Etude préliminaire d'un modèle pour la propagation d'ondes dans des tuyaux de conicité variable

A. BARJAU et L. JORDI

Departament d'Enginyeria Mecànica, ETSEIB, Universitat Politècnica de Catalunya, Diagonal 647, 08028 Barcelona, Spain

Résumé: Les tuyaux de conicité variable ont été souvent traités comme une succession d'éléments discrets cylindriques et coniques. Les réponses fréquentielles peuvent se calculer alors à l'aide des matrices de transfert des cylindres et des cônes, et celles du domaine temporel à partir des fonctions de réflexion élémentaires associées aux discontinuités de section et de conicité avec un algorithme de multiconvolution [1][2]. Dans ce papier on propose un traitement de ces tuyaux à partir d'une hypothèse de comportement conique différentiel. Afin de mesurer la validité de l'hypothèse, le modèle est d'abord appliqué aux discontinuités de conicité. Le résultat est analytique et permet de définir une nouvelle fonction de réflexion plus étalée sur l'axe temporel.

Abstract: The bores with varying taper are usually treated as a succession of cylindrical and conical spans. The frequency-domain response can then be calculated through the transfer matrix of cylinders and cones. The time-domain response can be obtained by means of elemental reflection functions associated with section and taper discontinuities by a multiconvolution algorithm. The treatment presented in this paper is based on a hypothesis of differential conical behaviour. To assess the validity of the approach, the model is applied to obtain a new reflection function for the case of a single taper discontinuity.

1. INTRODUCTION

La propagation d'ondes dans des tuyaux avec symétrie de révolution et profil quelconque (pavillons) a attiré des nombreux chercheurs. Il n'existe de solution analytique de l'équation d'onde que pour les cas simples du cylindre et du cône et pour celui du profil hyperbolique [3]. Dans le cas général, plusieurs formulations approchées ont été proposées. Ainsi on peut choisir entre l'équation de Webster [4], celle de Benade et Jansson [5], ou bien celle beaucoup plus récente de Keefe, Barjau et Agulló [6]. Quoique conduisant à des résultats assez différents quand appliquées à un même pavillon, ces trois équations partagent l'hypothèse d'existence de surfaces equipotentielles de géométrie constante (indépendantes de la fréquence), ce qui revient à accepter une solution unidimensionnelle pour la propagation.

Néanmoins le problème de la propagation d'ondes dans les pavillons est nécessairement bidimensionnel, et seules la géométrie cylindrique et la géométrie conique acceptent des solutions exactes où les modes transversaux ne sont pas du tout présents. Des effets connus des pavillons, comme celui de la

dispersion, ne peuvent être reproduits qu'avec des modèles bidimensionnels.

Dans ce papier on propose un modèle approché qui pourrait conduire à une solution analytique pour des pavillons de géométrie très générale.

2. HYPOTHESE BASIQUE

L'hypothèse de base s'inspire du traitement usuel des pavillons: discrétisation en éléments cylindriques et coniques (Fig.1) et utilisation des descriptions fréquentielles et temporelles correspondantes à ces deux géométries pour le calcul des réponses du tuyau dans les deux domaines. Puisque dans ce modèle les éléments discrets sont de longueur finie, les petits volumes (lentilles) enfermés entre les surfaces perpendiculaires au profil aux discontinuités entre les éléments sont négligeables, ce qui permet de rester dans un problème uniparamétrique et de ne pas compliquer le calcul.

L'idée de base du modèle présenté est d'utiliser ce même genre de calcul mais au niveau différentiel. Dans ce cas, les éléments coniques sont de longueur infinitésimale, donc du même ordre que les lentilles aux discontinuités. On est donc obligé de formuler une hypothèse de propagation dans ces petits volumes, et c'est précisément l'inclusion des lentilles dans le calcul qui rend le modèle bidimensionnel.

Le traitement des lentilles est formulé dans le domaine temporel. Si on imagine que sur la surface sphérique S_{1e} d'entrée du cône infinitésimal précédent la distribution de pression à l'instant t_0 est uniforme, alors la surface de sortie S_{1s} du même cône possède aussi une distribution uniforme de pression à l'instant $t=t_0+dr_1/c$. La façon correcte de justifier cette distribution en pensant à la propagation individuelle de chaque valeur de pression sur chaque point de S_{1e} ramène au principe de Huygens: il faut penser à chaque point comme une source sphérique et après construire la résultante de tous les fronts d'onde sphériques venant de chaque point. Mais on peut imaginer un processus plus simple qui conduit au même résultat: une propagation indépendante à vitesse c des pressions sur les lignes perpendiculaires aux la surface S_{1e} (Fig.2). Cela nous permet de définir des "propagateurs de ligne" $g(\varphi, r_1, r_1+dr_1, t)$:

$$p(\varphi, S_{1s}, t) = g(\varphi, r_1, r_1 + dr_1, t) * p(\varphi, S_{1e}, t) \quad ,$$

$$g(\varphi, r_1, r_1 + dr_1, t) = \frac{r_1}{r_1 + dr_1} \delta(t - dr_1 / c) \quad . \quad (1)$$

