Modélisation tri-dimensionnelle d'un disque céramique piézoélectrique chargé sur ses grandes faces

M. BRISSAUD

INSA, Laboratoire de Génie Electrique et Ferroélectricité, 69621 Villeurbanne cedex, France

This paper is devoted to the modelling of a piezoceramic disk loaded on its major surfaces by acoustic impedances denoted Z_a and Z_b respectively and using a three-dimensional approach. The stress, strain components and the displacements along the radius and the disk thickness are determined which allows the calculation of the electric impedance of the loaded disk and the related electromechanical coupling factors. It is shown that, due to lateral couplings, the resonance peak width of the 3D modelling is larger than that obtained for 1D models. Furthermore, due also to lateral couplings, there is no nodal plane inside the disk. It becomes a zero-phase plane that is, the displacements corresponding to this plane is minimal and the difference in phase related to the applied voltage is zero. This result is consistent with the previous finite element simulations.

I - INTRODUCTION

La détermination des fréquences de résonance d'un disque céramique piézoélectrique s'effectue généralement à partir de modèles uni-dimensionnels de type MASON [1] [2] ou K.L.M. [3] selon la nature de l'excitation : sinusoïdale pour le premier type et impulsionnelle pour le second. L'introduction des pertes électriques ou mécaniques dans ces modèles permet de prédire de manière correcte les diverses résonances des structures mono ou multi-couches [4]. Cependant, comme les couplages par effets Poisson et piézoélectriques sont négligés, les pertes calculées à partir de ces modèles peuvent être plus élevées que ne le laissent prévoir les caractéristiques des matériaux seuls et des colles [5]. Le but de ce travail est la prise en compte des couplages dans la modélisation analytique pour le calcul des modes de résonance d'un disque piézoélectrique chargé sur ses grandes faces par des impédances acoustiques quelconques Z_a et Z_b . La démarche, similaire à celle développée pour le calcul des modes de résonance d'une plaque rectangulaire [5], repose sur l'utilisation de la modélisation tri-dimensionnelle utilisée pour la caractérisation des matériaux céramiques piézoélectriques [6].

Après la description du modèle utilisé nous présenterons les résultats issus des calculs théoriques que nous comparerons à ceux provenant de l'expérience.

II - MODÉLISATION TRI-DIMENSIONNELLE

Considérons un disque céramique piézoélectrique polarisé selon son épaisseur. Ses grandes faces sont chargées respectivement par les impédances acoustiques Z_a et Z_b et sa face latérale est libre. Les dimensions géométriques sont données à la figure 1. Les axes de coordonnées étant des directions de propagation de mode pur, on peut considérer que les déplacements axiaux et radiaux sont de la forme :

$$\begin{cases} u_r = U_r J_1(\alpha r) \exp j \omega t \\ u_z = [A \sin \alpha_3 z + B \cos \alpha_3 z] \exp j \omega t \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{où } \alpha = \omega/V \text{ et } V = C_{11}^D/\rho, \alpha_3 = \omega/V_3 \text{ et } V_3^2 = C_{33}^D/\rho \quad (2)$$

Compte tenu de (1) et (2) les composantes du tenseur des déformations se réduisent à S_r , S_θ , S_z et $S_4 = S_5 = S_6 = 0$. (3)

Par suite le tenseur des contraintes devient :

$$\begin{cases} T_r = C_{11}^D S_r + C_{12}^D S_\theta + C_{13}^D S_z - h_{31} D_3 \\ T_\theta = C_{12}^D S_r + C_{11}^D S_\theta + C_{13}^D S_z - h_{31} D_3 \\ T_z = C_{13}^D S_r + C_{13}^D S_\theta + C_{33}^D S_z - h_{33} D_3 \end{cases} \quad T_4 = T_5 = T_6 = 0 \quad (4)$$

De plus, il ne reste, pour les composantes du champ électrique, que la composante E_3 soit :

$$\begin{cases} E_3 = -h_{31} (S_r + S_\theta) - h_{33} S_z + \beta_{33}^S D_3 \\ E_1 = E_2 = 0 \quad \text{et} \quad D_1 = D_2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

L'équation de Poisson appliquée à D conduit à D_3 de la forme $D_3 = D_0 \exp j \omega t$ (6) où D_0 est une constante.

