



HAL
open science

Produits dérivés météorologiques et environnement.

Pauline Barrieu

► **To cite this version:**

Pauline Barrieu. Produits dérivés météorologiques et environnement.. Economies et finances. HEC PARIS, 2002. Français. NNT : 2002EHEC0084 . pastel-00918753

HAL Id: pastel-00918753

<https://pastel.hal.science/pastel-00918753>

Submitted on 14 Dec 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

THESE

POUR L'OBTENTION DU TITRE
DE DOCTEUR ES SCIENCES DE GESTION

Nouveau doctorat (arrêté du 30 mars 1992)

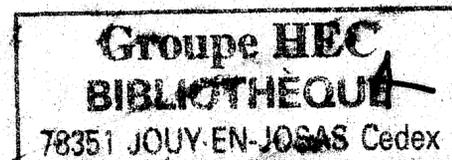
SUJET

PRODUITS DERIVES METEOROLOGIQUES ET ENVIRONNEMENT

Candidate

PAULINE BARRIEU

JURY



Président

BERNARD SINCLAIR-DESGAGNE

Professeur, Institut d'Economie Appliquée, HEC Montréal

Suffragants

MARC CHESNEY

Professeur, Ecole des Hautes Etudes Commerciales, *co-directeur de thèse*

NICOLE EL KAROUI

Professeur, Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, *co-directeur de thèse*

PHILIPPE HENROTTE

Professeur-assistant, Ecole des Hautes Etudes Commerciales

MONIQUE JEANBLANC - PICQUE

Professeur, Université d'Evry - Val d'Essonne, *rapporteur*

HENRI LOUBERGE

Professeur, Faculté des Sciences Economiques et Sociales, Université de Genève, *rapporteur*

2002

Le Groupe HEC n'entend donner ni approbation ni improbation aux opinions émises dans la thèse, celles-ci devant être considérées comme propres à leur auteur.

Groupe HEC
BIBLIOTHÈQUE
78351 JOUY-EN-JOSAS Cedex

173786
7-6 CAR

Durant ces quatre années de thèse, j'ai eu le privilège rare de pouvoir travailler avec des personnes de passion.

Tout a commencé à l'E.S.S.E.C. lorsque j'ai découvert la finance, grâce à de nombreux professeurs passionnés et passionnants. Vient ensuite la rencontre avec les processus stochastiques, qui n'aurait pu être si réussie sans monsieur Priouret. Il a su me faire découvrir tout un domaine scientifique, toute une façon de raisonner, alors que ma formation initiale me rendait leur accès difficile. Pour cela, je lui en suis infiniment reconnaissante.

L'envie de poursuivre, de connaître, de découvrir a été alors de plus en plus forte. Nicole El Karoui et Marc Chesney ont su m'écouter. Ils m'ont fait confiance, m'ont encouragée et stimulée pour poursuivre la double formation que j'avais commencée et entreprendre la lourde tâche de mener deux thèses de front...

Durant ces années, Nicole El Karoui m'a appris ce qu'est la recherche, qu'il faut parfois passer outre pour avancer, puis revenir vers la rigueur une fois le débroussaillage terminé. Elle m'a appris à ne pas me réfugier dans les calculs, à mûrir une problématique.

Mais l'apprentissage ne s'arrête pas là : au delà de cet aspect, elle m'a permis de passer du statut d'étudiant à celui de jeune chercheur. Pour tout cela, je la remercie profondément.

Grâce à Marc Chesney, j'ai pu m'ouvrir sur de nouvelles problématiques, sur de nouveaux horizons. Il a su me donner le goût de la recherche aux limites de la finance et m'a permis de faire des rencontres essentielles. Je tiens à le remercier mille fois pour m'avoir toujours écoutée, conseillée, aidée, soutenue. Sa grande disponibilité et sa présence constante durant ces années de thèse m'ont été très précieuses. Sa confiance m'a permis d'oser avancer....

Merci !

Je remercie infiniment Monique Jeanblanc, qui m'a toujours fait confiance et m'a donné ma première expérience d'enseignement à l'Université d'Evry. Ses questions, ses remarques, ses conseils, parfois ses encouragements, m'ont toujours été d'une très grande aide et m'ont permis d'avancer....

Henri Loubergé m'a toujours été d'une aide précieuse tout au long de ce travail, en me conseillant, en orientant une partie de mes recherches et en appuyant certains de mes choix. Je suis extrêmement touchée et honorée par le fait qu'ils acceptent tous deux d'être rapporteurs de cette thèse.

Je tiens également à remercier Bernard Sinclair-Desgagné pour ses conseils avisés, ses commentaires judicieux. Sa présence dans mon jury de thèse m'est très précieuse.

Philippe Henrotte a toujours été là pour me soutenir, m'encourager (et me faire rire... !) et je suis très touchée qu'il ait accepté d'être membre du jury.

Je remercie également Vincent Lacoste, qui m'a toujours fait confiance et m'a donné l'opportunité d'enseigner mon premier cours en amphi à l'E.S.S.E.C.. Sa gentillesse et son expérience m'ont toujours été d'une très grande aide et m'ont permis d'avancer....

Mes visites à H.E.C. ont toujours été marquées par un accueil chaleureux : Je remercie Mickaël Rockinger et François Degeorge pour leur si grande disponibilité et leurs remarques pertinentes. Je tiens aussi à remercier Alessandro Citanna pour ses conseils et son aide discrète mais sûre. Et je suis infiniment reconnaissante et remercie Bertrand Quelin pour son appui et sa confiance.

Merci aussi à Elisabeth, Marie-Anne et Danièle pour leur aide et leurs encouragements.

Enfin, un grand merci à Brigitte, au piano et au chant. La musique m'a ouvert les portes d'un monde nouveau, elle a équilibré mes journées, ma vie....

Mais la thèse est aussi, et peut-être avant tout, une expérience de vie. Je suis donc infiniment reconnaissante à mes parents et à Laurent. Ils m'ont suivie dans cette expérience, souvent heureuse, parfois douloureuse, et m'ont soutenue sans relâche pendant ces quatre années. Sans eux, sans leur présence, rien n'aurait été possible, ni même envisageable.

A mes parents,

A Laurent

Table des matières

1	Présentation des produits dérivés climatiques	7
1.1	Le risque météorologique et les produits dérivés météo	7
1.1.1	Développement des produits dérivés d'assurance	7
1.1.2	Le risque météorologique	11
1.1.3	Le rôle des produits dérivés météo	13
1.1.4	Typologie des produits dérivés météo	13
1.1.5	Liens entre le marché des "weather derivatives" et d'autres marchés	21
1.2	Les marchés de "weather derivatives"	22
1.2.1	Le marché O.T.C. (Over The Counter) des "weather derivatives" .	22
1.2.2	Le marché des "weather derivatives" du Chicago Merchantile Exchange (C.M.E.)	23
1.2.3	La situation en Europe	26
1.2.4	Les plate-formes "on line"	28
1.2.5	Les intervenants	31
1.3	Problèmes d'évaluation et de gestion des produits dérivés de température .	33
1.3.1	Problématique	33
1.3.2	Méthode de E. Briys pour l'évaluation des "Nature linked-bonds" [80]	34
1.3.3	Evaluation d'une obligation météo: méthode de K. Sankaran [86] .	37
1.3.4	Gestion du risque, réglementation	39
1.4	Annexes du chapitre 1	43
1.4.1	Présentation rapide du marché Californien de l'électricité	43
1.4.2	Présentation du marché du SO_2 aux Etats-Unis	46
2	Structure optimale d'un "weather bond"	54
2.1	Introduction	54
2.2	Présentation générale, hypothèses et notations	56
2.2.1	Description de la transaction	56
2.2.2	Hypothèses et notations	57
2.3	Modélisation du critère de choix pour les caractéristiques de la transaction globale	59
2.3.1	Aversion pour le risque et critère d'utilité	60
2.3.2	Caractérisation du contrat d'assurance optimal	61
2.3.3	Structuration optimale du "weather bond"	62

2.4	Résolution des programmes d'optimisation	64
2.4.1	Résolution du problème de la relation entre la firme et la banque . .	64
2.4.2	Résolution du problème de la relation entre la banque et l'investisseur	68
2.4.3	Quelques commentaires supplémentaires	73
2.5	Conclusions	78
2.6	Annexes du chapitre 2	79
2.6.1	Optimalité en J	79
2.6.2	Optimalité en π	80
2.6.3	Cas particulier des utilités exponentielles	81
2.6.4	Vérification de l'optimalité de la solution	81
3	Etudes économétriques de données de température	83
3.1	Problématique	83
3.2	Etude de la densité des températures	85
3.2.1	Représentation brute des données	85
3.2.2	Présentation de l'article [30]	86
3.2.3	Résultats pour les données de température	87
3.3	Etude des extrêmes de température	87
3.3.1	Quelques rappels sur les distributions d'extrêmes	88
3.3.2	Etude de E.J. Gumbel ([45])	88
3.3.3	Correction de N.A. Barricelli ([5])	91
3.3.4	Etude de A.F. Jenkinson ([53]) sur les extrêmes en météorologie . .	92
3.3.5	Etude graphique des extrêmes de température du Parc Montsouris .	95
3.4	Etude économétrique des données du Parc Montsouris (Paris)	97
3.4.1	La tendance	98
3.4.2	La saisonnalité	100
3.4.3	Modélisation de la partie déterministe de la température	102
3.4.4	Partie résiduelle	103
3.4.5	Synthèse des résultats obtenus	112
4	Evaluation d'une option climatique par simulation	114
4.1	Calibration de différents modèles de température	114
4.1.1	Modèle de R. Dischel ([26])	114
4.1.2	Modèle de M. Cao et J. Wei ([16])	119
4.1.3	Modèle de O. Roustant ([85])	122
4.1.4	Modèle de P. Tankov ([92])	131
4.2	Comparaison de ces modèles de température pour l'évaluation d'une option climatique	136
4.2.1	Présentation du produit	136
4.2.2	Méthodes d'évaluation de l'option	137
4.2.3	Simulations de température et sensibilité des résultats	138
4.2.4	Quelques remarques sur les modèles étudiés	167

5	Prise de conscience de problèmes environnementaux	170
5.1	Les dérives du climat	170
5.1.1	L'effet de serre	171
5.1.2	Le phénomène El Nino	171
5.1.3	Un premier constat	172
5.1.4	Conclusions du dernier rapport de l'I.P.C.C.	172
5.1.5	Conséquences possibles d'un changement climatique	173
5.2	Prise de conscience et réponses possibles	175
5.2.1	Premières découvertes et premières inquiétudes	175
5.2.2	Convention de Rio: Reconnaissance du problème	175
5.2.3	Protocole de Kyoto: Création d'une "loi"	176
5.2.4	Conférence de La Haye: Un échec total	177
5.2.5	Conférence de Bonn: Création du "décret d'application"	177
5.3	Marché des crédits d'émission: débats actuels	178
6	Environnement: Prise de décision optimale dans un contexte stratégique	181
6.1	Introduction	181
6.2	Présentation générale du modèle, notations et hypothèses	183
6.2.1	Les acteurs: deux groupes de pays et le "monde"	183
6.2.2	Caractérisation du premier type d'acteurs: les deux groupes de pays	184
6.2.3	Caractérisation du deuxième type d'acteurs: le "monde"	185
6.3	Moment optimal pour l'adoption d'une politique environnementale	186
6.3.1	Cas d'un acteur unique, le "monde"	186
6.3.2	Cas d'un groupe de pays stratégique	189
6.4	Conclusion	199
6.5	Annexes du chapitre 6	201
6.5.1	Calcul de la transformée de Laplace de T_m	201
6.5.2	Preuve de la proposition 6.1	201
6.5.3	Calcul des différents termes de E	202
6.5.4	Preuve de la proposition 6.3	206
6.5.5	Preuve de la proposition 6.4	206
6.5.6	Preuve de la remarque 7	207
6.5.7	Quelques rappels sur les options américaines perpétuelles	208

Dérives du climat et dérivés climatiques

Les questions relatives à l'écologie, à l'environnement, au climat sont aujourd'hui au centre des préoccupations de bon nombre d'acteurs de l'économie : qu'il s'agisse des citoyens, des partis politiques, des entreprises ou même des Etats.

Le climat joue un rôle primordial à tous les niveaux de l'économie : ainsi, les conditions climatiques et météorologiques peuvent, par exemple, avoir un impact sur les activités d'une entreprise (impact sur les ventes, sur les coûts...) alors que la modification profonde du climat (réchauffement global) devient une source de préoccupation croissante pour tous et est l'objet de traités internationaux, conditionnant la vie économique future.

A l'aube du 21^{ème} siècle, gérer les risques naturels (catastrophes, cataclysmes ou tout simplement températures, précipitations...) devient un des objectifs premiers pour beaucoup d'entreprises, notamment dans le secteur de l'énergie ; tout comme tenter d'influer, positivement, sur le climat, devient un des objectifs principaux des Etats. Pour les premiers, les conditions météorologiques sont vues comme indépendantes de l'activité humaine et sont considérées comme données. Une certaine hypothèse implicite de stationnarité du climat est faite. Mais, pour les seconds, l'homme a influencé et influence le climat, celui-ci évoluant au fil du temps.

Dans ce travail de thèse, nous adopterons successivement les deux points de vue : tout d'abord, celui des entreprises avec le développement des produits dérivés climatiques comme outil de gestion du risque météorologique ; puis celui des Etats, avec la problématique de l'adoption d'une politique environnementale. De ce fait, cette thèse comporte deux grandes orientations : les produits dérivés climatiques d'une part, et la question de l'adoption optimale d'une politique environnementale d'autre part. Une des caractéristiques communes de ces deux grands thèmes d'étude est l'utilisation d'outils, de logiques et de principes financiers pour l'analyse et la compréhension de questions plus ou moins éloignées de la finance, puisque relatives à l'environnement et à la gestion de risques météorologiques.

Dans un premier temps, qui regroupe les quatre premiers chapitres de cette thèse, nous nous intéressons à une nouvelle classe de contrats financiers dont les flux dépendent de l'occurrence de certains événements météorologiques : les produits dérivés climatiques. Dans un premier chapitre, nous présenterons ces nouveaux instruments financiers. Depuis 1997, aux Etats-Unis, ils permettent aux entreprises de gérer leur risque météorologique de façon proactive : différents outils sont disponibles aujourd'hui (différents sous-jacents, différents types de structures ...). Nous préciserons ces caractéristiques lors d'une typologie des "weather derivatives" et d'une présentation de leurs utilisations, des marchés sur lesquels ils sont échangés et des intervenants, ainsi que des problèmes spécifiques soulevés par ces contrats. Par la suite, nous nous concentrons sur les produits liés à la température, qui sont les plus utilisés à l'heure actuelle.

Dans le second chapitre, après avoir évoqué les difficultés de modélisation pour le prix des dérivés climatiques et présenté quelques remarques provenant de praticiens, nous présenterons une méthode d'évaluation pour un type particulier de "weather derivatives" : une obligation dont les coupons et le nominal dépendent de l'occurrence d'un événement de température. L'évaluation du produit est faite en tenant compte, d'une part, de l'"acomplétude" du marché (i.e. le marché est illiquide et seul le produit dérivé y est échangé) et d'autre part, de la logique particulière liée à ces nouveaux instruments financiers, à mi-chemin entre finance et assurance. Les méthodes classiques, utilisant la réplication ou l'arbitrage, ne peuvent plus fonctionner ici. Même l'utilisation conjointe, par l'acheteur et le vendeur, d'un critère dépendant de leur aversion au risque respective, ne conduit pas à des résultats parfaitement satisfaisants : plusieurs pistes de recherche, certaines se révélant plus positives que d'autres, mais ayant sans aucun doute permis de mieux cerner la problématique, seront présentées ici. Nous insisterons alors sur la prise en considération de toute la structure de la transaction, afin d'affiner les critères utilisés, mais aussi de mieux comprendre les logiques des différents intervenants.

Les chapitres 3 et 4 sont consacrés à l'étude de données de température : le chapitre 3 présente quelques résultats économétriques originaux relatifs à l'étude de relevés de température du Parc Monsouris à Paris (historique de 30 ans de données quotidiennes) : une première méthode graphique permettra de fournir des précisions quant à la loi des extrêmes de température, une deuxième méthode permettra, quant à elle, de mieux appréhender la densité des données. Enfin, dans la troisième section, la série des données de température est décomposée en une tendance, une saison et une partie résiduelle, qui est modélisée par un processus auto-régressif de volatilité elle-même saisonnière. Ces résultats sont illustrés par de nombreux graphiques au fil du chapitre.

Le chapitre 4 s'intéresse à l'évaluation d'un produit dérivé climatique théorique, à l'aide des données de cet historique. Plusieurs modélisations du processus de température sont utilisées en parallèle : la représentation décrite dans le chapitre précédent, ainsi que quatre modélisations de la littérature (modèles de R. Dischel, de O. Roustant, de M. Cao et J. Wei et enfin de P. Tankov). Deux méthodes d'évaluation sont étudiées : une évaluation historique et une évaluation non-linéaire, comme prix de réserve pour une fonction d'utilité exponentielle. Ces différentes modélisations de température sont comparées, notamment en termes de robustesse des résultats par rapport à certaines variations des paramètres.

Dans un second temps, qui regroupe les deux derniers chapitres, nous nous intéressons à des questions de politiques environnementales. Nous soulignons, tout d'abord, quelques grandes constatations dramatiques sur les dérives du climat. Les différents objectifs de la Convention de Rio sur le réchauffement global et du Protocole de Kyoto sur l'émission des gaz à effet de serre sont alors rappelés. Nous insisterons notamment sur l'Article 17 du Protocole, évoquant, sans donner plus de précision, la possibilité de créer un marché des "crédits d'émission" de ces différents gaz, et sur les débats actuels, concernant la structure et le fonctionnement de ce marché potentiel.

Puis, dans le dernier chapitre, nous nous intéressons à la question de l'adoption d'une po-

litique environnementale par un groupe de pays, agissant stratégiquement ou non. Nous étudierons tout particulièrement la période optimale pour la prise de décision. Pour ce faire, nous utiliserons des méthodes classiques d'options réelles, avec les techniques de contrôle optimal, et de théorie des jeux afin de tenir compte des aspects stratégiques. Ces derniers ont été, jusqu'à présent, négligés dans les problématiques d'investissement, introduisant des options réelles. Enfin, nous étudions, de façon plus approfondie, la question du choix du taux d'actualisation dans l'analyse du problème précédent. La question du taux d'actualisation n'est que rarement évoquée en finance, il s'agit plus d'une préoccupation économique. Ainsi, suivant les travaux déjà réalisés à ce sujet (par C. Gollier notamment), nous nous intéressons aux taux de croissance espérés et à la variabilité des prévisions relatives à ces taux, pour différents groupes de pays, selon leur niveau de développement actuel. Ceci nous permet, en première approximation, d'établir une classification des taux d'actualisation des différents pays en fonction de la croissance future anticipée et du risque associé à sa prévision, puis de donner des conclusions plus précises aux travaux déjà réalisés.

Du chapitre 1 de cette thèse sont issus plusieurs articles co-écrits avec Robert Dischel. Leur objectif principal et commun est la vulgarisation des produits dérivés climatiques et la compréhension de leurs mécanismes et enjeux par des non-spécialistes des questions financières. Il s'agit entre autres du chapitre "Gestion du risque climatique à l'aide de contrats financiers: L'expérience Américaine" dans l'ouvrage collectif "La réassurance: Approche technique" de la collection 3A, Economica (à paraître en 2002), de l'article "Weather hedging at the Hot Air Gas Company" dans la revue électronique *Erivatives-review.com* en juillet 2001 ou encore du chapitre "Fundamentals of weather Financial contracts, what protection they provide, and strategies for their use" dans l'ouvrage collectif "The Perpetually Evolving Climate: variability, adverse weather and climate risk management" de la collection Risk Book (à paraître en 2002).

L'étude présentée et co-écrite avec Nicole El Karoui dans le chapitre 2 de cette thèse a été acceptée pour publication au journal *Geneva Papers - Risk and Insurance Theory*, sous le titre "Reinsuring climatic risk using optimally designed weather bonds".

Les chapitres 3 et 4 font l'objet d'une publication dans le *Journal de la Société Française de Statistique*, intitulée "Introduction aux produits dérivés climatiques" (à paraître à l'automne 2002).

Enfin, concernant le chapitre 6, un article co-écrit avec Marc Chesney a été réalisé et soumis pour publication au *Journal of Environmental Economics and Management*, sous le titre "Optimal timing for an environmental policy in a strategic framework".

Chapitre 1

Présentation des produits dérivés climatiques

1.1 Le risque météorologique et les produits dérivés météo

1.1.1 Développement des produits dérivés d'assurance

Faire des distinctions fondamentales entre finance et assurance est une tâche de plus en plus délicate. En effet, ces deux univers convergent peu à peu vers un objectif commun de gestion des risques. Comme nous le soulignons dans ce chapitre, le phénomène récent de titrisation et de transfert alternatif des risques en est un des signes les plus visibles. Nous détaillons également les mécanismes d'un instrument à mi-chemin entre finance et assurance: les obligations catastrophe et évoquons les raisons possibles de leur succès. Enfin, nous nous concentrons sur l'objet de la première partie de cette thèse: les produits dérivés climatiques, qui apparaissent comme une extension logique et naturelle de ces avancées.

Le phénomène de titrisation

La titrisation est un processus impliquant la création de titres et d'instruments échangeables sur les marchés de capitaux. Ce phénomène a tout d'abord concerné la création de titres fondés sur des actifs financiers, comme les crédits immobiliers (les premiers "Mortgage-Backed Securities" ont été créés dès 1977 aux Etats-Unis par Bank of America). Mais, désormais, des actifs non-financiers sont également concernés, comme des avions, des immeubles.... ou même de façon plus récente non plus des actifs mais des sources de risque non-financières, comme le risque climatique ou certains risques d'assurance....

Trois contreparties sont nécessaires dans ce processus: le détenteur initial de l'actif ou du risque, l'acheteur final du titre et un intermédiaire, appelé souvent "Trust". Nous détaillerons cette structure dans le cas très particulier des obligations catastrophe.

Lorsqu'il s'agit de la création de titres à partir d'une source de risque d'assurance, on parle généralement de transfert alternatif des risques ou "Alternative Risk Transfer" (A.R.T.)¹. Le processus de titrisation implique dans ce cas précis deux éléments : la transformation des flux des contrats en titres financiers et le transfert des risques associés sur les marchés de capitaux grâce à l'échange de ces titres.

Développement d'un nouveau marché entre assurance et finance

Lorsque la possibilité de faire appel aux marchés de capitaux a été proposée aux compagnies d'assurance et de réassurance, celles-ci ont tout d'abord vu une menace pour leur secteur d'activité. Toutefois, cela apparaît désormais, de façon quasiment consensuelle, comme une évolution logique de l'assurance traditionnelle et comme un outil de gestion supplémentaire : dans cette évolution de l'intérêt des assureurs² pour l'A.R.T., plusieurs facteurs interviennent. Tout d'abord, les catastrophes naturelles du début des années 1990 ont induits des pertes sévères à l'industrie de l'assurance, mais on peut également citer le développement phénoménal des marchés des capitaux à la même période et la structure de plus en plus étroite du secteur de l'assurance, qui a connu de grandes fusions ... Nous reviendrons sur certains de ces faits dans le cas plus précis des "cat-bonds".

Comme les produits dérivés de crédit ont offert aux banques une alternative aux fonds propres (pour avoir un "bon" ratio Cooke), les produits dérivés d'assurance peuvent permettre aux compagnies d'assurance de se financer à moindre coût. Ainsi, aujourd'hui, bon nombre de réassureurs les perçoivent comme une alternative peu coûteuse à la rétrocession (i.e. réassurance des réassureurs) ou à la constitution importante de fonds propres, légalement requise. Cela concerne bien-sûr les produits dérivés d'assurance les plus développés à l'heure actuelle : les produits dérivés catastrophe³. La première obligation catastrophe, ou "cat-bond" a été émise en 1994, pour un montant nominal de 5 millions de dollars. Aujourd'hui, on compte une trentaine d'émissions, dont la moitié est encore en vie. Le montant nominal global est estimé à plus de 6 milliards de dollars. Environ 75% des transactions concernent les Etats-Unis, 45% couvrent des risques liés aux tremblements de terre et 55% des risques liés au vent. Mais, chose très importante, aucune obligation catastrophe n'a encore jamais été exercée. Le comportement du marché de ces produits, lorsqu'une catastrophe naturelle survient, n'est pas réellement connu... D'autres produits portant sur des événements sportifs⁴ se sont également développés et

¹En réalité, l'A.R.T. désigne tout financement de risque par des procédés autres que le marché traditionnel de l'assurance. La titrisation est donc seulement une des principales méthodes mais pas la seule (cf. le rapport de la Commission Européenne [1]).

²Nous nous concentrons surtout sur le marché américain de l'assurance, qui a vu naître en premier la titrisation de risque d'assurance.

³Rappelons qu'une catastrophe naturelle est habituellement définie aux Etats-Unis comme un événement naturel conduisant à plus de 5 milliards de dollars de pertes et affectant un nombre significatif d'assureurs et d'assurés.

⁴Un contrat a été signé entre Albingia et la FIFA pour 3 milliards de dollars en juillet 1998 couvrant des pertes éventuelles lors des coupes du monde de football de 2002 et de 2006.

cela concernera peut-être, demain, des produits de titrisation des risques habitation ou automobile.

Toutefois, comme le remarque Alexandre Scherer⁵, si cette méthode est adoptée par les assureurs eux-mêmes, cela marquera la fin de la plupart des compagnies de réassurance ou tout du moins une profonde mutation du monde de l'assurance. Seuls les risques responsabilité civile paraissent pouvoir échapper à cette logique, leurs caractéristiques trop complexes n'étant pas attractives pour de futurs investisseurs. Pourtant, de plus en plus, on remarque que l'attitude des réassureurs vis à vis de la titrisation est moins frileuse et le recours aux marchés financiers pourrait devenir une stratégie "classique" de couverture.

Succès des produits dérivés d'assurance

Le succès de ces *produits dérivés d'assurance* est lié à plusieurs facteurs :

- Tout d'abord, les marchés financiers présentent une *formidable source potentielle de financement* pour le monde de l'assurance : leur capacité est évaluée à 13 trillions de dollars contre seulement 310 milliards de dollars pour les marchés de l'assurance. Les marchés financiers semblent dès lors susceptibles d'absorber, sans difficulté, une catastrophe naturelle. Pour mémoire, le cyclone Andrew, une des catastrophes naturelles les plus importantes aux Etats-Unis, a causé plus de 70 milliards de dollars de pertes en Floride lors de son passage en 1992.

- D'autre part, les investisseurs "traditionnels" des marchés financiers voient, dans ces nouveaux produits, un *outil de diversification* pour leur portefeuille ainsi qu'une *source de rendement* important, aux vues de leur performance attendue très intéressante. Ainsi les obligations catastrophe ont un fort taux de rendement ainsi qu'une très bonne notation. Toute émission d'obligation doit être notée par un organisme indépendant (comme Moody's ou Standard & Poor's). Cette note correspond à une certaine mesure du risque de crédit (en particulier de la probabilité de défaut) de l'émetteur du produit. Les meilleures notations correspondent à AAA (sans risque), c'est le cas des obligations émises par l'Etat Américain ou par l'Etat Français. Les émissions les plus risquées sont notées B ou C : il s'agit des "junk bonds". Or ces obligations catastrophe ne sont pas notées plus risquées que les "junk bonds", comme le tableau ci-dessous le souligne :

Merril Lynch AAA	Corporate bond index	6,74%
USAA Class A-1	Hurricane bond (Aaa)	8,41%
Swiss Re Class A-2	Earthquake bond (Baa3)	8,65%
Swiss Re Class B	Earthquake bond (Ba1)	10,49%
USAA Class A-2	Hurricane bond (Ba2)	11,44%
Merril Lynch BB	Corpoprte bond index	7,95%

⁵Alexandre Scherer a été responsable du département "Alternative Reinsurance" de Sorema, filiale de réassurance de Groupama.

Guy Carpenter⁶ a mené une étude fictive comparant les performances des actions, "cat-bonds" et "T-bonds" ("Treasury bonds" : obligations émises par l'Etat Américain) de 1970 à 1994. Les "cat-bonds" ont, non seulement un rendement important, mais aussi une volatilité de rendement moindre que les actions et les obligations d'Etat (même en prenant en compte des catastrophes majeures comme le cyclone Andrew). Leur rendement dépend beaucoup de la région des Etats-Unis considérée. Toutefois, l'occurrence d'une catastrophe majeure comme Andrew a un impact moindre sur leur rendement que celui d'un crash boursier sur le rendement des actions. D'autre part, leur performance n'est pas liée à celle des autres actifs considérés ; elles constituent donc un outil de diversification réel.

- Enfin, du fait même de la structure juridique de ces produits, le *risque de crédit est quasiment inexistant*. Ceci rend le procédé de titrisation attractif non seulement pour les réassureurs, qui peuvent réellement "compter sur" leur couverture, mais aussi pour les investisseurs. En effet, la protection de réassurance est collatéralisée et investie dans une structure - Trust - à la naissance de la transaction. Les fonds permettant de couvrir le risque en cas d'événement sont donc disponibles dès l'émission.

Pour l'instant, la titrisation semble être une méthode supplémentaire permettant aux réassureurs d'avoir une plus grande couverture de leur risque, c'est un complément aux fonds propres et à la rétrocession. Ainsi, lors de l'émission d'un "cat-bond", par exemple, il y a bien souvent une structure de couverture par tranches sous-jacente. Le réassureur supporte une partie des pertes grâce aux fonds propres, utilise la rétrocession sur une autre partie des pertes et la couverture liée au "cat-bond" pour une troisième partie. C'est une combinaison des trois méthodes qui permet d'avoir la couverture la plus optimale pour beaucoup d'intervenants. Le choix des "tranches" est primordial : leur niveau est déterminé par l'aversion au risque des actionnaires de la compagnie de réassurance ainsi que par le niveau des fonds propres de celle-ci. De façon consensuelle, on estime que 55% des assureurs auront recours à ces produits dérivés dans les cinq prochaines années (jusqu'à 88% pour les plus grosses compagnies). A l'heure actuelle, 13% des assureurs y ont déjà eu recours.

Problème de classification

Le problème concernant cette nouvelle catégorie de produits est lié à leur classement. Peut-on encore les considérer comme des produits d'assurance ou est-ce réellement des produits financiers ?

Comme le souligne H. Loubergé ([63]), *"les marchés des assurances et le marché financier partagent une fonction d'allocation des risques relatifs à la richesse future des agents économiques"*. Toutefois, si tous deux concernent la gestion des risques, les marchés financiers et les marchés de l'assurance diffèrent dans leur approche même de ces risques.

⁶Guy Carpenter a beaucoup travaillé sur les produits catastrophe et a même créé un indice de pertes qui porte son nom. Cet indice sert de référence aux produits échangés sur le Bermuda Commodities Exchange. Il dirige désormais une société de courtage en réassurance qui porte son nom.

En effet, sur les marchés financiers, celui qui cède le risque, i.e. le vendeur de risque n'a pas à subir de pertes pour que l'acheteur de risque le paie : par exemple, dans le cas d'une obligation catastrophe, l'acheteur de l'obligation achète également le risque catastrophique sous-jacent. Pour cela, il paie un certain montant initial, le prix de l'obligation. L'émetteur, quant à lui, cède le risque. Il touche ce montant initial contre le versement certain et périodique de coupons. Le nominal est, quant à lui, sujet au risque, et l'émetteur le remboursera uniquement si le risque ne survient pas.

La situation est inverse sur les marchés de l'assurance : celui qui cède le risque paye une prime d'assurance à celui qui l'accepte. L'assureur lui versera une compensation si le risque survient. Les problèmes sont inversés, la vision du risque également.

Mais, ces distinctions sont de moins en moins vraies et la frontière entre le monde de l'assurance et celui de la finance est de moins en moins claire avec notamment l'apparition de nouveaux instruments hybrides.

Ainsi, certains produits dérivés d'assurance respectent plus particulièrement la logique de l'assurance et seront considérés comme contrats d'assurance. Ils seront alors régis par les lois de l'assurance. D'autres produits auront plus une logique financière et seront dès lors régis par les lois de la banque. D'ailleurs, beaucoup d'intervenants sur le marché des produits dérivés d'assurance tirent partie de ce manque de clarté et structurent les produits en fonction des avantages (fiscaux, juridiques...) proposés : ces produits peuvent être des contrats financiers dérivés, des contrats d'assurance ou même de réassurance.

De nombreuses réflexions doivent être menées sur ce domaine pour éviter les abus, clarifier les règles et favoriser l'accès à ce marché et par conséquent développer sa liquidité.

Les produits dérivés climatiques, produits dépendant de l'occurrence d'un événement météorologique "normal" et non catastrophique, semblent s'inscrire dans cette même logique de titrisation de risque d'assurance, même si comme le soulignent Jane Locke et Don Stowers ([82]), il existe une grande différence entre ces produits dérivés et les contrats d'assurance : en effet, ceux-ci concernent généralement des événements moyens ou normaux alors que l'assurance se préoccupe plus d'événements rares ou extrêmes. Toutefois, la nature du risque sous-jacent à ces contrats, n'étant pas un risque financier, combinée à une structure financière classique, tend logiquement à rapprocher les dérivés climatiques de ces produits dérivés d'assurance.

Aujourd'hui, les produits dérivés météo constituent un marché en plein essor aux Etats-Unis et commencent à apparaître en Europe. On estime sa taille à plus de 7 milliards de dollars et certains pensent qu'il va même atteindre facilement des trillions de dollars dans les années à venir. Ce marché est d'autant plus important que presque tous les acteurs de l'économie sont concernés par le risque météorologique, comme nous allons le voir dans la section suivante.

1.1.2 Le risque météorologique

D'après W. Daley, ministre Américain de l'économie pendant la présidence Clinton, environ 80% des entreprises Américaines et plus de 1 trillion de dollars de l'économie (soit

25% du P.N.B. - Produit National Brut-) des Etats-Unis seraient concernés par le *risque météorologique*. De la même façon, plus de 1,25 trillions de dollars de l'économie Européenne et 700 milliards de l'économie Japonaise seraient affectés. L'O.N.U. (Organisation des Nations Unies) évoque même que 17% de l'économie mondiale est susceptible d'être concernée par ce risque. Ce risque a un impact économique pouvant prendre trois formes principales :

- Il peut tout d'abord entraîner une *variabilité des revenus* d'une entreprise en ayant, par exemple, un impact sur les ventes : un exemple classique peut être celui du vendeur de parapluies, dont les ventes dépendent fortement du fait qu'il pleuve ou non.
- Il peut également conduire à une *variabilité des coûts* : par exemple, suite à un ouragan aux Etats-Unis, certains puits de pétrole ont été temporairement fermés par mesure de sécurité. L'offre se trouvant réduite, les prix du pétrole ont monté. On peut également penser à un fabricant de pâtes alimentaires, ayant de la semoule de blé dur comme matière première. Si le printemps est trop sec, les récoltes de blé sont peu abondantes et le coût des matières premières augmente.
- Enfin, il peut créer des *chocs négatifs sur la valeur de l'actif et du passif du bilan* de l'entreprise : ce risque peut augmenter la variance des flux et conduire à une explosion du ratio Sharpe.

D'autre part, les impacts de la météorologie sur l'activité d'une entreprise sont très souvent liés au volume. Ainsi, un fournisseur d'électricité devra faire face à une demande accrue, pour le chauffage lors d'un hiver particulièrement rigoureux, et ce de façon quasiment indépendante du prix de l'électricité.

De plus, le risque météorologique comporte plusieurs spécificités par rapport aux risques standards en finance :

- Tout d'abord, il n'y a *pas de marché physique de météorologie* : il est impossible, en effet, d'acheter de la pluie ou du vent sur un marché donné.
- C'est aussi un *risque local*, sur le plan géographique : un jour donné, à une heure donnée, les conditions climatiques de Paris sont différentes de celles de Brest ou de Perpignan, voire de celles de la proche banlieue parisienne.
- D'autre part, la météorologie est *au delà de tout contrôle humain* : personne ne peut agir sur les conditions météorologiques futures.
- Enfin, les conditions météorologiques ont une *influence quasi-certaine* sur les activités humaines, comme l'agriculture, et par conséquent sur les prix. Par exemple, une gelée peut abîmer les récoltes futures, qui s'en trouvent amoindries. La production est réduite et les prix augmentent.

1.1.3 Le rôle des produits dérivés météo

Depuis 1997, des nouveaux instruments sont apparus sur les marchés financiers pour gérer ces risques météorologiques : il s'agit des *produits dérivés météo* (ou "*weather derivatives*"). Nous utiliserons également l'expression "produits dérivés climatiques". Comme nous le verrons par la suite, ces instruments financiers sont relativement classiques dans leur structure (il s'agit d'options, de swaps voire d'obligations...) mais ils dépendent de l'évolution d'un sous-jacent très particulier puisque relatif aux conditions météorologiques (températures, précipitations...). Nous reviendrons de façon plus détaillée sur la description de ces produits, dans la section suivante.

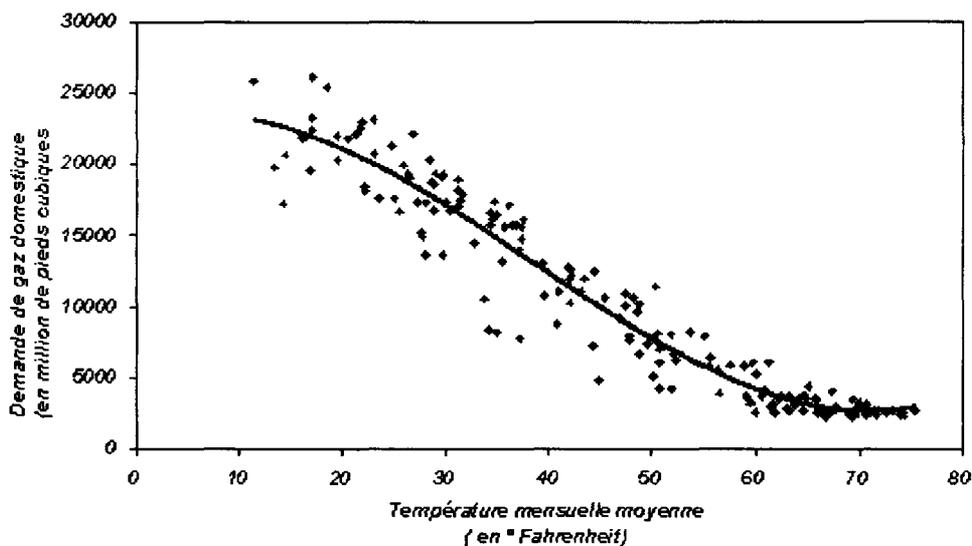
Les produits dérivés météo permettent à une entreprise de gérer les risques météorologiques, décrits précédemment. Ils lui offrent la possibilité de contrôler les effets des conditions climatiques sur la demande de ses produits, sur le coût des matières premières... Ils réduisent des revenus futurs très volatiles à des "cash flows" plus prévisibles. Ce sont des produits extrêmement spécifiques, n'ayant pas l'utilisation classique des autres produits dérivés : en effet, comme la météorologie ne peut pas être traitée directement sur les marchés, les produits dérivés météo ne sont donc pas utilisés pour couvrir les variations du cours du sous-jacent. Ils sont utilisés comme instruments de couverture contre d'autres risques dépendant des conditions météorologiques : par exemple, le risque que le prix de l'électricité augmente suite à une variation de températures.

D'autre part, le climat ayant surtout un impact sur le volume plus que sur le prix, le rôle des produits dérivés météo, contrairement aux produits dérivés traditionnels, est plus lié à une couverture en volume qu'à une couverture en prix. Cette couverture en volume est très demandée, notamment par les producteurs d'énergie : en effet, la consommation d'énergie (comme pour le chauffage) est peu corrélée avec le prix de cette source d'énergie mais dépend fortement des conditions météorologiques.

1.1.4 Typologie des produits dérivés météo

Différents sous-jacents possibles

Une première tentative de classement des produits dérivés climatique peut être liée à la nature du sous-jacent. La grande majorité des produits actuellement traités (représentant plus de 98% des transactions selon [83] et plus de 97% du montant notionnel) sont des contrats dépendant de la température. Ceci peut notamment s'expliquer par la dépendance quasi linéaire liant la consommation d'énergie et la température qui permet aux producteurs d'énergie, principaux intervenants sur ces produits, de mieux appréhender leur exposition climatique. Ainsi, par exemple, la demande de gaz dans le Wisconsin peut être représentée de la façon suivante en fonction de la température mensuelle moyenne :



Source: US Dept. Of Energy & National Climatic Data Center Copyright, 1998. Robert

Toutefois, quelques contrats ont également été écrits sur d'autres sous-jacents, tels que :

- Les précipitations: cela concerne la pluie (ne sont considérées comme gouttes de pluie que les gouttes de taille supérieure à 0,5mm!!) et la neige,
- Le vent,
- L'ensoleillement.

Les contrats sur précipitations devraient vraisemblablement connaître un formidable développement futur, notamment en Europe du Nord où l'hydroélectricité est une source d'énergie extrêmement répandue. En l'an 2000, on estime (cf. [83]) que 2% des "weather derivatives" ont été écrit sur la pluie pour un montant notionnel de 6,6% du montant global pour la saison hivernale.

D'autre part, de plus en plus de contrats dépendant à la fois de la température et des précipitations apparaissent (cf., par exemple, l'article de R. Dischel dans [83]). En effet, dans le secteur de l'agriculture, c'est plus la combinaison de ces deux phénomènes qui a un impact sur les cultures, que chacun pris séparément.

Enfin, et peut-être plus à titre anecdotique, certains envisagent déjà l'extension de ce type de produits dérivés à d'autres sous-jacents dépendant des conditions climatiques de l'espace, comme Dawn Davies le souligne dans [82]! En effet, les industries des télécommunications, de l'aviation ou de l'énergie sont sujettes aux effets de la météorologie de l'espace, par exemple les vents solaires, causés par des radiations électromagnétiques du soleil. Toutefois, la connaissance de ces phénomènes, notamment au niveau des prévisions, étant beaucoup moins développée aujourd'hui que celle de la météorologie "terrestre", les "space weather derivatives" ne vont pas voir le jour dans l'immédiat.

Définition des "degree-days" Les "degree days", notés *DD*, sont une mesure particulière de la température. Ils sont calculés comme la différence entre la température

actuelle moyenne T (calculée en général sur la base de huit observations) et une température de référence fixée à $65^{\circ}F$ ou $18^{\circ}C$ (cette valeur correspond à la température pour laquelle les chaudières étaient auparavant allumées).

$$DD = T - 65^{\circ}F$$

Toutefois, l'utilisation d'une température universelle de référence pose un problème : dans les régions chaudes, $65^{\circ}F$ est une température très froide alors que dans d'autres régions, elle sera perçue comme une température très élevée. C'est pour cette raison qu'un météorologue, Robert Dischel⁷, propose le concept de DD relatif à la zone géographique considérée. Pour cela, il étudie la consommation d'électricité en fonction de la température pour différentes villes aux Etats-Unis.

Les "degree days" peuvent être classés suivant leur signe :

si $DD > 0 \Leftrightarrow T > 65^{\circ}F$ alors "cooling degree day" ($C.D.D.$)

si $DD < 0 \Leftrightarrow T < 65^{\circ}F$ alors "heating degree day" ($H.D.D.$)

En effet, si $T > 65^{\circ}F$, alors il y a une demande de froid ("cooling degree day") et si $T < 65^{\circ}F$: alors il y a une demande de chaud ("heating degree day").

Une valeur cumulée de degree days, appelée "cumulative degree day" (notée ici $CumDD$), peut également être calculée. Il s'agit de la somme des degree days sur une période donnée. On la compare alors avec une valeur de référence correspondant à une période "type" (il s'agit, en général, de la valeur moyenne des "cumulative degree days" sur la période considérée). Il peut bien sûr s'agir de la somme de "cooling degree days" (respectivement "heating degree days"), on parle alors de "cumulative cooling degree day", notée ici $CumC.D.D.$ (respectivement "cumulative heating degree day", notée ici $CumH.D.D.$). La très grande majorité des contrats sur température aux Etats-Unis dépend de ce type d'indice $H.D.D.$ ou $C.D.D.$. D. Stowers ([83]) estime que moins de 8% des "temperature derivatives" ont un sous-jacent non-standard.

Mesure des données météorologiques Toutes les données sont mesurées par un organisme indépendant (souvent organisme d'Etat comme Météo France) et ne peuvent être contestées. Les données sur lesquelles se fondent les payoffs des produits dérivés, y compris le lieu du relevé de cette donnée ("reference station") sont explicitement spécifiées dans le contrat comme c'est le cas pour des produits dérivés standards (cours d'un actif donné tel jour à telle heure sur la page Reuter...).

Par la suite, nous allons nous concentrer sur les produits dérivés de température, qui sont les plus fréquemment traités à l'heure actuelle.

Différents types de produits dérivés sur température

La plupart des "temperature derivatives" ont des maturités inférieures à six mois, du fait de la saisonnalité de la température. Il peut s'agir de :

⁷Robert Dischel est un consultant météorologue reconnu par The American Meteorologist Society.

Options : Il s'agit des contrats les plus courants. On estime qu'environ 75% des transactions concernent des options. Celles-ci ont une structure identique à celle des contrats optionnels classiques. Seul le sous-jacent, la température, rappelle la particularité du produit. Pour l'acheteur d'une option d'achat, par exemple, il s'agit, par conséquent, d'avoir la possibilité et non l'obligation, de se garantir un certain revenu, noté M par la suite, en fonction du niveau de la température par rapport à une température de référence. Ce montant nominal, M , est déterminé en étudiant la relation potentielle entre les revenus historiques et les données météorologiques. Les options sur température sont, en général, européennes : elles ne peuvent être exercées qu'à leur maturité.

Les options climatiques sont le plus souvent :

- à caractère *lookback* (option sur maximum ou minimum i.e. le niveau de la température considéré est le niveau maximum ou minimum atteint par la température durant la vie de l'option). Ces options sont utilisées, si un jour extrême a beaucoup d'importance pour l'entreprise, comme cela semble être le cas pour des compagnies d'électricité devant faire face subitement à une demande accrue. Le payoff (ou cash-flow à maturité de l'option) est du type :

$$M \times \max(T^{\max} - K; 0)$$

où M est la sensibilité des revenus de l'entreprise à la variation de $1^{\circ}F$ (resp. $^{\circ}C$), T^{\max} est la température maximale (en degrés Fahrenheit, resp. en degrés Celsius) observée durant la vie de l'option et K est la température de référence considérée ;

- ou à caractère *asiatique* (option sur moyenne pour lisser les extrêmes i.e. le niveau de la température considéré est le niveau moyen des températures durant la vie de l'option). Ces options sont utilisées, si la globalité d'une saison a plus d'importance pour l'entreprise, comme cela peut être le cas pour l'industrie agro-alimentaire. Le payoff est du type :

$$M \times \max(CumDD - K; 0)$$

où M est le montant décrit précédemment, $CumDD$ est la moyenne des températures (en degrés Fahrenheit, resp. en degrés Celsius) observée durant la vie de l'option et K est la température moyenne de référence sur cette même période (également en "cumulative degree day").

Selon une société en recherche météorologique de Floride, Environmental Dynamics Research, les options sur température sont le plus souvent vendues pour des montants allant de 200000 *dollars* à 500000 *dollars*, avec une limite à 2 millions de dollars.

Pour illustrer ces propos, voici deux "petits exemples simples" d'options de température :

1. Une compagnie d'électricité perd $M = 100000$ dollars par $^{\circ}F$ en dessous d'un seuil $K = 50^{\circ}F$. On suppose que cette entreprise achète à la date t une option de vente sur minimum de maturité $t + 2$. De plus, le scénario de températures est le suivant :

	t	$t + 1$	$t + 2$
T (en $^{\circ}F$)	45	42	51
T^{\min} (en $^{\circ}F$)	45	42	42

Par conséquent, l'entreprise va toucher en $t + 2$ le montant suivant :

$$M \times \max(K - T^{\min}; 0) = 80000 \text{ dollars}$$

2. Un fabricant de glace perd $M = 5000$ dollars par $^{\circ}F$ par "cumulative cooling degree day" en dessous d'une période "type" évaluée à $K = 40^{\circ}F$. On suppose que cette entreprise achète à la date t une option de vente sur moyenne de maturité $t + 2$. De plus, le scénario de températures est le suivant :

	t	$t + 1$	$t + 2$
T	70	76	75
$C.D.D. = T - 65$ (en $^{\circ}F$)	5	11	10
$CumC.D.D.$ (en $^{\circ}F$)	5	16	26

Par conséquent, l'entreprise va toucher en $t + 2$ le montant suivant :

$$M \times \max(K - CumC.D.D.; 0) = 70000 \text{ dollars}$$

Swaps : Les *swaps météo* ont une structure identique à celle des swaps classiques. Seul le sous-jacent, la température, rappelle la particularité du produit. Il s'agit d'un contrat financier caractérisant les termes d'un échange de flux (montants, date(s) d'échange). Les swaps de température dépendent de la température en ce sens où les échanges de flux sont conditionnés par l'occurrence d'un certain événement météorologique (par exemple, "la température moyenne cumulée excédant un certain niveau durant une période donnée").

Une société de trading de "weather derivatives" (Worldwide Weather Trading Co.) donne un exemple de swap de température entre un parc d'attraction et un fabricant de glaces situés au même endroit à côté de Phoenix dans l'Arizona (i.e. même "référence station").

- Le parc d'attraction subit des pertes si l'été est trop chaud (baisse de la fréquentation). Il évalue que, pour chaque jour où la température excède $96^{\circ}F$, la perte encourue est de 50000 dollars. Le parc raisonne en "cumulative degree day" de 15 jours (il faut qu'il y ait moins de 15 jours de fortes températures dans la période considérée pour qu'il échange). Le montant total échangeable est limité à 1 million de dollars.

- Le fabricant de glaces réalise de bons résultats chaque jour où la température excède $96^{\circ}F$, le gain réalisé est de 50000 *dollars*. Le fabricant raisonne également en "cumulative degree day" de 15 jours (il faut qu'il y ait au moins 15 jours de fortes températures dans la période considérée pour qu'il échange). Le montant total échangeable est limité à 1 million de dollars.

- Il y a alors échange de revenus (50000 *dollars*) conditionnellement au seuil de 15 jours avec une température supérieure à $96^{\circ}F$.

Toutefois, on peut se demander dans quelle mesure un tel swap est effectivement réalisable. En effet, il n'est pas aisé de trouver deux contreparties ayant des besoins parfaitement réciproques. Malgré tout, ce sont eux qui servent de base à l'ensemble du marché des produits dérivés climatiques. En effet, de façon très schématique, les "dealers" échangent des contrats de swap, dont le niveau d'exercice correspond à leurs anticipations propres. Celles-ci correspondent en général à la moyenne historique de l'événement considéré, corrigée par une marge, souvent égale à un écart type. Ces échanges constituent le "marché secondaire", seuls des professionnels des marchés y participent. Chaque intervenant va ensuite interagir avec un utilisateur final (i.e. une entreprise cherchant à mieux gérer son risque climatique) sur le "marché primaire". Cette transaction porte sur n'importe quel produit dérivé: le contrat est "cappé" (i.e. une limite supérieure est imposée sur le montant des gains maximum) et son niveau d'exercice diffère de celui du swap. Cela assure d'une part une marge au "dealer" et d'autre part, l'entreprise n'a en général pas besoin d'une protection à ce niveau là, protection qui s'avèrerait extrêmement coûteuse.

Produits conditionnels (appelés aussi "critical days" ou "trigger") Il s'agit de contrats optionnels binaires. Ils garantissent un revenu prédéterminé, conditionnellement à l'occurrence d'un certain événement de température. Contrairement aux contrats d'options décrits précédemment, le "payoff" est fixé et connu au moment de la signature du contrat.

Fonds "climatiques" Certains gérants proposent des portefeuilles (ou fonds) climatiques comprenant plusieurs "weather derivatives". Ces produits s'adressent plutôt à des investisseurs financiers classiques cherchant à se diversifier. On peut rapprocher la logique sous-jacente à celle des obligations climatiques. Toutefois, leur importance est encore de l'ordre de l'anecdote pour l'instant.

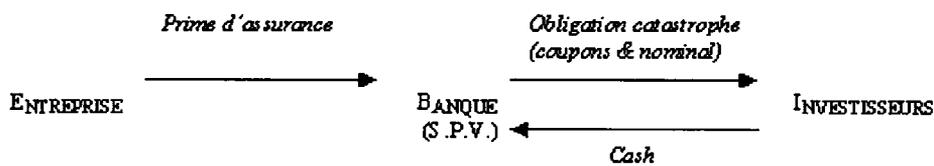
Obligations : Les "Nature-linked bonds", ou obligations dont le paiement des flux (coupons et/ou nominal) est rattaché à l'occurrence d'un événement "naturel" (catastrophe naturelle, événement météorologique...), sont des produits O.T.C. (Over The Counter i.e. de gré à gré) très développés à l'heure actuelle. Ces obligations peuvent être plus ou moins risquées en fonction de l'exposition partielle ou totale du principal et/ou des coupons au risque catastrophe ou météorologique. Elles sont très souvent comparées aux "junk bonds", le risque catastrophe et le risque météorologique ressemblant au risque de

défaut. La plupart des banques d'investissement utilisent d'ailleurs les spreads de crédit des "corporate bonds" pour évaluer les spreads des "Nature-linked bonds".

Prenons l'exemple d'une obligation sur catastrophe naturelle :

On considère une entreprise voulant se couvrir contre certains risques de catastrophes naturelles dans une certaine zone géographique pour une période de deux ans. Elle ne trouve pas de protection par les compagnies d'assurance et se tourne alors vers une banque d'investissement. Tout s'organise alors de la façon suivante :

Description du produit Si aucune catastrophe naturelle ne survient durant la vie de l'obligation, alors la structure des flux est la suivante :



où S.P.V. désigne "Special Purpose Vehicle". Cette notion sera définie de façon plus détaillée par la suite.

Si, par contre, une catastrophe naturelle survient pendant la vie de l'obligation, alors deux flux supplémentaires apparaissent :



Les flux de cette transaction pour l'entreprise et les investisseurs (puisque tout transite par la banque) peuvent être synthétisés dans le tableau ci-dessous, les flux en gras représentant les flux en cas de catastrophe :

<i>Acteurs</i>	<i>Flux payés</i>	<i>Flux reçus</i>
<i>Entreprise</i>	Prime	si catastrophe Indemnités
<i>Investisseurs</i>	Cash si catastrophe % du nominal	coupons + nominal

Les "Nature-linked bonds" ont un taux de rendement supérieur à celui des "T-bonds", ce qui est logique compte tenu du risque qu'ils incorporent. La période de deux ans (jusqu'à la maturité de l'obligation) est appelée période d'exposition.

Special Purpose Vehicle Le terme S.P.V. désigne "*Special Purpose Vehicle*". Cela ressemble fort aux "Mortgage Backed Securities" dans le cas des dettes fortement risquées. Ainsi, la banque d'investissement crée une S.P.V. permettant de regrouper puis de diviser le risque contre lequel l'entreprise se couvre. Puis elle le redistribue aux investisseurs par l'intermédiaire des "Nature-linked bonds".

Certaines règles doivent être respectées concernant ces structures : une S.P.V. doit être solvable, sans risque de crédit. Un choix de réglementation ainsi que d'indice ou de valeur de référence doit être fait par les intervenants. La transparence doit, de plus, être respectée. Certaines transactions ont été réalisées directement sans utiliser de S.P.V. (par exemple, transaction entre Sedgwick et SLF Re pour 57 millions de livres). Ces transactions soulignent la flexibilité de la titrisation mais on peut légitimement s'interroger sur la sécurité de ce type d'opération, notamment en ce qui concerne le risque de défaut.

Structure du produit L'argent reçu par la banque lui permet d'acheter des obligations d'Etat zéro-coupon et de maturité 2 ans, tandis que la prime d'assurance lui permet de garantir un taux de rendement plus fort que celui obligations d'Etat. Les investisseurs reçoivent alors les obligations zéro-coupon risquées à plus fort rendement mais s'engagent en cas de catastrophe à reverser une part du nominal. C'est ainsi que la banque sera en mesure de reverser des indemnités à l'entreprise. Le niveau de la prime versée par l'entreprise doit être suffisant pour garantir un taux de rendement des "Nature-linked bonds" attractif.

"Weather bond" Toutefois, ceci est valable pour les "cat-bonds" mais est-ce encore le cas pour un "weather bond"? En effet, les risques climatiques auxquels sont soumis les entreprises sont souvent des risques saisonniers, à court terme (environ six mois). Cela semble être une maturité trop faible pour l'émission d'une obligation. De plus, la taille encore faible du marché des produits climatiques ainsi que son manque de liquidité peuvent aussi être considérés comme un frein au développement de ce type de produit. Nous reviendrons sur ces questions par la suite dans le chapitre consacré à l'étude de la première transaction de "weather bond", ayant eu lieu en octobre 1999.

Cependant, un tel produit peut permettre aux acteurs du marché des "weather derivatives" de répartir leurs risques parmi divers petits investisseurs (principe fondamental de l'assurance), qui acceptent de partager ce risque en échange d'un taux de rendement approprié. Un "weather bond" est une extension logique des "cat-bonds", même si se pose le problème de l'évaluation : en effet, alors que les obligations catastrophe font référence à des événements discontinus et isolés, les "weather bonds" sont liés à des événements continus (par exemple, "Cumulative Degree Day"). Un tel produit représente une nouvelle classe d'actif attractive pour les investisseurs, en étant une source de diversification et une source de rendement attendue intéressante.



1.1.5 Liens entre le marché des "weather derivatives" et d'autres marchés

Le marché de l'énergie

Par l'histoire même des produits dérivés climatique, le lien entre le marché des "weather derivatives" et le marché de l'énergie, et en particulier celui de l'électricité, est évident. En effet, les conditions météorologiques sont une des sources principales d'aléa sur la demande en électricité. Ceci se reflète dans la terminologie même des produits climatiques ("Heating Degree Day" ou "Cooling Degree Day"). Compte tenu de cette forte dépendance entre les conditions météorologiques et la demande en électricité, une entreprise, WeatherWise, a même conçu un produit, protégeant le consommateur final des fluctuations dans sa facture ("WeatherProof bill").

Les synergies existant entre les "weather derivatives" et le marché de l'énergie ont conduit certains à considérer la météorologie comme une matière première et non plus comme un sous-jacent particulier. Ainsi, des contrats futures et d'options sur température, standardisés, ont été élaborés sur le C.M.E. (Chicago Merchantile Exchange) et sont en voie d'être développés en Europe.

D'autre part, en complément de ces produits, d'autres produits dérivés d'une nouvelle forme se développent également. Il s'agit des produits dérivés électricité. En effet, suite à la dérégulation du secteur de l'énergie aux Etats-Unis, supposée apporter des taux plus faibles et un service ininterrompu, différents problèmes sont apparus. Les prix et la disponibilité de l'électricité n'ont plus été garantis. Les producteurs d'énergie doivent faire face à des changements structurels, des concurrents et des marges plus faibles. Les produits dérivés d'électricité sont supposés fournir une couverture contre ces problèmes. Toutefois, ce marché souffre du manque de liquidité et certaines entreprises ont recours au marché du gaz, faisant l'hypothèse implicite que le gaz et l'électricité vont toujours de pair. Les producteurs d'énergie développent des stratégies à partir des "weather derivatives" et des produits électricité, afin de se couvrir tant en volume qu'en prix.

Le marché de l'électricité, notamment celui de la Californie, est développé plus en détail en annexes.

Le marché des crédits d'émission

D'autre part, un nouveau marché pour les entreprises se développe depuis quelques années aux Etats-Unis: c'est le marché des crédits d'émission. Déjà, beaucoup d'entreprises ont recours au marché des crédits SO_2 (Dioxyde de Soufre). Un autre produit est également disponible: le NOX (Nitrogen Oxide). Le problème de ces marchés est actuellement le manque d'homogénéité au niveau de la réglementation entre les différents états américains. Les "weather derivatives" sont fortement liés à ce nouveau marché, car les émissions polluantes dépendent des conditions météorologiques. Les entreprises peuvent dès lors utiliser ces produits comme couverture de leur exposition au risque environnemental, en complément des crédits d'émission.

Le marché du dioxyde de soufre est décrit de façon plus détaillée en annexes.

1.2 Les marchés de "weather derivatives"

1.2.1 Le marché O.T.C. (Over The Counter) des "weather derivatives"

Produits sur-mesure

Les entreprises ont des résultats liés de plus en plus avec les conditions météorologiques. Cette influence de la météorologie est propre, spécifique à chaque entreprise. De fortes corrélations existant entre la météorologie et les activités de l'entreprise, le volume concerné par le risque météorologique est souvent plus important que celui lié au risque de taux, par exemple. Ainsi selon Monte Simpson [87] :

- Depuis 15 ans, selon les chiffres de l'US Department of Energy, la production d'électricité hydrolique a varié d'une moyenne de 1,7 milliards de dollars par an (soit 11% de la production annuelle) du fait des pluies.
- Depuis 15 ans, les variations de températures dans les dix villes les plus peuplées des Etats-Unis ont causé une variation annuelle de 3,6 milliards de dollars dans la consommation d'électricité.

Les instruments de couverture doivent être sur-mesure. De plus, l'homme ne pouvant pas agir sur les conditions climatiques, la spéculation sur ce type de produits est extrêmement risquée. On parle même de "betting against God" !! Ce sont par conséquent les banques d'investissement qui conçoivent ce type de produits, il s'agit de marchés de gré à gré. De plus, comme le souligne Kendall Johnson⁸, les "weather derivatives" sont souvent l'objet d'une étude particulièrement approfondie des besoins de l'entreprise et il n'est pas rare que le produit réellement échangé soit complètement différent du produit proposé au départ par la banque d'investissement, afin d'être parfaitement adapté à l'entreprise.

La gestion du risque météorologique devient, grâce à ces produits, pro-active et non réactive (par manque de méthodes et d'outils de gestion).

Manque de liquidité et sécurité

Le marché de produits dérivés climatique manque de liquidité, celle-ci traduisant la facilité avec laquelle il est possible de déboucler sa position. En effet, les problèmes d'une réglementation très confuse, le manque d'un modèle efficace d'évaluation des produits et la complexité des données météorologiques contribuent à un ralentissement de l'évolution de la liquidité. Ceci est notamment visible par la taille importante des spreads sur ce marché, même si, pour certains, les marges sur ces marchés O.T.C. sont moins importantes

⁸Kendall Johnson dirige la section consacrée aux dérivés météo du groupe TFS (Tradition Financial Servies), société de conseil en gestion de risques.

que prévues. Ces spreads sont estimés à 30 – 40% sur les contrats les plus classiques par bon nombre d'acteurs sur le marché (comme J. Gosselin de Castlebridge Partners). En effet, il y a un problème d'asymétrie d'information : les acheteurs de ces produits sont souvent mieux informés des conditions météorologiques que les vendeurs.

Toutefois, le manque de liquidité de ce marché provient également de la nature même des produits dérivés météo : en effet, ceux-ci sont bien souvent perçus, par leurs acheteurs, non pas comme des outils de spéculation, mais plutôt comme de véritables contrats d'assurance, qu'il convient de conserver jusqu'à l'échéance. On ne déboucle pas une position avant la maturité. La logique de ce marché étant alors plus proche d'une logique d'assurance que d'une logique financière classique, le peu de liquidité n'est pas surprenant. De plus, les données météorologiques sont déterminées, aux Etats-Unis, par le National Weather Service, organisme indépendant. Il n'y a aucune source de contestation possible et aucune possibilité de manipulation du sous-jacent. Cela assure la sécurité du marché des produits dérivés météo.

Historique

Le premier contrat météo a été signé en août 1997, grâce à l'innovation de Enron. Aux Etats-Unis, Enron, leader (pendant un temps...) sur le marché Américain du gaz et au niveau mondial pour le trading d'énergie, s'est d'abord intéressé aux produits électricité pour de petits producteurs américains suite à la dérégulation du marché de l'énergie. Mais pour garantir les prix, Enron a eu l'idée d'un produit de couverture de température (liant le prix de l'électricité au volume consommé et donc à la température). Ce fut le premier contrat, la contrepartie était un producteur d'électricité du Sud-Est des Etats-Unis. La Weather Risk Management Association (W.R.M.A.) a estimé en juin 2001 que plus de 4800 transactions de produits climatiques ont eu lieu depuis 1997 pour un montant global de plus 7,5 milliards de dollars (parmi lesquels Enron est intervenu pour plus de 2,7 milliards de dollars !). Peu à peu, cette idée a fait du chemin et aujourd'hui ces produits s'adressent à un public plus large que les producteurs d'énergie. Mais encore 90% des transactions concerneraient le secteur énergétique.

Le nombre de transactions est en constante augmentation (hausse de 115%, selon W.R.M.A., en 2000) même si le montant notionnel de ces contrats a légèrement diminué au cours de l'année 2000 (W.R.M.A. a enregistré une baisse de 14,8%). Cette diminution est considérée par bon nombre d'intervenants sur le marché des "weather derivatives" comme étant non-significative de la santé du marché (cf., par exemple, [83]).

1.2.2 Le marché des "weather derivatives" du Chicago Merchantile Exchange (C.M.E.)

Depuis le 22 septembre 1999, certains produits dérivés météo sont également traités sur un marché organisé, le Chicago Merchantile Exchange (C.M.E.). Il s'agit de contrats futures et d'options sur ces futures. Ces contrats se réfèrent à des indices cumulatifs de Heating Degree Days (H.D.D.) et de Cooling Degree Days (C.D.D.) pour certaines

villes des Etats-Unis : Atlanta (Hartsfield Airport), Chicago (O'Hare Airport), Cincinnati (Covington KY) et New York (La Guardia). Ces villes ont été choisies en fonction de leur population, de la variabilité des températures et de leur activité constatée sur les marchés de gré à gré des dérivés H.D.D. et C.D.D.. Les teneurs du marché de futures sont Aquila Energy, Castlebridge Weather Markets, Koch Energy Trading et Southern Company Energy Marketing. Il s'agit des grands acteurs actuels, parmi les plus actifs sur le marché de gré à gré des produits dérivés météo.

A l'heure actuelle, les contrats ont des maturités de 12 mois successifs pour une flexibilité maximale⁹). Un point d'indice (H.D.D. ou C.D.D.) équivaut à 100 dollars. Les valeurs des indices sont déterminées par Earth Satellite Corporation.

Spécifications des contrats H.D.D./C.D.D. du C.M.E.

Les futures ont les caractéristiques suivantes :

	Futures
Taille du contrat	100dollars × indice H.D.D./C.D.D.
Taille du tick minimum	1 point d'indice = 100dollars
Maturités	12 mois consécutifs
Date d'échéance	9 : 00 am (heure de Chicago) premier jour ouvré, deux jours au moins après l'échéance du contrat
Jour de règlement	premier jour ouvré, deux jours au moins après l'échéance du contrat
Prix de règlement	indice H.D.D./C.D.D. du contrat calculé par EarthSat
Exercice	-
Intervalle entre prix d'exercice	-
Intervalle de strike	-
Heures de trading	24 heures (Globex System)

Les options sur future ont les caractéristiques suivantes :

⁹Sur les marchés de gré à gré, la saison HDD s'étend classiquement d'octobre à avril et la saison CDD de mai à septembre (7 mois d'hiver et 5 mois d'été).

	Options sur futures
Taille du contrat	un contrat future
Taille du tick minimum	1 point d'indice = 100dollars
Maturités	12 mois consécutifs
Date d'échéance	9 : 00 am (heure de Chicago) premier jour ouvré, deux jours au moins après l'échéance du contrat
Jour de règlement	premier jour ouvré, deux jours au moins après l'échéance du contrat
Prix de règlement	-
Exercice	européen
Intervalle entre prix d'exercice	50 points H.D.D./25 points C.D.D.
Intervalle de strike	± 150 points H.D.D./ ± 75 points C.D.D. par rapport au strike à la monnaie
Heures de trading	24 heures (Globex System)

Objectifs de ce nouveau marché

Pour beaucoup, les contrats du C.M.E. pourraient accroître la liquidité du marché des "weather derivatives" et attirer de nouveaux participants: en effet, le C.M.E. autorise des transactions de petites tailles et offre donc plus de flexibilité (100 dollars par tick), le système de quotation Globex2 permet d'avoir une transparence sur les prix, d'éviter les frictions et de réduire les coûts de transaction. Enfin, comme sur les marchés de futures traditionnels, la chambre de compensation élimine le risque de crédit pour les intervenants, en assurant transparence et sécurité.

Premier bilan

Deux ans après l'ouverture de ce marché organisé, il est possible de dresser un premier bilan :

- Pour certains, le bilan est plutôt négatif. En effet, l'activité de ce marché est bien loin de ce qui avait été prévu. Ainsi, durant le premier mois, seulement 294 contrats H.D.D. ont été échangés, dont plus de la moitié pour la seule ville d'Atlanta! Ce chiffre est à comparer avec les 650 contrats future sur gaz échangés le jour de l'ouverture du marché New York Merchantile Exchange en 1990! Un autre exemple peut être celui d'une journée type comme le 18 septembre 2000, aucun contrat future sur aucune maturité n'a été échangé alors que plus de 70000 contrats future sur *S&P500* d'échéance décembre ont été traités. Le manque de liquidité, dû en autres au manque de participation des utilisateurs finaux, semble être responsable de cette faible activité, ainsi que le manque d'intérêt de certains acteurs clé, comme Enron et Koch.

- Pourtant, le 9 janvier 2000, des contrats ont été créés pour six nouvelles villes : Dallas (Dallas Fort-Worth), Philadelphie (Philadelphia International), Portland (Portland International), Tuscon (Tucson Airport), des Moines (Des Moines International Airport) et Las Vegas (Mc Carran International Airport).

En réalité, ces différents faits permettent peut-être de mieux comprendre le rôle joué par ce marché : il s'agit d'un complément au marché O.T.C., qui fonctionne très bien. Du fait même de la nature des "weather derivatives", le marché de gré à gré semble être plus adapté pour répondre aux besoins des entreprises. En effet, comme le souligne John Polasek dans [76], chaque "weather derivative" fait intervenir trop de variables pour pouvoir être standardisé. Notamment, l'importance du lieu d'exposition climatique dans le choix de la couverture fait ressortir un "risque de base" irréductible lors de l'utilisation des marchés organisés. Cette notion sera développée par la suite.

1.2.3 La situation en Europe

Historique

Rien n'existe de façon réellement structurée pour le marché européen. En effet, selon W.R.M.A., celui-ci n'a qu'une centaine de transactions de dérivés climatiques à son actif, pour un montant notionnel d'environ 120 millions de dollars, représentant seulement 6% du marché mondial. D'autre part, selon D. Tomlinson, courtier en dérivés climatiques à Londres ([83]), seules 10 entreprises participent activement au marché européen !

La première transaction européenne, comme le rappelle Kevin Foster ([82]) a eu lieu en septembre 1998 et a consisté en un contrat de swap de température entre Enron et une compagnie écossaise d'électricité, HydroElectric. La grande majorité des transactions concerne des produits de température, mais les dérivés de précipitation commencent à intéresser les pays du nord de l'Europe, où l'énergie provient surtout de l'hydroélectricité. Toutefois, à l'heure actuelle, le développement de ce marché n'a pas encore suivi l'exemple américain.

Pour Philippe Chauvancy ([82]), vice président de United-Weather, le manque de croissance du marché des "weather derivatives" en Europe vient de la grande difficulté qu'ont les entreprises européennes à mesurer l'impact des conditions climatiques sur leur bilan. D'autre part, comme le souligne L. Clemmons, de Element Re ([83]), alors que l'accès aux données climatiques est gratuit aux Etats-Unis, celui-ci peut se révéler très coûteux en Europe.

Un premier marché en Europe : I-WeX (Internet Weather Derivatives Exchange)

Par conséquent, la création de I-WeX constitue une avancée majeure pour le développement des "weather derivatives" en Europe et cela semble être la seule d'une telle ampleur prévue à l'heure actuelle. Ce nouveau marché a été imaginé par trois groupes :

- *I.F.S.* (Intelligent Financial Systems limited), un fabricant de software, permettant l'évaluation de produits dérivés ainsi que la gestion en temps réel des portefeuilles financiers,
- *L.I.F.F.E.* (London International Financial Futures and Options Exchange), une des places financières phare, dans le monde,
- *W.I.R.E.* (World-wide Intellectual Resources Exchange limited), un spécialiste des marchés d'assurance sur Internet. *W.I.R.E.* est un pionnier dans le domaine de la titrisation des risques d'assurance et a lancé en 1999 un site Web consacré à ce thème (*Artémis*), qui fait aujourd'hui figure de référence dans le domaine.

