

ANALYSE VIBRATOIRE DES TREILLIS DE POUTRES EN MOYENNE HAUTE FRÉQUENCE

F. Delattre, M. Gotteland

► **To cite this version:**

F. Delattre, M. Gotteland. ANALYSE VIBRATOIRE DES TREILLIS DE POUTRES EN MOYENNE HAUTE FRÉQUENCE. Journal de Physique IV Colloque, 1992, 02 (C1), pp.C1-883-C1-886. <10.1051/jp4:19921192>. <jpa-00251157>

HAL Id: jpa-00251157

<https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00251157>

Submitted on 1 Jan 1992

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANALYSE VIBRATOIRE DES TREILLIS DE POUTRES EN MOYENNE ET HAUTE FRÉQUENCE

F. DELATTRE et M. GOTTELAND

Laboratoire des Vibrations et d'Acoustique, Bât 303, INSA Lyon, 20 Avenue A. Einstein, F-69621 Villeurbanne cedex, France

A new method for vibration analysis of trusses at medium and high frequencies was shown by Girard in [1]; the analytical hypothesis lead to interesting numerical results with a bidimensional truss excited with pure bending and longitudinal waves. Our work consists in clarifying on the physical hypothesis in this approach; by mean of choosing an adequate formulation, we show new expressions of the basic smoothed frequency responses of a beam and we extend the formulation by including the effects of transient displacements and rotary inertia. Numerical experiments are in good agreement with Girard's results.

1. Rappel de la formulation de GIRARD [1].

Dans la continuité des travaux de Skudrzyk [2], Girard et Defosse établissent les expressions des transferts lissés ponctuels et non ponctuels pour des éléments barre et poutre; ils définissent ainsi les matrices d'impédance élémentaires lissées et la matrice assemblée lissée $\bar{Z}(\omega)$ à partir de la matrice d'impédance complète $Z(\omega)$ pour des treillis:

$$Z(\omega) q = f \quad , \quad q \text{ vecteur des déplacements } , f \text{ vecteur des efforts} \quad (1a)$$

$$\bar{Z}(\omega) q = f \quad (1b)$$

A partir d'une analyse de comportement asymptotique à haute fréquence des impédances élémentaires, une technique de résolution approchée de (1b) est proposée qui fait apparaître la somme sur les chemins structuraux dans la solution en admittance $\bar{Y}_{i,j}$:

$$\bar{Y}_{i,j} = \sum Z_{i,i}^{-1} Z_{i,P1} Z_{P1,P1}^{-1} \cdots Z_{Pk,Pk}^{-1} Z_{Pk,j} Z_{j,j}^{-1} \quad (2)$$

La solution ainsi construite sur des treillis apparait comme le prolongement en moyenne et basse fréquence de la solution asymptotique.

2. Justification théorique.

2.1. Approche par développement des déterminants.

Dans notre application, les éléments de (1a) et (1b) sont des scalaires complexes; nous décrivons un treillis unidimensionnel de barres excitées en traction compression; nous cherchons à calculer:

$$Y_{i,j}(\omega) = \frac{\text{cof}_{i,j}(K)}{\Delta} = (Z^{-1})_{h,j} \quad (3)$$

où: Z est la matrice (1a)

$\text{cof}_{i,j}(Z)$ est le cofacteur de la matrice (1a) pour le terme i,j ,

Δ est le déterminant de la matrice (1a),

Nous développons le déterminant du cofacteur en éliminant symétriquement les lignes et les colonnes:

$$\frac{\text{cof}_{i,j}(K)}{\Delta} = Z_{i,j} \frac{\Delta^{i,j}}{\Delta} + \sum_{\substack{P1=1 \\ P1 \neq i,j}}^N Z_{i,P1} Z_{P1,j} \frac{\Delta^{i,P1,j}}{\Delta} + \dots + \sum_{\substack{P1=1 \\ P1 \neq i,j}}^N \dots \sum_{\substack{Pk=1 \\ Pk \neq i,j \\ Pk \neq P1 \\ \vdots \\ Pk \neq Pk-1}}^N Z_{i,P1} \dots Z_{Pk-1,Pk} Z_{Pk,j} \frac{\Delta^{i,P1,\dots,Pk,j}}{\Delta} \\ + \dots + \sum_{\substack{P1=1 \\ P1 \neq i,j}}^N \dots \sum_{\substack{PN-2=1 \\ PN-2 \neq i,j \\ PN-2 \neq P1 \\ \vdots \\ PN-2 \neq PN-3}}^N Z_{i,P1} \dots Z_{PN-3,PN-2} Z_{PN-2,j} \frac{1}{\Delta} \tag{4}$$