Pour passer à la distribution sur la surface S_{2e} d'entrée du deuxième cône, il faut penser à la propagation dans la lentille. A partir du processus individuel qui vient d'être défini, on décrit la propagation dans la lentille comme une propagation sur les lignes perpendiculaires à S_{1s} selon les propagateurs de ligne de l'éq.(1). avec $d\sigma(\varphi)$ au lieu de dr_1 . Les conséquences d'une telle hypothèse sont: (1) arrivée non simultanée sur S_{2e} de la perturbation de pression; les retards pour chaque point sont proportionnels à l'épaisseur de la lentille $d\sigma(\varphi)$ mesurée selon la ligne perpendiculaire à S_{1s} ; (2) distribution non uniforme de pression sur S_{2e} , ce qui pourrait simuler la participation de modes transversaux dans cet endroit; (3) valeur moyenne de la pression sur S_{2e} étalée sur l'axe temporel (même dans le cas où la distribution de pression sur S_{1e} serait impulsionnelle), ce qui pourrait s'interpréter comme un effet dispersif.

Fig.1 Tuyau de conicité variable discretisé en cônes infinitésimaux

Fig.2 Géométrie conique différentielle d'un pavillon.

Une fois que la propagation dans la lentille a été réalisée, il faut tenir compte du changement de conicité du profil. Toujours en utilisant les résultats connus pour la géométrie conique [1], on incorpore la réflexion et la transmission sur chaque point de S_{2e} à l'aide d'une convolution avec les fonctions de réflexion et transmission associées à un changement de conicité:

$$R(t) = ve^{vt} \quad , \quad T(t) = \delta(t) + R(t) \quad , \quad \text{avec } v = \frac{(r_{b0} - r_{a0})c}{2r_{a0}r_{b0}} \quad . \quad (2)$$

Le problème se poursuit avec la propagation sur les lignes perpendiculaires à S_{2e} .

Une fois que le traitement différentiel est défini, on peut passer au niveau continu en répétant les convolutions avec les propagateurs et les fonctions de réflexion et transmission différentielles. Le propagateur de ligne $g(\varphi, A, B, t)$ sera le résultat d'une multiconvolution infinie.

3. LE CAS DES DISCONTINUITES DE CONICITE

Le calcul analytique de la multiconvolution infinie n'est pas évident. Mais il y a un cas où on peut trouver des expressions analytiques assez facilement: c'est le cas d'un tuyau avec une seule discontinuité de conicité, c'est à dire, un cas avec une seule lentille (Fig.3). Dans la résolution traditionnelle de celui-ci à partir de conditions initiales de repos sauf sur la surface plane S_0 où on assume une impulsion de pression uniforme p_0 , le passage du front d'onde plan par la discontinuité génère un front d'onde sphérique de pression uniforme $p_-(r_b, t)$ qui se propage vers la droite et un autre plan de pression uniforme $p_+(r_a, t)$ qui se propage vers la gauche, avec:

$$p_+(r_a, t) = R(t - r_a/c) * p_0\delta(t) \quad , \quad R(t) = -\frac{c}{2r_0} e^{-\frac{c}{2r_0}t} \quad , \quad (3)$$

$$p_-(r_b, t) = T(t - (r_b - r_0)/c) * p_0\delta(t) \quad , \quad T(t) = \delta(t) + R(t) \quad . \quad (4)$$

Le traitement différentiel de la lentille selon le modèle de la section précédente conduirait à des distributions non uniformes de pression sur $S_a(r_a)$ et $S_b(r_b)$ (Fig.4):

$$p_+(\varphi, r_a, t) = R(t - (r_a + 2d\sigma(\varphi))/c) * p_0\delta(t) \quad , \quad (5)$$

$$p_-(r_b, t) = T(t - (r_b - r_0 + d\sigma(\varphi))/c) * p_0\delta(t) \quad . \quad (6)$$

Fig.3 Discontinuité cylindro-conique

Fig.4 Modèle bidimensionnel de réflexion et transmission pour une discontinuité cylindro-conique.

