La transformation logarithme des processus stochastiques, ergodicité

M. Maurin

► To cite this version:

M. Maurin. La transformation logarithme des processus stochastiques, ergodicité. Journal de Physique IV Proceedings, 1994, 04 (C5), pp.C5-1353-C5-1356. 10.1051/jp4:19945301 . jpa-00253015

HAL Id: jpa-00253015

<https://hal.science/jpa-00253015>

Submitted on 1 Jan 1994

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La transformation logarithme des processus stochastiques, ergodicité

M. MAURIN

INRETS-LEN, Case 24, 69675 Bron cedex, France

Abstract. Classical definition of equivalent noise levels $Leq_{\Delta t}$ (see below eq.1) implies some special time Processes with Stationary Increments, Independent (PSII), or no (PSI). With PSII $Leq_{\Delta t}$ are independent then tritely ergodic, but for mere PSI $Leq_{\Delta t}$ are not independent nor ergodic. As Leq are transformed random variables with logarithm, logarithm transform deserves to be investigated in relation to stochastic processes properties, and specially to ergodicity. In this way it is shown the logarithm of a positive stationary ergodic process Z_t is itself stationary and ergodic under very weak conditions.

1. INTRODUCTION.

La définition des indices de bruit équivalents $Leq_{\Delta t} = 10 \log \left\{ \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (p_u/p_0)^2 du \right\}$ (eq.1) en acoustique de l'environnement suggère l'emploi de processus spéciaux pour la (sur-)pression acoustique p_t , sa puissance p_t^2 et son énergie $X_t = \int p_u^2 du$, ($p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa). Par exemple les Processus à Accroissements Indépendants et Stationnaires de Lévy (PAIS) [1] positifs et du 2ème ordre pour X_t , les accroissements $\Delta X_i = \int_{t+i\Delta t}^{t+(i+1)\Delta t} p_u^2 du$ auxquels nous sommes conduits sont en outre trivialement ergodiques, de même que leur logarithme [2]. Les PAS sont plus nombreux, ils sont également intéressants et leurs accroissements ΔX_i sont encore ergodiques sous de larges conditions [3]. Se pose ainsi la question de l'ergodicité des accroissements transformés $Leq_{\Delta t,i} = 10 \log \frac{\Delta X_i}{p_0^2 \Delta t}$ par le logarithme, laquelle est utile pour le traitement statistique des $Leq_{\Delta t,i}$ successifs sur tous intervalles $[t+i\Delta t, t+(i+1)\Delta t]$.

Le contexte acoustique étant rappelé il est plus simple de prendre de nouvelles notations ; en substance il s'agit d'étudier une suite d'accroissements transformés $L_i = \varphi(\Delta_i)$ avec Δ_i l'accroissement d'un processus Z_t sur $[t+i\Delta t, t+(i+1)\Delta t]$ dans le cas particulier de l'application logarithme.

Pour cela nous avons besoin en premier d'un résultat technique sur l'ergodicité du signal transformé $L_t = \varphi(Z_t)$ à partir d'un signal Z_t stationnaire du second ordre, positif et ergodique. Nous montrons ci-après que moyennant des conditions très larges le logarithme d'un signal positif ergodique est lui-même ergodique, une propriété qui n'est évidemment pas générale pour toute application φ , et qui vient compléter l'arsenal des propriétés statistiques du logarithme [4, 5].

2. QUELQUES GENERALITES SUR L'ERGODICITE.

2.1 - Soit un processus Z_t stationnaire et du second ordre, $dF_1(z)$ la loi de toute Z_t et $dF_{2,\tau}(z_1, z_2)$ la loi conjointe de tout couple de variables $Z_t, Z_{t+\tau}$; par hypothèse ces lois admettent des moments du deuxième ordre, $dF_1(z)$ ne dépend pas de t et $dF_{2,\tau}(z_1, z_2)$ ne dépend que de la durée τ qui sépare les variables Z_t et $Z_{t+\tau}$; $dF_{2,\tau}(z_1, z_2)$ est symétrique en z_1 et z_2 , ses deux lois marginales sont $dF_1(z_1), dF_1(z_2)$. Soit E_Z l'espérance aléatoire commune des Z_t et $C(\tau) = \int (Z_t - E_Z)(Z_{t+\tau} - E_Z) dF_{2,\tau}$ la fonction de covariance centrée du processus.

