UNE SÉRIE INFINIE DE RÉSONATEURS PRÉSENTANT DES FRÉQUENCES DE RÉSONANCES HARMONIQUES

J.-P. DALMONT

Laboratoire d'Acoustique, CNRS URA 1101, Université du Maine, BP. 535, F-72017 Le Mans cedex, France

Abstract :

We present a family of resonators which have harmonic resonance frequencies but in which some resonances are missing. Each resonator is composed by a succession of N cylinders of the same length. The cross-section area of each cylinder is equal to $i(i+1)/2$ times the cross-section area of the first cylinder (for $i=1$ to N) and the last cylinder is open. All the resonance frequencies are harmonic with F_1 the lowest resonance frequency. However all multiples of $(N+1)F_1$ correspond to antiresonance frequencies.

I Introduction

Il est généralement admis que l'harmonicité des fréquences de résonance d'un résonateur est un élément essentiel de la conception d'un instrument à vent. Ceci pour deux raisons principales : d'une part le bon fonctionnement de ces instruments (problèmes d'émission) d'autre part la possibilité d'émettre plusieurs notes dans un rapport harmonique de la note fondamentale pour un même doigté (ou position).

Les seuls résonateurs connus présentant des résonances harmoniques sont le cylindre et le cône. Ceux-ci ont été largement utilisés dans la fabrication des instruments à vent. Il existe cependant une infinité de résonateurs ayant cette propriété et nous présentons ici une série infinie de ces résonateurs. Cette série qui a pour premier élément le cylindre converge vers le cône. Avant de présenter les éléments de cette série nous faisons quelques rappels sur le cylindre et le cône. Pour finir nous comparerons le cône tronqué aux éléments de la série. Précisons que dans cette étude il ne sera pas tenu compte des effets dissipatifs, ni des inductances de discontinuité et de rayonnement excepté pour le calcul des courbes d'impédance.

II Rappels

Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est la matrice de transfert pression débit d'un guide

d'onde fermé par une impédance nulle (espace infini en négligeant l'impédance de rayonnement) la condition de résonance à l'entrée du guide s'écrira $D = 0$ et la condition d'antirésonance s'écrira $B = 0$.

Ainsi pour un cylindre de longueur L et de section S_1 la matrice de transfert M_1 est égale à

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos kL & j \frac{\rho c}{S_1} \sin kL \\ j \frac{S_1}{\rho c} \sin kL & \cos kL \end{pmatrix} \quad \text{où } \rho c \text{ est l'impédance caractéristique de l'air}$$

La condition de résonance s'écrit alors $\cos kL = 0$, c.a.d $kL = \frac{\pi}{2} + m\pi$ avec $m \in \mathbb{N}$ et la condition d'antirésonance s'écrit $\sin kL = 0$, c.a.d $kL = m\pi$ avec $m \in \mathbb{N}$.

Pour un tronç de cône de longueur L , de section d'entrée S_e et de section de sortie S_s la matrice de transfert $M_{\text{cône}}$ s'écrit

$$M_{\text{cône}} = \sqrt{\frac{S_s}{S_e}} \begin{pmatrix} \cos kL - \frac{\sin kL}{kL'} & j \frac{\rho c}{S_s} \sin kL \\ j \frac{S_e}{\rho c} \left(\sin kL \left(1 + \frac{1}{k^2 L \ell} \right) + \cos kL \left(\frac{1}{kL'} - \frac{1}{k\ell} \right) \right) & \frac{S_e}{S_s} \left(\cos kL + \frac{\sin kL}{k\ell} \right) \end{pmatrix}$$

où $\ell = \sqrt{\frac{S_e}{S_s}} \times L$ est la longueur de la tronçature et $L' = L + \ell$ la longueur du cône complet.

En pratique le cône tronqué est le plus souvent complété par un volume V_{eq} égal au volume du cône manquant ($V_{\text{eq}} = S_e \ell / 3$).

