



HAL
open science

Assemblage et décomposition des réseaux linéaires

Pirouz Djoharian

► **To cite this version:**

Pirouz Djoharian. Assemblage et décomposition des réseaux linéaires. Journal de Physique IV Proceedings, 1992, 02 (C1), pp.C1:113-116. 10.1051/jp4:1992121 . jpa-00251176

HAL Id: jpa-00251176

<https://hal.science/jpa-00251176>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ASSEMBLAGE ET DÉCOMPOSITION DES RÉSEAUX LINÉAIRES

P. DJOHARIAN

A.C.R.O.E., 46 av. Félix Viallet, F-38000 Grenoble, France

Résumé Nous présentons une étude sur les propriétés d'assemblages des réseaux mécaniques linéaires, en termes de leurs caractéristiques modales. La problématique sous-jacente est celle du contrôle des comportements vibratoires des réseaux en agissant sur leurs paramètres mécaniques. Elle intervient en particulier dans le cadre de la conception d'un système de génération de modèles physiques à l'intérieur d'un outil informatique pour la création musicale.

Abstract This paper presents some assembling properties of linear mechanical networks in terms of their modal characteristics. The underlying problem is the control of the acoustical behavior of a network by operating its mechanical parameters. It arises in particular in conceiving a physical model generating system as part of a computer musical creation tool.

Introduction

Dans une large variété de cas, le mécanisme de production du son dans un instrument de musique peut être modélisé comme une interaction entre un exciteur et un résonateur qui est un système vibrant linéaire, à dissipation visqueuse et à un nombre fini de degrés de liberté. Son évolution est alors décrite par l'équation différentielle linéaire

$$M \ddot{p} + Z \dot{p} + K p = F$$

où M , Z et K sont des matrices symétriques représentant respectivement l'inertie, la viscosité et l'élasticité du système. Lorsque la matrice M est diagonale, ce système représente un ensemble de masses ponctuelles, reliées par des ressorts et des freins en parallèle, chaque masse évoluant dans un espace unidimensionnel. Cette interprétation en réseau confère au système une certaine notion de spatialité, de forme ou de topologie, pouvant parfois suggérer une caricature ou un schéma discret d'un objet continu de référence (par exemple une corde, une membrane,...). En effet, la disposition des coefficients non nuls dans chaque matrice définit une topologie d'interconnexion dans un espace discret. L'association de cette topologie avec une géométrie dans un espace continu reste entièrement arbitraire.

Cependant la vision spatiale permet de transposer certaines opérations naturelles de construction par composition des objets continus pour munir ainsi l'ensemble des réseaux linéaires d'une algèbre de composition analogue. L'opération de composition étudiée ici est l'assemblage qui permet de générer le complexe à partir du plus simple. Cette étude s'effectue, par ailleurs, dans le cadre d'une recherche sur la conception d'un outil informatique pour la création musicale [1]. Dans ce contexte, nous cherchons à mettre en évidence des processus de génération de modèles pour la synthèse sonore par modèles physiques, préservant, d'une part, la référence au monde physique (les manipulations doivent avoir une interprétation mécanique / géométrique simple), et d'autre part, permettre un contrôle sur les effets perceptifs des modèles générés. Les résultats énoncés dans ce qui suit auront donc le profil suivant : exprimer les caractéristiques modales d'un réseau obtenu par une certaine opération d'assemblage en fonction de celles des composants.

Nous aborderons dans un premier temps l'assemblage de deux réseaux pour examiner ensuite le cas d'un nombre quelconque. Nous distinguerons le cas où les réseaux assemblés sont des exemplaires d'un même réseau de base, ce qui nous conduit aux constructions telles le produit ou le L-produit. Ces constructions recouvrent le cas des réseaux en forme de surface rectangulaire, cylindrique ou torique. Nous terminerons par une discussion sur l'interprétation géométrique de la topologie d'interconnexion des réseaux linéaires.

Rappelons d'abord que la représentation modale d'un système vibrant linéaire est la donnée d'une matrice de changement de repère $Q = (q_{ij})$ (ou de coordonnées modales), dans laquelle chaque colonne représente une déformée modale, ainsi que deux matrices diagonales $K_m = (k_i)$ et $Z_m = (z_i)$ de raideurs et viscosités modales vérifiant

$${}^t Q M Q = 1, \quad {}^t Q M Q = K_m, \quad {}^t Q M Q = Z_m$$

L'existence d'une réduction modale nécessite une certaine compatibilité entre la viscosité et l'élasticité du système [2]. Cette condition est trivialement satisfaite pour les réseaux à viscosité proportionnelles (i.e. $Z = \alpha M + \beta K$). Pour simplifier, nous nous bornerons dans ce qui suit au cas des réseaux conservatifs ($Z = 0$).

