CAD D'INSTRUMENTS À VENT I : DISCRÉTISATION EN TUYAUX EXPONENTIELS**L. JORDI et A. BARJAU***Dep. d'Enginyeria Mecànica, E.T.S.E.I.B., Diagonal 647, SP-08028 Barcelona, Spain***RÉSUMÉ**

Le CAD des instruments à vent est surtout basé sur le calcul de l'impédance du tuyau. Pour un instrument quelconque le profil intérieur est très changeant, ce qui empêche toute étude analytique. La façon habituelle de procéder c'est de discrétiser le tuyau en des morceaux dont la géométrie soit suffisamment simple comme pour accepter des ondes uniparamétriques dans son intérieur. Les deux géométries qui permettent cette approximation sont celle du cylindre et celle du cône.

Pour le cas d'un instrument à vent avec un pavillon qui s'ouvre très rapidement, la discrétisation de celui-ci en morceaux coniques rend le calcul de l'impédance assez long (car il faut un très grand nombre d'éléments discrets).

Dans ce papier on présente l'utilisation d'un troisième type d'élément discret, l'élément exponentiel, qui peut être traité à l'aide de l'équation de Webster (équation approximée qui accepte une solution uniparamétrique exacte pour le profil exponentiel).

ABSTRACT

The CAD of woodwinds is usually based upon the calculation of the bore impedance. For an arbitrary instrument, the internal geometry is not simple and thus it is not possible to analytically calculate that impedance. The usual approach consists on a discretization of the bore in short spans of simple geometry in which uniparametric waves can be considered. The two simple geometries which satisfy this condition are the cylindrical and the conical one.

Whenever the instrument ends with a bell with high flare, such a discretization causes an important increase of the computing time (as a high number of discrete elements are required).

In this paper a third kind of discrete element is presented: the exponential element. Such geometry can be studied through the Webster's equation (an approximated equation which accepts an exact uniparametric solution for an exponential profile).

INTRODUCTION

Le CAD des instruments à vent est surtout basé sur le calcul de l'impédance du tuyau [1][2] quoique des aspects de son fonctionnement soient plus visibles dans la réponse impulsionnelle. Pour un instrument quelconque le profil intérieur est très changeant, ce qui empêche toute étude analytique. La façon habituelle de procéder c'est de discrétiser le tuyau en des morceaux dont la géométrie soit suffisamment simple comme pour accepter des ondes uniparamétriques dans son intérieur. Les deux géométries qui permettent cette approximation sont celle du cylindre et celle du cône.

Pour le cas d'un instrument à vent avec un pavillon qui s'ouvre très rapidement, la discrétisation de celui-ci en morceaux coniques présente deux inconvénients assez importants: d'une part il faut considérer un grand nombre de morceaux, ce qui rend le calcul de l'impédance assez long; d'autre part, la réponse impulsionnelle devient très peu claire à cause des réflexions associées aux changes de conicité que l'on introduit dans la discrétisation.

Dans ce papier on considère l'utilisation d'un troisième type d'élément discret: l'élément exponentiel. Quoiqu'il n'existe pas une solution uniparamétrique exacte de l'équation d'onde dans ce cas, on peut utiliser celle de l'équation de Webster (équation approximée qui accepte une solution uniparamétrique exacte pour les profils exponentiels).

CALCUL DE L'IMPÉDANCE

Pour calculer l'impédance d'entrée d'un instrument à vent il faut d'abord le modéliser comme une succession d'éléments discrets. Pour un instrument sans trous latéraux, il s'agit simplement d'un ensemble d'éléments connectés en série. L'existence de trous latéraux peut se modéliser par des éléments connectés en T. La propagation d'ondes dans l'intérieur des éléments peut se décrire par une matrice de transfert.