I-WeX est composé de quatre entités différentes :

- *Le marché O.T.C.*, permettant de mettre en relation des acheteurs potentiels de produits dérivés météo et des vendeurs. Ce marché, en libre accès, permet de développer la transparence et le nombre des transactions de "weather derivatives". Il a été créé en mars 2000. Le site propose un outil d'évaluation d'options sur *H.D.D./C.D.D.* pour différentes stations européennes. Aucun détail concernant les méthodes utilisées n'est fourni. De plus, l'historique considéré correspond à une période de 3 ans. Il est alors raisonnable de s'interroger sur la validité des résultats obtenus.
- *Le marché organisé*, de structure identique à celle du *C.M.E.* et bénéficiant de l'activité et de la réputation du *L.I.F.F.E.*. Il a été ouvert le 10 décembre de l'année 2001. Depuis le 10 juillet 2001, des indices de température pour trois villes européennes (Londres, Paris et Berlin) sont publiés quotidiennement sur le site du *L.I.F.F.E.* (l'adresse est : www.lifeweather.com) mais aussi sur le site d'I-WeX. Il s'agit d'indices de température moyenne (la moyenne étant calculée à partir du maximum et du minimum atteint par la température au cours d'une journée). A cette moyenne sont ajoutées les moyennes des jours précédents, pour le même mois, puis 100 pour obtenir la valeur de l'indice sur ce mois en question. Contrairement aux indices Américains, il ne s'agit pas d'indice *H.D.D.* ou *C.D.D.*, comme il en a été question au départ. Une plus grande flexibilité dans l'utilisation des données est, de ce fait, accordée, puisque la symétrie des saisons hivernale et estivale est beaucoup moins vraie en Europe qu'aux Etats-Unis en ce qui concerne la consommation d'énergie. Les données utilisées pour le calcul des indices sont fournies par le Met Office (pour la Grande Bretagne), Météo France (pour la France) et *D.W.D.* (pour l'Allemagne). Six contrats futures sont proposés pour chacune des trois villes européennes : trois sont des contrats mensuels et trois concernent des indices saisonniers. Chaque degré Celsius équivaut à 3000 Livres Sterling. Ian Dudden, directeur de ce nouveau marché, souhaite ainsi accroître la liquidité et étendre rapidement le nombre de villes concernées au reste de l'Europe, à l'Asie et aux Etats-Unis. Toutefois, depuis sa création, le nombre de contrats échangés est extrêmement faible. La chute d'Enron

peut avoir effrayé les acheteurs potentiels, même si la chambre de compensation du L.I.F.F.E., comme celle de tout marché organisé, limite énormément le risque de crédit associé aux transactions.

- *Une base de données météorologiques*, concernant les grandes stations de référence en Europe. Les données théoriques seront gratuites ou disponibles pour un coût réduit.

- *Un annuaire professionnel*, permettant l'accès à des spécialistes de la gestion de risques météorologiques ou de prévisions météorologiques et à des fournisseurs de software. Les membres de I-WeX sont, à l'heure actuelle, Aquila Energy, Goldman Sachs, Hanover Re, B.N.P.-Paribas, Sucden¹⁰ ou encore Swiss Re. Le renom de toutes ces entreprises donne beaucoup de crédit au projet I-WeX et leur participation associée à celle des fondateurs pourrait présager d'un bel avenir pour cette plateforme électronique.

La concurrence du marché Eurex

Le 28 Novembre 2000, Deutsche Börse A.G. a annoncé que des indices de température quotidien, mensuels et annuels, *H.D.D.* et *C.D.D.*, pour 30 villes européennes (pour la France: Bordeaux, Lyon et Paris), étaient cotés par Xelsius en vue d'introduire des dérivés climatiques sur l'Eurex¹¹. Les produits dérivés climatiques qu'Eurex envisage d'introduire sont des swaps de température mais également des options européennes *H.D.D.* et *C.D.D.* mensuelles et saisonnières, dont les maturités pourront aller jusqu'à 18 mois. Les niveaux d'exercice de ces contrats seront régulièrement répartis de façon à créer un degré de standardisation le plus élevé possible. Toutefois, Eurex souhaite attendre les indications des participants les plus actifs sur le marché O.T.C. pour définir complètement la structure des contrats proposés.

Les indices cotés sont bien sûr disponibles sur le site de Xelsius (www.xelsius.com), ainsi que de nombreuses études graphiques. Toutefois, l'utilisateur peut également "downloader" les indices pour en faire une gestion personnelle.

D'autre part, des données historiques (températures quotidiennes minimale et maximale) sur plus de 30 ans sont disponibles pour chacune des stations. Ainsi, un accès gratuit aux données est désormais possible.

Cela a été perçu par beaucoup d'intervenants comme une tentative pour devancer le futur marché de l'I-WeX et comme décision purement politique!

1.2.4 Les plate-formes "on line"

Venant compléter les marchés O.T.C. et organisés de "weather derivatives", plusieurs plate-formes électroniques de trading ont été développées par certains des grands acteurs

¹⁰Sucden est un des brokers sur futures les plus réputés en Grande-Bretagne.

¹¹L'Eurex est le plus grand marché mondial de produits dérivés: plus d'une centaine de dérivés sur des indices européens, des obligations suisses et allemandes ou encore sur l'Euribor y sont échangés.

clé. Cependant, pour beaucoup, comme Kevin Foster le souligne dans [82], même si ces nouveaux systèmes sont extrêmement utiles au développement des "weather derivatives", ils ne pourront jamais supplanter les marchés plus classiques: les utilisateurs finaux viendront difficilement sur ce type de système pour passer un ordre, du fait même de la technicité des produits.

EnronOnline

Ce site a été fermé en décembre 2001, suite à la faillite d'Enron. Toutefois, il s'agissait d'un site pionnier dans le "trading online" des dérivés climatiques. Aussi, le mentionner ici m'est apparu comme indispensable.

Enron avait créé, en Novembre 1999, cette plate-forme de transaction gratuite sur internet, permettant d'acheter ou de vendre des produits relatifs à l'énergie et à d'autres matières premières. Le montant notionnel de toutes les transactions effectuées sur le site de Enron s'élevait à plus de 590 milliards de dollars! Depuis janvier 2000, Enron avait ajouté des produits dérivés météo à ses offres. Initialement, les contrats proposés étaient relatifs à la température sur des groupes de villes aux Etats-Unis. En mai 2000, se sont ajoutés des contrats sur des villes particulières, augmentant ainsi de façon quasi-exponentielle le volume des transactions sur ce site. Puis, Enron proposait des swaps de "degree-days" hebdomadaires, mensuels et saisonniers pour 19 villes aux Etats-Unis (Cincinnati, Chicago, Little Rock, Philadelphia, Atlanta, New-York, Phoenix, Houston, Boston, Sacramento et Washington DC, Dallas-Fort Worth, Kansas City, Los Angeles, Minneapolis, New York City, New York La Guardia, Portland et San Francisco), dont beaucoup étaient déjà concernés par le marché organisé du C.M.E., et 6 régions Américaines (Mid-Atlantic, Midwest, Northeast, Northwest, Texas et Upper Central).

Enron proposait également des swaps pour 19 villes en Europe (dont Bordeaux, Lyon, Marseille, Paris et Toulouse), pour 2 villes en Australie (Sydney et Melbourne), pour Hong-Kong et pour 2 villes au Japon (Tokyo et Osaka).

Le nombre des transactions sur EnronOnline était relativement important: au simple mois de juin 2000, par exemple, il a dépassé celui du C.M.E. depuis sa création.

D'autre part, EnronOnline était caractérisé par l'absence de coût de transaction. Les données fournies l'étaient en temps réel et une limite supérieure était imposée à tous les contrats.

ELRiX: Swiss Re On Line

ELRiX est une plate-forme électronique de négoce de risques standard. Swiss Re y propose des outils de transfert et de gestion de risque, notamment pour des produits de réassurance. Il s'agit surtout de couverture de réassurance pour les risques tempêtes et catastrophes naturelles, mais aussi responsabilité civile ou aviation générale.

En juin 2000, Swiss Re a lancé un site de trading électronique de produits dérivés météo. Les contrats sont des options sur indices mensuels cumulatifs *H.D.D.* et *C.D.D.* pour 40 villes Américaines et Canadiennes et plusieurs villes Européennes en Finlande, France,

Allemagne, Norvège, Suède, Suisse et Grande Bretagne. Les villes françaises concernées sont Bordeaux, Lille, Lyon, Marseille, Paris, Strasbourg et Toulouse.

Des données historiques des indices sont disponibles sur le site pour toutes les stations de référence concernées. La taille de l'historique est de plus de 35 ans.

D'autre part, SwissRe New Markets a décidé de devenir vendeur mais aussi acheteur (c'est là une grande nouveauté) de produits dérivés climatiques et de ne se concentrer que sur des transactions excédant 10 millions de dollars.

Climetrix : R.M.S. On Line

Climetrix est le site internet de R.M.S. (Risk Management Solution¹²) consacré aux produits dérivés climatiques. Il a été lancé en juillet 2000. L'objectif d'un tel site n'est pas de proposer des contrats météorologiques mais de fournir aux intervenants sur le marché des "weather derivatives", qu'ils s'agissent de traders ou de consommateurs finaux, un ensemble de données et d'outils utiles pour l'évaluation des produits dérivés climatiques et leur gestion. En effet, Climetrix propose une base de 50 ans de données météorologiques ("propre" et complète) pour 200 villes américaines et 12 villes en Grande-Bretagne, des modèles de modélisation de tendance climatique, mais aussi de plusieurs autres facteurs ayant une influence sur l'évaluation des dérivés climatiques. D'autre part, une gestion en temps réel du site permet une utilisation optimale des données et des prévisions.

Enfin, R.M.S. propose un ensemble de services de consulting relatif à une gestion optimale du risque climatique.

SGweather : S.G. On Line

SGweather est le site créé par la banque française Société Générale en septembre 2000. Cette plate-forme propose les produits dérivés climatiques de la Société Générale, gérés par sa filiale B.A.R.E.P.. D'autre part, en décembre 2000, la Société Générale s'est alliée aux A.G.F. afin de créer une société commune Météo Transformer Limited. Cela leur permet de développer leurs activités respectives dans le domaine des dérivés d'assurance en général, et des dérivés climatiques en particulier. Cette société a pour vocation d'émettre des produits dérivés financiers et des contrats d'assurance dans le domaine climatique et d'intervenir sur le marché des "cat-bonds".

Plus récemment, le 17 juillet 2001, S.G. et Benfield Group¹³ se sont alliés pour créer une structure légale entièrement consacrée aux dérivés climatiques, Celsius Insurance Limited. Au départ, cette entité peut prendre des positions jusqu'à 60 millions de dollars sur le marché des produits dérivés météo. Elle est protégée par de nombreux réassureurs Européens et Américains et par Lloyds à Londres. Le lien entre ces nouveaux produits et les réassureurs s'en trouve renforcé.

¹²Risk Management Solution est le leader mondial de fournisseur de produits et services concernant les risques naturels (catastrophe et météorologique).

¹³Benfield Group est le troisième courtier mondial en réassurance. D'autre part, il s'agit du plus grand intermédiaire de réassurance dans le monde.

WeatherML : le logiciel de Weather Risk Advisory

Weather Risk Advisory, fabricant de software et société de conseil en produits climatiques, a développé , en collaboration avec d'autres compagnies, WeatherML, un logiciel permettant la gestion des "weather derivatives". Ce logiciel est disponible depuis fin 2001. Il permettra aux entreprises utilisant des produits dérivés climatiques de réduire leurs coûts de transaction et de mieux gérer les risques opérationnels.

IntercontinentalExchange (I.C.E.)

Plus récemment, la plate-forme de "trading on line" de matières premières, IntercontinentalExchange ou I.C.E., basée à Atlanta, a lancé une activité sur les "weather derivatives". Depuis le 20 novembre 2001, il est, en effet, possible d'échanger des contrats de swaps sur température pour cinq villes Américaines : Chicago, Dallas, New York, Philadelphie et Sacramento. Les stations de référence sont celles des plus grands aéroports de ces villes. Il s'agit de contrats dépendant d'un indice de température, calculé comme la moyenne des températures sur cinq jours (semaine en cours ou semaine suivante). Chaque degré de différence par rapport au niveau d'exercice vaut 10000 dollars. Selon Ravi Nathan, directeur des activités climatiques de Aquila, le sous-jacent de ces contrats fait espérer une activité relative. En effet, celui-ci est très bien approximé par les prévisions à court-terme du National Weather Service. Ainsi, les participants peuvent avoir une idée des mouvements à venir.

1.2.5 Les intervenants

Il existe sur le marché des "weather derivatives" plusieurs types d'acteurs clé. Une liste relativement complète des grands participants de ce marché peut se trouver sur le site de Weather Risk Management Association (l'adresse est : www.wrma.org). Il s'agit de :

- *Les grands producteurs d'énergie* : il s'agit de producteurs d'électricité, ayant eu dès la première transaction un rôle clé sur ce marché. Celui-ci a commencé et évolue aujourd'hui grâce à l'innovation de certains grands groupes tels que Entergy-Koch, Aquila ou jusqu'à fin 2001, Enron.
- *Les entreprises* : ce sont les acheteurs-type de cette catégorie de produits. Leurs résultats dépendent plus ou moins des conditions climatiques : par exemple, une société productrice de boissons fraîches ou de glaces sera très sensible à la température durant l'été, alors qu'une station de sport d'hiver sera plus sensible au degré d'enneigement.... Les entreprises sont donc demandeuses de ces produits dérivés comme moyen de couverture contre le risque météo. Au début, les entreprises concernées appartenaient uniquement au secteur de l'énergie. Puis, les industries de loisir, de l'agro-alimentaire, des transports sont venues se rajouter à ces intervenants classiques.

- *Les banques* : ce sont les concepteurs de ce type de produits. Toutefois, le marché des "weather derivatives" étant technique et encore de petite taille, seules quelques grandes institutions financières se le partagent : il s'agit entre autres de Merrill Lynch, Goldman Sachs, Lehman Brothers ou la Société Générale. A ces intervenants se rajoutent quelques courtiers très spécialisés. Ce sont les banques qui vont démarcher les clients car ces produits sont encore peu connus. Les besoins de chaque firme sont étudiés (soit par la banque soit par l'entreprise elle-même) ainsi que la sensibilité des résultats aux conditions météorologiques. La banque est alors en mesure de proposer un produit spécifique pour l'entreprise.
- *Les sociétés de réassurance* : ce sont aussi des clients mais leurs objectifs ne concernent pas la couverture mais la spéculation (surtout dans des périodes comme actuellement où les taux de marge des réassureurs sont très faibles). Les compagnies d'assurance commencent, elles aussi, à s'intéresser à ces nouveaux produits : ils leur permettent, d'une part d'élargir leurs activités à des événements plus "normaux", moins exceptionnels et d'autre part, d'être en relation avec les dirigeants des entreprises et non pas seulement avec l'équipe de gestion du risque.
- *Les collectivités locales* : elles sont surtout intéressées par des produits concernant l'enneigement et le déblaiement des voies publiques.

Quelques grands acteurs de ce marché

Quelques entreprises sont des intervenants clés sur le marché des produits dérivés climatiques, tant au niveau du trading que sur le plan de l'innovation et de la création de nouvelles structures et stratégies. Parmi elles, on peut notamment citer :

- *Aquila Energy* : il s'agit du leader de la gestion du risque pour le domaine de l'énergie en Amérique du nord. Il développe des produits et des services de gestion de risque, notamment météorologique. D'autre part, il s'agit d'un acteur clé sur le marché de l'énergie aux Etats-Unis : il contrôle bon nombre de structures de productions et a un réseau de transport (notamment pour le gaz naturel) très développé.
- *Castlebridge* : il fournit des conseils de gestion de risque météorologique et est un des acteurs (structureur et gestionnaire) les plus actifs aux Etats-Unis sur le marché des "weather derivatives".
- *Enron* : Enron a fait défaut en décembre 2001. Cette faillite a causé d'énormes troubles sur le marché des dérivés climatiques mais surtout sur le marché de l'énergie. En effet, il s'agissait de l'une des compagnies leader sur le marché du gaz et de l'électricité les plus avancées au niveau mondial. Elle développait, à l'échelle planétaire, des centrales électriques et fournissait de l'énergie. De plus, elle fournissait des services de gestion de risques météorologique et financier pour d'autres

producteurs d'énergie, de moindre taille. Toutefois, son rôle historique dans le développement du marché des "weather derivatives" en fait encore aujourd'hui un des acteurs principaux.

- *Entergy-Koch* : c'est une filiale de Wichita. Entergy-Koch est impliqué dans toutes les phases de l'industrie du pétrole et du gas, entre autres.

- *Southern Company Energy Marketing* : c'est le résultat de la fusion entre le plus gros producteur d'électricité aux Etats-Unis (Southern Company) et une importante entreprise de production de gas et de pétrole (Vastar Resources). Il fournit des services, des produits financiers et même des matières premières énergétiques à une clientèle professionnelle en Amérique du nord.

- *Swiss Re new Markets* : il s'agit d'une division de Swiss Re Group, fournissant des conseils en gestion de risque aux grandes entreprises et aux assureurs. Elle utilise tant des techniques classiques que des outils innovants.

- Mais également, de façon très récente, plusieurs compagnies d'énergie voulant créer leurs propres instruments de couverture.

1.3 Problèmes d'évaluation et de gestion des produits dérivés de température

1.3.1 Problématique

Les modèles d'évaluation sont très peu évoqués dans les rares articles traitant du sujet : en effet, le marché des "weather derivatives" restant, malgré la création de marchés organisés tels que celui du C.M.E., un marché de gré à gré, l'évaluation des produits, qui sont des contrats sur-mesure, est confidentielle. Néanmoins tous les modèles semblent combiner les modèles classiques d'évaluation des produits dérivés avec des modèles de prédiction météorologique. De plus, d'après les entretiens que j'ai pu avoir avec Eric Briys¹⁴, l'évaluation des dérivés météo semble plus tenir de la négociation commerciale, rajoutant au côté un peu spéculatif (de type "pile ou face" selon certains) du produit. Le vendeur s'assure une bonne marge pour se couvrir. Plusieurs questions peuvent alors être posées : cette marge est-elle suffisante ? Comment est-elle évaluée ? Comment couvrir une position comprenant des produits dérivés météo ?

Toutefois, une logique financière standard ne semble pas être adaptée dans ce cas. En effet :

- D'une part, la logique des acheteurs (finaux) des produits dérivés climatiques est souvent une logique d'assurance. Ils souhaitent se couvrir contre l'occurrence

¹⁴Eric Briys a travaillé chez Lehman Brothers, Merrill Lynch et Deutsche Bank.

d'un certain événement météorologique. Par conséquent, la plupart du temps, les détenteurs de ces contrats vont les conserver dans leurs livres jusqu'à l'échéance. Il n'y a pas de réelle spéculation sur ce marché.

- D'autre part, puisque le sous-jacent des "weather derivatives" n'est en général (sauf dans le cas des options sur future du C.M.E.) pas traité sur les marchés, aucune logique de réplcation, de type Black-Scholes, n'est envisageable. Il est impossible de répliquer les flux des contrats en intervenant sur le marché du sous-jacent. De ce fait, le prix d'un dérivé climatique n'est pas déterminé comme égal au coût de la couverture associée à une position sur ce dérivé. La logique même de couverture n'a pas de sens réel et la notion de prix du contrat est plus proche d'une vision économique : il s'agit d'un niveau d'équilibre où l'offre et la demande se rencontrent. En ce sens, le marché des "weather derivatives" est très particulier : c'est un marché "acomplet" puisqu'il est illiquide et que seul le produit dérivé est traité.

On peut toutefois citer quelques articles présentant des méthodes d'évaluation. Ils sont souvent associés à une tentative de modélisation de température. Mais, comme le soulignent Fabien Dornier et Michel Queruel ([29]), l'évaluation de dérivés climatiques est extrêmement sensible au choix du modèle pour le sous-jacent, et bien souvent, des hypothèses très fortes sont nécessaires (parfois implicitement) : comme une évaluation risque-neutre....

Nous retiendrons dans ce chapitre introductif deux modèles concernant l'évaluation d'obligations climatiques : un article d'Eric Briys sur l'évaluation des "cat-bonds" (dont la structure est comparable à celle des "weather-bonds", comme souligné précédemment) et un article de Karthikeyan Sankaran sur l'évaluation d'une obligation météo. Mais, nous reviendrons plus en détails sur ces questions dans les chapitres 2, 3 et 4 de cette thèse.

1.3.2 Méthode de E. Briys pour l'évaluation des "Nature linked-bonds" [80]

Eric Briys propose un modèle d'évaluation en temps continu des "Nature-linked bonds" et des spreads associés. Il procède à la façon de Longstaff et Schwartz [62] dans leur évaluation d'obligations avec risque de défaut. Il se restreint aux risques naturels, ayant un fort impact mais non catastrophiques. Il n'y a donc pas de paramètre de saut dans le processus. Dans ce modèle, la seule source d'incertitude provient donc du risque naturel représenté par l'indice de pertes. Celui-ci peut être officiel (comme l'indice P.C.S. - Property Claim Service- utilisé par le C.B.O.T. - Chicago Board of Trade-) ou particulier à la banque montant ce produit. Les taux sont supposés constants mais cette hypothèse peut être facilement relâchée si on maintient une absence de corrélation entre les taux et l'indice de pertes.

Le principe des "Nature-linked bonds" est simple : on fixe un niveau seuil pour toute la période d'exposition. Si l'indice touche ce niveau, l'émetteur de l'obligation fait défaut, et le détenteur de l'obligation reçoit uniquement une fraction du nominal.

Notations et hypothèses

E. Briys considère une obligation dépendant du niveau d'un indice de pertes donné pendant une période d'exposition. Il cherche à déterminer le prix d'une telle obligation à la date 0.

Les notations suivantes vont être utilisées :

- I_t la valeur de l'indice de pertes en t . On suppose que le processus suivi par l'indice de pertes est un Brownien géométrique :

$$\begin{cases} dI_t = \mu I_t dt + \sigma I_t dW_t \\ I_0 < K \end{cases}$$

Le paramètre μ est souvent associé au phénomène de réchauffement (cf. El Niño).

- K le niveau seuil prévalant durant toute la période d'exposition,
- F la valeur faciale de l'obligation,
- T la maturité de l'obligation,
- T' la fin de la période d'exposition ($T' \leq T$).

Le flux terminal de l'obligation est donc :

$$1_{I_t < K, \forall t \in [0, T']} \times F + 1_{I_t \geq K, \exists t \in [0, T']} \times (1 - \alpha) F$$

Par conséquent, il est naturel d'introduire le temps d'arrêt correspondant au premier instant où l'indice de pertes atteint¹⁵ le seuil (comme dans le cas d'une option barrière up&out) :

$$T_{I,K} = \inf (t \in]0, T'], I_t = K)$$

Le payoff peut se réécrire comme :

$$1_{T_{I,K} > T'} \times F + 1_{T_{I,K} \leq T'} \times (1 - \alpha) F$$

Evaluation des Nature-linked bonds

Le problème de cette obligation est que l'indice de pertes I_t n'est pas en général traité sur les marchés. On ne peut donc pas utiliser une évaluation dans le cadre Black-Scholes-Merton. Pour pallier ceci, Eric Briys introduit une prime de risque liée à cette source d'incertitude, λ . Le paramètre de dérive du processus I_t s'en trouve modifié : μ est remplacé par $\theta = \mu - \lambda\sigma$. On se place dès lors dans un cadre d'évaluation neutre au risque (avec tout ce que ceci suppose....).

¹⁵Ici, on a égalité entre le processus et le seuil à cet instant car il s'agit d'un processus continu (aucun saut n'a été introduit).

Si \mathbb{Q} désigne "la" probabilité risque-neutre, on obtient très facilement le prix de l'obligation à la date 0, noté D_0 :

$$D_0 = E_{\mathbb{Q}} \left(e^{-rT} \left(1_{T_{I,K} > T'} \times F + 1_{T_{I,K} \leq T'} \times (1 - \alpha) F \right) \right)$$

$$D_0 = e^{-rT} F - E_{\mathbb{Q}} \left(e^{-rT} \alpha F 1_{T_{I,K} \leq T'} \right)$$

Comme dans le cas des obligations avec risque de défaut, on est ici ramené pour le prix de l'obligation risquée à la différence entre l'obligation sans risque de mêmes caractéristiques et une option binaire "de défaut".

On obtient alors :

$$D_0 = e^{-rT} F (1 - \alpha \mathbb{Q}(T_{I,K} \leq T'))$$

ou en utilisant la fonction de répartition du maximum d'un mouvement Brownien avec drift :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(T_{I,K} \leq T') &= N(d_1) + \left(\frac{I_0}{K} \right)^{1 - \frac{2\theta}{\sigma^2}} N(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln \frac{I_0}{K} + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2} \right) T'}{\sigma \sqrt{T'}} \\ d_2 &= \frac{\ln \frac{I_0}{K} - \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2} \right) T'}{\sigma \sqrt{T'}} \end{aligned}$$

où $N(\cdot)$ est, comme d'habitude, la fonction de répartition d'une variable Normale centrée réduite :

$$N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

Il est intéressant de remarquer que, dans certains cas, le payoff peut être lié à des valeurs agrégées des pertes. Dans ce cas on utilise comme indice $A_t = \int_0^t I_s ds$. Mais aussi, un événement "Parisien" (on ne prend en compte le passage au seuil que si cela a été observé pour une période de temps, notamment pour les températures) peut être considéré. Dans ces deux cas on prend un niveau de seuil très élevé en première approximation.

Evaluation des spreads liés aux Nature-linked bonds

Eric Briys suit ici le modèle proposé par Longstaff et Schwartz [62]. Pour simplifier les calculs, il pose $F = 1$.

Le taux de rendement en 0 du Nature-linked bond de maturité T est donné par :

$$Y_0 = -\frac{1}{T} \ln D_0$$

On remplace alors D_0 par la valeur obtenue ci-dessus et sachant que le spread en 0 de l'obligation par rapport aux obligations d'Etat est donné par $S_0 = Y_0 - r$, on a :

$$S_0 = -\frac{1}{T} \ln \left(1 - \alpha \left(N(d_1) + \left(\frac{I_0}{K} \right)^{1 - \frac{2\rho}{\sigma^2}} N(d_2) \right) \right)$$

Toutes choses égales par ailleurs, S_0 décroît avec le seuil K (plus le seuil est élevé, plus l'obligation a de chance de ne pas être mise en défaut), croît avec α (plus le niveau de recouvrement en cas de défaut ($1 - \alpha$) est faible, plus l'obligation est risquée et plus son taux de rendement est important), croît avec σ (plus la volatilité de l'indice de pertes est importante, plus le risque de franchissement du seuil est fort, et plus l'obligation est risquée).

La relation de S_0 avec la maturité de l'obligation T est ambiguë si on est dans le cas $T = T'$ (sinon S_0 décroît avec T , la période d'exposition relative étant plus faible) : on peut avoir une décroissance ou au contraire une relation en cloche entre les deux paramètres.

Remarques

La méthode proposée par E. Briys pose deux problèmes principaux : tout d'abord, la logique sous-jacente à l'évaluation de l'obligation est une logique risque-neutre. Quelle est réellement le sens d'une telle probabilité lorsque le sous-jacent n'est pas traité sur les marchés ? Quelle est le sens de la prime de risque λ ? Comment peut-on l'observer ou la calibrer ?

D'autre part, pour évaluer une telle obligation, il est indispensable qu'un indice existe et soit observable en temps continu. Ceci est vrai pour les obligations catastrophe aux Etats-Unis grâce, notamment, à l'indice de pertes P.C.S.. Mais, pour les obligations météo, ceci est moins clair. Il n'existe pas un indice de température coté sur les marchés. Si cela était le cas, quelle serait la signification "physique" d'un tel indice de température ?

1.3.3 Evaluation d'une obligation météo : méthode de K. Sankaran [86]

L'auteur propose ici une méthode d'évaluation (historique) d'obligation météo, suite aux deux tentatives ratées d'émission par Enron et Koch en automne 1999. Le problème traité ici est de déterminer une méthode d'évaluation des probabilités d'occurrence de tel événement de température et l'article n'est pas véritablement centré sur la problématique d'évaluation, qui sera réalisée grâce à la méthode classique de la valeur actuelle. La question du coupon n'est pas soulevée, son niveau et le montant remboursé sont fixés a priori et considérés comme des données du problème.

Hypothèses et cadre de l'étude

K. Sankaran considère une obligation de maturité 2 ans, de valeur faciale 1000 dollars dont les coupons semestriels dépendent du niveau moyen T_{moy} de la température à Talahassee (en Floride) pendant le semestre qui vient de s'écouler :

Température de référence ($65^{\circ}F$)	Taux de coupon
$T_{moy} \geq 65^{\circ}F + 1^{\circ}F$	11%
$65^{\circ}F - 1^{\circ}F < T_{moy} < 65^{\circ}F + 1^{\circ}F$	10%
$T_{moy} \leq 65^{\circ}F - 1^{\circ}F$	9%

Les niveaux de coupon sont fixés de façon arbitraire. L'auteur cherche alors à déterminer le prix d'une telle obligation à la date 0.

Simulations de la température et détermination des coupons

Une grande partie de l'article est consacrée à la modélisation du processus de température : plusieurs modèles sont testés et calibrés successivement. Selon le critère de R^2 ajusté, le modèle permettant de mieux représenter la réalité parmi les modèles testés est celui de R. Dischel ([26]), où, comme décrit dans la section précédente, la température suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ce processus est bien évidemment discrétisé pour pouvoir être calibré. La partie consacrée à la simulation de la température pendant la durée de vie de l'obligation est relativement importante : deux méthodes sont successivement proposées.

Dans un premier temps, une version paramétrique est faite. Les paramètres du processus discrétisé sont obtenus par la méthode des moindres carrés. Environ 10000 simulations sont nécessaires. Un pas de temps correspond à une journée et à chaque date, la température simulée est comparée à $65^{\circ}F$. Une moyenne est obtenue tous les semestres et ainsi chaque niveau de coupon est établi.

Dans un second temps, une version historique est faite. Dans cette optique, on suppose que l'histoire se répète sans cesse. Il y a autant de semestres "simulés" que de semestres disponibles dans l'historique. Il ne s'agit pas vraiment d'une simulation. Le procédé utilisé dans les simulations paramétriques est ensuite identique.

Ces deux approches permettent de déterminer la probabilité d'occurrence (ou la fréquence) de chaque catégorie de taux de coupon. D'autre part, l'auteur obtient des résultats tout à fait comparable par ces deux méthodes.

Evaluation de l'obligation

Grâce aux calculs précédents, on a désormais une idée plus précise du niveau de coupon pour chaque semestre. Il reste à déterminer les taux d'actualisation à utiliser pour l'évaluation de l'obligation. Ceux-ci sont déterminés à l'aide de la méthode classique de "bootstrapping" (i.e. démembrement des obligations d'état Américaines afin d'avoir des obligations zéro-coupon, puis détermination des taux de rendement de ces obligations).

L'obligation est évaluée avec la méthode classique de la V.A.N. (Valeur Actuelle Nette), i.e. son prix est égal à la somme de ses flux actualisés. Ici, les flux de coupons correspondent à l'espérance historique des niveaux de coupon obtenue par les simulations.

Cet article semble s'inscrire parfaitement dans la logique de l'étude menée par M. Cao et J. Wei par exemple ([16]) par son intérêt pour l'évaluation des probabilités d'occurrence et pour un modèle de diffusion de température. Toutefois, les questions relatives aux spécificités de cette obligation météo ne sont pas traitées et la spécificité d'une telle obligation n'apparaît absolument pas.

1.3.4 Gestion du risque, réglementation

Un autre problème, lié à celui de l'évaluation, concerne la gestion des risques et des positions en produits dérivés météo prises par les grands intervenants du marché, notamment les banques.

Risque de base ou "*basis risk*"

Aux risques classiques de gestion de produits dérivés illiquides, se rajoute un autre risque plus spécifique aux produits dérivés climatiques: le risque de base. Il s'agit du fait que les conditions météorologiques prévalant en un lieu donné peuvent différer des celles d'un autre lieu, même si ceux-ci sont proches géographiquement. Cela représente un risque extrêmement important pour les utilisateurs finaux, cherchant à se couvrir. En effet, les relevés à la station de référence peuvent différer des conditions climatiques du site où se trouve l'utilisateur. Ce phénomène est particulièrement vrai pour les précipitations, qui peuvent être très localisées.

Les utilisateurs finaux des "weather derivatives" doivent accepter ce risque de base, à moins de renoncer aux produits dérivés climatiques comme instruments de couverture. Une bonne modélisation du "basis risk", ou tout du moins une bonne connaissance, semble dès lors indispensable au bon développement de certains produits dérivés. En effet, les divergences de préoccupations du vendeur et de l'acheteur de "weather derivatives" quant au choix de la bonne station de référence ont souvent conduit à l'annulation de la transaction, comme le rappelle Robert Dischel ([82]).

La question de la gestion du "basis risk" reste ouverte à l'heure actuelle.

Couverture des risques

Selon les praticiens, plusieurs méthodes prévalent à l'heure actuelle pour la couverture des positions en "weather derivatives", même si aucune d'entre elles n'est parfaitement satisfaisante:

1. *Annulation de la position* par une position opposée: c'est la couverture idéale mais est-ce vraiment réalisable compte tenu du caractère sur-mesure de ces produits?

2. *Couverture à l'aide des produits sur catastrophe*: l'idée est alors de chercher d'éventuelles corrélations entre les catastrophes naturelles et les conditions météorologiques.
3. *Couverture à l'aide des options* traitées sur les marchés organisés (comme celui du C.M.E.): ces nouveaux marchés, s'ils acquièrent suffisamment de liquidité, offrent de nouvelles perspectives de couverture pour les intervenants. Ceux-ci peuvent étudier les corrélations existant entre le lieu de leur exposition et les stations représentées dans le marché. La couverture concerne alors une partie du risque seulement, le risque de base n'est pas couvert.
4. *Diversification sur des petits investisseurs* en émettant une obligation: la logique sous-jacente est proche d'une logique d'assurance. Toutefois, il subsiste le problème de la maturité si courte des dérivés météo par rapport aux maturités classiques des obligations. Cela suppose une hypothèse relativement forte concernant les besoins de couverture des interlocuteurs de l'émetteur (comme Enron, pour le "weather bond").
5. *Mutualisation*: sans être une véritable diversification géographique, il s'agit de l'étude des corrélations entre différentes stations.

La couverture des positions semble un peu floue, de nombreuses précisions doivent être apportées. Pourquoi une diversification géographique n'est-elle pas envisagée? Ainsi, pour certaines multinationales dont les résultats sont sensibles aux conditions météorologiques et qui sont sans doute les principaux clients de ce type de produits; pourquoi ne pas proposer un dérivé par région concernée et avoir de ce fait une certaine diversification?

Réglementation

Aussi surprenant que cela puisse être, il n'existe pas encore de réglementation claire et universelle concernant les produits dérivés météo (cf. par exemple[80]). La seule réglementation concerne les investisseurs dans le cas d'émission d'obligations: il doit s'agir de professionnels uniquement, afin d'éviter aux particuliers une trop forte exposition à une même source de risque.

Le problème central est alors celui de la classification des produits dérivés météo: s'agit-il de contrats financiers (options, futures ou contrats avec montant notionnel?) ou des contrats d'assurance? De la réponse apportée dépend le traitement comptable et fiscal du "weather derivatives".

Ainsi, certains produits dérivés d'assurance respectent plus particulièrement la logique de l'assurance et seront considérés comme contrats d'assurance. Ils seront alors régis par les lois de l'assurance. D'autres produits auront plus une logique financière et seront dès lors régis par les lois de la banque. D'ailleurs, beaucoup d'intervenants sur le marché des produits dérivés d'assurance tirent partie de ce manque de clarté et structurent les

produits en fonction des avantages (fiscaux, juridiques...) proposés: ces produits peuvent être des contrats financiers dérivés, des contrats d'assurance ou même de réassurance.

Aux Etats-Unis, les différences de traitement sont multiples :

- De façon schématique, si un produit dérivé d'assurance est considéré comme une police d'assurance: cela signifie que tous les paiements seront potentiellement déductibles comme les primes d'assurance (Internal Revenue Code, I.R.C., §162) ou à hauteur d'un certain seuil (I.R.C. §165(d)). D'autre part, la prime pourra être amortie sur toute la vie du contrat et tous gains et pertes potentielles figureront aux "gains et pertes d'exploitation".

- Si, en revanche, le produit dérivé d'assurance est vu comme un contrat financier, tout est plus complexe dans son traitement comptable: en effet, Mais, avant tout, le détenteur de ces produits doit déterminer si le contrat a une vocation de "couverture d'exposition ordinaire": si tel est le cas, le montant de la prime pourra être déduit sous forme de pertes d'exploitation alors que, dans le cas contraire, le montant de la prime vient diminuer les gains en capitaux.

D'autre part, tout dépend également de la nature du contrat dérivé: s'il s'agit d'un contrat de gré à gré ou d'un contrat standardisé. Dans ce dernier cas, c'est la régulation *FASB133* qui prévaut et les gains ou pertes non-réalisés doivent être enregistrés aux fonds propres du bilan comme "Comprehensive Income". S'il s'agit d'un contrat échangé sur le marché O.T.C., alors les gains et pertes sont inscrits à l'actif du bilan dans "Other Assets". La confusion la plus complète règne sur ce marché!

En Europe, tout est encore plus complexe, puisque les régulations varient d'un pays à l'autre: en France, Hollande et Suède, les produits d'assurance peuvent parfois être considérés comme des contrats sur matières premières. En Grande-Bretagne, ils sont régis par S.F.A. (Securities and Futures Authority). En Allemagne, Italie et Espagne, ils ne sont soumis à aucune régulation et en Pologne, ils sont même interdits!

Cette confusion réglementaire est un frein certain au bon développement de ce marché. En effet, cette question est délicate car la gestion purement comptable des dérivés d'assurance en dépend: en effet, alors que la prime d'un contrat d'assurance est immédiatement répertoriée dans la ligne "autres dépenses", la prime d'un produit dérivé doit être capitalisée et figurer au bilan comme actif. Ainsi, les changements de valeur d'un contrat d'assurance n'ont pas à être reportés mais ceux d'un dérivé doivent l'être impérativement (ligne "pertes et gains non réalisés"). Cela suppose une gestion quasi-dynamique du produit dérivé d'assurance! ...

Cette confusion réglementaire est un frein certain au bon développement du marché des "weather derivatives". En effet, cette question est délicate car la gestion purement comptable des dérivés climatiques en dépend: en effet, alors que la prime d'un contrat d'assurance est immédiatement répertoriée dans la ligne "autres dépenses", la prime d'un produit dérivé doit être capitalisée et figurer au bilan comme actif (cf. [83]). Ainsi, les

changements de valeur d'un contrat d'assurance climatique n'ont pas à être reportés mais ceux d'un dérivé climatique doivent l'être impérativement (ligne "pertes et gains non réalisés"). Cela suppose une gestion quasi-dynamique du "weather derivatives" ! ... Les grands acteurs ont décidé de créer une association afin de standardiser les termes des contrats, leurs spécifications et autres particularités. Il s'agit de W.R.M.A. (Weather Risk Management Association). Reste à savoir quels vont être les résultats d'une telle entreprise....

1.4 Annexes du chapitre 1

1.4.1 Présentation rapide du marché Californien de l'électricité

Spécificités de l'électricité

Comme le souligne S. Nagarajan ([68]), l'électricité n'est pas une matière première comme les autres. Plusieurs caractéristiques propres à l'électricité peuvent être évoquées. En effet, contrairement à d'autres sources d'énergie, tel le gaz naturel, l'électricité n'est pas stockable. Aucun arbitrage "spot-forward" ne peut être envisagé.

D'autre part, les contraintes liées à la transmission ou à l'acheminement sont importantes : le prix de l'électricité est fortement dépendant de la distance séparant le fournisseur et le consommateur et de la facilité d'accès.

Le marché de l'électricité aux Etats-Unis

Le marché Américain de l'électricité est de taille imposante. On estime celle-ci à plus de 500 milliards de dollars et ses bénéfices annuels à plus de 200 milliards de dollars (par exemple, E.G. Calazet et R.D. Samuleson [14]). Le marché Californien est évalué, quant à lui, à environ 23 milliards de dollars (par exemple, H. Outhred [74]).

Ce n'est que très récemment que ce marché a été dérégulé. Le Congrès Américain n'a commencé à introduire de la concurrence dans ce secteur seulement en 1978 par le "Public Utility Regulatory Policies Act", puis par le "Energy Policy Act" de 1992. Chaque Etat est rendu responsable des échanges intérieurs. Ces amendements tentent de faciliter l'accès à la "transmission" (i.e. au réseau permettant la livraison d'électricité) pour les petits producteurs d'électricité, en vue d'encourager le développement de marché d'électricité entre professionnels. Le modèle est celui du marché du gaz naturel.

Les bénéfices escomptés de la dérégulation sont multiples. On peut citer la concurrence accrue des producteurs, conduisant à une baisse des prix et des coûts opérationnels, une plus grande homogénéité entre les différents Etats Américains, une plus grande fiabilité des services proposés ou même un souci accru de l'environnement. Les résultats obtenus sont un peu plus discutables, comme nous le verrons dans une section ultérieure.

Le marché Californien

La Californie a été un des premiers Etats Américains à avoir adopté cette logique de restructuration du marché de l'électricité (cf. H. Outhred [74]). Beaucoup de facteurs ont contribué à ceci : les prix très élevés de l'électricité, le faible développement de l'énergie nucléaire, et une forte culture de l'innovation. Le marché Californien appartient toutefois à un marché plus global, appelé "Western System", qui réunit plus de 11 Etats de la côte Ouest des Etats-Unis et 2 provinces Canadiennes.

Cette appartenance à un réseau plus important a un impact très fort sur les résultats de la restructuration en Californie. En effet, celle-ci a causé beaucoup de problèmes de mise en oeuvre : entre autres, on peut citer l'incompatibilité des programmes et des échéanciers

de la restructuration entre les différents membres, la croissance de la population, les contraintes imposées par les réseaux ou encore les impacts environnementaux.

Deux phases peuvent être distinguées dans le développement du marché Californien de l'électricité :

- Avant 1997, trois grands producteurs d'électricité se partageaient le marché : il s'agit de Pacific Gas and Electric, Southern California Edison et San Diego Gas and Electric. Ils fournissaient environ 80% des besoins Californiens en électricité.

- Le 31 mars 1998, une nouvelle phase dans le processus de dérégulation est atteinte : le marché doit être entièrement concurrentiel avant 2002. Pour faire face de façon plus optimale à cette nouvelle étape, les trois producteurs séparent les différents métiers : génération, transmission et distribution. Seule la génération est dérégulée, la transmission et la distribution ne le sont pas encore. Les prix de vente de l'électricité aux particuliers sont limités à un seuil fixé à 90% des prix de 1996 jusqu'en 2002.

La structure du marché est bilatérale : une instance indépendante (California Independent System Operator ou "CaISO") supervise le système, et les participants organisent les échanges (California Power Exchange ou "CalPX"). Les rôles respectifs de ces deux instances sont les suivants :

CaISO	CalPX
Coordination des prévisions du jour précédent et des échanges en temps réel	Réception des ordres, un ou plusieurs jours avant, le jour même.
Respect et soumission aux standards opérationnels et de fiabilité	Détermination des prix
Répartition des facilités de transmission et gestion de la congestion éventuelle du réseau	Soumission des répartitions à CaISO
Répartition des services annexes	Système de livraison et paiement

Deux marchés spot et un marché forward

Le CalPX gère deux marchés spot :

- *Le marché "un jour avant"* : les participants soumettent leurs ordres la veille de leurs exécutions. Ce marché commence à 6 heures du matin et se termine à 1 heure de l'après-midi du jour précédent. Le CaISO publie alors la répartition finale pour le jour suivant, avec un quantité globale et un prix de marché pour chaque heure. Les différents ordres sont alors dispersés géographiquement et temporellement, afin de gérer l'éventuelle congestion du réseau. Le CaISO peut même ajuster les ordres passés afin de satisfaire des contraintes de transmission.

Une fois ce travail de répartition réalisé, les informations sont renvoyées au marché CalPX pour avoir l'accord. Lorsque celui-ci est donné, tout est soumis à nouveau au CaISO.

- *Le marché "le jour même"*: les participants peuvent ajuster rapidement leurs positions, en faisant des transactions dans la journée. 24 enchères sont proposées (une par heure) lors de 3 grands temps dans la journée: à 6 heures du matin pour la période allant de 11 heures du matin à 4 heures de l'après-midi, à midi pour la période allant de 5 heures de l'après-midi à minuit et enfin à 4 heures de l'après-midi pour le lendemain matin (de 1 heure à 10 heures). Les prix sont fixés de la même façon que sur le marché "un jour avant".

Depuis juin 1999, le marché CalPX gère également un marché à terme: des contrats mensuels, semestriels et annuels sont proposés. La livraison s'effectue alors le mois suivant l'échéance du contrat. Celle-ci est répartie sur la période en entier. Le prix facturé est celui affiché sur le prix moyen du marché "un jour avant".

Crise de l'an 2000 et question de la prise en compte de la transmission

Lors de l'an 2000, plusieurs problèmes sont apparus sur le marché Californien: les problèmes liés à la pénurie d'offre sont les plus importants, causant des coupures de courant fréquentes et préjudiciables dans tout l'Etat de Californie.

Durant l'été 2000, les températures sont devenues très chaudes et cela a causé une forte hausse de la demande en électricité (notamment pour l'air conditionné). Les prix ont flambé, soulignant le dilemme des distributeurs d'électricité, contraints d'acheter sur un marché dérégulé et de vendre à des prix strictement réglementés. En décembre 2000, la F.E.R.C. (Federal Energy Regulatory Commission) est contrainte d'autoriser ces distributeurs à se fournir non exclusivement sur le marché CalPX. Ceci marque la fin de ce marché... D'autres solutions, notamment sur Internet, apparaissent: par exemple, l'A.P.X. (Automated Power Exchange) propose un site de trading ouvert 24 heures sur 24, permettant à chaque intervenant de trouver la meilleure contrepartie dans les délais les plus brefs, sans aucun intermédiaire.

Beaucoup d'auteurs (entre autres H.G. Cazalet et R.D. Samuelson [14]) soulignent le manque de prise en compte de la transmission dans les contrats proposés. Ceux-ci pensent que parallèlement aux contrats concernant la matière première devraient s'échanger des contrats de réservation de réseaux, ce qui serait globalement moins coûteux pour les participants.

1.4.2 Présentation du marché du SO_2 aux Etats-Unis

Qu'est-ce que l'"effet parasol" ?

Le SO_2 , *dioxyde de soufre*, est un gaz polluant. Il est émis notamment par les industries consommant du charbon et du fuel : aux Etats-Unis, des études ont montré que deux tiers des émissions de SO_2 proviennent des centrales électriques. Ce gaz est considéré comme à l'origine (avec les oxydes de nitrogène, NO_x) des pluies acides et des nuages de brume asphyxiante. Ces effets sont désignés habituellement par l'expression "*effet parasol*", effet différent de l'"effet de serre" qui contribue au réchauffement climatique. Il existe en réalité deux types de dépôts acides : une forme humide et une forme sèche.

Les *dépôts humides* regroupent les pluies acides, le brouillard ou la neige. Ils affectent un grand nombre de plantes et d'animaux en tombant et en ruisselant sur le sol. Les *dépôts secs* concernent les gaz et particules acides. Leur impact sur l'environnement (comme sur les forêts) et sur les hommes est lié à l'influence du vent ou de la pluie.

Les effets néfastes de ces dépôts acides sont très importants, notamment pour les forêts et les sols, les poissons et les animaux, les biens et, bien-sûr, la santé humaine. Ils peuvent également causer des accidents ou diminuer la fréquentation de sites touristiques (comme les grands parcs) en réduisant la visibilité (les émissions de SO_2 interviennent pour 50% à 70% dans la réduction de la visibilité dans les états de l'Est aux Etats-Unis).

L'effet parasol est mesuré grâce à une échelle de pH , représentative de l'acidité de la substance étudiée. Deux entités, supervisées par l'Agence de Protection de l'Environnement américaine (E.P.A.), contrôlent le niveau d'acidité : le National Atmospheric Deposition Program mesure les dépôts humides et le Clean Air Status and Trends Network mesure les dépôts secs.

Situation aux Etats-Unis : Le "*Clean Air Act*" :

En 1980, les émissions américaines de SO_2 atteignent le niveau record de 17,5 millions de tonnes (ce chiffre est à comparer aux 1,75 millions de tonnes français à la même époque). Les questions environnementales préoccupent peu à peu les américains et l'E.P.A. prend de plus en plus d'importance. Alors qu'en 1970, le Clean Air Act entre en vigueur, ce n'est qu'en 1990, qu'il est amendé. Le Clean Air Act souhaite notamment réduire les émissions de SO_2 afin d'améliorer de façon significative l'environnement et la santé publique. Pour ce faire, il utilise des approches traditionnelles mais aussi innovantes, avec notamment un recours au marché pour le contrôle de la pollution de l'air par les crédits d'émission. Ceux-ci deviennent réalité en 1995 pour le SO_2 avec l'entrée en vigueur de la Phase I de la loi.

Le chapitre IV de la loi fixe l'objectif de réduire les émissions annuelles de SO_2 de 10 millions de tonnes en dessous du niveau de 1980. Deux phases sont prévues à cet effet :

1. La *première phase* entre en vigueur en 1995. Elle concerne 263 centrales électriques situées dans les états de l'Est et du MidWest. 182 centrales rejoignent également

ce programme en tant que centrales de substitution. Ainsi, 445 centrales électriques sont concernées au total. Les données de 1995 montrent que les émissions ont été réduites de 40% en dessous du seuil souhaité! Ainsi les centrales concernées par la première phase sont :

	1995	1996	1997	1998	1999
Centrales concernées directement	263	263	263	263	263
Centrales de substitution	182	161	153	135	125
Entreprises volontaires ("Opt-in")	0	7	7	10	10
Total	445	431	423	408	398

2. La deuxième phase commence en 2000. Elle impose les mêmes restrictions sur les quantités émises mais concerne alors plus de 2000 centrales!

Le recours au marché pour réduire les émissions de gaz polluant n'a pas été immédiat. La structure et le fonctionnement de ce marché ont nécessité beaucoup de réflexion.

Structure et fonctionnement de ce marché

- *Attribution des crédits*: Chaque année depuis 1995, l'E.P.A. fixe un seuil global d'émission de SO_2 puis répartit ces seuils pour chaque compagnie d'électricité, en quote-part relativement à la production et à l'historique de la centrale. Une règle stricte est utilisée: on multiplie 2,5 pounds¹⁶ de $SO_2/mmBtu$ (million British thermal units) par l'unité d'input et la quantité moyenne d'énergie consommée durant la période de référence (entre 1985 et 1987). Toutes les allocations de crédits sont listées dans la table A du Clean Air Act. Les permis d'émission sont ainsi alloués, à raison d'une tonne de SO_2 par permis. Ils peuvent être achetés, vendus ou stockés. Jusqu'en 1996, les crédits d'émission étaient attribués gratuitement aux centrales existantes. Depuis, ils doivent être achetés par toutes les nouvelles entreprises.

Ce système contient une incitation à limiter la pollution: pour chaque tonne de SO_2 émise, l'entreprise doit détenir un crédit d'émission.

- *Seuils d'émission*: Chaque entreprise a donc un quota d'émission à ne pas dépasser. Le seuil global d'émission a été de l'ordre de 9,5 millions de tonnes entre 1995 et 1999, et est désormais limité à 8,95 millions de tonnes depuis l'entrée en vigueur de la phase II du Clean Air Act (soit la moitié des émissions de 1980). Ce seuil à ne pas dépasser est très efficace. Tout d'abord, il protège l'environnement: en effet, même avec une croissance économique soutenue, les entreprises doivent trouver de nouvelles stratégies pour maintenir leurs émissions en dessous de ce niveau. D'autre part, les émissions de SO_2 sont mesurées et contrôlées de façon très précise.

¹⁶Ce taux n'est plus que de 1,2 pounds dans la Phase II.

- *Allocations spéciales* : De plus, durant la Phase I du Clean Air Act, l'E.P.A. a une réserve de 300.000 crédits (soit environ 2,8% des crédits annuels) afin de stimuler l'efficacité de ce programme : en effet, les centrales développant de nouvelles énergies, moins polluantes ou renouvelables, sont récompensées par un bonus en crédits d'émission. Un crédit de bonus est attribué pour chaque 500 mégawatt heures d'énergie sauvée par ce type de mesure. Cette réserve de crédits est appelée "Conservation and Renewable Energy reserve". Le contrôle des entreprises est régi par un protocole particulier, le "Conservation Verification Protocol". Ceci est délicat, puisque les politiques d'économie d'énergie ou d'utilisation de sources renouvelables d'énergie ont des résultats et des impacts sur le long-terme. Le protocole de vérification utilise des techniques statistiques, avec des intervalles de confiance pour les résultats à venir.

- *Participants* : Le Clean Air Act ne concerne que les centrales électriques. Celles-ci sont obligées de suivre les directives prévues par la loi. Toutefois, il existe un programme "volontaire", appelé "Opt-in Program" (section 410 de l'amendement de 1990 du Clean Air Act). Ainsi, d'autres sources d'émission de SO_2 peuvent choisir de suivre ces directives. Peuvent être concernées toutes les entreprises émettant du SO_2 mais ne figurant pas dans la liste de entreprises contraintes de respecter ces directives. Pour faire partie de ce programme, une entreprise doit en faire la demande auprès de l'E.P.A.. L'autorisation est valable 5 ans. Une fois acceptée, l'entreprise reçoit une dotation en crédits calculée sur la base de sa consommation d'énergie entre 1985 et 1987 (période de référence) et la quantité de SO_2 rejetée pendant une certaine période. Plusieurs clauses, très complexes, se greffent à ce système pouvant paraître simple en apparence. L'entreprise peut se retirer du programme, avant son expiration, sous certaines conditions : elle doit notamment pouvoir présenter un nombre de crédits suffisant pour couvrir ses émissions.

De façon plus marginale, chacun d'entre nous peut acquérir des crédits d'émission par l'intermédiaire d'un "groupe environnemental" : cette organisation achète des crédits à l'aide d'un "Clean Air Certificate". Elle ne les utilise pas mais permet ainsi de réduire le nombre de crédits accessibles aux entreprises et, en ce sens, abaisse le niveau d'émission toléré.

Fonctionnement du marché OTC Les crédits d'émission peuvent être vendus s'ils ne sont pas exploités ou achetés si l'entreprise prévoit de dépasser son quota. La plupart des transactions de crédits se font de gré à gré. Les crédits peuvent s'échanger directement, comme c'est le cas pour la plupart des grandes compagnies électriques (Southern Company, American Electric Power, Tennessee Valley Authority...), mais peuvent parfois nécessiter la présence de courtiers (Natsource, Enron, Cantor-Fitzgerald EBS....), qui interviennent pour environ deux tiers des transactions.

Cela dit, de nouveaux acteurs, tels que le courtier Enron, ont créé un site internet de "trading on-line" en crédits SO_2 . Ces initiatives permettent d'augmenter la liquidité du marché et d'attirer de petits producteurs d'électricité.

- *Rôle du C.B.O.T.* (Chicago Board Of Trade): Le C.B.O.T. joue également un rôle important pour les crédits d'émission: il est en effet chargé, par l'E.P.A. d'après l'amendement de 1990 du Clean Air Act (Title IV du Clean Air Act Amendments ou C.A.A.A.), d'organiser une fois par an une gigantesque vente aux enchères de ces crédits. L'E.P.A. met environ 2,8% des crédits d'émission en réserve pour cette occasion. Cela permet "d'asseoir" le marché en proposant un prix public, transparent, de référence, un prix "de marché", même si on estime que seulement 1,5% des transactions annuelles s'effectue à ce moment-là. Pour cela, l'E.P.A. constitue une réserve de crédits dédiés à cette vente aux enchères. Cela permet également un accès garanti au marché des crédits pour tous, y compris de petits producteurs.

- *Produits proposés*: Deux types de produits sont proposés: des *crédits spot*, devant être utilisés pour couvrir les émissions de l'année en cours, afin de régulariser sa situation et des *crédits forward*, pouvant être utilisés pendant 7 années à partir de la date de transaction, pour l'année suivant l'année en cours.

Pour la première enchère, le 29 mars 1993 (2 ans avant l'entrée en vigueur de la Phase I du clean Air Act), environ 50.000 crédits spot et 100.000 crédits forward sont proposés. Aujourd'hui on estime qu'environ 250.000 contrats sont échangés chaque année. Ce chiffre est faible mais pour beaucoup, la structure très rigide de l'enchère en est responsable: en effet, les offres d'achat et de vente sont faites a priori sans possibilité de les réajuster en cours d'enchère!

La majorité des transactions s'effectue donc sur le marché OTC, dont la taille est estimée à environ 20 millions de permis échangés.

Le nombre de transactions et de crédits échangés (y compris les échanges entre différentes centrales d'une même entreprise) a évolué de la façon suivante depuis 1994:

année	1994	1995	1996	1997	1998	1999
nombre de transactions	215	613	1074	1429	1584	2832
nombre de crédits (en millions)	9,2	16,7	8,2	15,2	13,5	18,7

- *Fonctionnement de l'enchère*: Tout se passe avant le déroulement même de l'enchère (3 jours ouvrés au plus tard avant l'enchère): les acheteurs potentiels envoient au C.B.O.T., sous pli scellé, les quantités qu'ils souhaitent acheter et les prix auxquels ils sont prêts à acquérir ces quantités avant que l'enchère ne commence. ils ne peuvent plus modifier leurs offres.

Les crédits vendus lors de ces enchères le sont à la plus haute offre, tant qu'il reste des crédits à vendre. L'E.P.A. ne peut exiger un prix minimum acceptable et les acheteurs ne sont pas limités ni sur les quantités qu'ils souhaitent, ni sur les prix qu'ils proposent. Pour l'enchère de 2001, les entreprises, ayant un compte répertorié sur l'A.T.S., vont pouvoir être également vendeurs de leurs crédits. L'E.P.A. doit pour cela recevoir un formulaire d'offre de crédits avant le 5 mars 2001. Ces entreprises ne peuvent pas imposer un prix minimum de vente pour leurs crédits.

Le C.B.O.T. ne prend aucune commission pour ses services. Toutefois, l'E.P.A. autorise les membres de la chambre de compensation (B.O.T.C.C.) à traiter pour leurs comptes personnels ou pour le compte de clients sans avoir recours à l'E.P.A. (par l'intermédiaire d'une lettre de crédit ou d'un chèque certifié).

Le C.B.O.T. publie les résultats des enchères 3 jours ouvrés après. Les transactions nécessitent une lettre de crédit (E.P.A. Letter of Credit Form) ou un chèque certifié (Certified Check) si l'acheteur passe par l'E.P.A. ou un formulaire de remboursement envers les membres du C.B.O.T. (B.O.T.C.C. Clearing Member Reimbursement Agreement Form) si l'acheteur passe par le B.O.T.C.C..

Prix des crédits d'émission

- *Prix des transactions* : Le prix des crédits d'émission, auquel on se réfère, est bien sûr le seul prix non confidentiel, i.e. le prix annuel résultant de la vente aux enchères. Toutefois, les grands courtiers, comme Cantor Fitzgerald et Fieldston, proposent également des quotations mensuelles, mais uniquement à vocation informative (on ne sait pas si les transaction se font réellement à ce cours-là...). On peut toutefois remarquer que leurs publications ne sont pas très différentes.

- *Prix des enchères* : Dès lors, la vente annuelle aux enchères a permis de mettre fin à toutes les rumeurs les plus folles concernant les prix des crédits : certains parlaient d'une tonne de SO_2 valant plus de 1000 dollars ! Or, en 1993, les crédits spot se sont échangés à 157 dollars et les crédits forward à 136 dollars (on peut noter un déport entre le prix forward et le prix spot). En 1999, les crédits spot se sont échangés à 126 dollars. En règle générale, les prix ont tourné autour de 137 dollars en moyenne, et ont varié de plus ou moins 45%.

Pour les enchères de mars 2000, les offres ont été les suivantes :

- Offres pour les contrats spot :

Prix minimum offert	Quantité	Total cumulé
≤ \$126, 21	1677	1677
≤ \$126	1711	3388
\$134, 95	1000	4388
\$148, 44	1000	5388

- Offres pour les contrats forward :

Prix minimum offert	Quantité	Total cumulé
\$105, 92	2500	2500

Les prix des crédits se sont avérés très inférieurs aux prévisions. Ceci est dû à plusieurs facteurs, dont le faible coût de transport ferroviaire des charbons peu sulfureux, les régulations fédérales ou encore les bonus en dotations (voir l'article de D. Bohi et D. Burtraw [9]).

Contrôle et sanction

- *Contrôle des émissions*: Ce système apparemment très libéral repose en fait sur un encadrement extrêmement strict. L'E.P.A. vérifie scrupuleusement les émissions des entreprises concernées (notamment contrôles physiques réguliers). Pour cela, les entreprises ont dû acquérir, à leurs frais, des systèmes de mesure de pollution très perfectionnés (appelés Continuous Emission Monitoring, C.E.M.) afin de faciliter la tâche de l'E.P.A. et d'harmoniser les relevés d'émissions. Le coût d'un tel investissement a été estimé à environ 200 millions de dollars par an pour l'industrie électrique. De plus, chaque centrale doit nommer un responsable du contrôle et de la gestion des émissions ("Authorized account representative"), qui est l'interlocuteur privilégié de l'entreprise avec l'E.P.A.. Chaque trimestre, les entreprises concernées par le programme du Clean Air Act, doivent envoyer un fichier électronique à l'E.P.A.: ce fichier doit contenir des informations précises sur les émissions de SO_2 (et de NO_x) heure par heure, les quantités et la nature des inputs énergétiques utilisés, les paramètres opérationnels, la configuration des usines et l'assurance de bon fonctionnement du C.E.M.. De plus, un résumé des émissions et des inputs doit être également fourni. Si un problème (de lecture, notamment) est détecté par l'E.P.A., l'entreprise est sommée de le résoudre et de réenvoyer le fichier. Si des incohérences sont visibles dans les données transmises, l'E.P.A. ne prend en considération que les données les plus défavorables à l'entreprise. 30 jours après la date de réception des fichiers par l'E.P.A. (jour obligatoire: 30 mai, 29 août, 29 novembre et 2 mars), les données ("Summary Emissions Reports") sont publiées sur le site internet du Clean Air Markets Division.

2500 entreprises sont concernées par cette réglementation: 8 centrales n'ont pas installé les instruments de mesure de pollution, 4 ne soumettent pas les rapports annuels et une seule n'a pas nommé un représentant. Ces chiffres sont révélateurs du succès de ce programme et l'E.P.A. entreprend actuellement des actions contre ces quelques violations du règlement.

- *Contrôle des transferts de crédits*: D'autre part, chaque transfert de crédit doit être notifié à l'E.P.A., qui répertorie toutes les transactions. Pour cela, l'E.P.A. dispose d'un système électronique, appelé "Allowance Tracking System" (A.T.S.): chaque transaction ainsi que les comptes des différentes entreprises y sont répertoriés. Toutes les transactions sont enregistrées au maximum 5 jours ouvrés après leur déclaration par le représentant de l'entreprise.

- *Sanction et réconciliation annuelle*: Chaque année, le 1 mars, l'E.P.A. vérifie la quantité de SO_2 émis et la compare à la quantité de crédits dont dispose l'entreprise. Chaque centrale bénéficie d'une période de "grâce" de 60 jours durant lesquels elle peut régulariser sa situation, si elle a dépassé ses limites. Elle peut pour cela acheter des crédits d'émission. Ce processus est appelé "réconciliation annuelle". Si, malgré tout, les quotas ne sont pas respectés, ceci est lourdement sanctionné: l'amende à payer s'élève à 2500 dollars par tonne de SO_2 , émise sans crédit.

Depuis la création de ce programme, toutes les entreprises concernées détiennent suffisamment de crédits pour couvrir leurs émissions. Pour l'année 1999, les crédits d'émission présents sur le marché sont répartis de la façon suivante :

Type d'allocation de crédits	Nombre de crédits
Allocations initiales	5.550.820
Extension Phase I	171.710
Centrales de substitution	909.455
Enchères	150.000
Centrales de compensation	85.138
Opt-in	97.392
Petits producteurs de pétrole	25.617
Total d'allocations pour 1999	6.990.132
Allocations de 1998 stockées	9.627.980
Allocations disponibles en 1999	16.618.112

Premier bilan

Depuis le mois d'avril 1994 jusqu'au troisième trimestre 2000, plus de 11600 transferts de crédits d'émission (soit environ 104 millions de crédits!) ont été signalés à l'E.P.A. par l'intermédiaire de l'A.T.S..

Echanges et organisations Environ 61% de ces crédits (soit près de 53 millions de crédits) ont été échangés à l'intérieur d'une même organisation alors que les 39% restants l'ont été entre différentes compagnies.

En ce qui concerne les transferts au sein d'une même organisation, 8% sont des transferts effectifs alors qu'il s'agit pour 92% de réallocations.

En ce qui concerne les transferts entre compagnies, 57% représentent des transferts entre centrales électriques et courtiers, 23% entre compagnies électriques et 6% entre centrales électriques et compagnies pétrolières.

Echanges et E.P.A. Les échanges de crédits peuvent être simplement signalés à l'E.P.A. par l'agent responsable au sein de chaque entreprise ou impliquer véritablement l'E.P.A. : dans ce dernier cas, il s'agit de transferts des réserves de l'E.P.A. vers les organisations (enchères, extension de crédits de la Phase I ou crédits de substitution). Pour la période cumulée - avril 1994 / septembre 2000 -, les transferts privés représentent 68% des échanges et les transferts impliquant directement l'E.P.A. 32%.

Aujourd'hui un premier bilan de ce marché peut être fait : il est globalement très positif. En effet, en dix ans, les émissions de SO_2 ont été réduites de moitié et ne dépassent pas 10 millions de tonnes par an.

Toutefois, tout ne repose pas sur des échanges optimaux de crédits : en effet, face à la contrainte réglementaire, les entreprises ont différents choix possibles. Elles peuvent investir dans de nouvelles techniques de production moins polluantes, se diversifier dans

des énergies renouvelables, acheter l'électricité auprès d'un tiers ou acheter des crédits d'émission. Le succès de l'application du Clean Air Act tient vraisemblablement à la palette de solutions possibles qui est offerte aux entreprises: les crédits d'émission ne sont qu'un moyen parmi d'autres.

Chapitre 2

Structure optimale d'un "weather bond"

Cette partie fait l'objet d'un article co-écrit avec Nicole El Karoui, "Reinsuring climatic risk using optimally designed weather bonds", accepté (après révision) au journal "Geneva Papers - Risk and Insurance Theory". Pour cette raison, son contenu n'a pas été modifié et il existe certainement des redites, dans l'introduction notamment. Il a seulement été traduit en français pour assurer la cohérence globale de ce travail de thèse.

2.1 Introduction

Comme nous l'avons décrit dans le premier chapitre de cette thèse, depuis 1997, les Etats-Unis, et plus récemment le reste du monde, ont vu apparaître une nouvelle classe d'actifs financiers : les "weather derivatives". Ces contrats permettent aux entreprises de gérer le risque climatique, qui perturbe leurs activités et peut entraîner une variabilité de leurs bénéfices et de leurs coûts.

Ces nouveaux instruments, "hautement" illiquides, ont une structure financière qui est relativement standard. Mais ils dépendent de l'évolution de sous-jacents très particuliers, puisqu'il s'agit d'événements climatiques. Ces actifs ne sont ni traités sur les marchés (ou en tous les cas, pas de façon liquide, comme nous l'avons souligné dans le premier chapitre), ni même répliquables.... Par conséquent, le point de vue risque-neutre, classiquement adopté en finance, n'est plus valable. Le marché des dérivés climatiques est un marché parfaitement incomplet voire "acomplet" : seul les actifs dérivés sont échangés !

Une autre particularité de ces instruments est le problème lié à leur classification : les "weather derivatives" sont des produits financiers par leur structure mais des produits d'assurance par leur logique. Cette difficulté de classification est un élément commun de tout le domaine de l'A.R.T. ("Alternative Risk Transfer") i.e. de la titrisation des risques traditionnels de l'assurance : en effet, comme D. Farny l'écrit dans [35], il n'y a pas de distinction claire et évidente entre l'assurance et la finance lorsque ces nouveaux types de transactions sont considérés. Cette ambiguïté est visible tout particulièrement pour

l'obligation climatique : il s'agit d'une obligation classique même si ses coupons dépendent de l'occurrence d'un événement climatique. C'est, en ce sens, un produit financier. Mais, ses origines - la demande d'une entreprise pour une protection contre un risque climatique, et la diversification de ce risque sur de petits porteurs d'obligations - peut nous faire penser à une police d'assurance ou à un contrat d'assistance mutuelle (cf. L. Gallix [40]).

Notons que l'objectif de cette partie n'est ni de déterminer une dynamique pour les données météorologiques, ni de proposer un modèle de prédiction. Une étude plus précise des données sera faite dans le chapitre suivant.

Pour toutes ces raisons, ce chapitre se concentre sur l'étude précise d'une obligation climatique, i.e. sur la détermination jointe de son niveau de coupon et de son prix. Cette analyse particulière pourra nous aider à mieux définir les caractéristiques et les enjeux de ce nouveau marché. De plus, les questions relatives aux obligations climatiques sont loin d'être évidentes. En effet, les deux seules tentatives d'émission¹ ont échouées : l'émission de Enron a été annulée et celle de Koch a été réduite de moitié, faute d'acheteurs. Ces difficultés sont d'autant plus surprenantes que les "cat-bonds", dont la logique est très proche (à savoir titrisation d'un risque non-financier) ont un succès relatif, comme nous l'avons souligné dans le premier chapitre.

De plus, une analyse jointe, coupon-prix, pour une obligation (même standard) semble originale : en effet, les obligations étudiées dans la littérature sont souvent des obligations zéro-coupon (comme F. Longstaff et E. Schwartz dans [62] ou E. Briys dans [10] et [11]) ou leur niveau de coupon permet d'avoir une émission au pair. Récemment, K. Sankaran a proposé un modèle pour l'évaluation d'une obligation climatique ([86]). Toutefois, dans cet article, les niveaux de coupons sont choisis a priori et l'auteur se concentre plus sur un modèle pour les données de température sous-jacentes. Le prix de l'obligation est obtenu par la méthode classique de la valeur actuelle nette.

Mais, le rôle des coupons de l'obligation climatique n'est pas si simple : ceux-ci participent pleinement à la structure de la transaction globale et ont de ce fait leur existence propre. Ainsi, la caractérisation de la structure optimale de l'obligation, et non uniquement la simple détermination de son prix, est la question clé de cette étude.

Par conséquent, après avoir spécifié les notations et les hypothèses utilisées dans ce papier, nous proposons une modélisation de la transaction globale, impliquant la définition d'un critère de choix pour les différents agents : l'entreprise, la banque et l'investisseur. La résolution du problème d'optimisation lié à la transaction globale nous conduit à l'étude de la relation d'assurance entre la firme et la banque et à celle de l'émission de l'obligation. La prise en considération des origines de l'émission de l'obligation nous permet de mieux appréhender les spécificités des coupons. Alors, la structure optimale de l'émission, i.e. la fonction de prix de l'obligation et le montant optimal remboursé si un événement survient, sont finalement obtenus.

¹Elles ont eu lieu à l'automne 1999.

