273 0,0672	-0,6856 0,0277 0,0701	-0,6655 0,0376 0,0933	-0,6255 0,0362 0,0882	-0,6062 0,0366 0,0920	-0,5693 0,0406 0,1101	-0,5511 0,0518 0,1263	-0,5153 0,0425 0,1178	-0,4788 0,0508 0,1290

TAB. II.3 – Valeurs théoriques et estimées des covariations et des coefficients de corrélation basés sur les rangs pour : $a_1 = 0,28; a_2 = -0,9; a_3 = 0,46; a_4 = 0,95$.

α	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
$\{Y_1, Y_2\}_\alpha$	1,2791	1,2855	1,2920	1,2986	1,3052	1,3120	1,3188	1,3256	1,3325	1,3395
$\widehat{\{Y_1, Y_2\}_\alpha}$	1,2697 0,0155 0,0363	1,2803 0,0162 0,0409	1,2822 0,0213 0,0554	1,2960 0,0241 0,0567	1,3050 0,0295 0,0738	1,3083 0,0279 0,0591	1,3178 0,0443 0,1001	1,3255 0,0602 0,1262	1,3329 0,0611 0,1298	1,3367 0,0885 0,1984
$\{Y_2, Y_1\}_\alpha$	0,7244	0,7262	0,7280	0,7298	0,7316	0,7334	0,7353	0,7371	0,7389	0,7408
$\widehat{\{Y_2, Y_1\}_\alpha}$	0,7286 0,0087 0,0237	0,7277 0,0092 0,0211	0,7332 0,0126 0,0364	0,7300 0,0123 0,0295	0,7315 0,0159 0,0385	0,7341 0,0155 0,0338	0,7353 0,0241 0,0512	0,7380 0,0333 0,0678	0,7374 0,0345 0,0758	0,7423 0,0481 0,1072
Corr_α	0,9265	0,9335	0,9405	0,9477	0,9549	0,9622	0,9696	0,9771	0,9847	0,9923
$\widehat{\text{Corr}_\alpha}$	0,9250 0,0119 0,0333	0,9315 0,0087 0,0203	0,9398 0,0077 0,0191	0,9456 0,0086 0,0210	0,9539 0,0078 0,0215	0,9594 0,0074 0,0190	0,9669 0,0067 0,0167	0,9743 0,0070 0,0167	0,9789 0,0051 0,0129	0,9852 0,0061 0,0116
r_S	0,9570 0,0037 0,0093	0,9592 0,0032 0,0079	0,9614 0,0027 0,0067	0,9637 0,0034 0,0082	0,9661 0,0029 0,0070	0,9677 0,0035 0,0090	0,9694 0,0032 0,0075	0,9713 0,0032 0,0090	0,9732 0,0026 0,0064	0,9757 0,0032 0,0083
r_W	0,9604 0,0026 0,0065	0,9624 0,0026 0,0066	0,9645 0,0025 0,0057	0,9673 0,0027 0,0068	0,9696 0,0026 0,0059	0,9716 0,0027 0,0064	0,9734 0,0024 0,0064	0,9751 0,0025 0,0066	0,9775 0,0020 0,0043	0,9797 0,0026 0,0052

TAB. II.4 – Valeurs théoriques et estimées des covariations et des coefficients de corrélation basés sur les rangs pour : $a_1 = 0,99$; $a_2 = 0,82$; $a_3 = 0,55$; $a_4 = 0,80$.

α	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
$\{Y_1, Y_2\}_\alpha$	0,8863	0,8735	0,8567	0,8349	0,8064	0,7693	0,7212	0,6588	0,5783	0,4750
$\widehat{\{Y_1, Y_2\}_\alpha}$	0,8854 0,0277 0,0651	0,8627 0,0320 0,0748	0,8562 0,0342 0,0758	0,8381 0,0404 0,0812	0,8073 0,0589 0,1237	0,7905 0,0552 0,1365	0,7206 0,1122 0,2125	0,6728 0,1284 0,2390	0,5633 0,2138 0,3719	0,5234 0,2490 0,3925
$\{Y_2, Y_1\}_\alpha$	0,7568	0,7449	0,7327	0,7203	0,7076	0,6946	0,6815	0,6680	0,6544	0,6406
$\widehat{\{Y_2, Y_1\}_\alpha}$	0,7517 0,0205 0,0492	0,7419 0,0302 0,0772	0,7343 0,0320 0,0825	0,7338 0,0380 0,0989	0,7146 0,0406 0,0977	0,7099 0,0451 0,1236	0,6779 0,0705 0,1599	0,6807 0,0829 0,1830	0,6500 0,0969 0,2518	0,6672 0,1175 0,2830
Corr_α	0,6708	0,6507	0,6278	0,6014	0,5706	0,5344	0,4915	0,4401	0,3785	0,3043
$\widehat{\text{Corr}_\alpha}$	0,6655 0,0276 0,0682	0,6405 0,0379 0,0899	0,6293 0,0423 0,0980	0,6162 0,0500 0,1147	0,5806 0,0674 0,1561	0,5639 0,0681 0,1690	0,5052 0,1095 0,2442	0,4772 0,1239 0,2943	0,4213 0,1409 0,3808	0,4160 0,1734 0,4395
r_S	0,8029 0,0134 0,0356	0,7884 0,0158 0,0395	0,7761 0,0163 0,0428	0,7682 0,0180 0,0448	0,7512 0,0207 0,0478	0,7360 0,0212 0,0566	0,7128 0,0270 0,0684	0,6926 0,0266 0,0706	0,6730 0,0306 0,0805	0,6378 0,0328 0,0840
r_W	0,8149 0,0117 0,0298	0,7997 0,0167 0,0438	0,7894 0,0190 0,0439	0,7812 0,0217 0,0528	0,7626 0,0263 0,0649	0,7465 0,0273 0,0611	0,7229 0,0326 0,0800	0,7025 0,0323 0,0819	0,6833 0,0381 0,0974	0,6470 0,0417 0,1044

TAB. II.5 – Valeurs théoriques et estimées des covariations et des coefficients de corrélation basés sur les rangs pour : $a_1 = -0,84$; $a_2 = 0,51$; $a_3 = -0,91$; $a_4 = -0,06$.

3 Etude asymptotique de l'estimateur du coefficient de covariation

Pour toute cette partie, $\{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$ représente n observations indépendantes d'un vecteur (X, Y) $S\alpha S$ où α est compris entre 1 et 2.

3.1 Comportement asymptotique de l'estimateur

Théorème 6 Soit $\widehat{\{X, Y\}}_\alpha$ l'estimateur du coefficient de covariation, défini par

$$\widehat{\{X, Y\}}_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \operatorname{sign} Y_i}{\sum_{i=1}^n |Y_i|} .$$

Sous l'hypothèse d'indépendance de X et de Y , on a le résultat suivant

$$n^{1-\frac{1}{\alpha}} \widehat{\{X, Y\}}_\alpha \xrightarrow{\mathcal{L}} S\alpha S \left(\frac{\gamma_X}{(\mathbb{E}|Y|)^\alpha} \right) ,$$

où γ_X est la dispersion de X .

Avant de démontrer ce résultat, quelques lemmes sont nécessaires.

Lemme 3 On a la propriété asymptotique suivante :

$$\frac{\mathbb{E}|Y|}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Y_i|} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1 .$$

Preuve du lemme 3

Les V.A.R. Y_i sont indépendantes et de même loi. De plus, le moment d'ordre 1 est fini car α est strictement supérieur à 1. Les V.A.R. $|Y_i|$ sont donc aussi indépendantes et de même loi que $|Y|$ et leur moment d'ordre 1 est aussi fini. On peut donc appliquer la loi forte des grands nombres aux V.A.R. $|Y_i|$, à savoir

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Y_i| \xrightarrow[L^1]{p.s.} \mathbb{E}|Y| .$$

De plus, on a les deux propriétés suivantes :

- La convergence presque-sûre et la convergence L^1 entraînent la convergence en probabilité,
- Si g est une fonction continue et X_n converge en probabilité vers X , alors $g(X_n)$ converge en probabilité vers $g(X)$.

En posant $g(x) = \frac{\mathbb{E}|Y|}{x}$, on obtient alors le résultat voulu, à savoir :

$$\frac{\mathbb{E}|Y|}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Y_i|} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

■

Lemme 4 Si X_i et Y_i sont deux V.A.R. $S\alpha S$ indépendantes, alors la V.A.R. $\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^n X_i \text{sign } Y_i$ suit la distribution $S\alpha S(\gamma_X)$.

Preuve du lemme 4

Tout d'abord, on peut constater que, lorsque X_i et Y_i sont indépendantes, la V.A.R. $X_i \text{sign } Y_i$ a même loi que X_i . En effet, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{X_i \text{sign } Y_i}(t) &= \mathbb{E}(e^{itX_i \text{sign } Y_i}) \\ &= \mathbb{E}(e^{itX_i} \mathbb{1}_{Y_i \geq 0}) + \mathbb{E}(e^{-itX_i} \mathbb{1}_{Y_i \leq 0}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}(e^{itX_i}) + \frac{1}{2} \mathbb{E}(e^{-itX_i}) \\ &= \frac{1}{2} \varphi_{X_i}(t) + \frac{1}{2} \varphi_{-X_i}(t) \\ \varphi_{X_i \text{sign } Y_i}(t) &= \varphi_{X_i}(t) . \end{aligned}$$

La V.A.R. $\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^n X_i \text{sign } Y_i$ a donc même loi que la V.A.R. $\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^n X_i$. Or, on a vu (cf preuve de la proposition 5) que toute combinaison linéaire des X_i ($\sum_{i=1}^n a_i X_i$) est une V.A.R. $S\alpha S$ de paramètre de dispersion $\sum_{i=1}^n |a_i|^\alpha \gamma_{X_i}$. La V.A.R. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n^{1/\alpha}} X_i$ est donc une V.A.R. $S\alpha S$ de paramètre de dispersion

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n^{1/\alpha}} \right)^\alpha \gamma_{X_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \gamma_X \\ \gamma &= \gamma_X \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration.

■

Preuve du théorème 6

On a l'égalité suivante

$$\begin{aligned} n^{1-\frac{1}{\alpha}} \widehat{\{X, Y\}}_{\alpha} &= \frac{\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^n X_i \operatorname{sign} Y_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Y_i|} \\ &= \left(\frac{\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^n X_i \operatorname{sign} Y_i}{\mathbb{E} |Y|} \right) \times \left(\frac{\mathbb{E} |Y|}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Y_i|} \right) \end{aligned}$$

On sait d'après le lemme 4 que la V.A.R. $\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^n X_i \operatorname{sign} Y_i$ suit une loi $S\alpha S(\gamma_X)$. Par stabilité, la V.A.R. $\frac{1}{\mathbb{E} |Y|} \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^n X_i \operatorname{sign} Y_i$ (le terme de gauche dans notre égalité) suit alors une loi $S\alpha S\left(\frac{\gamma_X}{(\mathbb{E} |Y|)^{\alpha}}\right)$.

On sait d'après le lemme 3 que le terme de droite converge en probabilité vers 1.

D'après Monfort (1996, p.203), le produit des deux termes converge alors en loi vers une loi $S\alpha S\left(\frac{\gamma_X}{(\mathbb{E} |Y|)^{\alpha}}\right)$. ■

3.2 Intervalles de confiance

D'après ce qui précède, on peut calculer des intervalles de confiance sous l'hypothèse d'indépendance de X et de Y . La loi asymptotique de l'estimateur étant symétrique, on va prendre des intervalles centrés en zéro. On rappelle que $\alpha > 1$.

Proposition 22 Suivant les mêmes hypothèses que la section précédente, on a l'égalité suivante

$$\mathbb{P} \left(\left| \widehat{\{X, Y\}}_{\alpha} \right| < t_{\delta} \right) = 1 - \delta$$

où $t_{\delta} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\gamma_X}{\gamma_Y} \right)^{1/\alpha} \frac{t'_{\delta} n^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\Gamma \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right)}$ et t'_{δ} est le fractile d'ordre $1 - \frac{\delta}{2}$ d'une loi $S\alpha S$ de paramètre de dispersion égal à 1.

Lemme 5 Soit Y une V.A.R. $S\alpha S$, on a l'égalité suivante

$$\mathbb{E} |Y| = \frac{2}{\pi} \Gamma \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \gamma_Y^{1/\alpha}.$$

Preuve du lemme 5

Ce résultat est une conséquence de la proposition 4. En effet, on a

$$\mathbb{E} |Y|^p = \frac{2^{p-1} \Gamma\left(1 - \frac{p}{\alpha}\right)}{p \int_0^{+\infty} u^{-p-1} \sin^2 u du} \gamma_Y^{\frac{p}{\alpha}}.$$

Si l'on prend $p = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |Y| &= \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}{\int_0^{+\infty} u^{-2} \sin^2 u du} \gamma_Y^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}{\frac{\pi}{2}} \gamma_Y^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

ce qui entraîne le résultat voulu. ■

Preuve de la proposition 22

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\left| n^{1-\frac{1}{\alpha}} \widehat{\{X, Y\}}_{\alpha} \right| < t''_{\delta} \right) &= 1 - \delta \\ \Rightarrow \mathbb{P} \left(\left| \frac{\mathbb{E} |Y|}{\gamma_X^{1/\alpha}} n^{1-\frac{1}{\alpha}} \widehat{\{X, Y\}}_{\alpha} \right| < \frac{\mathbb{E} |Y|}{\gamma_X^{1/\alpha}} t''_{\delta} \right) &= 1 - \delta. \end{aligned}$$

La loi de la V.A.R. (à gauche) est une loi $S\alpha S$ de paramètre de dispersion égal à 1. La quantité de droite est donc le fractile d'ordre $1 - \frac{\delta}{2}$ d'une loi $S\alpha S$ réduite.

Le calcul du moment d'ordre 1 de Y au lemme précédent termine la démonstration. ■

Chapitre III

Processus autorégressif symétrique alpha-stable d'ordre p

Dans la modélisation des séries chronologiques, les processus ARMA(p, q) jouent un grand rôle. Pour étudier et modéliser correctement ce type de processus, il faut alors passer par plusieurs étapes.

La première consiste à identifier l'ordre de l'ARMA (trouver le meilleur couple (p, q) pour les données traitées). Dans une seconde étape, l'estimation des paramètres de ce modèle est effectuée. Enfin, la dernière étape consiste à vérifier que le modèle choisi est correct, c'est l'étape du diagnostic.

Dans le cas de variance finie, de nombreux résultats ont été proposés : identification par la méthode de Box-Jenkins, estimation par les équations de Yule-Walker, ...

Dans le cas de variance infinie, certaines modifications peuvent être apportées. En effet, les outils de base utilisés pour l'identification dans le cas de variance finie sont l'autocorrélation (ACF) et l'autocorrélation partielle (PACF). Or ces quantités n'existent plus lorsque la variance est infinie (cf chapitre II, page 41). Néanmoins, même si ces quantités n'ont pas d'existence théorique, on peut tout de même calculer leurs valeurs empiriques et les utiliser à des fins d'identification. Cette approche est détaillée dans Brockwell et Davis (1991) et plus récemment dans Adler et al. (1998a). Gallagher (2001, 2002) utilise un autre outil : la fonction d'autocovariation (AcovF). Il applique en particulier ses résultats à l'estimation des paramètres du modèle ARMA. Nowicka (1997) donne le comportement asymptotique de l'autocovariation et de l'autocodifférence. Elle obtient alors un moyen d'estimer le paramètre α dans le cas ARMA.

Après une introduction sur les processus ARMA avec innovations stables, nous allons comparer les différentes méthodes d'identification d'un AR.

1 Introduction

Définition 16 Le processus $\{X_t\}$ est appelé processus ARMA(p, q)- α stable, si le processus $\{X_t\}$ est strictement stationnaire et si on a

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (\text{III.1})$$

où les $\{\varepsilon_t\}$ sont indépendantes et de même loi symétrique α -stable de paramètre de dispersion γ .

Remarques 17

1. Notons B l'opérateur retard, c'est-à-dire $B(X_t) = X_{t-1}$. En posant $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$ et $\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$, l'équation précédente s'écrit : $\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$.
2. Si le polynôme $\Phi(z)$ n'a pas de racine sur le cercle unité (c'est-à-dire $\forall z \in \mathbb{C}/|z| = 1, \Phi(z) \neq 0$), alors, par un développement en série de Laurent, on a la propriété suivante

$$\exists r > 1/\forall z \in \mathbb{C}, \frac{1}{r} < |z| < r, \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j z^j, \text{ avec } \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\psi_j| < +\infty.$$

Définition 17 Le processus ARMA(p, q)- α stable $\{X_t\}$ est dit *causal* s'il existe une suite $(\psi_j)_{j=0, \dots, +\infty}$ tel que $\sum_{j=0}^{+\infty} |\psi_j| < +\infty$ et

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}. \quad (\text{III.2})$$

Proposition 23 Si le polynôme $\Phi(z)$ n'a pas de racine dans le disque unité, alors le processus ARMA(p, q)- α stable $\{X_t\}$ est causal et la solution (III.2) est unique et strictement stationnaire et les ψ_j sont définis par $\forall |z| \leq 1, \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j z^j$.

La démonstration est détaillée dans Brockwell et Davis (1991, page 537).

Pour la suite de ce chapitre, nous supposons disposer d'un processus causal autorégressif $\{X_t\}$. Pour étudier le processus, les étapes suivantes sont nécessaires.

1. L'identification de l'ordre p : cette étape va être traitée de manière approfondie à la prochaine section.
2. L'estimation des paramètres (ϕ_j) : cette étape sera peu détaillée dans ce document. L'estimation de ces paramètres peut s'effectuer de manière classique à l'aide de l'autocorrélation (équations de Yule-Walker) ou de manière probablement plus adaptée à l'aide de l'autocovariation (équations de Yule-Walker généralisées). Pour la méthode d'identification de l'ordre à l'aide de statistiques basées sur les rangs, nous aurons besoin, pour chaque valeur de k , de l'estimation $(\hat{\phi}_{k;j})$ des $(\phi_{k;j})$, définis plus loin page

72. Nous en déduisons alors la série des résidus estimés par

$$\forall t \in \llbracket 1; n \rrbracket, \hat{\varepsilon}_{k;t} = X_t - \sum_{j=1}^k \hat{\phi}_{k;j} X_{t-j} .$$

3. L'estimation des paramètres α et γ : l'estimation du α peut se faire sur le processus $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ ou bien sur le processus $\{X_t\}$. En effet, si ε_t suit une loi $S\alpha S$, alors X_t suit aussi une loi $S\alpha S$.
4. Le diagnostic du modèle choisi : il existe là aussi plusieurs tests (test du Portmanteau, test d'indépendance). Pour cette partie, quelques travaux ont déjà été faits : la généralisation du test Portmanteau par Dufour et Roy (1986) à l'aide de statistiques fondées sur les rangs et les tests à partir de la covariation que l'on peut trouver dans Gallagher (2001).

2 Identification de l'ordre d'un AR

2.1 Autocorrélation et autocorrélation partielle

2.1.1 Rappels de la méthode d'identification dans le cas de variance finie

Définition 18 Soit $\{X_t\}$ un processus de carré intégrable, la *fonction d'autocovariance* est définie par

$$\gamma_X(r, s) = \text{Cov}(X_r, X_s) .$$

De plus, lorsque le processus est stationnaire, on a

$$\gamma_X(r, s) = \text{Cov}(X_{r-s}, X_0) = \gamma_X(r - s, 0) .$$

On le notera par convention $\gamma_X(k)$ où $k = r - s$.

Définition 19 Soit $\{X_t\}$ un processus de carré intégrable, la *fonction d'autocorrélation* au rang h est définie par

$$\rho(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} .$$

Remarque 18 On estime la fonction d'autocorrélation par

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\sum_{t=1}^{n-h} (X_t - \bar{X})(X_{t+h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \quad \text{où } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t .$$

Théorème 7 Soit $\{X_t\}$ un processus stationnaire tel que $X_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$, $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\psi_j| < +\infty$ et $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |j| \psi_j^2 < +\infty$, où $\{\varepsilon_t\}$ est un processus i.i.d. de moyenne 0 et de variance σ^2 . On a le résultat asymptotique suivant

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \widehat{\rho}(1) \\ \vdots \\ \widehat{\rho}(k) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_k \left(\begin{pmatrix} \rho(1) \\ \vdots \\ \rho(k) \end{pmatrix}, W \right),$$

où W est une matrice de variance-covariance avec comme élément générateur (formule de Bartlett) :

$$w_{ij} = \sum_{l=1}^{+\infty} \{ \rho(l+i) + \rho(l-i) - 2\rho(i)\rho(l) \} \{ \rho(l+j) + \rho(l-j) - 2\rho(j)\rho(l) \}$$

La démonstration de ce théorème se trouve dans de nombreux ouvrages (voir Brockwell et Davis (1991)).

Remarque 19 Dans le cas $MA(q)$, on sait que pour tout $k > q$, $\rho(k) = 0$. Pour identifier l'ordre q , il suffit alors de calculer la quantité $\widehat{\rho}(k)$ pour $k = 1, 2, \dots$ et de vérifier à partir de quelle valeur de k , $\widehat{\rho}(k)$ est proche de 0 c'est-à-dire dans un certain intervalle d'acceptation (intervalle calculé par rapport à la loi asymptotique).

Définition 20 Soit $\{X_t\}$ un processus stationnaire, la fonction d'autocorrélation partielle est définie par

$$\nu(1) = \rho(1)$$

et

$$\forall k \geq 2, \nu(k) = \text{Corr} \left(X_{k+1} - P_{\overline{\text{esp}}\{1, X_1, X_2, \dots, X_k\}}(X_{k+1}), X_1 - P_{\overline{\text{esp}}\{1, X_1, X_2, \dots, X_k\}}(X_1) \right)$$

où $P_{\overline{\text{esp}}\{1, X_1, X_2, \dots, X_k\}} X_{k+1}$ est la projection de X_{k+1} sur le plus petit sous-espace fermé engendré par $\{1, X_1, X_2, \dots, X_k\}$.

