Analyse d'un signal pseudopériodique amorti et bruité par une méthode d'interpolation spectrale

B. Daoud, D. Rajaona

► To cite this version:

B. Daoud, D. Rajaona. Analyse d'un signal pseudopériodique amorti et bruité par une méthode d'interpolation spectrale. Journal de Physique IV Proceedings, 1994, 04 (C5), pp.C5-1363-C5-1366. 10.1051/jp4:19945303 . jpa-00253018

HAL Id: jpa-00253018

<https://hal.science/jpa-00253018>

Submitted on 1 Jan 1994

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse d'un signal pseudopériodique amorti et bruité par une méthode d'interpolation spectrale

B. DAOUD et D.R. RAJAONA*

Laboratoire de Mécanique des Fluides, Division Hydrodynamique Navale, URA 1217, Ecole Centrale de Nantes, 1 rue de la Nôé, 44072 Nantes cedex 03, France

** Laboratoire de Mécanique des Fluides, Université du Havre, Quai Frissard, BP. 265, 76055 Le Havre cedex, France*

Abstract : The work presented in this paper deals with the decomposition of pseudoperiodic signals in periodic components by using a spectral interpolation method [1, 2]. This method is applied to the autocorrelation of a pseudoperiodic signal instead of the signal itself. Results obtained by the present method are not very sensitive to the noise effect and are generally more accurate than those directly obtained by using the spectral interpolation method on the signal.

1. INTRODUCTION

L'analyse d'un grand nombre de phénomènes physiques nécessite l'identification des composantes périodiques ou pseudopériodiques des signaux mesurés dans la pratique. Ces signaux souvent bruités sont constitués d'un ensemble de valeurs régulièrement espacées dans le temps.

L'objet de cet article est d'appliquer une méthode dite d'interpolation spectrale, non pas au signal temporel [1, 2] mais à sa fonction d'autocorrélation. L'intérêt de ce choix est fondé sur l'observation que la fonction d'autocorrélation d'un bruit gaussien supposé blanc s'amortit rapidement après seulement quelques intervalles de décalage, tandis que l'autocorrélation d'un signal pseudopériodique seul est elle-même pseudopériodique et possède les mêmes fréquences et amortissements que ceux du signal.

2.. ANALYSE DIRECTE D'UN SIGNAL PSEUDOPERIODIQUE AMORTI ET BRUTE, PAR UNE METHODE DITE D'INTERPOLATION SPECTRALE [1, 2]

Les signaux pseudopériodiques tels qu'ils sont utilisés dans cet article sont obtenus en superposant un nombre fini de composantes périodiques bien distinctes et faiblement amorties. Ils s'écrivent donc sous la forme suivante :

$$g_r = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k \exp(i\Omega_k t_r) + \overline{A_k} \exp(i\overline{\Omega_k} t_r) \right) + b(t_r) \quad (1)$$

$A_k = a_k + ib_k$ et $\Omega_k = i\lambda_k + \omega_k$. a_k , b_k , λ_k , et ω_k sont réels et $|\lambda_k| \ll 1$. $b(t)$ est un bruit supposé blanc et gaussien.

Les signaux pseudopériodiques mesurés en pratique sont échantillonnés à intervalles de temps réguliers $t_r = rT/N$, où T désigne la durée d'observation en secondes du signal et N le nombre d'échantillons correspondant. Leur fréquence d'échantillonnage est telle que la condition de Shannon est satisfaite. Par ailleurs nous supposons qu'il n'y a pas d'effet d'aliasing.

Dans ces conditions, nous pouvons facilement calculer la transformée de Fourier Discrète du signal $g(t_r)$ correspondant à la fréquence $2\pi/T$ en utilisant un algorithme de FFT. Nous avons donc :

$$G_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g_k \exp\left(-i 2\pi k \frac{j}{N}\right) \quad j \in [0, N/2] \quad (2)$$

La méthode d'interpolation spectrale permet de trouver les valeurs exactes des amplitudes et des fréquences d'un signal pseudopériodique en s'affranchissant des effets de fenêtres. Elle consiste à détecter les maxima du spectre d'amplitude puis à estimer les erreurs dues à l'étalement du spectre ainsi que la contribution des pics voisins. Cette méthode permet de calculer les caractéristiques fréquentielles en utilisant les formules suivantes [1, 2] :

$$Z_k = i 2\pi \frac{G_{k-1} - G_{k+1}}{2 G_k - G_{k-1} - G_{k+1}} \quad (3)$$

G_{k-1} , G_k et G_{k+1} sont donnés par les équations (1) et (2).