Assemblages binaires

Soit τ_1 et τ_2 deux réseaux définis par les matrices $M_1 = (m^1_j)$ et K_1 (resp. $M_2 = (m^2_j)$ et K_2). Une liaison élastique \mathcal{L} entre τ_1 et τ_2 est la donnée d'une matrice L dans laquelle chaque coefficient (i,j) définit la raideur de la liaison reliant le noeud i de τ_1 au noeud j de τ_2 . Nous présentons ici un type de liaisons pour lesquelles les caractéristiques modales du modèle assemblé se déduisent formellement à partir de celles des composants. Notons Δ_{12} (resp. Δ_{21}) la matrice diagonale dont le coefficient d'indice i est la somme des raideurs de liaison arrivant au noeud i de τ_1 (resp. τ_2).

Définition 1 Une liaison \mathcal{L} est *orthogonale* si

1. la matrice Δ_{12} (resp. Δ_{21}) est multiple de M_1 (resp. M_2) ;
2. il existe des représentations modales Q_1 et Q_2 de τ_1 et τ_2 telles que ${}^tQ_1 L Q_2$ est quasi-diagonale (i.e. chaque ligne et chaque colonne contient au plus un coefficient non nul).

La condition 1 exprime que pour chaque réseau, la somme des raideurs arrivant en chaque noeud est proportionnelle à cette masse ; la condition 2 traduit une certaine compatibilité entre \mathcal{L} et les structures modales des deux réseaux : chaque mode de τ_1 est couplé à au plus un mode de τ_2 et inversement. Ce couplage entre les modes des deux réseaux définit une *configuration modale* f , c'est à dire une injection entre les indices du plus petit réseau vers celles du plus grand réseau (supposons que ici c'est τ_2). Cette condition est indépendante du choix de l'indexation des modes et moyennant une permutation des modes de τ_2 , on peut supposer que les coefficients non nuls de ${}^tQ_1 L Q_2$ sont situés sur la diagonale (autrement dit la configuration est une inclusion).

Il est alors possible d'annuler un couplage (un coefficient non nul b_{ij} de ${}^tQ_1 L Q_2$) par une rotation dans le plan défini par les modes i et j des deux réseaux. Alors, l'hypothèse de l'orthogonalité garantit que cette rotation perturbe uniquement les modes i et j sans introduire des couplages supplémentaires. Plus précisément, si $\Delta_{12} = \sigma_1 M_1$ (resp. $\Delta_{21} = \sigma_2 M_2$), cette rotation est définie comme suit : posons $v = (k^1_i - k^2_j + \sigma_1 - \sigma_2) / 2b_{ij}$, où k^1_i et k^2_j sont les modes couplés ; l'angle de rotation est défini par sa tangente

$$t_{ij} = \begin{cases} -v + (1 + v^2)^{1/2} & \text{si } v > 0 \\ -v - (1 + v^2)^{1/2} & \text{si } v < 0 \\ 1 & \text{si } v = 0. \end{cases}$$

Les modes résultants du réseau assemblé s'expriment par

$$\begin{aligned} k' &= k^1_i + \sigma_1 + t_{ij} b_{ij} \\ k'' &= k^2_j + \sigma_2 - t_{ij} b_{ij} \end{aligned}$$

L'expression précédente reste valide pour les modes non-couplés, auquel cas il faut annuler la correction $t_{ij} b_{ij}$. Si on note s_{ij} et c_{ij} les sinus et cosinus de l'angle de rotation, les déformées modales associées à ces modes sont les vecteurs dont les coordonnées sont celles de $c_{ij} q^1_i$ (resp. $s_{ij} q^1_i$) suivies de celles de $-s_{ij} q^2_j$ (resp. $c_{ij} q^2_j$).

L'exemple typique est la liaison canonique : deux exemplaires d'un même réseau sont reliés de façon parallèle par un système de ressorts de raideurs identiques. Les modes du réseau assemblé correspondent aux oscillations en phase et en opposition de phase des deux réseaux. Dans certaines conditions, il est possible de généraliser cette situation à deux réseaux différents.