Proposition 24 Si on pose $P_{\overline{\text{esp}}\{X_1, X_2, \dots, X_k\}} X_{k+1} = \sum_{j=1}^k \phi_{k;j} X_{k+1-j}$ et que X_t est un processus stationnaire de moyenne 0 et de fonction d'autocovariance γ_X telle que $\gamma_X(0) > 0$ et $\lim_{h \rightarrow +\infty} \gamma_X(h) = 0$, on peut montrer que :

$$\begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \rho(1) \\ \rho(k-1) & \cdots & \rho(1) & \rho(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{k;1} \\ \phi_{k;2} \\ \vdots \\ \phi_{k;k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(k) \end{pmatrix}. \quad (\text{III.3})$$

L'autocorrélation partielle $\nu(k)$ est alors égale à $\phi_{k;k}$.

La démonstration est détaillée dans Brockwell et Davis (1991, Corollaire 5.2.1, page 171).

Remarque 20 On estime alors les $\phi_{k,j}$ en remplaçant dans l'égalité (III.3) les $\rho(k)$ par leurs estimations $\hat{\rho}(k)$.

Enfin, en supposant que le processus $\{X_t\}$ soit un processus ARMA centré tel que $X_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$, on peut réécrire l'autocorrélation au rang h :

$$\begin{aligned} \rho(h) &= \frac{\mathbb{E}(X_t X_{t+h})}{\mathbb{E}(X_t^2)} = \frac{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(\psi_i \varepsilon_{t-i} \psi_j \varepsilon_{t+h-j})}{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(\psi_i \varepsilon_{t-i} \psi_j \varepsilon_{t-j})} \\ \rho(h) &= \frac{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i \psi_{i+h} \mathbb{E}(\varepsilon_t^2)}{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i^2 \mathbb{E}(\varepsilon_t^2)} = \frac{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i \psi_{i+h}}{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i^2} . \end{aligned}$$

On peut remarquer dans la dernière égalité que la variance du bruit n'intervient plus. Tout naturellement, on peut alors envisager d'appliquer ces résultats dans le cas de variance infinie en construisant un analogue de la fonction d'autocorrélation.

2.1.2 Traitement du cas stable

Définition 21 Soit $\{X_t\}$ un processus causal ARMA(p, q)- α stable, on définit un *analogue de la fonction d'autocorrélation* dans le cas général par la quantité suivante :

$$\forall h \in \llbracket 1; +\infty \llbracket, \rho(h) = \frac{\sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i \psi_{i+h}}{\sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i^2} = \frac{\sum_{j=h}^{+\infty} \psi_j \psi_{j-h}}{\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j^2}$$

où les (ψ_j) sont définis par la proposition 23, page 70.

Théorème 8 Soit $\{X_t\}$ un processus ARMA(p, q)- α stable. De plus, si

$$\forall \delta \in (0; \alpha) \cap [0; 1], \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |j| |\psi_j|^\delta < +\infty ,$$

alors on a la propriété asymptotique suivante quel que soit $h \geq 1$,

$$\left(\frac{n}{\log n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \begin{pmatrix} \hat{\rho}(1) - \rho(1) \\ \vdots \\ \hat{\rho}(h) - \rho(h) \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_h \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} \text{les } \hat{\rho} \text{ sont définis par la remarque 18, page 71,} \\ Y_k = \left[\sum_{j=1}^{+\infty} |\rho(k+j) + \rho(k-j) - 2\rho(j)\rho(k)|^\alpha \right]^{1/\alpha} \frac{U}{V} \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} U \text{ et } V \text{ sont indépendantes,} \\ U \sim S_\alpha \left(0, 0, C_\alpha^{-\frac{1}{\alpha}} \right), \\ V \sim S_\alpha \left(0, 1, C_\alpha^{\frac{-2}{\alpha}} \right), \\ \text{pour } \alpha \neq 1, \quad C_\alpha = \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}, \\ \text{et } C_1 = \frac{2}{\pi}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La démonstration est détaillée dans Brockwell et Davis (1991, page 539).

De plus, ces derniers ont montré que la fonction de répartition de U/V peut s'écrire de la manière suivante :

$$\mathbb{P} \left(\frac{U}{V} \leq x \right) = \int_0^{+\infty} 2^{-1/2} (\pi w)^{-3/2} \left[\arctg(xw) + \frac{\pi}{2} \right] \exp \left(\frac{-1}{2w} \right) dw .$$

Cette formule offre la possibilité de calculer les quantiles de la loi de U/V (le quantile 97,5% est donné dans Adler et al. (1998a, page 144) pour différentes valeurs de α).

Dans le cas d'un bruit blanc, la distribution limite de l'ACF (et de la PACF) se réduit à U/V . Dans la pratique, il faut calculer un intervalle d'acceptation et tracer les deux graphiques (ACF et PACF) afin de voir si les autocorrélations ou les autocorrélations partielles sont significativement non nulles. Par conséquent, nous pouvons voir si l'hypothèse de bruit blanc est vérifiée.

De plus, le théorème s'applique facilement pour les modèles $MA(q)$, les $\rho(h)$ étant nuls à partir d'un certain rang. Toutefois, la vitesse de convergence étant fonction de α et l'estimation de ce paramètre n'étant pas assez précise, il semble difficile d'appliquer avec exactitude le théorème 8.

En ce qui concerne les modèles $AR(p)$, le problème de l'estimation du α subsiste. De plus, dans le cas de variance finie, l'identification de l'ordre découle du fait qu'au bout d'un certain rang, les autocorrélations partielles sont nulles. Dans le cas de variance infinie, ce résultat n'est pas démontré et donc inexploitable.

Évidemment, sans information préalable sur la valeur de α , nous pouvons toujours supposer disposer d'un échantillon avec bruit blanc gaussien. Mais Adler et al. (1998a) ont montré par simulation qu'en supposant le processus gaussien (et donc en utilisant les techniques d'identification dans le cas de variance finie), l'erreur d'identification était de 31% alors qu'en supposant le processus symétrique α -stable (et donc en utilisant les techniques d'identification ci-dessus), l'erreur n'était plus que de 17%.

2.2 Autocovariation

On a vu dans le chapitre II que pour un vecteur $(X, Y) S_\alpha S$, la covariance entre X et Y n'est pas forcément finie, comme la variance de X ou celle de Y . Toutefois, en regardant

d'un peu plus près ces quantités, on peut se rendre compte qu'elles s'éloignent en $+\infty$ de la même manière. En effet, on sait que :

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \Big|_{t_1=t_2=0}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_2^2} \Big|_{t_1=t_2=0}$$

$$\text{et } \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \exp \left\{ - \int_{S_1} |t_1 x + t_2 y|^\alpha d\mu_{S^1}(x, y) \right\}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_1} &= \frac{\partial}{\partial t_1} \left(- \int_{S_1} |t_1 x + t_2 y|^\alpha d\mu_{S^1}(x, y) \right) \exp \left\{ - \int_{S_1} |t_1 x + t_2 y|^\alpha d\mu_{S^1}(x, y) \right\} \\ \frac{\partial \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_1} &= - \int_{S^1} \alpha x (t_1 x + t_2 y)^{(\alpha-1)} d\mu_{S^1}(x, y) \exp \left\{ - \int_{S_1} |t_1 x + t_2 y|^\alpha d\mu_{S^1}(x, y) \right\}. \end{aligned}$$

On peut voir par symétrie que :

$$\frac{\partial \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_2} = - \int_{S^1} \alpha y (t_1 x + t_2 y)^{(\alpha-1)} d\mu_{S^1}(x, y) \exp \left\{ - \int_{S_1} |t_1 x + t_2 y|^\alpha d\mu_{S^1}(x, y) \right\}.$$

On déduit des deux équations précédentes le calcul de $\mathbb{E}(XY)$ et $\text{Var}(Y)$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} &= \\ &\left(- \int_{S^1} \alpha x y (\alpha - 1) |t_1 x + t_2 y|^{\alpha-2} d\mu_{S^1}(x, y) \times \exp \left\{ - \int_{S_1} |t_1 x + t_2 y|^\alpha d\mu_{S^1}(x, y) \right\} \right) \\ &+ \left(\int_{S^1} -\alpha x (t_1 x + t_2 y)^{(\alpha-1)} d\mu_{S^1}(x, y) \times \int_{S^1} -\alpha y (t_1 x + t_2 y)^{(\alpha-1)} d\mu_{S^1}(x, y) \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ - \int_{S_1} |t_1 x + t_2 y|^\alpha d\mu_{S^1}(x, y) \right\} \right). \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_2^2} &= \\ &\left(- \int_{S^1} \alpha y^2 (\alpha - 1) |t_1 x + t_2 y|^{\alpha-2} d\mu_{S^1}(x, y) \times \exp \left\{ - \int_{S_1} |t_1 x + t_2 y|^\alpha d\mu_{S^1}(x, y) \right\} \right) \\ &+ \left(\int_{S^1} -\alpha y (t_1 x + t_2 y)^{(\alpha-1)} d\mu_{S^1}(x, y) \times \int_{S^1} -\alpha y (t_1 x + t_2 y)^{(\alpha-1)} d\mu_{S^1}(x, y) \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ - \int_{S_1} |t_1 x + t_2 y|^\alpha d\mu_{S^1}(x, y) \right\} \right). \end{aligned}$$

On en déduit alors, après simplification :

$$\frac{\frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}}{\frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_2^2}} = \frac{A}{B}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \left(\int_{S^1} xy (\alpha - 1) |t_1 x + t_2 y|^{\alpha-2} d\mu_{S^1}(x, y) \right) \\ &\quad - \alpha \left(\int_{S^1} x (t_1 x + t_2 y)^{\langle \alpha-1 \rangle} d\mu_{S^1}(x, y) \times \int_{S^1} y (t_1 x + t_2 y)^{\langle \alpha-1 \rangle} d\mu_{S^1}(x, y) \right), \\ B &= \left(\int_{S^1} y^2 (\alpha - 1) |t_1 x + t_2 y|^{\alpha-2} d\mu_{S^1}(x, y) \right) \\ &\quad - \alpha \left(\int_{S^1} y (t_1 x + t_2 y)^{\langle \alpha-1 \rangle} d\mu_{S^1}(x, y) \times \int_{S^1} y (t_1 x + t_2 y)^{\langle \alpha-1 \rangle} d\mu_{S^1}(x, y) \right). \end{aligned}$$

On a alors :

$$\frac{\frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}}{\frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_2^2}} \Big|_{t_1=0} = \frac{A'}{B'}$$

où

$$\begin{aligned} A' &= \left(\int_{S^1} xy (\alpha - 1) |t_2 y|^{\alpha-2} d\mu_{S^1}(x, y) \right) \\ &\quad - \alpha \left(\int_{S^1} x (t_2 y)^{\langle \alpha-1 \rangle} d\mu_{S^1}(x, y) \times \int_{S^1} y (t_2 y)^{\langle \alpha-1 \rangle} d\mu_{S^1}(x, y) \right), \\ B' &= \left(\int_{S^1} y^2 (\alpha - 1) |t_2 y|^{\alpha-2} d\mu_{S^1}(x, y) \right) \\ &\quad - \alpha \left(\int_{S^1} y (t_2 y)^{\langle \alpha-1 \rangle} d\mu_{S^1}(x, y) \times \int_{S^1} y (t_2 y)^{\langle \alpha-1 \rangle} d\mu_{S^1}(x, y) \right). \end{aligned}$$

On obtient finalement que :

$$\frac{\frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}}{\frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_2^2}} \Big|_{t_1=0} = \frac{\int_{S^1} xy^{\langle \alpha-1 \rangle} d\mu_{S^1}(x, y) \cdot |t_2|^{\alpha-2}}{\int_{S^1} |y|^\alpha d\mu_{S^1}(x, y) \cdot |t_2|^{\alpha-2}}.$$

On peut donc constater que le numérateur tend vers $+\infty$ à la même vitesse (en puissance $\alpha - 2$) que le dénominateur. Ce résultat nous montre deux choses :

- la variance (et la covariance) est bien infinie,
- la forme indéterminée $(\frac{\infty}{\infty})$ se simplifie.

On a donc montré que

$$\lim_{t_1 \rightarrow 0; t_2 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}}{\frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_2^2}} = \frac{\mathbb{E}(XY^{\langle p-1 \rangle})}{\mathbb{E}(|Y|^p)}.$$

Le terme de droite est le coefficient de covariation (cf définition 6, page 35). L'équation précédente nous fournit une bonne raison d'utiliser le coefficient de covariation dans le cadre

des processus AR à innovations stables, d'autant plus que celui-ci joue également un rôle important pour les mesures de dépendance dans le cas des lois $S\alpha S$. Rappelons que la covariation est définie pour des lois $S\alpha S$ où α est strictement supérieur à 1.

Définition 22 Soit $\{X_t\}$ un processus strictement stationnaire tel que $\mathbb{E}|X_t| < +\infty$, la fonction d'autocovariation de X_t sur X_{t-h} est la quantité suivante

$$\forall 1 \leq p < \alpha, \{X_t, X_{t-h}\}_\alpha = \frac{\mathbb{E} \left[X_t (X_{t-h})^{\langle p-1 \rangle} \right]}{\mathbb{E} |X_{t-h}|^p} = \frac{\mathbb{E} \left[X_h (X_0)^{\langle p-1 \rangle} \right]}{\mathbb{E} |X_0|^p} = \lambda(h) .$$

On a vu dans la section 1.4 du chapitre II, page 51, que le coefficient de covariation entre X et Y peut être estimé par

$$\widehat{\{X, Y\}}_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \text{sign } Y_i}{\sum_{i=1}^n |Y_i|} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{sign } Y_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Y_i|}$$

dont le numérateur représente l'estimateur de $\mathbb{E}(X \text{sign } Y)$ et le dénominateur celui de $\mathbb{E}|Y|$. De la même manière, on va construire l'estimateur de l'autocovariation :

1. on estime le numérateur par

$$\widehat{\mathbb{E}} \left[X_h (X_0)^{\langle p-1 \rangle} \right] = \frac{1}{n-h} \sum_{t=1}^{n-h} X_{t+h} (X_t)^{\langle p-1 \rangle} , \quad (\text{III.4})$$

2. on estime le dénominateur par

$$\widehat{\mathbb{E}} |X_0|^p = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |X_t|^p , \quad (\text{III.5})$$

3. les équations (III.4) et (III.5) nous fournissent l'estimation de l'autocovariation

$$\widehat{\lambda}(h) = \frac{n}{n-h} \frac{\sum_{t=1}^{n-h} X_{t+h} (X_t)^{\langle p-1 \rangle}}{\sum_{t=1}^n |X_t|^p} . \quad (\text{III.6})$$

Remarques 21

1. Dans la pratique, la valeur de α est inconnue, mais tout de même supposée strictement supérieure à 1. Dès lors, si l'on prend une valeur de p strictement supérieure à 1, nous ne sommes pas sûrs que cette valeur soit plus petite que α . Prendre $p = 1$ nous assure alors la validité de nos estimateurs et donc de nos résultats de simulation.

2. Puisque h est fixé, on peut voir que $\frac{n}{n-h} \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On ne perd alors rien au niveau asymptotique en prenant

$$\widehat{\lambda}(h) = \frac{\sum_{t=1}^{n-h} X_{t+h} (X_t)^{\langle p-1 \rangle}}{\sum_{t=1}^n |X_t|^p}.$$

3. Supposons le processus AR causal, on a par définition :

$$\begin{aligned} \lambda(h) &= \{X_h, X_0\}_\alpha = \frac{[X_h, X_0]_\alpha}{[X_0, X_0]_\alpha} = \frac{\left[\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{h-j}, \sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k \varepsilon_{-k} \right]_\alpha}{\left[\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{-j}, \sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k \varepsilon_{-k} \right]_\alpha} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \psi_j \psi_k^{\langle \alpha-1 \rangle} [\varepsilon_{h-j}, \varepsilon_{-k}]_\alpha}{\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \psi_j \psi_k^{\langle \alpha-1 \rangle} [\varepsilon_{-j}, \varepsilon_{-k}]_\alpha} = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \psi_{h+k} \psi_k^{\langle \alpha-1 \rangle} [\varepsilon_{-k}, \varepsilon_{-k}]_\alpha}{\sum_{k=0}^{+\infty} |\psi_k|^\alpha [\varepsilon_{-k}, \varepsilon_{-k}]_\alpha} \\ \lambda(h) &= \frac{\sum_{j=h}^{+\infty} \psi_j \psi_{j-h}^{\langle \alpha-1 \rangle}}{\sum_{j=0}^{+\infty} |\psi_j|^\alpha} \quad \text{car } \forall k, [\varepsilon_{-k}, \varepsilon_{-k}]_\alpha = [\varepsilon_1, \varepsilon_1]_\alpha. \end{aligned}$$

Théorème 9 Soit $\{X_t\}$ un processus ARMA(p, q)- α stable défini par l'équation (III.1), page 70, on a la propriété suivante

$$n^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\widehat{\lambda}(h) - \lambda(h) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \sigma_h X$$

$$\text{où } \begin{cases} \sigma_h = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |\psi_j|^\alpha \right)^{-\frac{1}{\alpha}}, \\ X \text{ suit une loi stable } S\alpha S \left(\frac{\pi}{2\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})} \right). \end{cases}$$

La démonstration est détaillée dans Gallagher (2000).

Dans le cas d'un AR(p) causal, on peut généraliser les équations de Yule-Walker. C'est l'objet du résultat suivant.

Proposition 25 Considérons un processus $AR(p)$ causal $S\alpha S$, $\alpha > 1$. L'égalité matricielle suivante est vérifiée

$$\begin{pmatrix} \lambda(0) & \lambda(-1) & \cdots & \lambda(1-p) \\ \lambda(1) & \lambda(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda(-1) \\ \lambda(p-1) & \cdots & \lambda(1) & \lambda(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(1) \\ \lambda(2) \\ \vdots \\ \lambda(p) \end{pmatrix}. \quad (\text{III.7})$$

Ceci signifie que

$$\forall k = 1, 2, \dots, p, \quad \lambda(k) = \phi_1 \lambda(k-1) + \phi_2 \lambda(k-2) + \cdots + \phi_p \lambda(k-p)$$

Preuve de la proposition 25

Par définition, on a

$$\begin{aligned} \lambda(k) &= \{X_t, X_{t-k}\}_\alpha = \{\phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, X_{t-k}\}_\alpha \\ &= \{\phi_1 X_{t-1}, X_{t-k}\}_\alpha + \cdots + \{\phi_p X_{t-p}, X_{t-k}\}_\alpha + \{\varepsilon_t, X_{t-k}\}_\alpha \\ &\quad \text{(d'après l'équation (I.14) de la propriété 7, page 37)} \\ &= \phi_1 \{X_{t-1}, X_{t-k}\}_\alpha + \cdots + \phi_p \{X_{t-p}, X_{t-k}\}_\alpha + \{\varepsilon_t, X_{t-k}\}_\alpha \\ &\quad \text{(d'après l'équation (I.13) de la propriété 7, page 37)} \\ &= \phi_1 \lambda(k-1) + \phi_2 \lambda(k-2) + \cdots + \phi_p \lambda(k-p) + \{\varepsilon_t, X_{t-k}\}_\alpha. \end{aligned}$$

Il reste à voir que $\{\varepsilon_t, X_{t-k}\}_\alpha$ est égal à 0. Comme le processus $\{X_t\}$ est un $AR(p)$ causal, on a :

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \implies X_{t-k} = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-k-j}.$$

On en déduit alors que :

$$\{\varepsilon_t, X_{t-k}\}_\alpha = \left\{ \varepsilon_t, \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-k-j} \right\}_\alpha = \frac{\left[\varepsilon_t, \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-k-j} \right]_\alpha}{\left[\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-k-j}, \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-k-j} \right]_\alpha}.$$

Les $\{\varepsilon_t\}$ étant indépendants par hypothèse, le numérateur vaut 0 dès que $k > 0$. On a donc bien le résultat attendu. ■

Nous pouvons alors estimer les (ϕ_i) en remplaçant les $\lambda(k)$ par leurs estimations $\hat{\lambda}(k)$ dans l'égalité matricielle (III.7).

On peut appliquer ces résultats pour l'identification. Les travaux de Gallagher (2000, 2001) l'illustrent bien. Toutefois, si le travail sur les $MA(q)$ donne de bons résultats (les ψ_j sont égaux aux θ_j et nuls à partir d'un certain rang), nous avons des problèmes pour l'identification des processus autorégressifs (nous retrouvons les mêmes problèmes que pour l'autocorrélation, notamment le problème sur l'estimation du α).

Une alternative à ce problème semble être fournie par les statistiques quadratiques et asymptotiquement invariantes, fondées sur les rangs, qui permettent de tester si le processus peut être modélisé par un $AR(k-1)$ ou par un $AR(k)$, pour $k \geq 1$.

2.3 Autocorrélation basée sur les rangs

La théorie des tests basés sur les rangs a été développée dans le cas de variance finie par Hallin et al. (1985) et Hallin et Puri (1994). Plus récemment, Garel et Hallin (1999) ont identifié l'ordre d'un $AR(p)$ à l'aide des statistiques quadratiques et asymptotiquement invariantes. Les résultats de simulations de Garel et Hallin (1999) obtenus avec un bruit de type Cauchy laissent entrevoir la possibilité que la théorie développée avec une variance finie est susceptible de s'appliquer au cas $S\alpha S$. Tout d'abord, introduisons la théorie classique du test du multiplicateur de Lagrange.

2.3.1 Multiplicateur de Lagrange : introduction

Le test du multiplicateur de Lagrange s'applique, d'une façon générale, dans le cas d'un modèle d'échantillonnage où le modèle statistique P_θ est tel que $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$. Mais pour donner une présentation plus claire de la statistique de test, nous nous plaçons délibérément dans le cas simple suivant.

Soient $X_1, \dots, X_n$ n V.A.R. indépendantes et de même loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. L'espace des paramètres est $\Omega = \{(\mu; \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+\}$. On désire effectuer le test suivant :

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 .$$

Appelons $L(\underline{x}; \mu)$ la fonction de log-vraisemblance. Une des statistiques de test que l'on peut utiliser est la solution du problème de maximisation sous contrainte suivant :

$$\max_{\mu} [L(\underline{x}; \mu) - \lambda(\mu - \mu_0)] .$$

En dérivant par rapport à μ et à λ et en prenant les résultats égaux à 0, on obtient :

$$\lambda^* = \frac{\partial L}{\partial \mu}(\mu_0) ,$$

qui est la pente de la fonction de log-vraisemblance en $\mu = \mu_0$. Plus les données donnent une estimation proche de μ_0 , plus la pente est proche de 0. Mais on peut rencontrer le problème suivant. Pour deux jeux de données $\underline{x}^{(1)}$ et $\underline{x}^{(2)}$, on peut obtenir le graphique III.1.