4. FONCTIONS DE REFLEXION ET TRANSMISSION MOYENNES

Avant de comparer les résultats théoriques avec des résultats expérimentaux, on peut comparer la nouvelle formulation des discontinuités avec la formulation traditionnelle [7]. La dimension différente des deux formulations conduit à ne travailler qu'avec une seule valeur de pression sur chaque surface. On peut prendre comme valeur représentative sur chaque surface la valeur moyenne de pression:

$$p_+^m(S_a(0), t) = \frac{1}{S_a \theta} \int_0^\theta p(\varphi, r_a, t) dS_a(\varphi) \quad , \quad (7)$$

$$p_-^m(S_b(r_0), t) = \frac{1}{S_b \theta} \int_0^\theta p(\varphi, r_b, t) dS_b(\varphi) \quad , \quad (8)$$

Le fait de travailler avec de valeurs moyennes rend attrayante l'idée de définir des fonctions de réflexion et de transmission moyenne R_m , T_m , qui permettraient d'obtenir les pressions moyennes avec une seule convolution:

$$p_+^m(S_a(0), t) = R_m(t) * p_-^m(S_a(0), t) \quad , \quad (9)$$

$$p_-^m(S_b(r_0), t) = T_m(t) * p_-^m(S_a(0), t) \quad , \quad (10)$$

où $p_-^m(S_a(0), t)$ est la pression moyenne initiale. Néanmoins une exploration simple des eqs. (9), (10) montre que la forme de ces fonctions n'est pas unique; elle dépend de la distribution particulière de pressions initiales. Au cas où cette distribution est uniforme et impulsionnelle, les fonctions R_m et T_m sont:

$$R_m(t) = \frac{2v}{\sin^2 \theta} \left\{ \varepsilon \left(\frac{2d\sigma(0)}{c} - t \right) \left[(1 - \cos \theta) (1 - e^{-vt}) - vt \right] - \varepsilon \left(t - \frac{2d\sigma(0)}{c} \right) (1 - \cos \theta) e^{-vt} \right\} \quad , \quad (11)$$

$$T_m(t) = \frac{2v}{1 - \cos \theta} e^{-vt} \left\{ \varepsilon \left(\frac{d\sigma(0)}{c} - t \right) - \varepsilon \left(t - \frac{d\sigma(0)}{c} \right) \left(e^{\frac{1 - \cos \theta}{2}} - 1 \right) \right\} \quad , \quad \text{avec } v = \frac{c}{2r_0} \quad . \quad (12)$$

5. CONCLUSIONS

Des fonctions de réflexion et transmission moyennes pour des discontinuités de conicité ont été calculées à l'aide d'une formulation de propagation dans la lentille définie par la discontinuité. On a reproduit ainsi un certain effet dispersif, non présent dans les fonctions de réflexion traditionnelles, qui rend nécessairement non uniformes les distributions de pression des deux côtés de la discontinuité.

6. REMERCIEMENTS

Ce travail a pu être réalisé grâce à l'aide des gouvernements espagnol et français dans le cadre d'une action intégrée (Picasso 93142 et AII70B).

7. REFERENCES

- [1] Martínez, J.; Agulló, J.; Cardona, S. "Conical Bores. Part II: Multiconvolution", *J. Acoust. Soc. Am.*, **84**(5) (1988), 1620-1626.
- [2] Barjau, A.; Cardona, S.; Keefe, D.H. "Multiconvolution in waveguides with arbitrarily spaced discontinuities". Proceedings of the 123d meeting of the A.S.A., Salt Lake City 1992. p2374.
- [3] Freehafer, J.E. "The acoustical impedance of an infinite hyperbolic horn", *J. Acoust. Soc. Am.*, **11** (1940), 467-476
- [4] Eisner, E. "Complete solutions of the 'Webster' horn equation", *J. Acoust. Soc. Am.*, **41** (1967), 1126-1146.
- [5] Benade, A.H.; Jansson, E.V. "On plane and spherical waves in horns with non-uniform flare. I. Theory of radiation, resonance frequencies, and mode conversion", *Acustica*, **31** (1974), 79-98.
- [6] Keefe, D.H.; Barjau, A.; Agulló, J. "Theory of wave propagation in axisymmetric horns". SMAC 93 Stockholm 1993.
- [7] Martínez, J.; Agulló, J. "Conical Bores. Part I: Reflection functions associated with discontinuities", *J. Acoust. Soc. Am.*, **84**(5) (1988), 1620-1626.