2.2 Présentation générale, hypothèses et notations

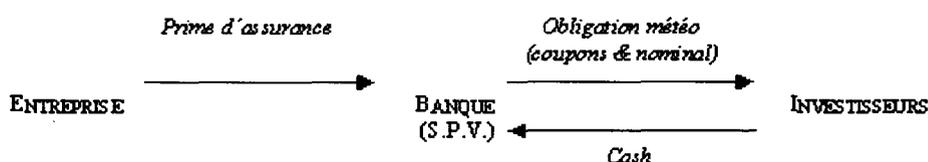
2.2.1 Description de la transaction

Cette étude est consacrée à l'analyse d'une obligation climatique. Le nominal est supposé non-risqué alors que le paiement des coupons dépend de l'occurrence d'un événement climatique donné. Plus précisément, le montant du coupon versé diminue lorsqu'un événement survient. Dans ce cas, les détenteurs de l'obligation reçoivent moins que si rien n'était arrivé.

Toutefois, considérer une telle obligation sans prendre en considération les origines mêmes de son émission est une attitude myope. En effet, les caractéristiques de cette obligations (coupons, montant remboursé lorsqu'un événement survient, prix) ne peuvent pas être choisis de façon arbitraire. Ils doivent jouer pleinement leur rôle de diversification de risque pour l'émetteur : tout commence lorsqu'une entreprise doit faire face à un risque climatique. Pour se protéger contre les effets néfastes du climat sur ses activités, celle-ci fait appel à une banque. Contre le paiement d'une prime, cette dernière s'engage à verser une indemnité à la firme si des pertes surviennent. Alors, la banque émet une obligation climatique, de façon à diversifier ce nouveau risque sur de petits porteurs. Pour cette raison, l'émission de l'obligation climatique fait partie d'une transaction beaucoup plus globale et toute l'histoire doit être prise en considération pour l'étude et la compréhension de ce produit.

En résumé, cette transaction a la structure suivante :

- Si aucun événement ne survient durant la vie de l'obligation, la structure des flux est la suivante :



où *S.P.V.* signifie "Special Purpose Vehicle". Il s'agit d'une entité légale, indépendante des autres activités de la banque.

- Si, au contraire, un événement climatique survient (une possibilité par an, non-exclusive), deux flux supplémentaires apparaissent :



La transaction étudiée ici fait intervenir trois agents : une firme, une banque et un investisseur. Une telle structure est relativement classique lorsqu'il est question de la titrisation d'un risque non-financier. Une relation directe entre l'entreprise et l'investisseur est généralement impensable puisque la firme n'a pas les mêmes qualifications qu'une banque, notamment en matière de transfert de risque.

Par cette étude, nous souhaitons caractériser la structure de l'obligation climatique, en nous concentrant en particulier sur les coupons. En effet, contrairement à des obligations plus classiques, le coupon joue un rôle à part entière ici : sa fonction ne se résume pas à la structuration des qualités d'une émission (émission au pair par exemple) mais à celle de la transaction globale. Il joue un rôle clé dans le programme d'indemnisation de la banque. Fixer son niveau de façon arbitraire peut être une opération périlleuse, puisque cela peut être inadéquate par rapport à l'indemnisation. Le coupon doit être ainsi déterminé de façon à ce que la transaction globale ne soit pas défavorable à la banque.

La présence des trois acteurs (l'entreprise, la banque et l'investisseur) joue un rôle clé dans la caractérisation des différents paramètres de la transaction globale, et tout particulièrement de l'émission de l'obligation, comme cela sera présenté dans les sections suivantes.

2.2.2 Hypothèses et notations

La période de temps considérée ici est de n années, correspondant à la maturité de l'obligation. Chaque année est indexée par i , $i \in \{0; 1; \dots; n\}$ et $\beta_{i,n}$ représente le facteur de capitalisation de l'année i vers l'année n . Tout particulièrement :

$$\beta_{n,n} = 1$$

Dans la suite, nous utiliserons plus simplement la notation β_i (au lieu de $\beta_{i,n}$) puisque tous les flux sont capitalisés jusqu'à l'année n , la maturité de l'obligation. Les flux ne sont pas réinvestis.

Le risque inhérent à la transaction, i.e. l'occurrence d'un événement climatique, est dans cette étude la seule source de risque considérée. Celui-ci est modélisé par une famille de variables aléatoires : ε_i représente l'événement aléatoire de l'année i ($i \neq 0$). Un événement survient si $\mathbf{1}_{\varepsilon_i} = 1$. Dans la suite, ε_i désigne indifféremment la variable aléatoire et sa variable d'occurrence associée. Cette dernière est une variable de Bernoulli, puisqu'elle prend ses valeurs dans $\{0; 1\}$. Nous ne faisons aucune hypothèse ni sur l'indépendance des variables ε_i ni sur leur paramètre respectif p_i sous la probabilité prior \mathbb{P} . Dans la suite, \mathbb{E} désigne l'espérance sous la probabilité \mathbb{P} . L'objectif n'est pas ici de fournir une étude précise des données climatiques et de leur distribution. Pour cette raison, p_i et la corrélation entre les différentes variables sont supposés être connus et nous ne nous attarderons pas sur leur détermination. Toutefois, nous supposerons parfois que les variables sont indépendantes et ont le même paramètre $p = \mathbb{P}(\varepsilon_i)$ sous la probabilité prior \mathbb{P} . Cette

hypothèse nous permet de dériver des formules explicites. Ceci n'a pas d'impact sur la structure des résultats, mais seulement sur leur formulation.

Trois agents sont considérés ici. Ils sont reliés par la structure financière des flux futurs : en effet, chacun d'entre eux ont les engagements financiers suivants :

Une firme, notée agent F , fait face à un risque climatique. Son risque peut se décomposer en différentes pertes réparties sur plusieurs années. Ce risque de perte est caractérisé par la variable aléatoire Θ , qui peut être définie, par exemple, comme :

$$\Theta = M \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\varepsilon_i} \beta_i = M \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \beta_i \quad (2.1)$$

où M est le montant des pertes de l'année i ($i \neq 0$), si un événement ε_i survient pendant cette année particulière. M est supposé constant. Dans ce cadre d'analyse, Θ peut prendre un nombre fini de valeurs (en effet, elle ne peut prendre que 2^n valeurs possibles). Comme cela n'est pas un facteur déterminant pour les résultats de ce papier, la notation générale Θ sera conservée autant que possible. La firme fait appel à une banque, désignée par agent B , pour se protéger contre ce risque. Elle paie un montant, π , en année 0, pour être protégé contre ce risque de pertes. En échange, elle reçoit en n une indemnité $J(\theta)$ si la perte $\Theta = \theta$ survient. Comme une indemnité d'assurance ne peut être négative et ne peut excéder le montant de la perte, la fonction J doit satisfaire la contrainte suivante :

$$0 \leq J(\theta) \leq \theta \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(\Theta) \quad (2.2)$$

où $\mathcal{D}(\Theta)$ est le support de la loi de Θ i.e. dans le cas discret, l'ensemble de toutes les valeurs possibles prises par Θ , avec une probabilité non-nulle. Dans la suite, l'ensemble de définition de $J(\Theta)$ est noté $\mathcal{D}(\Theta)$.

De plus, cette contrainte peut également être écrite en termes de la variable aléatoire Θ comme :

$$0 \leq J(\Theta) \leq \Theta \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

Remarque sur l'indemnité : Dans cet article, le risque de pertes est supposé être parfaitement couvert par l'indemnité. En effet, la même source de risque Θ intervient à la fois dans l'exposition de l'entreprise et dans l'indemnité payée par la banque. Une telle hypothèse ne prend pas en compte un éventuel risque de base, qui peut subsister même après s'être assuré. Cet aspect particulier sera précisé par la suite.

Certains auteurs ont considéré l'impact du "basis risk" et du "moral hazard" sur la stratégie optimale d'assurance (cf., par exemple, N. Doherty et O. Mahul [28]).

Ainsi, les flux relatifs à cette transaction et capitalisés depuis le moment où ils surviennent jusqu'à l'année n , peuvent être écrits pour chacun des deux agents F et B de la façon suivante :

$$\text{Pour l'agent } F, \quad -\pi\beta_0 - \Theta + J(\Theta) \quad (2.3)$$

$$\text{Pour l'agent } B, \quad \pi\beta_0 - J(\Theta) \quad (2.4)$$

Dans cette partie de la transaction, l'agent B se concentre sur sa relation avec la firme. Il ne sait pas encore comment il va gérer ce risque.

Puis, afin de diversifier son risque, l'agent B décide d'émettre une obligation climatique. L'investisseur, achetant cette obligation, est noté *agent I*. Il paie le prix de l'obligation Φ à l'agent B en année 0. En échange, il reçoit chaque année i , un coupon s et, en année n , le nominal N . Comme les coupons sont sujet au risque climatique, l'agent I doit payer un montant constant, α , à l'agent B , lorsqu'un événement survient. Ce montant est considéré comme une entité en soi et n'est pas directement relié au coupon s . Ce point particulier sera discuté par la suite.

Ainsi, les flux reliés à cette transaction et capitalisés depuis le moment où ils surviennent et jusqu'à l'année n , peuvent être écrits pour chacun des deux agents B et I de la façon suivante :

$$\text{Pour agent } B, \quad \pi\beta_0 - J(\Theta) + \Phi\beta_0 - s \sum_{i=1}^n \beta_i - N + \frac{\alpha}{M}\Theta \quad (2.5)$$

$$\text{Pour agent } I, \quad -\Phi\beta_0 + s \sum_{i=1}^n \beta_i + N - \frac{\alpha}{M}\Theta \quad (2.6)$$

Par souci de simplicité, Λ représente les flux non-aléatoires (ou le montant de "cash") reçus par l'investisseur et capitalisés jusqu'à l'année n :

$$\begin{aligned} \text{Pour l'agent } B, \quad & \pi\beta_0 - J(\Theta) - \Lambda + \frac{\alpha}{M}\Theta \\ \text{Pour l'agent } I, \quad & \Lambda - \frac{\alpha}{M}\Theta \end{aligned}$$

Cette notation est complètement équivalente à la première puisque l'expression :

$$\Lambda = -\Phi\beta_0 + s \sum_{i=1}^n \beta_i + N$$

intervient seulement dans la représentation de cette partie transaction. Aucun rôle particulier n'est joué par s , N ou Φ , pris séparément. Ce point de vue sera développé par la suite.

Dans cette deuxième partie de la transaction, l'agent B a un point de vue plus global : il prend en compte sa relation avec l'agent F mais aussi celle avec l'agent I .

2.3 Modélisation du critère de choix pour les caractéristiques de la transaction globale

Comme souligné précédemment, l'émission de l'obligation peut être considérée comme élément d'une transaction plus globale. L'analyse et l'étude de cette transaction nous

donne une clé pour une meilleure compréhension de l'émission et pour son évaluation. De plus, cette transaction implique trois agents, jouant des rôles différents à différentes étapes. Comme décrit ci-dessus, elle peut être divisée en deux sous transactions plus petites : l'agent F est à l'origine de la première (et, pour cette raison, de la transaction plus globale). Il fait appel à l'agent B pour être protégé contre un risque de pertes. La seconde transaction succède à la première : en effet, l'agent B transfère le risque, qu'il supporte désormais, sur l'agent I , en émettant une obligation climatique. Ainsi, le problème global de caractérisation de la transaction est naturellement divisé en deux sous problèmes, chacun représentant une transaction plus petite.

De plus, dans cette section, la multiplicité des rôles joués par l'agent B est tout particulièrement prise en considération : il n'a pas uniquement la fonction classique de banquier envers l'agent I mais joue également un rôle d'assureur auprès de l'agent F . Cette "schizophrénie" souligne un des traits principaux des "weather derivatives", puisque, comme cela a été souligné dans le chapitre 1, ils se situent à mi-chemin entre finance et assurance.

2.3.1 Aversion pour le risque et critère d'utilité

Les trois agents (B , F et I) sont supposés averses au risque. Une telle hypothèse peut se justifier par la spécificité du risque considéré ici : comme Θ est la seule source de risque prise en compte ici, elle n'est pas diversifiable. L'attitude des différents agents envers le risque est modélisée par une fonction d'utilité. Une telle fonction est supposée représenter le niveau de satisfaction atteint par un agent économique lors d'une situation donnée. Celui-ci dépend du niveau d'aversion pour le risque. Tous les agents sont classiquement supposés rationnels. D'où, dans un tel cadre, certaines conditions sur les fonctions d'utilités sont requises : elles doivent être continues, croissantes strictement et concaves. De plus, les agents souhaitent en général maximiser l'utilité qu'ils peuvent espérer d'une situation future (et incertaine). Un critère de choix pour un agent donné peut ainsi être la maximisation de son utilité espérée.

Par souci de simplicité, comme aucune contrainte particulière n'est imposée sur les différents flux capitalisés, les fonctions d'utilité des agents B , F et I , notées respectivement U_B , U_F et U_I , sont supposées être des fonctions d'utilité exponentielle². De ce fait, pour toute variable aléatoire réelle X , pouvant être perçue comme la richesse terminale d'un agent donné (B , F ou I) :

$$\begin{aligned} U_B(X) &= -\exp(-\gamma_B X) \\ U_F(X) &= -\exp(-\gamma_F X) \\ U_I(X) &= -\exp(-\gamma_I X) \end{aligned}$$

où γ_B (resp. γ_F et γ_I) représente le coefficient d'aversion pour le risque de l'agent B (resp. l'agent F et l'agent I). Ces trois paramètres doivent être positifs. Notons que, dans cette étude, l'agent B est supposé avoir la même aversion pour le risque dans les

²En effet, les fonctions d'utilité exponentielle ont la particularité d'être définie sur \mathbb{R} .

deux parties de la transaction. En d'autres termes, la banque a la même fonction d'utilité pour toute la transaction. Elle est considérée comme une entité et non pas comme deux parties différentes, chacune consacrée à un rôle particulier. Cette étude peut être étendue à un cadre similaire où la banque aurait deux niveaux d'aversion pour le risque suivant sa fonction d'assureur ou d'émetteur d'obligation. Une telle situation illustrerait le fait que deux départements distincts de la banque pourraient être impliqués dans cette transaction globale.

Ces paramètres d'aversion représentent la sensibilité des agents envers le risque et ont un impact sur le critère d'utilité lui-même. Ils sont également les coefficients d'aversion absolue pour le risque (les fonctions d'utilité exponentielle appartiennent à la famille des utilités C.A.R.A. - Constant Absolute Risk Aversion). De plus, le choix particulier des fonctions d'utilité de type exponentielle permet de jouer avec ce critère selon les valeurs prises par les coefficients d'aversion pour le risque: d'une part, il est bien connu que, lorsque γ est suffisamment petit, maximiser l'utilité espérée est équivalent à un critère moyenne-variance. D'autre part, lorsque γ est grand, $\mathbb{E}[-\exp(-\gamma X)]$ est d'autant plus important que X n'est pas trop négatif. L'attitude de l'agent n'est pas symétrique par rapport à des gains ou pertes potentielles. Cette attitude semble logique: l'agent ne veut pas supporter des pertes trop importantes.

De façon à simplifier l'étude, seule la transaction actuelle est prise en compte. Ceci est équivalent à supposer que les richesses initiales des différents agents sont nulles. D'autre part, les coûts de transaction sont supposés nuls. Ces hypothèses peuvent facilement être soulevées sans modifier la structure globale des résultats. Elle nous permettent d'obtenir des expressions plus simples pour les différents paramètres de la transaction.

2.3.2 Caractérisation du contrat d'assurance optimal

Cette sous-section se concentre sur le problème de la relation entre la firme, agent F , et la banque, agent B . Celle-ci peut facilement être considérée comme une relation d'assurance puisque l'entreprise fait appel à la banque pour être protégée contre un risque auquel elle doit faire face. En effet, afin d'être protégée, elle paie un montant, π , et reçoit en échange une indemnité $J(\theta)$, si la perte $\Theta = \theta$ survient. Afin de modéliser la relation entre ces deux agents, nous utilisons une méthode classique d'assurance, comme celle de A. Raviv ([79]), qui est décrite ci-dessous:

Ainsi, afin de modéliser cette relation, les hypothèses classiques d'un assureur passif et d'un assuré maximisant, sous certaines contraintes, l'utilité espérée de sa richesse terminale (donnée par (2.3) dans la présentation générale de cet article) sont faites. De ce fait, l'assuré détermine la structure de la police, qui est optimal pour lui, tandis que l'assureur ne peut que refuser ou accepter ce nouveau contrat.

Ici, l'agent B est donc supposé passif et l'agent F est supposé avoir le programme d'optimisation suivant, en utilisant les notations précédentes:

$$\max_{\pi, J} \mathbb{E}[-\exp[-\gamma_F (J(\Theta) - \Theta - \pi\beta_0)]] \quad (\mathcal{P})$$

$$\begin{aligned} \text{s.c.} \quad \mathbb{E}[-\exp[-\gamma_B(\pi\beta_0 - J(\Theta))]] &\geq -1 \\ 0 &\leq J(\Theta) \leq \Theta \quad \mathbb{P} \text{ p.s.} \end{aligned}$$

où -1 correspond au niveau d'utilité de l'agent B si celui-ci ne fait rien et s.c. signifie "sous les contraintes". En particulier, la contrainte relative à $J(\cdot)$ a été motivée précédemment (cf. la contrainte (2.2) dans la présentation générale de cet article).

L'agent F utilise le critère de décision décrit précédemment, tandis que l'agent B compare uniquement l'utilité espérée de sa richesse terminale pour deux situations différentes : "assurer" l'agent F ou ne rien faire (cf. l'équation (2.4) dans la présentation générale de cet article).

La résolution d'un tel programme fera l'objet de la section suivante.

Remarque sur le programme \mathcal{P} : Le programme d'optimisation (\mathcal{P}) est standard dans la littérature en assurance. En effet, la première partie de la transaction est un cas particulier du résultat de Raviv, lorsqu'il n'y a pas de coût de transaction et que les fonctions d'utilité sont de type C.A.R.A.. Toutefois, comme cette méthodologie est utile dans l'analyse de la seconde partie de la transaction, nous présentons ici une caractérisation complète de l'indemnisation optimale.

Remarque sur le risque de base: Les résultats de cet article peuvent être étendus à la situation où il existe un risque de base entre le risque (individuel) supporté par la firme et le risque (global) couvert par le contrat d'assurance vendu par la banque. Aussi, si $\hat{\Theta}$ désigne l'exposition de l'agent F et Θ le risque couvert par l'indemnité payée par l'agent B , avec $\hat{\Theta} \neq \Theta$ \mathbb{P} p.s., le programme d'optimisation devient :

$$\begin{aligned} \max_{\pi, J} \mathbb{E} \left[-\exp \left\{ -\gamma_F \left(J(\Theta) - \hat{\Theta} - \pi\beta_0 \right) \right\} \right] \\ \text{s.c.} \quad \mathbb{E}[-\exp \{-\gamma_B(\pi\beta_0 - J(\Theta))\}] \geq -1 \\ 0 \leq J(\Theta) \leq \Theta \quad \mathbb{P} \text{ p.s.} \end{aligned}$$

Afin de revenir au cadre d'analyse de ce papier, l'équivalent certain conditionnel (relativement au risque commun Θ) de l'exposition de la firme est introduit :

$$X(\Theta) \triangleq \frac{1}{\gamma_F} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left(\gamma_F \hat{\Theta} \right) / \Theta \right]$$

Alors, résoudre le programme d'optimisation avec un risque de base est équivalent à résoudre le programme (\mathcal{P}), après avoir remplacé l'exposition de l'agent F , $\hat{\Theta}$, par $X(\Theta)$.

2.3.3 Structuration optimale du "weather bond"

Cette sous-section est dédiée à la modélisation de la relation entre la banque, agent B , et l'investisseur, agent I . Comme cela a été décrit dans la partie précédente, l'agent B fait désormais face au risque climatique, Θ , de la firme, du fait du contrat d'assurance. D'où, en émettant une obligation climatique, l'agent B veut transférer son risque vers l'agent I . Ainsi, en échange du prix de l'obligation Φ , payé en année 0, l'investisseur reçoit, de la

banque, un coupon annuel s et un nominal N en année n . Mais les coupons sont risqués : lorsqu'un événement survient, l'agent I s'engage à payer un montant α en n à l'agent B , qui est protégé à son tour.

La structure de l'obligation est déterminée par l'agent B de façon à ce qu'elle soit optimale pour lui, par rapport à son critère d'utilité décrit précédemment. Les variables d'optimisation, i.e. les variables sur lesquelles l'agent B a une relative liberté de choix, sont directement reliées à la structure du contrat financier : le coupon s , le montant α qui est remboursé lorsqu'un événement survient et le prix Φ . Toutefois, l'agent B est contraint par l'existence d'une contrepartie. Il est en effet nécessaire pour que la transaction se fasse que l'agent I ait un certain intérêt à acheter l'obligation. Son niveau d'intérêt est donné par un critère d'utilité et l'investisseur le compare à celui d'un investissement sans risque. L'agent I est dit "passif" puisqu'il ne peut que décider de faire ou de ne pas faire la transaction.

Afin de modéliser la relation entre la banque et l'investisseur, la banque, agent B , est supposé maximiser l'espérance de l'utilité de sa richesse terminale (aléatoire), liée à la transaction globale et donnée par (2.5), sous certaines contraintes. D'autre part, l'investisseur, agent I , compare uniquement l'utilité espérée de sa richesse terminale s'il achète l'obligation avec celle s'il investit dans un placement sans risque (cf. équation 2.6).

Ce programme d'optimisation prend en compte la première partie de la transaction, i.e. la fonction d'indemnité $J(\cdot)$ et la prime π . Comme les deux parties de la transaction sont indépendantes, conditionnellement à l'agent B , le programme d'optimisation suivant est vrai pour tout couple $(J(\cdot), \pi)$, et en particulier pour $(J^*(\cdot), \pi^*)$. Par conséquent, à l'optimum, ces quantités seront logiquement les quantités optimales.

$$\max_{\Phi, \alpha, s} \mathbb{E} \left[-\exp \left\{ -\gamma_B \left(\pi \beta_0 - N - J(\Theta) + \Phi \beta_0 - s \sum_{i=1}^n \beta_i + \frac{\alpha}{M} \Theta \right) \right\} \right] \quad (\bar{\mathcal{P}})$$

s.c.

$$\mathbb{E} \left[-\exp \left\{ -\gamma_I \left(-\Phi \beta_0 + s \sum_{i=1}^n \beta_i + N - \frac{\alpha}{M} \Theta \right) \right\} \right] \geq -1$$

où -1 correspond au niveau d'utilité de l'agent I si celui-ci réalise un investissement sans risque et s.c. signifie "sous la contrainte".

Remarque : Ce programme peut également être réécrit avec la notation simplificatrice Λ comme :

$$\begin{aligned} \max_{\Lambda, \alpha} \mathbb{E} \left[-\exp \left[-\gamma_B \left[\pi \beta_0 - J(\Theta) - \Lambda + \frac{\alpha}{M} \Theta \right] \right] \right] \\ \text{s.c.} \quad \mathbb{E} \left[-\exp \left[-\gamma_I \left(\Lambda - \frac{\alpha}{M} \Theta \right) \right] \right] \geq -1 \end{aligned}$$

Notons que les variables d'optimisation sont dans ce cas α et Λ . Il est en effet équivalent de maximiser relativement à Λ ou par rapport à s et Φ , puisque seule la différence $-\Phi \beta_0 + s \sum_{i=1}^n \beta_i$ joue un rôle dans ce programme. Cette seconde formulation sera préférée par la suite pour simplifier les notations.

Notons que la logique adoptée, dans cet article, pour les investissements financiers n'est pas une logique risque-neutre. Elle est plus proche de celle d'une évaluation par maximisation d'utilité, comme S.D. Hodges et A. Neuberger [46] ou N. El Karoui et R. Rouge [32]. En effet, il n'existe pas de marché sous-jacent, aucun portefeuille complexe, aucune couverture ne sont envisageables. L'investisseur a un point de vue statique, il peut uniquement choisir entre l'achat de l'obligation et le placement sans risque. La logique est plus proche de celle de l'assurance puisque le potentiel de diversification de l'obligation pour l'investisseur n'est pas prise en considération.

La résolution d'un tel programme d'optimisation l'objet de la section suivante. Toutefois, plutôt que de résoudre le programme $(\overline{\mathcal{P}})$ en utilisant les techniques de contrôle variationnel, comme dans la section suivante, il serait équivalent d'introduire directement la contrainte saturée de l'agent I dans la minimisation de l'agent B . Ceci est possible puisque, étant donné une contrainte, un unique Λ est associé à chaque valeur de α . Cette seconde méthode souligne le rôle particulier joué par chacun des deux agents dans la structuration de l'obligation: l'agent I détermine la structure du prix ou de Λ alors que l'agent B structure de façon optimale l'obligation étant donnée la fonction de prix déterminée par l'agent I .

De plus, notons que la prime π et la fonction d'indemnisation $J(\cdot)$ jouent toutes deux un rôle très particulier dans le programme d'optimisation de l'agent B . En effet, la banque détermine la structure optimale de l'obligation, conditionnellement à la connaissance de $(\pi, J(\cdot))$. De ce fait, dans le cadre très particulier des utilités exponentielles, $(\pi, J(\cdot))$ peut définir un changement de probabilités dépendant à la fois de π et de $J(\cdot)$. Cette remarque souligne les extensions possibles de cette étude à des relations plus générales entre la banque et la firme.

2.4 Résolution des programmes d'optimisation

La résolution du problème d'optimisation pour la transaction globale conduit à la résolution de deux sous-problèmes d'optimisation, comme cela a été décrit dans la section précédente. Pour cette raison, la première étape concerne la relation entre la firme et la banque et la seconde l'émission de l'obligation à proprement parler, i.e. la relation entre l'agent B et l'agent I .

2.4.1 Résolution du problème de la relation entre la firme et la banque

Comme cela a été présenté dans la section précédente, le programme d'optimisation lié à la relation entre l'agent F et l'agent B est donné par :

$$\begin{aligned} \min_{\pi, J} \mathbb{E} [\exp [-\gamma_F (J(\Theta) - \Theta - \pi\beta_0)]] & \quad (\mathcal{P}) \\ \text{s.c.} \quad \mathbb{E} [\exp [-\gamma_B (\pi\beta_0 - J(\Theta))]] & \leq 1 \quad (2.7) \end{aligned}$$

$$0 \leq J(\Theta) \leq \Theta \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

Ce programme dépend de deux paramètres différents : π représente le "prix" du contrat d'assurance et J la fonction d'indemnisation, donnant le montant de l'indemnité lorsqu'un événement survient.

Résolution du programme (\mathcal{P})

Afin de résoudre (\mathcal{P}), des techniques de contrôle variationnel sont utilisées, en introduisant un multiplicateur de Lagrange positif λ , qui sera choisi optimalement par la suite. L'utilité modifiée globale associée au programme est notée \widehat{U} et est définie par :

$$\widehat{U}(\Theta, J(\Theta), \pi) = -\exp[-\gamma_F(J(\Theta) - \Theta - \pi\beta_0)] - \lambda \exp[-\gamma_B(\pi\beta_0 - J(\Theta))]$$

Pour résoudre (\mathcal{P}), nous nous attachons tout d'abord à la résolution de ($\widehat{\mathcal{P}}$) défini par :

$$\max_{\pi, J} \mathbb{E} \left[\widehat{U}(\Theta, J(\Theta), \pi) \right] \quad (\widehat{\mathcal{P}})$$

Puis, pour revenir à (\mathcal{P}), la valeur optimale du coefficient λ doit être déterminée, de façon à saturer la contrainte.

Conditions du premier ordre Résoudre ($\widehat{\mathcal{P}}$), dans le cas particulier des utilités exponentielles, conduit aux conditions du premier ordre suivantes à l'optimum ($J^*(\cdot), \pi^*$) : $\forall \theta \in \mathcal{D}(\Theta)$,

- Si $0 < J^*(\theta) < \theta$:

$$\gamma_F \exp[-\gamma_F(J^*(\theta) - \theta - \pi^*\beta_0)] - \lambda \gamma_B \exp[-\gamma_B(\pi^*\beta_0 - J^*(\theta))] = 0 \quad (2.8)$$

- Si $J^*(\theta) = 0$:

$$\gamma_F \exp[\gamma_F(\theta + \pi^*\beta_0)] - \lambda \gamma_B \exp[-\gamma_B(\pi^*\beta_0)] \leq 0 \quad (2.9)$$

- Si $J^*(\theta) = \theta$:

$$\gamma_F \exp[\gamma_F(\pi^*\beta_0)] - \lambda \gamma_B \exp[-\gamma_B(\pi^*\beta_0 - \theta)] \geq 0 \quad (2.10)$$

D'une part, ces conditions sont obtenues pour tout $\theta \in \mathcal{D}(\Theta)$ fixé, en dérivant partiellement \widehat{U} par rapport à $J(\theta)$ et en prenant l'espérance à l'optimum ($J^*(\cdot), \pi^*$). Comme celle-ci doit être nulle, certaines conditions sur le signe apparaissent suivant la valeur de $J^*(\theta)$, pour tout $\theta \in \mathcal{D}(\Theta)$. D'autre part, la dérivée partielle de \widehat{U} par rapport à π est calculée et son espérance est prise à l'optimum ($J^*(\cdot), \pi^*$). Elle doit également être nulle.

La détermination de ces conditions et la preuve de leur caractère suffisant, comme résultats classiques d'optimisation convexe, sont donnés en annexes.

Détermination de deux niveaux seuil Le niveau optimal d'indemnisation $J^*(\theta)$, si le risque de pertes $\Theta = \theta$, $\theta \neq 0$, survient, appartient à l'intervalle $[0, \theta]$, du fait de la contrainte (2.2). Afin de préciser la structure de la compensation, il serait utile de connaître certaines règles sur θ selon que $J^*(\theta) = 0$, $J^*(\theta) = \theta$ ou $J^*(\theta) \in]0, \theta[$ (ainsi, une seule condition du premier ordre serait valide).

Pour cette raison, deux seuils intrinsèques, $\theta^-(\pi^*, \lambda)$ et $\theta^+(\pi^*, \lambda)$, sont introduits. Ils représentent respectivement le niveau de la franchise de la police et le niveau supérieur pour une indemnisation complète, i.e. :

- $\theta^-(\pi^*, \lambda)$ est tel que, si $J^*(\theta) = 0$ alors

$$\gamma_F \exp[\gamma_F(\theta + \pi^* \beta_0)] - \lambda \gamma_B \exp[-\gamma_B(\pi^* \beta_0)]$$

est négatif uniquement si $\theta \leq \theta^-(\pi^*, \lambda)$.

- $\theta^+(\pi^*, \lambda)$ est tel que, si $J^*(\theta) = \theta$ alors

$$\gamma_F \exp[\gamma_F(\pi^* \beta_0)] - \lambda \gamma_B \exp[-\gamma_B(\pi^* \beta_0 - \theta)]$$

est positif uniquement si $\theta \leq \theta^+(\pi^*, \lambda)$.

Ces seuils peuvent être calculés de façon explicite :

$$\begin{aligned} \theta^-(\pi^*, \lambda) &= -\frac{\gamma_B + \gamma_F}{\gamma_F} \pi^* + \frac{1}{\gamma_F} \ln\left(\frac{\lambda \gamma_B}{\gamma_F}\right) \\ \theta^+(\pi^*, \lambda) &= \frac{\gamma_B + \gamma_F}{\gamma_B} \pi^* - \frac{1}{\gamma_B} \ln\left(\frac{\lambda \gamma_B}{\gamma_F}\right) \end{aligned}$$

Alors, la relation suivante prévaut :

$$\theta^+(\pi^*, \lambda) = -\frac{\gamma_F}{\gamma_B} \theta^-(\pi^*, \lambda)$$

et les seuils ont des signes opposés. Mais comme $\mathcal{D}(\Theta) \subset \mathbb{R}_+$, ils sont nécessairement positifs. Par conséquent :

$$\theta^-(\pi^*, \lambda) = \theta^+(\pi^*, \lambda) = 0 \quad (2.11)$$

De ce fait, le niveau optimal d'indemnisation, $J^*(\theta)$, si le risque de pertes $\Theta = \theta$, $\theta \neq 0$, survient, se situe toujours dans l'intervalle $]0, \theta[$, pour tout $\theta \in \mathcal{D}(\Theta)$, $\theta \neq 0$. Ainsi, les limites ne sont jamais atteintes et le cadre de cette étude s'en trouve plus simplifié.

Structure de l'indemnité optimale J^* et de la prime optimale π^*

Nous sommes alors capables d'écrire une relation entre J^* , π^* et les autres paramètres pour toute valeur $\theta \in \mathcal{D}(\Theta)$, $\theta \neq 0$. Comme $J^*(\theta) \in]0, \theta[$, la condition du premier ordre (2.8) donne l'équation suivante :

$$\gamma_F \exp[-\gamma_F(J^*(\theta) - \theta - \pi^* \beta_0)] = \lambda \gamma_B \exp[-\gamma_B(\pi^* \beta_0 - J^*(\theta))]$$

et :

$$J^*(\theta) = \frac{\gamma_F}{\gamma_B + \gamma_F} \theta + \pi^* \beta_0 - \frac{1}{\gamma_B + \gamma_F} \ln \left(\frac{\lambda \gamma_B}{\gamma_F} \right) \quad (2.12)$$

D'autre part, l'équation (2.11) nous donne la relation suivante entre π^* et λ :

$$\pi^* \beta_0 = \frac{1}{\gamma_B + \gamma_F} \ln \left(\frac{\lambda \gamma_B}{\gamma_F} \right)$$

D'où, la compensation optimale est donnée pour toute valeur $\theta \in \mathcal{D}(\Theta)$, $\theta \neq 0$, par :

$$J^*(\theta) = \frac{\gamma_F}{\gamma_B + \gamma_F} \theta$$

Ce résultat peut être étendu au cas $\theta = 0$, puisque $J^*(0) = 0$ par la contrainte (2.2).
Finalement :

$$J^*(\theta) = \frac{\gamma_F}{\gamma_B + \gamma_F} \theta \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(\Theta)$$

La règle d'évaluation optimale du contrat d'assurance est obtenue en saturant la contrainte à l'optimum. D'où :

$$\pi^* \beta_0 = \frac{1}{\gamma_B} \ln \mathbb{E}[\exp(\gamma_B J^*(\Theta))]$$

Ces résultats sont résumés dans la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Le niveau optimal de la prime π^* , est donné par :*

$$\pi^* \beta_0 = \frac{1}{\gamma_B} \ln \mathbb{E}[\exp(\gamma_B J^*(\Theta))] \quad (2.13)$$

Et l'indemnité optimale, $J^(\theta)$, lorsque le risque de pertes $\theta \in \mathcal{D}(\Theta)$ survient, est donnée par :*

$$J^*(\theta) = \frac{\gamma_F}{\gamma_B + \gamma_F} \theta \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(\Theta) \quad (2.14)$$

La structure optimale de l'indemnité est cohérente avec le théorème de Borch (voir, par exemple [31]) concernant le partage des risques et la mutualisation. En effet, $J^*(.)$ est proportionnelle à la perte survenue. Le coefficient de proportionnalité est le ratio du coefficient d'aversion pour le risque de l'agent F par rapport à la somme des coefficients de l'agent F et l'agent B . Cela peut être perçu comme l'aversion relative de l'agent F : i.e. si les deux agents ont la même aversion pour le risque, ils vont partager parfaitement les pertes survenues ; mais plus l'agent F est risqué, relativement à l'agent B , plus l'indemnité sera importante. Ce résultat ne dépend pas d'une forme a priori pour l'indemnité. En effet, celle-ci est optimale pour toutes les structures de compensation possibles, et non pas uniquement parmi les structures d'indemnités proportionnelles.

De plus, la prime optimale π^* est une fonction non-linéaire de l'indemnité. Cette non-linéarité est l'un des aspects les plus importants de la transaction, comme nous le verrons dans la section dédiée à l'étude de l'émission de l'obligation.

Notons également que dans le cas particulier où la banque et la firme ont la même aversion pour le risque, $\forall \theta \in \mathcal{D}(\Theta)$, $J^*(\theta) = \frac{\theta}{2}$. Il s'agit alors d'un partage équitable du risque entre les deux agents.

Remarque sur l'indemnité optimale: La forme de l'indemnité optimale n'inclut aucune franchise. Ceci est directement relié à l'hypothèse d'absence de coût de transaction.

2.4.2 Résolution du problème de la relation entre la banque et l'investisseur

Comme cela a été décrit dans la section précédente, le programme d'optimisation lié à la relation entre l'agent B et l'agent I est donné par :

$$\begin{aligned} \min_{\Lambda, \alpha} \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\gamma_B \left(\pi \beta_0 - J(\Theta) - \Lambda + \frac{\alpha}{M} \Theta \right) \right\} \right] & \quad (\overline{\mathcal{P}}) \\ \text{s.c.} \quad \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\gamma_I \left(\Lambda - \frac{\alpha}{M} \Theta \right) \right\} \right] & \leq 1 \end{aligned}$$

Ce programme dépend de deux paramètres différents : $\Lambda = -\Phi \beta_0 + s \sum_{i=1}^n \beta_i + N$ représente le montant de "cash" capitalisé reçu par l'investisseur et α le montant remboursé lorsqu'un événement survient.

Comme cela a été décrit précédemment, la structure optimale de l'obligation est déterminée par l'agent B , qui a connaissance de la fonction de prix déterminée par l'agent I . En d'autres termes, l'agent I détermine la structure de Λ , tandis que l'agent B se concentre sur la variable clé α .

Caractérisation optimale de l'obligation

Ce problème de dimension finie est un cas particulier du problème précédent. En effet, d'après les résultats précédents, nous savons que la solution optimale est proportionnelle. Par conséquent, chercher la valeur optimale de α (solution parmi l'ensemble des fonctions proportionnelles) est équivalent à chercher la solution optimale générale. De plus, ce problème est beaucoup plus simple que le précédent, puisqu'aucune contrainte n'est imposée sur α . Ainsi, la résolution du programme d'optimisation $(\overline{\mathcal{P}})$ est immédiate et conduit à la proposition suivante :

Proposition 2.2 *La fonction de prix, Φ^* , de l'obligation climatique est donnée par la formule suivante :*

$$\Phi^* \beta_0 = s^* \sum_{i=1}^n \beta_i + N - \frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) \right] \quad (2.15)$$

Le montant optimal remboursé en cas d'événement est donné par :

$$\alpha^* = \frac{\gamma_B \gamma_F}{(\gamma_B + \gamma_F)(\gamma_B + \gamma_I)} M \quad (2.16)$$

La contrainte permet de caractériser l'unique prix de l'obligation : l'agent I impose une certaine relation entre les variables s , Φ et α (ou, avec les notations simplifiées entre Λ et α). L'unicité du prix vient du fait que, pour tout α , il est possible de trouver un unique Λ , qui sature la contrainte de l'agent I . L'agent B prend cette relation en considération et détermine la structure optimale de l'obligation. En d'autres termes, l'agent I détermine la structure de Λ , tandis que l'agent B se concentre sur la variable α , qui conditionne la partie risquée de l'obligation. Pour ces raisons, nous pouvons interpréter l'émission de l'obligation comme la signature d'un contrat "minimal", i.e. les caractéristiques de l'obligation obtenue sont "minimales" au sens où elles représentent à la fois un seuil d'intérêt pour l'investisseur et un seuil de couverture pour la banque.

Commentaires sur la règle d'évaluation La partie droite de l'équation représente le montant que l'agent I est prêt à payer pour l'obligation de caractéristiques (s^*, α^*) . Notons que la fonction de prix est non-linéaire. Nous sommes loin de la logique classique d'évaluation utilisant espérance et linéarité. Même si, dans le cadre particulier des utilités exponentielles, les richesses initiales n'impactent pas les résultats, il existe ici une dépendance non-constante du prix envers les flux risqués de l'obligation, liée à cette non-linéarité

De ce fait, saturer la contrainte de l'investisseur n'est pas trivial. Cela a un impact sur la structuration de l'obligation, par l'introduction de cet aspect non-linéaire dans la fonction de prix.

De plus, Φ^* est un prix très intéressant d'un point de vue marketing, comme il est, de façon évidente, inférieur au prix historique³, noté P . Ainsi, l'investisseur doit payer moins que l'espérance historique des flux de l'obligation actualisés. En effet, lorsque l'on compare Φ^* et P , la relation $\Phi^* < P$ est obtenue, puisque la fonction exponentielle est convexe :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\exp \left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) \right] &> \exp \mathbb{E} \left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) \\ \Phi^* \beta_0 &< s^* \sum_{i=1}^n \beta_i + N - \frac{\alpha^*}{M} \mathbb{E}(\Theta) \\ \Phi^* \beta_0 &< \sum_{i=1}^n (s^* - \alpha^* P(\varepsilon_i)) \beta_i + N = P \beta_0 \end{aligned}$$

Commentaires sur la structure de l'obligation Le montant optimal, α^* , qui est remboursé lorsqu'un événement survient, ne dépend pas d'une structure donnée a priori. En effet, α^* est optimal parmi toutes les fonctions possibles, et non pas uniquement parmi les fonctions proportionnelles. D'autre part, notons que le niveau de coupon s^* de l'obligation apparaît clairement comme un outil marketing en vue de séduire l'investisseur. En effet, la fonction de prix Φ^* de l'obligation dépend linéairement du niveau de coupon.

³Par prix historique, nous entendons simplement l'espérance, sous la probabilité historique \mathbb{P} , de la somme de tous les flux actualisés relatifs à l'obligation.

L'écart entre α^* , le montant remboursé en cas d'événement, et s^* est simplement transféré sur le prix de l'obligation. Il n'existe pas de détermination unique du niveau optimal de coupon s^* . Le problème de la translation entre Φ^* et s^* conduit à une situation où une infinité de solutions est possible. L'optimum est défini par le triplet (Φ^*, s, α^*) où seulement Φ^* et α^* sont choisis optimalement. Alors, la valeur "optimale" de s est déterminée par l'investisseur selon la structure de son portefeuille, et la diversification potentielle de l'obligation climatique peut être prise en compte à ce niveau là pour l'agent I . Finalement, le fait de considérer la variable globale Λ est parfaitement équivalent à considérer les variables s et Φ .

Cette proposition souligne un résultat important pour la structuration de l'obligation : non seulement l'évaluation du produit mais également ses caractéristiques et enjeux sont déterminés ici. Dans ce cadre, α^* joue un rôle considérable en étant la clef de voute de la structure de l'obligation.

Remarque : En remplaçant α^* par sa valeur, la fonction de prix, Φ^* , de l'obligation climatique peut s'écrire comme :

$$\Phi^* \beta_0 = s^* \sum_{i=1}^n \beta_i + N - \frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E} [\exp (\Gamma \Theta)]$$

où :

$$\Gamma = \frac{\gamma_B \gamma_F \gamma_I}{(\gamma_B + \gamma_F) (\gamma_B + \gamma_I)}$$

est fonction des coefficients d'aversion pour le risque de tous les agents.

Dans le cas particulier où les agents ne sont pas très averses au risque (Γ suffisamment petit), nous pouvons obtenir par un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \Phi^* \beta_0 \sim & s^* \sum_{i=1}^n \beta_i + N - \frac{\gamma_B \gamma_F}{(\gamma_B + \gamma_F) (\gamma_B + \gamma_I)} \mathbb{E} (\Theta) \\ & - \frac{1}{2} \gamma_I \left(\frac{\gamma_B \gamma_F}{(\gamma_B + \gamma_F) (\gamma_B + \gamma_I)} \right)^2 \mathbb{E} (\Theta^2) \end{aligned}$$

Cette relation peut être vue comme la somme de l'espérance historique des flux de l'obligation actualisés et un terme de "prime" qui est d'autant plus négatif que l'agent I est averse au risque. Nous retrouvons la propriété remarquable : $\Phi^* < P$.

Différentes interprétations de la structure de l'obligation Le degré de liberté dans le choix de s^* permet différentes interprétations de la structure de l'obligation, pouvant être utilisées comme autant de stratégies marketing pour séduire l'investisseur.

- Tout d'abord, si s^* est choisi supérieur (ou égal) à α^* - ce qui est sans doute la situation la plus naturelle -, le produit a une véritable structure d'obligation : tous les cash flows nets relatifs à l'obligation sont positifs (ou nuls) pour l'agent I (excepté le prix, bien-sûr). Ceci est le point de vue que nous adopterons lors des simulations dans la dernière section de ce chapitre.

- Ensuite, si s^* est choisi de façon à rendre l'émission de l'obligation au pair, i.e. $\Phi^* = N$, la structure de l'obligation est extrêmement classique et s^* est donné par :

$$s^* \sum_{i=1}^n \beta_i = N (\beta_0 - 1) + \frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E} [\exp (\Gamma \Theta)]$$

Dans le cas particulier où les agents ne sont pas très averses au risque (Γ suffisamment petit), nous obtenons par un développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 :

$$s^* \sim \frac{\frac{\alpha^*}{M} \mathbb{E} (\Theta) - \frac{1}{2} \gamma_I \left(\frac{\alpha^*}{M} \right)^2 \mathbb{E} (\Theta^2) + N (\beta_0 - 1)}{\sum_{i=1}^n \beta_i}$$

où α^* est donné par l'équation (2.16).

- Finalement, si $\Phi^* \beta_0 = N$, l'obligation se réduit à un échange annuel de flux, conditionnellement à l'occurrence d'un événement. Ceci est similaire à une structure de swap et s^* est donné par :

$$s^* \sum_{i=1}^n \beta_i = \frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E} [\exp (\Gamma \Theta)]$$

Dans le cas particulier où les agents ne sont pas très averses au risque (Γ suffisamment petit), nous obtenons par un développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 :

$$s^* \sim \frac{\frac{\alpha^*}{M} \mathbb{E} (\Theta) - \frac{1}{2} \gamma_I \left(\frac{\alpha^*}{M} \right)^2 \mathbb{E} (\Theta^2)}{\sum_{i=1}^n \beta_i}$$

où α^* est donné par l'équation (2.16).

Notons que l'interprétation en termes de swap est également valable pour tout prix Φ^* . En effet, comme :

$$\Phi^* \beta_0 - N = s^* \sum_{i=1}^n \beta_i - \frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) \right]$$

le premier terme peut être vu comme une soulte tandis que le second représente les flux échangés. La soulte permet de fixer la valeur initiale du swap à 0.

Evaluation du risque des deux agents : une approche entropique

La règle d'évaluation de l'obligation (2.15) a une composante non-linéaire par rapport au risque Θ :

$$-\frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) \right]$$

Ce terme peut être vu comme l'énergie libre⁴ de la variable aléatoire $\frac{\alpha^*}{M}\Theta$, ou, en termes d'entropie, comme :

$$-\frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) \right] = \sup_{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}} \left\{ -\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) + \frac{1}{\gamma_I} h(\mathbb{Q}/\mathbb{P}) \right\}$$

De ce fait, il est relativement naturel d'introduire la mesure de probabilité, spécifique à l'agent I , notée \mathbb{Q}_I , et définie comme :

$$\frac{d\mathbb{Q}_I}{d\mathbb{P}} = \frac{\exp \left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right)}{\mathbb{E} \left[\exp \left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) \right]}$$

Cette probabilité \mathbb{Q}_I correspond à la mesure de probabilité qui minimise l'entropie relative. En effet :

$$\begin{aligned} & -\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_I} \left(\frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) + \frac{1}{\gamma_I} \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{Q}_I}{d\mathbb{P}} \ln \left(\frac{d\mathbb{Q}_I}{d\mathbb{P}} \right) \right] \\ = & -\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_I} \left(\frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) + \left[\frac{\mathbb{E} \left\{ \frac{\alpha^*}{M} \Theta \exp \left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) \right\}}{\mathbb{E} \left\{ \exp \left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) \right\}} - \frac{\ln \mathbb{E} \left\{ \exp \left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) \right\}}{\gamma_I} \right] \\ = & -\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_I} \left(\frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_I} \left(\frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) - \frac{\ln \mathbb{E} \left\{ \exp \left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) \right\}}{\gamma_I} \\ = & -\frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) \right] \end{aligned}$$

\mathbb{Q}_I est différente d'une mesure risque-neutre. Elle ne joue aucun rôle dans l'évaluation des paramètres de l'obligation. Mais, il s'agit d'un outil d'interprétation de la mesure du risque de l'agent I , puisque sa densité de Radon-Nykodym dépend de l'aversion pour le risque de l'investisseur et de la partie aléatoire de sa richesse terminale.

En utilisant les mêmes arguments, il est possible d'évaluer la position risquée de l'agent B :

$$-\frac{1}{\gamma_B} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left(-\gamma_B \left(-J^*(\Theta) + \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) \right) \right]$$

La mesure de probabilité \mathbb{Q}_B , définie comme :

$$\frac{d\mathbb{Q}_B}{d\mathbb{P}} = \frac{\exp \left[-\gamma_B \left(-J^*(\Theta) + \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) \right]}{\mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\gamma_B \left(-J^*(\Theta) + \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) \right\} \right]}$$

⁴L'énergie libre d'une variable aléatoire X est donnée par :

$$-\frac{1}{\gamma} \ln \mathbb{E} (\exp (\gamma X)) = \sup_{\nu \ll \mathbb{P}} \left\{ -\mathbb{E}_{\nu} (X) + \frac{1}{\gamma} h(\nu/\mathbb{P}) \right\}$$

où :

$$h(\nu/\mathbb{P}) = \mathbb{E} \left[\frac{d\nu}{d\mathbb{P}} \ln \left(\frac{d\nu}{d\mathbb{P}} \right) \right]$$

est l'entropie relative de la mesure de probabilité ν par rapport à \mathbb{P} .

correspond également à la probabilité minimisant l'entropie relative :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\gamma_B} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left(-\gamma_B \left(-J^*(\Theta) + \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) \right) \right] \\ = & -\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_B} \left(-J^*(\Theta) + \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) + \frac{1}{\gamma_B} \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{Q}_B}{d\mathbb{P}} \ln \left(\frac{d\mathbb{Q}_B}{d\mathbb{P}} \right) \right] \end{aligned}$$

De plus, en remplaçant simplement α^* et J^* par leur valeur respective donnée par (2.16) et (2.14), nous obtenons directement :

$$\frac{d\mathbb{Q}_B}{d\mathbb{P}} = \frac{d\mathbb{Q}_I}{d\mathbb{P}}$$

et le résultat suivant :

Proposition 2.3 *Les deux agents B et I ont la même évaluation du risque :*

$$\mathbb{Q}_B = \mathbb{Q}_I \tag{2.17}$$

Cette relation (2.17) traduit une certaine idée d'équilibre. Les deux agents ont la même représentation du risque. La convergence d'une évaluation moyenne du risque peut être, dans un cadre plus général, suffisante à l'existence d'une transaction. En effet, comme le souligne L. Bachelier [2] dans sa thèse de doctorat, "Le marché ne croit à un instant donné, ni à la hausse, ni à la baisse du cours vrai". Dans ce cas, le vendeur et l'acheteur n'ont pas la même représentation du risque mais ils sont d'accord "en moyenne". Pour cette raison, il peut y avoir transaction. Ici, la convergence globale des deux mesures de probabilité est certainement liée à la forme très particulière des utilités exponentielles.

Notons que l'évaluation du risque de chacun des agents a deux composantes : la première correspond à un prix risque-neutre alors que la seconde est une sorte de pénalisation. La différence entre les évaluations de chacun des deux agents réside dans le poids attribué à cette pénalisation. Ce poids est directement lié à l'aversion pour le risque de chaque agent.

2.4.3 Quelques commentaires supplémentaires

Quelques remarques sur le portefeuille de la banque

Comme cela a été décrit dans l'introduction générale et dans les différentes sections de ce chapitre, les flux relatifs à la transaction et capitalisés depuis leur occurrence jusqu'à l'année n peuvent s'écrire, pour l'agent B , comme :

$$\mathbf{V}_B = \pi\beta_0 - J(\Theta) + \Phi\beta_0 - s \sum_{i=1}^n \beta_i - N + \frac{\alpha}{M} \Theta$$

En remplaçant les différents paramètres par les valeurs optimales, obtenues dans les sections précédentes, la valeur terminale (aléatoire) du portefeuille de la banque, notée V_B , est donnée par l'équation \mathbb{P} *p.s.* suivante :

$$V_B = \frac{\gamma_F \gamma_I}{(\gamma_B + \gamma_F)(\gamma_B + \gamma_I)} \Theta + \frac{1}{\gamma_B} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{\gamma_B \gamma_F}{\gamma_B + \gamma_F} \Theta \right) \right] - \frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{\gamma_I \gamma_B \gamma_F}{(\gamma_B + \gamma_F)(\gamma_B + \gamma_I)} \Theta \right) \right]$$

L'agent B n'est pas parfaitement couvert contre le risque Θ et contre les flux risqués liés à l'indemnité qu'il devra payer si un événement survient. En ce sens, la banque a un comportement spéculatif.

Son exposition restante est proportionnelle à l'aversion "relative" pour le risque des agents F et I : i.e. respectivement $\frac{\gamma_I}{(\gamma_B + \gamma_I)}$ et $\frac{\gamma_F}{(\gamma_B + \gamma_F)}$. Les montants que l'agent B reçoit pour les deux parties de la transaction correspondent à la deuxième ligne de l'équation. Tous les deux sont des fonctions non-linéaires de Θ . Dans le cas particulier où les agents sont peu averses au risque (leurs coefficients d'aversion pour le risque respectifs sont suffisamment petits), nous obtenons par un développement limité à l'ordre 1, au voisinage de 0 (relation \mathbb{P} *p.s.*) :

$$V_B \sim \frac{\gamma_F \gamma_I}{(\gamma_B + \gamma_F)(\gamma_B + \gamma_I)} \Theta + \frac{\gamma_F}{\gamma_B + \gamma_F} \mathbb{E}(\Theta) - \frac{\gamma_B \gamma_F}{(\gamma_B + \gamma_F)(\gamma_B + \gamma_I)} \mathbb{E}(\Theta)$$

ou :

$$V_B \sim \frac{\gamma_F \gamma_I}{(\gamma_B + \gamma_F)(\gamma_B + \gamma_I)} (\Theta - \mathbb{E}(\Theta))$$

Au premier ordre, l'exposition de la banque est limitée aux variations de Θ autour de son espérance historique. Un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 ajoute un terme négatif qui dépend de la variance de Θ (relation \mathbb{P} *p.s.*) :

$$V_B \sim \frac{\gamma_F \gamma_I}{(\gamma_B + \gamma_F)(\gamma_B + \gamma_I)} (\Theta - \mathbb{E}(\Theta)) - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\gamma_F}{(\gamma_B + \gamma_F)(\gamma_B + \gamma_I)} \right)^2 [\gamma_B^3 + \gamma_I^2 \gamma_B + 3\gamma_I \gamma_B^2] \right] \mathbb{E}(\Theta^2)$$

Quelques remarques sur les coefficients d'aversion pour le risque

Une étude asymptotique des résultats Une étude asymptotique des principaux résultats, lorsque l'un des coefficients d'aversion pour le risque tend vers 0 ou l'infini, permet d'obtenir des interprétations très naturelles :

Asymptotique lorsque γ est infini

- Si γ_B tend vers l'infini (i.e. la banque est infiniment averse au risque) :

$$\begin{aligned} J^*(\Theta) &\longrightarrow 0 & \mathbb{P} \text{ p.s.} \\ \pi^* &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Aucune transaction n'est possible entre la firme et la banque. La banque ne veut pas couvrir le risque de la firme et, dans ce cas, aucune obligation climatique n'est émise.

- Si γ_F tend vers l'infini (i.e. la firme est infiniment averse au risque) :

$$\begin{aligned} J^*(\Theta) &\longrightarrow \Theta & \mathbb{P} \text{ p.s.} \\ \pi^* &\longrightarrow \frac{1}{\beta_0 \gamma_B} \ln \mathbb{E} [\exp(\gamma_B \Theta)] \end{aligned}$$

La firme veut être complètement protégée. Dans ce cas, une obligation climatique peut être émise. Ses caractéristiques seront :

$$\begin{aligned} \alpha^* &\longrightarrow \frac{\gamma_B}{\gamma_B + \gamma_I} M \\ \Phi^* \beta_0 &\longrightarrow s \sum_{i=1}^n \beta_i + N - \frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{\gamma_B \gamma_I}{\gamma_B + \gamma_I} \Theta \right) \right] \end{aligned}$$

La structure est comparable à celle de la relation d'assurance entre la banque et la firme, lorsque γ_F n'est pas infini.

- Si γ_I tend vers l'infini (i.e. l'investisseur est infiniment averse au risque) :

$$\alpha^* \longrightarrow 0$$

Aucune obligation risquée ne peut être émise.

Asymptotique lorsque γ tend vers 0

- Si γ_B tend vers 0 (i.e. la banque aime infiniment le risque) :

$$J^*(\Theta) \longrightarrow \Theta \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

La banque accepte de couvrir entièrement le risque Θ . Aucune obligation risquée de peut être émise puisqu'elle conserve le risque dans ses livres :

$$\alpha^* \longrightarrow 0$$

-Si γ_F tend vers 0 (i.e. la firme aime infiniment le risque) :

$$J^*(\Theta) \longrightarrow 0 \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

La firme ne veut pas se couvrir. Aucune transaction ne peut avoir lieu.

- Si γ_I tend vers 0 (i.e. l'investisseur aime infiniment le risque). Une obligation climatique peut être émise avec les caractéristiques suivantes :

$$\alpha^* \longrightarrow \frac{\gamma_F}{\gamma_B + \gamma_F} M$$

et le "prix" du risque :

$$-\frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E} [\exp(\gamma_I \alpha^* \Theta)] \longrightarrow 0$$

Comportement de la "prime de risque" non-linéaire relative à l'obligation

Une simple étude de la monotonie de la "prime de risque" non-linéaire :

$$\begin{aligned} PR(\gamma_B, \gamma_F, \gamma_I) &\triangleq -\frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M} \Theta \right) \right] \\ &= -\frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{\gamma_I \gamma_B \gamma_F}{(\gamma_B + \gamma_F)(\gamma_B + \gamma_I)} \Theta \right) \right] \end{aligned}$$

par rapport aux différents coefficients d'aversion pour le risque conduit aux conclusions suivantes :

- *Par rapport à γ_B :*

α^* est une fonction strictement croissante de γ_B jusqu'au seuil $\sqrt{\gamma_I \gamma_F}$ et une fonction strictement décroissante de γ_B après ce seuil. Par conséquent, comme PR est une fonction décroissante de α^* (dans notre étude, Θ ne prend que des valeurs positives), PR est une fonction décroissante de γ_B jusqu'au seuil $\sqrt{\gamma_I \gamma_F}$ et une fonction croissante de γ_B après ce seuil.

- *Par rapport à γ_F :*

α^* est une fonction strictement décroissante de γ_F jusqu'au seuil $\gamma_B - 1$ et une fonction strictement croissante de γ_F après ce seuil. Par conséquent, comme PR est une fonction décroissante de α^* , PR est une fonction croissante de γ_F jusqu'au seuil $\gamma_B - 1$ et une fonction décroissante de γ_F après ce seuil.

- *Par rapport à γ_I :*

Suivant l'interprétation précédente de la mesure de probabilité \mathbb{Q}_I comme mesure minimisant l'entropie relative, la "prime de risque" non-linéaire peut s'écrire :

$$PR(\gamma_B, \gamma_F, \gamma_I) = \sup_{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}} \left\{ -\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{\gamma_B \gamma_F}{(\gamma_B + \gamma_F)(\gamma_B + \gamma_I)} \Theta \right) + \frac{1}{\gamma_I} h(\mathbb{Q}/\mathbb{P}) \right\}$$

Or, l'entropie relative de toute mesure \mathbb{Q} absolument continue par rapport à \mathbb{P} est toujours négative et comme Θ ne prend que des valeurs positives, son espérance est positive. De plus, comme $\frac{\alpha^*}{\gamma_I}$ est une fonction strictement décroissante de γ_I , son espérance est une fonction décroissante de γ_I . D'où, PR est une fonction croissante de γ_I .

Une interprétation des coefficients d'aversion pour le risque en termes de VaR L'utilisation d'un critère de VaR permet à la banque, par exemple, de choisir son coefficient d'aversion pour le risque γ_B , qui est habituellement très délicat à quantifier. En effet, si \mathbf{V}_B désigne la valeur terminale du portefeuille de la banque, celle-ci peut souhaiter imposer la contrainte suivante, où A est strictement négatif :

$$\mathbb{P}(\mathbf{V}_B < A) \leq \delta \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}(-\mathbf{V}_B \geq -A) \leq \delta$$

qui limite les pertes potentielles. Ceci peut également s'écrire :

$$\mathbb{P}(-\mathbf{V}_B \geq -A) = \mathbb{E} [\mathbf{1}_{(-\mathbf{V}_B + A \geq 0)}]$$

Mais, si X désigne une variable aléatoire,

$$\forall \gamma > 0, \quad \mathbf{1}_{(X \geq 0)} \leq \exp(\gamma X) \quad \mathbb{P} \text{ p.s.} \quad \text{ou} \quad \mathbf{1}_{(X \geq 0)} \leq \inf_{\gamma > 0} \{\exp(\gamma X)\} \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

D'où :

$$\mathbb{P}(-\mathbf{V}_B \geq -A) \leq \inf_{\gamma_B > 0} \{\mathbb{E} [\exp(-\gamma_B (\mathbf{V}_B - A))]\}$$

Une condition suffisante pour que la contrainte de VaR soit satisfaite est que, pour tout $\gamma_B > 0$:

$$\mathbb{E} [\exp(-\gamma_B (\mathbf{V}_B - A))] \leq \delta$$

Cela conduit à un critère de choix pour le paramètre γ_B . Notons que les paramètres de VaR, A et δ , doivent être choisis avec attention, sinon il se peut qu'aucun portefeuille ne satisfasse cette condition. L'ensemble des portefeuilles admissibles est déterminé par le programme suivant :

$$\inf_{\gamma_B > 0} \{\mathbb{E} [\exp(-\gamma_B (\mathbf{V}_B - A))]\}$$

i.e., au niveau minimum $\underline{\gamma}_B$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(\mathbf{V}_B - A) \exp(-\underline{\gamma}_B (\mathbf{V}_B - A))] &= 0 \quad \text{ou} \quad \mathbb{E} [(\mathbf{V}_B - A) \exp(-\underline{\gamma}_B \mathbf{V}_B)] = 0 \\ \frac{\mathbb{E} [\mathbf{V}_B \exp(-\underline{\gamma}_B \mathbf{V}_B)]}{\mathbb{E} [\exp(-\underline{\gamma}_B \mathbf{V}_B)]} &= A \end{aligned}$$

et finalement :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{\underline{\gamma}_B}} [\mathbf{V}_B] = A$$

La valeur espérée du portefeuille, sous une certaine mesure de probabilité $\mathbb{Q}_{\underline{\gamma}_B}$, doit être égale à A . De plus, la solution de ce programme doit être inférieure à δ pour satisfaire la condition de VaR.

Remarque : Le choix particulier des fonctions d'utilité exponentielle nous permet d'optimiser de façon régulière, lorsqu'un critère de VaR est utilisé. De plus, comme souvent, plus d'information est disponible sur la transformée de Laplace d'une variable aléatoire que sur sa distribution, il est relativement naturel de choisir ce type de fonctions d'utilité.

2.5 Conclusions

La contribution majeure de cette étude est la présentation d'une méthode permettant de caractériser entièrement une obligation dont les coupons dépendent de l'occurrence d'un événement climatique. Une des particularités de cette analyse est la prise en considération de la globalité de la transaction : depuis la firme cherchant à couvrir son risque climatique jusqu'aux "petits" porteurs d'obligation. Dans ce cadre, étant donné quelques hypothèses standard sur les trois agents impliqués dans la transaction, nous avons été capables de dériver simplement et simultanément le prix de l'obligation ainsi que le montant remboursé en cas d'événement climatique. D'autre part, le point de vue adopté est un point de vue statique, très éloigné de la logique "risque-neutre", puisqu'aucun marché sous-jacent n'existe. L'évaluation de ce produit financier est moins importante que sa structuration même.

De plus, cette étude peut être généralisée à la structuration de transactions plus générales, impliquant plusieurs agents et peut même dépasser le cadre des "weather derivatives". Par exemple, elle peut s'appliquer à des obligations ou même des swaps, dont les paiements dépendent de l'occurrence d'un événement particulier (climatique, catastrophique, de crédit), puisqu'aucune hypothèse n'est faite dans cet article sur les événements ε_i considérés.

Cette étude est robuste à des changements dans la plupart des hypothèses. Quelques exemples de généralisations possibles, n'altérant pas des arguments fondamentaux, sont la corrélation possible des événements ε_i , l'introduction d'un aléa sur le montant M de pertes potentielles, l'introduction de coûts de transaction pour l'agent B ou encore de richesses initiales pour les différents agents, et tout particulièrement pour l'investisseur, de façon à prendre en compte le potentiel de diversification de l'obligation climatique.

Par contre, une hypothèse fondamentale pour l'obtention des résultats est sans doute l'hypothèse d'utilités exponentielles pour chacun des trois agents. Ceci nous a permis de dériver des expressions "agréables" pour les différents paramètres de la transaction. Mais, l'utilisation d'autres fonctions d'utilité, notamment les fonctions puissance, peut modifier les résultats et sont l'objet d'une étude.

De plus, comme cela a été souligné précédemment, la méthodologie développée ici peut certainement être utile à l'analyse de différentes structurations de transactions. Ceci est également un champ de recherche exploré actuellement.

2.6 Annexes du chapitre 2

2.6.1 Optimalité en J

Soit ε un nombre réel dans $[0, 1]$. Nous notons désormais par J^* l'indemnité optimale et par π^* la prime optimale. Soit J toute fonction satisfaisant la contrainte :

$$0 \leq J(\theta) \leq \theta \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(\Theta)$$

Alors, pour tout $\theta \in \mathcal{D}(\Theta)$, nous définissons :

$$J^\varepsilon(\theta) = (1 - \varepsilon) J^*(\theta) + \varepsilon J(\theta) = J^*(\theta) + \varepsilon (J(\theta) - J^*(\theta))$$

Si :

$$\widehat{U}(\Theta, J^*(\Theta), \pi^*) = -\exp[-\gamma_F (J^*(\Theta) - \Theta - \pi^* \beta_0)] - \lambda \exp[-\gamma_B (\pi^* \beta_0 - J^*(\Theta))]$$

alors :

$$\mathbb{E} \left[\widehat{U}(\Theta, J^*(\Theta), \pi^*) \right] \geq \mathbb{E} \left[\widehat{U}(\Theta, J^\varepsilon(\Theta), \pi^*) \right]$$

ou, en utilisant la concavité de \widehat{U} :

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta)) \times (J(\Theta) - J^*(\Theta)) \right] \leq 0$$

avec :

$$\frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta)) = \gamma_F \exp[-\gamma_F (J^*(\Theta) - \Theta - \pi^* \beta_0)] - \lambda \gamma_B \exp[-\gamma_B (\pi^* \beta_0 - J^*(\Theta))]$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{(0 < J^*(\Theta) < \Theta)} \frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta)) \times (J(\Theta) - J^*(\Theta)) \right] \\ & + \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{(J^*(\Theta) = 0)} \frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta)) \times J(\Theta) \right] \\ & + \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{(J^*(\Theta) = \Theta)} \frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta)) \times (J(\Theta) - \Theta) \right] \\ & \leq 0 \end{aligned}$$

Il faut alors étudier le signe de $\frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta))$ sur trois ensembles disjoints :

- Sur l'ensemble $\{0 < J^*(\Theta) < \Theta\}$, nous pouvons choisir suffisamment de fonctions J pour faire varier le signe de $J(\Theta) - J^*(\Theta)$ autant que nous le souhaitons. Nous pouvons également choisir J de façon à ce que, aux limites, lorsque $J^*(\Theta) = 0$,

\mathbb{P} p.s., $J(\Theta) = 0$, \mathbb{P} p.s. et lorsque $J^*(\Theta) = \Theta$, \mathbb{P} p.s., $J(\Theta) = \Theta$, \mathbb{P} p.s.. Ainsi, nous pouvons en déduire que, sur cet ensemble, la dérivée est nulle en moyenne. Ceci est satisfait si et seulement si :

$$\frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta)) = 0 \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

- Sur l'ensemble $\{J^*(\Theta) = 0\}$, comme $J(\Theta)$ est positif \mathbb{P} p.s. par hypothèse, nous pouvons en déduire que, sur cet ensemble, la dérivée est négative en moyenne et cela est satisfait si et seulement si :

$$\frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta)) \leq 0 \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

- Finalement, sur l'ensemble $\{J^*(\Theta) = \Theta\}$, comme $(J(\Theta) - \Theta)$ est négatif \mathbb{P} p.s. par hypothèse, nous pouvons en déduire que, sur cet ensemble, la dérivée est positive en moyenne et cela est satisfait si et seulement si :

$$\frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta)) \geq 0 \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

Notons que, dans tout ce chapitre, nous précisons \mathbb{P} p.s.. Dans la situation où Θ prend ses valeurs dans un ensemble discret, cette notation peut sembler un peu lourde. Toutefois, ce n'est pas nécessairement le cas.

2.6.2 Optimalité en π

Soit ε un nombre réel dans $[0, 1]$. Nous notons désormais par J^* l'indemnité optimale et par π^* la prime optimale. Soit π toute autre fonction (de J).

Alors, pour tout $\theta \in \mathcal{D}(\Theta)$, nous définissons :

$$\pi^\varepsilon = (1 - \varepsilon) \times \pi^* + \varepsilon \times \pi = \pi^* + \varepsilon(\pi - \pi^*)$$

Et :

$$\mathbb{E} \left[\widehat{U}(\Theta, J^*(\Theta), \pi^*) \right] \geq \mathbb{E} \left[\widehat{U}(\Theta, J^*(\Theta), \pi^\varepsilon) \right]$$

ou :

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial \widehat{U}}{\partial \pi}(\pi^*) \times (\pi - \pi^*) \right] \leq 0$$

avec :

$$\frac{\partial \widehat{U}}{\partial \pi}(\pi^*) = \gamma_F \beta_0 \exp[-\gamma_F (J^*(\Theta) - \Theta - \pi^* \beta_0)] - \lambda \gamma_B \beta_0 \exp[-\gamma_B (\pi^* \beta_0 - J^*(\Theta))]$$

Ainsi, nous pouvons choisir suffisamment de fonctions π pour faire varier le signe de $\pi - \pi^*$ autant que nous le souhaitons. Nous en déduisons que la dérivée est nulle en moyenne :

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial \widehat{U}}{\partial \pi}(\pi^*) \right] = 0$$

2.6.3 Cas particulier des utilités exponentielles

Dans le cadre particulier de cet article, i.e. les utilités exponentielles, les conditions obtenues précédemment peuvent se réécrire comme :

- Les conditions du premier ordre sont :

Si $0 < J^*(\Theta) < \Theta$, \mathbb{P} a.s., alors :

$$\gamma_F \exp[-\gamma_F (J^*(\Theta) - \Theta - \pi^* \beta_0)] - \lambda \gamma_B \exp[-\gamma_B (\pi^* \beta_0 - J^*(\Theta))] = 0 \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

et :

$$\mathbb{E} \left[\begin{array}{c} \gamma_F \exp[-\gamma_F (J^*(\Theta) - \Theta - \pi^* \beta_0)] \\ - \lambda \gamma_B \exp[-\gamma_B (\pi^* \beta_0 - J^*(\Theta))] \end{array} \right] = 0$$

- Les conditions limites sont :

Si $J^*(\Theta) = 0$, \mathbb{P} p.s., alors :

$$\gamma_F \exp[\gamma_F (\Theta + \pi^* \beta_0)] - \lambda \gamma_B \exp[-\gamma_B (\pi^* \beta_0)] \leq 0 \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

Si $J^*(\Theta) = \Theta$, \mathbb{P} p.s., alors :

$$\gamma_F \exp[\gamma_F (\pi^* \beta_0)] - \lambda \gamma_B \exp[-\gamma_B (\pi^* \beta_0 - \Theta)] \geq 0 \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

Nous pouvons noter que la seconde condition du premier ordre est redondante par rapport à la première. Ceci est lié à la forme très particulière des utilités exponentielles.