La distance entre $\hat{\mu}^{(1)}$ et μ_0 est plus grande que celle entre $\hat{\mu}^{(2)}$ et μ_0 , alors que la pente en μ_0 est la même pour les deux jeux de données. Pour régler ce problème, on peut prendre en compte la courbure de la fonction de log-vraisemblance : L possède une dérivée seconde plus grande en valeur absolue dans le cas (2) que dans le cas (1). On obtient alors la statistique du multiplicateur de Lagrange :

$$ML = \frac{\left(\frac{\partial L}{\partial \mu}(\mu_0) \right)^2}{-\frac{\partial^2 L}{\partial \mu^2}(\mu_0)} .$$

Plus la valeur de ML est petite, meilleur est l'adéquation à H_0 .

Remarque 22 Dans le cas des processus autorégressifs, on souhaite tester un $AR(k-1)$ contre un $AR(k)$. L'espace des paramètres est donc $\{(\phi_1, \dots, \phi_k) \in \Phi \subset \mathbb{R}^k\}$. L'hypothèse H_0 peut aussi s'écrire $\phi_k = 0$ et l'hypothèse H_1 $\phi_k \neq 0$.

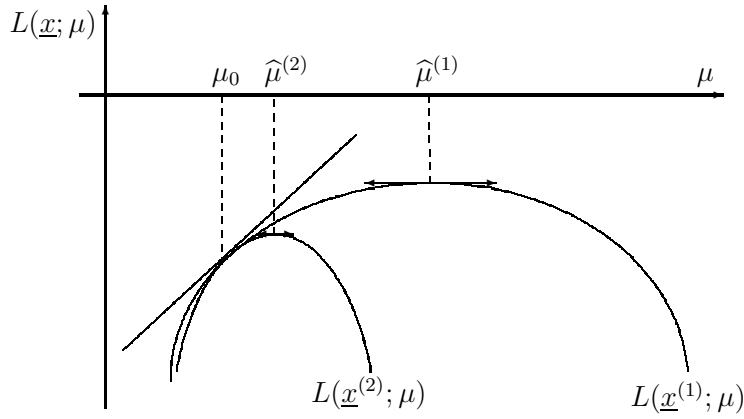


FIG. III.1 – Log-vraisemblances.

2.3.2 Multiplicateur de Lagrange : approche classique

Appelons Q_{k-1} la statistique de test du multiplicateur de Lagrange d'une hypothèse $AR(k-1)$ contre une hypothèse $AR(k)$ définie par Hosking (1980) et reprise par Pötscher (1985). Garel et Hallin (1999) ont rappelé qu'elle pouvait s'écrire sous la forme :

$$Q_{k-1} = nT'_{k-1} \left[\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & w_{k-1}^2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \right)^{-1} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} (W_{k-1}^2)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] T_{k-1} \quad (\text{III.8})$$

où

$$n^{1/2}T_{k-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{n-1}\hat{r}_{k-1;1} \\ \sum_{i=2}^{n-1} \hat{g}_{k-1;i-1}\sqrt{n-i}\hat{r}_{k-1;i} \\ \sum_{i=2}^{n-1} \hat{g}_{k-1;i-2}\sqrt{n-i}\hat{r}_{k-1;i} \\ \vdots \\ \sum_{i=2}^{n-1} \hat{g}_{k-1;i-k+1}\sqrt{n-i}\hat{r}_{k-1;i} \end{pmatrix}, \quad W_{k-1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + w_{k-1}^2,$$

$$w_{k-1}^2 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} (\hat{g}_{k-1;i})^2 & \sum_{i=1}^{n-1} \hat{g}_{k-1;i} \hat{g}_{k-1;i-1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n-1} \hat{g}_{k-1;i} \hat{g}_{k-1;i-k+2} \\ \sum_{i=1}^{n-1} \hat{g}_{k-1;i} \hat{g}_{k-1;i-1} & \sum_{i=1}^{n-1} (\hat{g}_{k-1;i})^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sum_{i=1}^{n-1} \hat{g}_{k-1;i} \hat{g}_{k-1;i-1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} \hat{g}_{k-1;i} \hat{g}_{k-1;i-k+2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n-1} \hat{g}_{k-1;i} \hat{g}_{k-1;i-1} & \sum_{i=1}^{n-1} (\hat{g}_{k-1;i})^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{où } \begin{cases} \forall i = 1, 2, \dots, \hat{r}_{k;i} = \frac{\sum_{t=k+1}^n \hat{\varepsilon}_{k;t} \hat{\varepsilon}_{k;t-i}}{\sum_{t=1}^n (\hat{\varepsilon}_{k;t})^2} \\ \text{et pour tout } k, \text{ les } \hat{g} \text{ sont calculés par } \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^k \hat{\phi}_{k;i} B^i} = \sum_{u=0}^{+\infty} \hat{g}_{k;u} B^u. \end{cases}$$

Proposition 26 Sous l'hypothèse que le processus $\{X_t\}$ est stationnaire au second ordre, centré, autorégressif d'ordre $k-1$ et que le bruit blanc $\{\varepsilon_t\}$ est une suite i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$, on obtient que :

$$Q_{k-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \chi_1^2.$$

La démonstration est détaillée dans Pötscher (1985).

2.3.3 Multiplicateur de Lagrange : approche fondée sur les rangs

Définition 23 Soit $\{Z_t\}$ un processus. On appelle *coefficient d'autocorrélation basée sur les rangs* d'ordre k la statistique suivante

$$\mathcal{L}_{J_1, J_2; k}^{(n)} = \frac{\frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n J_1 \left(\frac{R_t^{(n)}}{n+1} \right) J_2 \left(\frac{R_{t-k}^{(n)}}{n+1} \right) - m_{J_1, J_2}^{(n)}}{s_{J_1, J_2; k}^{(n)}},$$

$$\text{où } \begin{cases} (R_1^{(n)}, \dots, R_n^{(n)}) \text{ est le vecteur des rangs associé à } \{Z_t\}, \\ J_1 \text{ et } J_2 \text{ sont deux fonctions scores,} \\ m_{J_1, J_2}^{(n)} \text{ et } s_{J_1, J_2; k}^{(n)} \text{ sont choisis tels que, sous l'hypothèse que } \{Z_t\} \text{ est un} \\ \text{bruit blanc, } \sqrt{n-k} \mathcal{L}_{J_1, J_2; k}^{(n)} \text{ soit centré réduit.} \end{cases}$$

Exemples 4 Nous allons donner les différentes fonctions scores utilisées dans la suite de ce chapitre.

- van der Waerden : $J_1(x) = J_2(x) = \Phi^{-1}(x)$,
- Wilcoxon : $J_1(x) = x - \frac{1}{2}$; $J_2(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$,
- Laplace : $J_1(x) = \text{sign}\left(x - \frac{1}{2}\right)$; $J_2(x) = \log(2x) \mathbb{1}\left(x \leq \frac{1}{2}\right) - \log(2-2x) \mathbb{1}\left(x > \frac{1}{2}\right)$,
- Spearman : $J_1(x) = J_2(x) = (n+1)x$.

On obtient alors les 4 coefficients d'autocorrélation basées sur les rangs.

$$\begin{aligned}
r_{\text{vdW};k}^{(n)} &= \frac{\frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n \Phi^{-1}\left(\frac{R_t^{(n)}}{n+1}\right) \Phi^{-1}\left(\frac{R_{t-k}^{(n)}}{n+1}\right) - m_{\text{vdW}}^{(n)}}{s_{\text{vdW};k}^{(n)}} \\
r_{\text{Wi};k}^{(n)} &= \frac{\frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n \left(\frac{R_t^{(n)}}{n+1} - \frac{1}{2}\right) \log\left(\frac{R_{t-k}^{(n)}}{n+1 - R_{t-k}^{(n)}}\right) - m_{\text{Wi}}^{(n)}}{s_{\text{Wi};k}^{(n)}} \\
r_{\text{La};k}^{(n)} &= \left[\frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n \text{sign}\left(\frac{R_t^{(n)}}{n+1} - \frac{1}{2}\right) \left(\log\left(2 \frac{R_{t-k}^{(n)}}{n+1}\right) \mathbb{1}\left(\frac{R_{t-k}^{(n)}}{n+1} \leq \frac{1}{2}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \log\left(2 - 2 \frac{R_{t-k}^{(n)}}{n+1}\right) \mathbb{1}\left(\frac{R_{t-k}^{(n)}}{n+1} > \frac{1}{2}\right) \right) - m_{\text{La}}^{(n)} \right] / s_{\text{La};k}^{(n)} \\
r_{\text{Sp};k}^{(n)} &= \frac{\frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n R_t^{(n)} R_{t-k}^{(n)} - m_{\text{Sp}}^{(n)}}{s_{\text{Sp};k}^{(n)}}
\end{aligned}$$

Les hypothèses utilisées par Hallin et Puri (1994) pour obtenir les propriétés asymptotiques des statistiques quadratiques fondées sur les rangs sont relativement classiques dans ce contexte. Signalons tout de même qu'elles reposent en particulier sur l'existence d'une variance finie pour le bruit blanc et sur la différentiabilité en moyenne quadratique de la racine carrée $f^{1/2}$ de la densité du bruit blanc. Cette dernière hypothèse est équivalente au fait que $f^{1/2}$ appartienne à l'espace de Sobolev $W_1^2(\mathbb{R}^d)$ où d est la dimension des observations. Dès 1992, Garel avait donné une démonstration de ce résultat. Une partie de la démonstration figure dans Garel et Hallin (1995, page 255).

Proposition 27 Sous l'hypothèse que le processus $\{X_t\}$ est stationnaire au second ordre, centré, autorégressif d'ordre $k-1$ et que le bruit blanc $\{\varepsilon_t\}$ est une suite i.i.d. de densité f vérifiant entre autres les propriétés ci-dessus, la statistique quadratique asymptotiquement invariante $Q_{J_1, J_2; k-1}$, définie en remplaçant dans (III.8) les autocorrélations $\hat{r}_{k,i}$ par les autocorrélations $\mathcal{L}_{J_1, J_2; k+i}$, suit asymptotiquement un χ_1^2 .

La démonstration est détaillée dans Hallin et Puri (1994).

2.3.4 Traitement du cas alpha-stable

Afin de vérifier si la proposition précédente s'applique au cas $S\alpha S$, nous avons écrit le programme Fortran `rstable.f`. Ce programme permet de faire plusieurs choses.

1. Il peut générer des processus $ARMA(p, q)$ avec différents bruits : gaussien, de type Cauchy, de type α -stable,...
2. Il peut calculer la valeur de la statistique $Q_{J_1, J_2; k-1}$ pour différentes valeurs de α et pour tous les coefficients de corrélation basés sur les rangs (van der Waerden, Wilcoxon, Laplace et Spearman).
3. Il peut également identifier l'ordre p d'un AR par le test du multiplicateur de Lagrange (par l'approche classique ou par l'approche fondée sur les rangs).

Dans cette section, nous allons utiliser la première partie du programme (le point 1 et 2 de ce qui précède) pour simuler 1000 réplifications de notre statistique de test du multiplicateur de Lagrange. Puis nous allons vérifier par un test d'adéquation la conjecture suivante.

Conjecture 2 Sous l'hypothèse que $\{X_t\}$ est un processus $AR(k-1)$ et un processus $\{ \varepsilon_t \}$ $S\alpha S$, la statistique $Q_{J_1, J_2; k-1}$ suit asymptotiquement un χ_1^2 .

Parmi les tests possibles (test du chi-deux, ...), nous avons choisi le test de Kolmogorov-Smirnov. C'est un test d'ajustement à une loi continue et semble donc mieux adapté à notre cas que le test du chi-deux.

Définition 24 Soit l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$, la *fonction de répartition empirique* se définit par :

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < X_{(1)} \\ \vdots & \\ \frac{i}{n} & \text{si } X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)} \\ \vdots & \\ 1 & \text{si } x > X_{(n)} \end{cases}$$

où $X_{(i)}$ est la statistique d'ordre i de l'échantillon.

Définition 25 Soit $\hat{F}(x)$ la fonction de répartition empirique de $(X_1, \dots, X_n)$ et F_0 la fonction caractéristique d'une loi continue donnée. La *distance de Kolmogorov-Smirnov* est la quantité suivante :

$$d(\hat{F}, F_0) = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \left| F_0(X_{(i)}) - \frac{i}{n} \right|, \left| F_0(X_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right| \right\}.$$

On posera par convention : $T_n = d(\hat{F}, F_0)$. On se propose de tester H_0 : «la loi de (X_i) a pour fonction de répartition F_0 » contre $H_1 = H_0^c$.

La règle de décision que nous utilisons est la suivante :

$$\text{on accepte } H_0 \text{ si et seulement si } T_n \leq c_\delta$$

Proposition 28

– Sous l'hypothèse H_0 , on a

$$\forall c_\delta > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{H_0} (\sqrt{n}T_n \leq c_\delta) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \exp(-2k^2 c_\delta^2) .$$

– Sous l'hypothèse H_1 , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}T_n = +\infty$.

Nous pouvons alors calculer en fonction de δ les quantiles de la loi T_n sous H_0 (cf tableau III.1).

c_δ	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	0,7300	0,7406	0,7508	0,7608	0,7704	0,7798	0,7889	0,7976	0,8061	0,8143
1,1	0,8223	0,8300	0,8374	0,8445	0,8514	0,8580	0,8644	0,8706	0,8765	0,8823
1,2	0,8878	0,8930	0,8981	0,9030	0,9076	0,9121	0,9164	0,9206	0,9245	0,9283
1,3	0,9319	0,9354	0,9387	0,9418	0,9449	0,9478	0,9505	0,9531	0,9557	0,9580
1,4	0,9603	0,9625	0,9646	0,9665	0,9684	0,9702	0,9718	0,9734	0,9750	0,9764
1,5	0,9778	0,9791	0,9803	0,9815	0,9826	0,9836	0,9846	0,9855	0,9864	0,9873
1,6	0,9880	0,9888	0,9895	0,9902	0,9908	0,9914	0,9919	0,9924	0,9929	0,9934
1,7	0,9938	0,9942	0,9946	0,9950	0,9953	0,9956	0,9959	0,9962	0,9965	0,9967
1,8	0,9969	0,9971	0,9973	0,9975	0,9977	0,9979	0,9980	0,9982	0,9983	0,9984
1,9	0,9985	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9991	0,9991	0,9992	0,9993

TAB. III.1 – Quantiles de la loi de $\sqrt{n}T_n$ sous H_0

Nous avons simulé 1000 répliques de la statistique $Q_{J_1, J_2; k-1}$ pour nos quatre statistiques de rang (van der Waerden, Wilcoxon, Spearman et Laplace) à partir de n réalisations d'un $\text{AR}(p)$ α -stable causal pour :

1. $n = 50; 100; 500; 1000$,
2. $p = 1; 2; 3; 4$,
3. $\alpha = 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2$.

Remarque 23 Dans un premier temps, nous ne prendrons qu'un seul jeu de paramètres pour les ϕ_i des $\text{AR}(p)$. Voici les modèles que nous avons utilisés :

$$\begin{aligned} X_t - 0.5X_{t-1} &= \varepsilon_t , \\ X_t + \frac{7}{6}X_{t-1} + \frac{1}{3}X_{t-2} &= \varepsilon_t , \\ X_t - \frac{1}{4}X_{t-1} - \frac{1}{4}X_{t-2} + \frac{1}{16}X_{t-3} &= \varepsilon_t , \\ X_t - \frac{1}{4}X_{t-1} - \frac{3}{8}X_{t-2} + \frac{5}{8}X_{t-3} + \frac{5}{16}X_{t-4} &= \varepsilon_t . \end{aligned}$$

Par croisement, il y a donc 640 simulations à effectuer (160 par statistique de rang). Parmi ces 160 simulations, nous ne tracerons que 8 histogrammes. En revanche, les tests d'ajustement seront pratiqués sur tous les échantillons. Sur chaque double page suivante, il y a

8 histogrammes (choisis parmi les 160 de départ) et les résultats sous forme de tableau des tests pratiqués sur les 160 simulations (0 pour l'acceptation de l'hypothèse H_0 , c'est-à-dire les données suivent un chi-deux à un degré de liberté, ou 1 pour le rejet de cette hypothèse) avec un niveau de confiance de 95%.

Rappelons aussi la forme de la densité d'un chi-deux à un degré de liberté.

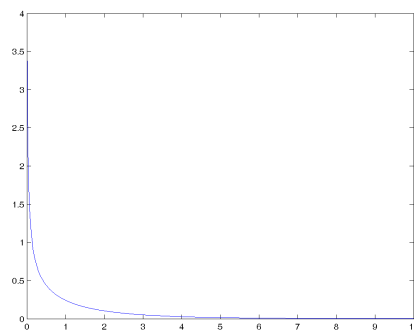


FIG. III.2 – Densité d'une loi χ_1^2

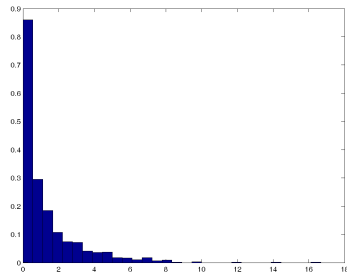
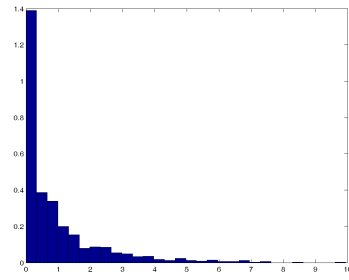
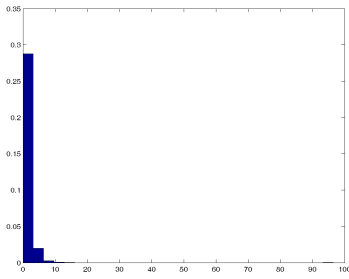
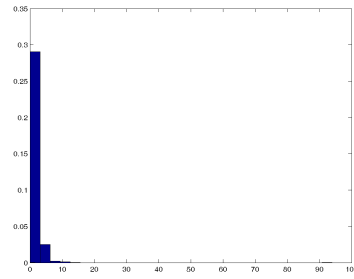
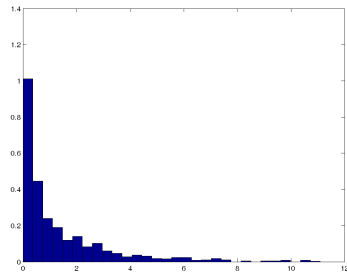
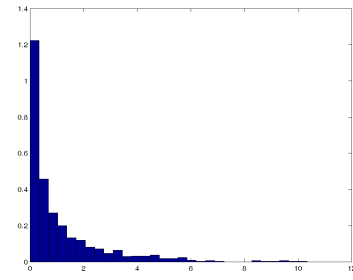
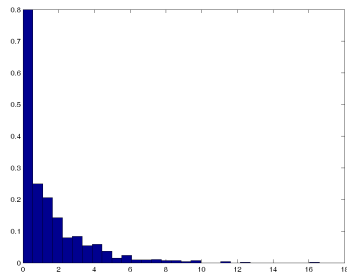
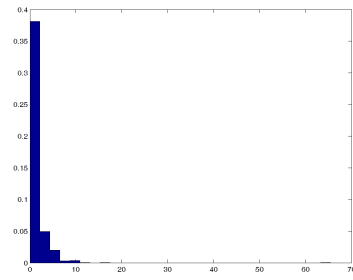
(a) AR(1), $n = 50$, $\alpha = 1,1$ (b) AR(1), $n = 1000$, $\alpha = 1,5$ (c) AR(2), $n = 1000$, $\alpha = 1,8$ (d) AR(2), $n = 500$, $\alpha = 1,4$ (e) AR(3), $n = 100$, $\alpha = 1,6$ (f) AR(3), $n = 1000$, $\alpha = 1,6$ (g) AR(4), $n = 50$, $\alpha = 1,9$ (h) AR(4), $n = 1000$, $\alpha = 1,7$

FIG. III.3 – Histogrammes normalisés de la statistique quadratique utilisée avec les fonctions scores de Van der Waerden pour différentes valeurs de α et calculée sur n réalisations.

(a) AR(1) : $X_t - 0.5X_{t-1} = \varepsilon_t$

$n \backslash \alpha$	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(b) AR(2) : $X_t + \frac{7}{6}X_{t-1} + \frac{1}{3}X_{t-2} = \varepsilon_t$

$n \backslash \alpha$	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
500	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1000	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0

(c) AR(3) : $X_t - \frac{1}{4}X_{t-1} - \frac{1}{4}X_{t-2} + \frac{1}{16}X_{t-3} = \varepsilon_t$

$n \backslash \alpha$	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
500	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
1000	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0

(d) AR(4) : $X_t - \frac{1}{4}X_{t-1} - \frac{3}{8}X_{t-2} + \frac{5}{8}X_{t-3} + \frac{5}{16}X_{t-4} = \varepsilon_t$

$n \backslash \alpha$	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
500	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1000	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1

TAB. III.2 – Tests d'adéquation pour la statistique de rang Van der Waerden (rappel : 0 pour l'hypothèse H_0 ou 1 pour l'hypothèse H_1).