où: $\Delta^{i,P1\dots Pk,j}$ est le déterminant de la matrice (1a) dont les lignes et les colonnes $i,P1\dots Pk,j$ ont été symétriquement supprimées, les ensembles de noeuds $\{i,P1\dots Pk,j\}$ sont des chemins directs de la structure dont les contributions sont non-nulles si des éléments matriciels lient les noeuds consécutifs qui les constituent.

Après renumérotation, les quotients $\frac{\Delta^{i,P1,\dots,Pk,j}}{\Delta}$ peuvent s'écrire comme le rapport:

$$\frac{\Delta^{i,P1,\dots,Pk,j}}{\Delta} = \frac{\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} A & C \\ C^t & B \end{bmatrix}} = \frac{\det[A]}{\det[A] \det[B] \det[I - B^{-1}C^tA^{-1}C]}$$

où: B est la matrice d'impédance de l'ensemble de noeuds $\{i,P1\dots Pk,j\}$,
 A est la matrice d'impédance de l'ensemble complémentaire,
 C et C^t sont les matrices d'impédance des ensembles croisés.

La matrice d'impédance (1a) est à diagonale dominante lorsque la pulsation devient importante; le terme $B^{-1}C^tA^{-1}C$ pourra être négligé et le déterminant de la matrice B réduit au produit des termes de la diagonale; nous obtenons:

$$\frac{\Delta^{i,P1,\dots,Pk,j}}{\Delta} = \frac{1}{Z_{i,i} Z_{P1,P1} \dots Z_{Pk,Pk} Z_{j,j}} \tag{5}$$

Nous reportons l'expression (5) dans la solution (4); nous obtenons directement l'expression de lissage de Girard (2).

2.2. Approche par une méthode itérative.

D'autres méthodes matricielles permettent d'étendre ce raisonnement au cas bloc matriciel. Dans [3], Couot écrit:

$$Z^{-1}(\omega) = (D - T - R)^{-1} = (I - (D - T)^{-1} R)^{-1} (D - T)^{-1} \tag{6}$$

où: D est une matrice bloc diagonale,
 T est la matrice bloc triangulaire supérieure,
 R est la matrice bloc triangulaire inférieure,
 I est la matrice identité.

L'hypothèse de lissage, exprimée par la condition

$$\| (D - T)^{-1} R \| < 1$$

permet de réduire l'équation (6) à:

$$\bar{Z}^{-1}(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} (D^{-1} T)^k D^{-1} \tag{7}$$

Les chemins structuraux directs apparaissent dans (7) avec l'élimination de la matrice triangulaire inférieure et une renumérotation adéquate des noeuds.

2.3. Conclusion.

Nous avons montré le lien entre l'assemblage complet et l'assemblage lissé des matrices d'impédance. Nous voyons que les deux hypothèses de lissage nécessaires à l'obtention de l'algorithme de résolution partielle de Girard imposent à (1a) d'être à diagonale dominante, ce qui est obtenu à haute fréquence; nous proposons maintenant une autre approche où le concept asymptotique est modifié.

