ANALYSE DU CHAMP ACOUSTIQUE

H. Mermoz

► **To cite this version:**

H. Mermoz. ANALYSE DU CHAMP ACOUSTIQUE. Journal de Physique IV Proceedings, 1992, 02 (C1), pp.C1-19-C1-26. 10.1051/jp4:1992103 . jpa-00251045

HAL Id: jpa-00251045

<https://hal.science/jpa-00251045>

Submitted on 1 Jan 1992

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANALYSE DU CHAMP ACOUSTIQUE

H. MERMOZ

582 Chemin de la Calade, F-83140 Six-Fours, France

RESUME

Les questions auxquelles cet exposé s'efforce de répondre sont:

- Comment peut-on exploiter au mieux une antenne de réception "multi-capteur" pour analyser la structure du champ acoustique qui l'enveloppe, et ceci avec le minimum d'hypothèses préalables?
- Jusqu'où peut-on aller dans la finesse de cette description? D'une autre façon, combien peut-on y consacrer de paramètres libres qui soient calculables à partir des mesures faites aux sorties des capteurs?

Ce type d'approche dérive progressivement des utilisations classiques des antennes de détection dans lesquelles la structure du champ est plus ou moins restreinte à un modèle *a priori*. Il s'agit de s'affranchir de ces contraintes autant que le permettent la complexité du champ analysé et la capacité de l'antenne à y faire face. Cet exposé reste général et cherche à dégager le sens physique des relations proposées. Les problèmes d'algorithmes ne sont pas abordés.

ABSTRACT

The questions to which this paper attempts to answer are:

- How to make the best use of a multi-sensor receiving array in order to analyze the structure of the surrounding acoustic field, using as few *a priori* hypotheses as possible?
- What is the finest structure which can be described? Or, in another way, how many independent parameters, computed using data issued from acoustical sensors, can be used?

This kind of approach progressively comes from the classical use of detection arrays in which the field structure is more or less restricted to an *a priori* model. The main goal will be to avoid these constraints as far as the analyzed field structure complexity and the array ability to face the problem are concerned. This paper remains general and aims at defining the physical meaning of the proposed relationships. The problems related to the implementation of the algorithms are not considered herein.

1- Evolution du traitement spatial

Pour analyser la structure d'un champ acoustique, dans un milieu complexe et sans faire d'hypothèses préalables, on le mesure en plusieurs points, aussi nombreux que possible, sur le plus grand espace possible. On utilise donc des capteurs séparément accessibles. A des fréquences, en gros, inférieures à 10 kHz, il est possible de disposer de capteurs très petits, devant la longueur d'onde, qui se comportent comme des filtres passe-tout dans une bande assez large, avec le même facteur de transfert. Ceci permet de parler de front d'onde sans préciser si c'est le vrai, celui des pressions acoustiques sur des capteurs, ou sa traduction électrique fidèle aux sorties de ceux-ci.

On bâtit donc une antenne de réception, de préférence ni linéaire, ni même plane pour éviter les ambiguïtés de symétrie. On admettra que l'échantillonnage spatial est convenable, c'est-à-dire que la distance entre un capteur et ses plus proches voisins est environ la moitié de la plus petite longueur d'onde opérationnelle; dès lors augmenter les dimensions de l'antenne équivaut à augmenter le nombre de capteurs.

C'est bien ce genre d'antenne, à géométrie connue, qu'on met en place pour faire, par exemple, un réseau fixe de surveillance dans l'océan. Dans ce genre d'utilisation, on cherche à détecter et à localiser des sources généralement éloignées. On parle peu d'analyse "désintéressée" du champ acoustique. C'est parce qu'on a formé des combinaisons de capteurs qui sont les meilleures, si on admet certaines structures du champ postulées a priori.

En réalité la plus belle antenne du monde ne peut, à elle seule, donner qu'une image de la structure du champ. Lorsqu'on lui fait dire plus, c'est à travers des hypothèses simplificatrices concernant cette structure elle-même, et / ou les conditions de propagation dans le milieu. Cet exposé cherche à illustrer comment, à mesure qu'on essaye de se libérer des contraintes liées à ces hypothèses, on voit se rapprocher, d'une part les méthodes de détection, et d'autre part, l'analyse expérimentale de la structure du champ, avec toute la capacité de description permise par l'antenne. La finalité opérationnelle, c'est-à-dire la description de l'espace des sources ne vient qu'après cette analyse avec laquelle elle doit être compatible. Seule l'analyse du champ est ici considérée.