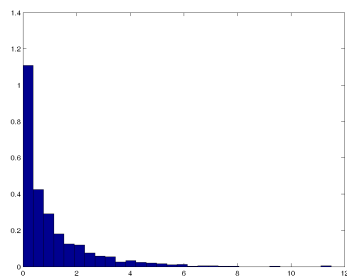
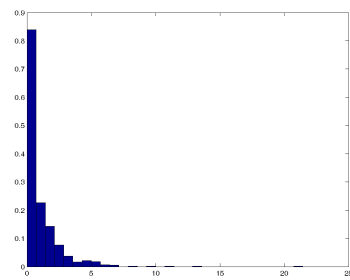
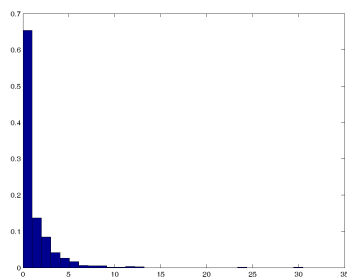
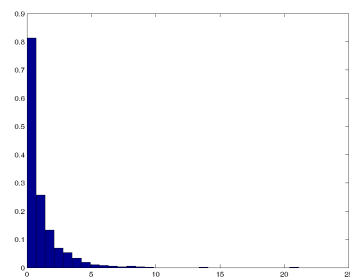
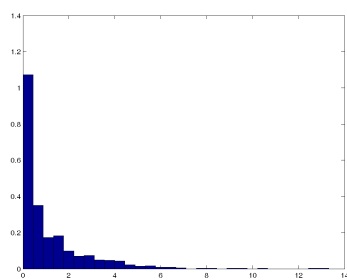
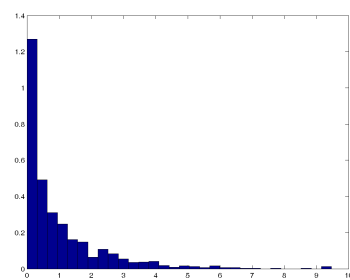
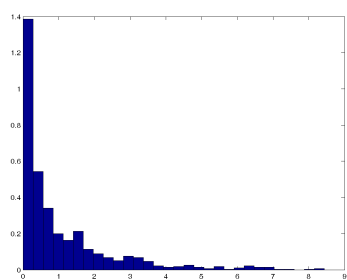
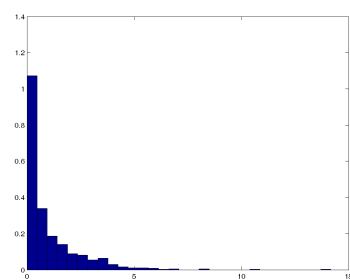
(a) AR(1), $n = 50$, $\alpha = 1,6$ (b) AR(1), $n = 500$, $\alpha = 1,3$ (c) AR(2), $n = 100$, $\alpha = 1,2$ (d) AR(2), $n = 100$, $\alpha = 1,7$ (e) AR(3), $n = 100$, $\alpha = 1,1$ (f) AR(3), $n = 100$, $\alpha = 1,7$ (g) AR(4), $n = 1000$, $\alpha = 2,0$ (h) AR(4), $n = 1000$, $\alpha = 1,9$

FIG. III.4 – Histogrammes normalisés de la statistique quadratique utilisée avec les fonctions scores de Wilcoxon pour différentes valeurs de α et calculée sur n réalisations.

(a) AR(1) : $X_t - 0.5X_{t-1} = \varepsilon_t$

$n \backslash \alpha$	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
50	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(b) AR(2) : $X_t + \frac{7}{6}X_{t-1} + \frac{1}{3}X_{t-2} = \varepsilon_t$

$n \backslash \alpha$	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
50	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
500	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
1000	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

(c) AR(3) : $X_t - \frac{1}{4}X_{t-1} - \frac{1}{4}X_{t-2} + \frac{1}{16}X_{t-3} = \varepsilon_t$

$n \backslash \alpha$	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
500	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1000	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

(d) AR(4) : $X_t - \frac{1}{4}X_{t-1} - \frac{3}{8}X_{t-2} + \frac{5}{8}X_{t-3} + \frac{5}{16}X_{t-4} = \varepsilon_t$

$n \backslash \alpha$	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
100	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
500	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
1000	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1

TAB. III.3 – Tests d'adéquation pour la statistique de rang Wilcoxon (rappel : 0 pour l'hypothèse H_0 ou 1 pour l'hypothèse H_1).

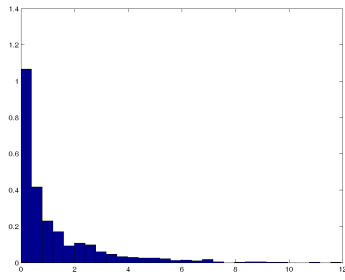
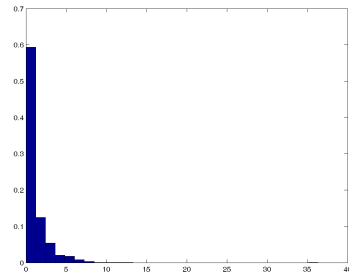
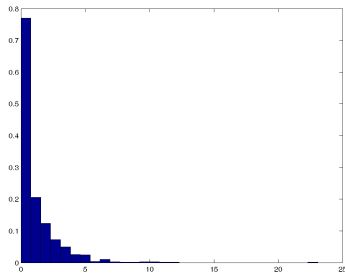
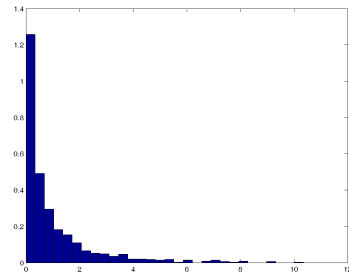
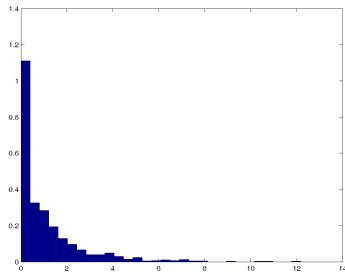
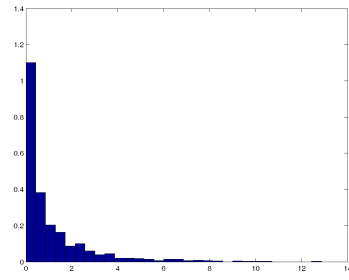
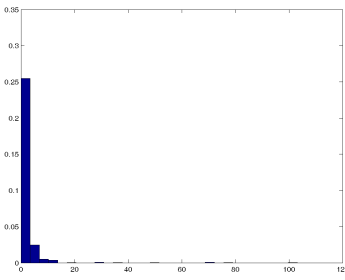
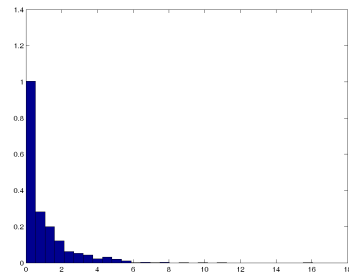
(a) AR(1), $n = 500$, $\alpha = 1,9$ (b) AR(1), $n = 1000$, $\alpha = 1,2$ (c) AR(2), $n = 500$, $\alpha = 1,8$ (d) AR(2), $n = 50$, $\alpha = 1,5$ (e) AR(3), $n = 100$, $\alpha = 2,0$ (f) AR(3), $n = 500$, $\alpha = 1,5$ (g) AR(4), $n = 500$, $\alpha = 1,2$ (h) AR(4), $n = 1000$, $\alpha = 2,0$

FIG. III.5 – Histogrammes normalisés de la statistique quadratique utilisée avec les fonctions scores de Spearman pour différentes valeurs de α et calculée sur n réalisations.

(a) AR(1) : $X_t - 0.5X_{t-1} = \varepsilon_t$

$n \backslash \alpha$	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
500	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(b) AR(2) : $X_t + \frac{7}{6}X_{t-1} + \frac{1}{3}X_{t-2} = \varepsilon_t$

$n \backslash \alpha$	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
50	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
500	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1000	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1

(c) AR(3) : $X_t - \frac{1}{4}X_{t-1} - \frac{1}{4}X_{t-2} + \frac{1}{16}X_{t-3} = \varepsilon_t$

$n \backslash \alpha$	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
50	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
100	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
500	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1000	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1

(d) AR(4) : $X_t - \frac{1}{4}X_{t-1} - \frac{3}{8}X_{t-2} + \frac{5}{8}X_{t-3} + \frac{5}{16}X_{t-4} = \varepsilon_t$

$n \backslash \alpha$	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
50	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
100	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
500	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1000	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

TAB. III.4 – Tests d'adéquation pour la statistique de rang Spearman (rappel : 0 pour l'hypothèse H_0 ou 1 pour l'hypothèse H_1).

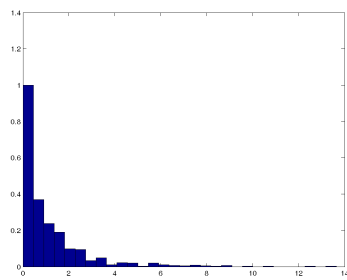
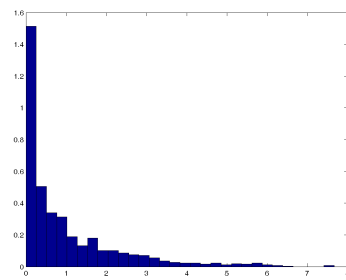
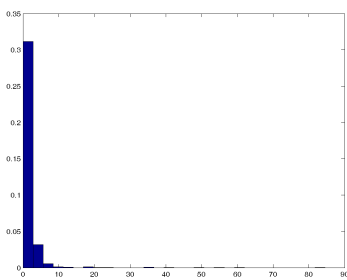
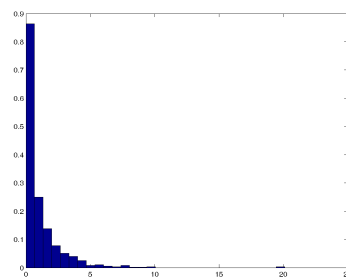
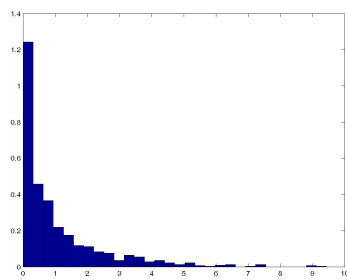
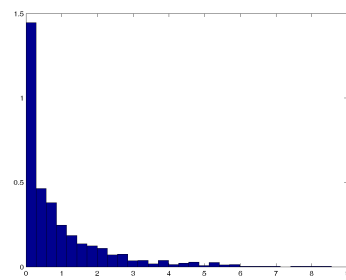
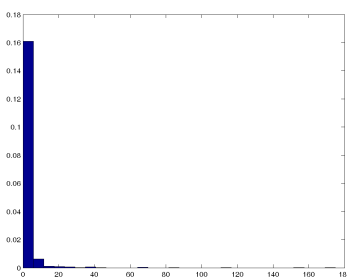
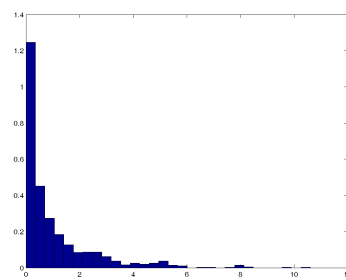
(a) AR(1), $n = 100$, $\alpha = 1,1$ (b) AR(1), $n = 50$, $\alpha = 1,6$ (c) AR(2), $n = 500$, $\alpha = 1,1$ (d) AR(2), $n = 1000$, $\alpha = 1,7$ (e) AR(3), $n = 50$, $\alpha = 1,4$ (f) AR(3), $n = 100$, $\alpha = 1,9$ (g) AR(4), $n = 1000$, $\alpha = 1,1$ (h) AR(4), $n = 50$, $\alpha = 1,8$

FIG. III.6 – Histogrammes normalisés de la statistique quadratique utilisée avec les fonctions scores de Laplace pour différentes valeurs de α et calculée sur n réalisations.

(a) AR(1) : $X_t - 0.5X_{t-1} = \varepsilon_t$

$n \backslash \alpha$	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(b) AR(2) : $X_t + \frac{7}{6}X_{t-1} + \frac{1}{3}X_{t-2} = \varepsilon_t$

$n \backslash \alpha$	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
50	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1000	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0

(c) AR(3) : $X_t - \frac{1}{4}X_{t-1} - \frac{1}{4}X_{t-2} + \frac{1}{16}X_{t-3} = \varepsilon_t$

$n \backslash \alpha$	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
50	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
500	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(d) AR(4) : $X_t - \frac{1}{4}X_{t-1} - \frac{3}{8}X_{t-2} + \frac{5}{8}X_{t-3} + \frac{5}{16}X_{t-4} = \varepsilon_t$

$n \backslash \alpha$	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
50	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
100	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
500	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

TAB. III.5 – Tests d'adéquation pour la statistique de rang Laplace (rappel : 0 pour l'hypothèse H_0 ou 1 pour l'hypothèse H_1).

2.4 Comparaisons par simulation

Nous avons étudié plusieurs modèles autorégressifs :

$$X_t = -\frac{7}{6}X_{t-1} - \frac{1}{3}X_{t-2} + \varepsilon_t, \quad (\text{III.9})$$

$$X_t = 0.5X_{t-1} - 0.15X_{t-2} + \varepsilon_t, \quad (\text{III.10})$$

$$X_t = -0.2X_{t-1} + 0.3X_{t-2} + \varepsilon_t. \quad (\text{III.11})$$

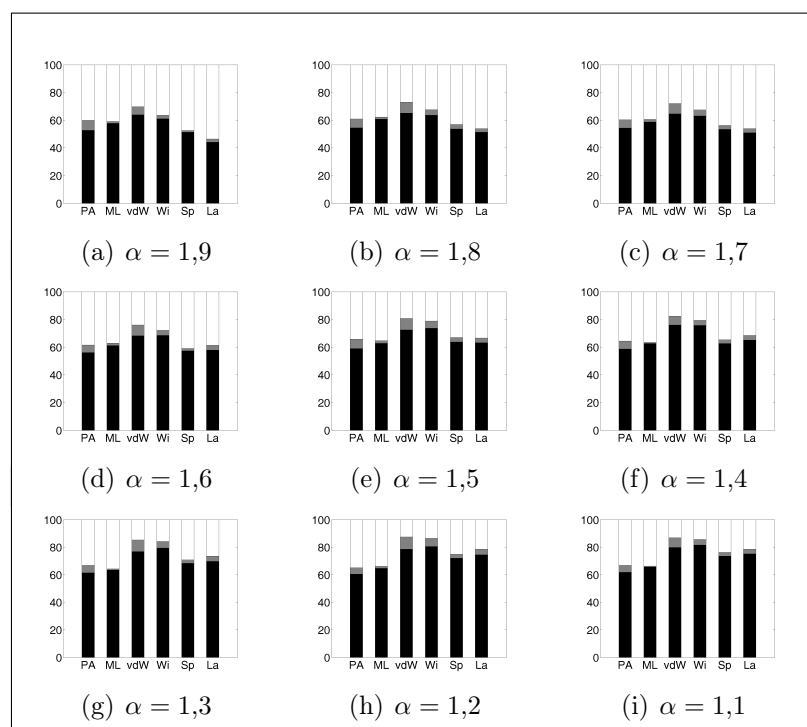
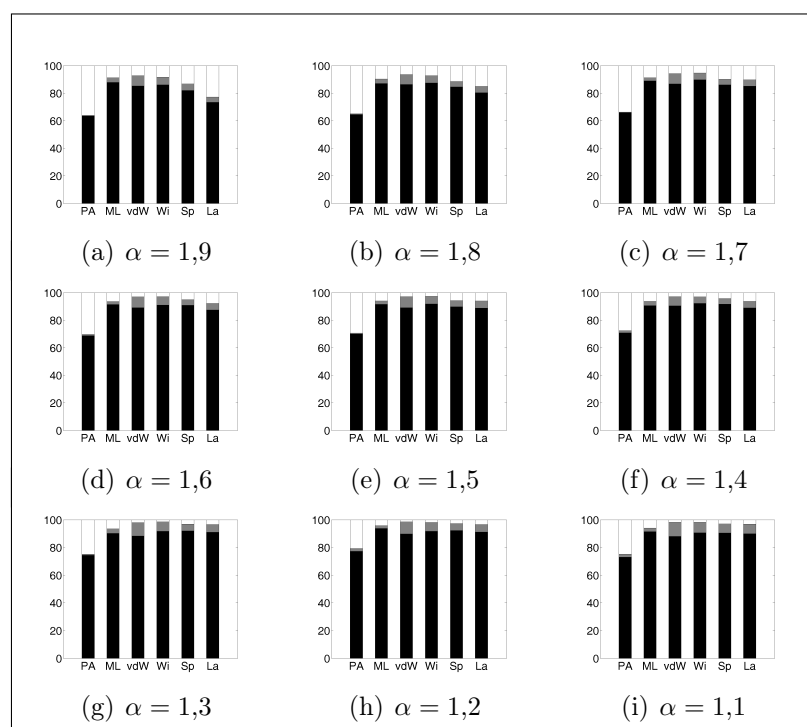
Pour chacun de ces modèles, nous avons fait 1000 répliques puis nous avons compté, à l'aide du programme `rstable.f`, le nombre de bonnes identifications, de sur-identifications, de sous-identifications. Nous avons alors comparé les différentes méthodes suivantes : auto-corrélation partielle classique (PA), multiplicateur de Lagrange classique (ML), statistiques quadratiques asymptotiquement invariantes associées aux autocorrélations fondées sur les rangs de van der Waerden (vdW), de Wilcoxon (Wi), de Spearman (Sp) et de Laplace (La). Enfin, nous avons fait varier les valeurs de α (de 1,9 à 1,1) et de n (50 ; 100 ; 250 ; 500).

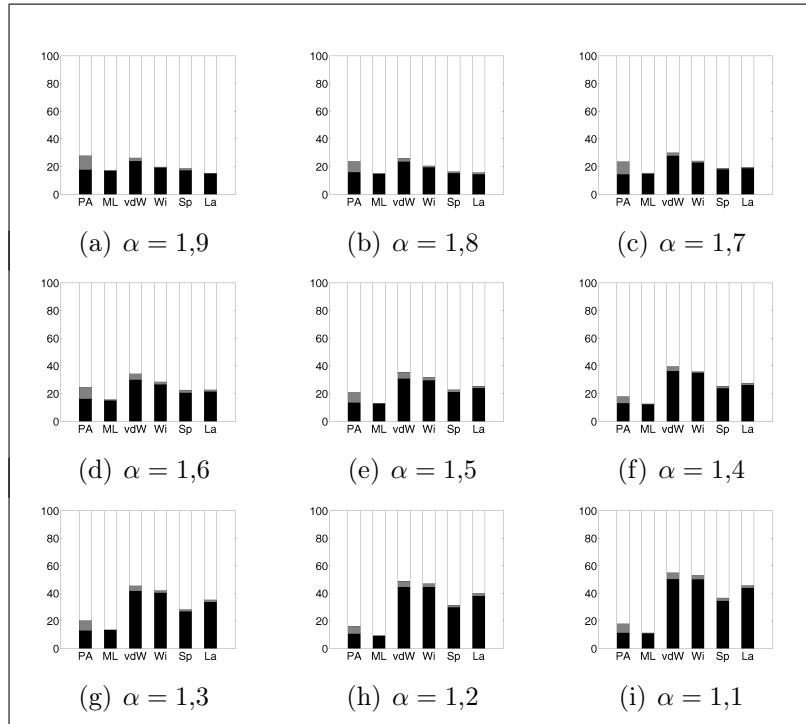
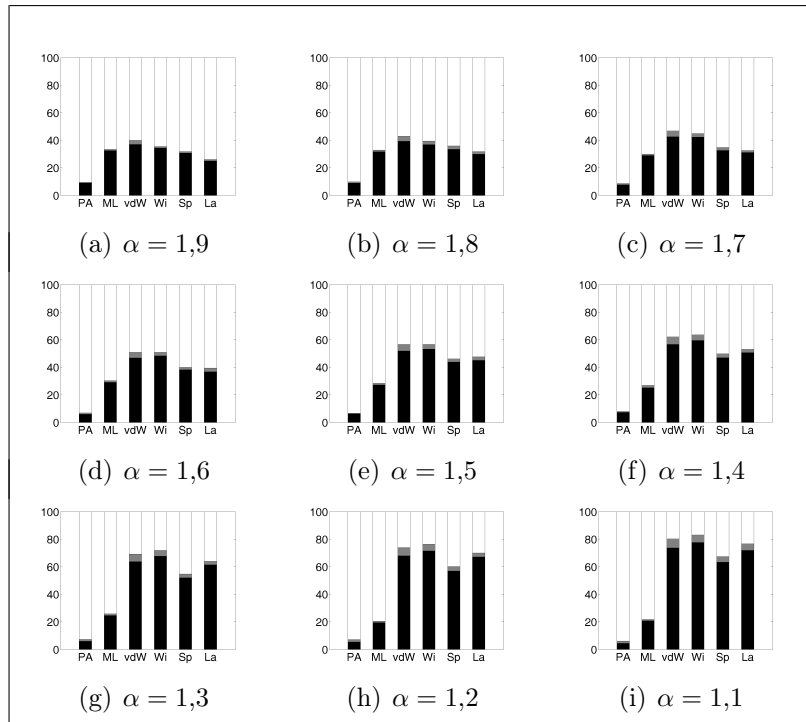
Les pages suivantes représentent les résultats obtenus. En abscisse, on retrouve les différentes statistiques utilisées ; en ordonnée, on a le pourcentage cumulé (couleur noire pour le pourcentage de bonne identification, couleur grise pour celui de sur-identification et couleur blanche pour celui de sous-identification). On peut alors faire plusieurs commentaires.