En écrivant maintenant la continuité des contraintes et des déplacements de part et d'autre des faces de la céramique on obtient le système linéaire 3×3 permettant le calcul des amplitudes U_r , A et B en fonction des constantes élastiques et piézoélectriques et aussi en fonction des impédances de charges Z_a et Z_b soit :

$$\begin{cases} T_r(a) = 0 \\ T_z(a_3) = T_a = -Z_a \dot{u}_a \\ T_z(-a_3) = T_b = Z_b \dot{u}_b \end{cases} \quad \text{où } \dot{u}_i = \partial u_i / \partial t \quad (6)$$

Les termes $\dot{u}_a$ et $\dot{u}_b$ sont les vitesses de déplacement dans les milieux A et B. La résolution du système (6) conduit à :

$$U_r = [h_{31} C_{33}^D (MP - NQ) + h_{33} C_{13}^D (M+N - P-Q)] D_0 / \alpha \Delta \quad (7)$$

$$U_r = U_r' D_0 \quad (8)$$

$$A = (P - N) [h_{33} J_c - h_{31} C_{13}^D J_0(\alpha a)] D_0 / (\alpha_3 \Delta \cos x_3) = A' D_0 / \alpha_3 \cos x_3$$

$$B = (M - Q) [h_{33} J_c - h_{31} C_{13}^D J_0(\alpha a)] D_0 / (\alpha_3 \Delta \sin x_3) \quad (9)$$

$$\Delta = J_c C_{33}^D (MP - NQ) + C_{13}^{D^2} (M + N - P - Q)$$

$$J_c = C_{11}^D J_0(\alpha a) - (C_{11}^D - C_{12}^D) J_1(\alpha a) / \alpha a \quad (10)$$

$$\begin{cases} M = 1 + j r a \operatorname{tg} x_3 \\ N = -1 + j r a \cotg x_3 \\ P = 1 - j r b \cotg x_3 \\ Q = 1 + j r b \operatorname{tg} x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \alpha_3 a_3 \\ r a = Z_a / Z_c \\ r b = Z_b / Z_c \end{cases} \quad (11)$$

En introduisant les relations (1) dans la relation (5) et en intégrant d'une part les charges sur la surface des électrodes puis le champ électrique suivant l'épaisseur du disque on obtient l'expression de l'impédance électrique du disque chargée. Elle s'écrit :

$$Z = \frac{1}{j C_0 \omega} \left[1 - \frac{\alpha h_{31}}{\beta_{33}^S} U_r' J_0(\alpha a) - \frac{h_{33} A'}{\beta_{33}^S} \frac{\operatorname{tg} x_3}{x_3} \right] \quad (12)$$

où $C_0 = \epsilon_{33}^S \pi a^2 / 2 a_3$ est la capacité du disque chargée. (13)

En reportant dans la relation (12) les expressions (7) et (8) de U_r et A , on peut mettre l'impédance du disque sous la forme :

$$Z = R + j X \quad (14)$$

On constate alors que les parties réelles et imaginaires sont fonction de Z_a et Z_b .

III - DISCUSSION

La relation (9) de l'impédance du disque chargée intègre sous un même formalisme les modes de résonance radiale et axiale de l'ensemble. Les résonances radiales apparaissent lorsque Δ devient nul ou minimal selon que les pertes sont ou ne sont pas prises en compte.

Si le matériau est sans pertes on retrouve l'expression obtenue pour un disque libre [6]. Cette dernière se simplifie encore si on suppose que les couplages élastiques (C_{13}) et piézoélectriques (h_{33}) sont nuls. On obtient dans ce cas une relation similaire à celle du disque libre vibrant en radial [7].

Les résonances axiales se produisent lorsque $\tan x_3$ devient ∞ comme pour le disque non chargé.