Nous utilisons la définition suivante de l'ergodicité, la limite de la variable aléatoire $\frac{1}{T} \int_0^T Z_t dt$ quand T tend vers plus l'infini est indépendante de la réalisation Z_t du processus, elle est égale à l'espérance E_Z [Bass], la limite pouvant être au sens d'un des modes de convergence usuels en calcul des probabilités. Pour des processus stationnaires du second ordre nous avons la condition suffisante suivante : le processus est ergodique (pour l'espérance) en moyenne quadratique lorsque $\frac{1}{T} \int_0^T C(t) dt$ tend vers zéro quand T tend vers plus l'infini ; il suffit notamment que $C(t)$ ait une limite nulle quand T tend vers plus l'infini pour qu'il en soit ainsi [6].

2.2 - Nous abordons l'ergodicité du signal par le biais des propriétés de la loi conjointe $dF_{2,\tau}(z_1, z_2)$. Définition : la loi temporelle d'un signal vérifie C1 lorsque $dF_{2,\tau}(z_1, z_2)$ converge simplement vers la loi produit des marges $dF_1(z_1) dF_1(z_2)$ quand τ tend vers plus l'infini, (en tout point de continuité).

Lemme 1 : Si la loi du processus Z_t vérifie C1, le processus est ergodique.

En effet toutes les covariances centrées absolues $\int |Z_t - E_Z| |Z_{t+\tau} - E_Z| dF_{2,\tau}$ sont définies, donc les fonctions positives $|Z_t - E_Z| |Z_{t+\tau} - E_Z| dF_{2,\tau}$ intégrables.

Il existe une mesure dM telle que $|Z_t - E_Z| |Z_{t+\tau} - E_Z| dF_{2,\tau}$ est majorée par $|Z_t - E_Z| |Z_{t+\tau} - E_Z| dM$ elle-même intégrable, sinon (par l'absurde) $dF_{2,\tau}$ n'a pas de marge du 2ème ordre.

D'après le théorème de Lebesgue il en résulte que l'intégrale de $(Z_t - E_Z)(Z_{t+\tau} - E_Z) dF_{2,\tau}(z_1, z_2)$ converge vers l'intégrale de $(Z_1 - E_Z)(Z_2 - E_Z) dF_1(z_1) dF_1(z_2)$, c'est à dire vers le produit de deux intégrales simples qui sont nulles par construction.

Cela signifie que la covariance centrée $C(\tau)$ tend vers zéro quand τ tend vers plus l'infini, et donc que le processus Z est ergodique pour l'espérance en moyenne quadratique.

Lemme 2 : Si la loi du processus Z_t vérifie C1 et si φ est une application bornée, le processus $\varphi(Z_t)$ est stationnaire ergodique.

En effet le processus $\varphi(Z_t)$ est trivialement stationnaire, et puisque φ est bornée l'espérance $E_{\varphi(Z)} = \int \varphi(Z) dF_1(z)$ est définie, de même que les covariances centrées $\int (\varphi(Z_t) - E_{\varphi(Z)})(\varphi(Z_{t+\tau}) - E_{\varphi(Z)}) dF_{2,\tau}$. Comme dans le Lemme 1 ces covariances convergent vers l'intégrale de $(\varphi(Z_1) - E_{\varphi(Z)})(\varphi(Z_2) - E_{\varphi(Z)}) dF_1(z_1) dF_1(z_2)$ quand τ tend vers plus l'infini, c'est à dire vers zéro.

Puisque la covariance centrée du processus $\varphi(Z_t)$ tend vers zéro quand t tend vers plus l'infini, le processus est ergodique et vérifie $\frac{1}{T} \int_0^T \varphi(Z_t) dt$ tend vers $E_{\varphi(Z)}$ quand T tend vers plus l'infini.

3 - LE CAS DU LOGARITHME.

L'application logarithme n'étant pas bornée le Lemme 2 ne peut s'appliquer. Cependant la croissance du logarithme aux voisinages de l'origine et de plus l'infini étant faible, une hypothèse simple sur la loi $dF_{2,\tau}$ entraîne que tous les processus $\text{Log } Z_t$ et $(\text{Log } Z_t)^d$ sont ergodiques.

3.1 - La caractérisation d'une loi conjointe sur $\mathbb{R}^{+2}$.