Le plus ancien et le plus connu des faisceaux d'hypothèses qui dispense en fait de cette analyse est le concept de directivité. Selon ce concept, on forme des combinaisons de capteurs qui privilégient une onde plane (dotée d'une direction), supposée pouvoir transporter une information utile, par rapport à une structure de bruit parasite très rigidement déterminée. En effet, lorsqu'on veut que le classique facteur de directivité représente un gain d'antenne, sa définition même exige:

- que le milieu soit isotrope,
- que la totalité du parasite puisse être décrite comme une infinité d'ondes planes venant de toutes les directions, transportant la même densité spectrale et surtout non corrélées d'une direction à l'autre, même infiniment voisines.

Sous ces contraintes, il n'est pas nécessaire d'analyser la structure du champ (utile ou parasite) puisqu'il est décrit par le modèle. Il suffit que la combinaison choisie maximalise le facteur de directivité qui devient un rapport signal / bruit. On sait également que ce concept intègre mal la notion de "brouilleur", source parasite localisée.

Il a fallu trouver autre chose. Une première étape a consisté à renoncer à toute hypothèse sur la structure spatiale du parasite, et la prendre telle qu'elle est sur l'antenne. La théorie permet en effet de définir, en fonction de cette structure, la bonne combinaison de capteurs qui privilégie le signal utile porté par une onde plane de direction donnée. On peut même généraliser assez facilement à un "front d'onde signal" quelconque (sphérique ou autre) mais connu a priori. L'outil de description du parasite est l'ensemble des mesures d'auto-intercorrélation (ou des auto-interspectres équivalents) entre tous les capteurs pris deux à deux. C'est avec cet outil, intrinsèquement matriciel, qu'on "fabrique" la bonne combinaison de capteurs. Mais la notion de corrélation est liée à celle de processus stationnaire auquel la nature n'est pas tenue de se soumettre. En pratique cela signifie que les mesures faites entre les capteurs n'ont pas une valeur éternelle, mais limitée à une tranche temporelle résultant d'un compromis: assez longue pour que les moyennes temporelles liées à la corrélation garde le sens d'une estimation correcte (par exemple 100 fois l'inverse de la largeur de bande); assez courte pour que les moyennes glissantes accompagnent les variations "lentes". C'est ainsi qu'une combinaison de capteurs qui se veut optimale en régime stationnaire, est bien obligée, pour essayer de le rester, de se faire adaptative en régime "lentement variable", c'est-à-dire dans des conditions de variabilité très usuelles. Les deux opérations:

- a) mesure des auto-intercorrélations (ou spectres),
- b) construction continue de la combinaison correspondante,

sont présentées ici comme distinctes pour en préciser le sens physique. Le plus souvent elles s'exécutent simultanément par des algorithmes de gradient qui minimisent constamment la puissance du parasite à la sortie de la combinaison adaptivement élaborée. Il n'est pas alors indispensable d'expliciter au passage la structure du champ de bruit sur l'antenne et d'en tirer un modèle (ce qui, ici, nous intéresse). Seul le front d'onde signal, connu a priori, est inscrit dans l'appareil ou dans l'algorithme. Chacun connaît l'abondance de la littérature technique sur ces procédés qui sont complexes mais qui bénéficient des progrès de l'informatique "temps réel". Des essais opérationnels ont montré l'avantage de l'antenne adaptative sur les combinaisons fixes dérivées du concept de directivité. On connaît, en particulier, la capacité intrinsèque de ces traitements d'antenne à éliminer simultanément et adaptivement plusieurs brouilleurs (moins nombreux toutefois que les capteurs).

2- Abandon des contraintes

Cependant une hypothèse subsiste: la connaissance a priori (et exacte) du front d'onde (plan ou autre) transportant l'information utile. Et il est vrai que la performance est sensible à la confrontation de cette hypothèse avec la réalité. Si le signal s'avise malencontreusement d'être transporté par un front d'onde un peu différent de celui postulé, le traitement peut en identifier une partie comme un bruit; l'information utile, en quelque sorte, se parasite elle-même. Il existe bien des moyens de rendre le processus plus "robuste" à de faibles fluctuations du front d'onde, mais c'est généralement aux dépens de la performance en présence du front d'onde "exact".

La nature peut donc encore narguer ce qu'il reste d'a priori dans le concept (devenu classique) d'antenne adaptative. La question se pose alors de savoir si on peut se libérer "complètement ou presque" de toute hypothèse, s'il est vraiment nécessaire d'admettre quelque chose et quel est alors le minimum indispensable. C'est cette démarche qui rejoint l'analyse du champ acoustique tel qu'il est vu par l'antenne, elle-même limitée par ses dimensions (le nombre de capteurs).