À partir des relations donnant U_r et A il est possible de faire apparaître les coefficients de couplage k_L et k_T qui s'expriment par :

$$k_L^2 = h_{31}^2 / \beta_{33}^S C_{11}^D \quad \text{et} \quad k_T^2 = h_{33}^2 / \beta_{33}^S C_{33}^D \quad (15)$$

Ces coefficients de couplages sont les coefficients de couplages intrinsèques. Ce ne sont pas ceux que l'on peut obtenir par une mesure directe de fréquence [7] car ils n'interviennent pas seuls dans l'expression de l'impédance.

Le calcul théorique de l'évolution du déplacement uz selon l'épaisseur du disque piézoélectrique montre qu'il n'existe pas de plan nodal. Par contre il existe un plan pour lequel le déplacement uz est minimal et en phase avec le courant d'excitation i . L'abscisse x_0 de ce plan est donnée par la relation

$$\tan \alpha_3 x_0 = \frac{Z_b - Z_a}{Z_b + Z_a} \tan \alpha_3 a_3 \quad (16)$$

c'est exactement la même que celle obtenue pour une plaque rectangulaire [5]. Ces résultats sont en accord avec les mesures expérimentales et les simulations par éléments finis de ces structures [8].

IV - RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

La figure 2 donne, pour un disque céramique de 50 mm de diamètre et 5 mm d'épaisseur et de type PZT classique, l'évolution expérimentale de son impédance électrique lorsqu'il est libre. Les résonances radiales et axiales se produisent respectivement à 88,5 kHz et 417,3 kHz. La figure 3 montre pour le même disque l'évolution de son impédance électrique expérimentale lorsqu'il est chargé sur une face par de l'eau et de l'air sur l'autre face. La résonance radiale n'a pas été modifiée, par contre l'amplitude du mode axiale a été réduite de manière importante. Les résultats de simulations correspondant sont représentés figure 4 et 5. Les pertes dans le matériau piézoélectrique ont été introduites dans la simulation. Compte tenu des approximations faites dans l'établissement du modèle théorique, la concordance entre les résultats théoriques et expérimentaux est satisfaisante.

V - CONCLUSION

Nous avons montré que le calcul de l'impédance électrique d'un disque piézoélectrique chargé est possible en utilisant une approche tri-dimensionnelle prenant en compte les couplages élastiques et piézoélectriques et les pertes dans le matériau. Cette modélisation plus réaliste que celle de MASON, met bien en évidence l'influence des modes radiaux et des impédances de charge sur les modes axiaux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] MASON W.P. - Proc. IRE, vol. 23 - Oct. 1935.
- [2] IEEE Standards on Piezoelectricity. Special issue, vol. SU 31, n° 2, II, 1984.
- [3] KRIMHOLTZ R., LEEDOM D. A., MATTHAEI G. L. - Electronics Letters, vol. 6, n° 13, June 1971.
- [4] DION J. L., BRISSAUD M. - 2ème Congrès Français d'Acoustique. Supp. J. Physique, vol. 2 C1.373-376, Avril 1992.

- [5] BRISSAUD M. - Ultrasonics Inter. Wien Juillet 1993.
- [6] BRISSAUD M. - IEEE, Trans. UFFC, vol. 38, n° 6, 1991, 603-617.
- [7] BERLIN COURT et al. - In Physical Acoustics, Academic Press, vol. 1, part. A, 1964.
- [8] DECARPIGNY J. N. - Thèse Doc ès Sciences. Université Sciences et Techniques de Lille (1984).

Fig. 1 Disque céramique chargé : notations et dimensions

Fig. 2 Évolution expérimentale de l'impédance du disque libre en fonction de la fréquence

Fig. 3 Évolution expérimentale de l'impédance du disque chargé par de l'eau et de l'air

Fig. 4 Courbe simulée de l'impédance du disque libre (figure 1)

Fig. 5 Courbe simulée de l'impédance du disque chargé par de l'eau et de l'air