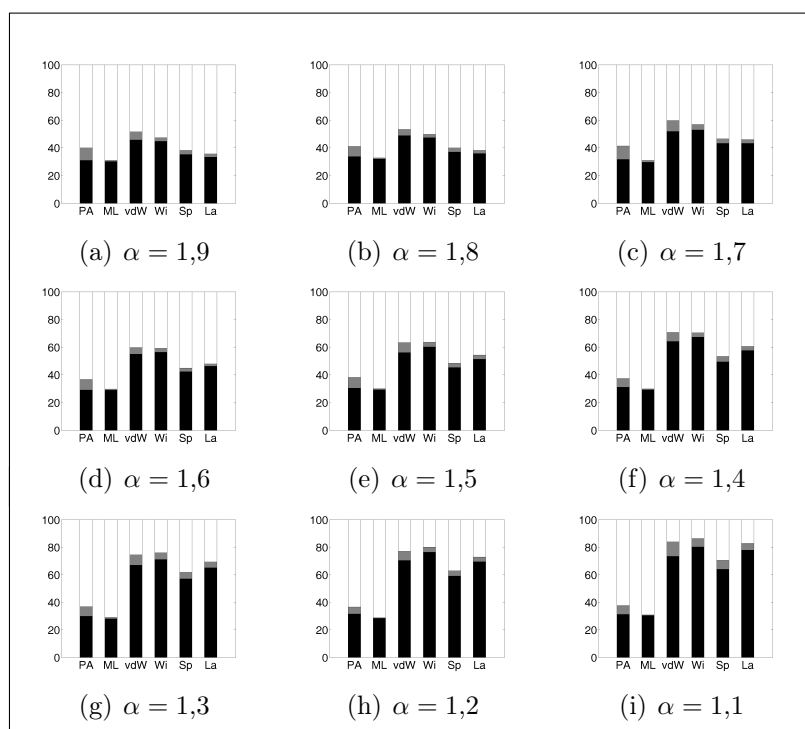
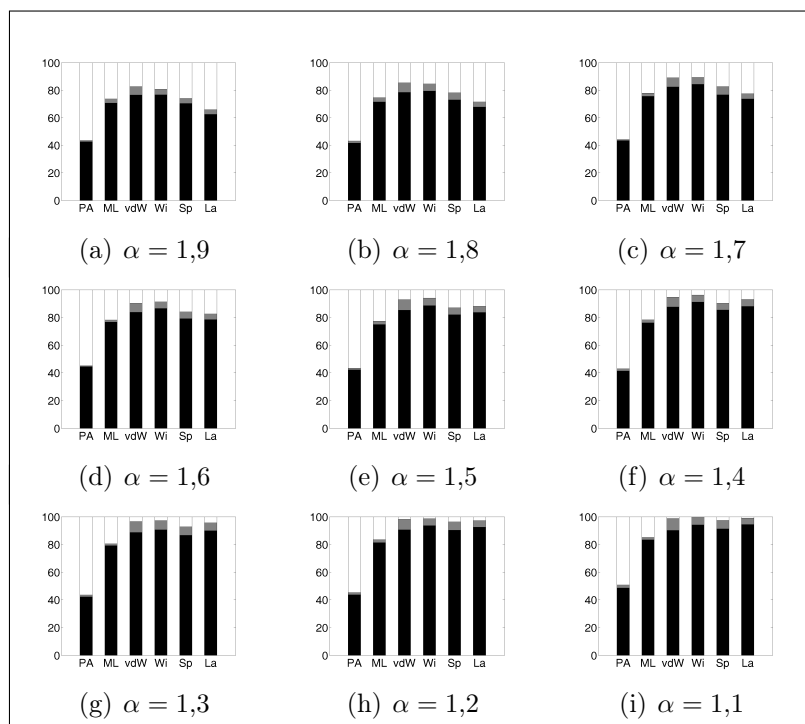
Lorsque n augmente, l'identification est meilleure quelle que soit la statistique. A partir de $n = 250$, l'identification pour les modèles (III.9) et (III.11) est supérieure à 90%.

Lorsque α diminue, un phénomène prévisible apparaît. Les statistiques de rang identifient de mieux en mieux le modèle (c'est très visible sur les figures (III.10), (III.11) et (III.12)) alors qu'en parallèle, l'autocorrélation partielle et le multiplicateur de Lagrange identifient le modèle de moins en moins bien (cf les mêmes figures).

Globalement, on peut constater que les statistiques de rang semblent mieux adaptées que les statistiques classiques pour traiter des données à variance infinie.

FIG. III.7 – AR(2) : $X_t = -\frac{7}{6}X_{t-1} - \frac{1}{3}X_{t-2} + \varepsilon_t$, $n = 50$.FIG. III.8 – AR(2) : $X_t = -\frac{7}{6}X_{t-1} - \frac{1}{3}X_{t-2} + \varepsilon_t$, $n = 100$.

FIG. III.9 – AR(2) : $X_t = 0.5X_{t-1} - 0.15X_{t-2} + \varepsilon_t$, $n = 50$.FIG. III.10 – AR(2) : $X_t = 0.5X_{t-1} - 0.15X_{t-2} + \varepsilon_t$, $n = 100$.

FIG. III.11 – AR(2) : $X_t = -0.2X_{t-1} + 0.3X_{t-2} + \varepsilon_t$, $n = 50$.FIG. III.12 – AR(2) : $X_t = -0.2X_{t-1} + 0.3X_{t-2} + \varepsilon_t$, $n = 100$.

3 Illustrations sur données réelles

3.1 Introduction

En climatologie, certaines données sont nécessaires pour prévoir des phénomènes comme les tempêtes, les raz-de-marées, . . . Parmi ces données se trouve la température de la surface de la mer. Elle est mesurée à l'aide de sondes posées sur des bouées au milieu des océans (ces sondes mesurent également la pression atmosphérique, la force du vent, . . .). La NASA, par le biais de Colin Gallagher, nous a fourni un jeu de données, mesurées du 1 octobre 1988 au 5 mai 1989.

3.2 Stationnarité et variance infinie

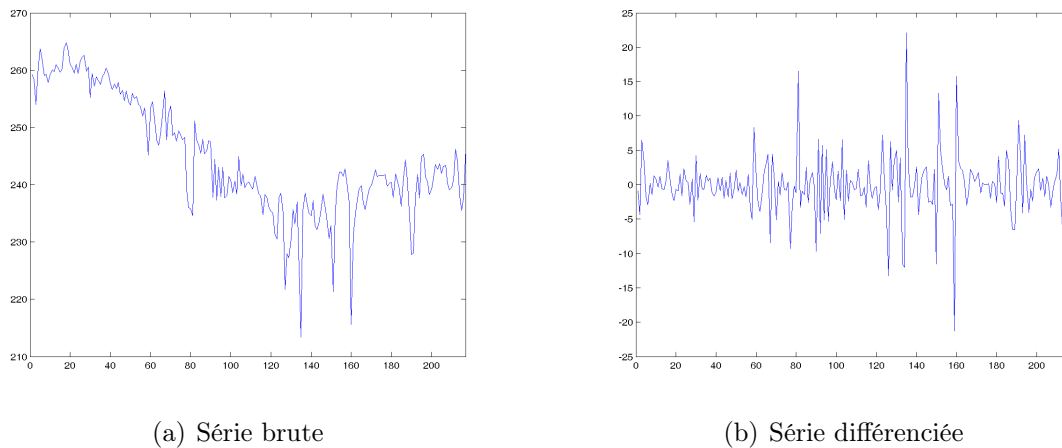


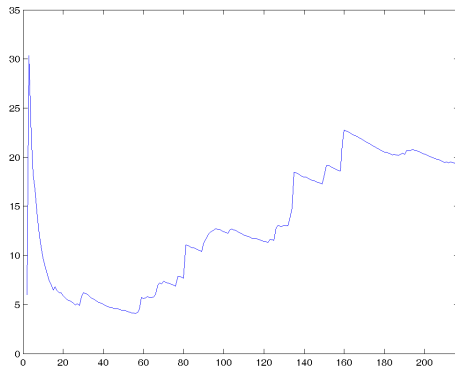
FIG. III.13 – Températures de la surface de la mer du 01/10/1988 au 05/05/1989

Les données utilisées sont tracées sur la figure 3.2. On peut constater que cette série n'est pas stationnaire. Nous avons alors décidé de travailler sur la série différenciée à l'ordre 1, soit $Y_t = X_t - X_{t-1}$. Le graphique 3.2 représente la série différenciée. Cette série semble stationnaire. Avant de la traiter avec les techniques d'identification vues précédemment, il nous reste à voir si on est bien en présence de variance infinie. Pour cela, nous utilisons les deux tests graphiques (cf section 1.4.1, page 18), visibles sur la figure suivante.

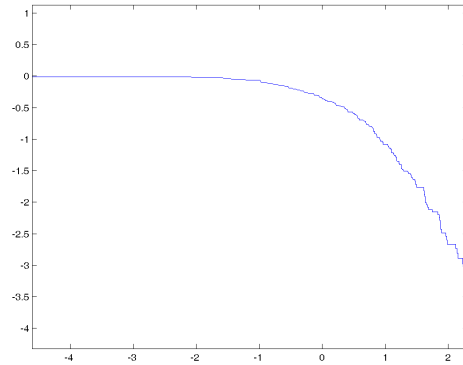
Les résultats montrent clairement que nous sommes en présence de données à variance infinie.

3.3 Traitement des données

Le tableau suivant résulte du calcul des différentes statistiques quadratiques asymptotiquement invariantes, $QRI(i)$ représentant la racine carré de $Q_{J_1, J_2; i}$.



(a) Test graphique 1



(b) Test graphique 2

FIG. III.14 – Tests sur la variance des données

	$QRI(1)$	$QRI(2)$	$QRI(3)$	$QRI(4)$	$QRI(5)$	$QRI(6)$	$QRI(7)$
van der Waerden	2.4352	2.0846	3.7937	2.7431	2.1855	2.0630	1.8470
Wilcoxon	2.1496	1.8877	3.5646	2.1309	1.9436	1.9728	1.3496
Spearman	4.0163	3.3393	3.8158	2.3056	1.6093	1.0648	1.2003
Laplace	1.3266	1.4060	3.0013	2.0827	1.2366	1.9695	1.0948

TAB. III.6 – Calcul de la racine carré des statistiques quadratiques asymptotiquement invariantes sur les données réelles

Après avoir comparé ces valeurs à 1,96 (soit une erreur de 5% pour une loi gaussienne centrée réduite), nous avons obtenu que :

- la statistique de van der Waerden propose un modèle AR(6),
- la statistique de Wilcoxon propose un modèle AR(2),
- la statistique de Spearman propose un modèle AR(4),
- la statistique de Laplace propose un modèle bruit blanc.

Remarquons que pour la statistique de Wilcoxon, $QRI(2)$ est égal à 1,88 (proche de 1,96) et donc, pour une erreur un peu plus grande que 5%, le test nous proposerait un AR(6).

3.4 Comparaison avec les résultats de Gallagher

Les données réelles, traitées précédemment, ont aussi été étudiées dans l'article de Gallagher (2001). Ce dernier obtient un modèle AR(6) par la méthode basée sur l'autocovariation.

Sur les trois graphiques suivants, deux courbes sont tracées. La première courbe correspond à une estimation¹ de la densité de la série résiduelle de l'AR(6). Les secondes courbes représentent respectivement la densité d'une loi normale (graphique III.15), la densité d'une

¹Nous avons utilisé l'estimation à noyau gaussien. En effet, cette technique suppose l'intégrabilité du carré de la densité et pour les lois α -stables, cette hypothèse est vérifiée.

loi stable de paramètre $\alpha = 1,76$ et $\sigma = 2,7$ (graphique III.16), la densité d'une loi stable de paramètre $\alpha = 1,34$ et $\sigma = 1,73$ (graphique III.17).

Les deux premiers graphiques (scannés) proviennent de l'article de Gallagher (2001). Le troisième provient de notre étude.

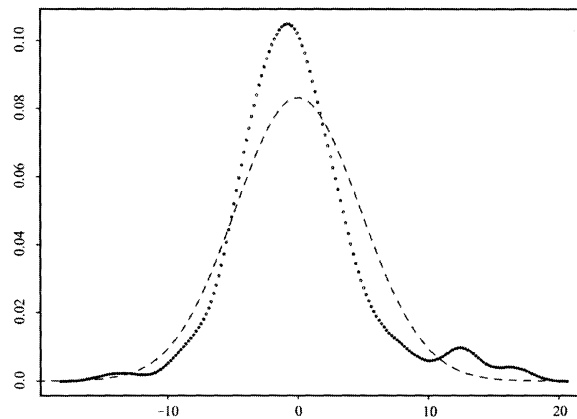


FIG. III.15 – Densité de la loi normale (en tirets) et estimation non paramétrique de la densité des résidus en supposant un modèle gaussien (en pointillés).

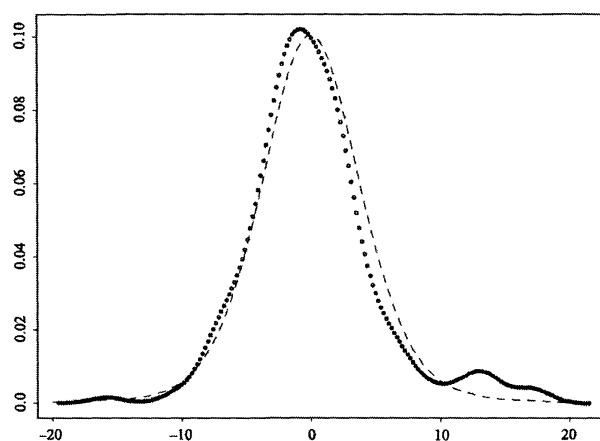


FIG. III.16 – Densité de la loi α -stable (en tirets) et estimation non paramétrique de la densité des résidus en supposant le modèle α -stable (en pointillés).

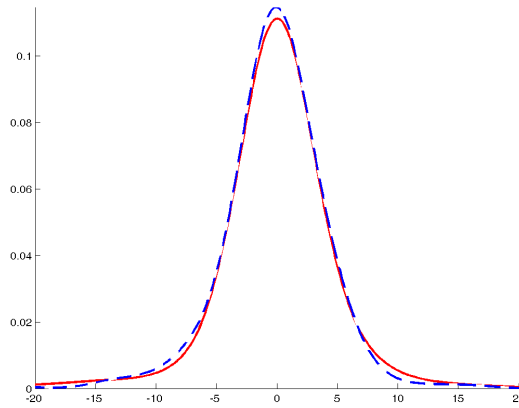


FIG. III.17 – Densité de la loi α -stable (en traits pleins) et estimation non paramétrique de la densité des résidus en supposant le modèle α -stable (en tirets).

On peut remarquer sur le premier graphique que supposer le modèle à variance finie ne permet pas de donner un résultat convenable. En effet, l'adéquation entre l'estimation non paramétrique de la densité des résidus et la densité gaussienne après estimation de la variance n'est pas bonne. Par contre, les deux autres graphiques nous montrent que le modèle à variance infinie est mieux adapté à nos données.

Enfin, nous pouvons constater que, même si les estimations des paramètres α et σ sur le modèle de Gallagher et le nôtre diffèrent quelque peu, l'adéquation entre la densité de la loi α -stable et son estimée non paramétrique, dans les deux cas, nous satisfait davantage qu'en supposant le modèle gaussien.

Chapitre IV

Fiabilité des systèmes : qualification des équipements d'aide à l'atterrissage

Le travail qui suit a été réalisé à la suite d'un contrat pour les Services Techniques de la Navigation Aérienne (S.T.N.A.) avec la collaboration de Véronique Font (société I.X.I). Le travail a porté sur des problèmes de fiabilité et de qualification d'appareils. Il nous a permis de développer un concept théorique intéressant en statistique appliquée : les probabilités de confiance. Il nous a permis également d'écrire un article publié à la Revue de Statistique Appliquée (d'Estampes et al. (2003a)). Celui-ci fait l'objet de la première section.

Ce travail a fait l'objet de trois rapports techniques (un en janvier 2001 et deux en février 2002). A la suite de ces trois rapports, nous avons développé un programme Matlab qui permet entre autres de tracer des plans de fiabilité en fonction de différents paramètres (risque de première espèce, risque de deuxième espèce,...). La seconde section fournit une note technique sur le programme créé.

1 Test séquentiel : Niveau de confiance après acceptation

Écrit par Ludovic d'Estampes^a, Bernard Garel^a et Guillaume Saint Pierre^a

^aGroupe Statistique et Probabilités, LEN7, ENSEEIHT, B.P.7122,
2, rue Camichel 31071 Toulouse Cedex 7, France.

Résumé : Nous développons ici la notion de niveau de confiance après acceptation lors d'un test séquentiel du rapport des probabilités de Wald. Les notions de borne de confiance et d'intervalle de confiance après acceptation sont bien connues. La notion de niveau de confiance apparaît comme une notion duale de la précédente. Ces concepts sont illustrés dans le cadre d'un problème de fiabilité des systèmes concernant la qualification de systèmes d'atterrissage aux instruments ou Instrument Landing System (ILS).

Mots-clés : *test séquentiel, loi exponentielle, borne et niveau de confiance.*

Abstract : In this paper we develop the notion of confidence level at acceptance, during a probability ratio sequential test of Wald. The notions of confidence limits and confidence interval at acceptance are well known. The notion of confidence level appears as the dual of the former. These concepts are illustrated in a reliability of technical systems problem, namely the Instrument Landing System (ILS) certification.

Keywords : *sequential testing, exponential distribution, confidence bounds and probabilities.*

1.1 Introduction

La notion de test séquentiel du rapport des probabilités a été introduite par Wald durant la seconde guerre mondiale. Mais son livre ne fut publié qu'en 1947 (cf Wald (1947)).

Contrairement aux tests classiques, le nombre d'observations nécessaires à un test séquentiel n'est pas fixé a priori. En revanche, les risques de première espèce et de seconde espèce sont, quant à eux, fixés.

La technique des tests séquentiels est peu enseignée dans le supérieur. Cependant, elle est très utilisée en fiabilité et plus généralement pour tout problème de certification, comme par exemple celle de médicaments nouveaux. En effet cette technique permet une économie de mesures et par là même de temps, de l'ordre de 50% en moyenne.

L'une des phases de la qualification est un test paramétrique entre deux hypothèses simples associées à deux valeurs possibles du paramètre. Une fois l'hypothèse de qualification acceptée, il est possible de calculer des limites de confiance inférieures et supérieures pour la vraie valeur inconnue du paramètre. Mais les industriels souhaitent en fait pouvoir répondre à la question suivante : avec quelle probabilité le paramètre inconnu dépasse-t-il une valeur déterminée ?

Nous commençons par rappeler brièvement comment se calcule une borne inférieure de confiance dans le cas général. Nous introduisons ensuite la notion de niveau de confiance. Puis nous nous plaçons plus précisément dans le cas où la loi de probabilité supposée des observations est exponentielle et développons la notion de niveau de confiance à l'acceptation lors d'un test séquentiel. Enfin, nous effectuons une étude sur données réelles.

1.2 Borne de confiance, niveau de confiance

La notion de borne de confiance est, en général, bien présentée dans les manuels et relève des techniques d'estimation.

On souhaite obtenir des précisions sur la valeur d'un paramètre réel θ inconnu. Lorsqu'il existe une fonction pivotale pour θ (cf (Tassi, 1985, p.223)), le calcul d'une borne ou d'un intervalle de confiance s'effectue très facilement. Dans le cas général, on peut opérer de la façon suivante (cf Mood et Graybill (1963)).

Soit Y une variable aléatoire réelle (V.A.R.) dont la loi de probabilité dépend d'un paramètre θ (on peut penser à un estimateur de θ). Notons $y \mapsto g(y, \theta)$ sa densité. Soit γ fixé $\in [0; 1]$, on peut trouver h tel que

$$\mathbb{P}[Y > h] = \int_h^{+\infty} g(y, \theta) dy = \gamma.$$

La valeur de h va dépendre évidemment de la valeur de θ . On suppose $\theta \mapsto h(\theta)$ strictement croissante. Notons y la valeur observée de Y .

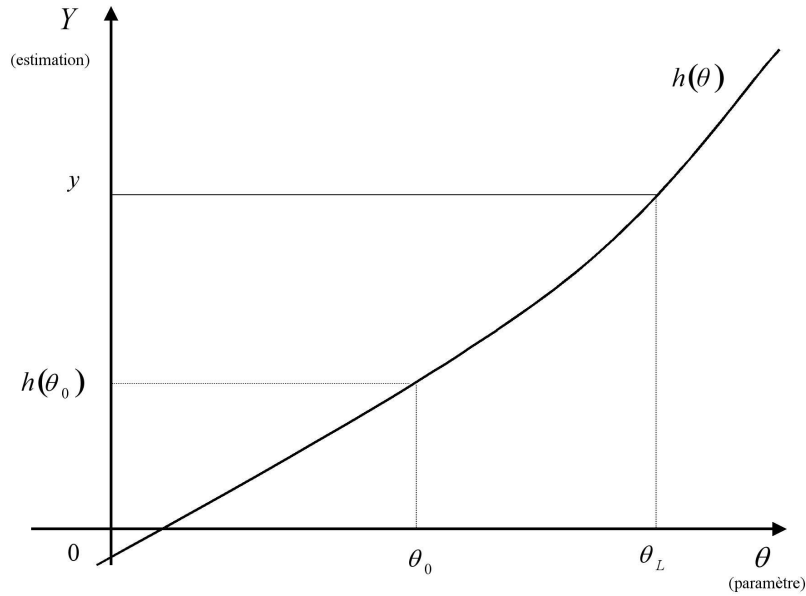


FIG. IV.1 – Lien entre paramètre et estimation

Dans le plan $(0; \theta; Y)$, une ligne horizontale passant par le point de coordonnées $(0; y)$ coupe la courbe $h(\theta)$ en un point d'abscisse θ_L . Notons Θ_L la V.A.R. dont les réalisations sont θ_L . On a

$$[\Theta_L < \theta] \iff [Y < h(\theta)] ,$$

d'où

$$\mathbb{P} [\Theta_L < \theta] = \mathbb{P} [Y < h(\theta)] = 1 - \gamma .$$

On appelle $]\Theta_L; +\infty[$ l'intervalle de probabilité $1 - \gamma$ à droite pour θ et $]\theta_L; +\infty[$ l'intervalle de confiance à $100(1 - \gamma)\%$ à droite pour θ . La valeur θ_L est alors appelée borne de confiance inférieure à $100(1 - \gamma)\%$.

Il n'est pas forcément nécessaire de calculer explicitement la fonction h . En effet, θ_L est la valeur de θ telle que $h(\theta_L) = y$ et donc pour laquelle

$$\int_y^{+\infty} g(u, \theta) du = \gamma. \quad (\text{IV.1})$$

S'il est possible d'exprimer simplement $\int_y^{+\infty} g(u, \theta) du$ et de résoudre l'équation en θ alors la racine θ_L est la borne inférieure souhaitée.

Inversement, étant donnée y une observation de Y et θ_0 une valeur fixée pour θ , l'équation (IV.1) peut être résolue en γ . C'est ce que nous proposons et donnons à cet effet la définition suivante.

Définition 26 Soit θ_0 une valeur fixée a priori et $\gamma(\theta_0)$ la solution de (IV.1) en γ . On appelle niveau de confiance que θ soit supérieur à θ_0 après observation de y la valeur $1 - \gamma(\theta_0)$ ainsi trouvée.

Essayons maintenant de donner une interprétation probabiliste à cette notion nouvelle. On sait que la notion d'intervalle de confiance peut s'interpréter de façon rigoureuse en adoptant un point de vue fréquentiste : si l'on répétait un grand nombre de fois l'expérience et si on notait à chaque fois l'intervalle ainsi trouvé, alors dans $100(1 - \gamma)\%$ des cas en moyenne, la vraie valeur de θ se trouverait dans cet intervalle. Une autre interprétation est possible dans un contexte bayésien. Mais il faut alors disposer d'une probabilité a priori sur θ (cf Lecoutre (1997)).

L'interprétation du niveau de confiance défini plus haut ne se fait qu'en revenant à la notion d'intervalle de confiance : si l'on avait cherché une borne inférieure de confiance à $100(1 - \gamma_0)\%$ après observation de y , on aurait trouvé la valeur θ_0 dont on est parti pour trouver γ_0 .

