Modulation non linéaire d'un train d'ondes dans une structure élastique

B. Collet

► To cite this version:

B. Collet. Modulation non linéaire d'un train d'ondes dans une structure élastique. Journal de Physique IV Proceedings, 1994, 04 (C5), pp.C5-793-C5-796. 10.1051/jp4:19945170 . jpa-00252851

HAL Id: jpa-00252851

<https://hal.science/jpa-00252851>

Submitted on 1 Jan 1994

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modulation non linéaire d'un train d'ondes dans une structure élastique

B. COLLET

Laboratoire de Modélisation en Mécanique, URA 229 du CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Tour 66, Boîte 162, 4 place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

Abstract: Composite structures formed by an infinite elastic thin plate placed on elastic foundation are uniform waveguides enables to focus a high energy density in order that nonlinearities can be excited. This class of elastic structures is an interesting candidate for the real observation of two-dimensional wave trains or packets with a soliton-shape envelope in elastic solids. The purpose of this contribution is to study the influences of the geometric dispersion and material nonlinearities of the elastic substrat on the modulation of flexural waves in this simple test structure. The analysis is restricted to excitations which consist of slowly varying envelope in space and time modulating a harmonic carrier wave. In the case of small perturbations the problem thus posed is solved by using the technique of multiple scales. It is shown at the lowest of the secularity conditions, the complex amplitude of the envelope satisfies a 2-D nonlinear Schrödinger equation with the nonlinear coefficient as a function of the wave number and the sign of the nonlinearity. Particular solutions of this equation namely gray or dark solitons are given and illustrated for a circular frequency of the carrier wave close of the linear spectrum gap.

1. INTRODUCTION

Les excitations cohérentes dénommées *solitons* ou *ondes solitaires* nécessitent une subtile compensation entre deux effets antagonistes *dispersion* et *non linéarité*. Ces ondes se manifestent généralement sous la forme de front d'ondes d'impulsion de type bosse et de modes enveloppes. L'essentiel des recherches récentes dans ce domaine se sont focalisées sur des modèles et vérifications expérimentales *quasi-unidimensionnels* [1]. Cependant des analyses plus fines des effets observés en : hydrodynamique, physique des plasmas, optique non linéaire, dynamique des surfaces cristallines, ferromagnétisme, supraconductivité, ... tels que la formation et la localisation d'identités du type paquets d'ondes, pulsions et vortex, ... nécessitent la construction et l'exploitation de modèles *multidimensionnels* [2-6].

Les structures composites déformables constituées par une plaque mince liée à un massif ou substrat sont des *guides d'ondes* uniformes capables de *canaliser de fortes densités d'énergie* qui peuvent exciter les *nonlinéarités*. Cette classe de structures est propice à l'*observation réelle de trains ou paquets d'ondes* dans les *milieux solides* dont l'enveloppe est du type *soliton*. L'objet de cette contribution est d'étudier les effets de la dispersion d'origine géométrique et de la nonlinéarité matérielle du substrat sur la modulation d'ondes de flexion progressives quasi-harmoniques d'une plaque mince *élastique infinie linéaire* et isotrope liée à un massif *élastique non linéaire*. L'équation non linéaire qui régit les mouvements de flexion est déduite à partir d'une formulation variationnelle basée sur le principe de Hamilton. L'analyse est restreinte à des excitations dont l'enveloppe varie lentement dans l'espace et le temps modulant une onde harmonique. Dans le cas de petites perturbations, le problème posé est résolu en utilisant la technique des développements asymptotiques par échelles multiples. En particulier il est montré, à l'ordre le plus bas des conditions de sécularité, que l'amplitude complexe de l'enveloppe satisfait une équation de *Schrödinger non linéaire à deux dimensions (NLS-2D)* dans laquelle le coefficient non linéaire est fonction du nombre d'onde de la porteuse et du signe de la non linéarité du substrat. Des solutions particulières de cette équation qualifiées de *solitons gris* ou *obscur*s sont données sous forme analytique et illustrées pour une valeur de la fréquence du signal porteur voisine de la fréquence de coupure du spectre linéaire de dispersion.