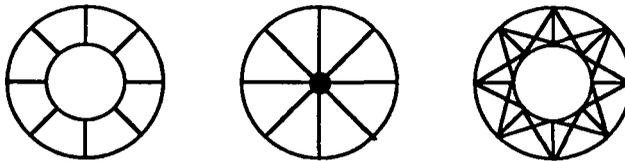


Figure 1 Exemples d'assemblages orthogonaux

Il faut noter que dans la définition de l'orthogonalité, la structure modale des composants n'intervient que par l'intermédiaire de leurs déformées modales. L'orthogonalité est donc stable par dilatation homogène des masses et des raideurs. D'autre part, pour une configuration donnée des modes, on peut combiner linéairement les liaisons orthogonales et engendrer un espace vectoriel. La proposition suivante caractérise cet espace vectoriel en terme de deux types fondamentaux de liaisons orthogonales.

Introduisons d'abord la terminologie suivante : nous dirons qu'un mode est *équilibré* si son oscillation (libre) laisse le centre de gravité du réseau immobile. C'est en particulier le cas des modes antisymétriques. La *trace* $Tr(\chi)$ d'un mode est le réel $\sum_i m_i q_i$, où les m_i sont les masses associées à chaque noeud et q_i l'amplitude relatif de chaque masse lors de l'oscillation du mode. Un mode équilibré est donc à trace nulle.

Si χ^1 et χ^2 sont deux modes équilibrés de τ_1 et τ_2 et q^1 et q^2 leurs déformées modales, alors on montre que la liaison reliant les masses i et j des deux réseaux par des ressorts de raideur $l = m^1_i m^2_j q^1_i q^2_j$ est orthogonale ; c'est la *liaison orthogonale élémentaire* définie par le couple χ^1 et χ^2 . De même, si une configuration f est telle que les traces des modes couplés des deux réseaux sont proportionnelles (i.e. il existe α tel que pour tout i , $Tr(\chi^1_i) = \alpha Tr(\chi^2_{f(i)})$), alors la liaison

reliant deux noeuds d'indice u et v par la raideur $l = m^1_u m^2_v \sum_k Q^1_{uk} Q^2_{vk}$ est orthogonale : c'est la *liaison canonique* définie par la configuration proportionnelle f .

Proposition 1 Pour une configuration f , les liaisons orthogonales associées sont engendrées par la liaison canonique (lorsque f est proportionnelle) et les liaisons orthogonales élémentaires définies par les couples χ^1_i et $\chi^2_{f(i)}$, lorsque ces modes sont équilibrés.

Dans un réseau à élasticité externe homogène (i.e. tel que les liaisons au point fixe sont toutes de même raideur), tous les modes sauf le fondamental sont équilibrés. Pour un tel réseau, il existe donc des auto-assemblages orthogonaux qui affectent l'un quelconque des modes. De même, lorsque l'élasticité totale d'un réseau est constante en tout noeud, sa matrice d'élasticité définit une liaison orthogonale.

Complexes de réseaux et produits

Un *complexe orthogonal* de réseaux est la donnée d'un ensemble de réseaux et d'une collection de liaisons orthogonales définies entre chaque paire de réseaux. On exige de plus que la donnée des représentations modales soient explicites et que les configurations correspondantes soient des inclusions. Dans ce cas, la recherche des caractéristiques modales du réseau résultant revient alors à la diagonalisation d'une matrice structurée en blocs diagonaux. Pour une telle matrice, il est possible d'utiliser un algorithme itératif de diagonalisation que l'on pourrait qualifier de "Jaccobi par blocs diagonaux" : ici l'idée encore est d'annihiler successivement, par des rotations, les liaisons, tout en conservant la forme diagonale par blocs.

Dans l'analyse des complexes orthogonaux, l'utilisation des données modales des composants permet de réduire la quantité de calcul. Cependant dans le cas général, l'analyse des perturbations sur chaque mode est difficile. Néanmoins, on peut avancer l'analyse mathématique dans le cas où l'assemblage comporte une certaine régularité / périodicité ; en particulier si toutes les sections (resp. liaisons) sont, à homothétie près, des exemplaires d'un même réseau (resp. liaison orthogonale), il est alors possible d'interpréter le schéma d'assemblage comme celui définissant l'interconnexion d'un second réseau. Ceci nous conduit à introduire les notions de produits et de L-produits de réseaux.