La condition de résonance pour le tronç de cône s'écrit alors

$$\cos kL + \frac{\sin kL}{k\ell} = 0 \quad \text{c.a.d} \quad kL + \text{Arctg} k\ell = m\pi \quad m \in \mathbb{N}$$

On obtient alors une série de résonances inharmoniques ceci d'autant plus que kL est grand devant l'unité.

III Description de la série des résonateurs harmoniques :

Chaque N ième élément de la série se compose d'une suite de N cylindres de longueurs ℓ identiques et de sections différentes.

La section S_1 de chaque i ème cylindre est liée à la section S_1 du premier cylindre (section d'entrée du guide) par la relation

$$S_i = \frac{i(i+1)}{2} S_1$$

Chaque élément de la série peut ainsi être considéré comme une prolongation du précédent, le premier élément ($N=1$) étant un cylindre unique et le dernier ($N = \infty$) un cône complet.

La matrice de transfert M_N de chaque N ème élément est donc égale à

$$M_N = \prod_{i=1}^{i=N} \begin{pmatrix} \cos kL & j \frac{\rho C}{S_1} \sin k\ell \\ j \frac{1}{\rho C} \sin k\ell & \cos k\ell \end{pmatrix}$$

On démontre aisément (par récurrence) que cette matrice peut s'écrire

$$M_N = \sqrt{\frac{S_s}{S_e}} \begin{pmatrix} \cos kL - \frac{\sin kL}{(N+1) \operatorname{tg} k\ell} & j \frac{\rho C}{S_s} \sin kL \\ j \frac{S_e}{\rho C} \left(\sin kL \left(1 + \frac{1}{(N+1) \operatorname{tg}^2 k\ell} \right) \right) + \cos kL \left(\frac{1}{(N+1) \operatorname{tg} k\ell} - \frac{1}{\operatorname{tg} k\ell} \right) & \frac{S_e}{S_s} \left(\cos kL + \frac{\sin kL}{\operatorname{tg} k\ell} \right) \end{pmatrix}$$

avec $S_e = \frac{S_1}{2}$, $S_s = \frac{(N+1)^2}{2} S_1$, $L = N\ell$ et $L' = L + \ell$

On remarque que cette matrice est en tout point identique à celle d'un cône tronqué de longueur L , de rayon d'entrée S_e et de rayon de sortie S_s avec $\operatorname{tg} k\ell$ à la place de $k\ell$ et par voie de conséquence $(N+1) \operatorname{tg} k\ell$ à la place de kL' . Les résonateurs sont donc équivalents à des troncs de cône quelque soit N à condition que $k\ell$ soit petit devant l'unité mais ont l'avantage (contrairement au tronc de cône) d'avoir des résonances parfaitement harmoniques, puisque la condition de résonance s'écrit ici

$$\cos kL + \frac{\sin kL}{\operatorname{tg} k\ell} = \frac{\sin(N+1)k\ell}{\sin k\ell} = 0$$

c.a.d $(N+1)k\ell = m\pi$ avec $m \in \mathbb{N}$ mais m non multiple de $N+1$

Ces résonateurs ont donc la particularité étonnante d'avoir une série de résonances harmoniques dans laquelle les résonances multiples de $N+1$ sont absentes. On retrouve ici le fait que pour le cylindre ($N=1$) les fréquences de résonance paires sont absentes. Pour deux cylindres successifs de sections S_1 et $3S_1$ ce sont les fréquences multiples de 3 qui sont absentes etc...

Pour ce qui est des antirésonances tous les résonateurs obéissent à la même loi $\sin kL = 0$ où L est la longueur totale du guide.

Nous présentons dans la figure suivante les impédances d'entrées de 5 éléments de la série de même longueur totale et de même section S_e ($N = 1, 2, 3, 4$ et $N = 9$) ainsi que l'impédance d'entrée d'un tronc cône équivalent (avec volume équivalent) au cas $N = 9$.

Impédance d'entrée en dB de cinq résonateurs à résonances et antirésonances harmoniques composés respectivement de 1, 2, 3, 4 et 9 cylindres et impédance d'entrée d'un cône équivalent aux basses fréquences à un résonateur composé de 9 cylindres.