Il est déjà clair que si l'on renonce à doter le signal "utile" d'un front d'onde connu, on ne peut plus exploiter de contraste spatial entre signal et bruit. Toutes les sources en présence sont à identifier et l'on remet à plus tard le tri entre l'utile et le parasite. De ce fait la définition même d'une source évolue: c'est une cause dotée d'un front d'onde (inconnu), par rapport à un parasite diffus.

Le transfert entre une source et la sortie d'un capteur se représente, dans le domaine fréquentiel, par le gain complexe d'un filtre, fonction (ici implicite) de la fréquence. Entre une source et les sorties des n capteurs de l'antenne, on a n filtres dont les gains forment un vecteur-transfert T dans un espace complexe à n dimensions. Le front d'onde correspondant est, par définition, le vecteur normé:

$$F = T / |T|$$

où le scalaire $|T|$ est le module de T .

Ni F ni T ne dépendent de l'information émise par la source. On peut se représenter le transfert comme constitué, à partir de la source, par un filtre "commun" de gain $|T|$, suivi en série par le réseau parallèle des n filtres différenciés dont les gains sont les composantes de F . Le filtre commun représente l'effet global de la propagation à distance entre source et antenne. C'est le vecteur F qu'on cherchera à identifier sous hypothèse minimale. Même si l'on y parvient, il est assez évident que l'on ne pourra pas identifier $|T|$ en l'absence de toute information sur l'émission (le spectre) de la source et sur le milieu. En fait, l'antenne ne voit qu'une source apparente qui est la source réelle filtrée par $|T|$. Il est connu, par exemple, que des trajets multiples partiellement ou totalement corrélés, produisent sur l'antenne des interférences qui altèrent le spectre. La source apparente a pour vecteur-transfert précisément le front d'onde (normé).

On appellera vecteur-source S le produit de T par le scalaire σ :

$$\sigma = (\text{densité spectrale de la source vraie})^{1/2}$$

de sorte que:

$$S = \sigma T = (\sigma |T|) F$$

Sauf information sur la source elle-même, on ne pourra identifier, au mieux, que la densité spectrale apparente: $[\sigma |T|]^2$.

La notion de vecteur-source est utile parce que la matrice interspectrale de la source aux sorties des capteurs s'exprime matriciellement par le dyade: SS^+ (S^+ est le transposé conjugué de S), matrice carrée (n,n) mais de rang égal à 1.

On peut donc aussi définir une source comme une cause qui, isolément, donne lieu "derrière l'antenne" à une matrice interspectrale de rang 1.

Admettons, pour fixer les idées, qu'on exploite une antenne de douze capteurs. On mesure donc tous les auto-interspectres entre capteurs ce qui donne une matrice nécessairement hermitienne qui est une donnée expérimentale. En la diagonalisant par le calcul, on la ramène à ses vecteurs propres normés U et ses valeurs propres λ . Ces quantités sont encore, indirectement, des données expérimentales. Sous peine d'in vraisemblance physique, les valeurs propres sont réelles positives (ce sont les densités spectrales sur les combinaisons de capteurs définies par les vecteurs propres normés).

Supposons alors qu'après tous ces calculs, on constate que onze valeurs propres sont négligeables devant la plus élevée. C'est le test expérimental de la présence d'une seule source dont la densité spectrale apparente est la valeur propre dominante, et dont le front d'onde est le vecteur propre normé qui lui est associé. La source apparente est donc totalement identifiée. On peut vérifier immédiatement si c'est une onde plane, sphérique, ou autre.

Une variante du cas précédent intervient lorsque les onze valeurs propres non dominantes, sont, sans être négligeables, pratiquement égales entre elles. C'est le test expérimental qu'à une source unique se

superpose un bruit diffus non corrélé entre capteurs, et de même densité spectrale sur tous. Il est possible alors d'en débarrasser la matrice et de se ramener au cas précédent. Il suffit de lui retrancher une matrice unité (12,12) pondérée par la valeur commune des onze "petites" valeurs propres.

3- Cas de deux sources non corrélées

Passons au cas où la matrice expérimentale révèle deux valeurs propres dominantes, les autres étant soit négligeables, soit éliminables comme précédemment. Il y a donc deux sources mais, même si on les suppose non corrélées (ce que l'on fait jusqu'à nouvel avis) les deux fronts d'onde ne sont pas nécessairement les vecteurs normés propres, et les densités spectrales ne sont pas les valeurs propres. Peut-on alors tout identifier à partir de la seule matrice expérimentale ? La réponse est négative et pour avoir un résultat il faut admettre quelque chose de plus; mais on peut s'attendre à une hypothèse "légère" puisque, pour une seule source, tout était déterminé.