Le produit de deux réseaux admet une interprétation topologique simple : étant donné deux réseaux, dans l'un des deux, substituer à chaque masse un exemplaire de l'autre et à chaque liaison une liaison orthogonale canonique définie par celle-ci. Par exemple un réseau rectangulaire est le produit de deux réseaux linéiques. Avant de donner une définition plus précise, rappelons d'abord que le produit directe $A \otimes B$ de deux matrices est la matrice obtenue à partir de A en substituant à chaque coefficient A_{ij} le bloc $A_{ij} B$.

Définition 2 Soit τ_1 et τ_2 deux réseaux définis par les matrices (M_1, K_1) , (M_2, K_2) . Le *produit* de τ_1 et τ_2 est le réseau τ défini par les matrices (M, K) telles que

$$M = M_1 \otimes M_2$$

$$K = K_1 \otimes M_2 + M_1 \otimes K_2.$$

Les modes d'un produit s'expriment simplement en fonction de ceux des composants : les raideurs des modes s'ajoutent et les déformations sont telles que selon chacune des directions du produit les coupes se déforment, à homothétie près, selon une déformation de la structure transverse. La preuve découle de la relation matricielle $AB \otimes CD = (A \otimes C)(B \otimes D)$ (cf. [3]).

Proposition 2 Soit D_1 (resp. D_2) la matrice diagonale des modes et Q_1 (resp. Q_2) les matrices des déformées modales de τ_1 et τ_2 . Les caractéristiques modales du réseau produit sont données par les matrices

$$D = D_1 \otimes I_{n_2} + I_{n_1} \otimes D_2$$

$$Q = Q_1 \otimes Q_2.$$

Il est possible de généraliser la définition du produit et le résultat ci-dessus au cas où les liaisons \mathcal{L}_{ij} entre les sections i et j sont toutes des exemplaires d'une même liaison orthogonale \mathcal{L} . Soit donc \mathcal{L} une liaison orthogonale entre deux exemplaires de τ_1 . Le *L-produit* de deux réseaux τ_1 par τ_2 est le réseau obtenu à partir de τ_2 en substituant à chaque noeud, un exemplaire de τ_1 et à chaque liaison r la liaison orthogonale $r \cdot \mathcal{L}$.

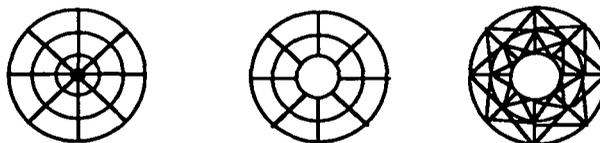


Figure 2 Exemples de complexes orthogonaux de réseaux obtenus à partir d'un chapelet circulaire. Le réseau du milieu est un produit et celui de droite un L-produit

Notons l_1, \dots, l_{n_1} les coefficients diagonaux de la matrice ${}^t Q_1 L Q_1$ et σ la somme des raideurs de liaisons arrivant en chaque noeud du réseau multipliés τ_1 . La proposition suivante exprime la relation existant entre les modes des différents réseaux.

Proposition 3 Si la somme des raideurs arrivant en tout noeud du réseau multiplicateur est une constante σ_2 , alors les modes du \mathcal{L} -produit vérifient

$$r_{ij} = r_{1i} + (\sigma - l_i) \sigma_2 + l_i r_{2j} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n_1 \text{ et } 1 \leq j \leq n_2 \text{ et}$$

$$Q = Q_2 \otimes Q_1.$$

La preuve est analogue à celle de la proposition précédente. Si la liaison est la liaison orthogonale canonique, on retrouve la proposition 2, avec une hypothèse supplémentaire sur τ_2 . Un autre cas particulier est lorsque τ_1 est un ensemble de masses à interconnexion nulle. Une liaison orthogonale est alors caractérisée par une matrice symétrique quelconque dont la somme des coefficients des lignes est constante ; on obtient alors un *grillage* qui est une sorte d'épaississement du réseau multiplicateur.