2.6.4 Vérification de l'optimalité de la solution

Dans ce paragraphe, nous utilisons les notations U_F et U_B de façon à avoir des expressions plus concises. Il est alors nécessaire de vérifier que la solution de ce programme est un optimum, ou de façon équivalente de montrer que :

$$\mathbb{E}[U_F(J(\Theta) - \Theta - \pi\beta_0) - U_F(J^*(\Theta) - \Theta - \pi^*\beta_0)] \leq 0$$

ou, en introduisant la contrainte avec le multiplicateur de Lagrange, de façon à utiliser les conditions du premier ordre :

$$\mathbb{E} \left[\begin{array}{c} U_F(J(\Theta) - \Theta - \pi\beta_0) - U_F(J^*(\Theta) - \Theta - \pi^*\beta_0) \\ + \lambda [U_B(\pi\beta_0 - J(\Theta)) - U_B(\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta))] \\ - \lambda [U_B(\pi\beta_0 - J(\Theta)) - U_B(\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta))] \end{array} \right] \leq 0$$

Or, comme la contrainte de l'agent B est satisfaite :

$$\mathbb{E}[U_B(\pi\beta_0 - J(\Theta)) - U_B(\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta))] \geq 0$$

et :

$$-\lambda \mathbb{E}[U_B(\pi\beta_0 - J(\Theta)) - U_B(\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta))] \leq 0$$

De plus, en utilisant la concavité des fonctions d'utilité :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\begin{array}{l} U_F(J(\Theta) - \Theta - \pi\beta_0) - U_F(J^*(\Theta) - \Theta - \pi^*\beta_0) \\ + \lambda [U_B(\pi\beta_0 - J(\Theta)) - U_B(\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta))] \\ - \lambda [U_B(\pi\beta_0 - J(\Theta)) - U_B(\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta))] \end{array} \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[(J(\Theta) - J^*(\Theta) + \pi^*\beta_0 - \pi\beta_0) \times \begin{array}{l} U'_F(J^*(\Theta) - \Theta - \pi^*\beta_0) \\ - \lambda U'_B(\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta)) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Trois cas doivent être étudiés séparément suivant $J^*(\Theta)$:

1. Si $0 < J^*(\Theta) < \Theta$ \mathbb{P} p.s., la condition (2.8) donne :

$$U'_F(J^*(\Theta) - \Theta - \pi^*\beta_0) - \lambda U'_B(\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta)) = 0 \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

et :

$$\mathbb{E} \left[\begin{array}{l} (J(\Theta) - J^*(\Theta) + \pi^*\beta_0 - \pi\beta_0) \\ \times \begin{array}{l} U'_F(J^*(\Theta) - \Theta - \pi^*\beta_0) \\ - \lambda U'_B(\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta)) \end{array} \end{array} \right] = 0$$

D'où le résultat, en utilisant l'équation (2.18).

2. Si $J^*(\Theta) = 0$ \mathbb{P} p.s., la condition (2.9) donne :

$$U'_F(J^*(\Theta) - \Theta - \pi^*\beta_0) - \lambda U'_B(\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta)) \leq 0 \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

et :

$$\mathbb{E} \left[\begin{array}{l} (J(\Theta) - J^*(\Theta) + \pi^*\beta_0 - \pi\beta_0)^* \\ \times \begin{array}{l} U'_F(J^*(\Theta) - \Theta - \pi^*\beta_0) \\ - \lambda U'_B(\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta)) \end{array} \end{array} \right] \leq 0$$

D'où le résultat, en utilisant l'équation (2.18).

3. Si $J^*(\Theta) = \Theta$ \mathbb{P} p.s., la condition (2.10) donne :

$$U'_F(J^*(\Theta) - \Theta - \pi^*\beta_0) - \lambda U'_B(\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta)) \geq 0 \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

et :

$$\mathbb{E} \left[\begin{array}{l} (J(\Theta) - J^*(\Theta) + \pi^*\beta_0 - \pi\beta_0) \\ \times \begin{array}{l} U'_F(J^*(\Theta) - \Theta - \pi^*\beta_0) \\ - \lambda U'_B(\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta)) \end{array} \end{array} \right] \leq 0$$

D'où le résultat, en utilisant l'équation (2.18).

Par conséquent, la solution obtenue est un optimum pour le programme $(\hat{\mathcal{P}})$.

Chapitre 3

Etudes économétriques de données de température

3.1 Problématique

L'étude et la compréhension des données météorologiques sont indispensables à toute évaluation de produit dérivé climatique. La dynamique du sous-jacent et les probabilités d'occurrence de tel événement climatique font en effet partie des connaissances à maîtriser afin de pouvoir donner un prix à un produit dérivé climatique. Toutefois, tout n'est pas si simple. En effet, l'estimation des probabilités d'occurrence d'un événement météorologique donné peut être obtenue suivant deux méthodes radicalement différentes (cf. R. Dischel par exemple [23]) : d'une part, de façon historique, en projetant les données passées et d'autre part, par une modélisation, en anticipant les données futures. Utiliser l'une ou l'autre de ces méthodes aura un impact considérable sur le choix de la technique d'évaluation des "weather derivatives" et sur les résultats obtenus.

Or la méthode d'anticipation est très délicate : d'une part, elle fait intervenir des modèles météorologiques complexes, dépendant de très nombreuses variables physiques. Elle est, de ce fait, extrêmement délicate pour des non-météorologues. De plus, aujourd'hui, seules des prévisions à très court-terme (six jours) et à long-terme (entre 3 et 5 ans) sont disponibles. Les premières résultent d'une étude sur la situation courante de l'atmosphère et de l'utilisation de modèles de circulation générale. Pour des prévisions à quelques jours, les conditions initiales sont perturbées. Une certaine convergence des résultats est observée jusqu'à 3 jours, puis, les météorologues proposent un indice de confiance pour la réalisation de tel ou tel scénario. Les prévisions à long-terme se fondent sur des raisonnements en moyenne et en écart. Mais, comme le soulignent Claude Basdevant et Katia Laval¹, il n'existe, à l'heure actuelle, pas de technique de prévision saisonnière. C'est un sujet de recherche notamment développé aux Etats-Unis et au Canada du fait du phénomène El Niño. Or, afin d'évaluer les "weather derivatives", il est nécessaire de considérer des événements à un horizon moyen, en général une saison.

¹Claude Basdevant et Katia Laval travaillent au laboratoire de météorologie de l'école Polytechnique.

Toutefois, afin d'étudier les "weather derivatives", la question n'est pas tant d'obtenir une prévision fiable des conditions météorologiques dans un avenir plus ou moins lointain mais plus une volonté de connaître la dynamique de l'évolution de la température. Pour ce faire, la température peut se suffire à elle-même dans sa compréhension. Il n'est pas nécessaire d'introduire des variables aussi complexes que celles utilisées par les météorologues pour leurs prévisions et l'étude de l'historique des données de température d'une station de référence donnée peut déjà être une première étape dans la connaissance du processus de température.

Apparemment, il n'existe aucun consensus sur la meilleure utilisation économétrique des données pour l'évaluation de produits dérivés climatiques. Deux visions s'opposent : d'une part, les "traders" qui se fondent sur un historique relativement court (10 ans environ) et veulent modéliser un processus à partir de ces données et d'autre part, les "assureurs" qui utilisent toutes les données disponibles sur des horizons beaucoup plus longs. Ces différences de points de vue peuvent être un facteur d'explication de la grande fourchette observée sur le marché actuellement.

De ce choix particulier peut survenir un problème : en effet, les résultats sont fortement dépendant de la taille de l'historique considérée. La volatilité "saute" si la longueur de l'historique diminue. D'autres problèmes d'instabilité peuvent apparaître : un changement dans la localisation de la station (altitude, proximité de montagnes, d'une zone côtière, d'un désert...), l'influence de l'urbanisation sur le réchauffement (surtout pour les stations situées près d'aéroports) ou même le changement des instruments de mesure, devenant plus précis au fil du temps. A cela, se rajoute le problème de traitement économétrique même des données, qui sont fortement dépendantes et souvent non-stationnaires.

Dans l'optique d'acquérir une meilleure connaissance de la température, nous nous intéressons à 30 ans de relevés quotidiens (moyenne sur 8 observations) de température au Parc Monsouris à Paris, sur la période de 1969 à 1998. Les températures sont exprimées en degrés Celsius. Aucune donnée n'est manquante (ni ne semble aberrante) dans cet historique. De plus, pour avoir des années de 365 jours uniquement, les "29 février" sont enlevés systématiquement.

Notre étude se décompose en plusieurs étapes : dans un premier temps, afin de mieux percevoir les données de température et leur distribution, nous allons calibrer leur densité à l'aide d'une méthode fondée sur les quatre premiers moments, puis, dans une seconde partie, nous étudierons plus en détail les extrêmes afin de mieux comprendre à quelle classe doit appartenir la distribution des températures. Enfin, dans un troisième temps, nous procéderons à une étude plus économétrique des données et nous proposons une dynamique pour la température moyenne quotidienne.

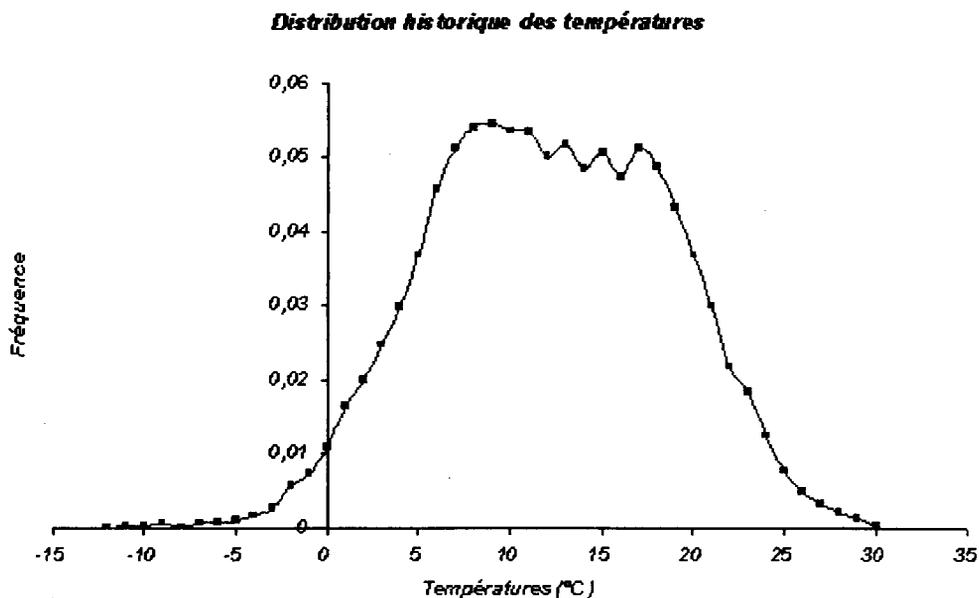
Notons, avant tout, que l'objet de ce chapitre et de cette étude, la température moyenne quotidienne, n'est pas une quantité réelle mais le fruit d'un calcul (moyenne de huit observations). Nous cherchons simplement à modéliser le processus sous-jacent possible de produits dérivés climatiques et non à donner une représentation de la réalité.

3.2 Etude de la densité des températures

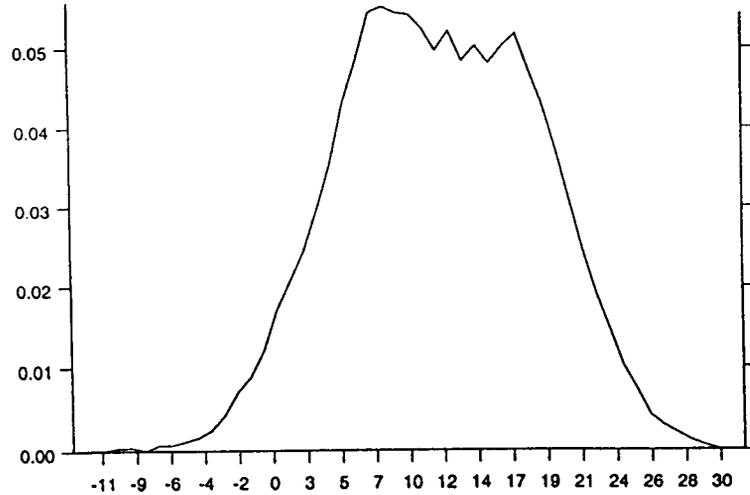
Une première approche des données de température a consisté en l'estimation de leur densité à l'aide d'une formule paramétrique. Pour cela, nous nous fondons sur la méthode proposée dans l'article de E.J. Dudewicz, E. F. Mykytka, J.S. Ramberg et P.R. Tadikamalla [30]. Beaucoup d'autres auteurs se sont intéressés à l'obtention de la distribution lorsque les premiers moments sont connus (cf., par exemple, les travaux de E. Jondeau et M. Rockinger [54]).

3.2.1 Représentation brute des données

De façon naïve, lorsque l'on représente les trente années de données quotidiennes par un histogramme, on obtient la représentation suivante :



D'autre part, la densité estimée "brutalement" par un logiciel de statistique (S+) est la suivante :



Densité estimée par S+

3.2.2 Présentation de l'article [30]

L'article auquel nous nous intéressons ici propose une estimation de la densité à l'aide des quatre premiers moments, sans aucune restriction sur le type de données utilisées. Il s'agit d'une généralisation de la distribution λ de Tukey [97]. La méthode présentée ici est très simple et peut être utile pour avoir une première idée de la densité lorsque le modèle sous-jacent est totalement inconnu.

De façon très générale, une loi de probabilité est en général définie par sa fonction de répartition ou par sa densité. Mais, elle peut également être définie par son quantile (s'il existe). Celui-ci est l'inverse de la fonction de répartition.

Ainsi, très simplement, une distribution caractérisée à l'aide de quatre paramètres $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ sera définie par le quantile suivant :

$$R(p) = \lambda_1 + \left(p^{\lambda_3} - (1-p)^{\lambda_4} \right) \frac{1}{\lambda_2} \quad \text{pour } p \in [0; 1] \quad (1)$$

avec λ_1 , un paramètre d'emplacement, λ_2 , un paramètre d'échelle et λ_3, λ_4 , deux paramètres de forme.

La densité correspondant à ce quantile est :

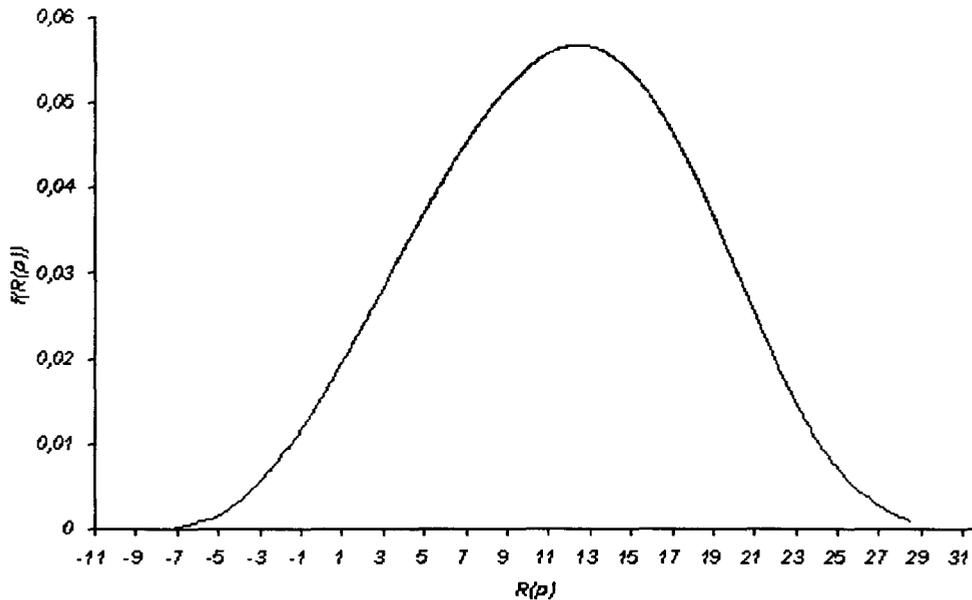
$$f(R(p)) = \frac{\lambda_2}{\left(\lambda_3 p^{\lambda_3-1} + \lambda_4 (1-p)^{\lambda_4-1} \right)} \quad \text{pour } p \in [0; 1] \quad (2)$$

Tracer la densité $(f(R(p)))$ en fonction de $R(p)$ pour des valeurs de $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ nécessite l'évaluation de (1) et de (2) pour des valeurs de $p \in [0; 1]$.

Les valeurs de $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ sont intimement liées aux valeurs des quatre premiers moments de la distribution. Les auteurs présentent une table en annexe de leur article permettant de trouver les valeurs de $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ une fois ces quatre moments calculés.

3.2.3 Résultats pour les données de température

La densité obtenue pour les données de température (données brutes i.e. avec tendance éventuelle et saisonnalité), à l'aide de cet article est la suivante :



Les valeurs obtenues pour les quatre paramètres sont :

$$\lambda_1 = 13,37725$$

$$\lambda_2 = 0,048988$$

$$\lambda_3 = 0,327300$$

$$\lambda_4 = 0,192450$$

La distribution des données de température semble être une distribution à support borné, ce que viendra confirmer l'étude sur les extrêmes.

On peut constater la pertinence de la méthode proposée par cet article. Le seul problème est la non-stationnarité de la densité si l'on regarde des historiques de température plus courts.

3.3 Etude des extrêmes de température

Une autre approche empirique intéressante consiste à regarder les valeurs extrêmes de température. De la distribution des extrêmes on peut déduire la famille de lois à laquelle appartient le processus des températures. Ceci est une information très importante pour toute simulation de température, et, par conséquent, pour toute valorisation de produits dérivés climatiques dont le sous-jacent est la température.

Historiquement, l'étude des extrêmes de température a toujours été reliée au développement même de la théorie des extrêmes. Nous rappelons ici quelques avancées capitales dans cette théorie et leurs applications à la météorologie, puis nous présentons une méthode graphique très simple permettant de classer les distributions d'extrêmes.

3.3.1 Quelques rappels sur les distributions d'extrêmes

Par l'observation de données météorologiques, E.J. Gumbel a conclu en 1935 ([45]) que la valeur maximale atteinte augmente "presque" linéairement avec le logarithme de la période étudiée (loi de Gumbel - relation linéaire). Toute la question réside dans le "presque". En effet, pour les températures, l'approximation de Gumbel surestime (loi de Weibull - relation convexe) et pour les pluies, elle sous-estime (loi de Fréchet - relation concave) : ces résultats ont été obtenus par N.A. Barricelli en 1943 ([5]) et par C.E.P. Brooks et N. Carruthers en 1953 ([12]). Nous reviendrons sur ces différents modèles de façon plus détaillée dans la partie suivante.

On distingue, dès lors, trois grandes catégories de distribution de valeurs extrêmes :

1. La loi de Gumbel, dite de type I, dont la fonction de répartition s'écrit :

$$F_Y(y) = \exp(-\exp(-y)) \quad \text{pour } y \in \mathbb{R}$$

2. La loi de Fréchet, dite de type II, dont la fonction de répartition s'écrit :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \exp(-y^{-k}) && \text{pour } y > 0 \\ &= 0 && \text{pour } y \leq 0 \end{aligned}$$

3. La loi de Weibull, dite de type III, dont la fonction de répartition s'écrit :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \exp\left(-(-y)^{-k}\right) && \text{pour } y < 0 \\ &= 1 && \text{pour } y \geq 0 \end{aligned}$$

De façon très générale, la fonction de répartition d'une distribution d'extrêmes s'écrit donc :

$$F_Y(y) = \exp\left(-\left(1 - \tau y\right)^{\frac{1}{\tau}}\right) \quad \text{pour } y > \frac{1}{\tau} \text{ si } \tau < 0 \text{ et pour } y < \frac{1}{\tau} \text{ si } \tau > 0$$

3.3.2 Etude de E.J. Gumbel ([45])

E.J. Gumbel a été le grand précurseur de la théorie des extrêmes. Ces travaux ont notamment portés sur l'étude de données météorologiques.

Notations et fréquence d'un événement météorologique extrême

Si N désigne le nombre de jours considérés dans une année (en général 365 jours), x_i la valeur d'une donnée météorologique le jour i (par exemple, la température moyenne ce jour) et si on suppose ces différentes réalisations indépendantes, alors la probabilité que l'une de ces valeurs soit inférieure à un seuil x est donnée par :

$$1 - \frac{f(x)}{N}$$

où $f(x)$ est le nombre moyen annuel de données supérieures à x (on remarque que $f(x) \geq 0$ et pour la suite on suppose que la situation $f(x) = 0$ est évitée).

La probabilité que le maximum des N valeurs soit inférieur à x est donnée par :

$$P^N(x) \triangleq \left(1 - \frac{f(x)}{N}\right)^N$$

soit, avec suffisamment de précision, pour N grand :

$$\exp(-f(x))$$

Pour $f(x) \triangleq \exp(-y)$ (soit $y \triangleq -\ln f(x)$), la probabilité que la valeur maximale sur une année soit inférieure à x (i.e. la fonction de répartition de la valeur maximale sur un an) est donnée par :

$$P(x) \triangleq \exp(-f(x)) = \exp(-\exp(-y))$$

$P(x)$ décrit $[0, 1]$ alors que $y = -\ln f(x)$ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

La densité est alors obtenue en dérivant $P(x)$ par rapport à x :

$$\frac{1}{\beta} \exp(-y - \exp(-y))$$

où β est défini par :

$$dy = \frac{1}{\beta} dx$$

Equation de E.J. Gumbel pour la courbe $y = y(x)$

En 1935, E.J. Gumbel ([45]) a montré que lorsque le nombre de valeurs considérés N est très grand, la courbe $y = y(x)$ est une droite. L'équation de cette droite est :

$$y = \frac{1}{\beta} (x - \xi_1)$$

où ξ_1 est la valeur la plus probable des maxima annuels répertoriés sur N années. Notons que ξ_1 est déterminé par :

$$\xi_1 = \bar{\xi} - \gamma\beta$$

où γ est la constante d'Euler ($\gamma = 0,577217$), $\bar{\xi}$ est la moyenne empirique des maxima annuels sur un historique de N années et

$$\beta = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma_1$$

avec σ_1 l'écart-type empirique de ces maxima annuels (β est obtenu à l'aide de l'expression des moments d'ordre 1 et 2).

Par conséquent :

$$\xi_1 = \bar{\xi} - 0,45005\sigma_1$$

Applications aux données du Parc Montsouris à Paris

Si on utilise la théorie développée par E.J. Gumbel pour l'étude des extrêmes de température à Paris, on obtient les deux tableaux suivants (les notations utilisées sont celles présentées précédemment, en particulier \bar{x} résulte d'un calcul empirique) :

	$\bar{\xi}$	σ_1	β	ξ_1
Données de Paris ($N = 30$ ans, en $^{\circ}C$)	26,5767	1,6790	1,3092	25,8210

où $\bar{\xi}$ et σ_1 sont des données obtenues directement à partir de l'historique (moyenne empirique et écart-type empirique des maxima annuels de température),

β est déterminé par l'équation :

$$\beta = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma_1$$

ξ_1 est obtenu par :

$$\xi_1 = \bar{\xi} - 0,45005\sigma_1$$

	ξ_{\max}^N	$\overline{\xi_{\max}^N}$	$\overline{\xi_{\min}^N}$
Données de Paris ($N = 30$ ans, en $^{\circ}C$)	27,7548	prévue 28,5104 observée 30	prévue 25,4875 observée 23,5

où ξ_{\max}^N est la valeur la plus probable pour le plus grand maximum annuel parmi N observations, obtenue grâce à :

$$\xi_{\max}^N = \xi_1 + \beta \ln N$$

$\overline{\xi_{\max}^N}$ est la valeur moyenne du plus grand maximum annuel de température sur un échantillon de N ans. La valeur prévue de $\overline{\xi_{\max}^N}$ est obtenue par la formule :

$$\overline{\xi_{\max}^N} = \bar{\xi} + \beta \ln N$$

$\overline{\xi_{\min}^N}$ est la valeur moyenne du plus petit maximum annuel de température sur un échantillon de N ans. La valeur prévue de $\overline{\xi_{\min}^N}$ est obtenue par la formule :

$$\overline{\xi_{\min}^N} = \bar{\xi} - \beta \sum_{r=1}^N (-1)^r C_N^r \ln r$$

Le deuxième tableau nous permet d'étudier l'écart théorique et observé entre la valeur maximale (resp. minimale) des maxima annuels sur un échantillon de N années et la valeur moyenne des ces maxima :

$$\begin{array}{l} \text{En théorie} : \\ \text{En pratique} : \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{\xi_{\max}^N} - \bar{\xi} = 1,9337 \\ \overline{\xi_{\min}^N} - \bar{\xi} = 1,0892 \\ \overline{\xi_{\max}^N} - \bar{\xi} = 3,4233 \\ \overline{\xi_{\min}^N} - \bar{\xi} = 3,0767 \end{array}$$

Comme le remarque N.A. Barricelli ([5]), l'asymétrie est plus faible en pratique entre les valeurs minimale et maximale, que ce que prévoit la théorie de E.J. Gumbel. Pour remédier à ce problème, N.A. Barricelli propose d'introduire une "hypothèse d'instabilité de la répartition de probabilité annuelle", ceci pouvant être liée à une modification climatique par exemple (hypothèse très en avance pour l'époque : l'article [5] a été publié en 1943).

3.3.3 Correction de N.A. Barricelli ([5])

Importance de l'écart-type moyen des maxima bi-annuels

N.A. Baricelli a montré en 1943 ([5]) que l'équation obtenue par E.J. Gumbel n'était pas parfaitement adaptée aux données météorologiques, notamment aux valeurs extrêmes de température (son étude porte sur la ville de Bergen). Il a alors proposé une version modifiée de cette équation en autorisant des variations dans le nombre annuel de valeurs quotidiennes supérieures au seuil x . Cela revient à corriger le coefficient β , introduit par E.J. Gumbel, d'un facteur, noté h . En effet, pour N.A. Barricelli, σ_2 , l'écart-type moyen des maxima bi-annuels fournit une information importante. On peut l'approximer à l'aide de ce coefficient h par :

$$\sigma_2^2 \sim \sigma_1^2 - \frac{1}{4h^2}$$

De l'estimation de ce paramètre h , on peut déduire, grâce à une table obtenue par N.A. Barricelli, les valeurs théoriques de $\overline{\xi_{\max}^N}$ et $\overline{\xi_{\min}^N}$.

Notons, que dans la théorie de E.J. Gumbel, h est infini puisque la variance est stationnaire. Ce paramètre h varie donc de ∞ lorsque la courbe $y = y(x)$ est une droite (Gumbel) à 0 lorsque les valeurs maximales sont distribuées normalement. La théorie n'autorise pas des valeurs négatives pour h (i.e. on a forcément $\sigma_2^2 < \sigma_1^2$).

Applications aux données du Parc Montsouris

Un travail très rapide sur les données nous permet de calculer l'écart-type empirique moyen des maxima bi-annuels. On obtient ainsi :

$$\sigma_2 = 1,6356$$

Dès lors, on peut calculer une valeur empirique pour le paramètre h :

$$h^2 = \frac{1}{4(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)} = 0,11629$$

soit $h = 0,3410$

N.A. Barricelli propose alors différentes situations correspondant à différentes valeurs de $h^2\beta^2$, i.e. $h^2\beta^2 \in \{0; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1; \infty\}$. Dans notre cas précis, on obtient :

$$h^2\beta^2 = 0,19932$$

Nous nous trouvons entre le cas $h^2\beta^2 = 0$ et le cas $h^2\beta^2 = \frac{1}{4}$. Regardons celui qui permet d'obtenir les valeurs théoriques de $\overline{\xi_{\max}^N}$ et $\overline{\xi_{\min}^N}$ qui correspondent le mieux aux observations :

$$h^2\beta^2 = 0 : \begin{array}{l} \overline{\xi_{\max}^N} = 30,05 \\ \overline{\xi_{\min}^N} = 23,1 \end{array}$$
$$h^2\beta^2 = \frac{1}{4} : \begin{array}{l} \overline{\xi_{\max}^N} = 30,37 \\ \overline{\xi_{\min}^N} = 22,78 \end{array}$$

Comme les valeurs observées sont :

$$\overline{\xi_{\max}^N} = 30$$
$$\overline{\xi_{\min}^N} = 23,5$$

Le cas $h^2\beta^2 = 0$ est celui qui permet de mieux représenter les données. Cela correspond au cas où les extrêmes sont distribués normalement. Ce résultat est cohérent avec ceux obtenus par N.A. Barricelli pour les villes de Bergen et d'Oslo. Le problème de faible asymétrie posé par les données pour le modèle de E.J. Gumbel est par conséquent résolu.

3.3.4 Etude de A.F. Jenkinson ([53]) sur les extrêmes en météorologie

Différentes études complémentaires à celles de E.J. Gumbel et N.A. Barricelli ont été réalisées sur la distribution d'extrêmes en météorologie. Entre autres, A.F. Jenkinson ([53]), en 1955, a étudié les températures extrêmes à Athènes entre 1900 et 1929.

Equation proposée par A.F. Jenkinson

A.F. Jenkinson remarque dans son article de 1955 que même si y est toujours une fonction croissante de x (puisque $f(x)$ décroît avec x et que $y = -\ln f(x)$), la dérivée de y par rapport à x n'a pas une monotonie constante. Par conséquent, le signe de la dérivée seconde de y par rapport à x n'est pas constant. Trois cas peuvent être distingués :

1. $\frac{dy}{dx}$ est constante en x , i.e. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ et la courbe $y = y(x)$ est linéaire et on dit que la loi suivie par les valeurs extrêmes est de type I (Gumbel),
2. $\frac{dy}{dx}$ est décroissante en x , i.e. $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ et la courbe $y = y(x)$ est concave et on dit que la loi suivie par les valeurs extrêmes est de type II (Frechet),
3. $\frac{dy}{dx}$ est croissante en x , i.e. $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ et la courbe $y = y(x)$ est convexe et on dit que la loi suivie par les valeurs extrêmes est de type III (Weibull).

A.F. Jenkinson propose alors une équation permettant de prendre en compte ces trois situations :

$$x = a(1 - \exp(-ky)) \quad (*)$$

où ak est positif. On a alors :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ak} \exp(ky)$$

Trois cas sont possibles et chacun d'entre eux correspond à une des lois décrites ci-dessus :

1. Si k est positif, alors $\frac{dy}{dx}$ est positif, la distribution des extrêmes est de type III :

$$\begin{array}{lll} y \rightarrow -\infty & x \rightarrow -\infty & \frac{dy}{dx} \rightarrow 0 \\ y = 0 & x = 0 & \frac{dy}{dx} = \frac{1}{ak} > 0 \\ y \rightarrow +\infty & x \rightarrow a & \frac{dy}{dx} \rightarrow +\infty \end{array}$$

2. Si k est négatif, alors $\frac{dy}{dx}$ est négatif, la distribution des extrêmes est de type II :

$$\begin{array}{lll} y \rightarrow -\infty & x \rightarrow a & \frac{dy}{dx} \rightarrow -\infty \\ y = 0 & x = 0 & \frac{dy}{dx} = \frac{1}{ak} < 0 \\ y \rightarrow +\infty & x \rightarrow +\infty & \frac{dy}{dx} \rightarrow 0 \end{array}$$

3. Si k est nul alors x tend vers la droite aky et la distribution des extrêmes est de type I.

De plus, A.F. Jenkinson montre que l'équation (*) qu'il propose est bien une solution générale de l'équation fonctionnelle de Fisher-Tippett ([37]) qui doit être satisfaite par les valeurs extrêmes :

$$P^n(x) = P(a(n)x + b(n))$$

où :

- $P(z)$ est la probabilité qu'une observation soit plus petite que z ;
- $P^n(z)$ est la probabilité que le maximum d'un échantillon de n observations soit inférieur à z ;
- $a(n)$ et $b(n)$ sont deux fonctions de n .

Détermination de la loi des extrêmes

D'après ce qui précède, on voit que la courbure du graphe $y = y(x)$ est très importante. A.N. Jenkinson relie ceci au ratio $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$. Il montre, en effet, que pour un échantillon de N données d'extrêmes :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = N^k$$

De ce fait :

$$k > 0 \Leftrightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} > 1$$

$$k < 0 \Leftrightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 1$$

$$k = 0 \Leftrightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1$$

Pour une série de données, on peut donc déterminer la loi suivie par les extrêmes en calculant le ratio $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$.

A.N. Jenkinson étudie des données de température pour la ville d'Athènes notamment et montre que les valeurs maximales suivent une loi de type III. Par conséquent, les extrêmes de température suivent ici une loi de Weibull. Ce résultat est cohérent avec ceux obtenus par d'autres auteurs, comme R. Sneyers sur des données de température de la ville de Bruxelles ([88]).

Application aux données du Parc Montsouris

De façon très rapide, on peut calculer l'écart-type empirique des maxima annuels de température de l'historique considéré. On obtient :

$$\sigma_1 = 1,6790$$

De la même façon, on peut calculer l'écart-type empirique des maxima bi-annuels de température du même historique. On obtient :

$$\sigma_2 = 1,6356$$

Nous sommes bien dans la situation où $\sigma_1 > \sigma_2$. Les extrêmes de température de l'historique considéré suivent une loi de type III (Weibull). L'indice k de la distribution peut être estimé empiriquement par :

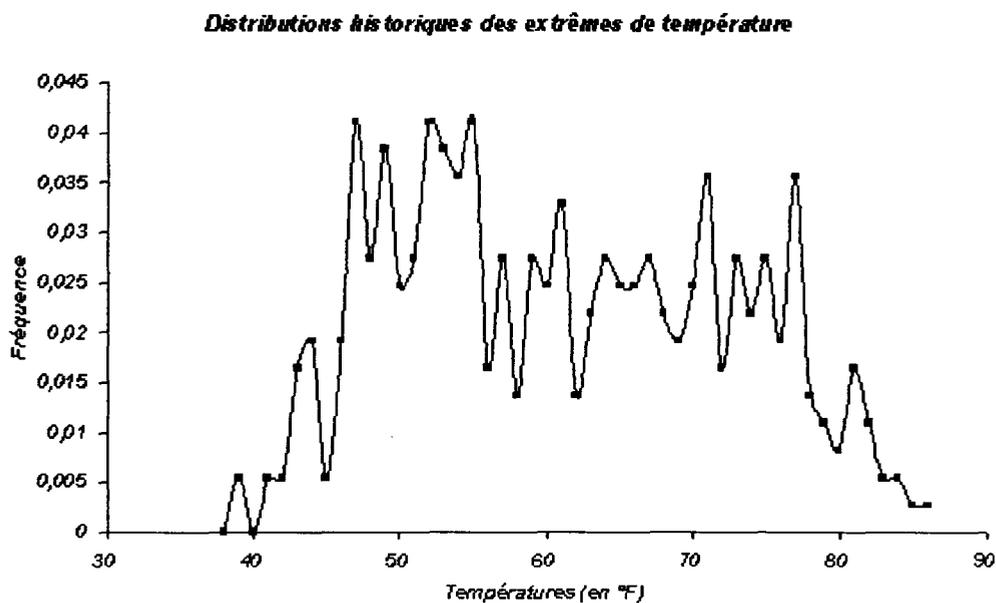
$$k = \frac{\ln\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)}{\ln N} = 7,6865 \times 10^{-3} > 0$$

3.3.5 Etude graphique des extrêmes de température du Parc Montsouris

Dans cette sous-section, nous allons vérifier ce résultat à l'aide de la méthode graphique décrite notamment par François Longin dans sa thèse ([61]). Cette méthode est également fondée sur une étude de la courbure des observations des fréquences des températures.

Première représentation graphique

Une représentation graphique très simple de la distribution empirique des extrêmes est donnée ci-dessous. Il s'agit de la distribution brute des extrêmes mensuels de température de l'historique considérée. Il y a donc 365 données. Celles-ci sont exprimées en degrés Fahrenheit :



Présentation de la méthode [61]

La méthode graphique décrite par François Longin, nécessite plusieurs étapes :

1. *Première étape* : Il s'agit d'une simple conversion des données, exprimées initialement en degrés Celsius, en degrés Fahrenheit à l'aide de la formule :

$$x \text{ } ^\circ\text{C} \iff \frac{9}{5}x + 32 \text{ } ^\circ\text{F}$$

De ce fait, on évite les problèmes liés aux températures négatives pour le calcul du logarithme des variations de température.

2. *Deuxième étape* : Puis, on calcule le logarithme des variations de température quotidienne entre un jour $t - 1$ et le suivant t , à savoir :

$$X_t = \ln \left(\frac{T_t}{T_{t-1}} \right)$$

3. *Troisième étape* : On sélectionne l'observation maximale d'un ensemble d'observations. Ainsi après n jours, on a n observations (x_1, x_2, \dots, x_n) . On prend la valeur maximale Y_1 . Pour les n jours suivants, on a une nouvelle valeur maximale Y_2 et ainsi de suite jusqu'à la dernière valeur maximale Y_N , si on a nN observations.

On suppose que les observations Y_i sont tirées de la distribution de forme générale pour les extrêmes :

$$F_Y(y) = \exp \left(- (1 - \tau y)^{\frac{1}{\tau}} \right) \quad \text{pour } y > \frac{1}{\tau} \text{ si } \tau < 0 \text{ et pour } y < \frac{1}{\tau} \text{ si } \tau > 0$$

4. *Quatrième étape* : On classe les Y_i par ordre croissant. On obtient alors :

$$Y'_1 \leq Y'_2 \leq \dots \leq Y'_N$$

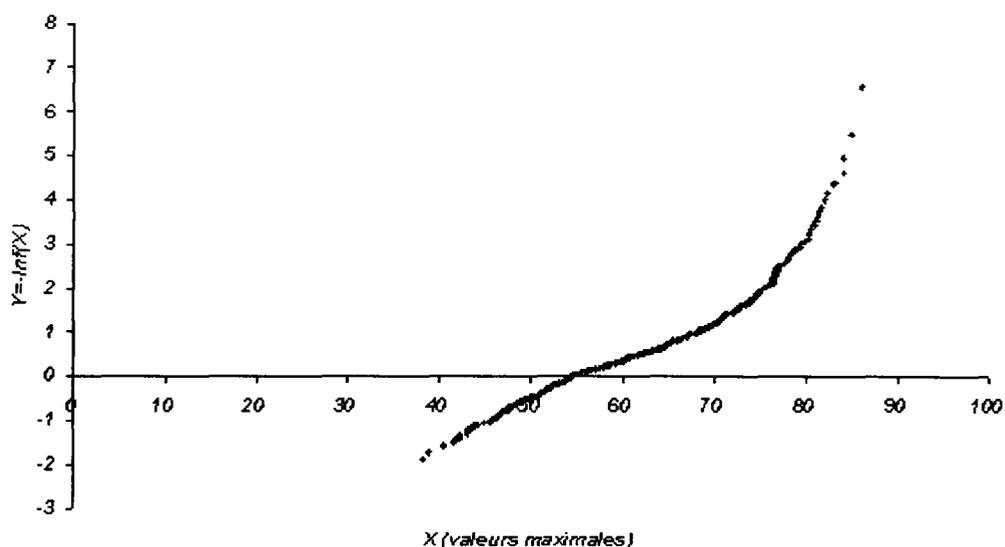
où la suite (Y'_m) , m varie de 1 à N , est croissante.

5. *Cinquième étape* : On trace le graphe $(\ln \left(\frac{m}{N+1} \right); Y'_m)$ pour m variant de 1 à N .

Ce graphique permet de déterminer géométriquement la loi des extrêmes. En effet, si le graphe obtenu a une courbure linéaire, les données extrêmes ont une distribution limite de type I (loi de Gumbel), si le graphe obtenu a une courbure concave, les données extrêmes ont une distribution limite de type II (loi de Fréchet), si le graphe obtenu a une courbure convexe, les données extrêmes ont une distribution limite de type III (loi de Weibull). De là, on peut en déduire un ensemble de familles de distribution auxquelles appartient la distribution des données complètes (i.e. les données de variations quotidiennes de température).

Résultats pour les extrêmes de température

Le graphe obtenu pour les données de température est le suivant :



Lorsque l'on utilise cette méthode en prenant $n = 30$ (étude sur un mois) et $N = 365$ (365 mois d'observations) - ce qui permet d'avoir un échantillon de valeurs extrêmes de plus grande taille -, la courbure du graphe obtenu est convexe. Il semblerait que l'on soit en présence d'une *distribution de type III*, ce qui correspondrait à une distribution sous-jacente à support borné. Ce résultat confirme les résultats obtenus dans les différents articles de la littérature concernant les extrêmes de température.

Impact sur la distribution des température

Le résultat obtenu ci-dessus implique certaines restrictions sur la distribution des températures. Celle-ci doit être à support borné. Une telle conclusion ne paraît pas absurde, puisque, intuitivement, les températures ne peuvent pas prendre des valeurs infinies.... Toutefois, la loi normale, classiquement utilisée comme nous le verrons dans le chapitre suivant, ne permet pas de représenter correctement d'un point de vue théorique la distribution des températures, tout comme la loi hyperbolique, utilisée par P. Tankov, qui ne convient pas non plus.

3.4 Etude économétrique des données du Parc Mon-souris (Paris)

Je tiens à remercier Christian Yann Robert, étudiant en thèse au C.R.E.S.T., pour ses conseils introductifs, Peter Tankov, étudiant en thèse au C.M.A.P., Ecole Polytechnique, et Emmanuel Bacry, chercheur au C.N.R.S., pour leur aide précieuse concernant l'utilisation optimale de Matlab et de toutes ses possibilités, et enfin Météo France pour les données sur lesquelles se fonde cette étude. D'autre part, l'agencement des différents ré-

sultats de ce chapitre et du suivant doivent beaucoup aux remarques pertinentes de Mickaël Rockinger, professeur au Groupe H.E.C..

Trouver un modèle de température n'est pas du tout chose triviale. Toutefois, l'enjeu est important : en effet, une fois le modèle trouvé et calibré, des "prix historiques" (i.e. espérance des flux futurs du contrat actualisés, calculés à partir des données historiques) pourront alors être proposés, grâce à des simulations numériques. Ces prix pourront servir de références pour des études plus théoriques d'évaluation des produits dérivés de température. Dans cette section, nous allons mener une étude économétrique sur les données de température en vue de proposer une dynamique pour le sous-jacent de certains produits climatiques.

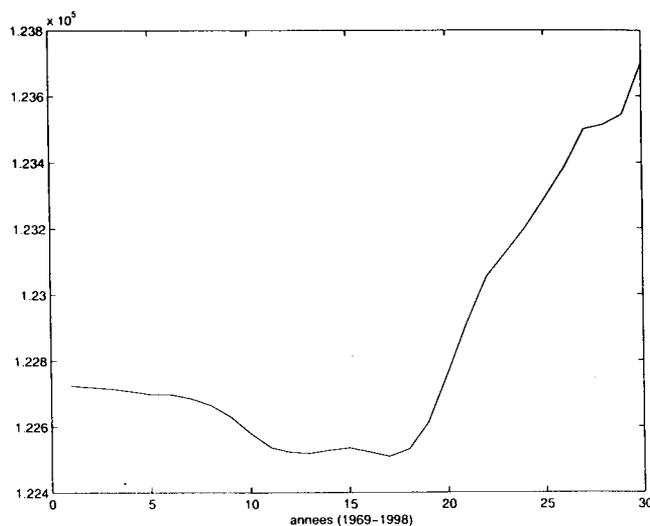
Une étude très naïve des données de températures permet d'exhiber trois caractéristiques essentielles à la dynamiques de la température. Celle-ci se décompose en effet en une tendance linéaire et une composante saisonnière, toutes deux déterministes, et en une composante aléatoire, la partie résiduelle :

3.4.1 La tendance

A l'heure actuelle, les questions relatives au réchauffement global sont au coeur de bons nombres de discussion. Il est intéressant de regarder si un tel phénomène est visible et significatif sur l'historique dont nous disposons.

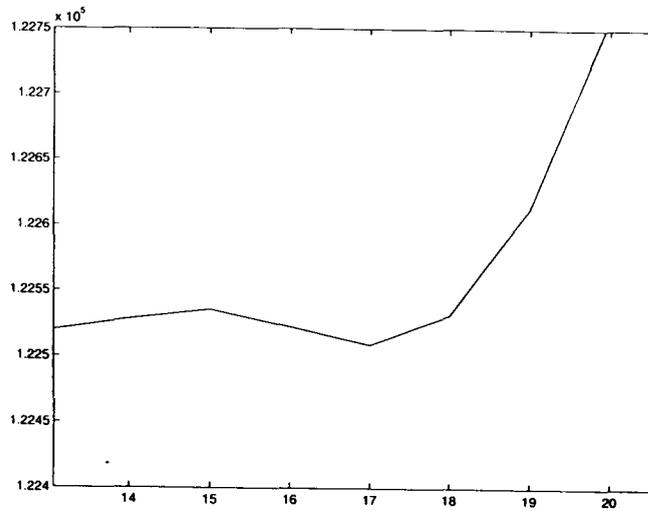
Observation de la tendance

A partir des données du Parc Montsouris, il est possible de remarquer deux parties dans l'historique : une première phase concerne les années 1969 – 1984, où aucune tendance notable n'apparaît. Une deuxième phase, après 1985 (17^{ème} année de l'historique), laisse apparaître un phénomène de réchauffement linéaire.



Recherche du point de rupture

ou de façon plus précise :



Zoom sur le point de rupture

Calibration de la tendance

La tendance, notée M_t , est donc modélisée en deux temps (t désigne un jour donné) :

$$\text{si } t \text{ se trouve avant l'année 1985} : M_t \equiv M_0$$

$$\text{si } t \text{ se trouve après l'année 1985} : M_t = M_0 + m \times t$$

La méthode des moindres carrés ordinaires permet de calibrer les paramètres. On obtient alors :

$$M_0 = 11,4656$$

$$m = 2,0322 \times 10^{-4}$$

M_0 correspond à la température "moyenne" de l'historique, en quelque sorte. Les intervalles de confiance de ces paramètres sont, au seuil de 95% :

$$M_0 \in [11,3879; 11,5433]$$

$$m \in [1,6463 \times 10^{-4}; 2,4180 \times 10^{-4}]$$

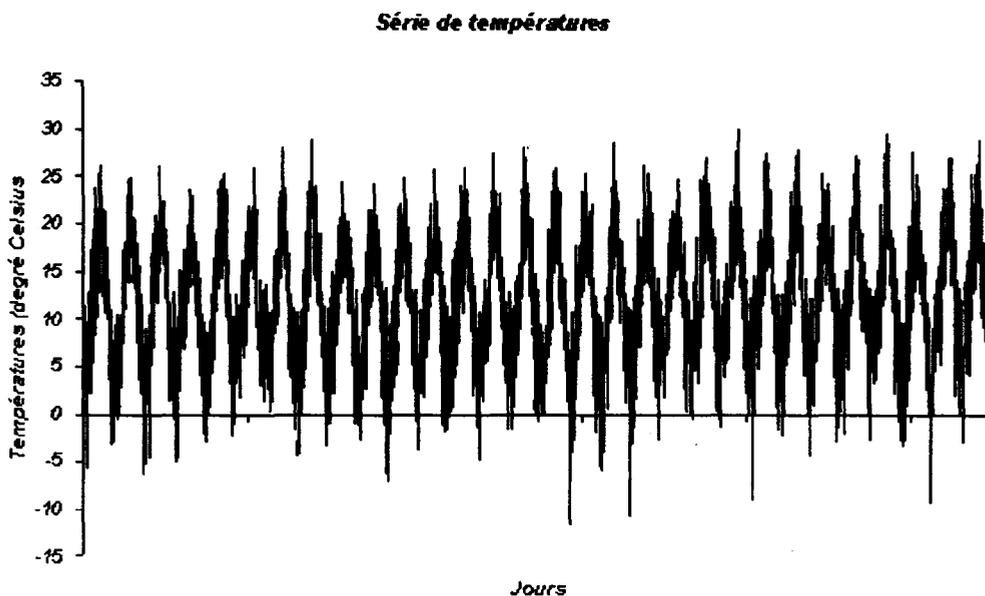
Notons ici que le pas de temps est très important. Le fait que les données considérées soient quotidiennes n'est pas un élément anodin.

Ce phénomène de réchauffement climatique semble être relativement général en France: en effet, par exemple, O. Roustant ([85]) observe également une telle tendance pour des données de température de la station de Lyon-Bron et P. Tankov ([92]) pour la ville de Grenoble.

3.4.2 La saisonnalité

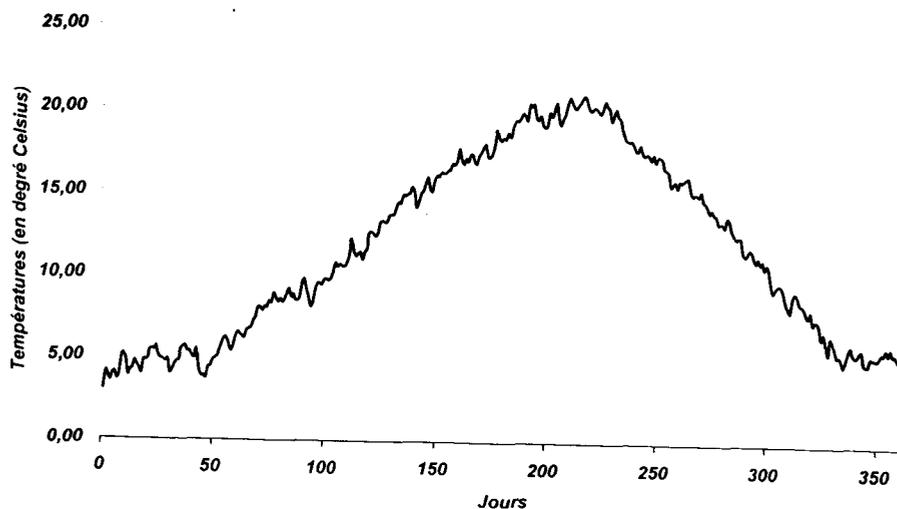
Observation de la saisonnalité

De façon peu surprenante, les températures ont une forte composante saisonnière. Ainsi, en regardant l'évolution des températures à Paris sur une période de 30 années, on peut observer la forte saisonnalité des données :

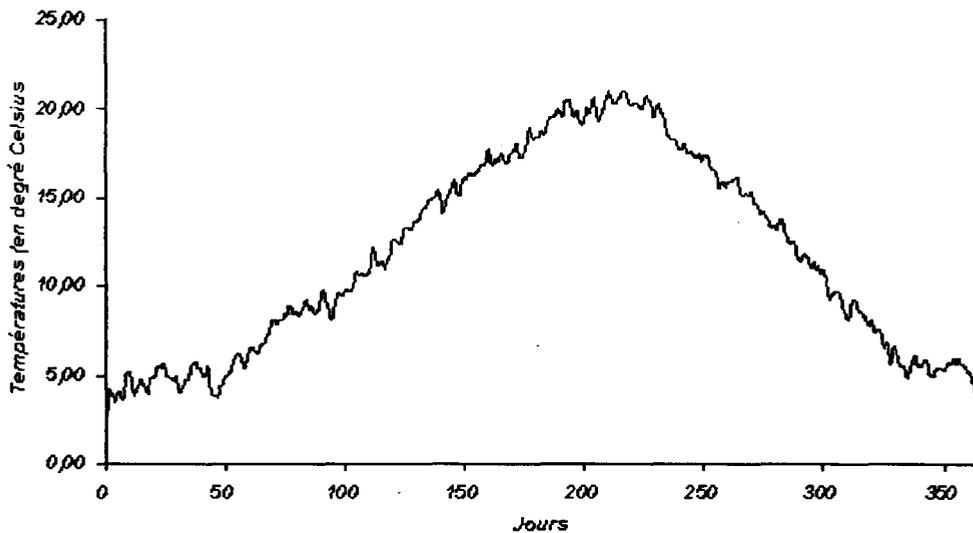


Estimation de la composante saisonnière

Première méthode: Pour estimer cette composante saisonnière et déterministe, des données de température, une première méthode très simple consiste à calculer jour par jour la moyenne des températures de l'historique : par exemple, une valeur moyenne pour tous les "15 janvier" de l'historique. En procédant de cette façon, on obtient :



Estimation moyenne de la saisonnalité

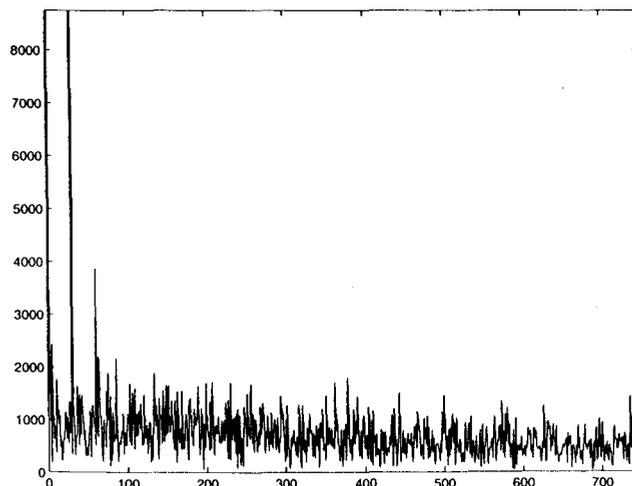


Il s'agit vraisemblablement d'une sinusoïde, dont le niveau moyen se trouve autour de $11,7^{\circ}\text{C}$, température moyenne sur tout l'historique, lorsque la tendance n'a pas été ôtée.

Deuxième méthode : Une deuxième approche, plus précise, consiste à regarder le périodogramme des données. Celui-ci revient à tracer les valeurs suivantes en fonction de n :

$$\widehat{T}_n = \sum_{k=0}^{N-1} T_k \exp\left(i \frac{2\pi kn}{N}\right)$$

où T_k est la k -ième température de l'historique dont la taille $N = 10950$. On obtient alors :



Les deux "pics" les plus importants correspondent à des abscisses respectives de 30 et 60. Cela signifie donc que les deux phénomènes de saisonnalité les plus importants sont ceux de période 1 an et de période 6 mois, puisque l'historique des données quotidiennes considéré comporte 30 années. Nous nous limitons à la prise en considération de ces deux harmoniques, qui contiennent beaucoup d'énergie relative au signal de départ. C'est un choix à priori de modélisation : en effet, il nous faut arbitrer entre une forte cohésion avec les données et une certaine simplicité du modèle. D'autre part, proposer un seuil de significativité, au delà duquel les "pics" doivent être pris en compte, nécessite une hypothèse quant à la distribution des données initiales (indépendance, distribution Gaussienne, par exemple...). Notre objectif étant l'étude même de la distribution de ces données, il nous semble préférable de se limiter à la prise en compte de ces deux périodes.

Calibration de la composante saisonnière sur les données

La saisonnalité, notée S_t , est par conséquent modélisée à l'aide d'une somme de sinusoides de période 1 an et 6 mois :

$$S_t = a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + b_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + a_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + b_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right)$$

La méthode des moindres carrés ordinaires permet de calibrer les différents paramètres. On obtient :

$$\begin{aligned} a_1 &= -2,6084 \\ b_1 &= -7,2889 \\ a_2 &= 0,7105 \\ b_2 &= 0,0435 \end{aligned}$$

Les intervalles de confiance pour les différents paramètres sont, au seuil de 95% :

$$\begin{aligned} a_1 &\in [-2,6971; -2,5198] \\ b_1 &\in [-7,3776; -7,2003] \\ a_2 &\in [0,6219; 0,7992] \\ b_2 &\in [-0,0451; 0,1321] \end{aligned}$$

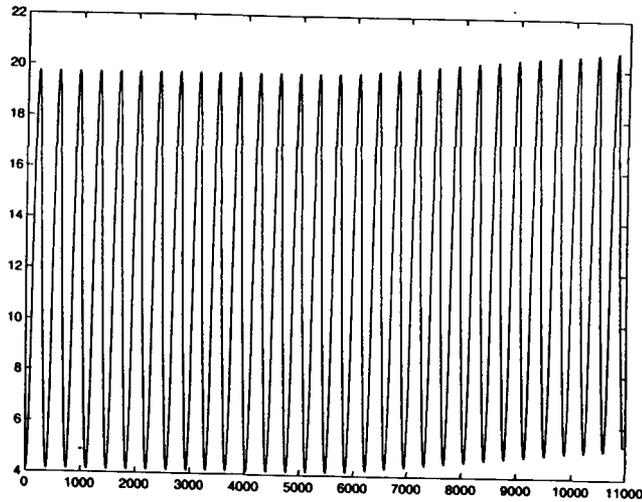
Notons qu'il n'y a pas de terme constant, puisque celui-ci a déjà été pris en compte dans la tendance M .

3.4.3 Modélisation de la partie déterministe de la température

La partie déterministe de la température comporte la tendance M et la saisonnalité S :

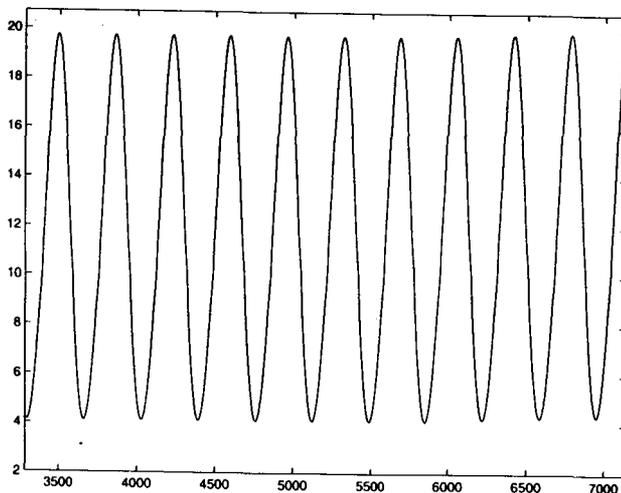
$$\begin{array}{ll} M_0 + a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + b_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + a_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + b_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right) & \text{avant 1985} \\ M_0 + mt + a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + b_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + a_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + b_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right) & \text{après 1985} \end{array}$$

Graphiquement, ceci peut être représenté par :



Composante déterministe de la série de températures

ou plus précisément, lorsque l'on se concentre sur une partie des données :

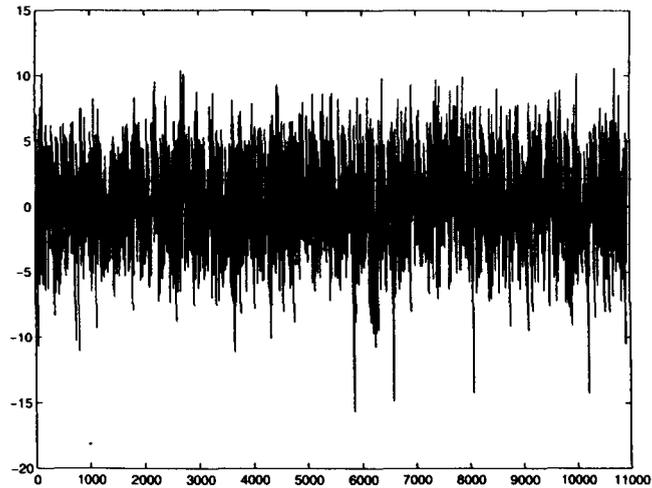


Lorsque l'on retire cette composante déterministe à la série de température d'origine, il reste la partie aléatoire résiduelle, que nous allons étudier dans la section suivante.

3.4.4 Partie résiduelle

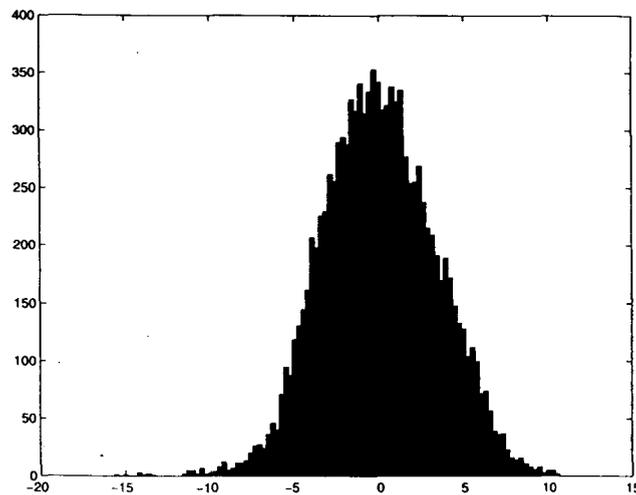
Observation de la partie résiduelle et comparaison avec la loi normale

La partie résiduelle est représentée par le graphe suivant :



Composante résiduelle de la série (sans tendance ni saisonnalité)

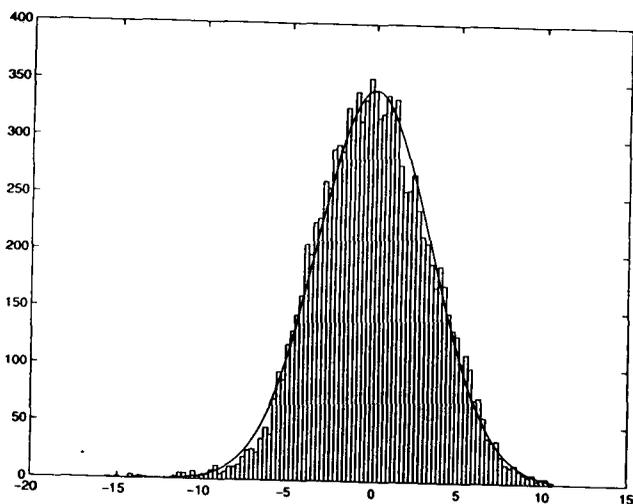
L'histogramme de ces résidus est le suivant :



La ressemblance avec la distribution d'une loi normale est relativement importante (forme en cloche, symétrie assez importante). Pour pouvoir comparer plus précisément ces deux distributions, il convient de préciser les deux premiers moments de la série résiduelle :

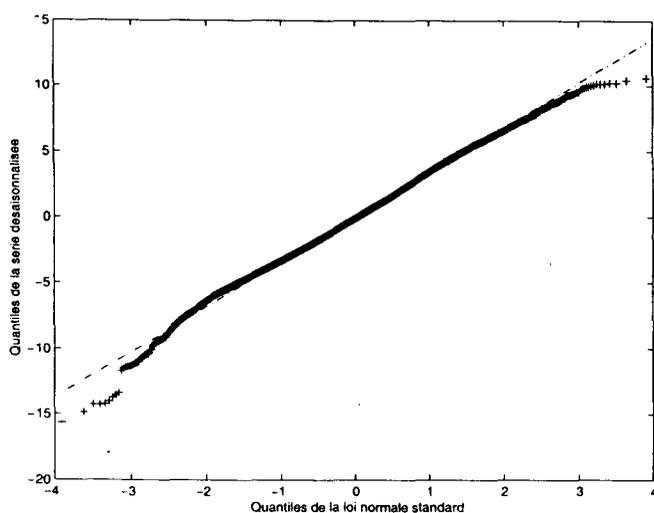
$$\begin{aligned} \text{moyenne} &= 0 \\ \text{écart - type} &= 3,3450 \end{aligned}$$

Notons qu'il est tout à fait normal de trouver une moyenne nulle, puisque l'on a ôté la tendance à la série. Lorsque l'on compare graphiquement l'histogramme des résidus avec la densité d'une loi normale de mêmes caractéristiques, on observe une quasi-adéquation, malgré une asymétrie à gauche de la distribution des résidus :



Comparaison entre les résidus et la loi normale de mêmes caractéristiques

Ceci est confirmé par le "QQ - plot" des résidus qui relie les quantile d'une loi normale avec ceux des résidus. On observe une parfaite adéquation pour les valeurs intermédiaires mais des difficultés pour les valeurs extrêmes, traduisant l'asymétrie de la distribution des résidus :

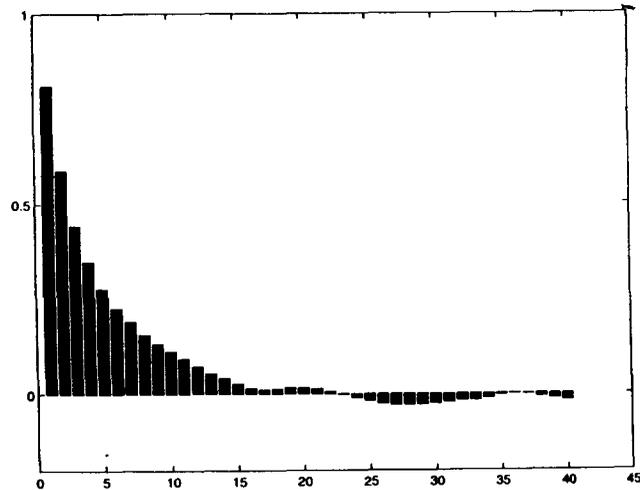


QQ-plot des résidus

Notons que nous pourrions, de façon identique, comparer la skewness et la kurtosis de cet historique avec celle d'une loi normale centrée et de même variance.

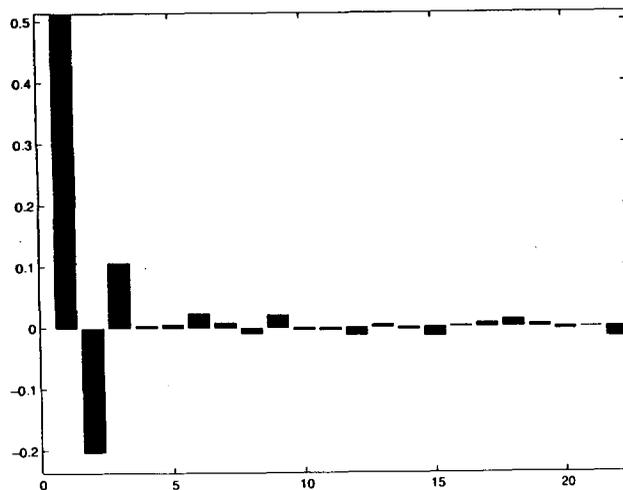
Analyse de l'autocorrélation des résidus

Pour préciser une bonne modélisation de la partie résiduelle, regardons maintenant l'auto-corrélation et l'autocorrélation partielle des données. On peut alors noter que les données de température ont une dépendance longue, à décroissance de forme exponentielle. Les données désaisonnalisées sont au moins autocorrélées de façon importante jusqu'à l'ordre 23!



Autocorrélation des résidus

Toutefois, d'après l'autocorrélogramme partiel, les autocorrélations partielles semblent très significatives jusqu'à l'ordre 3, avec peut-être un problème à l'ordre 6 et à l'ordre 9 :



Autocorrélation partielle des résidus

En effet, le seuil déterminant la prise en compte de l'autocorrélation partielle est, pour un niveau de 95% :

$$\frac{2}{\sqrt{nb \text{ de données}}}$$

soit ici 0,019 (le nombre de données est 10950). Les autocorrélations d'ordre 6 et 9 sont légèrement supérieures à ce seuil. Afin de décider quel sera l'ordre du modèle auto-régressif choisi, il convient d'effectuer le test de Ljung-Box relatif à l'autocorrélation des résidus. Lorsque l'on suppose que l'ordre est 3 :

$$p - value = 0,3081 \gg 0,05$$

L'hypothèse d'absence de corrélation des résidus du modèle $AR(3)$ ne peut pas être rejetée. Même si cette valeur est plus importante pour une $AR(9)$, puisque la p -value est alors égale à 0,8795, les résidus peuvent être plus simplement représentés par un modèle autorégressif d'ordre 3.

Modélisation des résidus à l'aide d'un $AR(3)$

Calibration du modèle $AR(3)$ Les résidus, notés R_t , sont donc modélisés à l'aide d'un modèle autorégressif d'ordre 3 :

$$R_t = \Phi_1 R_{t-1} + \Phi_2 R_{t-2} + \Phi_3 R_{t-3} + \varepsilon_t$$

La méthode des moindres carrés ordinaires permet de calibrer les paramètres. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= 0,9957 \\ \Phi_2 &= -0,3063 \\ \Phi_3 &= 0,1066\end{aligned}$$

Les intervalles de confiance de ces paramètres sont, au seuil de 95% :

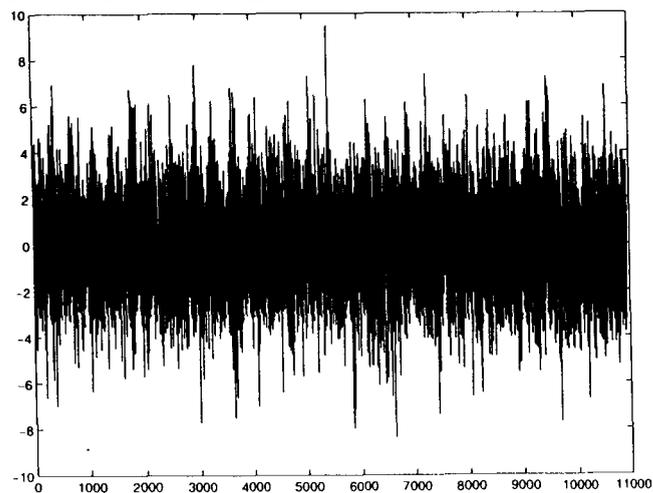
$$\begin{aligned}\Phi_1 &\in [0,9771; 1,0144] \\ \Phi_2 &\in [-0,3320; -0,2806] \\ \Phi_3 &\in [0,0880; 0,1252]\end{aligned}$$

Notons que la variance des résidus de l' AR est plus faible que celle de la série résiduelle :

$$3,6453 < (3,3450)^2$$

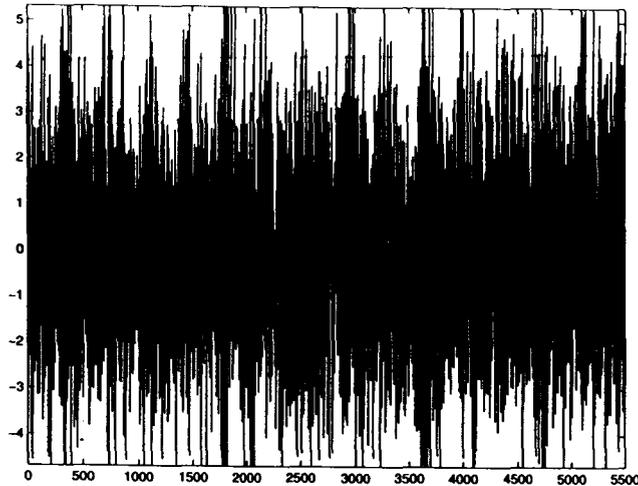
Etude des résidus de l' $AR(3)$

Lorsque l'on représente la série des résidus de l' AR , on obtient un graphe qui ressemble "grossièrement" à celui d'un bruit blanc.



Résidus de l' $AR(3)$

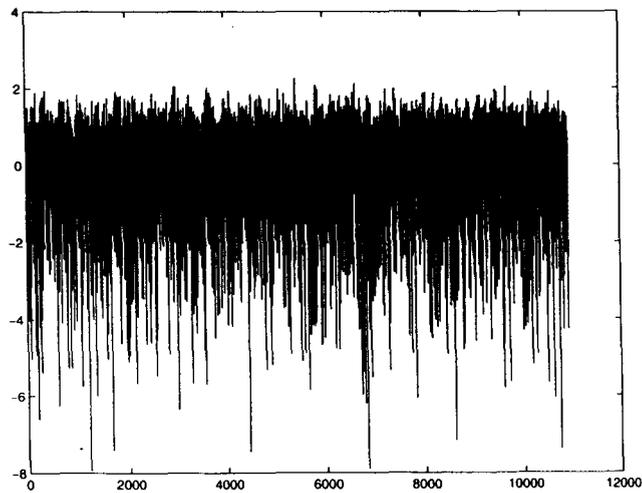
Toutefois, en regardant de plus près, on peut noter une certaine saisonnalité dans la série.



Cette composante peut donc s'écrire comme :

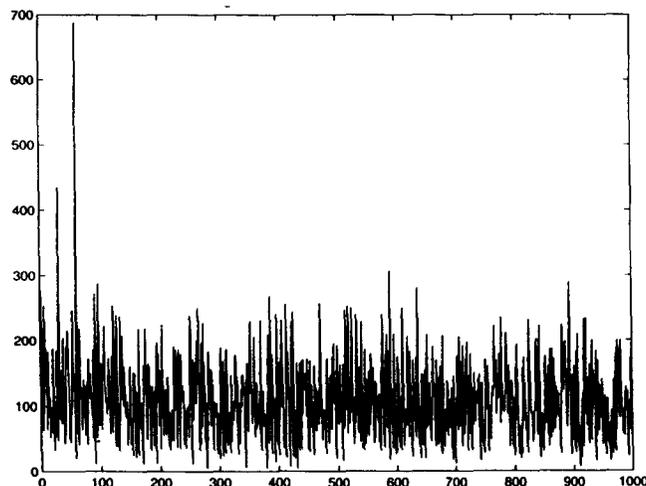
$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t$$

où σ_t est la volatilité des résidus de l'AR, supposée strictement positive, et d'après le graphe ci-dessus, n'est pas constante dans le temps. Si on suppose, comme le fait P. Tankov ([92]) que la volatilité est indépendante du signe du bruit η , alors on peut prendre le logarithme de la valeur absolue des résidus de l'AR et étudier alors la saisonnalité de $\log(\sigma_t)$. Cette nouvelle série se présente sous la forme :



Logarithme de la valeur absolue des résidus de l'AR

Le périodogramme de cette série confirme la présence d'une saisonnalité :



Les deux "pics" les plus importants correspondent à des abscisses respectives de 30 et 60. Cela signifie donc que les deux phénomènes de saisonnalité les plus importants sont ceux de période 1 an et de période 6 mois, puisque l'historique des données quotidiennes considéré comporte 30 années. Nous nous limitons, comme précédemment, à la prise en considération de ces deux harmoniques, qui contiennent beaucoup d'énergie relative au signal.