Soit $dF_{XY}(x, y)$ une loi conjointe de variables aléatoires positives X et Y , et $I_{XY}(r_1, r_2) = E(X^{r_1} Y^{r_2}) =$

$\int x^{r_1} y^{r_2} dF_{XY}(x, y)$, une application en fonction des paramètres r_1 et r_2 réels ; par construction elle est définie au-moins pour r_1 et r_2 nuls.

Soit la partition suivante de $\mathbb{R}^{+2}$ en 4 régions :

- (1) : X et $Y \geq 1$;
- (2) : X et Y compris entre 0 et 1 ;
- (3) : $X \geq 1$, Y compris entre 0 et 1 ;
- (4) : $Y \geq 1$, X compris entre 0 et 1 ;

avec laquelle avec des notations évidentes $I_{XY}(r_1, r_2) = I_{(1)}(r_1, r_2) + I_{(2)}(r_1, r_2) + I_{(3)}(r_1, r_2) + I_{(4)}(r_1, r_2)$.

Lemme 3 : Si $I_{XY}(r_1, r_2)$ est définie pour r_1 et r_2 positifs, elle est définie pour r_1' et r_2' positifs respectivement inférieurs ou égaux à r_1 et r_2 ; si elle est définie pour r_1 et r_2 négatifs, elle l'est pour r_1' et r_2' négatifs respectivement supérieurs ou égaux à r_1 et r_2 ; si elle est définie pour r_1 positif et r_2 négatif, elle l'est pour r_1' positif inférieur ou égal à r_1 et r_2' négatif supérieur ou égal à r_2 ; si elle est définie pour r_1 négatif et r_2 positif, elle l'est pour r_1' négatif supérieur ou égal à r_1 et r_2' positif inférieur ou égal à r_2 .

En effet

- dans le cas n° 1 on a $0 \leq I_{XY}(r_1', r_2') \leq I_{(1)}(r_1, r_2) + I_{(2)}(0, 0) + I_{(3)}(r_1, 0) + I_{(4)}(0, r_2)$,
- dans le cas n° 2 $0 \leq I_{XY}(r_1', r_2') \leq I_{(1)}(0, 0) + I_{(2)}(r_1, r_2) + I_{(3)}(0, r_2) + I_{(4)}(r_1, 0)$,
- dans le cas n° 3 $0 \leq I_{XY}(r_1', r_2') \leq I_{(1)}(r_1, 0) + I_{(2)}(0, r_2) + I_{(3)}(r_1, r_2) + I_{(4)}(0, 0)$,
- dans le cas n° 4 $0 \leq I_{XY}(r_1', r_2') \leq I_{(1)}(0, r_2) + I_{(2)}(r_1, 0) + I_{(3)}(0, 0) + I_{(4)}(r_1, r_2)$.

Définition : on pose r_{XM} et r_{YM} les bornes supérieures respectives des paramètres r_1 et r_2 positifs, et r_{Xm} et r_{Ym} les bornes inférieures respectives de r_1 et r_2 négatifs tels que $I_{XY}(r_1, r_2)$ est définie pour $r_{Xm} \leq r_1 \leq r_{XM}$ et $r_{Ym} \leq r_2 \leq r_{YM}$; les bornes r_M sont positives ou nulles, les bornes r_m négatives ou nulles.

Lemme 4 : $I_{XY}(r_1, r_2) = E(X^{r_1} Y^{r_2})$ est défini sur un intervalle $] -a_1, a_1[$ pour r_1 , $] -a_2, a_2[$ pour r_2 , a_1 et a_2 positifs, si et seulement si les produit $r_{XM} r_{Xm}$ et $r_{YM} r_{Ym}$ sont différents de zéro.

En effet il suffit de prendre $a_1 = \inf(r_{XM}, -r_{Xm})$ et $a_2 = \inf(r_{YM}, -r_{Ym})$, réciproquement $r_{XM} \geq a_1$, $r_{YM} \geq a_2$, $r_{Xm} \leq -a_1$ et $r_{Ym} \leq -a_2$

Corollaire : Il en est de même pour r_1 et r_2 appartenant à un même intervalle $] -a, a[$.

Définition : une distribution conjointe sur $\mathbb{R}^{+2}$ vérifie la condition C2 lorsque $I_{XY}(r_1, r_2)$ est définie sur $] -a, a[$ avec $a > 0$.

3.2 - Les moments de Log X et Log Y.