3. Base d'onde propagative.

3.1. Rappels.

Nous avons décrit le lissage fréquentiel avec une méthode d'assemblage d'impédances; d'autres méthodes d'étude des treillis utilisent des ondes propagatives et évanescentes comme fonctions de forme des éléments dynamiques; cette approche apparaît nécessaire pour généraliser la méthode Girard-Defosse. Nous pouvons construire la solution de l'équation de propagation grâce à l'écriture matricielle suivante:

$$(8a) \quad \begin{Bmatrix} f \\ q \end{Bmatrix} (x) = \begin{bmatrix} F^+ & F^- \\ Q^+ & Q^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a^+ \\ a^- \end{Bmatrix} (x) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a^+(L) = [\exp -jKL] a^+(0) \\ a^-(L) = [\exp jKL] a^-(0) \end{cases} \quad (8b)$$

où (a^+, a^-) forme la base de solutions générales, regroupées par sens de propagation, des équations aux dérivées partielles de la poutre. Les relations entre les éléments de cette base et les grandeurs force et déplacement (f, q) sont déduites des relations d'état. Cette matrice (8a) est utilisée par Mace [4]. Dans ce formalisme, Von Flotow [5] décrit une jonction de poutres et l'assemblage complet d'un treillis par construction d'une matrice de diffraction; nous proposons une jonction simplifiée et l'assemblage du treillis par matrice de transfert en utilisant le concept haute fréquence de l'approche par matrice d'impédance.

3.2. Application au lissage fréquentiel

Notre modèle de jonction est représenté figure 1; nous privilégions la propagation en considérant une jonction équivalente à la jonction réelle par le remplacement des poutres connectées par des poutres de même caractéristiques sauf leur longueur portée à l'infini. L'approximation haute fréquence est ainsi exprimée par une condition de Sommerfeld; en explicitant la relation entre l'onde incidente à la jonction et l'onde transmise au travers, nous obtenons:

$$|a_{h+1}^+ = S_{k,h+1} |a_h^+ \quad \text{avec:} \quad S_{k,h+1} = Q_{h+1}^{+1} \left\{ Z_h - \sum_{m=1}^{N_k} Z_m^+ \right\}^{-1} \{ Z_h - Z_h^+ \} Q_h^+ \quad (9)$$

$$Z_h = \frac{1}{j\omega} F_h Q_h^{-1}, \quad Z_h^+ = \frac{1}{j\omega} F_h^+ Q_h^{+1}$$

$S_{k,h+1}$ est interprétée comme étant la matrice de diffraction de l'onde au travers de la jonction k dans la poutre $h+1$, Z_h^+ étant l'impédance caractéristique de la poutre h .

Si nous considérons un chemin structural non bouclé constitué de jonctions reliées par des poutres, il devient possible d'assembler par produits alternés les expressions (8b) et (9); elles caractérisent respectivement le transport de l'onde et sa diffraction; la prise en compte du type d'excitation au noeud source et de la condition à la limite supportée par le noeud de réponse permet d'obtenir des expressions d'assemblage lissées identiques à celles de Girard au prix du changement de notations suivant:

$$Z_{k-1,k} = \{ Z_h - Z_h^+ \} Q_h^+ [\exp -jK_h L_h] Q_h^{+1} \quad \text{et} \quad Z_{k,k} = Z_h - \sum_{m=1}^{N_k} Z_m^+$$

où: $Z_{k-1,k}$ est l'impédance non ponctuelle de la poutre h connectée aux noeuds $k-1$ et k ,

$Z_{k,k}$ est la somme des impédances ponctuelles des poutres connectées au noeud k

Nous en déduisons une expression matricielle des transferts de base de la poutre:

$$\text{Impédance ponctuelle lissée de la poutre:} \quad \bar{Z}_h = \frac{1}{j\omega} F_h^+ Q_h^{+1}$$

$$\text{Transmissibilité lissée de la poutre:} \quad \bar{T}_h = (I - Z_h^{-1} Z_h^+) Q_h^+ [\exp -jK_h L_h] Q_h^{+1}$$

4. Application.

Dans un premier temps, nous vérifions que l'application des formules précédents à la poutre excitée en flexion pure et en traction compression restitue les résultats de Girard; nous justifions l'approximation qui

ôte la contribution des nombres d'onde évanescents dans la transmissibilité; ensuite, nous précisons la description de la poutre en choisissant un champ de déplacement avec cisaillement et un champ de contraintes équilibré avec l'inertie de rotation; les transmissibilités de base sont représentées sur la figure 3, les expressions complètes provenant de Koloutek [6]. Nous vérifions la validité du comportement du transfert lissé avec l'approximation haute fréquence; ces expressions sont introduites dans le logiciel développé autour de la formule d'assemblage de Girard; le cas test de la figure 2 utilisé par Girard est calculé et représenté figure 4; les résultats sont identiques en basse fréquence à ceux exposés dans [1]; ils montrent le lissage en moyenne et haute fréquence du transfert complet du treillis.