Calibration de la composante saisonnière sur les résidus de l'AR La saisonnalité des résidus modifiés (i.e. logarithme de la valeur absolue des résidus de l'AR) est identique à celle des résidus de l'AR. Par conséquent, on peut modéliser la volatilité de cette série résiduelle à l'aide de l'exponentielle (garantissant la stricte positivité) d'une constante et d'une somme de sinusoides de périodes 1 an et 6 mois :

$$\exp \left[\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \sin \left(\frac{2\pi t}{365} \right) + \bar{b}_1 \cos \left(\frac{2\pi t}{365} \right) + \bar{a}_2 \sin \left(\frac{4\pi t}{365} \right) + \bar{b}_2 \cos \left(\frac{4\pi t}{365} \right) \right]$$

La méthode des moindres carrés ordinaires permet de calibrer les différents paramètres. On obtient :

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 &= -0,0253 \\ \bar{a}_1 &= 0,0496 \\ \bar{b}_1 &= 0,0628 \\ \bar{a}_2 &= -0,0600 \\ \bar{b}_2 &= 0,1112 \end{aligned}$$

Les intervalles de confiance pour les différents paramètres sont, au seuil de 95% :

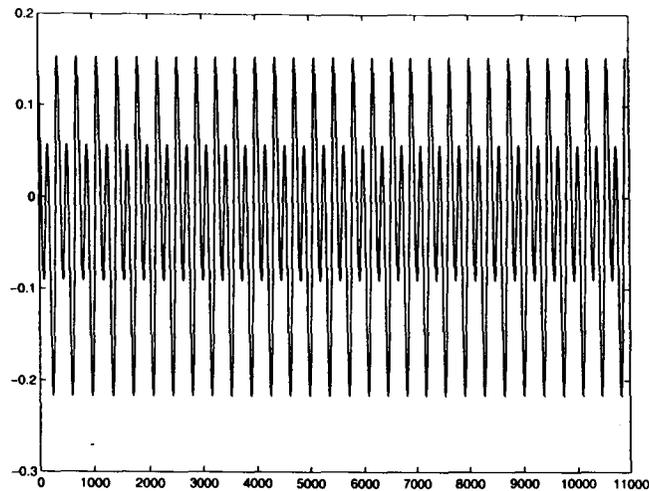
$$\begin{aligned} \bar{a}_0 &\in [-0,0465; -0,0041] \\ \bar{a}_1 &\in [0,0196; 0,0795] \end{aligned}$$

$$\bar{b}_1 \in [0,0328; 0,0927]$$

$$\bar{a}_2 \in [-0,0900; -0,0301]$$

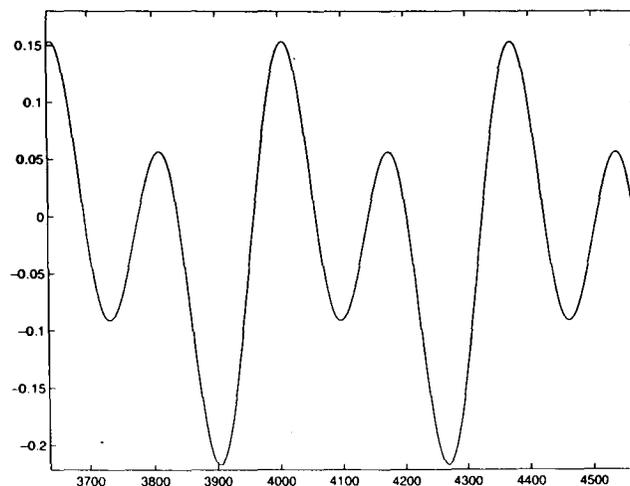
$$\bar{b}_2 \in [0,0813; 0,1412]$$

La saisonnalité de la volatilité des résidus de l'AR, i.e. σ_t , peut graphiquement être représentée par :



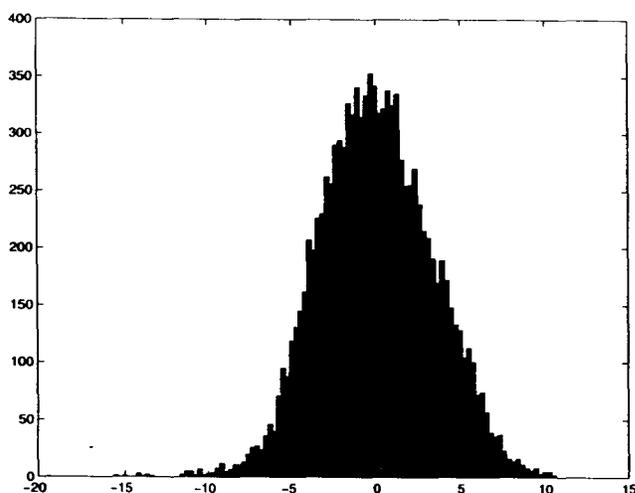
Composante saisonnière de la volatilité des résidus de l'AR(3)

ou plus précisément :



Etude des résidus de l'AR après désaisonnalisation de la volatilité Lorsque l'on divise la série des résidus de l'AR par cette composante, il reste la partie résiduelle du modèle, η , que nous allons maintenant étudier :

Observation de la partie résiduelle du modèle et comparaison avec la loi normale Lorsque l'on étudie la distribution de partie résiduelle de l'AR dont on a ôté la composante saisonnière, modélisée comme précédemment, on obtient l'histogramme suivant :



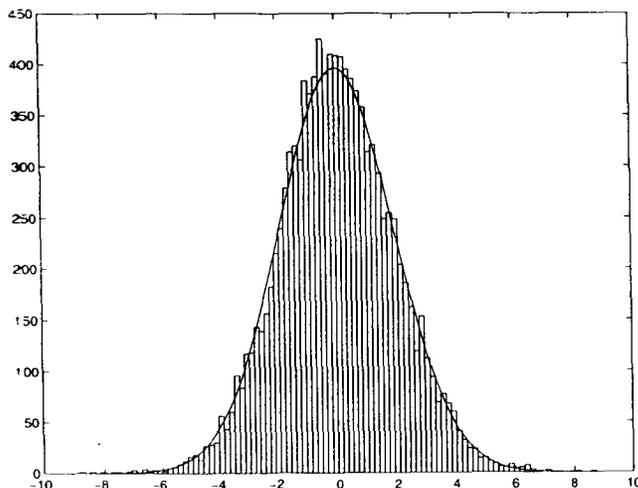
Résidus du modèle (après désaisonnalisation de la variance)

La ressemblance avec la distribution d'une loi normale est encore plus importante que précédemment (forme en cloche, symétrie assez importante). Pour pouvoir comparer plus précisément ces deux distributions, il convient de préciser les deux premiers moments de la série résiduelle :

$$\text{moyenne} = 0$$

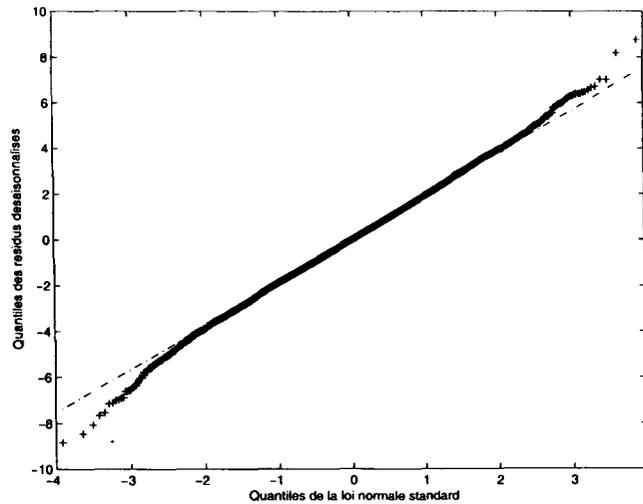
$$\text{écart - type} = 1,9362$$

Notons qu'il est tout à fait normal de trouver une moyenne nulle, pour les mêmes raisons que précédemment. Lorsque l'on compare graphiquement l'histogramme des résidus avec la densité d'une loi normale de mêmes caractéristiques, on observe une quasi-adéquation. L'asymétrie observée précédemment est beaucoup moins nette :



Comparaison entre les résidus du modèle et la loi normale de mêmes caractéristiques

Ceci est confirmé par le "QQ - plot" des résidus qui relie les quantiles d'une loi normale avec ceux des résidus du modèle. On observe une parfaite adéquation pour les valeurs intermédiaires et une meilleure approximation pour les valeurs extrêmes :



QQ-plot des résidus du modèle

Le test de Lilliefors, permettant de comparer la série des résidus du modèle avec la loi normale de mêmes caractéristiques (test semblable au test de Kolmogorov-Smirnov, mais avec calibration simultanée des paramètres de la loi normale), ne permet pas de rejeter l'hypothèse de normalité des résidus au seuil de 1% :

$$p - value = 0,0220 > 0,01$$

Par conséquent, en première approximation, on peut considérer que les résidus du modèle η suivent une loi normale. Toutefois, nous verrons qu'une telle hypothèse est contraire aux résultats de l'étude des extrêmes de température.

3.4.5 Synthèse des résultats obtenus

Finalement, la température à Paris-Parc Montsouris, à une date t , peut être modélisée de la façon suivante :

$$T_t = M_t + S_t + R_t$$

où :

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 && \text{avant 1985} \\ &= M_0 + mt && \text{après 1985} \end{aligned}$$

$$S_t = a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + b_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + a_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + b_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right)$$

$$\begin{aligned}
R_t &= \Phi_1 R_{t-1} + \Phi_2 R_{t-2} + \Phi_3 R_{t-3} \\
&\quad + \exp \left[\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \sin \left(\frac{2\pi t}{365} \right) + \bar{b}_1 \cos \left(\frac{2\pi t}{365} \right) + \bar{a}_2 \sin \left(\frac{4\pi t}{365} \right) + \bar{b}_2 \cos \left(\frac{4\pi t}{365} \right) \right] \eta_t \\
\eta_t &\sim \mathcal{N}(0, 1)
\end{aligned}$$

Par la suite, nous nous référerons à cette modélisation sous le nom de modèle "brut" de température, afin de la différencier des autres modèles étudiés.

Chapitre 4

Evaluation d'une option climatique par simulation

Ce chapitre est consacré à l'évaluation d'une option climatique selon différents modèles pour le processus sous-jacent de température. Quatre représentations de la dynamique de la température sont présentées dans un premier temps et calibrés sur les données du Parc Monsouris à Paris. Puis, nous procédons à des simulations de Monte-Carlo suivant chacun des modèles et comparons les résultats obtenus ainsi que leur robustesse à une mauvaise spécification des différents paramètres de calibration.

4.1 Calibration de différents modèles de température

Cette section présente rapidement quelques modélisations de la dynamique de la température ainsi que leur calibration. De telles modélisations sont utiles pour l'évaluation des différents produits dérivés climatiques, comme nous le verrons plus en détail dans la section suivante. Chacun des modèles est présenté puis calibré à partir des données du Parc Monsouris à Paris. Cet historique de données servira de fondement pour la comparaison des différents modèles dans l'évaluation d'un produit dérivé climatique donné.

Nous ne prétendons pas présenter toutes les études sur la dynamique de la température. Beaucoup d'auteurs se sont intéressés à ce sujet et de plus en plus d'articles sont consacrés à ce thème de recherche (parmi les plus récents, on peut citer l'analyse très complète de données américaines de S. Campbell et F. Diebold [15]).

4.1.1 Modèle de R. Dischel ([26])

Présentation du modèle

Pour représenter le processus de température, R. Dischel utilise un processus classique en finance pour la dynamique du taux court dans les modèles de type Vasicek. Il représente, en effet, celle-ci à l'aide d'un processus d'Orstein-Uhlenbeck. Ce modèle avec retour à la moyenne est apparemment le modèle le plus fréquemment utilisé à l'heure actuelle. Une

des versions les plus simples est sans doute :

$$dT_t = \alpha (\theta_t - T_t) dt + \sigma_t dW_t \quad (T)$$

où :

- T_t est la température à la date t ,
- θ_t est la moyenne historique des températures pour la date t (i.e. valeur moyenne des températures de la date t de l'historique),
- $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard,
- σ_t est le paramètre de volatilité, estimé historiquement,
- α est un paramètre constant.

Les différents paramètres sont estimés historiquement. L'auteur considère qu'une étude sur 50 ans permet d'avoir des résultats stables, le choix de l'historique (et en particulier de sa taille) étant extrêmement important. Il faut ensuite procéder à des *simulations de Monte-Carlo* après avoir utilisé la méthode des différences finies pour discrétiser la diffusion.

Amélioration du modèle par P. Alaton, B. Djehiche et D. Stillberger ([1])

Un des inconvénients majeurs du modèle proposé par R. Dischel est, selon les auteurs, l'absence de convergence sur le long terme vers la composante saisonnière. Cette difficulté a d'ailleurs été soulignée précédemment par F. Dornier et M. Queruel ([29]). En effet :

$$E(T_t) = T_0 \exp(-\alpha t) + \int_0^t \exp(-\alpha(t-u)) \theta_u du \neq \theta_t$$

Pour s'assurer d'avoir une bonne convergence en moyenne vers la composante saisonnière, il convient d'ajouter un terme à la dérive de (T). Celui-ci correspond à :

$$\frac{d\theta_t}{dt}$$

Le modèle s'écrit alors :

$$dT_t = \left(\frac{d\theta_t}{dt} + \alpha (\theta_t - T_t) \right) dt + \sigma_t dW_t \quad (T')$$

La température à une date t est donc donné par :

$$T_t = (T_0 - \theta_0) \exp(-\alpha t) + \theta_t + \int_0^t \exp(-\alpha(t-u)) \sigma_u dW_u$$

Les auteurs supposent ici le modèle suivant pour la saisonnalité :

$$\theta_t = A + Bt + C \sin\left(\frac{2\pi t}{365} + \varphi\right)$$

et le terme correcteur :

$$\frac{d\theta_t}{dt} = B + \frac{2\pi}{365} \cos\left(\frac{2\pi t}{365} + \varphi\right)$$

Estimation historique de la composante saisonnière θ_t Pour estimer cette composante saisonnière des données de température, une méthode très simple consiste à calculer jour par jour la moyenne des températures de l'historique : par exemple, une valeur moyenne pour tous les "15 janvier" de l'historique.

Une autre méthode consiste à simuler θ_t à partir des résultats précédents concernant la calibration de la tendance et de la saisonnalité. La modélisation proposée précédemment recouvrant celle proposée dans cet article ([1]).

Dès lors, on suppose, aux vues de la sous-section 3.4.3 :

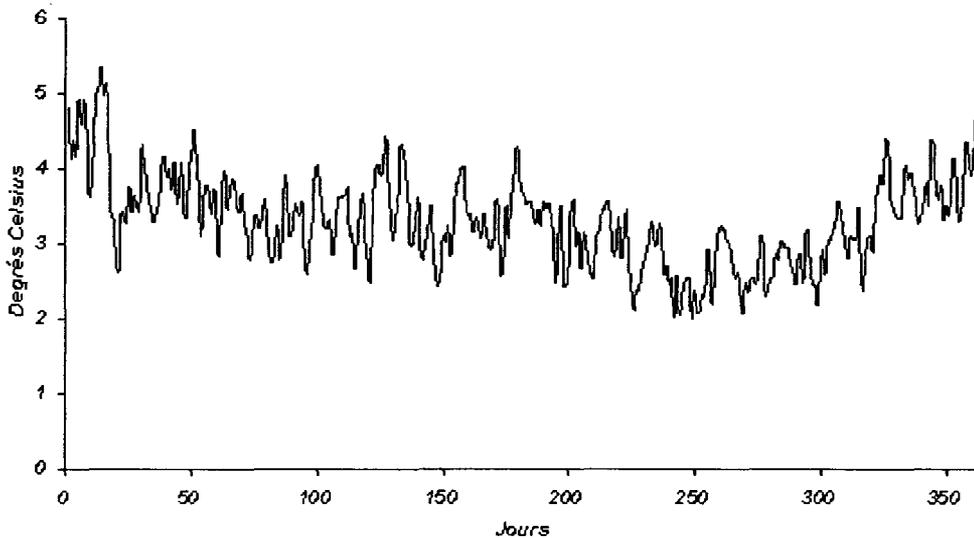
$$\theta_t = M_0 + m\frac{t}{365} + a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + b_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + a_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + b_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right) \quad \text{après 1985}$$

Le terme correcteur est obtenu par :

$$\frac{m}{365} + a_1 \frac{2\pi}{365} \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) - b_1 \frac{2\pi}{365} \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + a_2 \frac{4\pi}{365} \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right) - b_2 \frac{4\pi}{365} \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right)$$

Estimation historique de la volatilité σ_t Pour estimer cette composante de volatilité des données de température, une méthode très simple consiste à calculer jour par jour l'écart-type moyen de la température par rapport à la moyenne des températures de l'historique. En procédant de cette façon, on obtient :

Estimation moyenne de la volatilité



Une autre approche, plus propice à la simulation, consiste à prendre une valeur par mois, correspondant à la moyenne des variations quadratiques sur chaque période m , comportant N_m jours :

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m-1} (T_{j+1} - T_j)^2$$

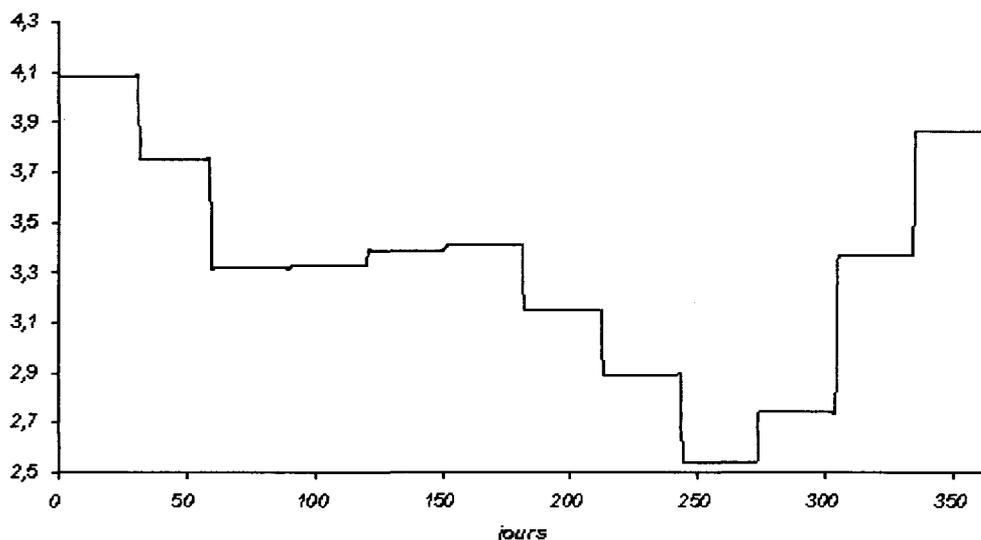
On obtient alors pour chaque mois les estimations suivantes pour les écart-types :

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
$\hat{\sigma}_m$	4,08385	3,75265	3,31662	3,328	3,38771	3,40467

Mois	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
$\hat{\sigma}_m$	3,14674	2,89148	2,54136	2,73909	3,36735	3,85925

La volatilité historique est représentée de la façon suivante :

Volatilité historique de la température mois par mois



Estimation et calibration du paramètre de retour à la moyenne α La méthode proposée par P. Alaton, B. Djehiche et D. Stillberger pour l'estimation de α est une méthode fondée sur les martingales. Il s'agit de trouver le zéro (qui est unique) de la fonction suivante, correspondant à un échantillon de taille n :

$$G_n(\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{d\theta_{i-1}}{dt} + \alpha(\theta_{i-1} - T_{i-1}) \right)}{\sigma_{i-1}^2} \times [T_i - E(T_i/T_{i-1})]$$

Compte tenu de l'équation (T') , on obtient après quelques calculs :

$$\hat{\alpha}_n = -\log \left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{(\theta_{i-1} - T_{i-1})}{\sigma_{i-1}^2} [T_i - \theta_i]}{\sum_{i=1}^n \frac{(\theta_{i-1} - T_{i-1})}{\sigma_{i-1}^2} [T_{i-1} - \theta_{i-1}]} \right)$$

On obtient alors la valeur suivante pour $\hat{\alpha}$:

$$\hat{\alpha} = 0,4759$$

Discrétisation du processus de température

Pour utiliser des simulations de Monte-Carlo, il est indispensable de discrétiser le processus de température donné par (T') :

$$\begin{aligned} dT_t &= \left[\frac{d\theta_t}{dt} + \alpha (\theta_t - T_t) \right] dt + \sigma_t dW_t \\ T_0 &= x \end{aligned} \quad (T')$$

En vue de le discrétiser, la première étape consiste à intégrer l'équation différentielle stochastique. On obtient alors :

$$T_t = (x - \theta_0) \exp(-\alpha t) + \int_0^t \exp(-\alpha(t-u)) \theta_u du + \int_0^t \exp(-\alpha(t-u)) \sigma_u dW_u$$

Puis, on peut discrétiser, afin de procéder aux simulations numériques :

$$T_{t+\Delta t} = (T_t - \theta_t) \exp(-\alpha\Delta t) + \exp(-\alpha\Delta t) \theta_t \Delta t + \exp(-\alpha\Delta t) \sigma_t \sqrt{\Delta t} N \quad (T' \text{ discret})$$

où N suit une loi normale centrée réduite¹.

Pour obtenir cette discrétisation, nous avons fait les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \exp(-\alpha((t+\Delta t)-u)) \theta_u du &\sim \exp(-\alpha\Delta t) \theta_t \Delta t \\ \int_t^{t+\Delta t} \exp(-\alpha((t+\Delta t)-u)) \sigma_u dW_u &\sim \exp(-\alpha\Delta t) \sigma_t \sqrt{\Delta t} N \end{aligned}$$

¹Il s'agit d'écrire le schéma d'Euler de l'équation précédente.

4.1.2 Modèle de M. Cao et J. Wei ([16])

Présentation du modèle

Les auteurs cherchent ici à proposer un modèle de température en temps discret, pouvant servir de base à l'évaluation d'options notamment.

Après avoir étudié des données de température (20 ans d'historique pour les villes d'Atlanta, Chicago, New-York et Philadelphie), Mélanie Cao et Jason Wei cherchent à prendre en compte différents faits stylisés : une forte autocorrélation à court-terme des observations quotidiennes et une volatilité accrue en hiver. De plus, ils souhaitent que le modèle proposés capture non seulement ces deux aspects mais aussi la composante saisonnière, que les variations quotidiennes soient proches d'une variation "moyenne" établie auparavant et que la température simulée ne soit jamais aberrante...

Le modèle proposé par les auteurs est un modèle discret, autorégressif, décrit par :

$$U_{yr,t} = \sum_{i=1}^k \Phi_i U_{yr,t-i} + \sigma_{yr,t} \times \xi_{yr,t} \quad (T)$$

où :

- $U_{yr,t} = T_{yr,t} - \bar{T}_{yr,t}$ est la température désaisonnalisée de la date t de l'année yr . $T_{yr,t}$ est la température de la date t de l'année yr et $\bar{T}_{yr,t}$ est la composante saisonnière. Cette dernière est une des données du modèle,
- k est l'ordre de l'autocorrélation,
- Φ_i est le coefficient d'autocorrélation à l'ordre i ,
- $\sigma_{yr,t} = \sigma - \sigma_1 \left| \sin \left(\frac{\pi t}{365} + \varphi \right) \right|$ est la volatilité de la température désaisonnalisée. Elle contient une composante périodique pour tenir compte de sa volatilité suivant les saisons. φ représente le point de départ de la périodicité considérée,
- $\xi_{yr,t}$ sont des variables normales centrées réduites indépendantes.

Les coefficients sont estimés à l'aide du maximum de vraisemblance. En général, l'ordre de l'autocorrélation est de $k = 3$. Le problème de la taille de l'historique et de la sensibilité des résultats à ce choix n'est pas soulevé.

D'autre part, dans leur étude, les auteurs font une évaluation risque-neutre des options sur température. Cette hypothèse, comme nous l'avons souligné précédemment, est très abusive...

Calibration du processus sur les données

La partie déterministe du processus est semblable à celle proposée dans l'étude générale des données du Parc Montsouris. Il s'agit ensuite d'un modèle autorégressif d'ordre 3 que nous avons précédemment calibré. Seule change la modélisation des résidus de l'AR(3). Nous reprenons donc notre étude à ce stade.

Calibration de la partie déterministe et de l'AR(3) Elle est similaire à celle précédemment obtenue (voir les sous-sections 3.4.1, 3.4.2 et 3.4.4). La température à Paris-Parc Montsouris, à une date t , peut être modélisée de la façon suivante :

$$T_t = M_t + S_t + R_t$$

où :

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 && \text{avant 1985} \\ &= M_0 + mt && \text{après 1985} \end{aligned}$$

$$S_t = a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + b_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + a_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + b_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right)$$

$$R_t = \Phi_1 R_{t-1} + \Phi_2 R_{t-2} + \Phi_3 R_{t-3} + \varepsilon_t$$

Les paramètres prennent les valeurs précédemment obtenues. Il reste donc à étudier la partie résiduelle ε .

Calibration de la partie résiduelle Les auteurs se donnent une forme a priori pour la partie résiduelle :

$$\varepsilon_t = \sigma_t \times \xi_t$$

en imposant à la volatilité la forme suivante :

$$\sigma_t = \sigma_0 - \sigma_1 \left| \sin\left(\frac{\pi t}{365} + \varphi\right) \right|$$

D'autre part, ξ est supposé suivre une loi normale centrée réduite.

Pour étudier cette série résiduelle, nous travaillons sur le logarithme de la valeur absolue des données :

$$\log |\sigma_t| + \log |\xi_t|$$

Les paramètres du logarithme de la volatilité sont alors obtenus par une minimisation au sens des moindres carrés². On obtient alors :

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 1,1572 \\ \sigma_1 &= 0,2800 \\ \varphi &= 0,2327 \end{aligned}$$

²La fonction Matlab utilisée pour cela s'appelle "lsqcurvefit". Il s'agit de trouver les coefficients α de l'équation théorique $F(\alpha, x_{données})$ qui correspondent le mieux aux données $y_{données}$:

$$\begin{aligned} &\min_{\alpha} \frac{1}{2} \|F(\alpha, x_{données}) - y_{données}\|_2^2 \\ &= \min_{\alpha} \frac{1}{2} \sum (F(\alpha, x_{données}) - y_{données})^2 \end{aligned}$$

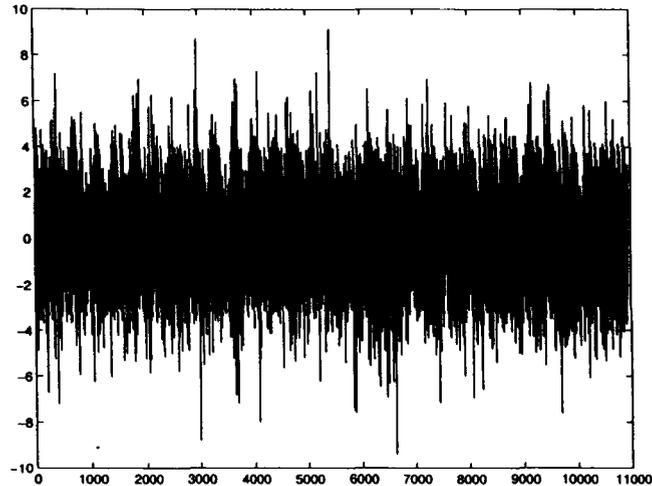
avec les intervalles de confiance suivants pour un seuil de 95% :

$$\sigma_0 \in [1, 13858; 1, 17582]$$

$$\sigma_1 \in [0, 26138; 0, 29862]$$

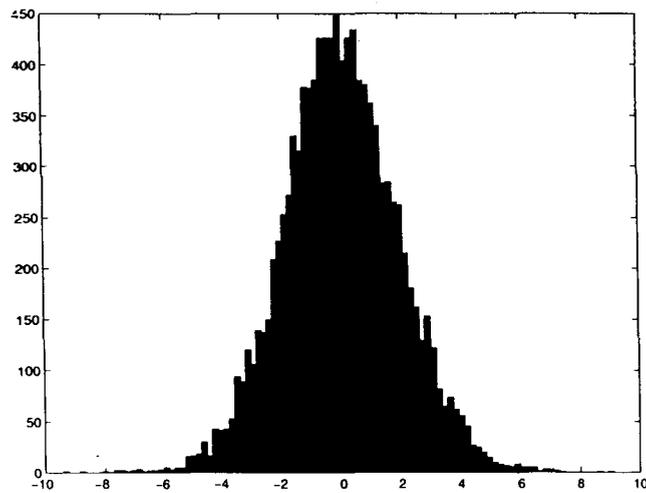
$$\varphi \in [0, 21408; 0, 25132]$$

Pour obtenir alors les résidus ξ du modèle, il faut alors diviser chaque donnée ε par l'exponentielle de la fonction que l'on vient de calibrer. Les résidus sont les suivants :



Résidus du modèle de M. Cao et J. Wei

La distribution de ces résidus peut être représentée par l'histogramme suivant :



Histogramme des résidus

La ressemblance avec la distribution d'une loi normale est importante (forme en cloche, symétrie assez importante). Pour pouvoir comparer plus précisément ces deux distributions, il convient de préciser les deux premiers moments de la série résiduelle :

$$\text{moyenne} = 0$$

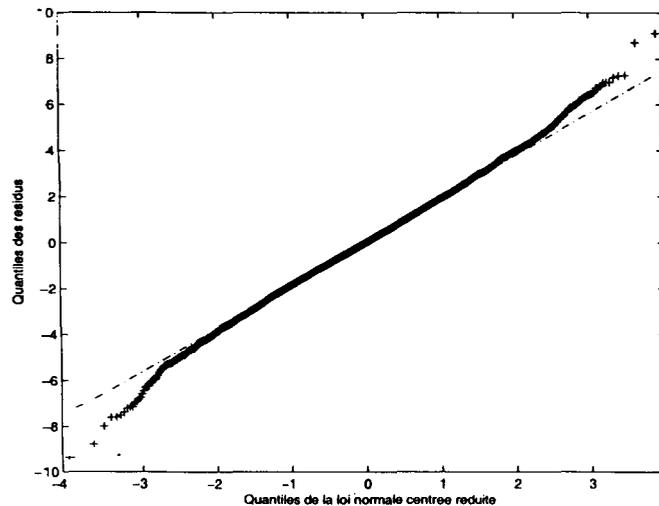
$$\text{écart - type} = 1,9461$$

Les auteurs supposent que ces résidus suivent une loi normale centrée réduite. L'écart-type des résidus du modèle est $\bar{\sigma} = 1,9461$. En divisant la série des résidus par cet écart-type on se ramène à une variance de 1. La partie résiduelle de l'AR(3) s'écrit alors :

$$\varepsilon_t = \bar{\sigma} \left(\sigma_0 - \sigma_1 \left| \sin \left(\frac{\pi t}{365} + \varphi \right) \right| \right) \xi_t$$

où ξ est centré et de variance 1.

Si on trace le "QQ - plot" de cette série, on observe une parfaite adéquation pour les valeurs intermédiaires mais une grande dissymétrie pour les valeurs extrêmes :



QQ-plot des résidus

D'autre part, on peut procéder à un test de Kolmogorov-Smirnov afin de tester l'hypothèse :

$$H_0 : \text{ "Les données sont distribuées selon une loi normale } N(0, 1) \text{ "}$$

Pour un seuil de 5%, on ne peut clairement pas rejeter l'hypothèse H_0 :

$$p - \text{value} = 0,2037 > 0,05$$

4.1.3 Modèle de O. Roustant ([85])

Présentation du modèle

Après avoir étudié des données de température (20 ans d'historique pour la ville de Lyon notamment), O. Roustant cherche à prendre en compte différents faits stylisés, dont une autocorrélation à court-terme des données extrêmement forte, une tendance dans l'évolution de la température et une saisonnalité très importante.

Deux modèles sont successivement étudiés :

- Le premier modèle proposé est un modèle discret, autorégressif, décrit par :

$$T_t = M_t + S_t + R_t \quad (\mathcal{T}_1)$$

où :

- T_t est la température de la date t ,
- M_t est la tendance, supposée linéaire,
- S_t est la composante saisonnière à la date t ,
- R_t est un processus stationnaire centré :

$$R_t = \Phi_1 R_{t-1} + \Phi_2 R_{t-2} + \Phi_3 R_{t-3} + \varepsilon_t$$

où ε_t est un bruit blanc gaussien de variance constante σ^2 .

La saisonnalité est estimée dans un premier temps en négligeant la tendance (qui sera quant à elle estimée à partir des données désaisonnalisées). Un problème apparait alors : les températures sont plus volatiles en hiver qu'en été. L'auteur tente alors de réduire cette non-stationnarité en utilisant un modèle ARMA. Mais celui-ci ne peut être calibré : les résidus ne sont pas Gaussiens.

- Le deuxième modèle proposé est encore un modèle discret autorégressif mais à variance périodique :

$$T_t = M_t + S_t + \rho_t Z_t \quad (\mathcal{T}_2)$$

où :

- T_t est la température de la date t ,
- M_t est la tendance, supposée linéaire,
- S_t est la composante saisonnière à la date t . Après une analyse spectrale, on suppose la forme suivante pour cette composante :

$$S_t = a_1 \cos(wt) + b_1 \sin(wt) + a_2 \cos(2wt) + b_2 \sin(2wt)$$

- $\rho_t = a + b \cos(wt) + c \sin(wt)$ avec $w = \frac{2\pi}{365}$ est la volatilité de la température. On la suppose saisonnière, de période annuelle,
- Z_t est un processus AR d'ordre 3 :

$$Z_t = \Psi_1 Z_{t-1} + \Psi_2 Z_{t-2} + \Psi_3 Z_{t-3} + \varepsilon_t$$

où ε_t est un bruit blanc gaussien de variance 1.

Même si les résidus ne sont pas symétriques, le test d'adéquation à la loi normale ne permet pas à l'auteur de rejeter le caractère Gaussien au seuil de 5%. L'hypothèse de normalité peut donc être acceptée en première approximation.

Les coefficients sont estimés à l'aide du maximum de vraisemblance.

Calibration du modèle 1 (à volatilité constante) sur les données

La partie déterministe du processus est semblable à celle proposée dans l'étude générale des données du Parc Montsouris. Il s'agit ensuite d'un modèle autorégressif d'ordre 3 que nous avons précédemment calibré. Seule change la modélisation des résidus de l'AR(3). Nous reprenons donc notre étude à ce stade.

Calibration de la partie déterministe et de l'AR(3) Elle est similaire à celle précédemment obtenue (voir sous-sections 3.4.1, 3.4.2 et 3.4.4). La température à Paris-Parc Montsouris, à une date t , peut être modélisée de la façon suivante:

$$T_t = M_t + S_t + R_t$$

où :

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 && \text{avant 1985} \\ &= M_0 + mt && \text{après 1985} \end{aligned}$$

$$S_t = a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + b_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + a_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + b_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right)$$

$$R_t = \Phi_1 R_{t-1} + \Phi_2 R_{t-2} + \Phi_3 R_{t-3} + \varepsilon_t$$

Les paramètres prennent les valeurs précédemment obtenues. Il reste donc à étudier la partie résiduelle ε .

Calibration de la partie résiduelle L'auteur se donne a priori pour la partie résiduelle:

$$\varepsilon_t = \sigma \times \eta_t$$

où η est supposé suivre une loi normale centrée réduite.

Pour étudier cette série résiduelle, nous travaillons sur le logarithme de la valeur absolue des données :

$$\log |\sigma| + \log |\eta_t|$$

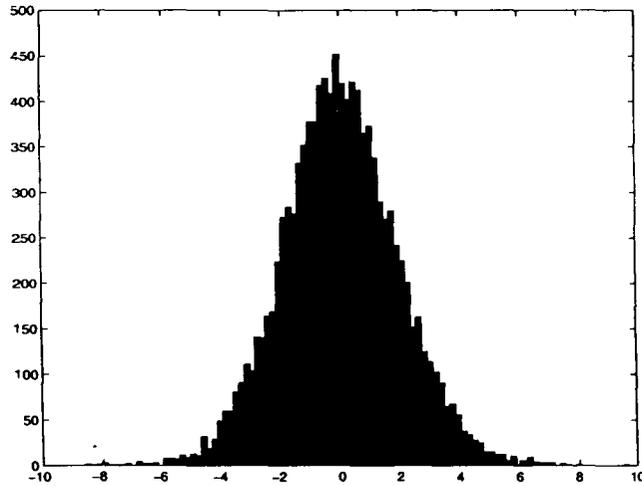
Le paramètre de volatilité est alors obtenu par la méthode des moindres carrés ordinaires. On obtient :

$$\sigma = 1,9088$$

L'intervalle de confiance pour le paramètre est, au seuil de 95% :

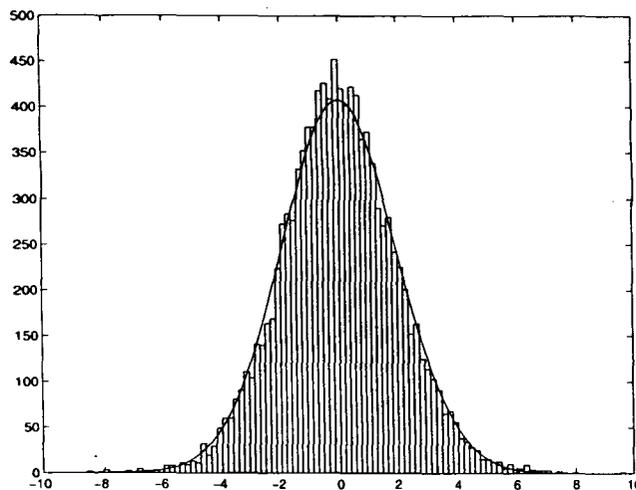
$$\sigma \in [1,8686; 1,9499]$$

Pour obtenir alors les résidus η du modèle, il faut alors diviser chaque donnée ε par la volatilité que l'on vient de calibrer. La distribution de ces résidus peut être représentée par l'histogramme suivant :



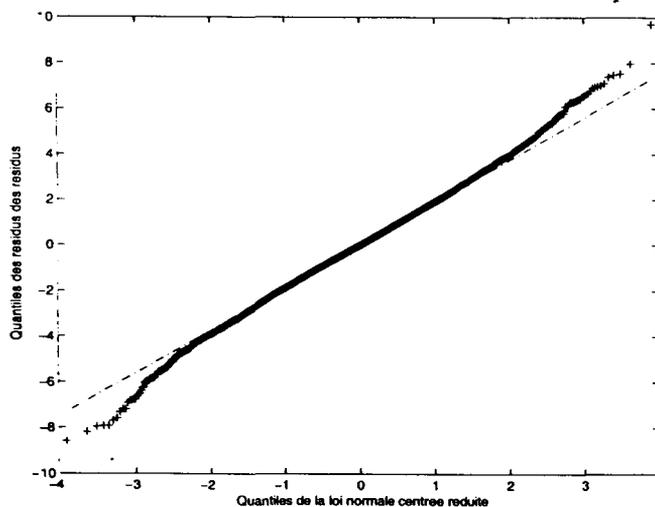
Histogramme des résidus (Modèle 1 d'O. Roustant)

La ressemblance avec la distribution d'une loi normale est importante (forme en cloche, symétrie assez importante). Lorsque l'on compare graphiquement l'histogramme des résidus avec la densité d'une loi normale de mêmes caractéristiques, on observe une quasi-adéquation, malgré une asymétrie à gauche de la distribution des résidus :



Comparaison entre les résidus et la loi normale de mêmes caractéristiques

Si on trace le "QQ - plot" de cette série, on observe une parfaite adéquation pour les valeurs intermédiaires mais une grande dissymétrie pour les valeurs extrêmes :



QQ-plot des résidus

D'autre part, on peut procéder à un test de Kolmogorov-Smirnov afin de tester l'hypothèse suivante :

H_0 : "Les données sont distribuées selon une loi normale $N(0, 1)$ "

Pour un seuil de 5%, on ne peut pas rejeter l'hypothèse H_0 :

$$p - value = 0,0705 > 0,05$$

Même si la $p - value$ est très proche du seuil de 5%, elle est quand même encore supérieure.

Calibration du modèle 2 (à volatilité aléatoire) sur les données

La partie déterministe du processus est semblable à celle proposée dans l'étude générale des données du Parc Montsouris. Toutefois, l'ordre de la modélisation de la partie aléatoire du processus de température change : alors que nous avons, jusqu'à présent, modélisé l'AR(3) puis la partie résiduelle, O. Roustant s'intéresse avant tout à la variance. Nous reprenons donc notre étude à la modélisation de la partie aléatoire de la température (sous-section 3.4.4).

Calibration de la partie déterministe Elle est similaire à celle précédemment obtenue (voir les sous-sections 3.4.1, 3.4.2). La température à Paris-Parc Montsouris, à une date t , peut être modélisée de la façon suivante :

$$T_t = M_t + S_t + R_t$$

où :

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 && \text{avant 1985} \\ &= M_0 + mt && \text{après 1985} \end{aligned}$$

$$S_t = a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + b_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + a_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + b_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right)$$

Les paramètres prennent les valeurs précédemment obtenues. Il reste donc à étudier la partie résiduelle R .

Calibration de la partie résiduelle L'auteur se donne une forme a priori pour la partie résiduelle :

$$R_t = \rho_t \times Z_t$$

en imposant à la volatilité la forme suivante :

$$\rho_t = a + b \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + c \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right)$$

Pour étudier cette série résiduelle, nous travaillons sur le logarithme de la valeur absolue des données :

$$\log |\rho_t| + \log |Z_t|$$

Les paramètres du logarithme de la volatilité sont alors obtenus par une minimisation au sens des moindres carrés (Fonction "*lsqcurvefit*" de Matlab). On obtient alors :

$$a = 1,7979$$

$$b = 0,1912$$

$$c = 0,1666$$

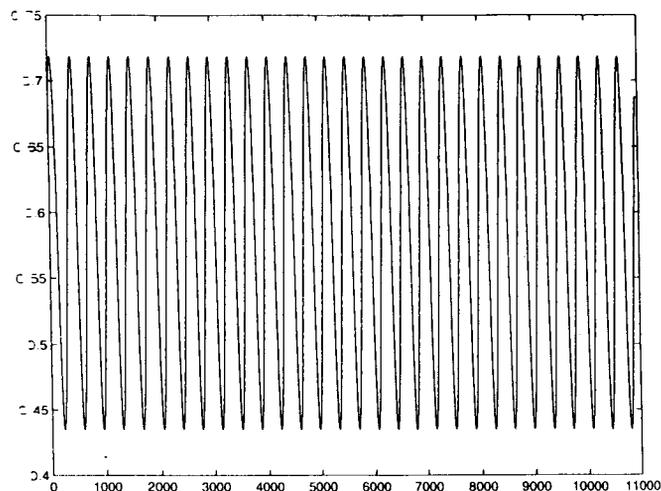
avec les intervalles de confiance suivants pour un seuil de 95% :

$$a \in [1,7793; 1,81648]$$

$$b \in [0,17262; 0,20978]$$

$$c \in [0,14801; 0,18518]$$

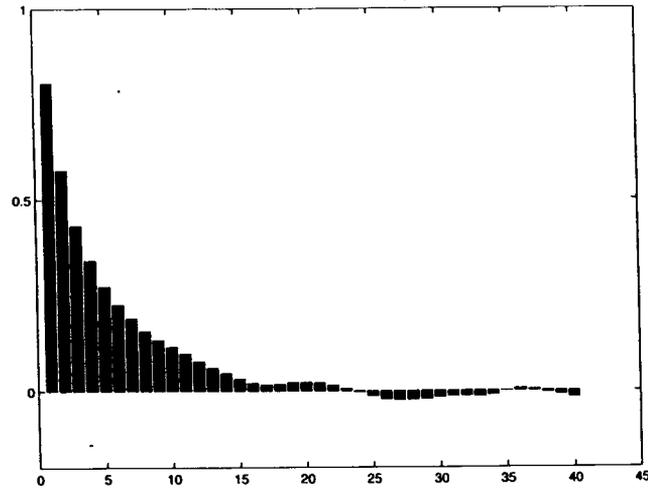
La volatilité modélisée a alors la forme suivante :



Modélisation de la volatilité (Modèle 2 d'O. Roustant)

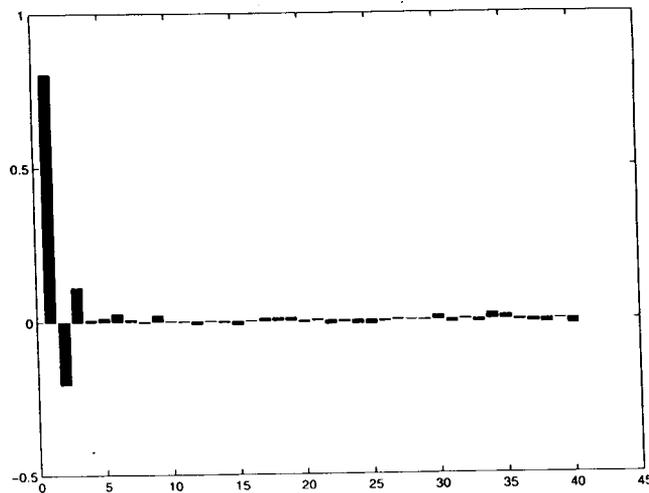
Pour obtenir alors les résidus Z du modèle, il faut alors diviser chaque donnée R par la volatilité que l'on vient de calibrer.

L'autocorrélogramme des résidus Z montre une autocorrélation longue (jusqu'à l'ordre 23 au moins !) :



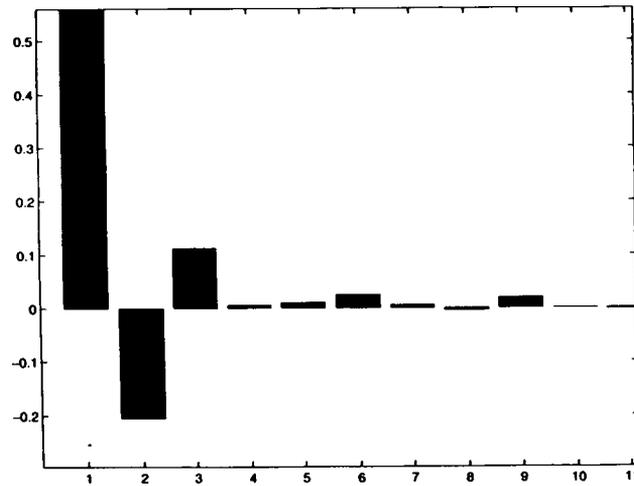
Autocorrélation des résidus Z

Toutefois, comme précédemment, l'autocorrélogramme partiel montre une significativité des autocorrérelations partielles jusqu'à l'ordre 3 :



Autocorrélation partielle des résidus Z

ou de façon plus précise,



Autocorrélation partielle des résidus Z

L'ordre de l'AR est clairement 3 puisque le seuil déterminant la prise en compte de l'autocorrélation partielle est, pour un niveau de 95% :

$$\frac{2}{\sqrt{nb \text{ de données}}} = 0,019$$

D'autre part, si on réalise le test de Ljung-Box relatif à l'autocorrélation des résidus de l'AR(3), on obtient :

$$p - \text{value} = 0,3169 \gg 0,05$$

L'hypothèse d'absence de corrélation des résidus du modèle AR(3) ne peut pas être rejetée.

Les résidus Z_t sont donc modélisés à l'aide d'un modèle autorégressif d'ordre 3 :

$$Z_t = \Psi_1 Z_{t-1} + \Psi_2 Z_{t-2} + \Psi_3 Z_{t-3} + \varepsilon_t$$

La méthode des moindres carrés ordinaires permet de calibrer les paramètres. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= 0,9944 \\ \Psi_2 &= -0,3107 \\ \Psi_3 &= 0,1096 \end{aligned}$$

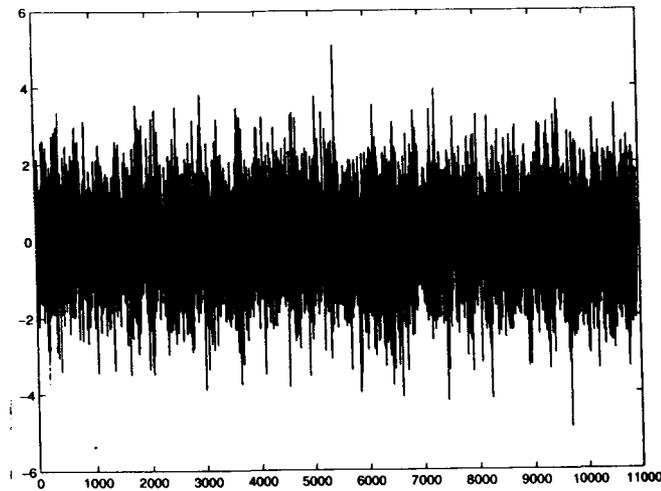
Les intervalles de confiance de ces paramètres sont, au seuil de 95% :

$$\begin{aligned} \Psi_1 &\in [0,9758; 1,030] \\ \Psi_2 &\in [-0,3364; -0,2850] \\ \Psi_3 &\in [0,0910; 0,1282] \end{aligned}$$

L'écart-type des résidus de l'AR(3) est alors de:

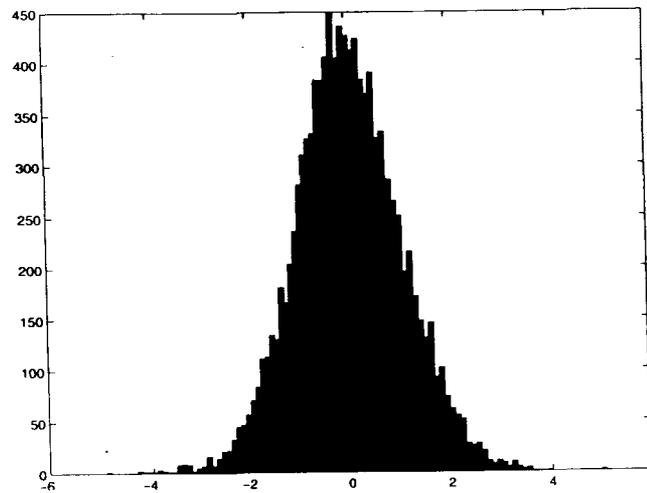
1,0624

Lorsque l'on représente les résidus de l'AR(3), on obtient un graphe qui ressemble à celui d'un bruit blanc :



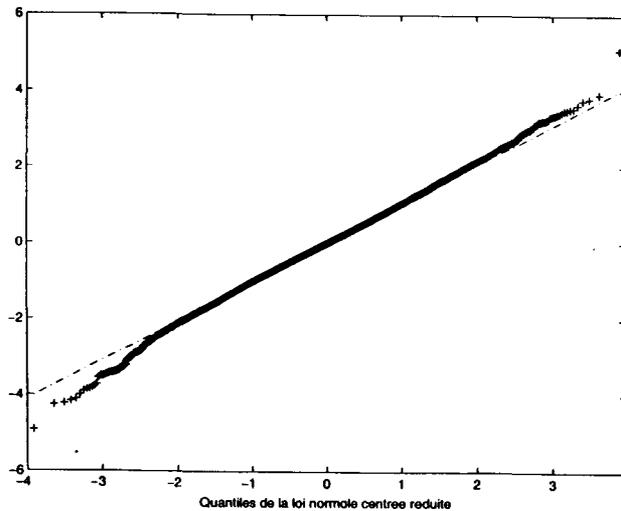
Résidus de l'AR(3)

L'histogramme des résidus de l'AR est très proche de celui d'une loi normale (forme en cloche et relative symétrie) :



Histogramme des résidus de l'AR(3)

Ceci est confirmé par le "QQ - plot" de cette série. En effet, on observe une parfaite adéquation pour les valeurs intermédiaires mais une certaine dissymétrie pour les valeurs extrêmes :



QQ-plot des résidus de l'AR(3)

D'autre part, on peut procéder à un test de Kolmogorov-Smirnov afin de tester l'hypothèse :

$$H_0 : \text{"Les données sont distribuées selon une loi normale } N(0, 1)\text{"}$$

Pour un seuil de 5%, on ne peut pas rejeter l'hypothèse H_0 :

$$p - \text{value} = 0,1421 > 0,05$$

4.1.4 Modèle de P. Tankov ([92])

Présentation du modèle

P. Tankov utilise une modélisation de la température qui prend en compte l'imparfaite adéquation entre les quantiles de la distribution normale et ceux de la distribution de la température (comme cela est visible dans le "QQ-plot"). Les fondements du modèle proposé sont ceux de celui d'O. Roustant.

$$T_t = M_t + S_t + R_t \quad (T)$$

où :

- T_t est la température à la date t ,
- M_t est la tendance historique des températures pour la date t ,
- S_t est la composante saisonnière de la date t ,
- R_t est la composante résiduelle.

Ces différentes composantes sont représentées de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 m_t &= m_0 + mt \\
 s_t &= a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + b_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + a_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + b_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right) \\
 R_t &= \Phi_1 R_{t-1} + \Phi_2 R_{t-2} + \Phi_3 R_{t-3} + \varepsilon_t \\
 \varepsilon_t &= \exp\left[c_0 + c_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + c_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right)\right] \epsilon_t \\
 &\quad \epsilon_t \text{ sont des variables i.i.d suivant une loi hyperbolique}
 \end{aligned}$$

Le choix de la loi hyperbolique pour la distribution des résidus permet de mieux respecter les queues de distribution de la température.

Quelques rappels sur la distribution hyperbolique

Une variable aléatoire de loi hyperbolique est caractérisée par sa densité sur \mathbb{R} :

$$\begin{aligned}
 h(x) &= C_1(\alpha, \beta, \delta) \exp\left[-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \beta(x - \mu)\right] \\
 \text{où } C_1(\alpha, \beta, \delta) &= \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)}
 \end{aligned}$$

K_1 est la fonction de Bessel modifié d'indice 1

$$\text{i.e. } K_1(z) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{z}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right) dt$$

ou, en posant :

$$\begin{aligned}
 r &= \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \\
 \sinh(\theta) &= \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}
 \end{aligned}$$

la densité peut s'écrire (cf. par exemple, [77] ou [92]) :

$$h(x) = \frac{\exp\left[-r \cosh(\theta) \sqrt{1 + \frac{(x-\mu)^2}{\delta^2}} + r \sinh(\theta) \times \frac{(x-\mu)}{\delta}\right]}{2\delta \cosh(\theta) K_1(r)}$$

Calibration du processus sur les données

La partie déterministe du processus est semblable à celle proposée dans l'étude générale des données du Parc Montsouris. Il s'agit ensuite d'un modèle autorégressif d'ordre 3 que nous avons précédemment calibré. Seule change la modélisation des résidus de l' $AR(3)$. Nous reprenons donc notre étude à ce stade.

Calibration de la partie déterministe et de l'AR(3) Elle est similaire à celle précédemment obtenue (voir sous-sections 3.4.1, 3.4.2 et 3.4.4). La température à Paris-Parc Montsouris, à une date t , peut être modélisée de la façon suivante :

$$T_t = M_t + S_t + R_t$$

où :

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 && \text{avant 1985} \\ &= M_0 + mt && \text{après 1985} \end{aligned}$$

$$S_t = a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + b_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + a_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + b_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right)$$

$$R_t = \Phi_1 R_{t-1} + \Phi_2 R_{t-2} + \Phi_3 R_{t-3} + \varepsilon_t$$

Les paramètres prennent les valeurs précédemment obtenues. Il reste donc à étudier la partie résiduelle ε .

Calibration de la partie résiduelle L'auteur se donne une forme a priori pour la partie résiduelle :

$$\varepsilon_t = \sigma_t \times \epsilon_t$$

en imposant à la volatilité la forme suivante :

$$\sigma_t = \exp\left[c_0 + c_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + c_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right)\right]$$

D'autre part, ϵ est supposé suivre une loi hyperbolique. Notons qu'ici une seule période est prise en compte dans la modélisation de la volatilité.

Pour étudier cette série résiduelle, nous travaillons sur le logarithme de la valeur absolue des données :

$$\log |\sigma_t| + \log |\epsilon_t|$$

Les paramètres du logarithme de la volatilité sont alors obtenus la méthode des moindres carrés ordinaires. On obtient alors :

$$c_0 = -0,0254$$

$$c_1 = 0,0496$$

$$c_2 = 0,0627$$

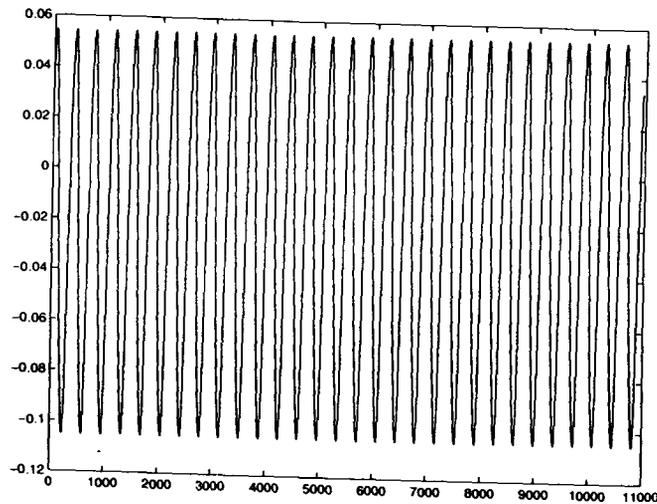
Les intervalles de confiance pour les différents paramètres sont, au seuil de 95% :

$$c_0 \in [-0,0466; -0,0041]$$

$$c_1 \in [0,0195; 0,0796]$$

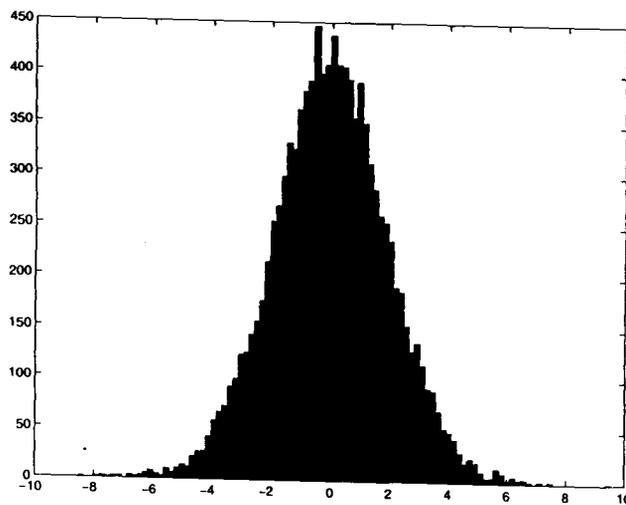
$$c_2 \in [0,0326; 0,0928]$$

La saisonnalité de la volatilité est modélisée de la façon suivante :



Saisonnalité de la volatilité (Modèle de P. Tankov)

Pour obtenir alors les résidus ϵ du modèle, il faut alors diviser chaque donnée ϵ par l'exponentielle de la fonction que l'on vient de calibrer. L'histogramme des résidus est alors :



Histogramme des résidus (Modèle de P. Tankov)

Les caractéristiques des résidus sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \text{moyenne} &= 0 \\ \text{écart - type} &= 1,9485 \end{aligned}$$

Si l'on calibre une loi hyperbolique à partir des résidus, on obtient les valeurs suivantes pour les différents paramètres (les écart-types sont mis entre parenthèses, pour un seuil de 95%) :

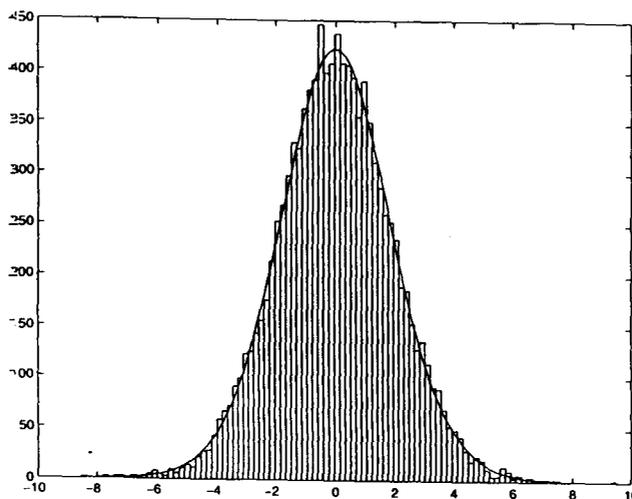
$$\delta = 5,1377 \quad (0,5792)$$

$$\begin{aligned}\mu &= -0,0782 & (0,1561) \\ r &= 8,2527 & (1,6153) \\ \theta &= 0,0129 & (0,0258)\end{aligned}$$

lorsque la densité de la loi hyperbolique s'écrit :

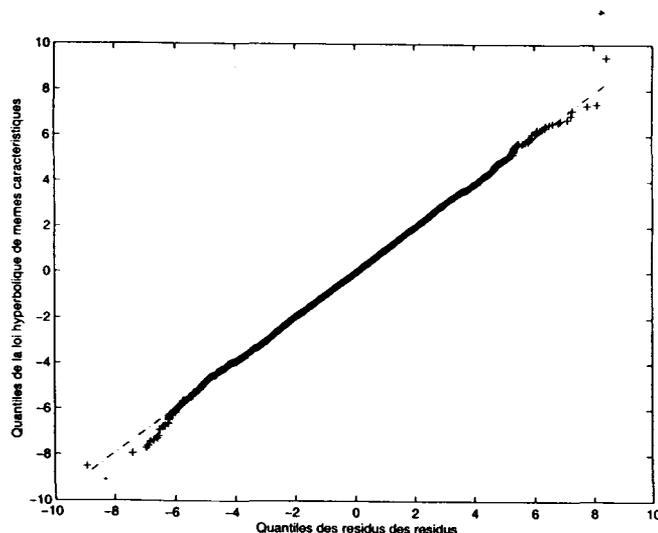
$$h(x) = \frac{\exp \left[-r \cosh(\theta) \sqrt{1 + \frac{(x-\mu)^2}{\delta^2}} + r \sinh(\theta) \times \frac{(x-\mu)}{\delta} \right]}{2\delta \cosh(\theta) K_1(r)}$$

Si l'on compare la distribution des résidus avec la loi hyperbolique dont les caractéristiques viennent d'être calculées, on obtient :



Comparaison entre l'histogramme des résidus et la loi hyperbolique de mêmes caractéristiques

La ressemblance avec la loi hyperbolique est importante. On peut alors tracer le "QQ - plot" des quantiles de la série des résidus contre ceux d'une loi hyperbolique de mêmes caractéristiques. On observe une très grande adéquation même pour les valeurs extrêmes :



QQ-plot des résidus par rapport à la loi hyperbolique

La loi hyperbolique semble être bien adaptée pour la modélisation des résidus. Toutefois, il reste à savoir si le coût d'estimation d'une telle loi est inférieur à ses avantages, puisque, comme nous l'avons constaté précédemment, il est généralement impossible de rejeter l'hypothèse de normalité des résidus au seuil de 5%.

D'autre part, comme nous l'avons vu lors de l'étude des extrêmes de température, seule une distribution à support borné est théoriquement correcte pour modéliser la température. Or ni la loi normale, ni la loi hyperbolique ne sont dans cette catégorie.

4.2 Comparaison de ces modèles de température pour l'évaluation d'une option climatique

Je tiens à remercier très sincèrement Laurent Veilex pour son soutien constant et son aide précieuse face aux difficultés numériques et informatiques que j'ai pu rencontrer lors de la mise en place de cette étude.

Dans cette section, nous simulons le "prix" historique d'une option climatique donnée ainsi que son "prix d'indifférence" obtenue avec une fonction d'utilité exponentielle. Nous comparons pour cela les différents modèles calibrés dans le chapitre précédent et dans la première section de ce chapitre.

4.2.1 Présentation du produit

Le produit que nous cherchons à évaluer ici est une option d'achat (call), dont le sous-jacent est la somme cumulée, durant la vie de l'option, des "heating degree-days". La maturité de l'option est de $\tau = 90$ jours (du premier janvier au 31 mars). Les "heating degree-days" sont calculés de façon classique comme la différence entre la température quotidienne moyennée (moyenne sur 8 observations) relevée à Paris-Parc Montsouris et

une température seuil fixée à $18^{\circ}C$. Le niveau d'exercice ("strike") de l'option est noté K . Nous étudierons plusieurs niveaux, dont en particulier celui correspondant à la moyenne historique (sur 30 ans) qui est de 1093,77. Notons que le choix d'un tel produit est purement arbitraire. Les difficultés d'accès aux données de marché nous ont conduit à "imaginer" un dérivé climatique pour simplement comparer les différents modèles et tester leur robustesse.

Ainsi, le payoff de cette option peut s'écrire comme :

$$\max [CumDD_{\tau} - K ; 0]$$

où τ représente la date d'échéance de l'option et $CumDD_{\tau}$ la somme cumulée des "heating degree-days" sur $[0, \tau]$ i.e. :

$$CumDD_{\tau} = \sum_{t=0}^{\tau} (18 - T_t)^+$$

avec T_t la température moyenne à la date t .

D'autre part, nous supposerons pour simplifier que la courbe des taux est plate et que $r = 5\%$. Cette hypothèse peut, bien-sûr, être facilement relâchée.

4.2.2 Méthodes d'évaluation de l'option

Deux méthodes sont utilisées ici pour l'évaluation de l'option présentée dans la section précédente. Le "prix"³ en 0 est noté C .

- La première consiste en l'évaluation historique i.e. le prix correspond à l'espérance historique du payoff actualisé :

$$C = E_{\mathbb{P}} [\exp(-r\tau) \cdot \max [CumDD_{\tau} - K ; 0]]$$

où la probabilité historique \mathbb{P} est la probabilité sous laquelle les différents modèles utilisés ici ont été calibrés.

- La seconde utilise les fonctions d'utilité de type exponentiel. Il s'agit d'un prix obtenu par la méthode présentée dans le chapitre 2 de cette thèse :

$$C = -\frac{1}{\gamma} \ln E_{\mathbb{P}} [\exp \{-\gamma \max [CumDD_{\tau} - K ; 0]\}] \cdot \exp(-r\tau)$$

où γ est le coefficient d'aversion pour le risque de l'acheteur potentiel.

Ce "prix" est également appelé "prix d'indifférence".

³Notons que la notion de "prix" pour un contrat de ce type n'est pas évidente. Nous l'utiliserons afin de simplifier nos propos pour désigner tout résultat de méthode d'évaluation.

4.2.3 Simulations de température et sensibilité des résultats

Modèle brut

Nous rappelons ici la dynamique obtenue pour la température selon le modèle "brut" :

$$T_t = M_t + S_t + R_t$$

où :

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 && \text{avant 1985} \\ &= M_0 + mt && \text{après 1985} \end{aligned}$$

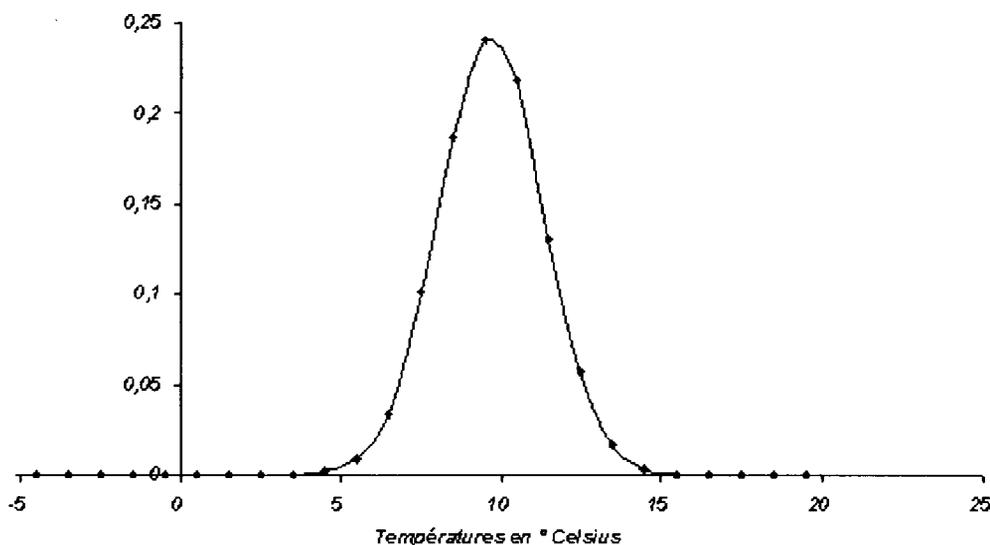
$$S_t = a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + b_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + a_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + b_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right)$$

$$\begin{aligned} R_t &= \Phi_1 R_{t-1} + \Phi_2 R_{t-2} + \Phi_3 R_{t-3} \\ &+ \exp\left[\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + \bar{b}_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + \bar{a}_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + \bar{b}_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right)\right] \eta_t \\ \eta_t &\sim N(0, 1) \end{aligned}$$

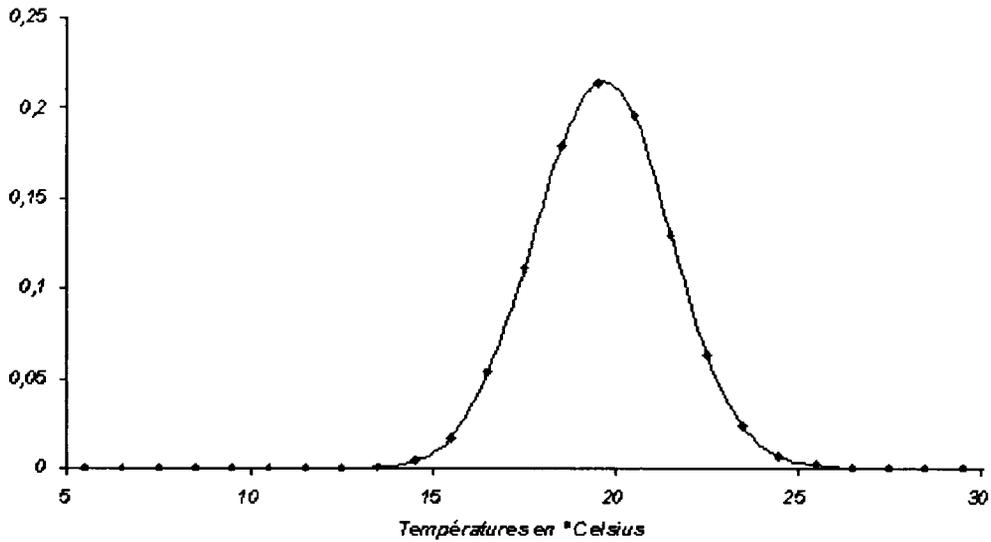
Ce modèle est déjà discrétisé. Cela facilite sa mise en place d'un point de vue numérique. Très naturellement, le pas de temps est pris égal à 1 jour.