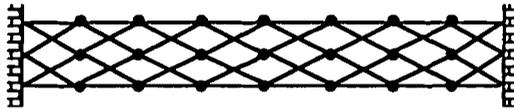


Figure 3 Exemple de grillage obtenu à partir d'un chapelet tendu

Géométrie dans les réseaux linéaires

Nous terminons cette communication par une discussion sur le problème de l'interprétation géométrique de la topologie d'interconnexion dans un réseau linéaire. Celui-ci fait l'objet d'une étude en cours, nous nous bornerons ici à son énoncé et à l'ébauche de quelques perspectives de recherche. Le problème se présente sous deux aspects complémentaires : d'une part, comment traduire les opérations géométriques naturelles comme une variation d'angle ou de distance pour les réseaux linéaires et d'autre part, selon quels critères évaluer la similitude entre un réseau linéaire et un objet homogène continu ? Cet objet étant un système mécanique abstrait possédant une forme spatiale dans un espace euclidien (il peut être matériellement non réalisable, par exemple une membrane non attachée). En d'autres termes, nous voulons disposer de critères permettant d'affirmer par exemple dans quelle mesure un réseau représente un triangle équilatéral, et, le cas échéant, savoir comment modifier naturellement ce réseau pour le transformer en triangle rectangle.

Dans un objet homogène, la répartition des éléments mécaniques est reliée à la forme géométrique de l'objet. Dans un réseau linéaire, la répartition des raideurs paraît le mieux adapté pour en extraire une information spatiale. Par exemple, pour que le réseau produit de deux chapelets linéaires ressemble à une membrane rectangulaire, il faut que le rapport entre les raideurs des deux chapelets soit inversement proportionnelle aux cotés. De telles situations nous conduisent à interpréter le rapport entre les raideurs comme un rapport des distances séparant les sommets. Cependant, la comparaison d'un réseau linéaire avec une variété plongée dans un espace euclidien est généralement délicate. Elle peut être faite dans une perspective géométrique aussi bien qu'acoustique ; naturellement, nous cherchons des critères de similitude qui concordent dans les deux cas. Introduisons les définitions suivantes :

Etant donné un réseau à masses unitaires $K = (r_{ij})$, une *représentation* de K dans une variété V est une application f associant à tout noeud de K un point de V telle que pour tout i, j , si $r_{ij} \neq 0$ alors $r_{ij} d(f(i), f(j)) = R$, où d désigne la distance (au sens géodésique) définie sur V et R une constante. Il est clair que dans ce cas les raideurs doivent vérifier une certaine relation traduisant l'inégalité triangulaire. Nous dirons aussi que la représentation f est *filtrante* si pour tout i, j, k , si $d(f(i), f(j)) \geq d(f(i), f(k))$ et $r_{ij} \neq 0$ alors $r_{ik} = 0$. Une représentation filtrante est généralement une meilleure approximation de V . Par exemple, dans la figure 6 la première représentation est filtrante mais la seconde ne l'est pas. Une représentation f est δ -saturée si toute disque de rayon δ de V contient l'image d'au moins un noeud et, de plus, pour tout i, j si $d(f(i), f(j)) < \delta$ alors $r_{ij} \neq 0$. Le rapport μ entre les raideurs minimum et maximum est également un facteur d'évaluation de la *finesse* d'une représentation. La formalisation mathématique de cette notion ainsi que l'appréciation de son incidence sur les problèmes évoqués plus haut sont en cours d'étude.

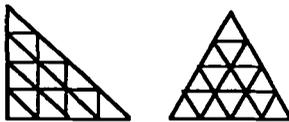


Figure 4 Dans le triangle rectangle, les raideurs parallèles à l'hypoténuse sont réduites de $\sqrt{2}$

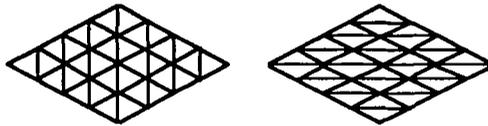


Figure 5 A gauche toutes les raideurs sont identiques tandis qu'à droite les diamètres sont réduits de $\sqrt{3}$

Références :

[1] CADOZ C. *Informatique et outil de création musicale*, Marysas N°7 - septembre 1988, pp 18-29
 [2] DJOHARIAN P. *Génération de modèles pour la synthèse modale*, Actes du colloque Modèles Physiques Grenoble septembre 1990 ; éditeur Maison des Sciences de l'Homme
 [3] LANCASTER P. *Theory of matrices*, Academic Press, 1969, New York