Pour obtenir l'impédance d'entrée à l'aide des matrices de transfert il faut modéliser les conditions de contour (pression et vitesse) qui se trouvent au bout de l'instrument ainsi que celles du bout des trous. Le rapport entre ces deux grandeurs a été étudié pour le cas d'un tuyau cylindrique qui s'ouvre dans un plan infini [3] et qui s'ouvre dans un espace vide [4]. En fait, les conditions de contour réelles dans un instrument ne correspondent pas exactement à ces deux cas. Pour le cas d'instruments avec un pavillon qui s'ouvre très rapidement, la condition de contour est proche de celle du plan infini. Pour les trous, la condition est intermédiaire entre celle de plan infini et celle sans plan. De toutes façons, les différences entre l'utilisation d'une ou d'une autre condition sont négligibles. Dans les calculs qu'on présentera dans ce papier, on a choisi celle de plan infini pour le bout de l'instrument et celui des trous ouverts. Les trous fermés sont traités comme des tuyaux avec une admittance nulle dans son extrémité.

Les matrices de transfert pour les tuyaux cylindriques et coniques (Fig.1), obtenues à partir de l'équation d'onde exacte sous l'hypothèse de friction nulle, sont:

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 L) & jY_2 \sin(k_0 L) \\ \frac{j}{Y_2} \sin(k_0 L) & \cos(k_0 L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{cylindrique})$$

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_1}{r_2} \cos(k_0 L) - \frac{1}{k_0 r_2} \sin(k_0 L) & jY_2 \frac{r_1}{r_2} \sin(k_0 L) \\ \frac{j}{Y_2} \frac{r_1}{r_2} \left(1 + \frac{1}{k_0^2 r_1^2}\right) \sin(k_0 L) - \frac{j}{k_0 r_1} \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \cos(k_0 L) & \frac{1}{k_0 r_2} \sin(k_0 L) + \frac{r_1}{r_2} \cos(k_0 L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{conique})$$

où k_0 est le numéro d'onde, Y_2 est l'admittance à la section 2 et les coordonnées r_1 , r_2 , L sont définies à la Fig.1.

Fig.1 Coordonnées pour un tuyau cylindrique et un tuyau conique.

Pour les tuyaux exponentiels, dont le profil est décrit par l'équation de la Fig.2, l'équation de Webster et l'hypothèse de friction nulle conduisent à:

$$\begin{Bmatrix} p_0 \\ u_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{mL} \left\{ \cos(k'L) - \frac{m}{k'} \sin(k'L) \right\} & j e^{-mL} \frac{k_0}{k'} Y_0 \sin(k'L) \\ \frac{j}{Y_0} e^{mL} \frac{k_0}{k'} \sin(k'L) & e^{-mL} \left\{ \frac{m}{k'} \sin(k'L) + \cos(k'L) \right\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_L \\ u_L \end{Bmatrix} \quad (\text{exponentiel})$$

où $k' = [k_0^2 - m^2]^{1/2}$ et la coordonnée L est définie dans la Fig.2.

Fig.2 Coordonnées pour un tuyau exponentiel.

Pour un tuyau sans trous avec N éléments discrets, la matrice de transfert globale n'est que le produit des matrices élémentaires:

$$[T_{\text{globale}}] = \prod_{i=1}^N [T_i]$$

L'existence d'un trou entre deux éléments (Fig.3) peut s'ajouter au calcul à l'aide de l'équation de continuité du débit et de la pression:

Fig.3 Trou en parallèle avec un tuyau conique.

$$u_2 = u_{\text{trou}} + u_1 \quad ; \quad p_2 = p_{\text{trou}} = p_1$$

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_{\text{trou}} & Y_{\text{trou}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{Bmatrix}$$

où p_1 , u_1 sont la pression et le débit à la section S_t (Fig.3) s'il n'y avait pas de trou et p_2 , u_2 sont la pression et débit à S_t quand l'effet du trou a été considéré; S_{trou} est la section définie à la Fig.3 et Y_{trou} est l'admittance dans cette section (qui est calculée à l'aide de la matrice de transfert du trou).