Distributions empiriques à des dates précises Dans un premier temps, nous testons la distribution de la température engendrée par ce modèle pour trois périodes : fin mars (soit 90 jours), fin juin (soit 180 jours) et fin octobre (soit 300 jours). Les distributions empiriques obtenues pour 30000 simulations sont les suivantes :

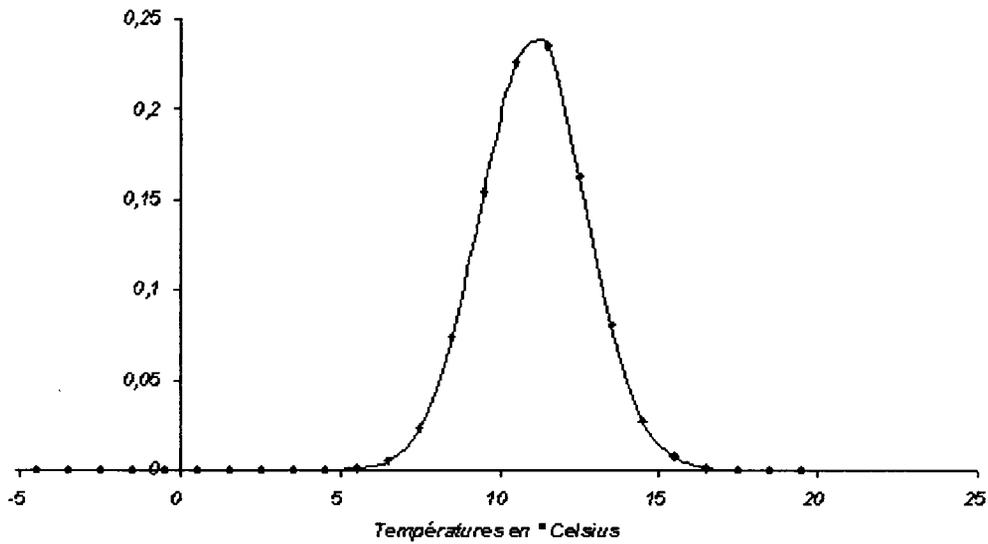
Modèle brut : simulation de la température du 31 mars



Modèle brut : simulation de la température du 30 juin



Modèle brut : simulation de la température du 31 octobre



Les caractéristiques de ces distributions empiriques sont les suivantes :

	Fin mars	Fin juin	Fin octobre
moyenne	8,70	18,63	10,06
écart-type	1,60	1,81	1,60

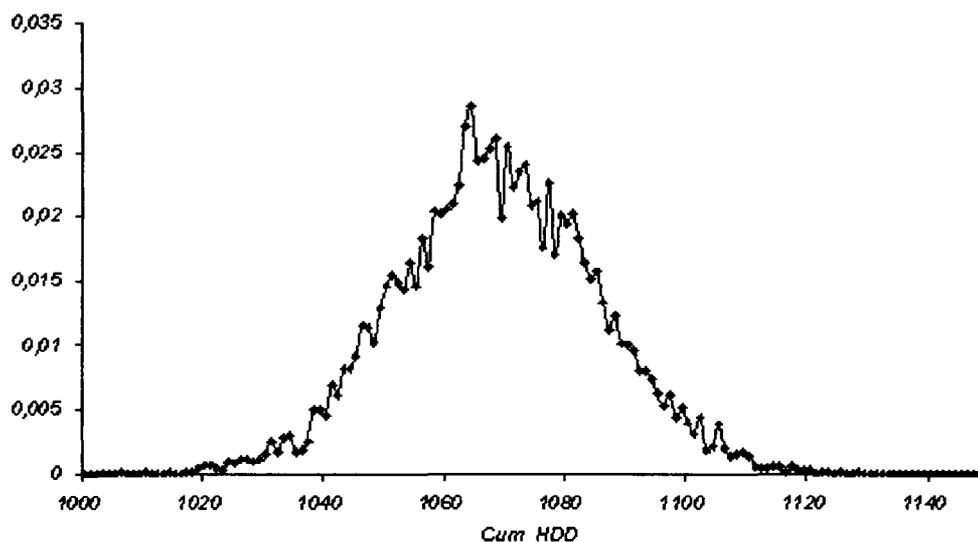
Les moyennes semblent tout à fait pertinentes. En effet, les moyennes historiques sur 30 correspondant à ces dates sont les suivantes :

	Fin mars	Fin juin	Fin octobre
moyenne historique	9,57	18,42	10,95

et le modèle est stable (les écart-types sont faibles).

Distributions empiriques de la valeur cumulée des $H.D.D.$ Nous testons la distribution de la valeur cumulée des $H.D.D.$ engendrée par ce modèle pour la période entre le 1^{er} janvier et le 31 mars (soit 90 jours). La distribution empirique obtenue pour 30000 simulations est la suivante :

Modèle brut : simulation de Cum_HDD pour le 31 mars



Les caractéristiques de cette distribution empirique sont les suivantes :

moyenne	1067,97
écart-type	16,53

La moyenné semble tout à fait pertinente, puisque la moyenne historique est de 1093,77, et le modèle est stable (l'écart-type est faible).

Evaluation de l'option : espérance historique Cette méthode d'évaluation consiste en deux étapes essentielles :

- Tout d'abord, il convient de simuler la valeur cumulée des $H.D.D.$ de la période correspondant à la vie de l'option, i.e. [1^{er} janvier; 31 mars], et de déterminer le payoff associé i.e. de prendre la partie positive de la différence entre cette valeur et le niveau d'exercice de l'option K .
- Ensuite, comme pour les simulations de Monte-Carlo, il faut répéter la première étape (ici 30000 fois) et de prendre la moyenne actualisée des différents résultats. Ainsi :

$$C = E_P [\exp(-r\tau) \times \text{Payoff}]$$

Nous obtenons ainsi les "prix" suivants pour l'option :

Niveau d'exercice	$K = 1000$	$K = 1067,97$	$K = 1093,77$	$K = 1100$
Prix	67,137	6,511	0,448	0,171

Si l'option est fortement dans la monnaie⁴ ($K = 1000$ est inférieur à la moyenne du modèle 1067,97), son "prix" est élevé, si elle est fortement en dehors de la monnaie ($K = 1100$ est supérieur à la moyenne du modèle 1067,97), son "prix" est faible. Les deux autres niveaux de "strike" correspondent à une option "à la monnaie" : d'une part relativement au modèle "brut" ($K = 1067,97$) et d'autre part relativement à l'historique ($K = 1093,77$). Ce dernier cas est particulièrement intéressant car il ne dépend pas du modèle étudié.

Sensibilité des résultats aux paramètres du modèle "brut" Il est important de regarder la sensibilité des résultats obtenus relativement à une modification de valeur des paramètres du modèle. Ceci permet de tester la robustesse de ce modèle et ainsi de voir dans quelle mesure celui-ci peut être fiable en pratique. Nous ne testerons ici que la sensibilité aux paramètres décrivant les résidus du modèle. En effet, c'est cette modélisation qui différencie les approches présentées ici, c'est là-dessus qu'il n'y a pas vraiment de consensus à l'heure actuelle.

Les sensibilités sont calculées de la façon suivante: pour chacun des paramètres, nous avons déterminé précédemment un intervalle de confiance à 95%. Nous évaluons alors l'option dont le niveau d'exercice est la moyenne historique ($K = 1093,77$) pour chacune des bornes de l'intervalle, ce qui nous donne un intervalle de "prix" pour l'option à 95%, puisque le prix est monotone en fonction de chacun des paramètres.

Paramètre	"Prix"
$\Phi_1 \in [0,9771; 1,0144]$	$C \in [0,306; 0,603]$
$\Phi_2 \in [-0,3320; -0,2806]$	$C \in [0,195; 0,791]$
$\Phi_3 \in [0,0880; 0,1252]$	$C \in [0,221; 0,755]$
$\bar{a}_0 \in [-0,0465; -0,0041]$	$C \in [0,406; 0,494]$
$\bar{a}_1 \in [0,0196; 0,0795]$	$C \in [0,413; 0,487]$
$\bar{b}_1 \in [0,0328; 0,0927]$	$C \in [0,407; 0,493]$
$\bar{a}_2 \in [-0,0900; -0,0301]$	$C \in [0,409; 0,491]$
$\bar{b}_2 \in [0,0813; 0,1412]$	$C \in [0,443; 0,456]$

Le prix varie au maximum entre 0,195 et 0,791. Celui-ci est plus sensible aux coefficients de l'autorégression (en particulier celui de l'ordre 2). Par contre, la sensibilité aux paramètres de volatilité est relativement faible.

⁴Les notions de position par rapport à "la monnaie" sont moins évidentes que pour une option classique. Mais, il s'agit ici d'utiliser un vocabulaire financier connu, même si cela ne correspond pas vraiment à une réalité financière.

Evaluation de l'option : "prix d'indifférence" avec un critère d'utilité exponentielle Cette méthode d'évaluation consiste en deux étapes essentielles :

- Tout d'abord, comme pour l'évaluation historique, il convient de simuler la valeur cumulée des *H.D.D.* de la période correspondant à la vie de l'option, i.e. entre le 1er janvier et le 31 mars, et de calculer le payoff associé, i.e. de prendre la partie positive de la différence entre cette valeur et le niveau d'exercice de l'option *K*. Il s'agit alors de calculer l'utilité associée à ce payoff :

$$\exp(-\gamma \times \text{Payoff})$$

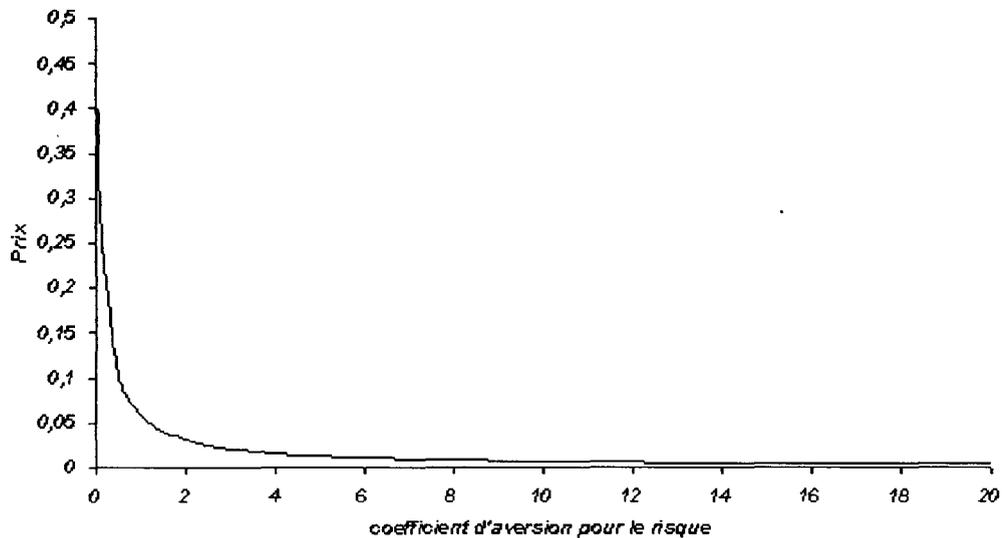
où γ est le coefficient d'aversion pour le risque de l'acheteur potentiel.

- Ensuite, comme pour les simulations de Monte-Carlo, il faut répéter la première étape (ici 30000 fois) et de prendre la moyenne des différents résultats. Puis, il faut calculer l'opposé du logarithme de cette moyenne, l'actualiser et finalement le diviser par le coefficient d'aversion pour le risque. Ainsi :

$$C = -\frac{1}{\gamma} \ln E_{\mathbb{P}} [\exp \{-\gamma \times \text{Payoff}\}] \cdot \exp(-r\tau)$$

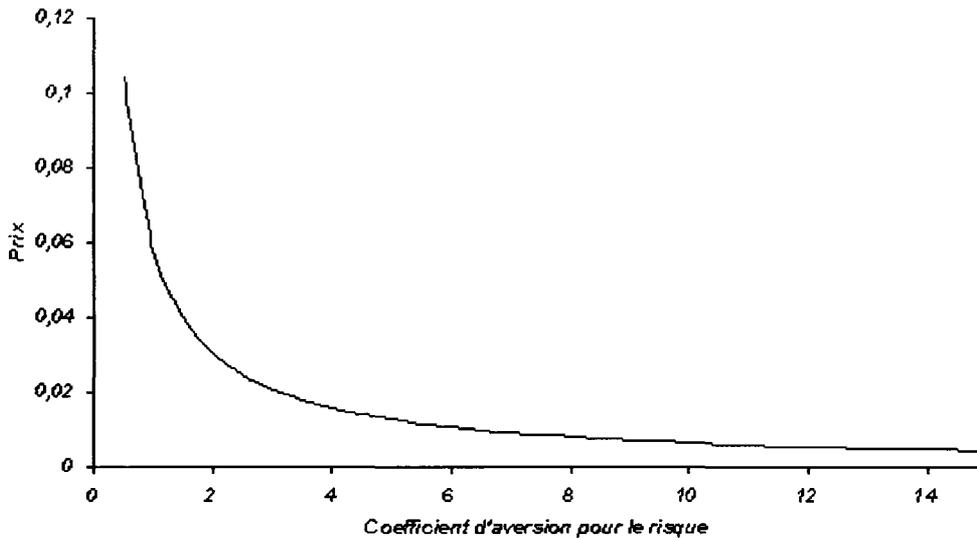
Nous calculons le "prix" de l'option correspondant au niveau de "strike" égal à la moyenne historique ($K = 1093,77$). En faisant varier ce paramètre de 10^{-4} à 20, nous obtenons le graphe suivant :

Modèle brut : Prix en fonction de l'aversion pour le risque



ou de façon plus précise, pour des valeurs de γ comprises entre 0,5 et 15 :

Modèle brut : Prix en fonction de l'aversion pour le risque



Le "prix" est par conséquent une fonction décroissante, convexe du coefficient d'aversion pour le risque (de l'acheteur potentiel). Lorsque γ devient infini, le prix tend vers 0. L'acheteur potentiel ne souhaite plus acheter ce contrat. Le "prix" obtenu par la méthode historique correspond à une valeur très faible du coefficient d'aversion pour le risque.

Modèle de M. Cao et J. Wei

Les auteurs cherchent ici à proposer un modèle d'équilibre pour l'évaluation des dérivés climatiques. La température est considérée comme un fondamental de l'économie. Mais, l'évaluation proprement dite pose un sérieux problème ici : en effet, les auteurs utilisent une évaluation risque-neutre, prétextant un prix de marché du "risque de température" insignifiant.... Nous utilisons ici uniquement leur modélisation du processus de température.

Nous rappelons ici la dynamique obtenue pour la température selon leur modèle :

$$T_t = M_t + S_t + R_t$$

où :

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 && \text{avant 1985} \\ &= M_0 + mt && \text{après 1985} \end{aligned}$$

$$S_t = a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + b_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + a_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + b_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right)$$

$$R_t = \Phi_1 R_{t-1} + \Phi_2 R_{t-2} + \Phi_3 R_{t-3} + \varepsilon_t$$

avec :

$$\varepsilon_t = \sigma_t \times \xi_t$$

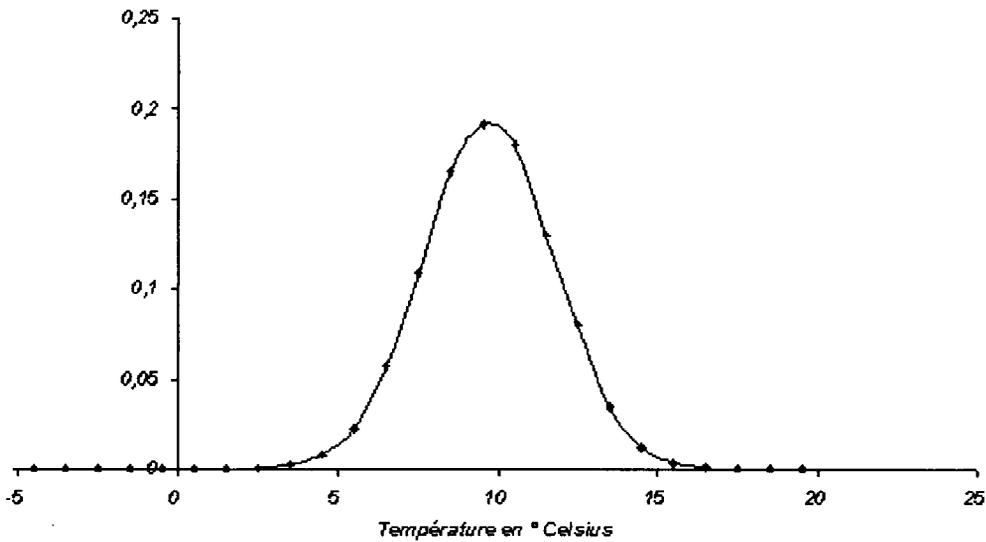
et :

$$\sigma_t = \sigma_0 - \sigma_1 \left| \sin \left(\frac{\pi t}{365} + \varphi \right) \right|$$
$$\xi_t \sim N(0, 1)$$

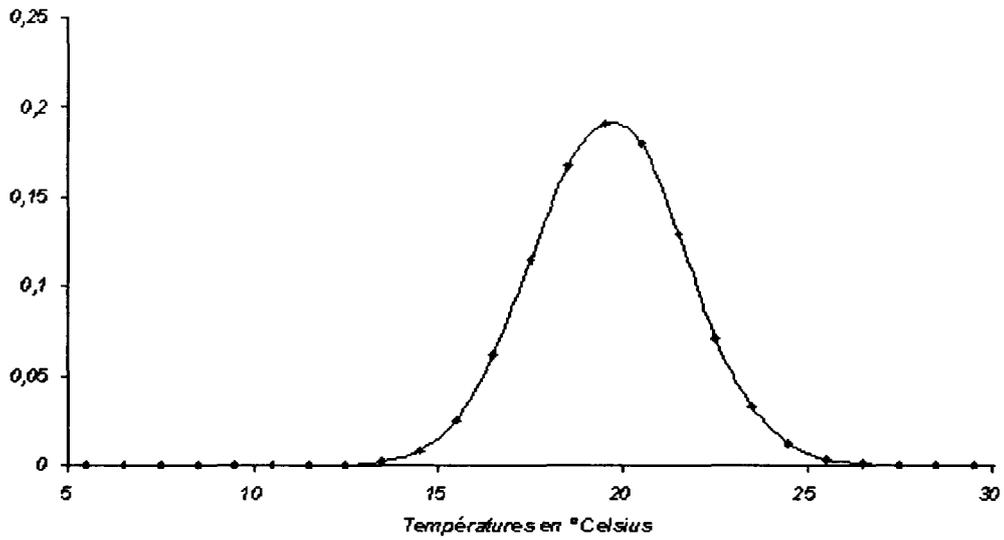
Ce modèle est déjà discrétisé. Cela facilite sa mise en place d'un point de vue numérique. Très naturellement, le pas de temps est pris égal à 1 jour.

Distributions empiriques à des dates précises Dans un premier temps, nous testons la distribution de la température engendrée par ce modèle pour trois périodes : fin mars (soit 90 jours), fin juin (soit 180 jours) et fin octobre (soit 300 jours). Les distributions empiriques obtenues pour 30000 simulations sont les suivantes :

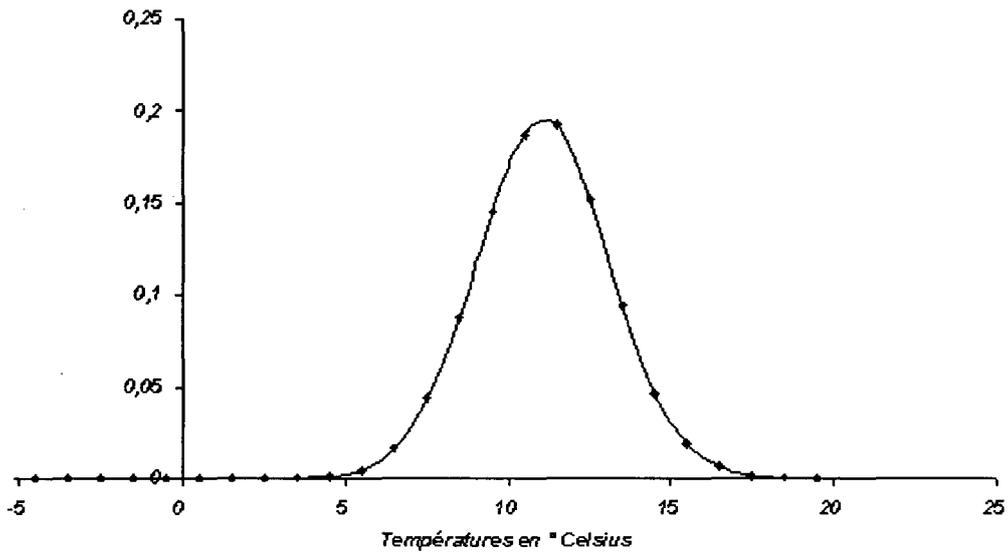
Modèle de M Cao et J. Wei : simulation de la température du 31 mars



Modèle de M Cao et J. Wei : simulation de la température du 30 juin



Modèle de M Cao et J. Wei : simulation de la température du 31 octobre



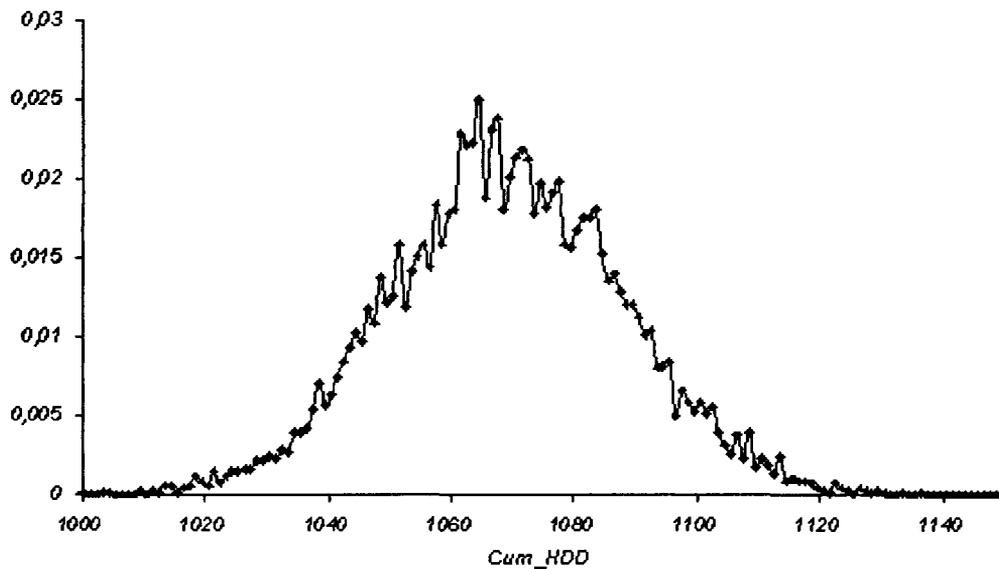
Les caractéristiques de ces distributions empiriques sont les suivantes :

	Fin mars	Fin juin	Fin octobre
moyenne	8,70	18,63	10,06
écart-type	2,03	2,03	2,02

Les moyennes semblent tout à fait pertinentes et sont cohérentes avec le modèle "brut". Par contre, le modèle est moins stable que le modèle "brut" (les écart-types sont un peu plus élevés).

Distributions empiriques de la valeur cumulée des $H.D.D.$ Nous testons la distribution de la valeur cumulée des $H.D.D.$ engendrée par ce modèle pour la période entre le 1^{er} janvier et le 31 mars (soit 90 jours). La distribution empirique obtenue pour 30000 simulations est la suivante :

Modèle de M Cao et J. Wei : simulation de Cum_HDD pour le 31 mars



Les caractéristiques de cette distribution empirique sont les suivantes :

moyenne	1068,04
écart-type	18,87

La moyenne semble encore pertinente, même si la moyenne historique est plus importante : 1093,77. Le modèle est encore stable (l'écart-type est faible mais plus élevé que dans le modèle "brut").

Evaluation de l'option : espérance historique En utilisant l'approche de type Monte-Carlo décrite précédemment, nous obtenons ainsi les "prix" suivants pour l'option :

Niveau d'exercice	$K = 1000$	$K = 1068,04$	$K = 1093,77$	$K = 1100$
Prix	67,210	7,433	0,789	0,369

Si l'option est fortement dans la monnaie ($K = 1000$ est inférieur à la moyenne du modèle 1029,77), son "prix" est élevé, si elle est fortement en dehors de la monnaie ($K = 1100$ est supérieur à la moyenne du modèle 1029,77), son "prix" est faible. Les deux autres niveaux de "strike" correspondent à une option "à la monnaie" : d'une part relativement au modèle de M. Cao et J. Wei ($K = 1068,04$) et d'autre part relativement à l'historique ($K = 1093,77$). Ce dernier cas est particulièrement intéressant car il ne dépend pas du modèle étudié.

Sensibilité des résultats aux paramètres du modèle de M. Cao et J. Wei Nous ne testerons, comme précédemment, que la sensibilité aux paramètres décrivant les résidus du modèle.

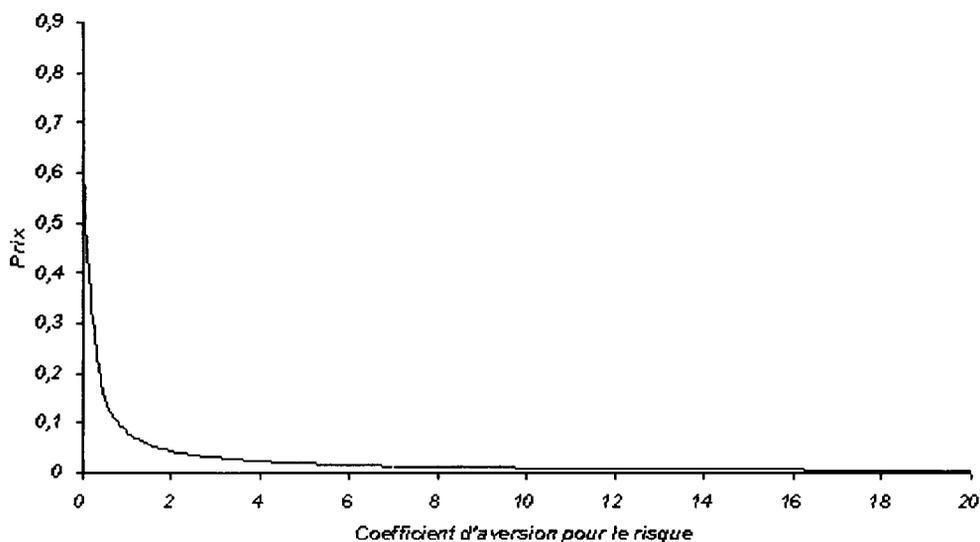
Les sensibilités sont calculées de la façon suivante: pour chacun des paramètres, nous avons déterminé précédemment un intervalle de confiance à 95%. Nous évaluons alors l'option dont le niveau d'exercice est la moyenne historique ($K = 1093,77$) pour chacune des bornes de l'intervalle, ce qui nous donne un intervalle de "prix" pour l'option à 95%, puisque le prix est monotone en fonction de chacun des paramètres.

Paramètre	"Prix"
$\Phi_1 \in [0,9771; 1,0144]$	$C \in [0,593; 0,992]$
$\Phi_2 \in [-0,3320; -0,2806]$	$C \in [0,416; 1,236]$
$\Phi_3 \in [0,0880; 0,1252]$	$C \in [0,456; 1,192]$
$\sigma_0 \in [1,13858; 1,17582]$	$C \in [0,740; 0,839]$
$\sigma_1 \in [0,26138; 0,29862]$	$C \in [0,789; 0,789]$
$\varphi \in [0,21408; 0,25132]$	$C \in [0,789; 0,789]$

Le "prix" varie au maximum entre 0,416 et 1,236. Celui-ci est plus sensible, comme pour le modèle "brut", aux coefficients de l'autorégression (en particulier celui de l'ordre 2). Par contre, la sensibilité aux paramètres de volatilité est relativement faible, voire quasi-inexistante.

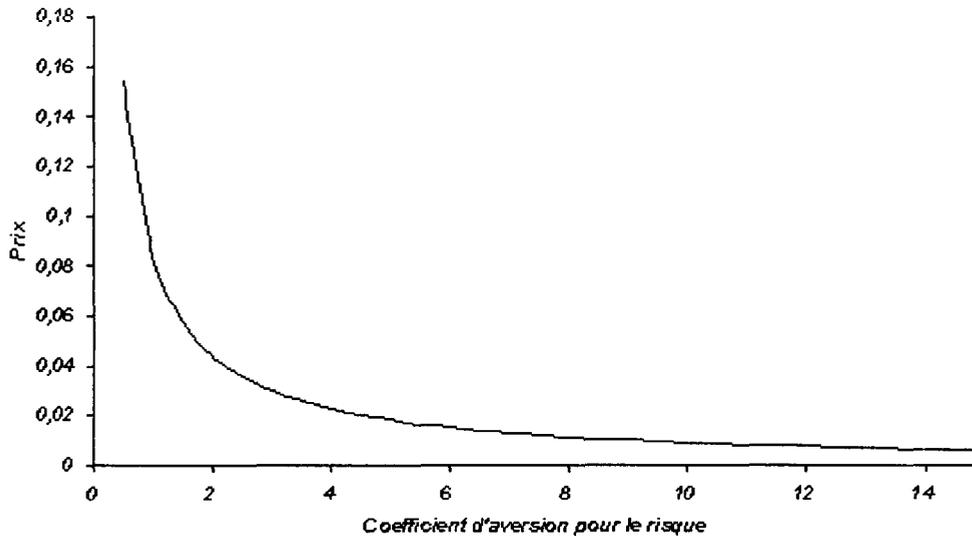
Evaluation de l'option : "prix d'indifférence" avec un critère d'utilité exponentielle En utilisant l'approche décrite pour le modèle "brut", nous obtenons le graphe suivant, traduisant l'évolution du "prix" en fonction du coefficient d'aversion pour le risque, ce paramètre variant de 10^{-4} à 20 :

Modèle de M Cao et J. Wei : Prix en fonction de l'aversion pour le risque



ou de façon plus précise, pour des valeurs de γ comprises entre 0,5 et 15 :

Modèle de M. Cao et J. Wei : Prix en fonction de l'aversion pour le risque



Le "prix" est par conséquent une fonction décroissante, convexe du coefficient d'aversion pour le risque (de l'acheteur potentiel). Lorsque γ devient infini, le prix tend vers 0. L'acheteur potentiel ne souhaite plus acheter ce contrat. Le "prix" obtenu par la méthode historique correspond à une valeur très faible de γ .

Modèle de O. Roustant

Nous rappelons ici la dynamique obtenue pour la température selon le modèle d'O. Roustant :

$$T_t = M_t + S_t + R_t$$

où :

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 && \text{avant 1985} \\ &= M_0 + mt && \text{après 1985} \end{aligned}$$

$$S_t = a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + b_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + a_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + b_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right)$$

et :

$$R_t = \rho_t \times Z_t$$

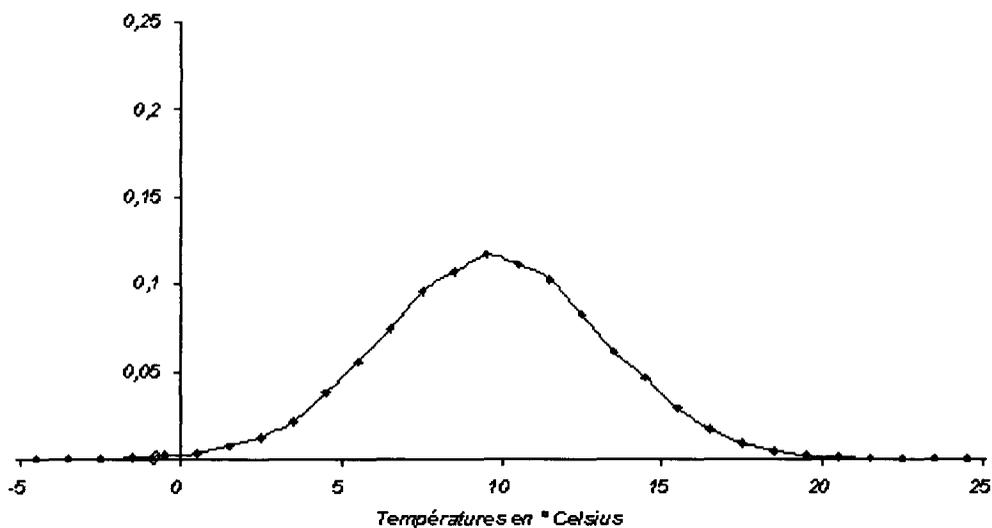
avec :

$$\begin{aligned} \rho_t &= a + b \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + c \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) \\ Z_t &= \Psi_1 Z_{t-1} + \Psi_2 Z_{t-2} + \Psi_3 Z_{t-3} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim N(0, 1) \end{aligned}$$

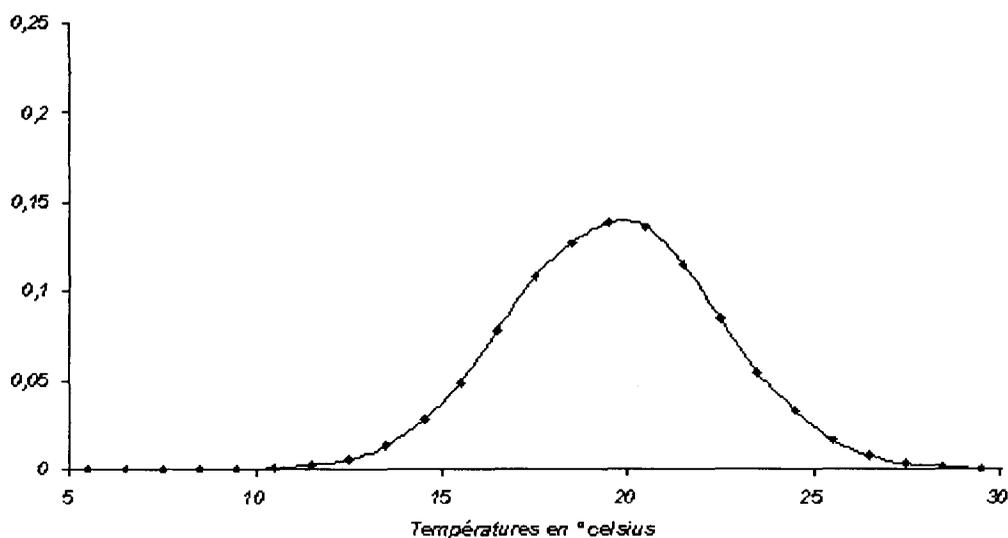
Ce modèle est déjà discrétisé. Cela facilite sa mise en place d'un point de vue numérique. Très naturellement, le pas de temps est pris égal à 1 jour.

Distributions empiriques à des dates précises Dans un premier temps, nous testons la distribution de la température engendrée par ce modèle pour trois périodes : fin mars (soit 90 jours), fin juin (soit 180 jours) et fin octobre (soit 300 jours). Les distributions empiriques obtenues pour 30000 simulations sont les suivantes :

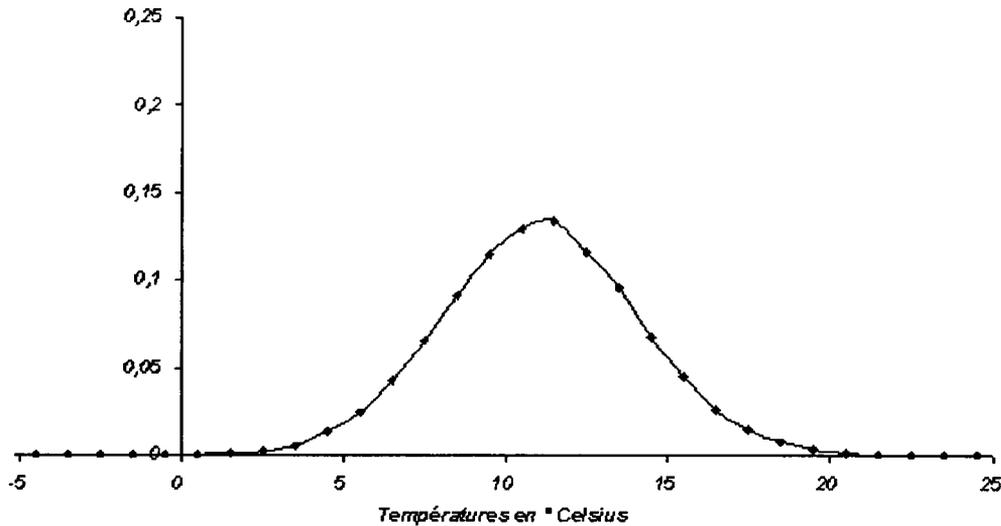
Modèle de O. Roustant : simulation de la température du 31 mars



Modèle de O. Roustant : simulation de la température du 30 juin



Modèle de O. Roustant : simulation de la température du 31 octobre



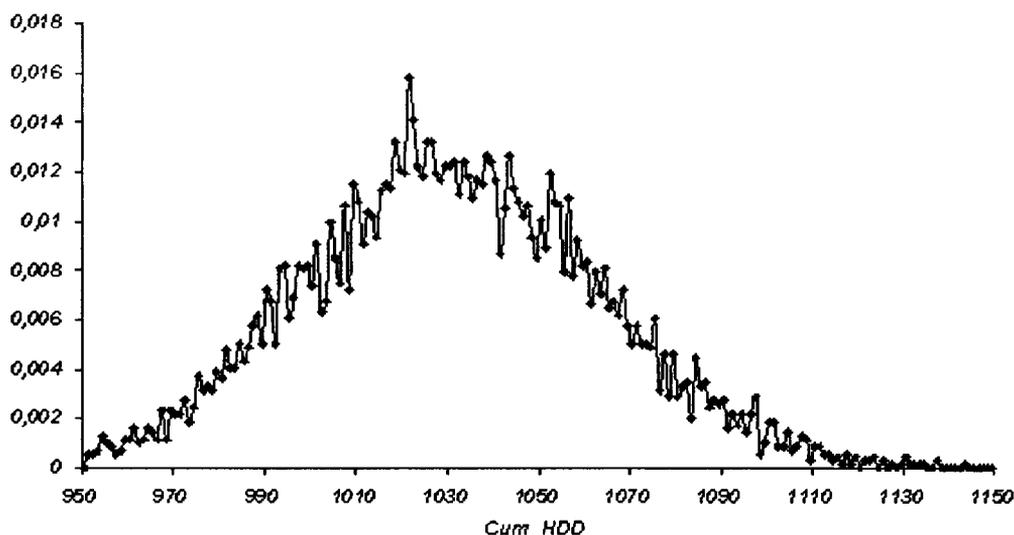
Les caractéristiques de ces distributions empiriques sont les suivantes :

	Fin mars	Fin juin	Fin octobre
moyenne	8,71	18,64	10,07
écart-type	3,43	2,81	3,00

Les moyennes semblent tout à fait pertinentes et sont cohérentes avec le modèle "brut" et le modèle de M. Cao et J. Wei. Par contre, le modèle est moins stable que ceux-ci (les écarts-types sont un peu plus élevés).

Distributions empiriques de la valeur cumulée des *H.D.D.* Nous testons la distribution de la valeur cumulée des *H.D.D.* engendrée par ce modèle pour la période entre le 1^{er} janvier et le 31 mars (soit 90 jours). La distribution empirique obtenue pour 30000 simulations est la suivante :

Modèle de O. Roustant : simulation de Cum_HDD pour le 31 mars



Les caractéristiques de cette distribution empirique sont les suivantes :

moyenne	1029,77
écart-type	32,76

La moyenne semble encore pertinente, même si la moyenne historique est plus importante : 1093,77. Le modèle est encore stable (l'écart-type est faible mais plus élevé que dans le modèle "brut" et dans le modèle de M. Cao et J. Wei).

Evaluation de l'option : espérance historique En utilisant l'approche de type Monte-Carlo décrite précédemment, nous obtenons ainsi les "prix" suivants pour l'option :

Niveau d'exercice	$K = 1000$	$K = 1029,77$	$K = 1093,77$	$K = 1100$
Prix	32,546	12,908	0,327	0,182

Si l'option est fortement dans la monnaie ($K = 1000$ est inférieur à la moyenne du modèle 1029,77), son "prix" est élevé, si elle est fortement en dehors de la monnaie ($K = 1100$ est supérieur à la moyenne du modèle 1029,77), son "prix" est faible. Les deux autres niveaux de "strike" correspondent à une option "à la monnaie" : d'une part relativement au modèle d'O. Roustant ($K = 1029,77$) et d'autre part relativement à l'historique ($K = 1093,77$). Ce dernier cas est particulièrement intéressant car il ne dépend pas du modèle étudié.

Sensibilité des résultats aux paramètres du modèle d'O. Roustant Nous ne testerons, comme précédemment, que la sensibilité aux paramètres décrivant les résidus du modèle.

Les sensibilités sont calculées de la façon suivante : pour chacun des paramètres, nous avons déterminé précédemment un intervalle de confiance à 95%. Nous évaluons alors

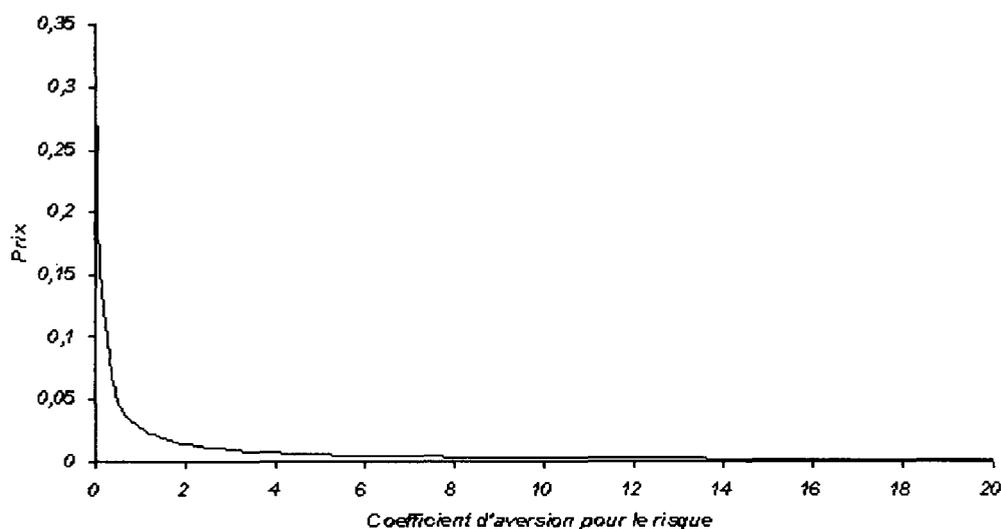
l'option dont le niveau d'exercice est la moyenne historique ($K = 1093,77$) pour chacune des bornes de l'intervalle, ce qui nous donne un intervalle de "prix" pour l'option à 95%, puisque le prix est monotone en fonction de chacun des paramètres.

Paramètre	"Prix"
$\Psi_1 \in [0,9758; 1,030]$	$C \in [0,146; 0,452]$
$\Psi_2 \in [-0,3364; -0,2850]$	$C \in [0,138; 0,624]$
$\Psi_3 \in [0,0910; 0,1282]$	$C \in [0,150; 0,601]$
$a \in [1,7793; 1,81648]$	$C \in [0,320; 0,333]$
$b \in [0,17262; 0,20978]$	$C \in [0,326; 0,327]$
$c \in [0,14801; 0,18518]$	$C \in [0,316; 0,338]$

Le "prix" varie au maximum entre 0,138 et 0,624. Celui-ci est plus sensible, comme pour le modèle "brut", aux coefficients de l'autorégression (en particulier celui de l'ordre 2). Par contre, la sensibilité aux paramètres de volatilité est relativement faible.

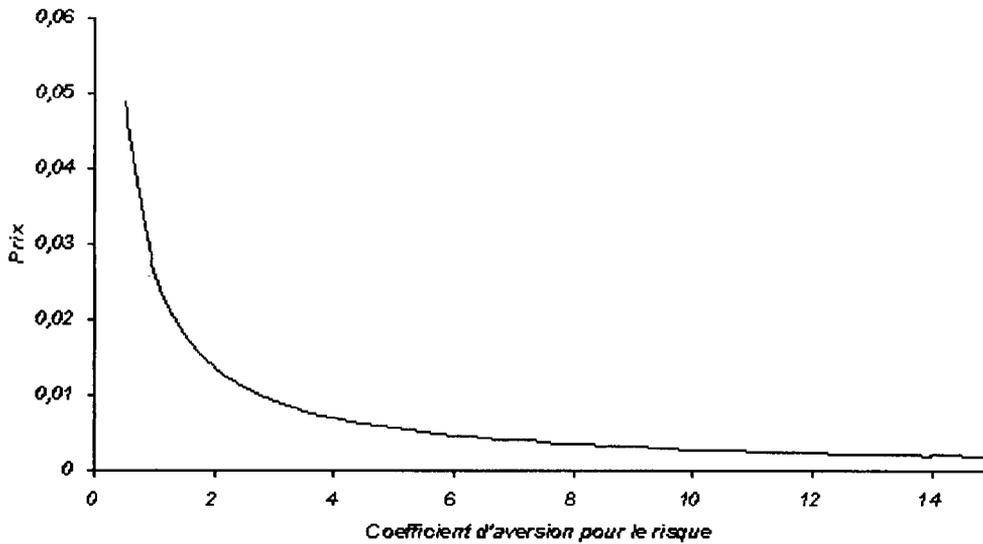
Evaluation de l'option : "prix d'indifférence" avec un critère d'utilité exponentielle En utilisant l'approche décrite pour le modèle "brut", nous obtenons le graphe suivant, traduisant l'évolution du "prix" en fonction du coefficient d'aversion pour le risque, ce paramètre variant de 10^{-4} à 20 :

Modèle d'O. Roustant : Prix en fonction de l'aversion pour le risque



ou de façon plus précise, pour des valeurs de γ comprises entre 0,5 et 15 :

Modèle d'O. Roustant : Prix en fonction de l'aversion pour le risque



Le "prix" est par conséquent une fonction décroissante, convexe du coefficient d'aversion pour le risque (de l'acheteur potentiel). Lorsque γ devient infini, le prix tend vers 0. L'acheteur potentiel ne souhaite plus acheter ce contrat. Le "prix" obtenu par la méthode historique correspond à une valeur très faible de γ .

Modèle de P. Tankov

Nous rappelons ici la dynamique obtenue pour la température selon le modèle de P. Tankov :

$$T_t = M_t + S_t + R_t$$

où :

$$M_t = m_0 + mt$$

$$S_t = a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + b_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + a_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{365}\right) + b_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{365}\right)$$

$$R_t = \Phi_1 R_{t-1} + \Phi_2 R_{t-2} + \Phi_3 R_{t-3} + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t = \exp\left[c_0 + c_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + c_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right)\right] \epsilon_t$$

ϵ_t sont des variables i.i.d suivant une loi hyperbolique

Ce modèle est déjà discrétisé. Cela facilite sa mise en place d'un point de vue numérique. Très naturellement, le pas de temps est pris égal à 1 jour. Un des points cruciaux réside dans la simulation de variables hyperboliques.

Simulation de la loi hyperbolique Plusieurs étapes sont nécessaires pour simuler des variables aléatoires de loi hyperbolique :

Simulation de la fonction de Bessel d'indice 1: $K_1(r)$ La fonction de Bessel d'indice 1 est donnée par :

$$K_1(r) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)\right) du$$

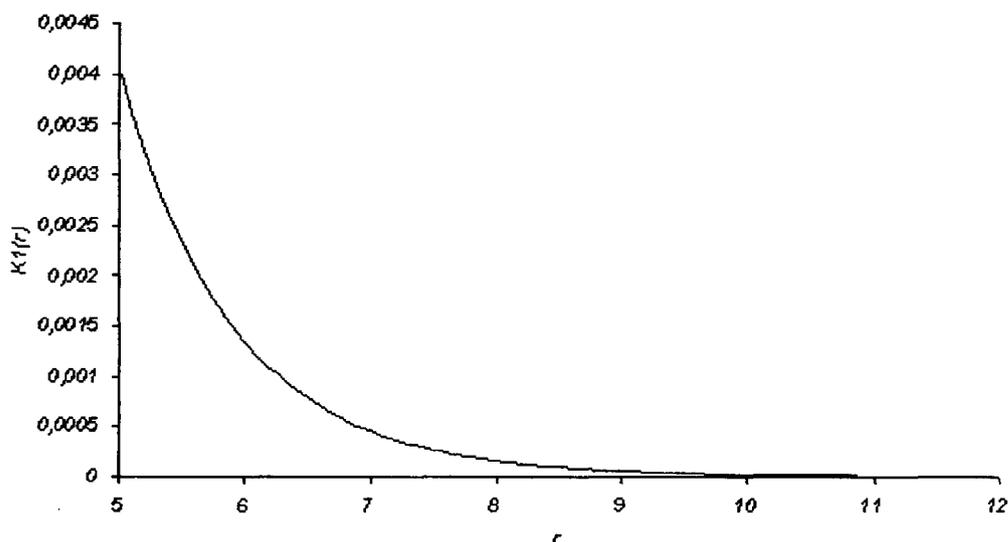
Après différents tests, il est suffisant d'intégrer jusqu'à 10, en divisant l'intervalle $[10^{-4}; 10]$ en 10000 pas d'intégration.

Pour $r = 8,2527$, on obtient :

$$K_1(r) = 0,000119$$

Lorsque r décrit l'intervalle de confiance à 95%, $K_1(r)$ décrit l'intervalle $[4.10^{-6}; 0,003673]$. Plus généralement, lorsque r varie entre 5 et 12, $K_1(r)$ varie de la façon suivante :

$K_1(r)$ en fonction de r



Méthode du rejet Pour simuler des variables aléatoires de loi hyperbolique, nous utilisons la méthode du rejet (décrite, par exemple, dans le Chapitre 7 p. 292 de [78]).

1. *Description de la méthode du rejet*: Soient deux variables aléatoires X de densité g_X et Y de densité g_Y . Supposons qu'il existe une constante c strictement positive tel que:

$$g_X(x) \leq c.g_Y(x) \quad \forall x$$

On sait simuler selon la loi de Y mais non selon la loi de X . Alors, si (Y_1, \dots, Y_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi de Y et si (U_1, \dots, U_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes

uniformément distribuées sur l'intervalle $[0; 1]$, indépendantes de la loi des Y_i , on sait simuler X . En effet, tant que :

$$g_X(Y_i) < c \cdot g_Y(Y_i) \cdot U_i$$

on continue, sinon on s'arrête et on pose :

$$X = Y_i$$

2. *La première étape* consiste à déterminer une fonction qui domine la densité hyperbolique, notée ici h . Selon [78], celle-ci est de la forme :

$$f(x) = \frac{\omega_0}{1 + \frac{(x-x_0)^2}{a_0^2}}$$

Il faut alors trouver les valeurs des trois constantes ω_0 , x_0 et a_0 .

La fonction f doit être centrée autour de la même valeur que la densité hyperbolique.

Ainsi :

$$x_0 = \mu$$

D'autre part, la fonction dominante doit au moins atteindre le maximum de la densité hyperbolique h :

$$\omega_0 \geq \max h(x) = h(\mu) \simeq 0,2129$$

Par exemple,

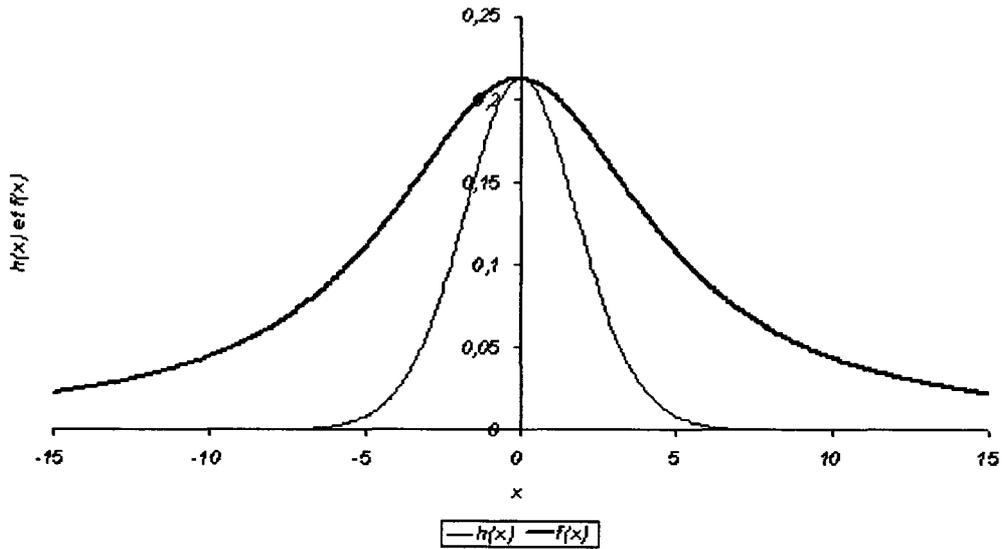
$$\omega_0 = 0,213$$

Et enfin, la fonction f doit toujours dominer la densité hyperbolique h . Aussi :

$$a_0 = \delta$$

Ceci correspond à une fonction qui domine h . Ce n'est bien évidemment pas la seule fonction dominante ni la fonction dominante optimale. Toujours est-il que f convient parfaitement comme le souligne le graphique ci-dessous :

Comparaison de la densité hyperbolique h et de la fonction dominante f



3. La seconde étape consiste à déterminer la densité de Cauchy associée à la fonction dominante. Pour cela on intègre sur \mathbb{R} , la fonction dominante f .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \pi a_0 \omega_0$$

On en déduit que la densité associée à la fonction dominante est :

$$\hat{f}(x) = \frac{f(x)}{\pi a_0 \omega_0}$$

puisque f est une fonction positive

soit :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{a_0 \pi} \cdot \frac{\omega_0}{1 + \frac{(x-x_0)^2}{a_0^2}}$$

\hat{f} est une densité de Cauchy.

4. Et enfin, la dernière étape consiste à utiliser la méthode du rejet à proprement parlé. [78] donne la formule permettant de simuler une variable aléatoire de densité de Cauchy. Ainsi

$$X = a_0 \tan(\pi U) + x_0$$

est une variable de densité \hat{f} , où U est une variable uniforme sur $[0; 1]$.

L'algorithme suivant décrit la méthode du rejet :

```

double gamma ,U_y ,Y,U, Rapport_densites;
gamma = a0*w0*pi;
U_y = double (rand())/double(RAND_MAX);
Y = a0 * tan(pi*U_y) + x0;
U = double (rand())/double(RAND_MAX);
Rapport_densites = DensiteHyperbol(Y,K1_de_r,delta,Mu,r,Theta)/(gamma*Cauchy_Dominante(Y,cauchy0,x0,a0));

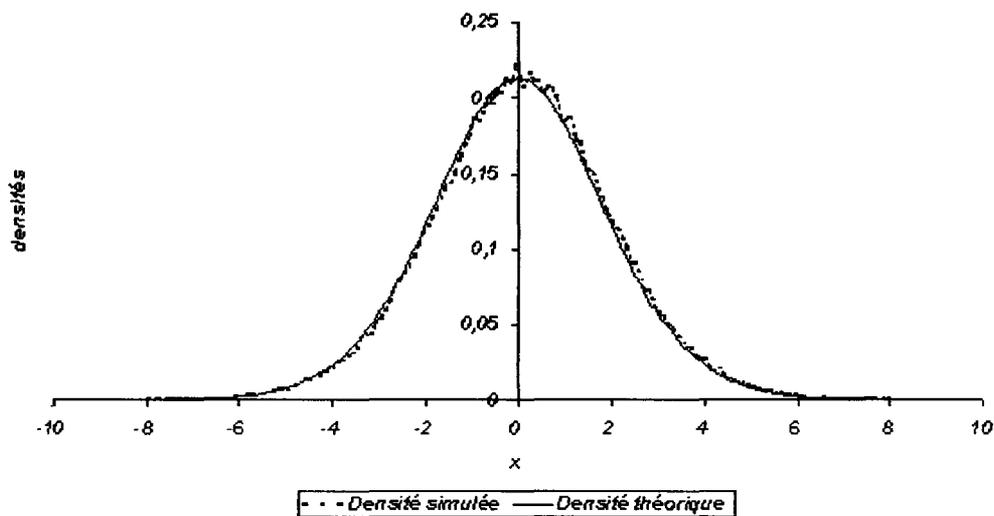
while(Rapport_densites >U)
U_y = double (rand())/double(RAND_MAX);
Y = a0 * tan(pi*U_y) + x0;
U = double (rand())/double(RAND_MAX);
Rapport_densites = DensiteHyperbol(Y,K1_de_r,delta,Mu,r,Theta)/(gamma*Cauchy_Dominante(Y,cauchy0,x0,a0));

return Y;

```

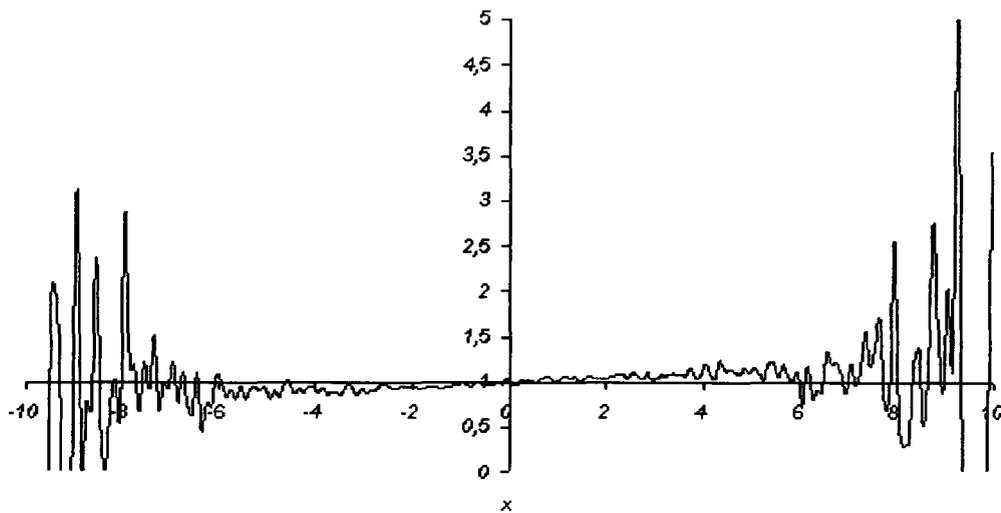
La densité hyperbolique obtenue avec la méthode du rejet est la suivante :

**Comparaison entre la densité hyperbolique théorique
et la densité simulée par la méthode du rejet**



La qualité de la simulation est très grande, comme le montre le graphique ci-dessus. De plus, le rapport entre la densité simulée et la densité théorique peut être représenté de la façon suivante :

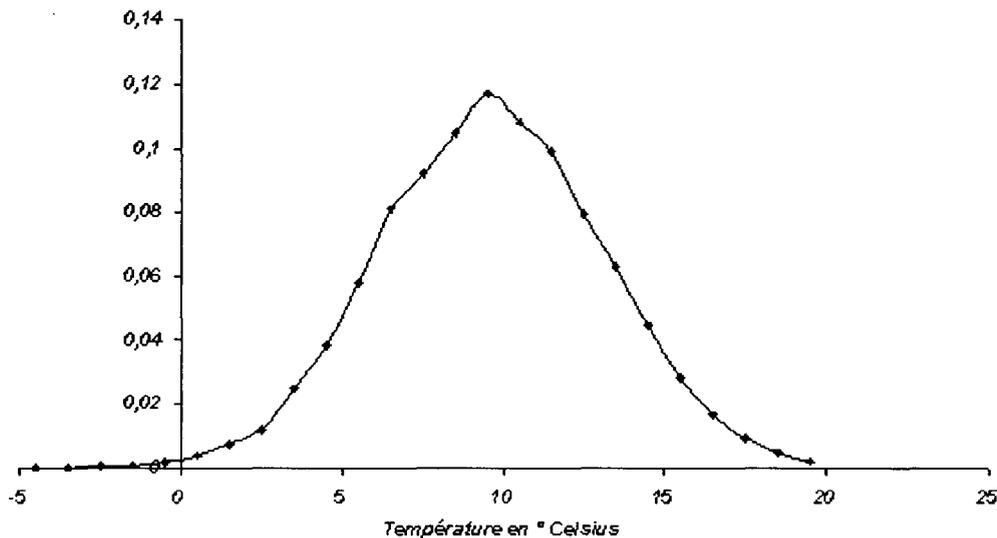
**Rapport entre la densité simulée par la méthode du rejet
et la densité théorique**



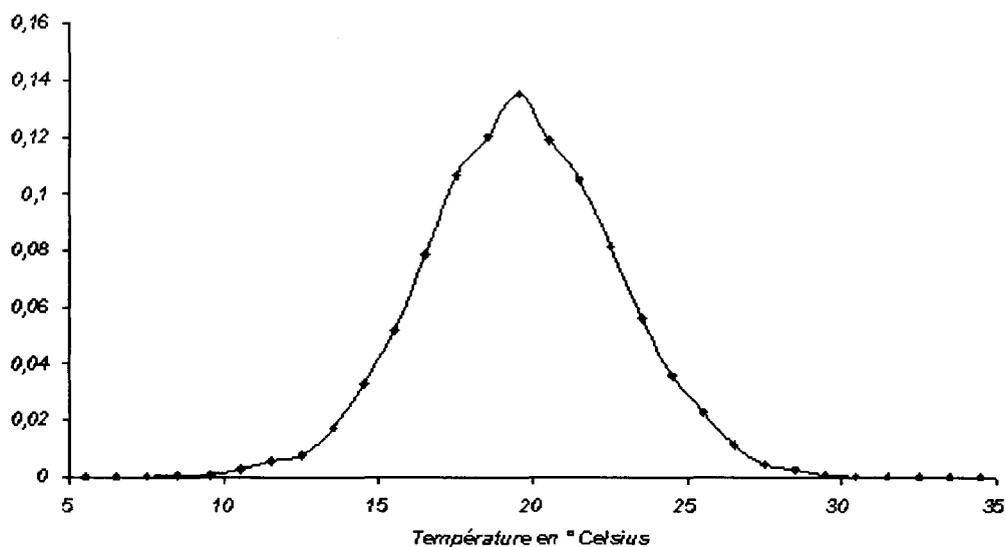
La qualité de la simulation est moindre aux extrêmes car l'écart entre la densité hyperbolique h et la fonction dominante est beaucoup plus important au niveau des queues de distribution. Par conséquent, on accepte beaucoup plus rarement des variable Y loin de la valeur centrale μ .

Distributions empiriques à des dates précises Dans un premier temps, nous testons la distribution de la température engendrée par ce modèle pour trois périodes : fin mars (soit 90 jours), fin juin (soit 180 jours) et fin octobre (soit 300 jours). Les distributions empiriques obtenues pour 30000 simulations sont les suivantes :

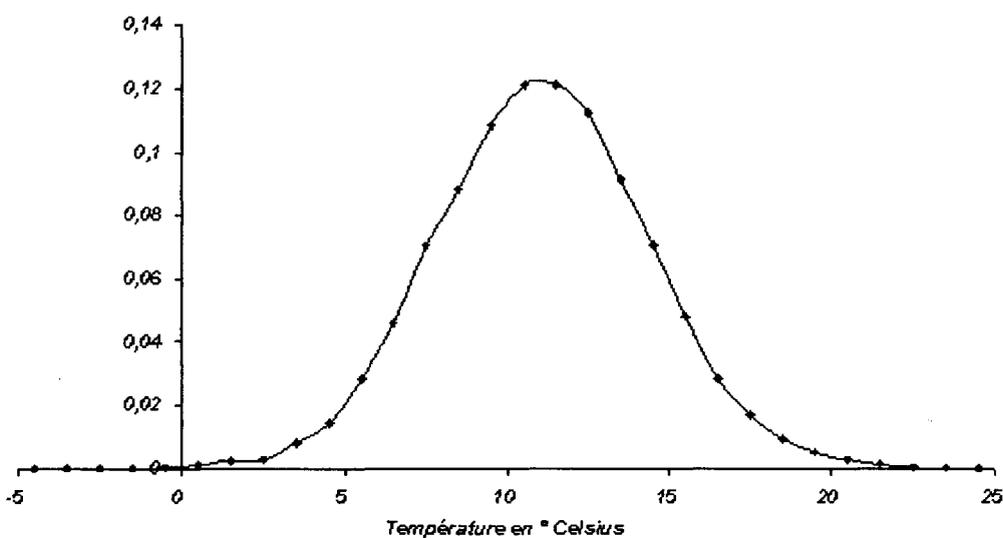
Modèle de P. Tankov : simulation de la température du 31 mars



Température de P. Tankov : simulation de la température du 30 juin



Modèle de P. Tankov : simulation de la température du 31 octobre



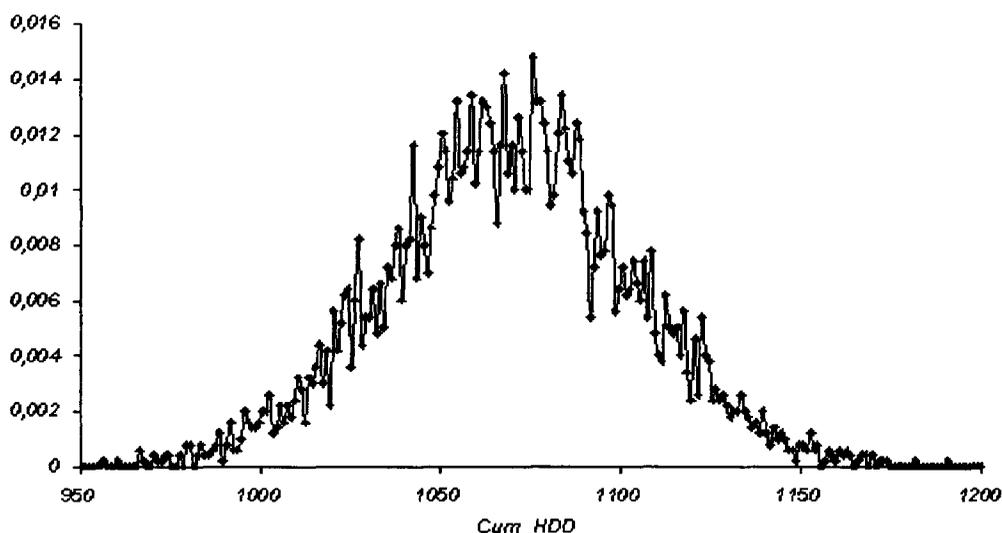
Les caractéristiques de ces distributions empiriques sont les suivantes :

	Fin mars	Fin juin	Fin octobre
moyenne	8,65	18,58	10,07
écart-type	3,52	3,12	3,26

Les moyennes semblent tout à fait pertinentes et sont cohérentes avec les autres modèles. Par contre, le modèle donne des écart-types relativement importants, de l'ordre du modèle d'O. Roustant.

Distributions empiriques de la valeur cumulée des $H.D.D.$ Nous testons la distribution de la valeur cumulée des $H.D.D.$ engendrée par ce modèle pour la période entre le 1^{er} janvier et le 31 mars (soit 90 jours). La distribution empirique obtenue pour 30000 simulations est la suivante :

Modèle de P. Tankov : simulation de Cum_HDD pour le 31 mars



Les caractéristiques de cette distribution empirique sont les suivantes :

moyenne	1069,96
écart-type	126,64

La moyenne obtenue est tout à fait cohérente avec la moyenne historique. Par contre, l'écart-type obtenu est très important, par rapport à tous les autres modèles.

Evaluation de l'option : espérance historique En utilisant l'approche de type Monte-Carlo décrite précédemment, nous obtenons ainsi les "prix" suivants pour l'option :

Niveau d'exercice	$K = 1000$	$K = 1069,96$	$K = 1093,77$	$K = 1100$
Prix	69,373	14,293	6,279	5,075

Si l'option est fortement dans la monnaie ($K = 1000$ est inférieur à la moyenne du modèle 1069,96), son "prix" est élevé, si elle est fortement en dehors de la monnaie ($K = 1100$ est supérieur à la moyenne du modèle 1069,96), son "prix" est encore important. Les deux autres niveaux de "strike" correspondent à une option "à la monnaie" : d'une part relativement au modèle de P. Tankov ($K = 1069,96$) et d'autre part relativement à l'historique ($K = 1093,77$). Ce dernier cas est particulièrement intéressant car il ne dépend pas du modèle étudié. Les prix obtenus sont très élevés par rapport aux autres modèles (surtout pour les niveaux de "strike" à la monnaie et hors de la monnaie) : le fort écart-type obtenu pour la distribution de Cum_HDD est sans doute responsable de cette "surévaluation" relative.

Sensibilité des résultats aux paramètres du modèle de P. Tankov Nous ne testerons, comme précédemment, que la sensibilité aux paramètres décrivant les résidus du modèle.

Les sensibilités sont calculées de la façon suivante: pour chacun des paramètres, nous avons déterminé précédemment un intervalle de confiance à 95%. Nous évaluons alors l'option dont le niveau d'exercice est la moyenne historique ($K = 1093,77$) pour chacune des bornes de l'intervalle, ce qui nous donne un intervalle de "prix" pour l'option à 95%, puisque le prix est monotone en fonction de chacun des paramètres.

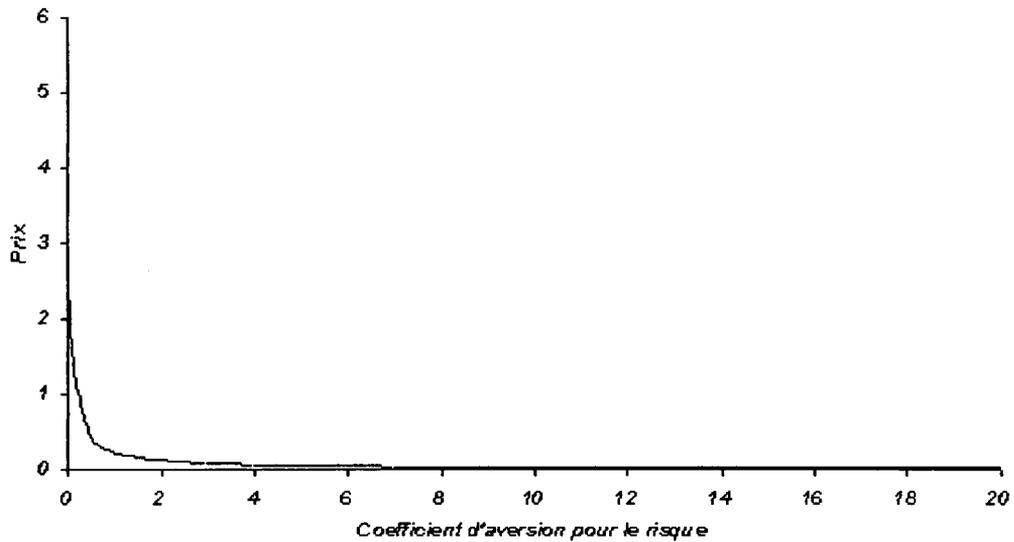
Paramètre	"Prix"
$\Phi_1 \in [0,9771; 1,0144]$	$C \in [5,978; 6,547]$
$\Phi_2 \in [-0,3320; -0,2806]$	$C \in [5,441; 7,111]$
$\Phi_3 \in [0,0880; 0,1252]$	$C \in [5,449; 7,076]$
$c_0 \in [-0,0466; -0,0041]$	$C \in [6,026; 6,541]$
$c_1 \in [0,0195; 0,0796]$	$C \in [6,045; 6,519]$
$c_2 \in [0,0326; 0,0928]$	$C \in [6,044; 6,522]$

Le "prix" varie au maximum entre 5,441 et 7,111. Celui-ci est plus sensible, comme pour tous les autres modèles, aux coefficients de l'autorégression (en particulier celui de l'ordre 2). Par contre, la sensibilité aux paramètres de volatilité est relativement faible.

Remarque : La sensibilité des résultats aux paramètres de la distribution hyperbolique (δ, μ, r, θ) n'est pas étudiée ici. L'hypothèse est faite que les résidus des résidus de tous les modèles étudiés sont calibrés correctement.