La valeur $1 - \gamma_0$ représente donc la probabilité de recouvrement de $]\theta_0; +\infty[$, intervalle de confiance à droite pour θ .

La notion de niveau de confiance apparaît alors comme duale de celle de borne de confiance ou d'intervalle de confiance.

Ces calculs peuvent s'appliquer dans le cas où la loi de probabilité de Y est discrète. Mais dans ce cas, on ne trouvera pas forcément de valeur de θ qui réponde exactement à la question.

1.3 Test séquentiel tronqué

Nous allons nous placer maintenant dans le cadre des plans de tests séquentiels de la norme américaine (cf Department of Defense (USA) (1998)) concernant le temps moyen de bon fonctionnement (Mean Time Between Failures, MTBF) d'équipements électroniques.

Pour le problème qui nous intéresse, ces équipements électroniques sont des Instrument Landing Systems qui, au sol, sont de deux sortes :

- le «localiser», situé en extrémité de la piste d'atterrissage d'un aéroport et qui sert à déterminer un plan vertical ;
- le «glidepath», situé sur le côté droit de la piste. Il sert à déterminer une surface courbe.

L'intersection du plan et de la surface courbe constitue le rail électronique le long duquel l'avion doit évoluer pour son atterrissage.

Ces équipements étant utilisés pour guider l'avion par des conditions de visibilité réduite (le pilote ne voyant pas la piste jusqu'à une distance pouvant être très faible), la disponibilité du signal pendant la phase d'approche et d'atterrissage doit être de haut niveau. Les interruptions d'émission ne doivent pas dépasser une certaine probabilité d'émergence réglementaire. Ces éventuelles interruptions d'émission sont qualifiées d'outages et l'on parle de temps moyen entre deux outages (MTBO).

Pour la séquence des outages nous utilisons un modèle de processus de Poisson homogène. Si on note $X_1, \dots, X_r$ la suite des temps de bon fonctionnement entre deux outages, les VAR X_i , $i = 1, \dots, r$ sont alors considérées comme indépendantes et de même loi exponentielle

de densité

$$x \longmapsto f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x). \quad (\text{IV.2})$$

Nous rappelons maintenant quelques éléments de la théorie de Wald. On désire tester $H_0 : \theta = \theta_0$ contre l'hypothèse $H_1 : \theta = \theta_1$, avec $\theta_1 < \theta_0$. Dans le cadre séquentiel la taille de l'échantillon n'est plus fixée. On rajoute des données x_i une par une et on se demande à chaque fois si on peut accepter ou non H_0 ou si d'autres observations sont nécessaires.

L'équivalent séquentiel de la règle de décision de Neyman-Pearson est le théorème de Wald (cf Ghosh (1970) ou Siegmund (1985)) qui nous indique de poursuivre la collecte de données tant que :

$$B < L_r = \prod_{i=1}^r \frac{f(x_i, \theta_1)}{f(x_i, \theta_0)} < A. \quad (\text{IV.3})$$

On stoppe la procédure en choisissant H_0 dès que $L_r \leq B$ ou H_1 dès que $A \leq L_r$. Cette règle de décision s'appelle le test séquentiel du rapport des probabilités (TSRP). Les constantes A et B sont déterminées à partir des risques α et β .

Le risque α représente la probabilité de refuser l'équipement alors qu'il est opérationnel. Le risque β représente la probabilité d'accepter l'équipement alors que celui-ci est défectueux. La valeur α est généralement qualifiée de risque du producteur alors que β représente le risque de l'acheteur.

Selon la théorie de Wald, les constantes A et B sont approchées respectivement par $\frac{1-\beta}{\alpha}$ et $\frac{\beta}{1-\alpha}$.

A chaque étape m de la procédure du test séquentiel, on peut définir trois régions

- D_m^1 la région de rejet,
- D_m^0 la région d'acceptation,
- D_m la région de continuation.

On remarque que D_{m-1} est l'union disjointe de D_m , D_m^0 , D_m^1 . Soit θ fixé. Pour tout test séquentiel du rapport des probabilités et tout $m \geq 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_\theta(\text{continuer la procédure à l'étape } m) \\ & + \mathbb{P}_\theta(\text{décider } H_0 \text{ avant ou à l'étape } m) \\ & + \mathbb{P}_\theta(\text{décider } H_1 \text{ avant ou à l'étape } m) = 1. \end{aligned}$$

Soit $(X_1, \dots, X_m)$ une séquence d'observations. On note

$$\begin{aligned} C_m &= \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_m) \in D_m) \\ \mathbb{P}_m^0 &= \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_m) \in D_m^0) \\ \text{et } \mathbb{P}_m^1 &= \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_m) \in D_m^1). \end{aligned}$$

A l'étape 1, on a $C_1 + \mathbb{P}_1^0 + \mathbb{P}_1^1 = 1$. A l'étape 2, on obtient $C_2 + \mathbb{P}_2^0 + \mathbb{P}_2^1 = C_1$, puis d'une façon générale

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_m) \in D_m) + \sum_{n=1}^m \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_n) \in D_n^0) \\ + \sum_{n=1}^m \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_n) \in D_n^1) = 1. \end{aligned}$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on montre que le test s'arrête en un nombre fini d'étapes avec la probabilité 1. A la dernière étape, on obtient alors $\mathbb{P}_{m_0}^0 + \mathbb{P}_{m_0}^1 = C_{m_0-1}$.

Wald a introduit ensuite deux notions : la courbe d'efficacité, qui représente la probabilité d'accepter H_0 en fonction de θ , et le nombre moyen d'observations nécessaires pour terminer le test en fonction de θ (ou Average Sample Number, noté ASN). Wald a calculé diverses approximations de ces courbes.

Pour la densité exponentielle (IV.2), les inégalités (IV.3) s'écrivent

$$B < \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^r \exp \left\{ - \sum_{i=1}^r x_i \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} \right) \right\} < A$$

où r est le nombre d'outages. A condition de poser $t = \sum_{i=1}^r x_i$ et $d = \frac{\theta_0}{\theta_1}$, cette double inégalité peut s'écrire

$$\frac{\ln B}{\ln d} + \frac{\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)}{\ln d} t < r < \frac{\ln A}{\ln d} + \frac{\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)}{\ln d} t.$$

Ces dernières inégalités correspondent exactement au test de Wald et supposent que la dernière observation soit allée jusqu'au temps exact où s'est produit l'outage. Or, si l'on écrit les inégalités en privilégiant le temps, on obtient

$$\frac{r \ln d - \ln A}{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}} < t < \frac{r \ln d - \ln B}{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}}.$$

Il est alors possible de prendre une décision dès que l'une des frontières est franchie et l'on obtient une version dite continue du TSRP. Lorsque ce test accepte H_0 , il le fait en un temps inférieur à celui du TSRP de Wald. Mais il ne s'agit plus du test de Wald et certaines modifications sont nécessaires.

Les bornes A et B retenues sont alors (cf Dvoretzky et al. (1963)) :

$$A = \frac{(1 - \beta)(d + 1)}{2\alpha d} \quad \text{et} \quad B = \frac{\beta}{1 - \alpha}. \quad (\text{IV.4})$$

Bien que le test séquentiel s'arrête en un temps fini avec la probabilité 1, il peut aléatoirement nécessiter un nombre d'observations supérieur à celui d'un test classique. On se fixe alors un temps t_0 au delà duquel le test ne doit pas continuer, ainsi qu'un nombre r_0 d'outages qui ne doit pas être dépassé. En général, on se fixe r_0 comme étant la taille d'un test classique de niveau α et de puissance maximale $1 - \beta$ pour tester H_0 contre H_1 . D'après Epstein et Sobel (1955), cette valeur r_0 est le plus petit des entiers r tels que

$$\frac{\chi_{2r,\alpha}^2}{\chi_{2r,1-\beta}^2} \geq \frac{\theta_1}{\theta_0} = \frac{1}{d} \quad (\text{IV.5})$$

où $\chi_{2r,\alpha}^2$ est le quantile d'ordre α d'un chi-deux à $2r$ degrés de liberté et le bon choix du temps de troncature est

$$t_0 = \frac{\theta_0}{2} \chi_{2r_0,\alpha}^2. \quad (\text{IV.6})$$

En général, il est plus commode de travailler en temps standardisé t' qui s'évalue en multiple de θ_1 . Le temps $t' = \frac{t}{\theta_1}$ est alors le temps standardisé correspondant au temps réel t . Puis, en posant

$$h'_0 = -\frac{\ln B}{1 - \frac{1}{d}}, \quad h'_1 = \frac{\ln A}{1 - \frac{1}{d}}, \quad s' = \frac{\ln d}{1 - \frac{1}{d}},$$

la règle en temps standardisé s'écrit

- si $t' \geq rs' + h'_0$, on accepte H_0 ,
- si $t' \leq rs' - h'_1$, on rejette H_0 ,
- si $rs' - h'_1 < t' < rs' + h'_0$, on continue d'observer l'équipement.

Afin de tenir compte de la troncature, cette règle est complétée par

- on accepte H_0 si le temps t'_0 s'est écoulé sans atteindre r_0 outages,
- on accepte H_1 si r_0 outages se sont produits pendant une durée inférieure à t'_0 .

Dans le cas des tests tronqués, les approximations de la fonction d'efficacité et de la fonction ASN ne sont plus valables. Il est toutefois possible d'en calculer la valeur exacte à l'aide des probabilités $\mathbb{P}_m^0$, $\mathbb{P}_m^1$ et C_m , $m \geq 1$. Le calcul à chaque étape de ces probabilités en fonction de θ , s'appelle la méthode directe d'Aroian (cf Aroian (1968)).

Ci-dessous sont représentées graphiquement dans le plan (t', r) les frontières du TSRP dans le cas ordinaire et dans le cas tronqué. La bande de continuation est plus étroite dans le cas tronqué et surtout se termine obligatoirement avant ou en (t'_0, r_0) .

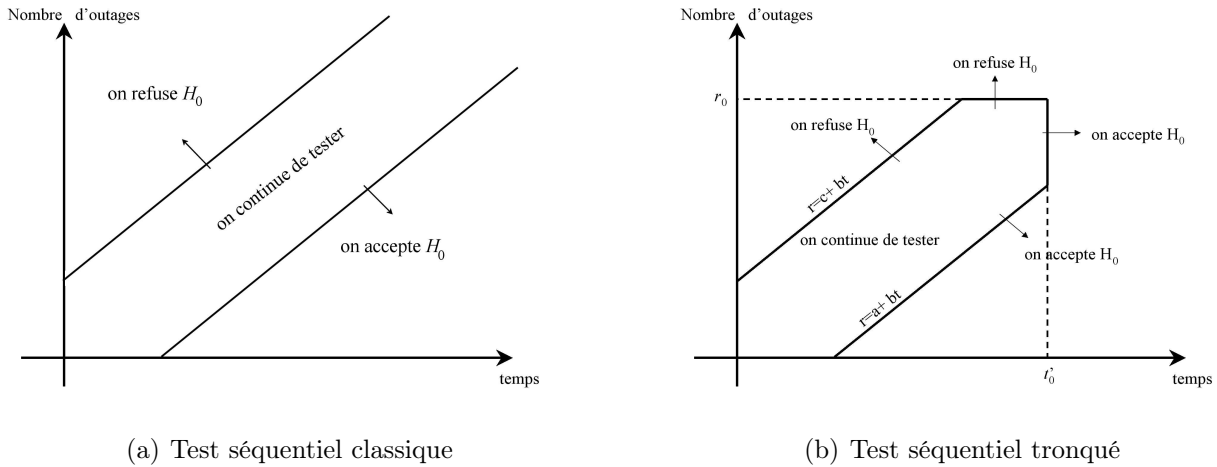


FIG. IV.2 – Frontières du test séquentiel des rapports des probabilités.

1.4 Calcul d'un niveau de confiance après acceptation pour une loi exponentielle

Nous allons maintenant décrire les méthodes permettant d'obtenir les limites inférieures de confiance standardisées à $100(1 - \gamma)\%$ et les niveaux de confiance lorsque l'hypothèse H_0 a été acceptée.

1.4.1 Probabilités de continuation

Nous construisons ici la V.A. qui va nous permettre d'exploiter les résultats du paragraphe 1.2. Bien que cette construction soit relativement naturelle, elle s'avère essentielle pour une traduction rigoureuse de l'équation (IV.1).

On note t'_{A_i} le temps standardisé d'acceptation après i outages et t'_{R_j} le temps standardisé de rejet après j outages. Ces temps sont en fait les abscisses des points d'intersection entre la frontière d'acceptation et la droite $r = i$ pour le premier et entre la frontière de rejet et la droite $r = j$ pour le second. Soient T_A la V.A. représentant le temps standardisé où le test conduit à accepter l'équipement et $N(T_A)$ le nombre d'outages survenus pendant le temps d'observation T_A . Ainsi T_A est une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs t'_{A_i} pour i variant de 0 à $r_0 - 1$ lorsque le test se termine par une acceptation et nous lui affectons la valeur $+\infty$ lorsque le test se termine par un rejet.

La fonction $N(\cdot)$ représente la fonction de comptage du processus de Poisson homogène de la séquence des outages. Pour tout $t > 0$, $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{t}{\theta}$. On estime alors $\theta' = \frac{\theta}{\theta_1}$ par la V.A.R.

$$Y = \frac{T_A}{N(T_A)} \mathbb{1}_{[T_A < +\infty]}.$$

Ceci revient à estimer θ' par $\frac{t'_{A_i}}{i}$ quand le test se termine par une acceptation au temps t'_{A_i} après i outages et par 0 si le test se termine par un rejet. Notons $\theta'_{L,\gamma,i}$ la borne inférieure de confiance à 100 $(1 - \gamma)$ % de θ' lorsque le test s'est terminé par une acceptation avec i outages. La borne inférieure $\theta_{L,\gamma,i}$ de confiance à 100 $(1 - \gamma)$ % de θ est égale à $\theta_1 \theta'_{L,\gamma,i}$.

D'après l'équation (IV.1), cette borne inférieure de confiance est solution de

$$\sum_{s/\frac{t'_{A_s}}{s} \geq \frac{t'_{A_i}}{i}} \mathbb{P}\left(Y = \frac{t'_{A_s}}{s}; \theta'_{L,\gamma,i}\right) + \mathbb{P}(Y = 0; \theta'_{L,\gamma,i}) \mathbb{1}_{\left\{0 \geq \frac{t'_{A_i}}{i}\right\}} = \gamma, \quad (\text{IV.7})$$

où $\mathbb{P}(D; \theta')$ est la probabilité de l'événement D lorsque $\theta'\theta_1$ est la vraie valeur du paramètre. Il est facile de montrer que la séquence $\left(\frac{t'_{A_s}}{s}\right)_s$ est décroissante et que

$$\left\{Y = \frac{t'_{A_s}}{s}\right\} = \{[N(T_A) = s] \cap [T_A = t'_{A_s}]\}.$$

L'équation (IV.7) s'écrit alors

$$\gamma = \sum_{s=0}^i \mathbb{P}((N(T_A), T_A) = (s, t'_{A_s}); \theta'_{L,\gamma,i}),$$

où $\mathbb{P}((N(T_A), T_A) = (s, t'_{A_s}); \theta')$ désigne la probabilité que le test se termine par une acceptation au temps réel $t'_{A_s} \times \theta_1$ lorsque $\theta' \times \theta_1$ est la vraie valeur du paramètre. Afin de simplifier les notations, nous poserons pour la suite

$$\mathbb{P}((N(T_A), T_A) = (s, t'_{A_s}); \theta'_{L,\gamma,i}) = \mathbb{P}((s, t'_{A_s}); \theta'_{L,\gamma,i}).$$

Proposition 29 Soit $(t'_{(k)})_k$ une suite de temps de fin de test standardisés, distincts et rangés dans l'ordre croissant telle que $t'_{(0)} = 0$ et $t'_{(j)} = t'_0$. On a :

$$\mathbb{P}((i, t'_{(k)}); \theta') = e^{-\frac{t'_{(k)}}{\theta'}} \left(\frac{1}{\theta'}\right)^i c'(i, t'_{(k)}), \quad (\text{IV.8})$$

où les $c'(i, t'_{(k)})$ sont des coefficients indépendants de θ' .

Preuve de la proposition 29

Nous reprenons ici les notations de Illig (2001). On pose pour $l = 1, \dots, j$,

$$\Delta_l = t'_{(l)} - t'_{(l-1)}.$$

On a alors

$$]0, t'_{(k)}] = \cup_{l=1}^k]t'_{(l-1)}, t'_{(l)}] \quad \text{et} \quad \sum_{l=1}^k \Delta_l = t'_{(k)}.$$

Soit $(t'_{(k)}, i)$, $k \leq j$, un point de la région de continuation ou de la frontière d'acceptation. Pour une valeur θ' du paramètre standardisé, la probabilité que δ_l outages surviennent dans l'intervalle de temps $]t'_{(l-1)}, t'_{(l)}]$ est égale à

$$\mathbb{P}(\delta_l \text{ outages dans }]t'_{(l-1)}, t'_{(l)}]; \theta') = \mathbb{P}(N(t'_{(l)}\theta_1) - N(t'_{(l-1)}\theta_1) = \delta_l; \theta').$$

Or $N(t'_{(l)}\theta_1) - N(t'_{(l-1)}\theta_1)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\Delta_l}{\theta'}$. On obtient donc

$$\mathbb{P}(\delta_l \text{ outages dans }]t'_{(l-1)}, t'_{(l)}]; \theta') = e^{-\frac{\Delta_l}{\theta'}} \frac{\left(\frac{\Delta_l}{\theta'}\right)^{\delta_l}}{\delta_l!}.$$

Si maintenant on considère un k -uplet $(\delta_1, \dots, \delta_k)$ d'entiers positifs tels que $\sum_{l=1}^k \delta_l = i$ et ne conduisant pas à une terminaison du test avant $t'_{(k)}$ alors la probabilité qu'il y ait i outages pendant le temps $t'_{(k)}$ avec pour chaque l , δ_l outages dans l'intervalle $]t'_{(l-1)}, t'_{(l)}]$ sans que le test ne se termine avant $t'_{(k)}$ est égale à

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((\delta_1, \dots, \delta_k), \text{ pas de terminaison avant } t'_{(k)}; \theta') \\ &= \mathbb{P}(\forall l = 1, \dots, k, \delta_l \text{ outages dans }]t'_{(l-1)}, t'_{(l)}]; \theta') \\ &= \mathbb{P}(\forall l = 1, \dots, k, N(t'_{(l)}\theta_1) - N(t'_{(l-1)}\theta_1) = \delta_l; \theta'). \end{aligned}$$

Par indépendance des accroissements de N , on obtient alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((\delta_1, \dots, \delta_k), \text{ pas de terminaison avant } t'_{(k)}; \theta') \\ &= \prod_{l=1}^k e^{-\frac{\Delta_l}{\theta'}} \frac{\left(\frac{\Delta_l}{\theta'}\right)^{\delta_l}}{\delta_l!} \\ &= \left[\prod_{l=1}^k e^{-\frac{\Delta_l}{\theta'}} \left(\frac{1}{\theta'}\right)^{\delta_l} \right] \left[\prod_{l=1}^k \frac{(\Delta_l)^{\delta_l}}{\delta_l!} \right] \\ &= e^{-\frac{t'_{(k)}}{\theta'}} \left(\frac{1}{\theta'}\right)^i \prod_{l=1}^k \frac{(\Delta_l)^{\delta_l}}{\delta_l!}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la probabilité que i outages surviennent pendant un temps $t'_{(k)}$ pour une valeur θ' du paramètre standardisé est

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((i, t'_{(k)}); \theta') &= \sum_S \mathbb{P}((\delta_1, \dots, \delta_k), \text{ pas de terminaison avant } t'_{(k)}; \theta') \\ &= e^{-\frac{t'_{(k)}}{\theta'}} \left(\frac{1}{\theta'}\right)^i \sum_S \prod_{l=1}^k \frac{(\Delta_l)^{\delta_l}}{\delta_l!}, \end{aligned}$$

où S désigne l'ensemble des k -uplets tels que $\sum_{l=1}^k \delta_l = i$ et ne conduisant pas à une terminaison du test avant l'instant $t'_{(k)}$.

En posant,

$$c'(i, t'_{(k)}) = \sum_S \prod_{l=1}^k \frac{(\Delta_l)^{\delta_l}}{\delta_l!},$$

on obtient la relation voulue.

L'équation (IV.8) nous permet d'obtenir les coefficients $c'(i, t'_{(k)})$ en fonction de $\mathbb{P}((i, t'_{(k)}); \theta')$ que l'on sait calculer lorsque θ' est fixé (cf section suivante). On est alors en mesure d'écrire l'équation (IV.7) sous la forme suivante :

$$\gamma = \sum_{s=0}^i c'(s, t'_{A_s}) e^{-\frac{t'_{A_s}}{\theta'_{L, \gamma, i}}} \left(\frac{1}{\theta'_{L, \gamma, i}}\right)^s. \quad (\text{IV.9})$$

1.4.2 Calcul des coefficients $c'(i, t'_{(k)})$

Nous calculons les probabilités $\mathbb{P}((i, t'_{(k)}); \theta')$ pour la valeur $\theta' = 1$. Nous en déduisons alors les coefficients $c'(i, t'_{(k)})$ par l'équation

$$c'(i, t'_{(k)}) = e^{t'_{(k)}} \mathbb{P}((i, t'_{(k)}); 1).$$

Les paramètres α , β et d ayant été fixés, il est possible de calculer les droites de confiance ainsi que r_0 et t'_0 . Les temps standardisés correspondant aux intersections des lignes d'outages avec les frontières d'acceptation et de rejet sont ensuite calculés et rangés en ordre croissant $t'_{(1)} \leq t'_{(2)} \leq \dots \leq t'_0$. On complète alors le quadrillage par des verticales passant par ces points d'intersection. Apparaissent alors dans la bande de continuation des points spécifiques de coordonnées $(t'_{(j)}, i)$, appelés points de continuation.

Le calcul des probabilités de continuation pour la valeur $\theta' = 1$ se fait à l'aide d'une procédure récursive.

La $j^{\text{ème}}$ étape de cette procédure consiste à calculer aux points d'abscisse $t'_{(j)}$ les probabilités en question. Pour cela, on énumère pour chacun de ces points les trajectoires qui y aboutissent (cf Fig.IV.3), afin de calculer leurs probabilités. On part des points d'abscisses $t'_{(j-1)}$ pour lesquels on a fait le calcul des probabilités de continuation à l'étape $j-1$ et on calcule le nombre d'outages nécessaires pour parvenir en $(t'_{(j)}, i)$.