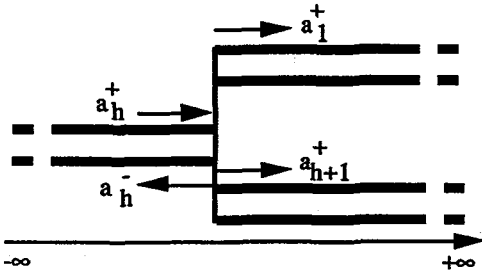


Fig. 1. - Jonction de poutres semi-infinies

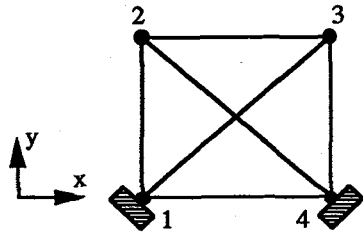


Fig. 2. - Treillis bidimensionnel de poutres $L_{1,4}=L_{1,2}=1$, $m=7,8$ Kg/m, $c=5000$ m/s, $EI=656$, section circulaire de $1E-3$ m².

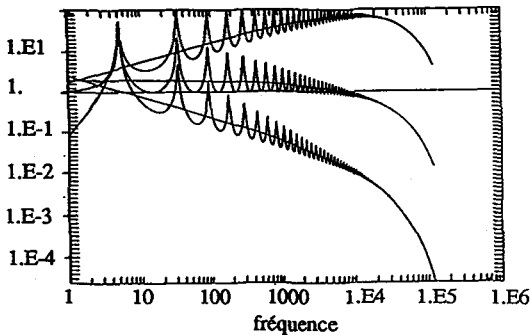


Fig. 3. - Transmissibilité de poutre en flexion

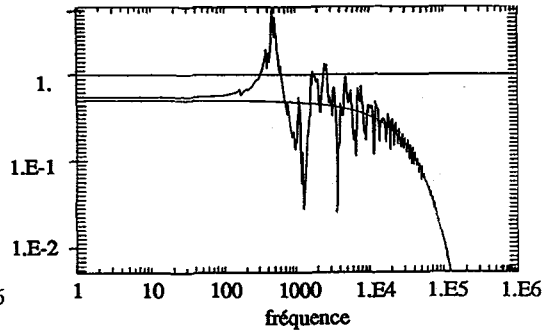


Fig. 4. - Transmissibilité $T_{1x,3x}$

5. Conclusions.

Nous avons montré qu'un raisonnement matriciel fondé sur une diagonale dominante permet de retrouver les formules de Girard; avec une formulation ondulatoire, nous avons ensuite développé une formulation matricielle ne recourant plus au comportement asymptotique à haute fréquence des transferts de base; cette approche permet d'étendre la formulation initiale à des jonctions de poutres plus complexes.

Ce travail est soutenu par la société INTESPACE et le CERDAN; nous remercions MM. Girard, Aquilina et Couot pour leurs collaborations dans le cadre du contrat D.R.E.T. n°89.520.

- [1] A. Girard et H. Defosse 1990 *Journal of Sound and Vibration* **137** (1), 53-58. Frequency response smoothing, matrix assembly and structural paths: a new approach for structural dynamics up to high frequencies.
- [2] E. Skudrzyk 1980 *Journal of the Acoustical Society of America* **67** (4), 1105-1135. The mean-value method of predicting the dynamic response of complex vibrators.
- [3] J. Couot 1991 *Document INTESPACE DO91.121 EI/ED* contribution à: Analyse des structures par lissage fréquentiel - rapport de phase 1.
- [4] B. R. Mace 1984 *Journal of Sound and Vibration* **97** (2), 237-246. Wave reflection and transmission in beams.
- [5] D. W. Müller et A. von Flotow 1989 *Journal of Sound and Vibration* **128**(1), 145-162. A travelling wave approach to power flow in structural networks.
- [6] V. Kolousek 1973 *Dynamics in engineering structures* Butterworth.