MODÉLISATION DE LA FRICTION

À partir des ondes propagatives de pression et débit vers la droite et vers la gauche (p_- , u_- et p_+ , u_+), on peut incorporer les effets de la friction d'une façon simple[5]:

$$\begin{aligned} p_-^{\zeta}(L) &= e^{-\zeta L} p_-(L) & ; & & u_-^{\zeta}(L) &= e^{-\zeta L} u_-(L) \\ p_+^{\zeta}(L) &= e^{+\zeta L} p_+(L) & ; & & u_+^{\zeta}(L) &= e^{+\zeta L} u_+(L) \end{aligned}$$

où L est la coordonnée axiale du tuyau.

Le coefficient de friction ζ est défini de façon qu'il corresponde à celui de Nederveen [6]:

$$\zeta = (1 + j) \zeta_0 \frac{\sqrt{k}}{c D_m}$$

où c est la vitesse du son, D_m est le diamètre moyen entre les deux sections, et la valeur de ζ_0 dépend de la viscosité de l'air, de la conductivité des parois... Cette valeur peut être estimée, pour chaque géométrie simple (cylindrique, conique, exponentielle) à partir de la comparaison de la hauteur des pics d'impédance expérimentaux et calculés.

Les matrices de transfert élémentaires deviennent dans ce cas:

$$[T_{\zeta}] = \begin{bmatrix} \cosh(\zeta L) \cos(\zeta L) + \sinh(\zeta L) \sin(\zeta L) & -\frac{1}{Y_0} \{ \sinh(\zeta L) \cos(\zeta L) + \cosh(\zeta L) \sin(\zeta L) \} \\ -Y_0 \{ \sinh(\zeta L) \cos(\zeta L) + \cosh(\zeta L) \sin(\zeta L) \} & \cosh(\zeta L) \cos(\zeta L) - \sinh(\zeta L) \sin(\zeta L) \end{bmatrix} [T]$$

RÉSULTATS

L'impédance du tuyau exponentiel de la Fig.4 a été calculé comme un seul élément discret exponentiel et comme succession de plusieurs éléments coniques. Les Figs.5a, 5b, 5c montrent les résultats (fréquence des pics d'impédance) pour le cas exponentiel et le cas conique avec huit et vingt éléments. Pour avoir des résultats pareils avec les deux méthodes, il faut un minimum de vingt éléments coniques, ce qui rend le calcul très long.

$$\begin{aligned} y(0) &= 25 \text{ mm} \\ y(L) &= 130 \text{ mm} \\ L &= 260 \text{ mm} \\ m &= 6.34 \text{ mm}^{-1} \end{aligned}$$

Fig.4 Tuyau exponentiel calculé.

Fig.5 Impédance du tuyau de la Fig.4 discretisé comme
(a) un élément discret exponentiel
(b) huit éléments coniques
(c) vingt éléments coniques

REFERENCES

- /1/ Barjau, A., Martínez, J., Agulló, J. (1989). "Reed woodwinds redesign. A CAD approach", *Proceedings of the 13th ICA*, Belgrade, pp. 95-98.
- /2/ Keefe, D.H. (1988). "Woodwinds design algorithms to achieve desired tuning", *Proceedings of the 113th ASA meeting*, Seattle.
- /3/ Morse, P.M. (1948). "Plane waves of sound", *Vibration and Sound*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, pp.217-293.
- /4/ Levine, H., Schwinger, J. (1948). "On the radiation of sound from an unflanged circular pipe", *Physical Review*, 73(4), pp.383-406.
- /5/ Cardona, S. (1980). "Contribució a l'estudi de l'acústica de la tenora", *Thèse doctorale*, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Espagne.
- /6/ Nederveen, C.J. (1969). "Acoustical aspects of woodwind instruments", *Thèse doctorale*, Frits Knuf, Amsterdam, Chap.3.