Pour chaque composante, le paramètre représentant l'amortissement et le paramètre de glissement de fréquence sont donnés par :

$$\lambda_k = -\frac{1}{T} \operatorname{Re}\{Z_k\} \quad \text{et} \quad \varepsilon_k = -\frac{i}{2\pi} \operatorname{Im}\{Z_k\} \quad (4)$$

où $\operatorname{Re}\{Z_k\}$ et $\operatorname{Im}\{Z_k\}$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire de Z_k .

Les paramètres Ω_k et A_k du signal pseudopériodique sont donnés par les relations suivantes :

$$\Omega_k = i \lambda_k + (K + \varepsilon_k) \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad A_k = \frac{Z_k (Z_k^2 + 4\pi^2)}{8\pi^2 (1 - \exp(-Z_k))} \quad (5)$$

K correspond à la valeur de k pour laquelle G_k est un pic dans le spectre.

3. UTILISATION DE LA METHODE POUR L'IDENTIFICATION DES PARAMETRES D'UN SIGNAL PSEUDOPERIODIQUE AMORTI ET BRUTE, A PARTIR DE SA FONCTION D'AUTOCORRELATION

3.1. FONCTION D'AUTOCORRELATION D'UN SIGNAL PSEUDOPERIODIQUE

En supposant que le signal pseudopériodique bruité est un signal centré et ergodique, alors sa fonction d'autocorrélation est exprimée par la relation classique suivante :

$$R_{gg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [g(t)] [g(t+\tau)] dt \quad (7)$$

Un signal pseudopériodique bruité $p(t)$ est la superposition d'un nombre fini de composantes harmoniques $p_k(t)$ et d'un bruit blanc gaussien. En vertu de la distributivité de l'opérateur corrélation on a

$$R_{gg}(\tau) = R_{pp}(\tau) + R_{bb}(\tau) + R_{pb}(\tau) + R_{bp}(\tau) \quad \text{avec} \quad R_{pp}(\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} R_{pkpk}(\tau) + \sum_{\substack{i=0 \\ j=0 \\ i \neq j}}^{M-1} R_{pi pj}(\tau) \quad (8)$$

où $M = N(N-1)/2$; $R_{pp}(\tau)$, R_{pkpk} , et $R_{bb}(\tau)$ sont respectivement, la fonction d'autocorrélation du signal pseudopériodique, la fonction d'autocorrélation de la $k^{\text{ième}}$ composante du signal pseudopériodique, et la fonction d'autocorrélation du bruit blanc. Enfin $R_{pb}(\tau)$ et $R_{bp}(\tau)$ représentent les fonctions d'intercorrélation entre le signal pseudopériodique et le bruit et inversement.

En supposant que $p(t)$ et $b(t)$ soient indépendants les fonctions d'intercorrélation $R_{pb}(\tau)$ et $R_{bp}(\tau)$ s'annulent. De la même manière on peut montrer que les fonctions de corrélation croisées des composantes du signal pseudopériodique sont nulles. La nouvelle expression de $R_{pp}(\tau)$ est donc :

$$R_{gg}(\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} R_{pkpk}(\tau) + R_{bb}(\tau) \quad (9)$$

En utilisant les relations (7), (9) et (1) et sachant que la fonction d'autocorrélation du bruit s'amortit rapidement au delà d'une limite τ_1 alors pour $\tau > \tau_1$ la fonction d'autocorrélation du signal pseudopériodique bruité $g(t)$ correspondant à une durée d'intégration T_1 s'exprime comme suit :

$$R_{gg}(\tau) = \left(\frac{1}{4 T_1} \right) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\|A_k\|^2}{2} \left\{ \Psi_k \exp(i \Omega_k \tau) + \overline{\Psi_k} \exp(-i \overline{\Omega_k} \tau) \right\} + \varepsilon(\tau) \quad (10)$$

$$\text{avec} \quad \Psi_k = \frac{\exp \left(i \left\{ \left(\Omega_k - \overline{\Omega_k} \right) T_1 \right\} \right) - 1}{i \left(\Omega_k - \overline{\Omega_k} \right) / 2} + \frac{i \Omega_k}{\|\Omega_k\|^2} \left(1 - \exp(i 2 \Omega_k T_1) \right) \quad (10.a)$$

$\overline{\Psi_k}$ est le complexe conjugué de Ψ_k . $\|A_k\|$ et $\|\Omega_k\|$ sont les normes des complexes A_k et Ω_k . $\varepsilon(\tau)$ étant une erreur d'autant plus faible que la durée d'observation T_1 du signal est grande.