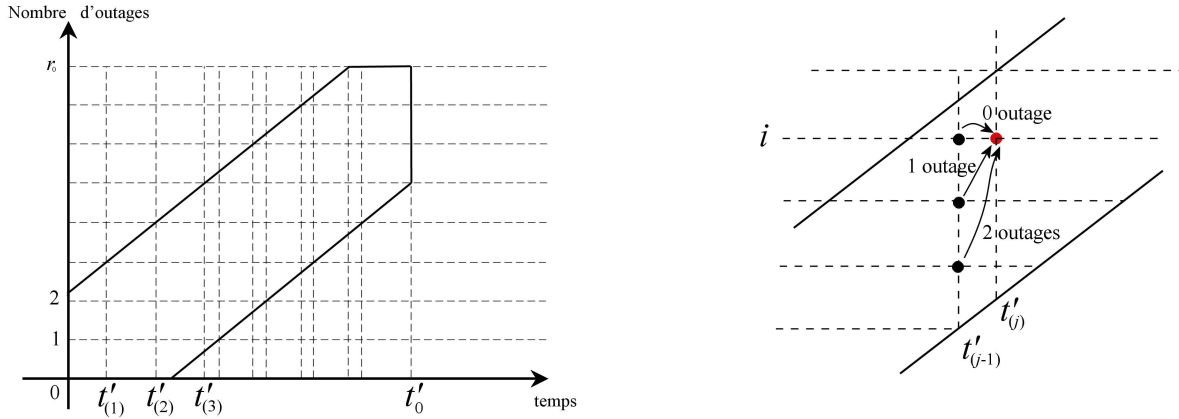


FIG. IV.3 – Etude des trajectoires

Parmi les points de coordonnées $(t'_{(j-1)}, k)$, $k \leq i$, on sélectionne ceux qui appartiennent à la bande de continuation et on note $\mathcal{K}$ l'ensemble de ces points. La probabilité de continuation en $(t'_{(j)}, i)$ s'obtient alors par la formule :

$$\mathbb{P}((i, t'_{(j)}) ; 1) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \mathbb{P}((k, t'_{(j-1)}) ; 1) e^{-(t'_{(j)} - t'_{(j-1)})} \frac{(t'_{(j)} - t'_{(j-1)})^{i-k}}{(i-k)!} .$$

L'initialisation de cette procédure consiste à calculer les probabilités de continuation aux points de coordonnées $(t'_{(1)}, k)$. On peut voir que cela représente en fait la probabilité d'avoir k outages pendant un temps total $t'_{(1)}$.

On peut ensuite calculer les probabilités d'acceptation aux points de coordonnées (t'_{A_i}, i) pour $i = 1, \dots, r_0$. Pour chaque t'_{A_i} , il existe un l_i tel que $t'_{A_i} = t'_{(l_i)}$ et on a

$$\mathbb{P}((i, t'_{A_i}) ; 1) = \mathbb{P}((i, t'_{(l_i)}) ; 1) = \mathbb{P}((i, t'_{(l_i-1)}) ; 1) e^{-(t'_{(l_i)} - t'_{(l_i-1)})} .$$

1.4.3 Borne inférieure de confiance

Une fois l'équipement accepté, on cherche à savoir quelle est la borne inférieure de confiance à $100(1 - \gamma)\%$ pour θ au sens de la section 1.2. On est donc amené à résoudre l'équation (IV.9) en θ où γ est fixé par l'utilisateur.

Plusieurs méthodes de résolution numérique sont disponibles (Point fixe, Newton, etc). Nous utilisons ici la méthode de bisection (cf Nougier (1987)).

1.4.4 Niveau de confiance

Ce qui intéresse les ingénieurs, une fois l'équipement accepté, est de savoir quelle confiance ils peuvent avoir dans le fait que le temps moyen entre deux outages dépasse une valeur seuil

qu'ils considèrent comme minimale pour la sécurité du fonctionnement des ILS. On retrouve donc la notion de niveau de confiance telle que nous l'avons introduite à la section 1.2.

Ce problème est le problème dual du précédent. C'est la même équation (IV.9) qui va servir, mais au lieu de la résoudre en θ' on va la résoudre en γ . On effectue donc la somme de i termes dépendant chacun des coefficients $c'(s, t'_{A_s})$ dont le calcul est rappelé en 1.4.2.

1.5 Etude de cas

Les 21 valeurs ci-dessous¹ représentent les temps observés de bon fonctionnement entre deux outages. Elles concernent un localiser expérimental.

Ces données peuvent surprendre par leur variabilité : on trouve un temps de bon fonctionnement de 3 heures faisant suite à un fonctionnement sans interruption de plus d'une année !

175	1505	4488	2382	16	1165	244
9240	3	6126	4708	3148	3447	5
3554	388	7578	5073	215	2622	2802

TAB. IV.1 – Temps réel, en heures, de bon fonctionnement entre deux outages

Nous savons que le localiser peut détecter des intrus (oiseaux, personnes, véhicules s'interposant entre l'appareil et l'avion) déclenchant alors une interruption de fonctionnement. Toutes les interruptions ne sont donc pas de même nature et ne nécessitent pas le réarmement de l'appareil. Dans le cas présent, nous ignorons la nature réelle des interruptions.

Trois tests séquentiels ont été effectués correspondant à trois types de localisers

- Localiser de catégorie III, MTBO souhaité > 4000 heures,
- Localiser de catégorie II, MTBO souhaité > 2000 heures,
- Localiser de catégorie I, MTBO souhaité > 1000 heures.

On constate que le problème initial concerne des hypothèses composites. Comme on le fait souvent, afin de conserver la simplicité de la procédure, la norme américaine (cf Department of Defense (USA) (1998)) conseille de se ramener à des hypothèses simples. Il est alors d'usage de fixer θ_1 à la valeur minimale souhaitée pour le MTBO et θ_0 à 2 fois θ_1 . Ceci évite de qualifier un appareil dont le MTBO serait trop proche de l'objectif minimal.

D'autre part, pour des raisons évidentes de sécurité, il est préférable d'observer les ILS pendant une durée minimale. Celle-ci est en général égale à un an car le fonctionnement des ILS est aussi lié aux conditions climatiques.

Dans tous les cas, nous avons pris $\alpha = \beta = 0, 1$ et $d = 2$. Pour le dernier test (localiser de catégorie I), nous avons également envisagé le test avec un temps minimum d'observations de un an.

Les plans de test, les trajectoires correspondantes ainsi que les niveaux de confiance que θ' dépasse 1 pour chacune des acceptations sont fournis figures IV.4, IV.5, IV.6 et IV.7.

¹These data have been provided by LVNL -Air Traffic Control the Netherlands- and used with their kind permission.

Ces données ont été fournies par LVNL -Air Traffic Control the Netherlands- et sont utilisées avec leur aimable autorisation.

La figure IV.4 correspond au test de $\theta_0 = 8000$ contre $\theta_1 = 4000$. La qualification est refusée. La figure IV.5 correspond au test de $\theta_0 = 4000$ contre $\theta_1 = 2000$. Le test se termine par un refus au bout de 9975 heures et 7 outages. La trajectoire complète du processus a cependant été tracée. Les figures IV.6 et IV.7 concernent le test de $\theta_0 = 2000$ contre $\theta_1 = 1000$, avec un temps minimum d'observation de un an dans le dernier cas.

Dans ces deux derniers cas, la qualification est obtenue après sept outages. Le niveau de confiance que θ soit supérieur à 1000 est de 92,48% dans le premier cas et de 94,21% dans le second. Notons que pour tous ces plans, les valeurs de α , β et d sont les mêmes. Il est donc normal que les valeurs de troncatures en multiples de θ_1 soient les mêmes et que les niveaux de confiance que θ dépasse θ_1 (ou que θ' dépasse 1) soient identiques pour les trois premiers plans.

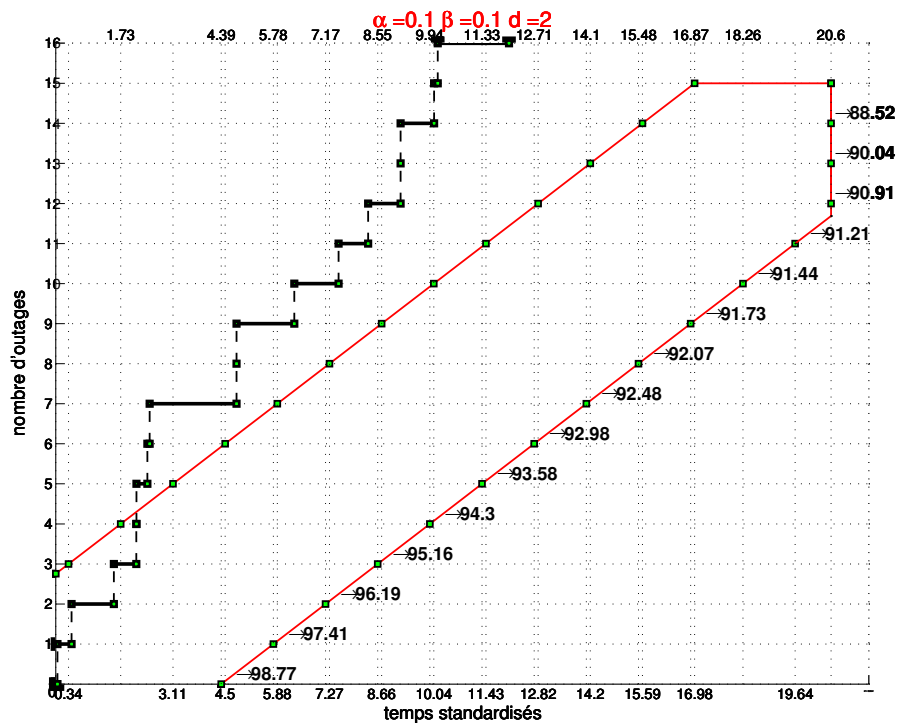


FIG. IV.4 – Plan du test séquentiel pour un localiser de catégorie III avec $\theta_1 = 4000$ heures.

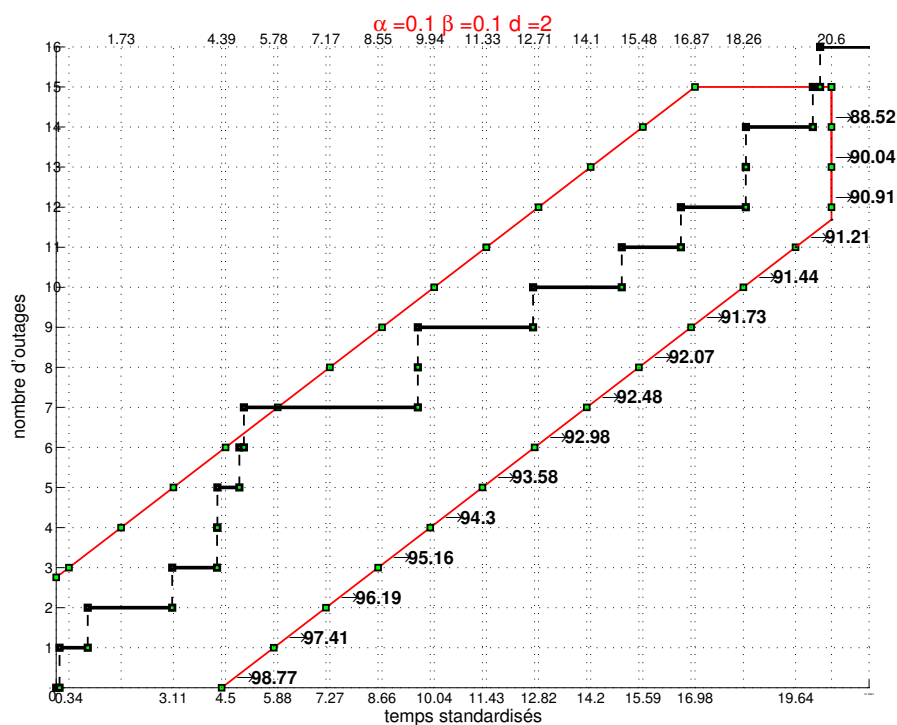


FIG. IV.5 – Plan du test séquentiel pour un localiser de catégorie II avec $\theta_1 = 2000$ heures.

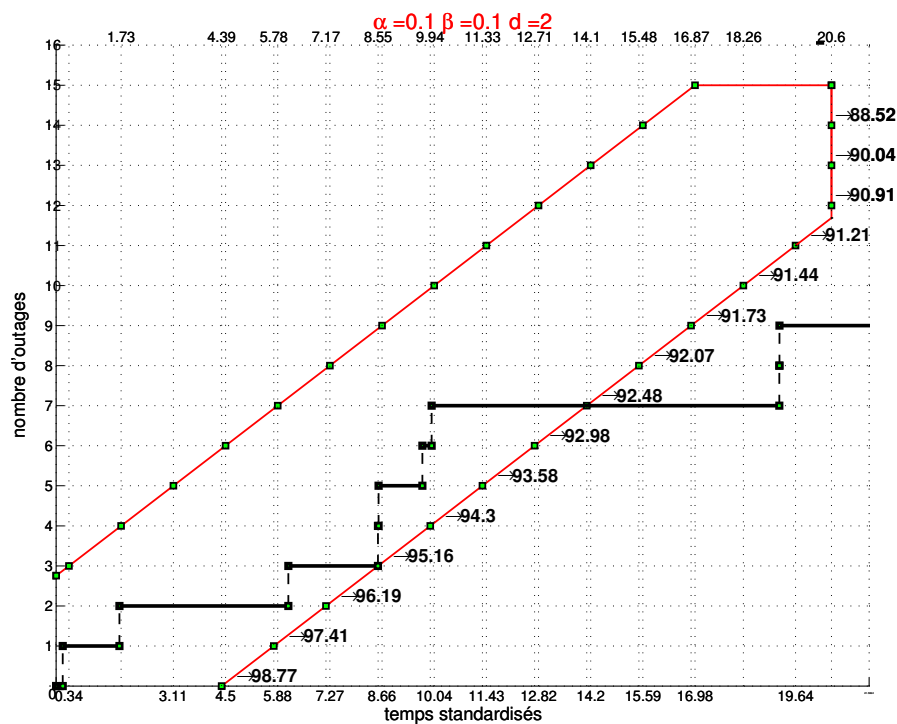


FIG. IV.6 – Plan du test séquentiel pour un localiser de catégorie I avec $\theta_1 = 1000$ heures.

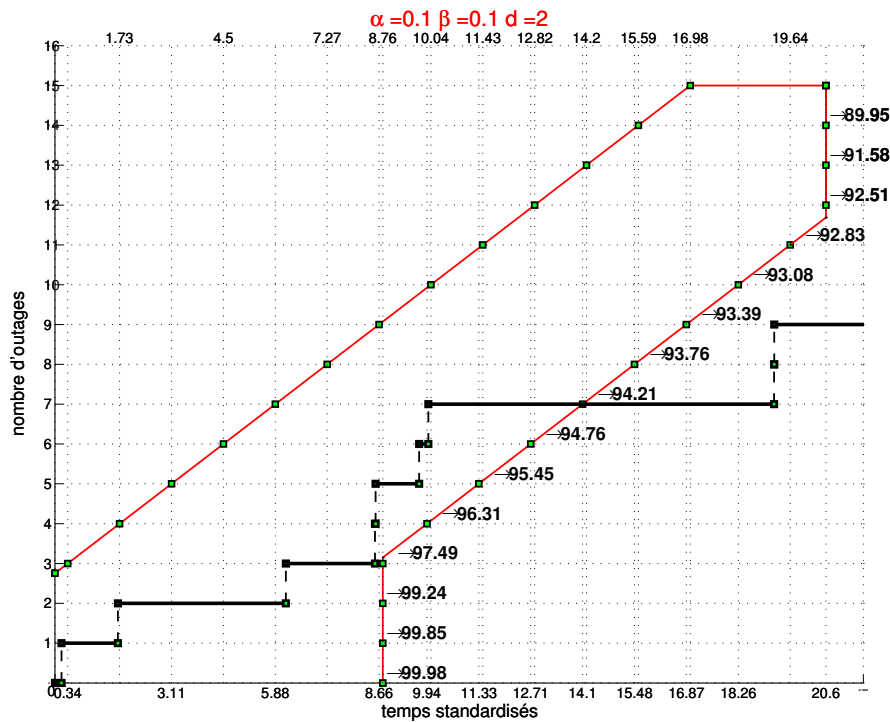


FIG. IV.7 – Plan du test séquentiel pour un localiser de catégorie I avec $\theta_1 = 1000$ heures et un minimum de un an d'observation.

Pour valider les calculs ci-dessus, il faut s'assurer de l'hypothèse de loi exponentielle. Dans le cas présent, la valeur obtenue lors du test du χ^2 conduit à une probabilité excédentaire autour de 8%. L'hypothèse de loi exponentielle est donc acceptée avec des réserves. Notons que lorsque les valeurs 3, 5 et 16 sont écartées, l'ajustement est quasi-parfait. Il est possible que ces données correspondent à la détection d'un intrus. Les temps correspondants pourraient donc être ajoutés aux temps suivants. En l'absence d'information à ce sujet, nous nous sommes refusés à le faire, ce qui aurait changé les réponses aux différents tests.

Notons que l'intervalle de confiance symétrique à 90% sur θ donne [2034; 4232]. La borne supérieure est trop peu élevée pour permettre l'acceptation d'un localiser de catégorie II.

Une question se pose alors avec insistance : comment peut-on prendre des décisions aussi importantes avec si peu d'observations ? Dans le cas présent, ceci représente en temps de test une durée minimale de un an et maximale de plusieurs années. Notons que paradoxalement, un appareil parfait ne fournirait aucune observation puisqu'il n'y aurait pas d'interruptions. Sous réserve que les observations suivent bien une loi exponentielle (hypothèse qu'il faut vérifier, avec peut-être des observations en plus grand nombre!), les résultats obtenus sont rigoureux. Il faut toutefois garder à l'esprit la façon dont s'envisage un intervalle de confiance et donc un niveau de confiance.

Pour conclure, précisons qu'il est possible de calculer, de façon analogue, des bornes supérieures après acceptation (cf Bryant et Schmee (1979)) ou après rejet, et donc des intervalles de confiance ainsi que des niveaux de confiance au sens de la section 1.2. Une fois le test effectué, le problème qui se pose quelle que soit la réponse est de savoir que faire du

localiser. Nous pensons que ces niveaux de confiance peuvent aider à prendre les décisions.

Les travaux ci-dessus ont été réalisés à l'aide de programmes en Matlab qui seront disponibles sur le web à l'adresse www.enseeiht.fr/len7/index.html.

Remerciements : les auteurs remercient Pierre Cazes et le comité de rédaction pour leur lecture attentive et leurs nombreuses suggestions qui ont permis la rédaction actuelle de ce travail. Ils remercient également Véronique Font membre de la société IXI et Philippe Crébassa pour son accueil au STNA.

Références

- Aroian L. A.** (1968). *Sequential analysis, direct method*. Technometrics, vol. 10. pages 125–132.
- Bryant L. et Schmee J.** (1979). *Confidence limits on MTBF for Sequential Test Plans of MIL-STD 781*. Technometrics, vol. 21. pages 33–42.
- Department of Defense (USA)** (4 1998), *Handbook for reliability test methods, plans, and environments for engineering, development, qualification, and production*. Rapport technique.
- Dvoretzky A., Kiefer J. et Wolfowitz J.** (1963). *Sequential decision problem for processus with continuous time parameter. testing hypothesis*. Ann. Math. Stat., vol. 24. pages 254–264.
- Epstein B. et Sobel M.** (1955). *Sequential life tests in the exponential case*. Ann. Math. Statist., vol. 26. pages 82–93.
- Ghosh B. K.** (1970). *Sequential tests of statistical hypotheses*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont.
- Illig A.** (2001). *Probabilités de confiance après décision lors d'un test séquentiel avec un temps de bon fonctionnement de loi exponentielle*. Mémoire de DEA sous la direction du professeur B. Garel, Université Toulouse III.
- Lecoutre B.** (1997). *C'est bon à savoir ! et si vous étiez un bayésien qui s'ignore*. Modulab, INRIA, vol. 8, n°18. pages 81–87.
- Mood A. et Graybill F.** (1963). *Introduction to the theory of statistics*. Mc Graw-Hill, 2 éd.
- Nougier J. P.** (1987). *Méthodes de calcul numérique*. Mathématiques pour la Physique. [Mathematics for Physics]. Masson, 3 éd.
- Siegmund D.** (1985). *Sequential analysis : tests and confidence intervals*. Springer-Verlag.
- Tassi P.** (1985). *Méthodes statistiques*. Economica.
- Wald A.** (1947). *Sequential Analysis*. John Wiley & Sons, New York.

2 Programme Matlab : note technique

Dans cette section, nous expliquons comment se servir de l'interface graphique que nous avons créée. Le programme Matlab est accessible sur le web à l'adresse suivante : <http://www.enseeiht.fr/len7/>. Pour tous les résultats théoriques, nous renvoyons à la section précédente.

Après exécution du programme `testplan.m`, nous obtenons la figure IV.8. Pour obtenir le plan du test séquentiel, il y a alors 3 étapes à effectuer.

Dans la partie «Valeurs initiales», 4 valeurs sont à spécifier : **alpha** qui correspond au risque de première espèce, **beta** qui correspond au risque de seconde espèce, **teta0** qui correspond à la valeur du paramètre sous l'hypothèse H_0 et **d** qui est égal à $\frac{\theta_0}{\theta_1}$, où θ_1 est la valeur du paramètre sous l'hypothèse H_1 .

Dans la partie «Type du test», nous pouvons préciser si un temps minimum est souhaité ou non. La figure IV.9 montre le cas où l'utilisateur désire un temps minimum. On peut voir que le temps minimum peut être spécifié selon trois unités de mesure (en nombre de mois, en nombre d'heures ou en multiple de θ_1 , appelé temps standardisé).