2. PRESENTATION DU MODELE

Le modèle considéré est une structure déformable *non linéaire* constituée par une plaque élastique mince et infinie liée à un massif élastique. Dans le cas traité on s'intéresse à la propagation *d'ondes de flexion*. On suppose que le comportement dynamique de la plaque peut être décrit par le modèle classique *linéaire* de plaque mince isotrope,

construit sur la base des hypothèses de Love-Kirchhoff [7]. La réponse du massif élastique est *non linéaire* et de type cubique (modèle de Winkler) [8]. En absence de sollicitations extérieures le principe de Hamilton pour toute partie finie et arbitraire de cette structure composite s'écrit:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0, \quad U = U_P + U_M, \quad T = \frac{1}{2} \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \rho (\bar{w}_i)^2 d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z}, \quad (1)$$

$$U_P = \frac{D}{2} \int_S \left\{ (\bar{w}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{w}_{\bar{y}\bar{y}})^2 - 2(1 - \nu) [\bar{w}_{\bar{x}\bar{x}} \bar{w}_{\bar{y}\bar{y}} + (\bar{w}_{\bar{x}\bar{y}})^2] \right\} d\bar{x} d\bar{y}, \quad U_M = \int_S \left\{ \frac{1}{2} K \bar{w}^2 + \frac{1}{4} L \bar{w}^4 \right\} d\bar{x} d\bar{y},$$

où T , U_P et U_M désignent respectivement les énergies cinétique et de déformation de la plaque et du massif. La plaque est d'épaisseur h et de densité ρ . On note par $\bar{w} = w(\bar{x}, \bar{y}; t)$ le déplacement transversal dans la direction $\bar{z}$ d'un point du plan médian de la plaque de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$ dans ce plan. On représente par $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ le module de rigidité à la flexion. E est le module d'Young et ν le coefficient de Poisson. Les coefficients K et L sont les rigidités harmonique ($K > 0$) et anharmonique quartique ($L > 0$ ou < 0) du substrat élastique. L'application de ce principe conduit après adimensionalisation à l'équation du mouvement

$$\nabla^4 w + w_{tt} + w + \varepsilon^2 \alpha w^3 = 0, \quad (2)$$

où les nouvelles fonctions et variables sont définies par $w = \bar{w}/w_c$, $x = \bar{x}(K/D)^{1/4}$, $y = \bar{y}(K/D)^{1/4}$ et $t = \bar{t}(K/\rho h)^{1/2}$. w_c représente un déplacement caractéristique suivant $\bar{z}$. $\nabla^4(\cdot) = \nabla^2 \nabla^2$ désigne l'opérateur bi-laplacien. La normalisation choisie fait apparaître dans (2) le paramètre $\varepsilon = w_c(|L|/K)^{1/2}$ que l'on suppose petit mais fini ($\varepsilon \ll 1$). Le signe de la non linéarité du massif est noté par $\alpha = \text{sgn}(L)$.

3. EQUATION DE SCHRÖDINGER NON LINEAIRE 2-D ET SOLITONS GRIS

Dans cette section, on présente une sélection de résultats préliminaires concernant la propagation d'excitations cohérentes de type *soliton bidimensionnel* dans cette structure élastique. Plus précisément on analyse la modulation faiblement non linéaire d'un train ou d'un paquet d'ondes de flexion centré autour du vecteur d'onde dominant