En comparant les équations (1) et (10) on constate que les deux expressions sont similaires. Nous en déduisons que l'autocorrélation d'un signal pseudopériodique est elle même pseudopériodique ayant les mêmes fréquences et amortissements que le signal lui-même. L'analyse de la fonction d'autocorrélation permet en outre d'accéder aux carrés des amplitudes du signal pseudopériodique.

3.2. PHASES DES COMPOSANTES DU SIGNAL PSEUDOPERIODIQUE

On sait que l'intercorrélation d'un signal périodique et d'une fonction "impulsions de Dirac" de même période donne le signal périodique lui-même [4]. Soit $I(t)$ cette fonction "impulsions périodiques" de période T , on a alors :

$$R_{gI}(\tau) = R_{pI}(\tau) + R_{bI}(\tau) \quad (11)$$

$R_{bI}(\tau)$ est nulle et $R_{pI}(\tau) = p(\tau)$ aux erreurs d'estimation près, donc $R_{gI}(\tau) = p(\tau)$.

Une fois le signal pseudopériodique extrait du bruit, les phases correspondantes seront identifiées en résolvant un système linéaire surdéterminé par la méthode de HOUSEHOLDER.

3.3 AUTOCORRELATION D'UN SIGNAL PERIODIQUE ECHANTILLONNE

Nous pouvons calculer par intégration numérique J valeurs approchées de la fonction d'autocorrélation en $\tau = j \Delta t$ en utilisant la formule suivante [3] :

$$R_{gg}(j) = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=0}^{N-j-1} g(i) g(i+j) \right] \quad (12)$$

où : $0 \leq j \leq J-1$; $J < N+1$ et $g(i) = g(i \Delta t)$.

4. APPLICATION DE LA METHODE

Nous donnons en application l'exemple d'un signal théorique défini par l'équation (13) obtenu en superposant un bruit blanc gaussien à moyenne nulle à un signal périodique.

$$g(t) = a \exp(-\lambda t) \cos(2\pi f t + \varphi) + b(t) \quad (13)$$

Les valeurs choisies pour les caractéristiques de $g(t)$ sont : $a = 1.0$; $f = 3 \text{ KHz}$; $\varphi = 0$; $\lambda = 0.0$; $N = 2048$; $\Delta t = 0.05 \text{ ms}$. Les résultats présentés dans le tableau ci-dessous montrent l'évolution de la précision sur la reconstitution des paramètres du signal sinusoïdal en fonction de la variance du bruit σ^2 .

Tableau I

	Amplitude				Fréquence				Amortissement	
	Analyse du signal		Analyse de son autocorrélation		Analyse du signal		Analyse de son autocorrélation		Analyse du signal	Analyse de son autocorrélation
	valeur calculée	écart relatif	valeur calculée	écart relatif	valeur calculée	écart absolu	valeur calculée	écart absolu	valeur calculée	valeur calculée
$\sigma^2 = 0.01$	0.974353	2.6%	0.996431	0.4%	2999.93434	0.066	2999.97966	0.020	- 0.765420	- 0.023325
$\sigma^2 = 0.03$	0.955705	4.4%	0.994209	0.6%	2999.88667	0.113	2999.96456	0.036	- 1.336508	- 0.040060
$\sigma^2 = 0.05$	0.942931	5.7%	0.992695	0.7%	2999.85407	0.146	2999.95408	0.046	- 1.735052	- 0.051408
$\sigma^2 = 0.07$	0.932587	6.7%	0.991476	0.8%	2999.82772	0.172	2999.94550	0.055	- 2.062252	- 0.060521
$\sigma^2 = 0.1$	0.919597	8.0%	0.989949	1.0%	2999.79467	0.205	2999.93462	0.065	- 2.478967	- 0.071861
$\sigma^2 = 0.5$	0.823319	17.7%	0.9788789	2.1%	2999.55246	0.448	2999.84983	0.150	- 5.787638	- 0.151820

On constate que les paramètres du signal périodique bruité calculés en analysant sa fonction d'autocorrélation par la méthode d'interpolation spectrale sont plus précis que ceux obtenus pour l'analyse du signal lui-même. Les écarts relatifs entre les valeurs obtenues par analyse de l'autocorrélation et les valeurs exactes varient de 0.4 % à 2 % pour les amplitudes et de $7 \cdot 10^{-5}$ % à $5 \cdot 10^{-5}$ % pour les fréquences tandis que les écarts entre les valeurs obtenues par l'analyse du signal et les valeurs exactes sont compris entre 3 % et 18 % pour les amplitudes et entre $2 \cdot 10^{-5}$ et $2 \cdot 10^{-4}$ pour les fréquences.