L'équation (IV.9), page 112, nous donne la relation entre γ (niveau de confiance) et θ' (borne inférieure de confiance). Dans la partie «Type du test», nous pouvons alors préciser le résultat voulu. Soit l'utilisateur veut calculer les niveaux de confiance : il doit alors préciser la valeur de **tetaprime**. Soit il veut calculer les bornes inférieures de confiance : auquel cas, il doit préciser la valeur de **gamma**. Par défaut, le programme calcule les niveaux de confiance (cf figure IV.8). Il suffit de cliquer sur **Borne inférieure de confiance** pour rentrer la valeur de **gamma** (cf figure IV.10)

Les paramètres de troncature i_0 et t_0 , calculés automatiquement grâce aux valeurs initiales (données par les équations (IV.5) et (IV.6), page 108) peuvent être précisés manuellement par l'utilisateur. Pour cela, il suffit de cliquer sur le paramètre à modifier (cf figure IV.11). Remarquons que la valeur de **t0**, comme pour le temps minimum, peut être spécifiée selon les trois unités de mesure (mois/heure/standardisé).

Lorsque chaque partie a été remplie par l'utilisateur, celui-ci peut cliquer sur **Executer** afin que le programme se lance. Le graphique des résultats présente alors le plan du test séquentiel ainsi que les résultats (niveau de confiance ou borne de confiance) calculés pour chaque acceptation (de 0 outage à i_0 outages).

Figure No. 1

File Edit Tools Window Help

Valeurs initiales

alpha = beta =

teta0 = d =

Type du test

☒ avec temps minimum ☐ sans temps minimum

☒ Niveau de confiance ☐ Borne inférieure de confiance

tetaprime =

Troncature

☐ i0

☐ t0

Executer

FIG. IV.8 – Programme testplan : interface principale.

Figure No. 1

File Edit Tools Window Help

Valeurs initiales

alpha = beta =

teta0 = d =

Type du test

☒ avec temps minimum ☐ sans temps minimum

mois

☒ Niveau de confiance ☐ Borne inférieure de confiance

tetaprime =

Troncature

☐ i0

☐ t0

Executer

FIG. IV.9 – Programme testplan : avec temps minimum.

Figure No. 1

File Edit Tools Window Help

Valeurs initiales

alpha = beta =

teta0 = d =

Type du test

☐ avec temps minimum ☒ sans temps minimum

☐ Niveau de confiance ☒ Borne inférieure de confiance

gamma =

Troncature

☐ i0

☐ t0

Executer

FIG. IV.10 – Programme testplan : borne inférieure de confiance.

Figure No. 1

File Edit Tools Window Help

Valeurs initiales

alpha = beta =

teta0 = d =

Type du test

☐ avec temps minimum ☒ sans temps minimum

☒ Niveau de confiance ☐ Borne inférieure de confiance

tetaprime =

Troncature

☒ i0 =

☒ t0 = mois

Execute

mois
heure
standardisé

FIG. IV.11 – Programme testplan : troncature.

Bibliographie

- Adler R. J., Feldman R. E. et Gallagher C.** (1998a). *Analysing stable time series*. In Adler , Feldman et Taqqu (Eds.), *A Practical Guide to Heavy Tails*, pages 133–158. Birkhäuser Boston.
- Adler R. J., Feldman R. E. et Taqqu M. S. (Eds.)** (1998b). *A practical guide to heavy tails*. Birkhäuser Boston Inc.
- Akgiray V. et Lamoureux C.** (1989). *Estimation of stable-law parameters : a comparative study*. Journal of business & Economic statistics, vol. 7. pages 85–93.
- Aroian L. A.** (1968). *Sequential analysis, direct method*. Technometrics, vol. 10. pages 125–132.
- Bassi F., Embrechts P. et Kafetzaki M.** (1998). *Risk management and quantile estimation*. In Adler , Feldman et Taqqu (Eds.), *A practical guide to heavy tails*, pages 111–130. Birkhäuser Boston.
- Bestravos A., Crovella M. et Taqqu M.** (1998). *Heavy-tailed probability distributions in the world wide web*. In Adler , Feldman et Taqqu (Eds.), *A Practical Guide to Heavy Tails*, pages 3–25. Birkhäuser Boston.
- Brockwell P. J. et Davis R. A.** (1991). *Time series : theory and methods*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, second éd.
- Bryant L. et Schmee J.** (1979). *Confidence limits on MTBF for Sequential Test Plans of MIL-STD 781*. Technometrics, vol. 21. pages 33–42.
- Cambanis S. et Miller G.** (1981). *Linear problems in pth order and stable processes*. SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 41, n°1. pages 43–69.
- Chambers J. M., Mallows C. L. et Stuck B. W.** (1976). *A method for simulating stable random variables*. Journal of the American Statistical Association, vol. 71, n°354. pages 340–344.
- Department of Defense (USA)** (4 1998), *Handbook for reliability test methods, plans, and environments for engineering, development, qualification, and production*. Report technique.

- d'Estampes L., Garel B. et Saint Pierre G.** (2003a). *Test séquentiel : Niveau de confiance après acceptation*. Revue de Statistiques Appliquées, A paraître.
- d'Estampes L., Garel B. et Tjøstheim D.** (2003b). *Revealing some unexpected dependence properties of linear combinations of stable random variables using symmetric covariation*. Communications in Statistics : theory and methods, A paraître.
- Devroye L. et Györfi L.** (1985). *Nonparametric density estimation : The l_1 view*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- Droesbeke J.-J. et Fine J.** (1996). *Inférence non paramétrique : Les statistiques de rangs*. Editions de l'Université de Bruxelles.
- Dufour J.-M. et Roy R.** (1986). *Generalized portmanteau statistics and tests of randomness*. Comm. Statist. A—Theory Methods, vol. 15, n°10. pages 2953–2972.
- Dvoretzky A., Kiefer J. et Wolfowitz J.** (1963). *Sequential decision problem for processus with continuous time parameter. testing hypothesis*. Ann. Math. Stat., vol. 24. pages 254–264.
- Elliott R.** (1938). *The wave principle*. Collins, New York.
- Epstein B. et Sobel M.** (1955). *Sequential life tests in the exponential case*. Ann. Math. Statist., vol. 26. pages 82–93.
- Fama E. F.** (1965). *The behavior of stock market price*. Journal of business, vol. 38. pages 34–195.
- Fama E. F. et Roll R.** (1968). *Some properties of symmetric stable distributions*. Journal of American Statistical Association, vol. 63. pages 817–836.
- Fama E. F. et Roll R.** (1971). *Parameter estimates for symmetric stable distributions*. Journal of American Statistical Association, vol. 66. pages 331–336.
- Feller W.** (1971). *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II*. John Wiley & Sons Inc., 2 éd.
- Gallagher C. M.** (2000). *Estimating the autocovariation from stationary heavy-tailed data, with applications to time series modeling*. Rapport technique, Clemson University.
- Gallagher C. M.** (2001). *A method for fitting stable autoregressive models using the autocovariation function*. Statistics & Probability Letters, vol. 53, n°4. pages 381–390.
- Gallagher C. M.** (2002). *Testing for linear dependence in heavy-tailed data*. Communications in Statistics. Theory and Methods, vol. 31, n°4. pages 611–623.
- Garel B.** (1992). *Différentiabilité en moyenne d'ordre p et espace de sobolev*. Note technique, ENSEEIHT.

- Garel B. et Hallin M.** (1995). *Local asymptotic normality of multivariate ARMA processes with a linear trend*. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, vol. 47, n°3. pages 551–579.
- Garel B. et Hallin M.** (1999). *Rank-based autoregressive order identification*. Journal of the American Statistical Association, vol. 94, n°448. pages 1357–1371.
- Garel B. et Hallin M.** (2000). *Rank-based partial autocorrelations are not asymptotically distribution-free*. Statistics & Probability Letters, vol. 47, n°3. pages 219–227.
- Ghosh B. K.** (1970). *Sequential tests of statistical hypotheses*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont.
- Gibbons J. D.** (1985). *Nonparametric statistical inference*, volume 65 of *Statistics : Textbooks and Monographs*. Marcel Dekker Inc., second éd.
- Gnedenko B. V. et Kolmogorov A. N.** (1968). *Limit distributions for sums of independent random variables*. Translated from the Russian, annotated, and revised by K. L. Chung. With appendices by J. L. Doob and P. L. Hsu. Revised edition. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills., Ont.
- Hallin M., Ingenbleek J.-F. et Puri M. L.** (1985). *Linear serial rank tests for randomness against ARMA alternatives*. The Annals of Statistics, vol. 13, n°3. pages 1156–1181.
- Hallin M. et Puri M. L.** (1994). *Aligned rank tests for linear models with autocorrelated error terms*. Journal of Multivariate Analysis, vol. 50, n°2. pages 175–237.
- Hardin J., C.D.** (1984). *Skewed stable variables and processes*. Rapport technique, Center for Stochastic Processes at the University of North Carolina.
- Hong Y.** (1998). *Testing for pairwise serial independence via the empirical distribution function*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B. Statistical Methodology, vol. 60, n°2. pages 429–453.
- Hong Y. et White H.** (2003). *Asymptotic distribution theory for nonparametric entropy measures of serial dependence*. Preprint.
- Hosking J. R. M.** (1980). *Lagrange multiplier tests of time-series models*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B. Methodological, vol. 42, n°2. pages 170–181.
- Illig A.** (2001). *Probabilités de confiance après décision lors d'un test séquentiel avec un temps de bon fonctionnement de loi exponentielle*. Mémoire de DEA sous la direction du professeur B. Garel, Université Toulouse III.
- Koutrouvelis I. A.** (1980). *Regression-type estimation of the parameters of stable laws*. Journal of the American Statistical Association, vol. 75, n°372. pages 918–928.
- Kuelbs J.** (1973). *A representation theorem for symmetric stable processes and stable measures on H* . Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, vol. 26.

- Lecoutre B.** (1997). *C'est bon à savoir ! et si vous étiez un bayésien qui s'ignore*. Modulab, INRIA, vol. 8, n°18. pages 81–87.
- Mandelbrot B.** (1962). *Sur certains prix spéculatifs : faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs non gaussiens de paul lévy*. Comptes-rendus à l'Académie des Sciences, vol. 254. pages 3968–3970.
- Mandelbrot B.** (1963). *The variation of certain speculative prices*. Journal of business, vol. 36. pages 394–419.
- Miller G.** (1978). *Properties of certain symmetric stable distributions*. Journal of Multivariate Analysis, vol. 8, n°3. pages 346–360.
- Monfort A.** (1996). *Cours de probabilités*. Economica.
- Mood A. et Graybill F.** (1963). *Introduction to the theory of statistics*. Mc Graw-Hill, 2 éd.
- Nikias C. et Shao M.** (1995). *Signal processing with alpha-stable distributions and applications*. Wiley-Interscience.
- Nougier J. P.** (1987). *Méthodes de calcul numérique*. Mathématiques pour la Physique. [Mathematics for Physics]. Masson, 3 éd.
- Nowicka J.** (1997). *Asymptotic behavior of the covariation and the codifference for ARMA models with stable innovations*. Communications in Statistics. Stochastic Models, vol. 13, n°4. pages 673–685.
- Pinkse J.** (1998). *A consistent nonparametric test for serial independence*. Journal of Econometrics, vol. 84, n°2. pages 205–231.
- Pötscher B. M.** (1985). *The behaviour of the Lagrangian multiplier test in testing the orders of an ARMA-model*. Metrika, vol. 32, n°3-4. pages 129–150.
- Samorodnitsky G. et Taqqu M. S.** (1994). *Stable non-Gaussian random processes*. Stochastic Modeling. Chapman & Hall, New York-London.
- Shiryayev A. N.** (1984). *Probability*, volume 95 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag.
- Siegmund D.** (1985). *Sequential analysis : tests and confidence intervals*. Springer-Verlag.
- Tassi P.** (1985). *Méthodes statistiques*. Economica.
- Tjøstheim D.** (1996). *Measures of dependence and tests of independence*. Statistics. A Journal of Theoretical and Applied Statistics, vol. 28, n°3. pages 249–284.
- Wald A.** (1947). *Sequential Analysis*. John Wiley & Sons, New York.
- Walter C.** (1994). *Les structures du hasard en économie : efficience des marchés, lois stables et processus fractals*. Thèse de doctorat, IEP Paris.

- Zolotarev V. M.** (1986). *One-dimensional stable distributions*, volume 65 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence.
- Zolotarev V.** (1966). *On representation of stable laws by integrals*. In *Twenty-Two Papers on Statistics and Probability*, volume 6 of *Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability*, pages 84–88. American Mathematical Society.

Annexe A

Démonstration de la quatrième étape de la simulation d'une loi stable

$$\text{Rappel : } Y = (\cos(\alpha\phi_0))^{1/\alpha} \left\{ \frac{2(a-b)(1+ab) - \Phi\tau B[b(1-a^2) - 2a]}{(1-a^2)(1+b^2)} \cdot (1 + \varepsilon d) + \tau \left(d + \frac{1}{\varepsilon}\right) \right\}.$$

Tout d'abord, quelques rappels sur la fonction tangente.

$$\tan 2x - \tan 2y = \frac{2(\tan x - \tan y)(1 + \tan x \tan y)}{(1 - \tan^2 x)(1 - \tan^2 y)} \quad (1)$$

$$\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos 2x \quad (2) \quad \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad (3)$$

$$\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \sin 2x \quad (4) \quad \frac{2 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 - \cos 2x \quad (5)$$

$$\text{Posons } A = \frac{2(a-b)(1+ab)}{(1-a^2)(1+b^2)}, \quad C = \frac{-\Phi\tau B[b(1-a^2) - 2a]}{(1-a^2)(1+b^2)}, \quad D = 1 + \varepsilon d \quad \text{et} \quad G = \tau \left(d + \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$A = \frac{2 \left(\tan \frac{\Phi}{2} - \tan \frac{\varepsilon\Phi}{2} \right) \left(1 + \tan \frac{\Phi}{2} \tan \frac{\varepsilon\Phi}{2} \right)}{\left(1 - \tan^2 \frac{\Phi}{2} \right) \left(1 + \tan^2 \frac{\varepsilon\Phi}{2} \right)}$$

$$A = \frac{2 \left(\tan \frac{\Phi}{2} - \tan \frac{\varepsilon\Phi}{2} \right) \left(1 + \tan \frac{\Phi}{2} \tan \frac{\varepsilon\Phi}{2} \right)}{\left(1 - \tan^2 \frac{\Phi}{2} \right) \left(1 + \tan^2 \frac{\varepsilon\Phi}{2} \right)} \times \frac{1 - \tan^2 \frac{\varepsilon\Phi}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\varepsilon\Phi}{2}}$$

D'après (1) et (2), on a

$$A = (\tan \Phi - \tan \varepsilon\Phi) \cos \varepsilon\Phi$$

$$A = \tan \Phi \cos \varepsilon\Phi - \sin \varepsilon\Phi$$

$$A = \tan \Phi (\cos \Phi \cos \alpha\Phi + \sin \Phi \sin \alpha\Phi) - \sin \Phi \cos \alpha\Phi + \cos \Phi \sin \alpha\Phi$$

$$A = \sin \Phi \cos \alpha\Phi + \frac{\sin^2 \Phi \sin \alpha\Phi}{\cos \Phi} - \sin \Phi \cos \alpha\Phi + \frac{\cos^2 \Phi \sin \alpha\Phi}{\cos \Phi}$$

$$A = \frac{\sin \alpha\Phi}{\cos \Phi}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{-\Phi(-\varepsilon \tan(\alpha\phi_0)) \frac{\tan \frac{\varepsilon\Phi}{2}}{\frac{\varepsilon\Phi}{2}} \left[\tan \frac{\varepsilon\Phi}{2} \left(1 - \tan^2 \frac{\Phi}{2} \right) - 2 \tan \frac{\Phi}{2} \right]}{\left(1 - \tan^2 \frac{\Phi}{2} \right) \left(1 + \tan^2 \frac{\varepsilon\Phi}{2} \right)} \\
 C &= -\tan(\alpha\phi_0) \frac{2 \tan \frac{\varepsilon\Phi}{2} \left[-\tan \frac{\varepsilon\Phi}{2} \left(1 - \tan^2 \frac{\Phi}{2} \right) + 2 \tan \frac{\Phi}{2} \right]}{\left(1 - \tan^2 \frac{\Phi}{2} \right) \left(1 + \tan^2 \frac{\varepsilon\Phi}{2} \right)} \\
 C &= -\tan(\alpha\phi_0) \frac{\left[-2 \tan^2 \frac{\varepsilon\Phi}{2} \left(1 - \tan^2 \frac{\Phi}{2} \right) + 4 \tan \frac{\Phi}{2} \tan \frac{\varepsilon\Phi}{2} \right]}{\left(1 - \tan^2 \frac{\Phi}{2} \right) \left(1 + \tan^2 \frac{\varepsilon\Phi}{2} \right)}
 \end{aligned}$$

D'après (3), (4) et (5), on a

$$\begin{aligned}
 C &= -\tan(\alpha\phi_0) (-1 + \cos \varepsilon\Phi + \tan \Phi \sin \varepsilon\Phi) \\
 C &= -\tan(\alpha\phi_0) \left(-1 + \frac{\cos \Phi \cos \varepsilon\Phi}{\cos \Phi} + \frac{\sin \varepsilon\Phi \sin \Phi}{\cos \Phi} \right) \\
 C &= -\tan(\alpha\phi_0) \left(\frac{\cos \alpha\Phi}{\cos \Phi} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
 D &= 1 + \varepsilon \left(\frac{z^{\varepsilon/1-\varepsilon} - 1}{\varepsilon} \right) = z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \\
 G &= -\varepsilon \tan(\alpha\phi_0) \left(\left(\frac{z^{\varepsilon/1-\varepsilon} - 1}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \right) = -\tan(\alpha\phi_0) z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}
 \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}
 Y &= (\cos(\alpha\phi_0))^{1/\alpha} \{ (A + C) \cdot D + G \} \\
 Y &= (\cos(\alpha\phi_0))^{1/\alpha} \left[\left(\frac{\sin \alpha\Phi}{\cos \Phi} - \tan(\alpha\phi_0) \left(\frac{\cos \alpha\Phi}{\cos \Phi} - 1 \right) \right) \cdot z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \tan(\alpha\phi_0) z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right] \\
 Y &= (\cos(\alpha\phi_0))^{1/\alpha} z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(\frac{\sin \alpha\Phi}{\cos \Phi} - \tan(\alpha\phi_0) \frac{\cos \alpha\Phi}{\cos \Phi} \right) \\
 Y &= (\cos(\alpha\phi_0))^{1/\alpha} z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{1}{\cos \Phi \cos \alpha\phi_0} (\sin \alpha\Phi \cos \alpha\phi_0 - \sin \alpha\phi_0 \cos \alpha\Phi) \\
 Y &= (\cos(\alpha\phi_0))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(\frac{\cos(\varepsilon\Phi) \cos(\alpha\phi_0) - \sin(\alpha\phi_0) \sin(\varepsilon\Phi)}{W \cos \Phi \cos(\alpha\phi_0)} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{1}{\cos \Phi} (\sin \alpha(\Phi - \phi_0)) \\
 Y &= \frac{\sin \alpha(\Phi - \phi_0)}{\cos \Phi^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \left(\frac{\cos(\varepsilon\Phi + \alpha\phi_0)}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \\
 Y &= \frac{\sin \alpha(\Phi - \phi_0)}{\cos \Phi^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \left(\frac{\cos(\Phi - \alpha(\Phi - \phi_0))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}
 \end{aligned}$$

Résumé

Dans ce travail, nous étudions de manière approfondie les lois α -stables (lois à variance infinie). Dans le premier chapitre, nous rappelons les différentes propriétés des lois α -stables univariées (stabilité, calcul des moments, simulation). Nous introduisons ensuite les lois symétriques α -stables ($S\alpha S$) multivariées. Après avoir parlé de la mesure spectrale et de son intérêt pour caractériser l'indépendance, nous nous concentrons sur les mesures de dépendance. Constatant que le coefficient de covariation, largement utilisé actuellement, admet certaines limites, nous construisons dans le deuxième chapitre une nouvelle mesure de dépendance, appelée coefficient de covariation symétrique. Ce dernier nous permet, entre autres, de découvrir quelques spécificités des vecteurs $S\alpha S$. En effet, contrairement aux vecteurs gaussiens, on peut obtenir pour certains vecteurs $S\alpha S$ à la fois une dépendance positive et une dépendance négative. Après avoir conclu le chapitre par l'étude de la loi asymptotique de l'estimateur du coefficient de covariation, nous abordons, dans le troisième chapitre, les processus autorégressifs à innovations stables. Nous présentons les différentes méthodes d'identification de l'ordre d'un processus AR : autocorrélation partielle (Brockwell et Davis) et statistiques quadratiques asymptotiquement invariantes basées sur les rangs (Garel et Hallin). De nombreuses simulations, effectuées en Matlab et Fortran, nous permettent de comparer ces méthodes et de constater l'importance du rôle joué par les statistiques de rang dans ce domaine. Pour finir, un problème de test séquentiel, développé dans le cadre d'un contrat industriel, nous permet d'introduire la notion de niveau de confiance après décision.

Mots-clés : distribution alpha-stable, variance infinie, mesure de dépendance, covariation, processus autorégressif, rang.

Abstract

In this work, we thoroughly study the α -stable distributions (laws with infinite variance). In the first chapter, we recall the various properties of the univariate α -stable distribution (stability, calculus of moments, simulation). Then we introduce the symmetric α -stable ($S\alpha S$) multivariate distributions. After having stressed the importance of spectral measure with respect to the notion of independence for the $S\alpha S$ vectors, we concentrate on the measures of dependence. In the second chapter, noting that the coefficient of covariation, widely used by statisticians, admits some limit, we build a new measure of dependence, called symmetric coefficient of covariation. This last one allows us discovering some unexpected things. Indeed, contrary to the Gaussian vectors, for certain $S\alpha S$ vectors one can obtain both a positive dependence and a negative dependence. After having concluded the chapter by the study of the asymptotic law of the estimator of the coefficient of covariation, in the third chapter, we address the autoregressive processes with stable innovations. We present various methods of identification of the order of a AR process: partial autocorrelations (Brockwell and Davis) and asymptotically invariant rank-based quadratic statistics (Garel and Hallin). Many simulations, carried out in Matlab and Fortran, enable us to compare these methods and to note the importance of the role played by the rank-statistics in this field. To finish, a sequential test problem, developed at the occasion of an industrial contract, gives us the opportunity to introduce the concept of confidence level after decision.

Key words: alpha-stable distribution, infinite variance, measure of dependence, covariation, autoregressive process, rank.