$\vec{k}_p = (k_{Lp}, k_{Tp})$ et de fréquence de l'onde porteuse ω_p . En particulier on montre que l'amplitude du signal à spectre étroit lentement variable dans l'espace et le temps est gouverné par une équation de *Schrödinger non linéaire à deux dimensions*. La présence du petit paramètre ε dans l'équation du mouvement (2) suggère de chercher des solutions de (2) sous la forme du développement asymptotique

$$w(x, y, t) = \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n w_n(X_0, X_1, X_2, Y_0, Y_1, Y_2, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^3), \quad (3)$$

où $X_n = \varepsilon^n x$, $Y_n = \varepsilon^n y$ et $T_n = \varepsilon^n t$ sont les variables appropriées rapides et lentes spatiales et temporelles. En reportant (3) dans (2) on montre que l'équation *linéaire* obtenue, à l'ordre ε^0 , est identiquement satisfaite par le déplacement harmonique

$$w_0 = A(X_1, X_2, Y_1, Y_2, T_1, T_2) \exp[i(k_L X_0 + k_T Y_0 - \omega T_0)] + c.c., \quad (4)$$

où la fréquence angulaire ω et les composantes longitudinale et transversale du vecteur d'onde $\vec{k}$ vérifient la relation de *dispersion linéaire*

$$\omega^2 = 1 + k_L^4 + 2k_L^2 k_T^2 + k_T^4 = 1 + |\vec{k}|^4. \quad (5)$$

On observe la présence à l'origine du spectre linéaire de fréquence d'une bande interdite $0 \leq \omega \leq \omega_0 = 1$ dû au substrat élastique. Dans cette plage de fréquence les *ondes linéaires* sont *évanescentes*. Après une série de calculs, on démontre à l'ordre ε^2 que la condition de non sécularité conduit à une équation *non linéaire* à deux dimensions qui gouverne l'évolution de l'amplitude complexe de la modulation A

$$i\varepsilon^{-1}\left(\frac{\partial A}{\partial T_1} + V_{gL}\frac{\partial A}{\partial X_1} + V_{gT}\frac{\partial A}{\partial Y_1}\right) + P_1\frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} + P_2\frac{\partial^2 A}{\partial Y_1^2} + P_3\frac{\partial^2 A}{\partial X_1\partial Y_1} + Q|A|^2A = 0, \quad (6)$$

où $P_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varpi}{\partial k_L^2}\right); P_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varpi}{\partial k_T^2}\right); P_3 = \left(\frac{\partial^2 \varpi}{\partial k_L \partial k_T}\right); Q = -\frac{3}{2}\frac{\alpha}{\varpi}; V_{gL} = \left(\frac{\partial \varpi}{\partial k_L}\right); V_{gT} = \left(\frac{\partial \varpi}{\partial k_T}\right).$

V_{gL} et V_{gT} sont les composantes longitudinale et transversale du vecteur vitesse de groupe $\vec{V}_g$. Les paramètres $P_{1,2,3}$ représentent les coefficients de dispersion et Q le coefficient de non linéarité. Sans restreindre la généralité, on peut se limiter au cas d'une onde porteuse longitudinale, i.e $k_L = k_p$ et $k_T = 0$. Dans ces conditions les coefficients P_3 et V_{gT} s'annulent. De plus si on considère un repère qui se déplace à la vitesse de groupe V_{gL} et les coordonnées $\xi = X_1 - V_{gL}T_1$ et $\eta = Y_1$, l'équation (6) se réduit à une équation NLS-2D écrite sous sa forme standard

$$i\frac{\partial A}{\partial T_2} + P_1\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + P_2\frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} + Q|A|^2A = 0. \quad (7)$$

On poursuit la réduction en utilisant la coordonnée oblique $S = \xi \cos \theta + \eta \sin \theta$ associée à la direction de la modulation spatiale, (7) se transforme en une équation NLS-1D

$$i\frac{\partial A}{\partial T_2} + P\frac{\partial^2 A}{\partial S^2} + Q|A|^2A = 0, \quad (8)$$

où $P = P_2 + (P_1 - P_2)\cos^2 \theta = k_p^2(1 + k_p^4)^{-1/2} \left[1 + 2\cos^2 \theta (1 + k_p^4)^{-1}\right], \quad Q = -\frac{3}{2}\alpha(1 + k_p^4)^{-1/2}.$