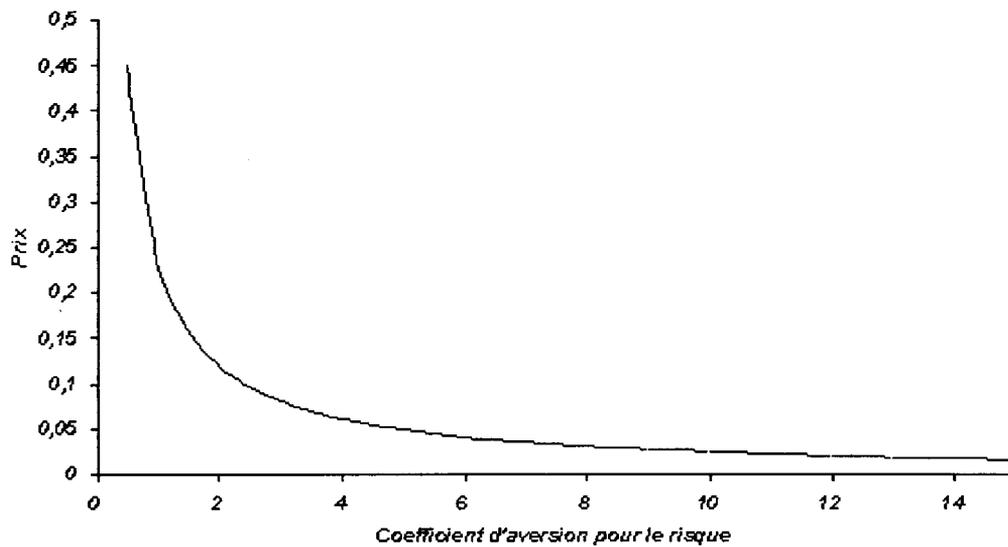
Evaluation de l'option : "prix d'indifférence" avec un critère d'utilité exponentielle En utilisant l'approche décrite pour le modèle "brut", nous obtenons le graphe suivant, traduisant l'évolution du "prix" en fonction du coefficient d'aversion pour le risque, ce paramètre variant de 10^{-4} à 20:

Modèle de P. Tankov : Prix en fonction de l'aversion pour le risque



ou de façon plus précise, pour des valeurs de γ comprises entre 0,5 et 15 :

Modèle de P. Tankov : Prix en fonction de l'aversion pour le risque



Le "prix" est par conséquent une fonction décroissante, convexe du coefficient d'aversion pour le risque (de l'acheteur potentiel). Lorsque γ devient infini, le prix tend vers 0. L'acheteur potentiel ne souhaite plus acheter ce contrat. Le "prix" obtenu par la méthode historique correspond à une valeur très faible de γ .

Modèle de R. Dischel

Nous rappelons ici la dynamique obtenue pour la température selon le modèle de R. Dischel :

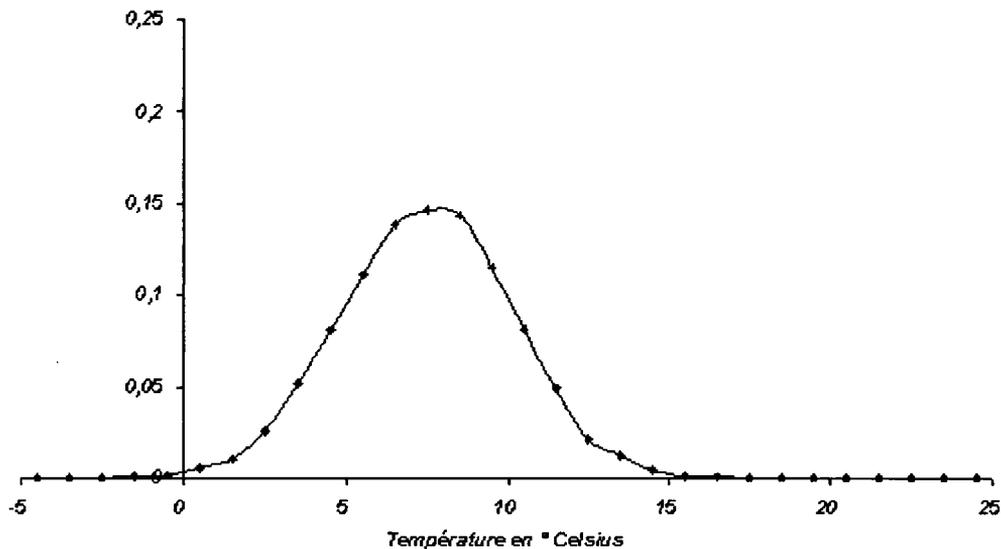
$$T_t = (x - \theta_0) \exp(-\alpha t) + \int_0^t \exp(-\alpha(t-u)) \theta_u du + \int_0^t \exp(-\alpha(t-u)) \sigma_u dW_u$$

Ce modèle a déjà été discrétisé précédemment. Très naturellement, le pas de temps est pris égal à 1 jour. Il s'agit simplement de la discrétisation d'un processus d'Orstein-Ühlenbeck.

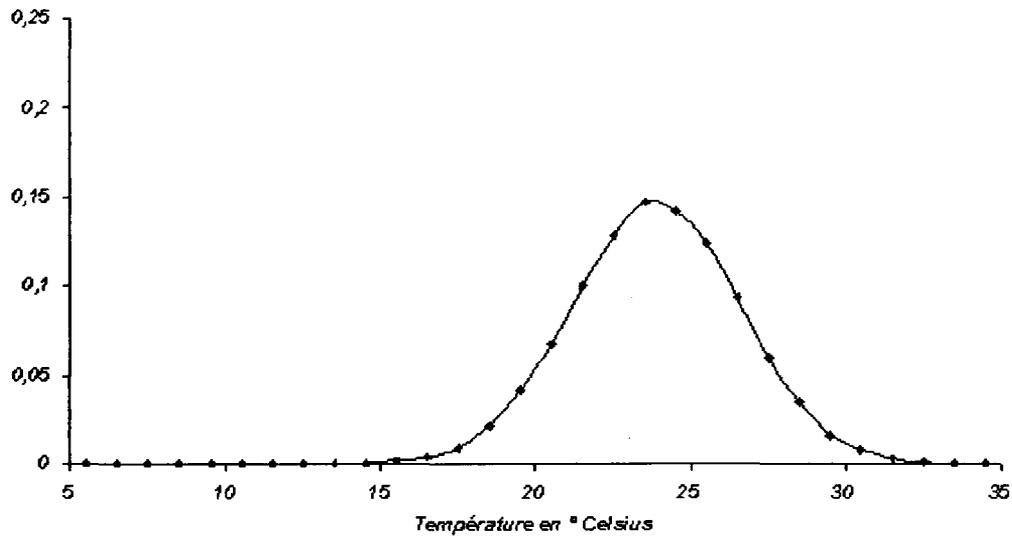
La saison (θ_t) est modélisée comme la partie déterministe du modèle "brut". La volatilité est constante mensuellement.

Distributions empiriques à des dates précises Dans un premier temps, nous testons la distribution de la température engendrée par ce modèle pour trois périodes : fin mars (soit 90 jours), fin juin (soit 180 jours) et fin octobre (soit 300 jours). Les distributions empiriques obtenues pour 30000 simulations sont les suivantes :

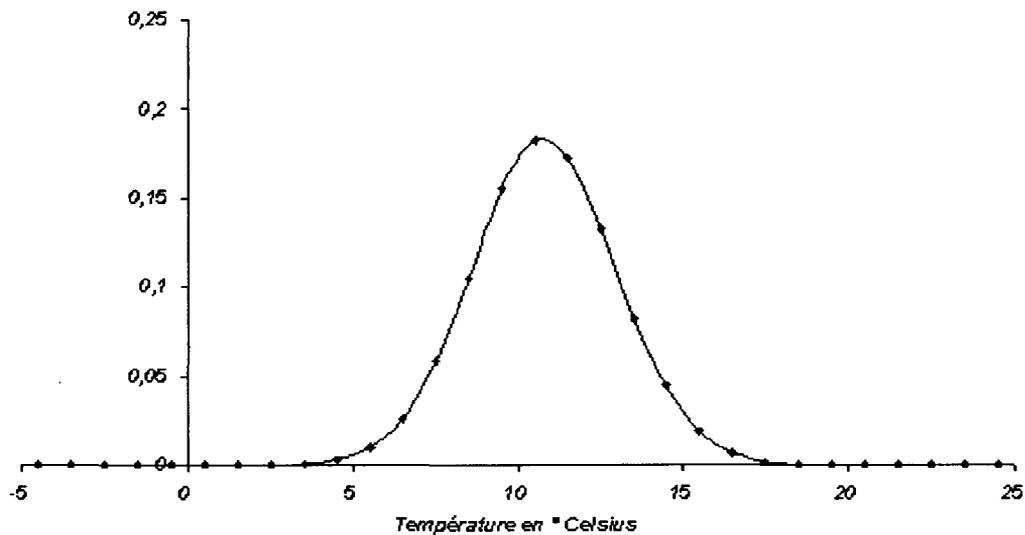
Modèle de R. Dischel : simulation de la température du 31 mars



Modèle de R. Dischel : simulation de la température du 30 juin



Modèle de R. Dischel : simulation de la température du 31 octobre



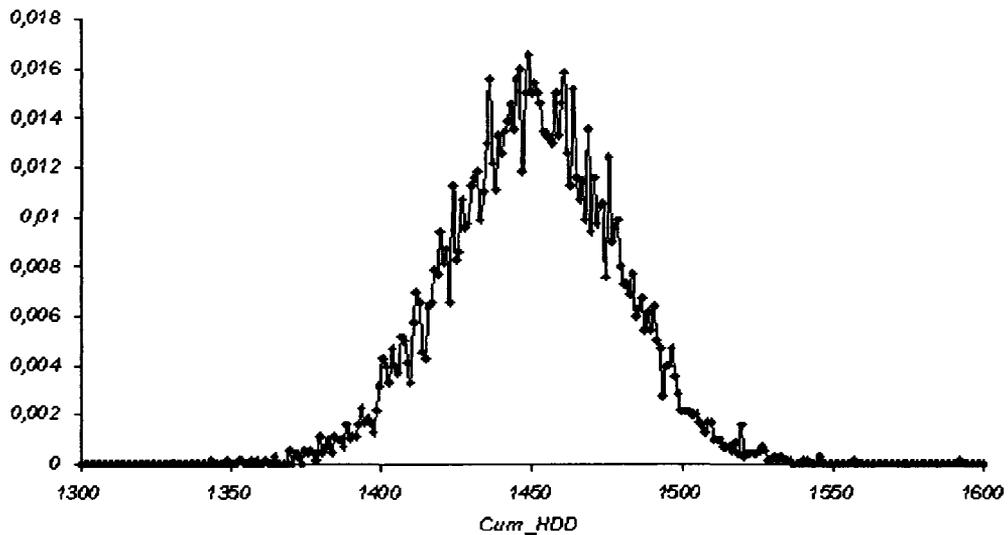
Les caractéristiques de ces distributions empiriques sont les suivantes :

	Fin mars	Fin juin	Fin octobre
moyenne	6,48	22,86	9,79
écart-type	2,62	2,70	2,16

Les moyennes semblent moins pertinentes que pour les modèles précédents (moyennes plus froides en mars et octobre et moyenne plus chaude en juin) mais les écart-types sont relativement faibles. Il semblerait que le modèle de R. Dischel accentue les décalages entre les saisons.

Distributions empiriques de la valeur cumulée des *H.D.D.* Nous testons la distribution de la valeur cumulée des *H.D.D.* engendrée par ce modèle pour la période entre le 1^{er} janvier et le 31 mars (soit 90 jours). La distribution empirique obtenue pour 30000 simulations est la suivante :

Modèle de R. Dischel : simulation de Cum_HDD pour le 31 mars



Les caractéristiques de cette distribution empirique sont les suivantes :

moyenne	1449,02
écart-type	27,67

La moyenne semble vraiment excessive non seulement par rapport aux modèles précédents mais surtout par rapport à la moyenne historique est de 1093,77. Ce résultat est cohérent avec les observations faites précédemment sur les distributions empiriques à des dates données.

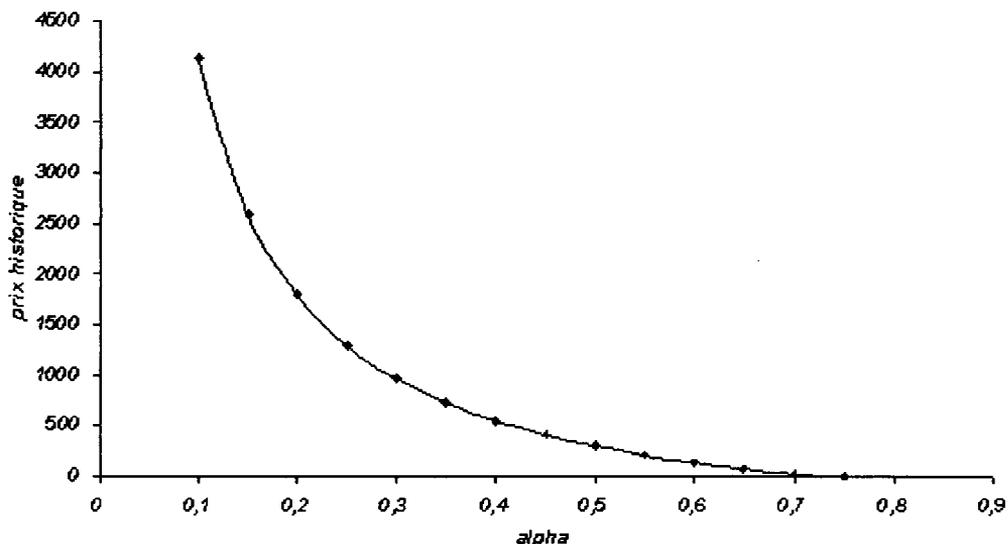
Evaluation de l'option : espérance historique En utilisant l'approche de type Monte-Carlo décrite précédemment, nous obtenons ainsi les "prix" suivants pour l'option :

Niveau d'exercice	$K = 1000$	$K = 1093,77$	$K = 1449,02$	$K = 1500$
Prix	443,516	355,895	10,878	0,363

Si l'option est fortement dans la monnaie ($K = 1000$ est inférieur à la moyenne du modèle 1067,97), son "prix" est élevé, si elle est fortement en dehors de la monnaie ($K = 1500$ est supérieur à la moyenne du modèle 1067,97), son "prix" est faible. Les deux autres niveaux de "strike" correspondent à une option "à la monnaie" : d'une part relativement au modèle "brut" ($K = 1449,02$) et d'autre part relativement à l'historique ($K = 1093,77$). Ce dernier cas est particulièrement intéressant car il ne dépend pas du modèle étudié. Ces "prix" ne sont pas comparables avec ceux obtenus dans les modèles précédents, compte tenu des caractéristiques de ce modèle.

Sensibilité des résultats aux paramètres du modèle de R. Dischel Dans le modèle de R. Dischel, tout ne repose que sur l'estimation d'un unique paramètre α . Lorsque l'on regarde comment varie le "prix" de l'option, dont le niveau d'exercice est la moyenne historique ($K = 1093,77$), on obtient le graphe suivant :

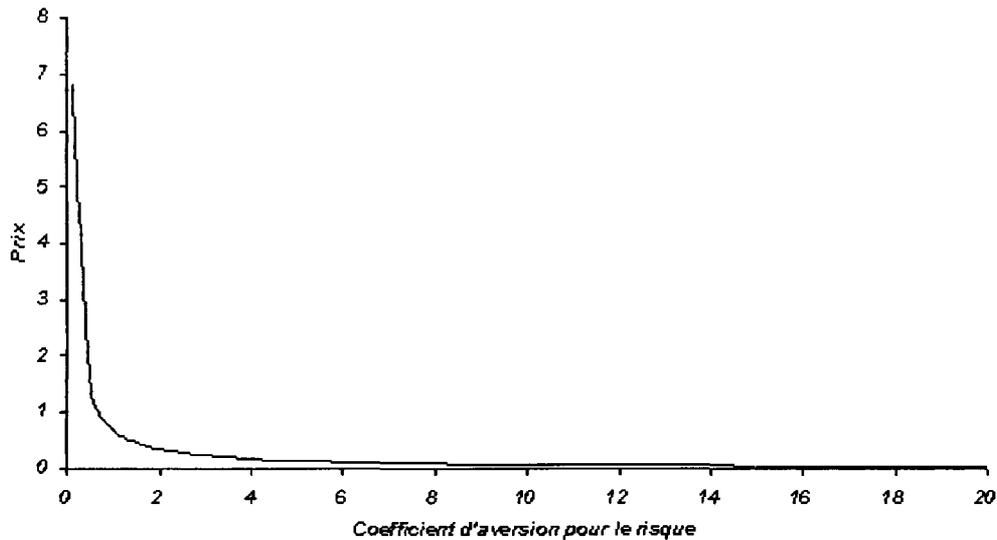
Sensibilité du prix historique par rapport à alpha (modèle de R. Dischel)



Le modèle est par conséquent extrêmement sensible à ce paramètre. Il est en ce sens très peu robuste.

Evaluation de l'option : "prix d'indifférence" avec un critère d'utilité exponentielle Nous nous intéressons ici à une option dont le niveau d'exercice est la moyenne empirique obtenue pour ce modèle ($K = 1449,02$), afin d'avoir des résultats similaires aux résultats des autres modèles. En utilisant l'approche décrite pour le modèle "brut", nous obtenons le graphe suivant, traduisant l'évolution du "prix" en fonction du coefficient d'aversion pour le risque, ce paramètre variant de 0,5 à 20 :

Modèle de R. Dischel : Prix en fonction de l'aversion pour le risque



Le "prix" est par conséquent une fonction décroissante, convexe du coefficient d'aversion pour le risque (de l'acheteur potentiel). Lorsque γ devient infini, le prix tend vers 0. L'acheteur potentiel ne souhaite plus acheter ce contrat. Le "prix" obtenu lorsque γ est faible est peu cohérent (les valeurs sont extrêmement grandes : par exemple, pour $\gamma = 10^{-4}$, nous obtenons un "prix" de 6803,49!!).

4.2.4 Quelques remarques sur les modèles étudiés

Plusieurs points peuvent être notés concernant les différents modèles considérés pour la dynamique de la température quotidienne :

1. Tout d'abord, les différents modèles peuvent être regroupés en trois catégories principales :
 - la première catégorie concerne le modèle "brut", le modèle de M. Cao et J. Wei et le modèle d'O. Roustant. Tous les trois représentent les résidus à l'aide d'un processus autorégressif d'ordre 3 et croient à des "résidus des résidus" normaux. Ceci explique que les résultats des simulations de ces trois modèles soient très proches.
 - la deuxième catégorie concerne le modèle de P. Tankov. Celui-ci représente les résidus à l'aide d'un processus autorégressif d'ordre 3 et croit à des "résidus des résidus" suivant une loi hyperbolique.
 - enfin, la troisième catégorie concerne le modèle de R. Dischel. Il s'agit d'un processus autorégressif d'ordre 1 avec des résidus normaux.

2. Tous les modèles permettent une bonne modélisation de la température moyenne à des dates précises, même si les résultats obtenus avec le modèle de R. Dischel sont moins bons⁵.

Les résultats concernant la simulation d'une valeur cumulée de $H.D.D.$ sur une période donnée sont très sensible au modèle: les trois premiers modèles (le modèle "brut", le modèle de M. Cao et J. Wei et le modèle d'O. Roustant) permettent d'obtenir de bons résultats. Le modèle de P. Tankov permet d'avoir une bonne estimation de la moyenne mais donne une valeur trop importante pour l'écart-type, relativement aux autres modèles et à l'historique. Cela se traduit par une sur-évaluation des prix simulés relativement aux trois premiers modèles. Le modèle de R. Dischel conduit à des résultats totalement différents: la valeur cumulée de $H.D.D.$ obtenue est très nettement supérieure à celle obtenue par les autres modélisations et à la valeur historique. Les prix simulés ne sont pas comparables avec les prix des autres modèles.

3. Enfin, en ce qui concerne la sensibilité aux paramètres, le modèle de R. Dischel est extrêmement sensible au choix de son unique paramètre α . Sa fiabilité est en ce sens très limitée.

Pour les autres modèles, on peut noter une sensibilité plus forte pour le choix des coefficients du modèle autorégressif (en particulier le coefficient d'ordre 2).

En conclusion, en ce qui concerne l'évaluation de l'option climatique considérée ici, à l'aide de l'espérance historique ou comme "prix d'indifférence" avec un critère d'utilité exponentielle, trois modèles permettent d'obtenir des prix comparables (le modèle "brut", le modèle de M. Cao et J. Wei et le modèle d'O. Roustant), ce qui n'est pas étonnant compte tenu de leurs structures très similaires au départ. Les deux autres modèles conduisent à une sur-évaluation relative: sur-évaluation liée à un trop fort écart-type pour la distribution du sous-jacent dans le modèle de P. Tankov et à une sur-estimation moyenne du sous-jacent pour le modèle de R. Dischel. Ce dernier modèle étant extrêmement peu robuste au choix de son paramètre, ne paraît pas être un modèle fiable. Le modèle de P. Tankov, quant à lui, suppose un investissement fort au départ dans la calibration des paramètres de la loi hyperbolique et dans sa simulation. Je ne sais pas si un tel investissement est réellement rentable.

Pour pouvoir conclure, il faudrait pouvoir comparer les prix obtenus avec des prix "de marché", en prenant en compte l'incertitude sur la méthode d'évaluation utilisée et le manque de liquidité de tels produits. Mais l'accès à des données de marché reste très problématique.... Les résultats obtenus ici ne donnent en aucun cas le "prix" du produit dérivé climatique, et ceci est d'autant plus vrai que la notion même de "prix" est délicate lorsqu'il s'agit de contrats très peu liquides. Ils fournissent une indication quant à la robustesse de ces modèles par rapport au choix des paramètres mais également permettent

⁵Un "bon" (resp. "mauvais") résultat désigne ici un résultat satisfaisant (resp. non cohérent) par rapport aux données historiques.

de comparer les différentes représentations de la dynamique de la température. Ces résultats sont à considérer relativement les uns par rapport aux autres et non pas de façon absolue.

Chapitre 5

Prise de conscience de problèmes environnementaux

Un sentiment unanime pourrait être que, de mémoire d'homme, le climat de la Terre n'a jamais été aussi perturbé qu'à l'heure actuelle. Pour ne prendre que l'exemple de la France, entre autres :

- Les tempêtes de décembre 1999, véritables ouragans, ont surpris tout le monde et Emmanuel Le Roy Ladurie¹ a déclaré, dans un grand quotidien, que depuis le 17ème siècle (début des références fiables sur ce sujet), la France n'avait jamais connu de telle catastrophe.
- En l'an 2001, tous les records de pluviométrie ont été battus depuis qu'existent les tations météorologiques en France (soit depuis 1873).

Ces phénomènes sont-ils liés à un phénomène plus global de réchauffement climatique ou sont-ils seulement dûs à une variabilité naturelle du climat? D'autre part, les historiques considérés sont-ils suffisants pour tirer des conclusions? Il est délicat de répondre à ces questions. Toutefois, il est légitime de se préoccuper d'une transformation possible de la biosphère, et notamment du climat.

5.1 Les dérives du climat

Un des grands problèmes de fond que tente de résoudre la communauté scientifique internationale concerne un phénomène de réchauffement du climat. Ceci serait tout particulièrement lié à l'augmentation de l'"effet de serre".

¹E. Le Roy Ladurie est un grand spécialiste de l'histoire du climat. Il est notamment l'auteur de "L'histoire du climat depuis l'an Mil".

5.1.1 L'effet de serre

L'effet de serre est un phénomène naturel bénéfique extrêmement important puisqu'il permet la vie sur la planète Terre. Sans lui, la Terre serait une planète froide et morte. La température y serait d'environ -18°C et l'eau n'existerait qu'à l'état de glace.

Mais, l'effet de serre permet à la Terre de conserver une partie de la chaleur du Soleil : l'énergie du Soleil arrive sous forme de rayonnement lumineux. Environ 30% d'entre eux sont réfléchis vers l'espace, 20% sont absorbés par l'atmosphère terrestre et 50% sont finalement reçus par la Terre. Celle-ci se réchauffe et renvoie, à son tour, une partie de cette énergie sous forme de rayonnement. Certains gaz présents dans notre atmosphère vont arrêter partiellement cette énergie. C'est l'effet de serre. Ces gaz, appelés gaz à effet de serre², agissent comme une "ceinture chauffante" et, en assurant une température moyenne de 15°C , permettent l'épanouissement de la vie sur notre Planète.

Or ce phénomène naturel est aujourd'hui perturbé : en effet, on observe une augmentation de la concentration des gaz à effet de serre dans l'atmosphère. Il y a alors un risque de réchauffement trop important de la Planète.

5.1.2 Le phénomène El Nino

Un phénomène largement évoqué lorsqu'il est question de réchauffement climatique est El Nino. Ce phénomène appelé également Oscillation du Sud El Nino (noté E.N.S.O.) correspond à un événement océanographique et atmosphérique anormal dans l'Océan Pacifique équatorial qui survient périodiquement et est caractérisé par une augmentation de la température de la surface de la mer sur la partie Est de l'Océan Pacifique équatorial). Un tel événement, lorsqu'il survient, est responsable de conditions climatiques anormales sur la grande majorité de la surface du Globe.

Les scientifiques de la communauté internationale ont étudié l'évolution de ce phénomène. L'analyse des coraux leur a permis de conclure : en effet, les coraux d'une certaine espèce stockent dans leur squelette un isotope de l'oxygène (l'oxygène 18) dont la proportion avec l'oxygène normal témoigne du niveau de la température et de l'humidité à un instant donné. Ainsi, avant 1890, la variabilité du phénomène El Nino était centrée autour de 12,5 années. Puis, aux environs de 1900, elle était centrée autour de 2,9 ans et aujourd'hui elle est de l'ordre de 4 ans.

A l'heure actuelle, on peut noter un certain consensus autour de ces résultats : il y a bien une accélération du rythme d'El Nino avec, depuis le début du 20ème siècle (et surtout depuis 1976, qui marque une certaine rupture), une évolution lente mais régulière du

²L'Annexe A du Protocole de Kyoto recense six gaz principaux à effet de serre :

- le dioxyde de carbone (CO_2),
- le méthane (CH_4),
- l'oxyde nitreux (N_2O),
- l'hydrofluorocarbure (HFC),
- les hydrocarbures perfluorés (PFC),
- et l'hexafluorure de soufre (SF_6).

Des grilles de conversions permettent de les traduire tous en équivalent CO_2 .

réchauffement et de l'humidité locale.

L'évolution du phénomène est consensuelle mais peut-on la relier à un phénomène plus global?

5.1.3 Un premier constat

Depuis le début de l'ère industrielle, la composition chimique de la Terre, et en particulier de son atmosphère, a subi une évolution brutale, sans précédent. Pour arriver à une telle conclusion, les scientifiques ont notamment comparé des relevés actuels avec des données répertoriées récentes et avec l'analyse de bulles d'air emprisonnées dans les glaciers.

Deux faits sont à souligner :

- Tout d'abord, l'évolution de la teneur en CO_2 : pendant environ 400000 ans, celle-ci a oscillé entre 180ppm (partie par million) et 280ppm. Mais, il y a eu une hausse brutale depuis environ un siècle et la concentration est actuellement de 360ppm !
- De nouveaux composés ont fait également leur apparition : il s'agit notamment des CFC et de l'oxyde d'azote. Ces éléments ont la particularité d'avoir un temps de recyclage très long, variant de la décennie à quelques siècles, et de ce fait, vont s'accumuler dans notre atmosphère.

Puisque l'augmentation de ces gaz, peu toxiques en soi, amplifie le phénomène d'effet de serre, elle vient perturber tout un système dynamique, permettant la vie sur Terre. Et ce phénomène se poursuit inéluctablement, comme le souligne le dernier rapport de l'I.P.C.C.³ (International Panel on Climate Change) :

5.1.4 Conclusions du dernier rapport de l'I.P.C.C.

Ce rapport rendu public en novembre 2000 fait le bilan sur différents aspects de l'évolution du climat (cf. [48], [49]). Ces conclusions sont extrêmement dramatiques :

1. *La température moyenne de surface a augmenté depuis le milieu du 19ème siècle.*

Cette hausse est estimée à environ $0,6^{\circ}C$ (à plus ou moins $0,2^{\circ}C$) depuis 1860. Cette date correspond à la première période où l'on dispose de données suffisantes pour réaliser des estimations globales.

Ce chiffre est beaucoup plus élevé que les premières conclusions de l'I.P.C.C. en 1995, où l'on parlait alors d'une hausse de "seulement" $0,15^{\circ}C$

2. *La couverture neigeuse et la surface des glaciers ont diminué.*

Parmi beaucoup de points évoqués, on peut souligner les faits suivants : depuis 1960, la surface neigeuse a diminué d'environ 10% ; la période de glaciation des lacs et

³Il s'agit d'une entité créée en 1988 par l'Organisation Mondiale de la Météorologie et par le programme des Nations Unies pour l'environnement. Elle est chargée d'évaluer les connaissances relatives aux risques de changements climatiques.

rivières de l'hémisphère Nord a diminué d'environ deux semaines depuis le début du siècle ; ou encore l'épaisseur de la glace en Arctique est plus faible d'environ 40% !

3. *Le niveau des mers s'est élevé et le contenu en chaleur des océans s'est accru.*

Au cours du 20ème siècle, le niveau des mers s'est élevé d'environ 10 – 20cm. Le rythme d'élévation est plus de dix fois plus important que pendant les derniers 3000 ans. A ce phénomène s'ajoute de fortes perturbations au niveau des précipitations : sur la plupart des régions des latitudes moyennes et hautes de l'hémisphère Nord, les précipitations ont augmenté d'environ 0,5% – 1% par décennie au cours du 20ème siècle, alors que dans la plupart des régions intertropicales, on constate une baisse d'environ –0,3% par décennie.

4. *Les émissions de gaz à effet de serre et d'aérosols continuent à altérer l'atmosphère, et à affecter le système climatique.*

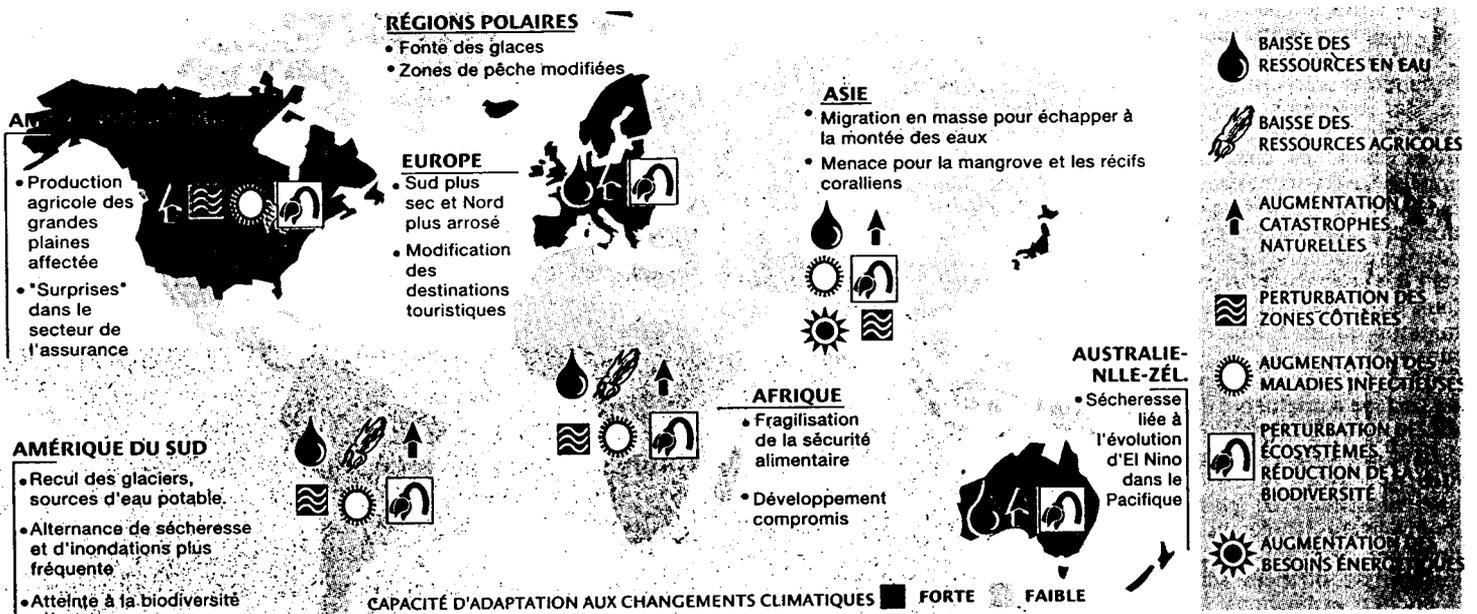
Selon les experts de l'I.P.C.C., le niveau de la concentration en CO_2 dans l'atmosphère en 2100 sera compris entre 540ppm et 970ppm. Ces mêmes experts prévoient un niveau de 500ppm, lors de leur premier rapport en 1995....

Plus de deux tiers de la hausse du CO_2 de l'atmosphère depuis 20 ans (soit 0,4% par an) sont liés à la combustion de matières fossiles. Mais, la déforestation est également incriminée.

Notons que certains aspects n'ont pas changé : par exemple, les variations de l'extension des glaces de l'Antarctique, observées depuis 1970, ou l'intensité et la fréquence des cyclones tropicaux ne sont a priori pas modifiées depuis ces dernières années.

5.1.5 Conséquences possibles d'un changement climatique

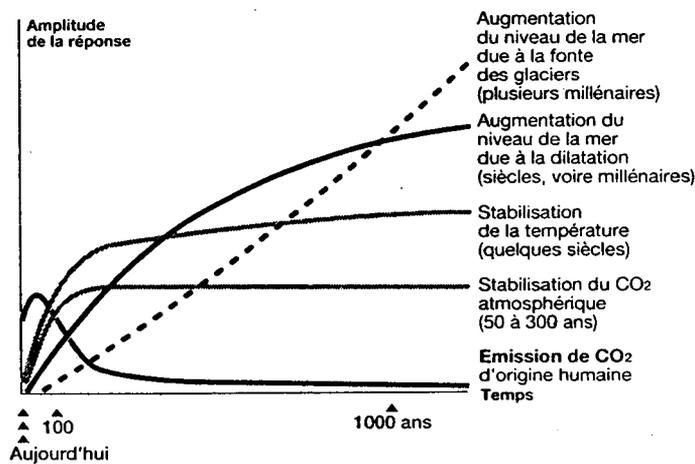
L'I.P.C.C. a rédigé un autre rapport ([50]). Ce texte évoque les conséquences probables d'un changement climatique. Il comprend un mémo à l'intention des "décideurs" ([51]). Le schéma suivant, réalisé par H. Morin, pour le journal "Le Monde" en février 2001 ([66]), synthétise les principales conclusions de ce rapport :



Les principaux effets négatifs du réchauffement planétaire.

Il est important de noter que tous les pays sont concernés mais les pays industrialisés ont une plus forte capacité d'adaptation face aux changements climatiques. La plupart des conséquences probables concernent les récoltes, la modification des ressources en eau et l'exposition plus accrue à certaines épidémies, comme le paludisme et le choléra.

D'autre part, comme le remarque H. Morin ([67]), le dérèglement du climat pourrait durer des millénaires :



Evolution des conséquences sur le climat.

Par conséquent, plus tôt les émissions seront réduites, plus courts seront les temps de réponse et moindre grande sera l'amplitude des changements.

5.2 Prise de conscience et réponses possibles

D'après ce qui précède, **SI** le changement du climat est réellement en cours, il s'agit du bouleversement majeur affectant la Planète depuis plus de 10000 ans, certains scientifiques le comparent même à celui supposé à l'origine de la disparition des dinosaures.

La communauté scientifique internationale est à peu près d'accord sur l'existence réelle de ce phénomène. Mais cela reste une théorie... Aucune certitude n'existe ni sur ce qui est en train de se produire, ni sur ce qui risque de ce produire. Est-ce une raison suffisante pour ne rien faire? Peut-on entreprendre des actions politiques à partir d'hypothèses scientifiques?

De telles décisions sont d'autant plus délicates pour les Etats qu'elles impliquent une modification profonde du fonctionnement de l'économie, le coût de la mise en oeuvre de telles politiques est estimé à environ 2% du P.I.B. (Produit Intérieur Brut) des pays de l'O.C.D.E. (Organisation de Coopération et de Développement Economiques).

En ce sens, la Convention des Nations-Unies de Rio sur le changement climatique en 1992 déclara que: "là où il existe des menaces de dommages sérieux et irréversibles, l'absence d'une pleine certitude scientifique ne peut être utilisée comme raison pour ajourner des mesures coûteuses de protection de l'environnement". Il s'agit du *Principe de Précaution*, qui sera désormais appliqué pour la prise de décision en matière de réchauffement climatique.

La prise de conscience des mouvements écologistes, de l'Opinion Publique et même des Etats est de plus en plus forte. Différents sommets internationaux, depuis 1992, ont été organisés sur le thème du réchauffement climatique. Les dérives du climat deviennent un véritable enjeu diplomatique, même si la mise en oeuvre est très difficile, comme nous le verrons par la suite. Nous rappelons, avant tout les grandes étapes de la prise de conscience mondiale de ce phénomène :

5.2.1 Premières découvertes et premières inquiétudes

La première description de l'effet de serre date de 1827. Jean-Baptiste Fourier, mathématicien et scientifique français, fut le premier à s'intéresser à ce phénomène naturel. En 1895, Svante Arrhenius, chimiste et botaniste suédois, a suggéré l'influence du CO_2 dans le phénomène du réchauffement climatique. Les premières prévisions d'un doublement de la concentration de CO_2 dans l'atmosphère et d'une élévation de la température du Globe, d'ici le début du 21ème siècle, sont faites en 1967. La première conférence mondiale sur le climat se tient à Genève en 1979. Et, exceptée la création de l'I.P.C.C. en 1988, il faut attendre 1992 pour observer une véritable mobilisation internationale.

5.2.2 Convention de Rio : Reconnaissance du problème

La prise en considération du problème de réchauffement climatique par les Etats marque une première étape. La Convention de Rio en 1992 formule l'objectif de stabiliser la concentration de gaz à effet de serre dans l'atmosphère à un niveau empêchant toute

influence sur le climat. Elle fixe également un calendrier permettant aux différents écosystèmes de s'adapter à ces réductions.

Un des problèmes soulevés à Rio [43] a été celui du *principe de précaution*. En effet, personne n'est sûr, à l'heure actuelle, des effets futurs et de la gravité des changements climatiques. Le principe de précaution est donc appliqué. Les recherches sur le climat sont également favorisées et des cadres d'actions spécifiques pourront être décidés par la suite, comme ce fut le cas pour le Protocole de Kyoto en 1997.

Une autre question soulevée par les différents Etats signataires de la Convention de Rio a été celle de la *culpabilité*. Les pays développés semblent être les responsables de la situation actuelle et les pays en voie de développement les victimes. Pour résoudre ces différences, les pays les plus développés sont ceux qui se battent le plus pour la protection de l'environnement alors que le droit au développement économique est reconnu aux pays en voie de développement.

5.2.3 Protocole de Kyoto : Création d'une "loi"

Le Protocole de Kyoto est un accord international qui existe par lui-même mais qui est en relation avec un traité existant, la Convention des Nations-Unies de 1992. Cet accord a été signé en 1997 par 180 pays. Il concerne tous les secteurs de l'économie et est considéré comme le plus important traité sur l'environnement signé à ce jour. Ces mesures concernent avant tout les pays les plus développés. Les pays en transition bénéficient d'une plus grande flexibilité, au nom du droit au développement. Le Protocole insiste également beaucoup sur la *responsabilité* des pays envers leurs émissions.

Ce Protocole fixe, dans l'Article 3, des limites cibles légales pour les pays développés, concernant l'émission de six gaz à effet de serre, dont le CO_2 . Les réductions sont au moins de 5% même si elles sont établies au cas par cas. Les niveaux à atteindre seront établis sur la base des années 2008 – 2012 ("First Commitment Period"). 55 pays sont concernés.

Ces réductions doivent être vérifiables. Un système de contrôle national, avec des experts formés internationalement, est privilégié (Articles 5 et 8). Les mesures d'incitation et de punition ne sont pas encore précisées à ce jour.

Un marché de "crédits d'émission" est envisagé. Chaque crédit donne le droit à son pays détenteur d'émettre une certaine quantité de gaz à effet de serre. Une dotation est faite pour chacun des pays en début de période en fonction des niveaux cibles à atteindre. Les possibilités de stocker ses "crédits d'émission" si on a réduit "plus que nécessaire", voire de les échanger sur un marché prévu à cet effet (Article 17) sont évoquées. Est également prévue la possibilité d'intervenir dans un autre pays au niveau environnemental si cela est moins coûteux (Article 6) car l'effet de serre ne connaît pas de frontière et a un impact indépendamment de la région émettrice.

L'idée d'un marché des crédits d'émission a au départ beaucoup partagé les pays, créant des dissensions notamment entre les Etats-Unis et l'Europe. Le Protocole évoque sa potentielle existence, en complément des autres politiques environnementales mais ne fournit

aucune précision quant à ses participants ou à son fonctionnement, laissant aux pays signataires le soin d'imaginer le marché qu'ils souhaiteraient. De cette liberté naît une apparente confusion. Nous reviendrons plus en détail sur le marché des crédits d'émission dans la dernière section de ce chapitre.

5.2.4 Conférence de La Haye: Un échec total

Faisant suite au fort engagement des différents pays signataires du Protocole de Kyoto, la conférence de La Haye, en novembre 2000, a été un échec total. Comme l'a déclaré Mohammed Barkindo, représentant du Nigéria à la conférence: "Les pays de l'Annexe 1 n'ont pas respecté leurs obligations en réduisant leurs émissions, ils les ont au contraire accrues....". Il parle alors des pays les plus développés, puisque l'Annexe 1 de la Convention signée à Rio regroupe tous les pays industrialisés. Ceux-ci étaient sensés "montrer l'exemple" aux pays moins développés.

La conférence de La Haye a très peu mobilisé les chefs des différents Etats, soulignant les difficultés de mise en applications des résolutions adoptées à Kyoto. Le dilemme réside dans le fait de réduire les émissions qui sont intrinsèquement liées à l'activité et au développement économiques.

L'opposition entre l'Europe et les Etats-Unis, déjà très visible à La Haye, est renforcée après l'élection de G.W. Bush. Celui-ci déclarait en effet en mars 2001: "Je m'oppose au protocole de Kyoto parce que 80% de la population du monde en sont exemptés, dont la Chine et l'Inde, et que cela causerait un dommage sérieux à l'économie américaine". Ce propos est d'autant plus dur que les Etats-Unis émettent environ 25% du CO_2 mondial et que ce chiffre s'accroît de 1,6% par an....

Mais, malgré l'opposition du plus important acteur, la communauté internationale a décidé de maintenir son effort dans la direction suggérée par le Protocole de Kyoto. Cela traduit sa très forte détermination dans la lutte contre les émissions de gaz à effet de serre.

5.2.5 Conférence de Bonn: Création du "décret d'application"

La conférence de Bonn, en juillet 2001, a donc réuni tous les pays signataires du Protocole (sauf 1: les Etats-Unis). Il s'agit de la concrétisation de l'ambition d'une gestion collective des problèmes planétaires et de la mise en oeuvre pratique de la lutte contre le changement climatique en dessinant un instrument juridique adapté.

La validité de Kyoto est affirmée malgré l'opposition des Etats-Unis. Plusieurs mises en application sont décidées:

- Les règles de comptage des émissions sont ajustées et tiennent compte désormais du CO_2 absorbé par les forêts et l'agriculture (à la demande du Canada et du Japon).
- Les transferts de technologie pour aider les pays en voie de développement sont précisés, notamment en termes de déplacement de crédits d'émission.

- Un fonds spécial d'adaptation est créé pour aider les pays en voie de développement à faire face aux changements climatiques, les pays développés se sont engagés à verser la somme de 450 millions d'euros annuels.

- Le respect des engagements est réglementé: ainsi, un pays ne respectant pas sa limite cible devra réduire d'autant plus ses émissions à la période suivante et ne pourra pas participer au marché des crédits d'émission. D'autre part, un organe de contrôle est créé pour l'évaluation du respect des engagements par les pays.

A l'issue de cette conférence, l'environnement et le commerce sont sur un pied d'égalité. Enfreindre les règles d'émission de gaz à effet de serre est condamnable au même titre qu'une infraction au libre échange des marchandises. Un instrument juridique international, de type Organisation Mondiale du Commerce, est en cours d'élaboration.

5.3 Marché des crédits d'émission : débats actuels

L'idée fondamentale d'un marché de crédits d'émission, évoquée pour la première fois lors de la conférence de Kyoto en 1997, est de créer un nouveau système, venant en complément de mesures plus ou moins classiques prises au niveau national, dans le but de réduire les émissions de gaz à effet de serre, et non pas de spéculer sur l'environnement.

Les marchés nationaux liés à l'émission de gaz, existant à l'heure actuelle, sont observés avec minutie: le marché du SO_2 aux Etats-Unis, décrit en annexes du chapitre 1, est un succès écologique, en permettant la réduction de 10 millions de tonnes de gaz émis, tout comme le marché de Nouvelle-Zélande. Toutefois plusieurs points clés du fonctionnement du futur marché mondial sont aujourd'hui au coeur de débats internationaux. Le point de vue adopté ici est celui des experts de l'O.C.D.E..

Tout d'abord les participants : Alors que ce sont les Etats, seuls, qui ont signé le Protocole de Kyoto, tout semble indiquer que la participation des entreprises à ce marché des crédits d'émission ne pourra être que bénéfique. Elles augmenteront la liquidité et l'efficience du marché, diminueront les coûts de transaction, notamment en cas d'échange entre firmes déjà en relation commerciale. Certaines règles de conduite seront alors à préciser, notamment concernant les relations entre les entreprises et le gouvernement de leur pays d'origine et celui des autres pays.

Enfin, selon les experts de l'O.C.D.E., toute entité, ayant une obligation ou un accord pour limiter ses émissions de gaz à effet de serre, devrait être autorisée à participer à ce marché.

Ensuite le fonctionnement : Très vite, l'idée d'un double système apparaît: un système national d'une part et un système international d'autre part. Du point de vue national, tout sera déterminé par le pays lui-même: le marché sera spécifique à chaque pays, les entreprises étant soumises au gouvernement. C'est à ce dernier qu'incombera la tâche de créer une entité domestique de contrôle et de vérification.

Cette entité permettra alors la relation entre le marché national et le système international, instance de contrôle, chargée d'enregistrer et de vérifier les comportements de chacun des pays signataires.

Cette double structure est sensée augmenter l'adhérence au marché en favorisant respect et intégrité.

Les règles de contrôle et de punition, tant à l'échelle domestique qu'au niveau mondial, sont à établir, si possible dans des délais assez brefs afin d'éviter l'anarchie et l'irrespect envers cette tentative de création de marché de crédits d'émission.

Puis le produit échangé : Une autre question se pose au sujet de la nature du produit pouvant être échangé sur ce marché. L'unité échangeable sera appelée "Greenhouse Gas unit" (soit unité de gaz à effet de serre) et représentera un certain montant d'émission de gaz à effet de serre. L'unité devra être standardisée et identifiable suivant la provenance (idée de traçabilité). Trois notions sont alors introduites, en tonnes de CO_2 équivalentes, pouvant ainsi être interchangeables: "Parts of Assigned Amounts" (PAA), "Certified Emission Reduction" (CER) et "Emission Reduction Unit" (ERU).

Et les limites globales : Les limites de la taille du marché seront fixées par le Protocole selon les "Quantified Emission Limitation and Reduction Objectives" (QELRO i.e. objectifs de limitation et de réduction quantifiées des émissions) donnant des cibles pays par pays. Ces limites nationales pourront être ramenées au niveau de l'entreprise à travers des allocations. Ceci implique une responsabilisation de chaque intervenant et, par conséquent, une plus grande adhérence au marché. Tout repose sur l'acceptation de partage d'une limite globale.

Le marché doit également prévoir une flexibilité dans le changement des limites. Les unités échangeables devront être émises selon une base mouvante.

Les mécanismes du marché : Ce marché serait semblable à un marché de matières premières. A travers le "trading", le prix de marché émergerait et reflèterait le coût de la réduction de la pollution. Ce marché, s'il est créé, ne fonctionnera réellement qu'après la période 2008 – 2012 ("First Commitment Period"): toutes les transactions ayant eu lieu auparavant seront des transactions "forward".

Le succès de ce marché sera assuré si les bénéfices pour l'environnement sont notables, les coûts pour les Etats sont minimum, si ce système suggère de la confiance par ses règles simples et claires et par son équité. Des limites potentielles à son développement pourront venir d'un manque d'expérience ou de confiance, voire d'une opposition des entreprises à un contrôle national.

Enfin, la question de responsabilité : De plus, à l'heure actuelle, de nombreux juristes internationaux réfléchissent sur la question suivante: Qui est responsable de quoi en cas de dépassement des limites?

Certains critères sont privilégiés dans la détermination des règles de conduite: l'efficacité au niveau de l'environnement, les coûts pour les participants, la confiance, la faisabilité ou encore la participation des entreprises. Le choix des participants doit réduire au minimum le risque de vente "à découvert" (i.e. au delà des limites).

Plusieurs cas de figure sont envisagés: des responsabilités séparées de l'acheteur et du vendeur aux responsabilités partagées, voire à des systèmes beaucoup plus complexes. Par exemple, si un vendeur dépasse les limites qui lui sont imposées:

- *sous le système "responsabilité du vendeur"*, il est entièrement responsable,
- *sous le système "responsabilité de l'acheteur"*, c'est l'acheteur qui est entièrement responsable. cela encourage à acheter des crédits à des vendeurs respectant leurs limites (forme d'auto-contrôle),
- *sous le système "responsabilités partagées"*, les deux acteurs sont responsables.

De nombreuses questions restent encore en suspens à l'heure actuelle concernant la création du marché des crédits d'émission. Il reste une dizaine d'années aux pays signataires pour concevoir un système permettant de compléter efficacement les politiques environnementales existantes et ce de façon consensuelle.

Chapitre 6

Environnement : Prise de décision optimale dans un contexte stratégique

Cette partie fait l'objet d'un article co-écrit avec Marc Chesney, "Optimal timing for an environmental policy in a strategic framework", soumis au "Journal of Environmental Economics and Management". Pour cette raison, son contenu n'a pas été modifié et il existe certainement des redites, dans l'introduction notamment. Il a seulement été traduit en français pour assurer la cohérence de ce travail de thèse.

6.1 Introduction

Selon la communauté scientifique internationale, des modifications notables du climat sont apparues depuis le siècle dernier : ainsi, comme nous l'avons décrit au chapitre précédent, on peut observer, entre autres choses, une augmentation de 0,035% de la teneur en dioxyde de carbone (CO_2) dans l'atmosphère (la hausse n'avait été auparavant que de 0,028% en 160000 ans !) et une élévation de la température globale comprise entre $0,4^{\circ}C$ et $0,8^{\circ}C$. Ce dernier phénomène de réchauffement, apparu vers 1850, est souvent considéré comme étant à l'origine de la fréquence de plus en plus forte du nombre de catastrophes naturelles et de l'élévation du niveau des mers, estimée à 10 – 20 *cm*.

Alors que toute la communauté scientifique s'interroge sur les effets de la modification des conditions fondamentales permettant la vie sur Terre, il existe désormais une véritable préoccupation des Etats, et ce au niveau mondial. De plus, cette sensibilisation ne concerne pas uniquement la question du réchauffement global, mais de façon plus générale l'environnement. Les partis écologistes ont de plus en plus d'importance dans les pays industrialisés et les problèmes de pluies acides, de pollution des nappes d'eau phréatiques, de pics d'ozone dans les grandes villes..., ne laissent plus personne indifférent.

Une des difficultés majeures, lorsque l'environnement est concerné, est le manque de recul et la forte incertitude relative aux conséquences de tels changements sur l'écosystème

global de la planète. Le "Principe de Précaution" est généralement utilisé. Comme le soulignent C. Gollier, B. Jullien et N. Treich ([43]), une source majeure d'incertitude est l'imperfection de la connaissance scientifique. Toutefois, le progrès scientifique ne doit en aucun cas servir de justification pour retarder des mesures protectrices de l'environnement. Un des challenges de la théorie est alors de proposer de nouvelles règles afin de mieux gérer ces risques, dont la connaissance imparfaite à l'heure actuelle devrait s'améliorer dans l'avenir. Pour cette raison, le principe de précaution a été proposé comme ligne de conduite à suivre et, en dépit de sa faible formulation pratique, il est largement utilisé comme fondement de politiques de régulation. De ce fait, se fondant sur les données, même incertaines, fournies par les scientifiques, de nombreuses recherches sont menées sur les décisions "optimales" à adopter, concernant l'environnement.

Ce travail de recherche s'inscrit parfaitement dans cette logique. En effet, après avoir brièvement exposé les notations et hypothèses utilisées, le moment optimal pour l'adoption d'une politique environnementale, pour différents groupes de pays, pris séparément ou non, est étudié. Cet article utilise une nouvelle approche pour ces questions, à l'aide de la théorie des options réelles et de certains aspects de la théorie des jeux pour modéliser les aspects stratégiques.

En effet, les options réelles permettent d'adopter une approche dynamique: la valeur temps est prise en compte, une décision peut être prise au moment optimal et non pas aujourd'hui ou jamais, comme c'est le cas dans l'approche traditionnelle des modèles statiques, de type V.A.N. (Valeur Actuelle Nette). Beaucoup d'auteurs ont déjà utilisé ces techniques pour différents domaines où il est question d'une prise de décision. Les principes fondamentaux de cette théorie ainsi que ses différents champs possibles d'applications sont présentés notamment dans les ouvrages de A.K. Dixit et R.S. Pindyck [27] ou de L. Trigeorgis [96]. Un autre article de référence est certainement celui de R. Mc Donald et D. Siegel [64], où les auteurs étudient le moment optimal pour investir dans un projet donné dont les bénéfices et coûts sont stochastiques.

Nous analyserons les similitudes éventuelles entre les résultats obtenus ici et ceux de la littérature de l'organisation industrielle, portant notamment sur les questions de l'adoption d'une nouvelle technologie par une ou plusieurs firmes. Pour ce faire, des références à l'ouvrage de J. Tirole ([95]) seront faites.

D'autre part, plusieurs auteurs ont réalisé des études portant sur l'adoption d'une politique environnementale par une ou plusieurs entreprises, avec parfois l'intervention d'une autorité supérieure (comme dans l'article de O. Cadot et B. Sinclair-Degagne [13]). Ces articles utilisent des techniques de théorie des jeux différentiels afin de prendre en compte l'aléa relatif à l'environnement et aux comportements des différents agents. Le cadre de l'étude est souvent identique à celui de cette recherche: l'horizon est infini et l'incertitude est prise en considération. Bien souvent, ces études soulignent l'intérêt à attendre avant d'intervenir, intérêt qui est retrouvé ici. Toutefois, la vision des choses est un peu différente dans ces travaux: il s'agit souvent d'un jeu séquentiel où les acteurs agissent à tour de rôle, en temps discret. Ici, grâce à l'utilisation de techniques standards en finance, il est possible d'avoir des actions simultanées des différents groupes de pays et le temps est vu de façon continue. Un état particulier du monde, correspondant à un point donné

de l'espace dans le jeu séquentiel, est ici une frontière, i.e. une droite donnée de l'espace. La question du choix du taux d'actualisation sera également évoquée : celle-ci est d'autant plus importante que l'horizon considéré est important. Or, dans cette étude, l'horizon est a priori infini!! Différents auteurs ont travaillé sur ce sujet particulier (par exemple, M. Weitzman [100] ou W.R. Cline [21]). Certains ont, notamment, montré l'existence d'une relation particulière entre taux d'actualisation et taux de croissance future (C. Gollier [42], C. Gollier-J.C. Rochet [44] et M.S. Kimball [57]). Ainsi, si on néglige tout aléa concernant l'avenir, plus le taux de croissance futur du pays est élevé, plus le taux d'actualisation sera important. Mais les auteurs soulignent également l'importance du risque associé aux prévisions de la croissance future : de ce fait, l'aléa des prévisions conduit à une diminution du taux d'actualisation à prendre en considération. Nous verrons dans quelle mesure ces résultats peuvent influencer les différents groupes de pays dans le choix politiques concernant l'environnement.

6.2 Présentation générale du modèle, notations et hypothèses

6.2.1 Les acteurs : deux groupes de pays et le "monde"

L'univers de cette étude est composé de deux groupes de pays : on peut considérer soit une distinction classique entre pays industrialisés et pays en voie de développement, soit une distinction plus contemporaine entre pays respectant le Protocole de Kyoto et pays ne le respectant pas. Cela dit, dans le cadre de cette étude, ces groupes de pays se distinguent par des situations de départ différentes (notamment en ce qui concerne les coûts) et par des taux d'actualisation différents. Chacun des deux groupes est indexé par $i = 1$ ou $i = 2$. D'autre part, nous nous plaçons par défaut sous un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, où \mathbb{P} désigne la probabilité prior (toutefois, \mathbb{P} peut désigner toute mesure de probabilité représentant les anticipations des différents acteurs du modèle).

Nous nous intéresserons également à la situation où il n'y a qu'un unique acteur global, désigné comme le "monde". Il s'agit d'un cas hypothétique, où toute décision concernant l'environnement est centralisée au niveau international, auprès d'une entité mondiale de gestion et de contrôle. Ce cadre d'analyse est considéré uniquement à un titre comparatif, afin de déterminer le degré éventuel de sous-optimalité de la situation actuelle, où de nombreux acteurs sont présents.

6.2.2 Caractérisation du premier type d'acteurs : les deux groupes de pays

Chaque groupe de pays i est caractérisé par un processus $(Y_t^i)_{t \geq 0}$ défini comme le rapport de deux processus $(S_t^i)_{t \geq 0}$ et $(K_t^i)_{t \geq 0}$. Un tel processus est sans unité de référence.

$$Y_t^i = \frac{S_t^i}{K_t^i}$$

- $(S_t^i)_{t \geq 0}$ représente les bénéfices de la "prise en compte" de l'environnement relativement à ceux de sa "non prise en compte". Il s'agit de l'espérance de la somme actualisée des différences entre bénéfices résultant de la mise en place d'une politique active de lutte contre la pollution et éventuellement ceux provenant d'une politique passive de laisser-faire. Ces derniers peuvent correspondre aux effets positifs générés par la mise en place d'une politique environnementale active dans l'autre groupe de pays ("effets induits"¹).

- De la même façon, $(K_t^i)_{t \geq 0}$ correspond à l'espérance de la somme actualisée des différences entre coûts si une politique active est mise en place et coûts du statu-quo.

On suppose que le processus $(Y_t^i)_{t \geq 0}$ peut s'écrire comme, sous \mathbb{P} :

$$\frac{dY_t^i}{Y_t^i} = \mu_i dt + \sigma_i dW_t^i + \lambda_j d\pi_t^j \quad \text{où } j \neq i$$

avec :

- μ_i le paramètre de dérive, que l'on supposera négatif pour prendre en compte l'éventuelle irréversibilité des conséquences de la pollution. Cette irréversibilité est généralement pris en compte dans la littérature traitant des problèmes environnementaux (par exemple, C. Gollier, B. Jullien et N. Treich [43]).

- σ_i le paramètre de volatilité, qui permettra de tenir compte de l'aléa quant aux conséquences de la pollution.

- $T_j = \inf (t \geq 0; Y_t^j \geq L_j)$ où L_j est un niveau spécifique au groupe j , qui sera précisé ultérieurement.

- $(W_t^i)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien sous \mathbb{P} . Les deux mouvements Browniens W^i et W^j ($j \neq i$) sont supposés indépendants.

- $(\pi_t^j)_{t \geq 0}$ le processus de saut défini comme $\pi_t^j = \mathbf{1}_{(T_j \leq t)}$.

¹Cette logique est celle adoptée lors de la Convention des Nations Unies en 1992 : les pays ne sont pas rendus coupables de leur passé de "pollueur" mais les limites imposées aux pays développés sont plus strictes que celles des pays en voie de développement.

λ_j est l'amplitude du saut dans le processus $(Y_t^i)_{t \geq 0}$ suite à l'intervention du groupe j . λ_j est positif: en effet, si le groupe j intervient, les bénéfices relatifs du groupe i vont augmenter. Auparavant, le groupe i peut espérer une amélioration de sa situation, sans avoir à intervenir, comme simple conséquence de la probable décision du groupe j . Au delà de cette intervention, de nouvelles améliorations ne proviendront plus des effets induits et ne pourront résulter que d'une intervention du groupe i lui-même. Ceteris paribus, les bénéfices du groupe i relatifs à une intervention personnelle sont donc plus forts après la décision du groupe j , qu'avant. Les coûts de mise en place d'une politique active de lutte contre la pollution n'augmentant pas (par hypothèse), la trajectoire du processus $(Y_t^i)_{t \geq 0}$ se déplace vers le haut et λ_j est positif.

6.2.3 Caractérisation du deuxième type d'acteurs: le "monde"

Le "monde" sera, lui aussi, caractérisé par un processus $(Y_t^m)_{t \geq 0}$. Celui-ci aura une forme comparable à ceux des deux groupes de pays. Il sera défini comme le rapport de deux processus $(S_t^m)_{t \geq 0}$ et $(K_t^m)_{t \geq 0}$. Un tel processus est sans unité de référence.

$$Y_t^m = \frac{S_t^m}{K_t^m}$$

- $(S_t^m)_{t \geq 0}$ représente l'espérance de la somme actualisée de la différence entre les bénéfices provenant de la mise en place d'une politique environnementale de lutte contre la pollution au niveau mondial et les bénéfices d'une politique de statu-quo. En l'absence d'une autre entité, les bénéfices résultant d'une politique passive sont en moyenne nuls.
- De même, $(K_t^m)_{t \geq 0}$ correspond à l'espérance de la somme actualisée de la différence entre les coûts provenant de la mise en place d'une politique environnementale de lutte contre la pollution au niveau mondial et les coûts d'une politique de statu-quo.

On suppose que le processus $(Y_t^m)_{t \geq 0}$ peut s'écrire sous \mathbb{P} comme :

$$\frac{dY_t^m}{Y_t^m} = \mu_m dt + \sigma_m dW_t^m$$

avec :

- μ_m le paramètre de dérive, que l'on supposera négatif pour prendre en compte l'éventuelle irréversibilité des conséquences de la pollution.
- σ_m le paramètre de volatilité, qui permettra de tenir compte de l'aléa quant aux conséquences de la pollution.
- $(W_t^m)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien sous \mathbb{P} .

Notons qu'il n'y a pas de saut dans le processus $(Y_t^m)_{t \geq 0}$, puisqu'il n'y a qu'un seul groupe, constitué de tous les pays.

6.3 Moment optimal pour l'adoption d'une politique environnementale

Deux cas distincts vont être considérés successivement :

- *Le cas d'un acteur unique* : les deux groupes de pays ne sont plus distingués. L'analyse est faite à un unique niveau global. La stratégie de cet unique acteur, le "monde", peut être assimilée à celle d'un monopoleur. Il n'y a qu'un seul processus $(Y_t^m)_{t \geq 0}$.
- *Le cas de deux groupes stratégiques* : les deux groupes de pays agissent l'un en fonction de l'autre. Dans ce papier, nous ne nous intéresserons qu'à la situation où le groupe 1 agit stratégiquement et où le groupe 2 a un comportement indépendant.

6.3.1 Cas d'un acteur unique, le "monde"

Notations et hypothèses

Le processus $(Y_t^m)_{t \geq 0}$ décrivant le "monde" est donné par les équations définies précédemment dans la section 6.2.3 :

$$\frac{dY_t^m}{Y_t^m} = \mu_m dt + \sigma_m dW_t^m$$

ou encore :

$$Y_t^m = \frac{S_t^m}{K_t^m}$$

Problématique

On cherche alors à déterminer le moment optimal τ , où le "monde" a intérêt à adopter une politique environnementale. Pour ce faire, nous évaluons l'option américaine perpétuelle détenue par le "monde". En effet, il possède le droit d'adopter une politique environnementale à tout instant entre maintenant et l'infini, ce qui est précisément la définition d'une option américaine perpétuelle. Le processus sous-jacent de cette option est le processus caractérisant le "monde", i.e. $(Y_t^m)_{t \geq 0}$, et le niveau d'exercice de l'option est 1 : en effet, si Y_t^m est inférieur à 1, le "monde" a intérêt à attendre avant de prendre une décision puisque ses bénéfices relatifs sont inférieurs aux coûts (Nous rappelons en annexes quelques points clés sur les options américaines perpétuelles).

Toutefois, ce n'est pas une option classique puisque l'actif sous-jacent n'est pas financier. Pour cette raison, il s'agit d'une option réelle. Nous utilisons donc des techniques standards de la théorie des options réelles, notamment développées par R. Mc Donald et D. Siegel ([64]) pour évaluer des options perpétuelles.

L'option² s'écrit :

$$C = \sup_{\tau \geq 0} E_{\mathbb{P}} \left(\exp(-\rho_m \tau) (Y_{\tau}^m - 1)^+ \right)$$

où ρ_m est le taux d'actualisation.

Hypothèse sur la dérive et le taux d'actualisation : *Pour des raisons d'intégrabilité, l'hypothèse $\mu_m < \rho_m$ est requise dans cette étude. Il s'agit d'une hypothèse classique dans la littérature sur les options réelles (par exemple, B. Lambrecht et W. Perraudin [59]).*

Ceci peut également s'écrire comme :

$$C = \sup_{L_m \geq 0} E_{\mathbb{P}} \left(\exp(-\rho_m T_m) (Y_{T_m}^m - 1) \right)$$

où :

$$T_m = \inf \left(t \geq 0; Y_0^m \exp \left(\left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2} \right) t + \sigma_m W_t^m \right) \geq L_m \right)$$

Par conséquent :

$$C = \sup_{L_m \geq 0} (L_m - 1) E_{\mathbb{P}} \left(\exp(-\rho_m T_m) \right)$$

car le processus $(Y_t^m)_{t \geq 0}$ est continu, en particulier en T_m .

Déterminer le moment optimal τ est équivalent à la détermination du niveau optimal L_m . Le problème en "temps" peut être transformé en un problème en "espace" (cf. par exemple D. Lambertson et P. Lapeyre [58]). Nous résolvons le second comme sa formulation est plus simple.

Après les calculs (cf. annexes) liés à la transformée de Laplace de T_m , que l'on peut lire dans de nombreuses références, comme, par exemple dans D. Williams [101], on trouve :

$$E_{\mathbb{P}} \left(\exp(-\rho_m T_m) \right) = \left(\frac{Y_0^m}{L_m} \right)^{\frac{-\alpha_m + \sqrt{2\rho_m + \alpha_m^2}}{\sigma_m}}$$

Le niveau L_m est par conséquent égal à :

$$L_m = \frac{\frac{-\alpha_m + \sqrt{2\rho_m + \alpha_m^2}}{\sigma_m}}{\frac{-\alpha_m + \sqrt{2\rho_m + \alpha_m^2}}{\sigma_m} - 1} \quad \text{où } \alpha_m \triangleq \frac{1}{\sigma_m} \left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2} \right)$$

ou encore :

$$L_m = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_m}{\sqrt{2\rho_m + \frac{1}{\sigma_m^2} \left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2} \right)^2} - \frac{1}{\sigma_m} \left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2} \right)}}$$

²La notion de "prix" est relativement délicate ici. Il s'agit plus de savoir quand une décision va être prise que d'évaluer une option. Mais, par commodité de langage, nous utiliserons parfois ce terme de "prix".

Conclusions

Proposition 6.1 (Comparaison avec la V.A.N.) *Le niveau obtenu dans le cas "monde" est supérieur à celui que l'on obtiendrait à l'aide de la méthode traditionnelle de la V.A.N..*

$$L_m > 1$$

Si $Y_0^m \geq L_m$, le "monde" doit prendre une décision immédiatement, sinon il a intérêt à attendre avant d'entreprendre une politique environnementale.

De plus,

$$\begin{aligned} \lim_{\mu_m \rightarrow -\infty} L_m &= 1 \\ \lim_{\sigma_m \rightarrow 0} L_m &= 1 \end{aligned}$$

Le niveau L_m tend donc vers le niveau V.A.N. lorsque l'irréversibilité devient infinie. L'écart existant entre ces deux niveaux est une fonction décroissante de l'irréversibilité :

$$\frac{\partial L_m}{\partial \mu_m} > 0$$

Le niveau L_m tend donc vers le niveau V.A.N. lorsque l'aléa devient nul. L'écart existant entre ces deux niveaux est une fonction croissante de l'aléa :

$$\frac{\partial L_m}{\partial \sigma_m} > 0$$

La preuve de ces résultats est en annexes.

Remarque 1 (Irréversibilité) *Ces résultats asymptotiques sont parfaitement cohérents avec les remarques de G. Chichilnisky et G. Heal ([20]), qui suggèrent que bon nombre de modèles de réchauffement global sous-estiment l'impact de l'irréversibilité et retardent le moment de la prise de décision. Ici, cet effet est pris en compte. Aussi, plus l'irréversibilité est importante, i.e. plus le paramètre μ_m est négatif, plus vite une politique environnementale sera adoptée.*

Remarque 2 (Lien avec la théorie de l'organisation industrielle) *Le cas particulier où il y a une seule entité peut être comparé à une situation de monopole, en organisation industrielle. Dans le chapitre 10 de [95], J. Tirole étudie très précisément la prise de décision d'une entreprise, concernant l'adoption de nouvelles technologies. En particulier, si une seule firme peut adopter une technologie donnée, alors, elle prendra sa décision à une date t_m , telle qu'à cet instant son profit soit maximal :*

$$(V - C(t_m)) \exp(-rt_m) = \max_{t \geq 0} \{(V - C(t)) \exp(-rt)\}$$

où V est le flux de bénéfices et C le flux de coûts, dépendant du temps.

Ce temps optimal t_m est supérieur à t_c , "temps d'équilibre", i.e. :

$$V = C(t_c)$$

Ainsi, si l'on compare ces deux temps, avec les notions introduites dans ce travail, t_c correspond au cas de la V.A.N. positive et t_m correspond au cas des options réelles. Le résultat obtenu dans cette partie est donc identique, même si, dans ce papier, tous les flux sont stochastiques, impliquant alors un raisonnement en espérance :

$$t_m > t_c \Leftrightarrow L_m > 1$$

6.3.2 Cas d'un groupe de pays stratégique

Notations et hypothèses

On considère que le premier groupe de pays (représentant les pays en voie de développement) agit stratégiquement alors que le deuxième groupe (représentant les pays développés) agit indépendamment du premier (i.e. $\lambda_1 = 0$). Cette hypothèse n'est pas trop forte en ce sens où une telle situation semble être habituelle lors des conférences internationales sur le réchauffement climatique (comme celle de Rio en 1992) : les pays industrialisés s'engagent en premier, de façon indépendante du comportement des pays en voie de développement.

Plusieurs auteurs ont différencié le comportement des pays en matière d'environnement suivant différents critères. Par exemple, D. Spulber ([90]) utilise un critère de taille : un grand pays aura tendance à développer ses propres standards quant à la protection de l'environnement, alors qu'un pays plus petit préférera des standards exogènes. Dans ce papier, nous distinguons les pays en fonction de leur niveau de développement économique. Ainsi, comme décrit précédemment, les processus des deux groupes de pays s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{dY_t^1}{Y_{t-}^1} &= \mu dt + \sigma dW_t + \lambda d\pi_t^2 \\ \frac{dY_t^2}{Y_t^2} &= \mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2 \end{aligned}$$

On rappelle que $(W_t)_{t \geq 0}$ et $(W_t^2)_{t \geq 0}$ sont deux mouvements Browniens indépendants et que $(\pi_t^2)_{t \geq 0}$ est le processus de saut défini par $\pi_t^2 = \mathbf{1}_{(T_2 \leq t)}$ où $T_2 = \inf \{t \geq 0; Y_t^2 \geq L_2\}$. Notons que, dans ce cas, les processus $(\pi_t^2)_{t \geq 0}$ et $(W_t)_{t \geq 0}$ sont indépendants.