On constate qu'avec l'augmentation du niveau du bruit, les écarts entre les valeurs reconstituées par analyse de la fonction d'autocorrélation et les valeurs exactes augmentent légèrement. Cette augmentation des écarts est beaucoup plus importante dans le cas de l'analyse directe du signal.

Le second test concerne l'analyse d'un signal théorique composé de deux sinusoïdes amorties dont les caractéristiques sont données ci-dessous et d'un bruit blanc gaussien de variance $\sigma^2 = 0.01$.

Copmposante n°1 $a_1 = 1.0$ $f_1 = 3000 \text{ Hz}$ $\lambda_1 = 0.2$ $\phi_1 = 0.0$

Copmposante n°2 $a_2 = 1.0$ $f_2 = 3500 \text{ Hz}$ $\lambda_2 = 0.3$ $\phi_2 = 0.0$

Partant d'une séquence temporelle de 8192 échantillons, nous avons analysé le signal en lui appliquant la directement la méthode d'interpolation spectrale, puis en l'appliquant à la fonction d'autocorrélation correspondante préalablement calculée en 2048 points.

Dans le tableau II figurent à la fois les caractéristiques reconstituées par analyse directe du signal et celles obtenues par analyse indirecte de sa fonction d'autocorrélation. Nous donnons aussi les écarts entre les valeurs exactes et les valeurs reconstituées.

Tableau 2

$\sigma^2 = 0.01$	Amplitude				Fréquence				Amortissement			
	Analyse du signal		Analyse de son autocorrélation		Analyse du signal		Analyse de son autocorrélation		Analyse du signal		Analyse de son autocorrélation	
	valeur calculée	écart relatif	valeur calculée	écart relatif	valeur calculée	écart absolu	valeur calculée	écart absolu	valeur calculée	écart relatif	valeur calculée	écart relatif
Comp. 1	1.009829	0.9%	0.992923	0.7%	2999.99433	0.006	3000.00833	0.008	0.22702	13.5%	0.180678	9.6%
Comp. 2	0.992203	0.8%	0.992888	0.7%	3500.00124	0.001	3500.01949	0.019	0.25706	14.3%	0.301853	0.6%

les valeurs des amplitudes et des amortissements reconstituées à partir de la fonction d'autocorrélation sont plus précises que celles obtenues directement à partir du signal. Contrairement la précision sur le calcul des fréquences obtenues à partir de l'autocorrélation est inférieure à celle correspondant aux fréquences reconstituées à partir du signal. Cette baisse légère de précision peut être expliquée par la longueur de la séquence temporelle quatre fois plus importante que celle de la fonction d'autocorrélation.

5. AVANTAGES ET INCONVENIENTS DE LA PROCEDURE

La méthode a pour avantage de réduire fortement la contribution du bruit sur le spectre analysé. En conséquence la précision des résultats est peu sensible au rapport signal/bruit. Par ailleurs la méthode d'interpolation spectrale nécessite un temps de calcul faible comparé à celui nécessaire lors de l'application des méthodes paramétriques. Cette méthode nécessite des séquences temporelles suffisamment longues puisque sa résolution spectrale est inversement proportionnelle à la longueur du signal à traiter.

6. CONCLUSION

La méthode présentée dans ce papier est destinée à déterminer les composantes périodiques d'un signal échantillonné fortement bruité. Les fréquences sont obtenues avec une très grande précision [1, 2] et sont peu sensible au rapport signal/bruit. La précision sur le calcul des amplitudes et des amortissements est réduite mais demeure néanmoins raisonnable lorsque la contribution du bruit est importante. Cette méthode a été appliquée dans le domaine de l'hydrodynamique à des signaux pseudopériodiques ayant des fréquences inférieures à 15 Hz [1].

REFERENCES

[1] R. D. Rajaona and P. Sulmont, J. Comput. Physics 61, 186 (1985).
[2] R. D. Rajaona and P. Sulmont, J. Comput. Physics 97, 30 (1991).
[3] S. M. Kay and S. L. Marple, in Proc. IEEE 69, N°11, 1380 (1985).
[4] J. Max , Editions Masson, "Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques", (1985).