Les solutions de l'équation NLS-1D dépendent du signe du produit PQ. Ici on remarque que le signe de PQ ne dépend que du signe de la non linéarité du massif. En particulier lorsque $PQ < 0$ (i.e quand le substrat est dur $\alpha = 1$) (8) admet une solution stable par onde plane et une solution dénommée soliton *gris* ou *obscur* [9-10] laquelle se présente sous la forme d'oscillations d'amplitude maximale constante sauf dans une région localisée de l'espace où l'enveloppe présente une dépression en forme de pulse inversé (fig. 1). En revenant aux variables initiales $(x, y; t)$ les solutions de (8) sous la forme de *solitons gris* s'écrivent:

$$w(x, y; t) = 2A_0 \left[1 - \beta^2 \operatorname{sech}^2 \left[\left(\left| \frac{Q}{2P} \right|^{1/2} \beta \varepsilon A_0 \right) \left[(x - V_{gL}t) \cos \theta + y \sin \theta \right] \right] \right]^{1/2} \cos[k_p x - \varpi_p t + \varphi(x, y; t)], \quad (9)$$

$$V_{gL} = 2k_p^3(1 + k_p^4)^{-1/2}, \quad \varpi_p = (1 + k_p^4)^{1/2},$$

$$\varphi(x, y; t) = \left| \frac{Q}{2P} \right|^{1/2} \varepsilon A_0 (1 - \beta^2) \left[(x - V_{gL}t) \cos \theta + y \sin \theta \right] + \operatorname{Arctg} \left[\frac{\beta}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \operatorname{th} \left[\left(\left| \frac{Q}{2P} \right|^{1/2} \beta \varepsilon A_0 \right) \left[(x - V_{gL}t) \cos \theta + y \sin \theta \right] \right] \right] + \frac{Q}{2} (3 - \beta^2) \varepsilon^2 A_0^2 t,$$

où θ désigne l'angle formé par la direction de propagation de la porteuse et la direction de la modulation. Le paramètre β avec $0 \leq \beta \leq 1$ règle la profondeur de modulation.

Fig.1 : Evolution spatiale à t fixé de l'amplitude w d'un soliton gris. Jeux de paramètres utilisés: $\varepsilon = 5.10^{-4}$, $A_0 = 0.5$, $k_p = 0.0157$, $\theta = 30^\circ$, $\beta = 0.98$; (a), $t = 0$; (b) $t = 1.10^8$.

REFERENCES

- [1] M.Remoissenet, *Waves Called Solitons-Concepts and Experiments*, Springer, Berlin (1994).
- [2] H.C.Yuen and B.M.Lake, *Advances in Applied Mechanics*, 22, (1982), 68-225.
- [3] E.Infeld and G.Rowlands, *Nonlinear Waves Solitons and Chaos*, Cambridge University Press, Cambridge (1990).
- [4] V.Petrov, W. Rudolph and B.Wilhelmi, *J.Mod.Optics*, 36, (1989), 587-595.
- [5] J.E.Rothenberg, *Opt.Lett*, 17, (1992), 583-585.
- [6] J.Pouget, M.Remoissenet and J.M.Tamga, *Phys. Rev B*, 47, (1993), 14866-14874.
- [7] M.Gérardin et D.Rixen, *Théorie des Vibrations-Application à la Dynamique des Structures*, Masson, Paris (1993).
- [8] C.Massalas, *J.Sound.Vib.*, 54, (1989), 613-615.
- [9] A.Hasegawa, *Optical Solitons in Fibers*, Springer, Berlin (1989).
- [10] A.M.Weiner, "Dark optical solitons" in *Solitons Theory and Experiments* ed J.R. Taylor, Cambridge University Press, Cambridge (1993), 378-408.