On cherche alors à déterminer le moment optimal τ , où le groupe 1, stratégique, a intérêt à adopter une politique environnementale. Pour ce faire, comme dans la section précédente, nous évaluons l'option américaine perpétuelle détenue par ce groupe. En effet, il possède le droit d'adopter une politique environnementale à tout instant entre maintenant et l'infini. Le processus sous-jacent de cette option est le processus caractérisant ce groupe, i.e. $(Y_t^1)_{t \geq 0}$, et le niveau d'exercice de l'option est 1 : en effet, si Y_t^1 est inférieur à 1, le groupe 1 a intérêt à attendre avant de prendre une décision puisque ses bénéfices relatifs

sont inférieurs aux coûts. Toutefois, ce n'est pas une option classique puisque l'actif sous-jacent n'est pas financier. Pour cette raison, il s'agit d'une option réelle. Déterminer le moment optimal τ est équivalent à la détermination du niveau optimal L_1 . Le problème en "temps" peut être transformé en un problème en "espace". Nous résolvons le second comme sa formulation est plus simple. Toutefois, le processus $(Y_t^1)_{t \geq 0}$ est discontinu en T_2 . Pour éviter de travailler avec un processus discontinu, on considère un processus $(Y_t^1)_{t \geq 0}$ continu et une frontière L_1 qui est, en un certain sens, discontinue en T_2 . Il nous semble en effet plus facile de travailler avec une frontière discontinue, ce qui revient à étudier deux cas classiques (avant et après le saut) et un cas plus complexe (au moment du saut), puisque, dans ce cas, on ne connaît pas précisément le niveau de la frontière. Cela étant dit, les niveaux de la frontière, avant et après le saut, sont connus.

$$\begin{aligned} T_1 &= \inf \left(t \geq 0; Y_0^1 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right) \geq L \right) \\ T_2 &= \inf \left(t \geq 0; Y_0^2 \exp \left(\left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) t + \sigma_2 W_t^2 \right) \geq L_2 \right) \end{aligned}$$

Remarque : On note L_2 le niveau L_2^{ns} (*ns* signifiant non-stratégique), qui est déterminé comme dans la section précédente. De plus, les paramètres de la diffusion du groupe de pays 1 sont dorénavant notés sans les indices 1 par souci de simplification d'écriture.

Il y a alors trois cas possibles pour le franchissement de la frontière par le groupe de pays 1 :

$$\begin{aligned} \text{Si } T_1 < T_2 & \quad \text{alors } L = L_1 \\ \text{Si } T_1 > T_2 & \quad \text{alors } L = \frac{L_1}{1 + \lambda} \end{aligned}$$

Lorsque les deux temps de franchissement coïncident, i.e. $T_1 = T_2$, tout est beaucoup plus compliqué. On ne peut donner explicitement le niveau de L . Celui-ci est simplement compris entre les deux niveaux avant et après le saut :

$$L \in \left\{ \frac{L_1}{1 + \lambda} (1 + \alpha) ; \alpha \in [0, \lambda] \right\}$$

Remarque 3 Une autre façon de considérer le problème peut être d'étudier directement les lois conjointes des temps d'atteinte T_1 et T_2 en écrivant que :

$$\begin{cases} Y_t^1 = Y_0^1 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right) & \text{pour } t < T_2 \\ Y_{T_2}^1 = Y_{T_2}^1 (1 + \lambda) \\ Y_t^1 = Y_0^1 (1 + \lambda) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right) & \text{pour } t > T_2 \end{cases}$$

Notons que la dynamique de Y^1 avant et après le saut est la même. Seules les conditions initiales sont modifiées.

De ce fait, on a :

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(T_1 > t; T_1 \geq T_2) + \mathbb{P}(T_1 > t; T_1 < T_2)$$

On calcule séparément chacun de ces deux termes en utilisant la loi conjointe d'un mouvement Brownien avec drift à un instant t donné et de son maximum sur $[0; t]$.

Cette remarque de modélisation est due à Monique Jeanblanc, que je tiens à remercier très sincèrement.

Problématique du groupe non-stratégique

La problématique du groupe de pays 2, qui agit indépendamment des décisions du groupe de pays 1, est identique à celle étudiée dans la partie précédente. Le niveau d'intervention est donc L_2^{ns} , donné par la formule :

$$L_2 = L_2^{ns} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\rho_2 + \frac{1}{\sigma_2^2} \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)^2} - \frac{1}{\sigma_2} \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)}}$$

où ρ_2 est le taux d'actualisation.

Hypothèse sur la dérive et le taux d'actualisation : Comme précédemment, pour des raisons d'intégrabilité, l'hypothèse $\mu_2 < \rho_2$ est requise ici.

Problématique du groupe stratégique : une première approche

Le premier groupe de pays doit valoriser le droit qu'il détient, concernant l'adoption d'une politique environnementale. Cette option peut s'écrire comme :

$$C = \sup_{\tau \geq 0} E_{\mathbb{P}} \left(\exp(-\rho\tau) (Y_{\tau}^1 - 1)^+ \right)$$

où ρ est le taux d'actualisation.

Hypothèse sur la dérive et le taux d'actualisation : Comme précédemment, pour des raisons d'intégrabilité, l'hypothèse $\mu < \rho$ est requise ici.

Ceci peut également s'écrire comme :

$$C = \sup_{L_1 \geq 0} E_{\mathbb{P}} \left(\exp(-\rho T_1) (Y_{T_1} - 1) \right)$$

où :

$$T_1 = \inf \left(t \geq 0; Y_0^1 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right) \geq L \right)$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}} \left(\exp(-\rho T_1) (Y_{T_1} - 1) \right) &= E_{\mathbb{P}} \left(\exp(-\rho T_1) (Y_{T_1} - 1) \mathbf{1}_{(T_1 < T_2)} \right) \\ &+ E_{\mathbb{P}} \left(\exp(-\rho T_1) (Y_{T_1} - 1) \mathbf{1}_{(T_1 > T_2)} \right) \\ &+ E_{\mathbb{P}} \left(\exp(-\rho T_1) (Y_{T_1} - 1) \mathbf{1}_{(T_1 = T_2)} \right) \end{aligned}$$

Soit, si on note E cette quantité,

$$\begin{aligned}
E &= E_{\mathbb{P}}(\exp(-\rho T_1)(L_1 - 1)) \\
&\quad - E_{\mathbb{P}}\left(\exp(-\rho T_1) \mathbf{1}_{(T_1 > T_2)} \left[(L_1 - 1) - \left(\frac{L_1}{1 + \lambda} - 1 \right) \right]\right) \\
&\quad - E_{\mathbb{P}}\left(\exp(-\rho T_1) \mathbf{1}_{(T_1 = T_2)} \left[(L_1 - 1) - \left(\frac{L_1}{1 + \lambda} (1 + \alpha) - 1 \right) \right]\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= (L_1 - 1) E_{\mathbb{P}}(\exp(-\rho T_1)) - L_1 \frac{\lambda}{1 + \lambda} E_{\mathbb{P}}(\exp(-\rho T_1) \mathbf{1}_{(T_1 > T_2)}) \\
&\quad - L_1 \frac{1}{1 + \lambda} E_{\mathbb{P}}((\lambda - \alpha) \exp(-\rho T_2))
\end{aligned}$$

L'idée est de pouvoir comparer le niveau L_1 avec le niveau L_m . Une première approche peut être une tentative directe de détermination du niveau L_1 (cf. annexes).

Or ce niveau peut seulement être défini implicitement en multipliant cette expression par K_0^1 et en prenant le supremum (ce qui donne le "prix" C):

$$\begin{aligned}
(L_1 - 1) &\left[\int_0^{\infty} dt \frac{|a_2| \exp\left(-\frac{(a_2 - b_2 t)^2}{2t}\right)}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_0^t \exp(-\rho u) \mathbb{P}(T_{1, L_1} \in du / T_2 \in dt) \right. \\
&\quad + \int_0^{\infty} dt \frac{|a_2| \exp\left(-\frac{(a_2 - b_2 t)^2}{2t}\right)}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_t^{\infty} \exp(-\rho u) \mathbb{P}(T_{1, \frac{L_1}{1 + \lambda}} \in du / T_2 \in dt) \\
&\quad \left. + \int_0^{\infty} dt \frac{|a_2| \exp\left(-\frac{(a_2 - b_2 t)^2}{2t}\right) \exp(-\rho t)}{\sqrt{2\pi t^3}} \left(\begin{array}{l} 1 - \int_0^t \mathbb{P}(T_{1, L_1} \in du / T_2 \in dt) \\ - \int_t^{\infty} \mathbb{P}(T_{1, \frac{L_1}{1 + \lambda}} \in du / T_2 \in dt) \end{array} \right) \right] \\
-L_1 \frac{\lambda}{1 + \lambda} &\left[\int_0^{\infty} dt \frac{|a_2| \exp\left(-\frac{(a_2 - b_2 t)^2}{2t}\right)}{2\pi t^2} \int_t^{\infty} du \exp(-\rho u) \int_0^{\frac{L_1}{1 + \lambda}} dx \frac{|a^t| \exp\left(-\frac{(a^t - bu)^2}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u^3}} f(x, t) \right] \\
&\quad - L_1 \frac{\lambda}{1 + \lambda} \left[\int_0^{\lambda} dx (\lambda - x) \int_0^{\infty} du \frac{|a_2| \exp(-\rho u) \exp\left(-\frac{(a_2 - b_2 u)^2}{2u}\right)}{2\pi u^2} g(x, u) \right]
\end{aligned}$$

avec

$$\mathbb{P}(T_{1, L} \in du / T_2 \in dt) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp\left(-\frac{(a - bu)^2}{2u}\right) du$$

$$f(x, t) = \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{x}{Y_0^1}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{2L_1 - x}{Y_0^1}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right)$$

$$g(x, u) = \exp \left(- \frac{\left(\ln \left(\frac{L_1}{1+\lambda} + x \right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) u \right)^2}{2\sigma^2 u} \right) - \exp \left(- \frac{\left(\ln \left(\frac{2(L_1 - \frac{L_1}{1+\lambda}) - x}{Y_0^1} \right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) u \right)^2}{2\sigma^2 u} \right)$$

$$\begin{cases} a^t = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{L_1}{1+\lambda} \right) \\ b = \frac{1}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = \frac{1}{\sigma_2} \ln \left(\frac{L_2}{Y_0^2} \right) \\ b_2 = \frac{1}{\sigma_2} \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \end{cases}$$

et $\begin{cases} a = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{L}{Y_0^1} \right) \\ b = \frac{1}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \end{cases} \quad L = L_1 \text{ ou } L = \frac{L_1}{1+\lambda} \text{ selon les cas}$

Déterminer de façon explicite le niveau L_1 , afin de pouvoir le comparer avec L_m est impossible. Cela n'est possible qu'au travers de simulations numériques.

Cette première étude peut être étendue au cas où plusieurs sauts seraient possibles, en utilisant la théorie des processus de Lévy, présentée, par exemple, dans le livre de J. Bertoin ([8]).

Toutefois, pour comparer les différents niveaux, L_1 et L_m , une autre approche peut être utilisée. Afin de classer ces niveaux, il est nécessaire de faire une hypothèse sur les différents paramètres des processus mais également sur le niveau des différents taux d'actualisation. Nous procédons étape par étape dans la section suivante.

Comparaison du comportement des différents acteurs : une autre approche

Hypothèse La condition suivante nous donne le cadre nécessaire pour l'obtention des résultats principaux de ce papier. Cette hypothèse relie les différents paramètres des différents processus.

Conjecture 6.2 *On considère que les paramètres de dérive sont identiques pour les processus caractérisant le "monde" et les différents groupes de pays :*

$$\mu_i = \mu_m = \mu \quad \forall i \in \{1; 2\}$$

Cela traduit le même niveau d'irréversibilité pour ces différents acteurs quant aux conséquences de la pollution.

On considère que les paramètres de volatilité sont identiques pour les processus caractérisant le "monde" et les différents groupes de pays :

$$\sigma_i = \sigma_m = \sigma \quad \forall i \in \{1; 2\}$$

Cela traduit le même aléa pour ces différents acteurs quant aux conséquences de la pollution.

Cette hypothèse paraît assez naturelle, puisqu'elle traduit le fait que le niveau d'irréversibilité et l'aléa liés aux conséquences de la pollution sont identiques pour les différents acteurs. La différence entre le "monde" et le groupe de pays i provient de la situation initiale (Y_0^m et Y_0^i) et des taux d'actualisation utilisés (ρ_m et ρ_i).

Comparaison entre un groupe non stratégique et le "monde"

Proposition 6.3 (Pays non stratégique et le "monde") *Si l'hypothèse 6.2 est vérifiée et si on a la relation suivante entre les taux d'actualisation ρ_m et ρ_1 :*

$$\rho_m > \rho_1$$

alors le niveau obtenu dans le cas où un groupe de pays agit de façon non-stratégique est supérieur à celui que l'on obtient dans le cas "monde" :

$$L_1^{ns} > L^m$$

Un pays agissant seul a toujours intérêt à attendre plus que s'il agissait à l'intérieur d'une entité.

La preuve de ces résultats est en annexes.

Comparaison entre un groupe non stratégique et un groupe stratégique

Remarque 4 (Pays stratégique et pays non stratégique) *Si l'amplitude du saut λ est strictement positive, alors un pays agissant stratégiquement a intérêt à attendre plus longtemps que s'il agissait de façon non-stratégique :*

$$L_1^s > L_1^{ns}$$

puisque :

$$L_1^s = L_1^{ns} (1 + \lambda)$$

D'autre part, le cadre d'analyse utilisant les options réelles et le comportement stratégique des acteurs conduit ici à retarder la prise de décision par rapport aux résultats de la V.A.N.. Ce résultat est contraire à ce qui est habituellement observé dans la littérature utilisant le même cadre d'analyse: ceci est lié au rôle très particulier des "effets induits".

Remarque 5 (Irreversibilité) *D'après la sous-section 6.3.2, le niveau de la frontière d'exercice L_1^{ns} , lorsque le pays 1 agit non stratégiquement, s'écrit comme :*

$$L_1^{ns} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma}{\sqrt{2\rho_1 + \frac{1}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}}$$

Par conséquent, L_1^{ns} tend vers 1 lorsque l'irréversibilité devient infinie :

$$\lim_{\mu \rightarrow -\infty} L_1^{ns} = 1$$

et de ce fait :

$$\lim_{\mu \rightarrow -\infty} L_1^s = 1 + \lambda > 1 \quad \text{car } \lambda > 0$$

Ainsi, d'après ce dernier résultat asymptotique, le pays agissant stratégiquement aura intérêt à attendre plus longtemps avant d'entreprendre une politique environnementale, que ce qui est prévu à l'aide de la méthode classique de la V.A.N.. Ce résultat peut paraître contradictoire avec la remarque 1. Toutefois, il est parfaitement cohérent avec les résultats obtenus par A. Ulph et D. Ulph ([98]). En effet, une modélisation plus précise de l'irréversibilité peut parfois conduire à des résultats opposés à ceux préconisés par G. Chichilnisky et G. Heal ([20]). Tout réside dans l'ambiguïté du problème de réchauffement global. La formulation du problème même peut avoir un impact sur les résultats obtenus.

Comparaison entre un groupe stratégique et le "monde"

Proposition 6.4 (Pays stratégique et le "monde") Si l'hypothèse 6.2 est vérifiée, et si $\rho_m > \rho_1$, alors le niveau stratégique est supérieur à celui du "monde":

$$L_1^s > L^m$$

Le pays, qui agit stratégiquement, a donc intérêt à attendre plus longtemps que s'il agissait à l'intérieur d'une même entité.

Remarque 6 Ce résultat peut être étendu au cas où la relation suivante entre les taux d'actualisation ρ_m et ρ_1 est vérifiée :

$$\rho_m > \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{2\rho_1 + \alpha^2} (\sigma + \lambda\alpha + \lambda\sigma) - \lambda\alpha^2 - \lambda\alpha\sigma}{\sigma + \lambda\sqrt{2\rho_1 + \alpha^2} - \lambda\alpha} \right)^2 - \alpha^2 \right] \quad \text{avec } \alpha = \frac{1}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)$$

La preuve de ces résultats est en annexes.

Remarque 7 comme $\mu < \rho_1$, alors $\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{2\rho_1 + \alpha^2} (\sigma + \lambda\alpha + \lambda\sigma) - \lambda\alpha^2 - \lambda\alpha\sigma}{\sigma + \lambda\sqrt{2\rho_1 + \alpha^2} - \lambda\alpha} \right)^2 - \alpha^2 \right]$ est une fonction strictement décroissante en λ . Par conséquent, plus l'amplitude du saut est importante, plus le niveau obtenu dans le cas où un groupe de pays agit de façon stratégique est supérieur à celui que l'on obtient dans le cas "monde".

La preuve de ces résultats est en annexes.

Remarque 8 (Lien avec la théorie de l'organisation industrielle) Le cas où il y a deux groupes de pays, dont un agit stratégiquement, peut être a priori comparé à une situation de duopole, en organisation industrielle. Dans le chapitre 10 de [95], J. Tirole étudie très précisément la prise de décision d'une entreprise, concernant l'adoption de nouvelles technologies. Il reprend notamment les idées développées par Schumpeter dans sa thèse en 1947 : l'offre des "biens publics" doit être encouragée par un système de brevets. En effet, toute firme en innovant fournit de l'information aux autres firmes, pour un coût

dérisoire, si ce n'est nul. Un système de compensation est donc nécessaire : l'attribution de brevet, offrant un avantage temporaire et une situation momentanée de monopoleur, à l'entreprise ayant développé cette nouvelle technologie, est ainsi indispensable. Ici, dans ce travail de recherche, ce n'est pas exactement le cas. Aucun brevet n'est susceptible d'être établi, puisque l'adoption d'une politique environnementale (en vue de limiter les émissions de gaz à effet de serre, responsables d'un phénomène global) a un effet simultané pour le pays innovant et pour l'autre pays. La comparaison est limitée.

Remarque 9 (Liens avec la littérature sur les options réelles) Classiquement, dans la théorie des options réelles (par exemple, B. Lambrecht et W. Perraudin [59]), le temps d'attente avant l'exercice de l'option, i.e. avant l'intervention de son détenteur, est réduit lorsque l'on introduit une entité concurrente. Mais, ici, il y a un véritable intérêt à attendre, du fait des effets induits d'une politique environnementale adoptée par l'autre groupe de pays.

Implications pour les taux d'actualisation

Un des paramètres clé dans la distinction des différents acteurs, le monde, le groupe des pays industrialisés (le groupe 2) et le groupe des pays en voie de développement (le groupe 1), est le taux d'actualisation.

D'après les conditions des résultats des propositions précédentes, nous aimerions avoir la relation suivante entre les taux d'actualisation :

$$\rho_2 \geq \rho_m \geq \rho_1$$

Différents articles économiques ont étudié le problème de l'actualisation d'une part, lorsque l'avenir est incertain, et d'autre part, lorsque l'horizon considéré est important (ici l'horizon est infini). Le choix de ce taux est capital, surtout lorsque l'horizon est infini : en effet, c'est le taux d'actualisation qui va permettre d'évaluer les flux survenant dans le futur en les pondérant selon une importance décroissante par rapport au temps. Plus le taux sera important, moins on accordera de l'importance à un flux tombant dans l'avenir. Le problème du choix est d'autant plus compliqué ici puisqu'il s'agit d'une décision inter-générationnelle (voir, par exemple, W.R. Cline [21]). Les générations futures, allant être affectées par le réchauffement climatique, ne sont pas présentes au moment de prendre une décision. Choisir un taux élevé revient à négliger l'impact de ce phénomène sur les générations futures, pour ne se concentrer que sur le présent. Or, comme le souligne E.B. Weiss ([99]), "chaque génération doit hériter d'une planète au moins aussi bien que la génération précédente". Elle appelle cela la "Déclaration des droits de la Planète et des obligations envers les générations futures". Suivant cette idée, le taux d'actualisation ne doit pas être choisi trop important.

Différents paramètres semblent jouer un rôle prépondérant sur le niveau du taux d'actualisation : celui-ci permet en effet, d'une part, de caractériser la préférence temporelle (i.e. préférence pour la consommation présente ou à venir), en particulier le degré d'impatience

de l'agent économique (pris au sens large). De plus, celui-ci est étroitement lié à l'élasticité marginale de la consommation.

Toutefois, il s'agit plus dans ce cas d'un taux d'actualisation prévalant pour un agent économique en particulier. Or, dans ce travail, il est question d'un taux d'actualisation pour un groupe de pays donné, et non plus pour un simple agent. Il s'agit d'un taux d'actualisation collectif. Les effets individuels (comme le comportement d'un individu particulier vis à vis du risque) sont lissés. Ceci permet d'avoir une certaine régularité du taux d'actualisation.

Mais, il s'agit bien ici de classer les taux d'actualisation des deux groupes de pays et non pas de leur donner une valeur. Le problème est en ce sens plus simple. Or, comme, la différence entre les deux groupes de pays provient uniquement de leur niveau de développement économique, on peut considérer le taux d'actualisation comme une fonction du taux de croissance du groupe de pays considéré. L'influence de la préférence temporelle est alors supposée identique aux deux groupes. Cette hypothèse est relativement classique.

Relations entre taux de croissance et taux d'actualisation Ainsi, dans [57], [42] et [44], M.S. Kimball, C. Gollier et J.C. Rochet montrent que le taux d'actualisation est fortement relié au taux de croissance futur anticipé du pays considéré. En effet, ils soulignent différents effets potentiels de la croissance sur l'actualisation :

- Plus le taux de croissance futur anticipé est important, plus le taux d'actualisation sera fort : en effet, si la croissance du pays est forte, "les individus accepteront d'investir pour améliorer leur avenir seulement si le taux de rendement des investissements est suffisamment important pour compenser la distribution inégale des richesses entre les générations". Ce résultat est valable si l'incertitude vis à vis de l'avenir est nulle ou très faible. Dès lors, si la distinction pays industrialisés vs. pays en voie de développement est considérée, on aura vraisemblablement la relation suivante :

$$\rho_2 \leq \rho_m \leq \rho_1$$

puisque les pays en voie de développement ont un taux de croissance anticipé élevé par rapport à celui des pays industrialisés, et que le "monde" à un taux de croissance correspondant à une moyenne des deux groupes.

- Dans un univers incertain, un autre effet se rajoute : l'aléa a aussi un impact sur le taux d'actualisation. Plus l'aléa est important, plus le taux est faible. Plus l'incertitude sur le taux de croissance futur est forte, plus les individus vont épargner par "prudence". Comme cela a été suggéré par M.S. Kimball ([57]), le taux de croissance équivalent \bar{g} dans un univers incertain, où le taux de croissance futur est noté \tilde{g} , est donné par :

$$\bar{g} = E(\tilde{g}) - \frac{1}{2}\sigma_{\tilde{g}}^2 \cdot P$$

où P est le coefficient de prudence relative.

Cet effet peut aller à l'encontre du premier. Ainsi, si la distinction pays industrialisés vs. pays en voie de développement est considérée, on peut supposer que les pays en voie de développement ont des prévisions de croissance moins "fiables" que celles des pays industrialisés. Ainsi leur taux d'actualisation doit être plus faible. Dès lors, la relation suivante :

$$\rho_2 \geq \rho_m \geq \rho_1$$

est susceptible d'être vérifiée.

Par conséquent, les résultats obtenus dans les propositions précédentes ne sont pas compatibles avec une analyse en univers certain mais peuvent l'être dans un monde incertain si l'effet de l'aléa dépasse celui du taux de croissance anticipé moyen.

Etudes empiriques des taux de croissance Les deux effets décrits précédemment et leur importance relative doivent être testés empiriquement pour différents groupes de pays, en fonction de leur niveau de développement. Il est intéressant, pour cela, de regarder d'une part les prévisions de taux de croissance et leur variabilité.

Plusieurs organismes internationaux s'intéressent à l'étude des indicateurs économiques clés pour différents pays. Ainsi, l'O.C.D.E. (Organisation de Coopération et de Développement Economique), le F.M.I (Fonds Monétaire International) ou encore la Banque Mondiale proposent une base de données pour certains pays de référence. Toutefois, cette dernière ne réalise pas de projection concernant le développement futur des pays. Les données obtenues ([38], [69]) peuvent être synthétisées comme suit :

	O.C.D.E.	F.M.I.	moyenne	écart-type
Etats-Unis	4,9%	4,7%	4,8%	0,14%
Japon	1,7%	1,4%	1,55%	0,21%
Europe			3,4%	—
Grande-Bretagne	3,4%	3%	3%	—
France		3,5%	3,5%	—
Inde		5,9%	5,9%	—
Chine	6,6%	7,5%	7,05%	0,64%

Les données concernent le P.N.B. (Produit National Brut) réel (prévision pour 2000). Il faut cependant prendre ces valeurs avec prudence : en effet, calculer une moyenne et un écart-type sur un échantillon comportant au plus deux valeurs n'a pas une grande signification statistique!! Toutefois, comme notre objectif n'est pas de réaliser une étude économétrique des taux de croissance anticipés pour différents pays, ces chiffres peuvent nous permettre d'avoir une idée de l'ordre de grandeur pour ces variables.

Conclusions Il semble que les taux de croissance moyens et l'écart de prévision associée à ces taux soient plus faibles pour les pays développés (Etats-Unis, Japon, Europe) que dans le cas des pays en voie de développement (Inde et Chine). Ceci conforte les hypothèses émises précédemment : le premier fait va à l'encontre des résultats obtenus alors que le

deuxième est compatible. Il reste à savoir comment ces deux effets interagissent et quel est celui qui prépondère.

6.4 Conclusion

Les questions relatives aux politiques environnementales sont au coeur de bon nombre de débats actuels. La prise en considération du problème de réchauffement climatique par les Etats marque une première étape dans la mobilisation internationale pour une cause environnementale. Le "sommet sur la Terre" ou Conférence de Rio, tenue à Rio en 1992, formule l'objectif de stabiliser la concentration de gaz à effet de serre dans l'atmosphère à un niveau empêchant toute influence néfaste sur le climat. Elle fixe également un calendrier permettant aux différents écosystèmes de s'adapter à ces réductions.

Une question fondamentale soulevée par les différents Etats signataires, lors de la Conférence de Rio, a été celle de la *culpabilité*. Les pays développés semblent être les responsables de la situation actuelle et les pays en voie de développement les victimes. Pour résoudre ces différences, les pays les plus développés devraient être ceux qui se battent le plus pour la protection de l'environnement³ alors que le droit au développement économique est reconnu aux pays en voie de développement.

Dans ce travail de recherche, nous nous sommes intéressés à une question plus générale mais comprenant les problèmes d'émissions de gaz à effet de serre. Il s'agit en effet de déterminer le moment optimal pour l'adoption d'une politique environnementale par un groupe de pays dans un contexte stratégique. Nous avons alors montré que, sous certaines hypothèses, un groupe de pays agissant stratégiquement aura intérêt à attendre plus longtemps avant de prendre des mesures environnementales que s'il agissait non stratégiquement ou à l'intérieur d'une même entité. Il s'agit d'une politique sous-optimale d'un point de vue environnemental. Cette étude, ne prenant en compte que la possibilité d'une intervention directe des Etats, est une première étape. Le Protocole de Kyoto introduit également le concept de crédit d'émission. Il serait très intéressant de voir comment nos résultats sont modifiés, suite à l'introduction d'un marché international de ces crédits, voire de produits dérivés écrits sur ces crédits. Ceci permettrait d'estimer l'impact potentiel d'une telle méthode sur l'environnement, ainsi que sur les décisions optimales des Etats.

D'autre part, l'illustration de ces résultats à l'aide de simulations numériques, notamment du délai supplémentaire introduit ici avant l'adoption d'une politique environnementale, serait sans aucun doute la suite logique de ce travail. Cela permettrait de quantifier, dans une certaine mesure, l'impact du choix du modèle dans la prise de décision, et pourrait alors compléter les travaux de A. Ulph et D. Ulph ([98]), concernant l'impact de la formulation du problème de réchauffement climatique sur les résultats obtenus.

La particularité de notre approche est, tout d'abord, grâce à l'utilisation d'outils standards de la finance, de pouvoir raisonner avec des processus stochastiques en temps continu. Il ne

³Cette question est à nouveau à l'ordre du jour alors qu'actuellement, les Etats-Unis se désengagent de cette problématique.

s'agit donc pas d'un jeu différentiel séquentiel mettant en concurrence deux acteurs mais de l'étude du comportement de deux groupes de pays de façon continue. D'autre part, contrairement à la littérature d'organisation industrielle, il est impossible d'introduire la notion de "brevet", puisque, l'impact d'une politique environnementale (sur les gaz à effet de serre) se fait ressentir simultanément au niveau global. Toutefois, la logique dans le cas "monde" est très proche de celle d'un monopoleur, puisque, dans ce cas, il n'est plus question de breveter les avancées technologiques ou politiques.

Enfin, contrairement à la littérature classique sur les options réelles, où le temps d'attente avant l'exercice de l'option, i.e. avant l'intervention de son détenteur, est réduit lorsque l'on introduit une entité concurrente, ici, il y a un intérêt à attendre, du fait des effets induits d'une politique environnementale adoptée par l'autre groupe de pays.

Il serait alors très intéressant d'introduire une nouvelle forme plus sévère d'irréversibilité, liée aux dégâts d'une non-intervention ou d'un délai trop important avant l'adoption d'une politique environnementale. Dans ce cas, comme le souligne R.S. Pindyck dans [75], un pays peut être amené à prendre une décision plus tôt que ce que le critère de la V.A.N. recommande.

6.5 Annexes du chapitre 6

6.5.1 Calcul de la transformée de Laplace de T_m

$$Y_0^m \exp \left[\sigma_m \left(\left(\frac{\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2}}{\sigma_m} \right) T_m + W_{T_m}^m \right) \right] = L_m$$

$$Y_0^m \exp [\sigma_m (\alpha_m T_m + W_{T_m}^m)] = L_m$$

avec $\alpha_m = \left(\frac{\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2}}{\sigma_m} \right)$.

ou encore

$$\alpha_m T_m + W_{T_m}^m = \frac{1}{\sigma_m} \ln \left(\frac{L_m}{Y_0^m} \right) = \beta_m$$

Or $(W_t^m)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien sous \mathbb{P} . Donc, on peut définir le changement de probabilité suivant :

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}_m} = \exp \left(\frac{\alpha_m^2}{2} t + \alpha_m W_t^m \right)$$

tel que $(W_t^m + \alpha_m t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien sous \mathbb{Q}_m .

Alors,

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}} (\exp(-\rho_m T_m)) &= E_{\mathbb{Q}_m} \left(\exp(-\rho_m T_m) \exp \left(\frac{\alpha_m^2}{2} T_m + \alpha_m W_{T_m}^m \right) \right) \\ &= \exp(\alpha_m \beta_m) E_{\mathbb{Q}_m} \left(\exp \left(- \left(\rho_m + \frac{\alpha_m^2}{2} \right) T_m \right) \right) \\ &= \exp(\alpha_m \beta_m) \exp \left(-\beta_m \sqrt{2\rho_m + \alpha_m^2} \right) \\ &= \exp \left(\beta_m \left(\alpha_m - \sqrt{2\rho_m + \alpha_m^2} \right) \right) \end{aligned}$$

D'où

$$E_{\mathbb{P}} (\exp(-\rho_m T_m)) = \left(\frac{Y_0^m}{L_m} \right)^{\frac{-\alpha_m + \sqrt{2\rho_m + \alpha_m^2}}{\sigma_m}}$$

6.5.2 Preuve de la proposition 6.1

En effet,

$$L_m = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_m}{\sqrt{2\rho_m + \frac{1}{\sigma_m^2} \left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{\sigma_m} \left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2} \right)}}} > 1$$

puisque

$$\frac{\sigma_m}{\sqrt{2\rho_m + \frac{1}{\sigma_m^2} \left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{\sigma_m} \left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2} \right)}} > 0 \text{ car } \rho_m \neq 0 \text{ et } \sigma_m \neq 0$$

De plus, comme L_m étant monotone en μ_m et en σ_m , on a :

$$\begin{aligned}\lim_{\mu_m \rightarrow -\infty} L_m &= 1 \\ \lim_{\sigma_m \rightarrow 0} L_m &= 1\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_m}{\partial \mu_m} &> 0 \\ \frac{\partial L_m}{\partial \sigma_m} &< 0\end{aligned}$$

6.5.3 Calcul des différents termes de E

Notation : Par la suite, on va utiliser les notations suivantes : $\mathbb{P}(T_{1,L_1} \in du / T_2 \in dt)$ et $\mathbb{P}\left(T_{1,\frac{L_1}{1+\lambda}} \in du / T_2 \in dt\right)$ permettant de souligner le niveau de la frontière pour le premier groupe de pays.

Calcul du premier terme : $E_{\mathbb{P}}(\exp(-\rho T_1))$

$$\begin{aligned}E_{\mathbb{P}}(\exp(-\rho T_1)) &= \\ &\int_0^{\infty} \int_0^t \exp(-\rho u) \mathbb{P}(T_{1,L_1} \in du / T_2 \in dt) \mathbb{P}(T_2 \in dt) \\ &+ \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} \exp(-\rho u) \mathbb{P}\left(T_{1,\frac{L_1}{1+\lambda}} \in du / T_2 \in dt\right) \mathbb{P}(T_2 \in dt) \\ &+ \int_0^{\infty} \exp(-\rho t) \left(1 - \int_0^t \mathbb{P}(T_{1,L_1} \in du / T_2 \in dt) - \int_t^{\infty} \mathbb{P}\left(T_{1,\frac{L_1}{1+\lambda}} \in du / T_2 \in dt\right)\right) \mathbb{P}(T_2 \in dt)\end{aligned}$$

Remarque : T_1 est différent suivant l'intervalle de temps considéré : si on se place avant t (i.e. avant T_2), alors T_1 se réfère à une frontière placée en L_1 . Si on se place après t (i.e. après T_2), alors T_1 se réfère à une frontière placée en $\frac{L_1}{1+\lambda}$.

Or on sait que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_2 \in dt) &= \frac{|a_2|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(a_2 - b_2 t)^2}{2t}\right) dt \quad \text{avec} \begin{cases} a_2 = \frac{1}{\sigma_2} \ln\left(\frac{L_2}{Y_0^2}\right) \\ b_2 = \frac{1}{\sigma_2} \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right) \end{cases} \\ \mathbb{P}(T_{1,L} \in du) &= \frac{|a|}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp\left(-\frac{(a - bu)^2}{2u}\right) du \\ &\text{avec} \begin{cases} a = \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{L}{Y_0^1}\right) \\ b = \frac{1}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \end{cases} \quad L = L_1 \text{ ou } L = \frac{L_1}{1+\lambda} \text{ selon les cas}\end{aligned}$$

Remarque: On peut, après avoir déterminé L_1 , trouver le temps moyen d'attente d'une politique environnementale pour le premier groupe de pays.

$$E_{\mathbb{P}}(T_1) = \int_0^{\infty} \left[\int_0^t u \mathbb{P}(T_{1,L_1} \in du / T_2 \in dt) + \int_t^{\infty} u \mathbb{P}\left(T_{1, \frac{L_1}{1+\lambda}} \in du / T_2 \in dt\right) \right] \mathbb{P}(T_2 \in dt) \\ + \int_0^{\infty} t \left[1 - \int_0^t \mathbb{P}(T_{1,L_1} \in du / T_2 \in dt) - \int_t^{\infty} \mathbb{P}\left(T_{1, \frac{L_1}{1+\lambda}} \in du / T_2 \in dt\right) \right] \mathbb{P}(T_2 \in dt)$$

Sachant, comme précédemment, que T_1 est différent suivant l'intervalle de temps considéré : si on se place avant t (i.e. avant T_2), alors T_1 se réfère à une frontière placée en L_1 . Si on se place après t (i.e. après T_2), alors T_1 se réfère à une frontière placée en $\frac{L_1}{1+\lambda}$.

Calcul du deuxième terme : $E_{\mathbb{P}}(\exp(-\rho T_1) \mathbf{1}_{(T_1 > T_2)})$

$$E_{\mathbb{P}}(\exp(-\rho T_1) \mathbf{1}_{(T_1 > T_2)}) = \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} \exp(-\rho u) \mathbb{P}\left(T_{1, \frac{L_1}{1+\lambda}} \in du / T_2 \in dt\right) \mathbb{P}(T_2 \in dt)$$

En utilisant des résultats classiques sur les distributions jointes d'un mouvement Brownien B en t et de son maximum sur $[0; t]$ (cf., par exemple, D. Williams [101]) :

$$\text{Pour } 0 \leq y \text{ et } x \leq y \quad \mathbb{P}\left(B_t \leq x; \sup_{s \in [0; t]} B_s \geq y\right) = \mathbb{P}(B_t \geq 2y - x)$$

De plus, l'égalité suivante prévaut :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \in [0; t]} B_s \geq y\right) = \mathbb{P}(T_y \leq t)$$

où $T_y = \inf \{t \geq 0; B_t = y\}$ et la loi de T_y a pour densité :

$$\frac{y \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)}{\sqrt{2\pi t^3}} \mathbf{1}_{(t \geq 0)} dt$$

On obtient finalement :

$$E_{\mathbb{P}}(\exp(-\rho T_1) \mathbf{1}_{(T_1 > T_2)}) \\ = \int_0^{\infty} dt \frac{|a_2| \exp\left(-\frac{(a_2 - b_2 t)^2}{2t}\right)}{2\pi t^2} \int_t^{\infty} du \exp(-\rho u) \int_0^{\frac{L_1}{1+\lambda}} dx \frac{|a^t| \exp\left(-\frac{(a^t - bu)^2}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u^3}} f(x, t)$$

avec

$$f(x, t) = \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{x}{Y_0^1}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{2L_1 - x}{Y_0^1}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right)$$

$$\begin{cases} a^t = \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{L_1}{x}\right) \\ b = \frac{1}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_2 = \frac{1}{\sigma_2} \ln\left(\frac{L_2}{Y_0^2}\right) \\ b_2 = \frac{1}{\sigma_2} \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right) \end{cases}$$

Calcul du troisième terme $E_{\mathbb{P}}((\lambda - \alpha) \exp(-\rho T_2))$

$$E_{\mathbb{P}}((\lambda - \alpha) \exp(-\rho T_2)) = \int_0^\lambda \int_0^\infty \left[(\lambda - x) \exp(-\rho u) \mathbb{P}(T_2 \in du) \mathbb{P}\left(Y_u^1 - \frac{L_1}{1 + \lambda} \in dx \cap \sup_{s \in [0, u]} Y_s^1 < L_1\right) \right]$$

Or

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(Y_u^1 - \frac{L_1}{1 + \lambda} \in dx \cap \sup_{s \in [0, u]} Y_s^1 < L_1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Y_u^1 - \frac{L_1}{1 + \lambda} \in dx \cap \sup_{s \in [0, u]} \left(Y_s^1 - \frac{L_1}{1 + \lambda}\right) < L_1 - \frac{L_1}{1 + \lambda}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Y_u^1 - \frac{L_1}{1 + \lambda} \in dx\right) - \mathbb{P}\left(Y_u^1 - \frac{L_1}{1 + \lambda} \in dx \cap \sup_{s \in [0, u]} \left(Y_s^1 - \frac{L_1}{1 + \lambda}\right) \geq L_1 - \frac{L_1}{1 + \lambda}\right) \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Y_u^1 - \frac{L_1}{1 + \lambda} \in dx\right) &= \mathbb{P}\left(Y_0^1 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)u + \sigma W_u\right) \in \frac{L_1}{1 + \lambda} + dx\right) \\ &= \mathbb{P}\left(W_u \in \frac{1}{\sigma} \left[\ln\left(\frac{L_1}{Y_0^1} + dx\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)u\right]\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{L_1}{Y_0^1} + dx\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)u\right)^2}{2\sigma^2 u}\right) dx \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} & E_{\mathbb{P}}(\alpha \exp(-\rho T_2)) \\ &= \int_0^\lambda dx (\lambda - x) \int_0^\infty du \frac{|a_2| \exp(-\rho u) \exp\left(-\frac{(a_2 - b_2 u)^2}{2u}\right)}{2\pi u^2} g(x, u) \end{aligned}$$

avec

$$g(x, u) = \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{\frac{L_1}{1+\lambda}+x}{Y_0^1}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)u\right)^2}{2\sigma^2u}\right) - \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{2(L_1 - \frac{L_1}{1+\lambda})-x}{Y_0^1}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)u\right)^2}{2\sigma^2u}\right)$$

et

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{\sigma_2} \ln\left(\frac{L_2}{Y_0^2}\right) \\ b_2 = \frac{1}{\sigma_2} \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right) \end{cases}$$

d'où on obtient une définition implicite du niveau L_1 à l'aide de la formule suivante en multipliant par K_0^1 et en prenant le supremum en L_1 (ce qui donne le prix C):

$$(L_1 - 1) \left[\begin{aligned} & \int_0^\infty dt \frac{|a_2| \exp\left(-\frac{(a_2 - b_2 t)^2}{2t}\right)}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_0^t \exp(-\rho u) \mathbb{P}(T_{1, L_1} \in du / T_2 \in dt) \\ & + \int_0^\infty dt \frac{|a_2| \exp\left(-\frac{(a_2 - b_2 t)^2}{2t}\right)}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_t^\infty \exp(-\rho u) \mathbb{P}\left(T_{1, \frac{L_1}{1+\lambda}} \in du / T_2 \in dt\right) \\ & + \int_0^\infty dt \frac{|a_2| \exp\left(-\frac{(a_2 - b_2 t)^2}{2t}\right) \exp(-\rho t)}{\sqrt{2\pi t^3}} \begin{pmatrix} 1 - \int_0^t \mathbb{P}(T_{1, L_1} \in du / T_2 \in dt) \\ - \int_t^\infty \mathbb{P}\left(T_{1, \frac{L_1}{1+\lambda}} \in du / T_2 \in dt\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \right]$$

$$-L_1 \frac{\lambda}{1+\lambda} \left[\int_0^\infty dt \frac{|a_2| \exp\left(-\frac{(a_2 - b_2 t)^2}{2t}\right)}{2\pi t^2} \int_t^\infty du \exp(-\rho u) \int_0^{\frac{L_1}{1+\lambda}} dx \frac{|a^t| \exp\left(-\frac{(a^t - bu)^2}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u^3}} f(x, t) \right]$$

$$-L_1 \frac{\lambda}{1+\lambda} \left[\int_0^\lambda dx (\lambda - x) \int_0^\infty du \frac{|a_2| \exp(-\rho u) \exp\left(-\frac{(a_2 - b_2 u)^2}{2u}\right)}{2\pi u^2} g(x, u) \right]$$

avec

$$\mathbb{P}(T_{1, L} \in du / T_2 \in dt) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp\left(-\frac{(a - bu)^2}{2u}\right) du$$

$$f(x, t) = \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{x}{Y_0^1}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{2L_1 - x}{Y_0^1}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right)$$

$$g(x, u) = \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{\frac{L_1}{1+\lambda}+x}{Y_0^1}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)u\right)^2}{2\sigma^2 u}\right) - \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{2(L_1 - \frac{L_1}{1+\lambda})-x}{Y_0^1}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)u\right)^2}{2\sigma^2 u}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^t = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{L_1}{x} \right) \\ b = \frac{1}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2 = \frac{1}{\sigma_2} \ln \left(\frac{L_2}{Y_0^2} \right) \\ b_2 = \frac{1}{\sigma_2} \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \end{array} \right.$$

et $\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{L}{Y_0^1} \right) \\ b = \frac{1}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \end{array} \right. \quad L = L_1 \text{ ou } L = \frac{L_1}{1+\lambda} \text{ selon les cas}$

6.5.4 Preuve de la proposition 6.3

Nous nous limitons à l'étude du premier groupe de pays. Etendre la réflexion au second groupe est immédiat, du fait de la parfaite symétrie des deux groupes.

Alors, on sait que :

$$L_m = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_m}{\sqrt{2\rho_m + \frac{1}{\sigma_m^2} \left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{\sigma_m} \left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2} \right)}}$$

et :

$$L_1^{ns} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\rho_1 + \frac{1}{\sigma_1^2} \left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{\sigma_1} \left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right)}}$$

Comme l'hypothèse 6.2 est supposée vérifiée, L_1^{ns} sera supérieur à L_m si :

$$\frac{1}{1 - \frac{\sigma}{\sqrt{2\rho_1 + \frac{1}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)}} > \frac{1}{1 - \frac{\sigma}{\sqrt{2\rho_m + \frac{1}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)}}$$

$$\sqrt{2\rho_1 + \frac{1}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2} < \sqrt{2\rho_m + \frac{1}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2}$$

$$\rho_1 < \rho_m$$

6.5.5 Preuve de la proposition 6.4

Nous nous limitons à l'étude du premier groupe de pays. Etendre la réflexion au second groupe est immédiat, du fait de la parfaite symétrie des deux groupes.

D'après la proposition 6.3 et la remarque 5, si $\lambda > 0$ et $\rho_1 < \rho_m$ alors :

$$L_1^s > L_1^{ns} > L_m$$

D'autre part, nous pouvons remarquer que $\frac{L_1^s}{1+\lambda}$, niveau après le saut, correspond en fait au cas non stratégique. En effet, il ne reste qu'un seul groupe de pays, n'ayant pas encore agi, le groupe 1. Ce dernier va par conséquent prendre sa décision indépendamment du reste du monde, puisqu'il agit seul.

Comparer L_1^s avec L^m revient par conséquent à comparer $L_1^{ns}(1 + \lambda)$ avec L^m .
Alors, on sait que :

$$L_m = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_m}{\sqrt{2\rho_m + \frac{1}{\sigma_m^2} \left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2} \right)^2} - \frac{1}{\sigma_m} \left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2} \right)}}$$

et :

$$L_1^{ns} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\rho_1 + \frac{1}{\sigma_1^2} \left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right)^2} - \frac{1}{\sigma_1} \left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right)}}$$

$L_1^{ns}(1 + \lambda)$ sera supérieur à L_m si :

$$\begin{aligned} \frac{1 + \lambda}{1 - \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\rho_1 + \frac{1}{\sigma_1^2} \left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right)^2} - \frac{1}{\sigma_1} \left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right)}} &> \frac{1}{1 - \frac{\sigma_m}{\sqrt{2\rho_m + \frac{1}{\sigma_m^2} \left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2} \right)^2} - \frac{1}{\sigma_m} \left(\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2} \right)}} \\ \frac{1 + \lambda}{1 - \frac{\sigma}{\sqrt{2\rho_1 + \frac{1}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2} - \frac{1}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)}} &> \frac{1}{1 - \frac{\sigma}{\sqrt{2\rho_m + \frac{1}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2} - \frac{1}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)}} \end{aligned}$$

car on suppose que l'hypothèse 6.2 est vérifiée.

Par conséquent, $L_1^{ns}(1 + \lambda)$ sera supérieur à L_m si :

$$\rho_m > \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{2\rho_1 + \alpha^2} (\sigma + \lambda\alpha + \lambda\sigma) - \lambda\alpha^2 - \lambda\alpha\sigma}{\sigma + \lambda\sqrt{2\rho_1 + \alpha^2} - \lambda\alpha} \right)^2 - \alpha^2 \right]$$

avec $\alpha = \frac{1}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)$.

6.5.6 Preuve de la remarque 7

Soit la fonction $f(\lambda)$ définie comme ci-dessous :

$$f(\lambda) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{2\rho_1 + \alpha^2} (\sigma + \lambda\alpha + \lambda\sigma) - \lambda\alpha^2 - \lambda\alpha\sigma}{\sigma + \lambda\sqrt{2\rho_1 + \alpha^2} - \lambda\alpha} \right)^2 - \alpha^2 \right]$$

f a la même monotonie que g définie par :

$$g(\lambda) = \frac{\sqrt{2\rho_1 + \alpha^2} (\sigma + \lambda\alpha + \lambda\sigma) - \lambda\alpha^2 - \lambda\alpha\sigma}{\sigma + \lambda\sqrt{2\rho_1 + \alpha^2} - \lambda\alpha}$$

Or

$$g'(\lambda) = \frac{ad - bc}{(c\lambda + d)^2}$$

avec :

$$\begin{aligned} a &= (\alpha + \sigma) \left(\sqrt{2\rho_1 + \alpha^2} - \alpha \right) \\ b &= \sigma \sqrt{2\rho_1 + \alpha^2} \\ c &= \sqrt{2\rho_1 + \alpha^2} - \alpha \\ d &= \sigma \end{aligned}$$

On a par conséquent :

$$g'(\lambda) < 0 \iff ad - bc < 0$$

ou encore

$$\begin{aligned} \sigma \left(\sqrt{2\rho_1 + \alpha^2} - \alpha \right) \left(\alpha + \sigma - \sqrt{2\rho_1 + \alpha^2} \right) &< 0 \\ \alpha + \sigma - \sqrt{2\rho_1 + \alpha^2} &< 0 \quad \text{car } \sqrt{2\rho_1 + \alpha^2} - \alpha > 0 \\ \frac{\sigma^2}{2} + \alpha\sigma &< \rho_1 \\ \mu &< \rho_1 \quad \text{car } \alpha = \frac{1}{\sigma} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Par conséquent, f est une fonction strictement décroissante en λ si $\mu < \rho_1$.

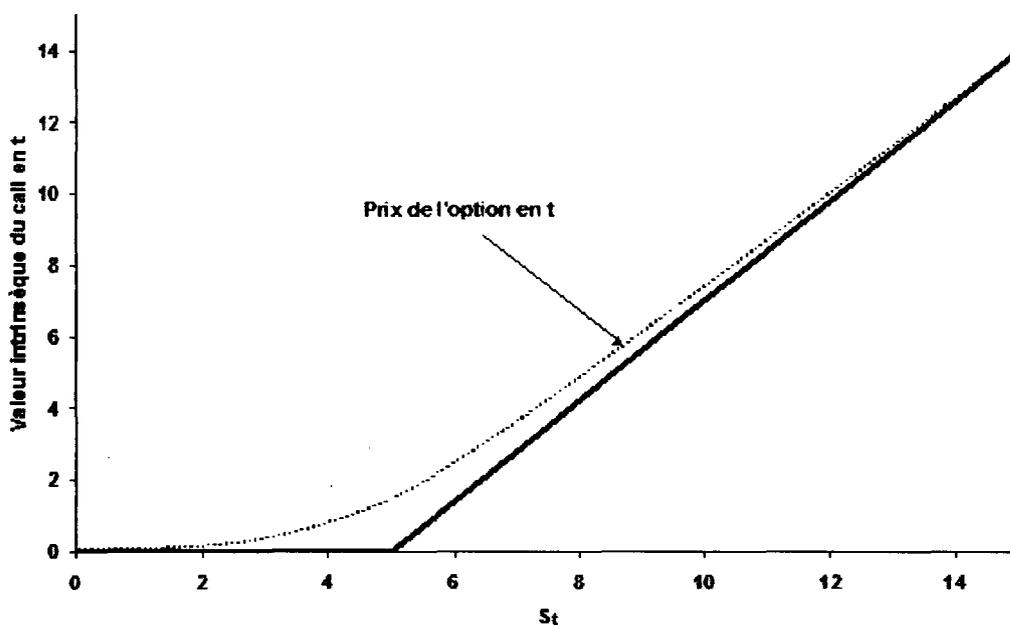
6.5.7 Quelques rappels sur les options américaines perpétuelles

Une option est un contrat financier donnant, à son détenteur, le droit et non l'obligation d'acheter ou de vendre (selon le type de l'option) l'actif sous-jacent du contrat à un prix déterminé à la signature (prix d'exercice). Pour une option américaine, ce droit est valable pendant une période donnée, entre la signature du contrat et la maturité de l'option. Dans le cas d'options perpétuelles (il s'agit plus de contrats théoriques que de contrats réellement échangés sur les marchés financiers), la maturité de l'option est infinie.

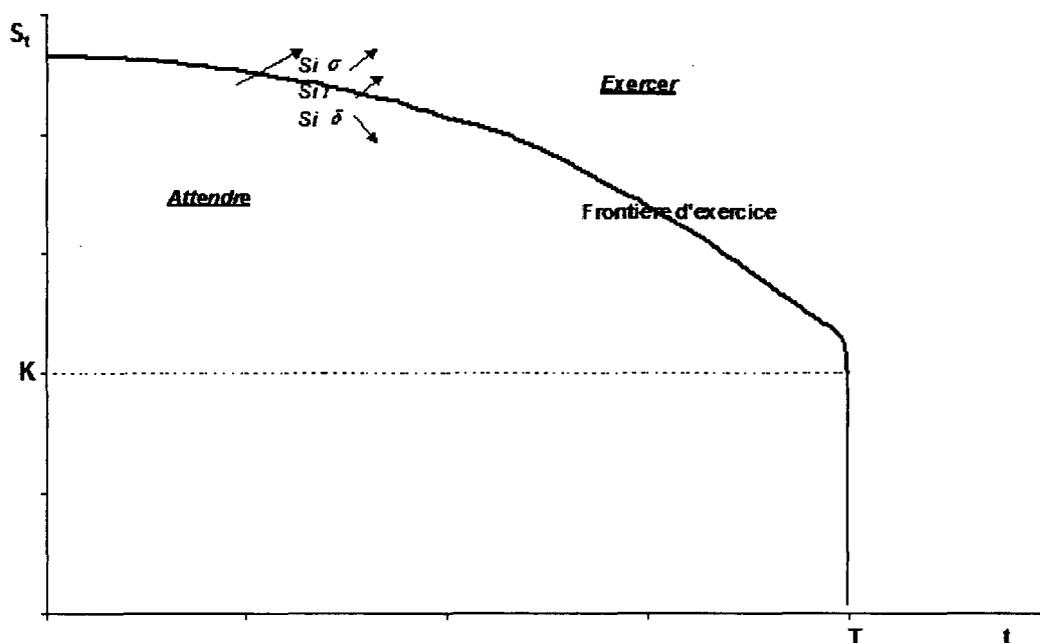
Exercice optimal d'une option américaine

La décision d'exercer l'option n'est pas chose triviale. Il faut comparer le prix de l'option à chaque instant avec le payoff que l'on obtiendrait si on exerçait immédiatement l'option (i.e. la valeur intrinsèque de l'option). Ceci revient à analyser la valeur temps de l'option. A un instant t , pour une option d'achat⁴ (ou "call") :

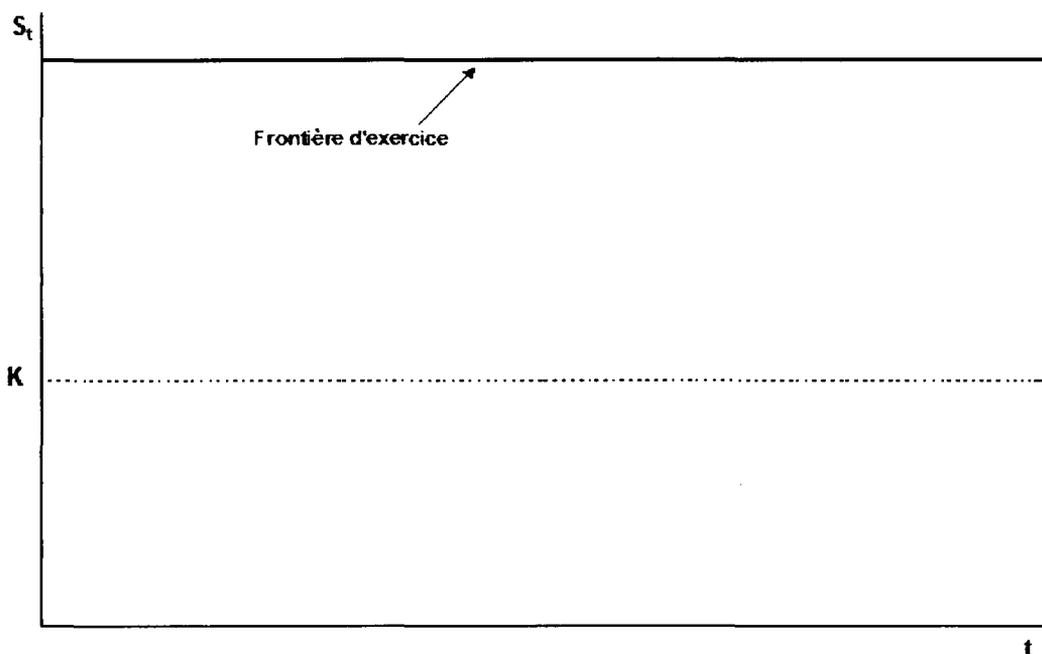
⁴Il faut supposer que le sous-jacent verse des dividendes, ou que son paramètre de dérive est inférieur au taux d'actualisation, pour des questions d'intégrabilité.



Lorsque la valeur temps est strictement positive, il est optimal de ne pas exercer l'option. Il s'agit de la région de continuation. Mais lorsque celle-ci devient nulle, il est alors optimal d'exercer l'option. Le temps de l'attente n'a plus de valeur. Il s'agit de la région d'arrêt. La limite entre ces deux régions est la frontière d'exercice :



Il est possible de montrer (cf., par exemple D. Lamberton et B. Lapeyre [58]) que pour un call américain perpétuel (et de la même façon pour une option de vente ou "put"), la frontière d'exercice est une droite :



Détermination de la frontière d'exercice

L'univers est représenté par un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{Q})$, où \mathbb{Q} est la probabilité d'évaluation (il s'agit classiquement de "la probabilité risque-neutre", lorsque l'on étudie une option dans un marché financier classique, mais il peut s'agir tout simplement de la probabilité historique, comme c'est le cas dans ce travail).

L'actif sous-jacent suit la dynamique suivante sous la probabilité \mathbb{Q} :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \delta) dt + \sigma dW_t$$

où r est le taux sans risque instantané, δ est le taux de dividende instantané et W est un \mathbb{Q} -mouvement Brownien.

On considère une option d'achat américaine perpétuelle dont le sous-jacent est S et le prix d'exercice est fixé à K . On cherche à évaluer une telle option et à déterminer le niveau de la frontière d'exercice, notée L^* .

Le problème qu'il faut résoudre est de la forme :

$$C_A = \sup_{\tau \in \Upsilon} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\exp(-r\tau) (S_{\tau} - K)^+]$$

où Υ est l'ensemble des temps d'arrêt de la filtration naturelle de W et x^+ désigne la partie positive de x .

Ce problème en "temps" peut se ramener à une formulation en "espace" (cf. par exemple D. Lamberton et B. Lapeyre [58]), en introduisant le temps d'atteinte T_L du niveau L par le processus S :

$$C_A = \sup_{L \geq K} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\exp(-rT_L) (S_{T_L} - K)]$$

où

$$T_L = \inf \{t \geq 0; S_t = L\}$$

en particulier, puisque S a des trajectoires continues :

$$S_{T_L} = L$$

D'où :

$$C_A = \sup_{L \geq K} (L - K) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\exp(-rT_L)]$$

Tout se ramène ainsi au calcul de la transformée de Laplace :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\exp(-rT_L)]$$

Par un simple changement de probabilité, il vient :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\exp(-rT_L)] = \left(\frac{S_0}{L}\right)^{\frac{-\alpha + \sqrt{2r + \alpha^2}}{\sigma}} \triangleq \left(\frac{S_0}{L}\right)^{\varepsilon}$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}$$
$$\varepsilon = \frac{-\alpha + \sqrt{2r + \alpha^2}}{\sigma}$$

et :

$$L^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} K$$

Ces résultats sont très classiques dans la littérature. Pour la démonstration précise, se référer par exemple aux études suivantes : N. Bellamy [6], D. Lamberton et B. Lapeyre [58], ou M. Chesney [18]....

Bibliographie

- [1] Alaton, P., B. Djehiche et D. Stillberger, 2001. " *On modelling and pricing weather derivatives*". Working Paper.
- [2] Bachelier, L., 1900. " *Théorie de la spéculation*". Thèse de Doctorat.
- [3] Banque Mondiale, Site Internet. (www.worldbank.org).
- [4] Baranzini, A., Chesney, M. et J. Morisset, 1999. " *Uncertainty, climate catastrophes and global warming policy*". International Academy of the Environment, Publication W85.
- [5] Barricelli, N.A., 1943. " *Les plus grands et les plus petits maxima ou minima annuels d'une variable climatique*". Arch. Math. Naturv, Oslo, 46 n°6, p. 155-194.
- [6] Bellamy, N., 1999. " *Evaluation et couverture dans un marché dirigé par des processus discontinus*". Thèse de doctorat, Université d'Evry Val d'Essonne.
- [7] Bentaleb, D., 1998. " *L'homme une espèce menacée ?* ". Science & Vie n° 964, p. 82-87.
- [8] Bertoin, J. 1996. " *Lévy processes*". Cambridge University Press.
- [9] Bohi, D. et D. Burtraw, 1997. " *SO₂ allowance trading: how experience and expectations measure up*". Working Paper.
- [10] Briys, E., 1998. " *Taming mother nature: a primer on the pricing of Nature-linked securities*" Working Paper.
- [11] Briys, E., 1998. " *Pricing mother nature*". Risk Magazine, E.P.R.M., octobre, p. 16-20.
- [12] Brooks, R.A. et N. Carruthers, 1953. " *Handbook of Statistical Methods in Meteorology*". Londres.
- [13] Cadot, O. et B. Sinclair-Degagne, 1995. " *Environmental standards and industrial policy*". Journal of Environmental Economics and Management, Vol. 29, p. 228-237.

- [14] Calazet, E.G. et R.D. Samuelson, 2000. " *The power market: e-commerce for all electricity products*". Public Utilities Fortnightly.
- [15] Campbell, S. et F. Diebold, 2001. " *Weather forecasting for weather derivatives*". Working Paper PIER n°01 – 031.
- [16] Cao, M. et J. Wei, 2000. " *Pricing the weather*". Risk Magazine, p. 67-70.
- [17] Carraro, C. et D. Siniscalco, 1993. " *Strategies for the international protection of the environment*". Journal of Public Economics, vol. 52, p. 309-328.
- [18] Chesney, M., 1997. " *American Options in a Jump-Diffusion Model*". Working Paper.
- [19] Documents du site web de *Chicago Climate Exchange*: www.chicagoclimateX.com.
- [20] Chichilnisky, G. et G. Heal, 1993. " *Global environmental risks*". Journal of Economic Perspectives, Vol. 7, p. 65-86.
- [21] Cline, W.R., 1992. " *The economics of global warming*". Institute for International Economics.
- [22] Dacunha-Castelle, D. and M. Duflo, 1982. " *Probabilités et statistiques - Problèmes à temps fixe, Volume 1*". Masson.
- [23] Dischel, R., 1998. " *Black-Scholes won't do*". Risk Magazine, E.P.R.M., octobre, p. 8-13.
- [24] Dischel, R., 1999. " *Shaping history*". Risk Magazine, E.P.R.M., octobre, p. 13-15.
- [25] Dischel, R., 2000. " *Seasonal weather forecasts and derivative valuation*". Risk Magazine, E.P.R.M., juillet, p. 18-20.
- [26] Dischel, R., 2000. " *Is precipitation basis risk overstated?* ". Risk Magazine, E.P.R.M., juillet, p. 26-27.
- [27] Dixit, A.K. et R.S. Pindyck, 1993. " *Investment under uncertainty*". Princeton University Press.
- [28] Doherty, N. et O. Mahul, 2001. " *Mickey Mouse and Moral Hazard: Uninformative but correlated triggers*". Risk Theory Society, Montreal, Canada, p. 20-22.
- [29] Dornie, F. et M. Queruel, 2000. " *Caution to the wind*". Risk Magazine, E.P.R.M., juillet, p. 30-32.
- [30] Dudewicz, E.J., E. F. Mykytka, J.S. Ramberg et P.R. Tadikamalla, 1979. " *A probability distribution and its uses in fitting data*". Technometrics, vol. 21, n°2, p. 201-214.

- [31] Eeckhoudt, L. and C. Gollier, 1995. "*Risk: evaluation, management and sharing*". Harvester Wheatsheaf.
- [32] El Karoui, N. et R. Rouge, 2000. "*Pricing via utility maximization and entropy*". *Mathematical Finance*, vol. 10, p. 259-276.
- [33] Documents du site web de *Environmental Financial Products*: www.envifi.com.
- [34] Documents du site web de *United States Environmental Protection Agency*: www.epa.gov.
- [35] Farny, D., 1999. "*The development of European private sector insurance over the last 25 years*". *The Geneva Papers on Risk and Insurance*, vol. 24, n°2, p. 145-162.
- [36] Fernandez Garcia, L., 1998. "*Modélisation des erreurs de prévision par processus Sarima*". Météo France (document interne).
- [37] Fisher, R.A. et L.H.C. Tippett, 1928. """. *Proc. Cam. Phil. Soc.*, vol. 24, p. 180-191.
- [38] F.M.I., Site Internet (www.imf.org).
- [39] Fudenberg, D. et J. Tirole, 1991. "*Game theory*". MIT Press.
- [40] Gallix, L., 1985. "*Il était une fois... l'assurance*". L'Argus Edition.
- [41] Geman, H. (editeur), 1999. "*Insurance and weather derivatives: from exotic options to exotic underlyings*". Risk Book.
- [42] Gollier, C., 1999. "*Time horizon and the discount rate*". Working Paper.
- [43] Gollier, C., B. Jullien et N. Treich, 2000. "*Scientific progress and irreversibility: an economic interpretation of the "Precautionary principle"*". *Journal of Public Economics*, vol. 75, p. 229-253.
- [44] Gollier, C. and J.C. Rochet, 1998. "*Discounting an uncertain future*". Working Paper.
- [45] Gumbel, E.J., 1935. "*Les valeurs extrêmes des distributions statistiques*". *Ann. de l'I.H.P.*, vol. 5, p. 115-158.
- [46] Hodges, S.D. et A. Neuberger, 1989. "*Optimal replication of contingent claims under transaction costs*". *Review of Futures Markets*, vol. 8, p. 222-239.
- [47] International Energy Agency, 1999. "*An assessment of liability rules for international GHG emissions trading*". Information Paper.
- [48] I.P.C.C., 2000. "*Techniques, politiques et mesures d'atténuation des changements climatiques*". Document Technique.

- [49] I.P.C.C., 2000. "Introduction aux modèles climatiques simples employés dans le deuxième rapport d'évaluation de l'I.P.C.C.". Document Technique.
- [50] I.P.C.C., 2000. "Stabilisation des gaz atmosphériques à effet de serre : conséquences physiques, biologiques et socio-économiques". Document Technique.
- [51] I.P.C.C., 2000. "Summary for Policy Makers". Document Technique.
- [52] Information Unit for Conventions - United Nations Environment Programme, 1999. "Understanding climate change: A beginner's guide to the UN framework Convention and its Kyoto Protocol". Document Internet (www.unep.ch).
- [53] Jenkinson, A.F., 1955. "The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements". Quaterly Journal of the Royal Meteorology Society, vol. 45, p. 158-171.
- [54] Jondeau, E. et M. Rockinger, 2002. "Entropy densities with an application to autoregressive conditional skewness and kurtosis". Journal of Econometrics, vol. 106, p. 119-142.
- [55] Kempf, H. et M. Laronche, 2000. "Faut-il mettre en marché les droits de polluer?". Le Monde Economie (21 mars 2000).
- [56] Kempf, H., 2000. "Les preuves du réchauffement climatique?". Le Monde (3 novembre 2000).
- [57] Kimball, M.S., 1990. "Precautionary saving in the small and in the large". Econometrica, vol. 58, n°1, p. 53-73.
- [58] Lamberton, D. et B. Lapeyre, 1991. "Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance". Ellipses, Paris.
- [59] Lambrecht, B. et W. Perraudin, 1998. "Real options and preemption under incomplete information". Working Paper.
- [60] Liakatas, A., 1994. "Harmonic analysis and modelling of annual soil temperature variations". Indian Journal of Meteorology, Hydrology and Geophysics, vol 45, n°2, p. 121-128.
- [61] Longin, F., 1993. "Volatilité et mouvements extrêmes du marché boursier". Thèse de doctorat HEC.
- [62] Longstaff, F. et E. Schwartz, 1995. "A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt". Journal of Finance, vol. 50, n°3, p. 789-819.
- [63] Loubergé, H., 1981. "Economie et finance de l'assurance et de la réassurance". Dalloz.

- [64] Mc Donald, R. et D. Siegel, 1986. " *The value of waiting to invest*". Quaterly Journal of Economics, vol 26, n°2, p. 413-433.
- [65] Mihalakakou, G., Santamouris, M. et D. Asimakopoulos, 1998. " *Modeling ambient air temperature time series using neural networks*". Journal of Geophysical Research, vol 103, n°D16, p. 19509-19517.
- [66] Morin, H. , 2001. " *L'O.N.U. prévoit des effets très néfastes*". Le Monde (21 février 2001).
- [67] Morin, H. , 2001. " *Le dérèglement du climat pourrait durer des millénaires*". Le Monde (3 octobre 2001).
- [68] Nagarajan, S., 2000. " *Power forward curves : a managerial perspective*". Risk Book.
- [69] O.C.D.E., Site Internet (www.oecd.org).
- [70] O.C.D.E. Information Paper, 2000. " *International emissions trading under the Kyoto Protocol*".
- [71] O.C.D.E. Information Paper, 2000. " *International greenhouse gas emission trading: annex 1 expert group on the United Nations framework Convention on climate change*".
- [72] O.C.D.E. Information Paper, 2000. " *Lessons from existing trading systems for international greenhouse gas emission trading: annex 1 expert group on the United Nations framework Convention on climate change*".
- [73] Organisation des Nations Unies, 1997. " *Protocole de Kyoto à la Convention-cadre des Nations Unies sur les changements climatiques*". Texte officiel.
- [74] Outhred, H., 2001. " *Electricity industry restructuring in California and its implications for Australia*". Working Paper.
- [75] Pindyck, R.S., 1999. " *Irreversibilities and the timing of environmental policy*". Working Paper.
- [76] Polasek, J., 2000. " *Hedging outside the box*". Document Internet (www.I-WeX.com).
- [77] Prause, K., 1999. " *The generalized hyperbolic model: estimation, financial derivatives and risk measures*". Thèse de doctorat, Université de Fribourg.
- [78] Press, W.H., S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling et B.P. Flannery, 1992. " *Numerical Recipes in C - The art of computing*" (Second Edition). Cambridge University Press.
- [79] Raviv, A., 1979. " *The design of an optimal insurance policy*". American Economic Review, vol. 69, n°1, p. 84-96.

- [80] Risk Magazine, 1998. " *Weather risk special report*".
- [81] Risk Magazine, 1999. " *Weather risk special report*".
- [82] Risk Magazine, 2000. " *Weather risk special report*".
- [83] Risk Magazine, 2001. " *Weather risk special report*".
- [84] Robinson, P.J., 1997. " *Modeling utility load and temperature relationships for use with long-lead forecasts*". Journal of Applied Meteorology, vol. 36, n°5, p. 591-603.
- [85] Roustant, O., 2001. " *Une application de deux modèles économétriques de température à la gestion des risques climatiques*". Working Paper.
- [86] Sankaran, K., 2000. " *Finding a value*". Risk Magazine, E.P.R.M., août, p. 21-25.
- [87] Simpson, M., 1997. " *Shelter from the storm ?* " Risk Magazine, décembre, p. 16-17.
- [88] Sneyers, R., 1984. " *Extremes in meteorology*". Statistical Extremes and Applications - D. Reidel Publishing Company.
- [89] Soumelis Fivos, D., 1996. " *Assurance optimale et asymétrie de perception du risque : application aux catastrophes en milieux urbains*". Mémoire de DEA, Université de Paris I.
- [90] Spulber, D., 1989. " *Regulation and markets*". MIT Press.
- [91] Stern, H., 2001. " *Different degrees of risk*". Risk Magazine, août, p. 26-28.
- [92] Tankov, P., 2001. " *Modélisation des données de températures : cas univarié*". Working Paper.
- [93] Tchamengo, M., 1998. " *Stratégies statiques en finance*". Thèse de doctorat, Université de Bourgogne.
- [94] Thierer, A.D. et A.C. Walker, 1997. " *Energizing America: a blueprint for deregulating the electricity market*". The Heritage Foundation.
- [95] Tirole, J., 1990. " *The theory of industrial organization*". MIT Press.
- [96] Trigeorgis, L., 1998. " *Real options*". MIT Press.
- [97] Tukey, J.W., 1960. " *The practical relationship between the common transformations of percentages of counts and of amounts*". Technical Report 36, Princeton University.
- [98] Ulph, A. et D. Ulph, 1997. " *Global warming, irreversibility and learning*". The Economic Journal, Vol. 107, p. 636-650.

- [99] Weiss, E.B., 1989. "*In fairness to future generations: international law, common patrimony and intergenerational equity*". Tokyo and Dobbs Ferry, NY: The United Nations University and Transnational.
- [100] Weitzman, M.L., 1998. "*Why the far-distant future should be discounted at its lowest possible rate*". Journal of Environmental Economics and Management, vol 41, n°4, p. 477-491.
- [101] Williams, D., 1979. "*Diffusions, Markov processes and martingales*". Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- [102] Rogers, L. et D. Williams, 1987. "*Diffusions, Markov processes and martingales, volume 2*". Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- [103] Plusieurs articles de Global Reinsurance, de Business Insurance, de The Review et du Post 1996-1998.
- [104] Documents des sites internet du C.M.E. (www.C.M.E.com), de Artémis (www.artemis.bm), comprenant beaucoup de notes rédigées par des praticiens ou des consultants comme Robert Dischel et du site de Weather Risk Advisory (www.wrma.org).