Propriété 1 : Si la loi de X, Y vérifie C2 la loi conjointe des variables transformées Log X et Log Y admet des moments de tous ordres positifs.

En effet les moments d'ordre k_1 et k_2 positifs sont définis par $E((\text{Log } X)^{k_1} (\text{Log } Y)^{k_2}) = \int (\text{Log } x)^{k_1} (\text{Log } y)^{k_2} dF_{XY}(x, y)$, et soit la partition suivante $\{[0, \eta[\cup [\eta, A[\cup [A, +\infty[)^2$ de $\mathbb{R}^{+2}$ avec $0 < \eta < 1 < A$;

- sur $[\eta, A]^2$ l'application $| \text{Log } x |^{k_1} | \text{Log } y |^{k_2} dF_{XY}(x, y)$ est intégrable,
- sur chacune des 8 autres parties $(\text{Log } x)^{k_1} (\text{Log } y)^{k_2}$ garde un signe constant et n'est pas bornée, cependant dans chaque cas elle peut se factoriser sous la forme $x^{\delta_1} (\text{Log } x)^{k_1} y^{\delta_2} (\text{Log } y)^{k_2} x^{-\delta_1} y^{-\delta_2}$ avec δ_1 et δ_2 compris entre -a et +a, et on peut prendre η et A tels que l'application $x^{\delta_1} (\text{Log } x)^{k_1} y^{\delta_2} (\text{Log } y)^{k_2}$ peut être aussi petite que l'on veut et que $x^{-\delta_1} y^{-\delta_2} dF_{XY}(x, y)$ est intégrable.

3.3 - Retour aux processus.

Le Lemme 1 et C1 concernent les processus, la Propriété 1 et C2 les lois conjointes dans $\mathbb{R}^{+2}$, en les associant il en résulte :

Propriété 2 : Si la loi F_{Z_t} d'un processus stationnaire positif Z_t vérifie les conditions C1 et C2, Z_t est ergodique pour l'espérance en moyenne quadratique et il en est de même pour tout processus transformé $(\text{Log } Z_t)^q$, q positif, on a ainsi limite $\frac{1}{T} \int_0^T (\text{Log } Z_u)^q du = E\{(\text{Log } Z_t)^q\}$ quand T tend vers plus l'infini.

4. APPLICATION.

Nous obtenons ainsi un résultat technique sur le logarithme qui prolonge les propriétés précédentes [4, 5], et qui est intéressant en lui-même, en théorie du signal par exemple. A côté de cela il présente une grande importance en Acoustique de l'environnement sous réserve que les accroissements à l'origine des niveaux de bruit équivalents $\Delta\{\int p_u^2 du\}$ sur tous intervalles $[t, t+h]$ peuvent se mettre sous la forme d'un processus Z_t qui vérifie les deux conditions précédentes C1 et C2 ; auquel cas le résultat ci-contre, et donc l'ergodicité, s'étendent aux $\text{Log } \Delta\{\int p_u^2 du\}$ et aux $\text{Leq}_{\Delta t, i}$ successifs sur les intervalles $[t_0+(i-1)h, t_0+ih]$.

C'est précisément ce qui se passe avec un grand nombre de PAS positifs (des travaux en cours à la suite de [3]). Par conséquent la Propriété 2 ci-dessus se révèle un point de passage utile pour l'ergodicité des $\text{Leq}_{\Delta t, i}$ successifs dans le cadre de tels PAS, des processus qui sont plus riches et nombreux que les seuls PAIS, et qui élargissent l'ensemble des situations d'environnement routier où ils peuvent intervenir.

Références :

- [1] Bouleau N., 1988, Processus stochastiques et applications, Hermann.
- [2] Maurin M., 1991, A propos de la modélisation des niveaux de bruit, Revue de Statistique Appliquée, XXXIX n° 2, 69-74.
- [3] Maurin M., 1993a, Une classe de processus pour modéliser les niveaux de bruit de l'Environnement, Traitement du Signal, volume 10 n°1, 29-39.
- [4] Maurin M., 1993b, Quelques propriétés de la transformation logarithme en Probabilités, Congrès de l'ASU, Vannes.
- [5] Maurin M., 1993c, Sur un nouvel intérêt du logarithme en acoustique statistique, à paraître dans Acustica, n° 79.
- [6] Bass J., 1974, Eléments de calcul des Probabilités, Masson.