On se fiera au calcul matriciel en insistant plutôt sur le sens physique. Rappelons que, sauf évidence contraire, toutes les quantités citées sont fonctions de la fréquence. Les vecteurs seront en majuscules indicées. Les matrices seront en majuscules non indicées. Les scalaires seront en minuscules.

La matrice interspectrale peut s'exprimer de deux façons:

- a) sous sa forme d'inconnues à calculer qui s'écrit, les deux sources étant non corrélées, comme une somme de deux dyades:

$$S_1 S_1^+ + S_2 S_2^+$$

ce qui s'écrit aussi $S S^+$ où S est la matrice (12,2) dont les colonnes sont les vecteurs-sources: S_1 et S_2 .

- b) sous sa forme canonique et expérimentalement connue:

$$\lambda_1 U_1 U_1^+ + \lambda_2 U_2 U_2^+$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres, et U_1 et U_2 sont les vecteurs propres normés qui, par essence, sont unitaires et orthogonaux.

Il s'agit donc d'essayer de trouver S_1 et S_2 en égalant les formes a) et b). Si, dans cette équation matricielle on multiplie toutes les matrices à droite par U_1 ou U_2 , on obtient une relation vectorielle où le vecteur propre apparaît comme une forme linéaire de S_1 et S_2 . Donc, inversement, S_1 et S_2 sont dans le sous espace expérimentalement connu, défini par U_1 et U_2 .

Mais, de plus, dans ce sous-espace, S_1 et S_2 sont loin d'être quelconques; ils y sont même fortement liés, car si on tentait d'y choisir arbitrairement les deux composantes de S_2 , il faudrait encore exprimer que la matrice résultant de la soustraction: (forme b)- $S_2 S_2^+$, est de rang 1 puisque égale à $S_1 S_1^+$. Ceci présage qu'un seul scalaire, au plus, reste indéterminé.

Tous les vecteurs étant dans le "plan" (U_1, U_2), on peut y projeter la relation d'égalité des formes a) et b) en les multipliant l'une et l'autre:

- à droite par la matrice U (12,2) dont les colonnes sont U_1 et U_2
- à gauche par la matrice (2,12) U^+ .

Dans cette opération la forme a) devient $\Sigma \Sigma^+$ où Σ est une matrice (2,2) dont chaque colonne est faite des 2 composantes (sur U_1 et U_2) d'un vecteur source. Quant à la forme b) elle devient simplement la matrice Λ diagonale (2,2) des valeurs propres. D'où:

$$\Sigma \Sigma^+ = \Lambda$$

Cette relation lie les quatre composantes de Σ par 3 relations scalaires. Le degré de liberté est donc de un seul scalaire complexe. Les vecteurs sources ne sont pas calculables, à un scalaire complexe près. On peut toujours écrire, Z étant une matrice (2,2) a priori quelconque:

$$\Sigma = \Lambda^{1/2} Z$$

mais la contrainte précédente montre que Z est, en fait, une matrice (2,2) unitaire

$$Z^+ = Z^{-1}$$

La forme générale d'une telle matrice est:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha e^{-i\varphi} \\ \sin \alpha e^{i\varphi} & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Elle ne dépend que d'un seul scalaire complexe, par exemple:

$$z = \sin \alpha e^{i\varphi}$$

Ses colonnes forment deux vecteurs orthogonaux et normés; les lignes aussi.

En définitive, il existe, dans le sous-espace des vecteurs propres, une famille de couples de vecteurs, dépendant d'un seul scalaire arbitraire; chaque couple est un candidat légitime à la représentation des vecteurs sources. Un couple donné dérive, de façon connue, d'un couple de vecteurs unitaires et orthogonaux qui "tourne" dans le plan des vecteurs propres. Mais la position du couple générateur reste indéterminée.

Revenons maintenant dans l'espace à douze dimensions, c'est à dire aux sorties des capteurs.

La relation:

$$\Sigma = \Lambda^{1/2} Z$$

s'y écrit:

$$S = U \Lambda^{1/2} Z$$

où S est la matrice (12,2) dont les colonnes sont S_1 et S_2 .

Si on pose:

$$V_1 = (\lambda_1)^{1/2} U_1 \text{ et } V_2 = (\lambda_2)^{1/2} U_2$$

on peut condenser la relation précédente en:

$$S = V Z$$

où les vecteurs V_1 et V_2 (colonnes de V) sont connus et orthogonaux. L'égalité:

$$SS^+ = VV^+$$

est indépendante de Z (2,2) qui reste unitaire et arbitraire.

Elle diffère généralement de la matrice unité (2,2) ($\alpha \neq 0$) et les vecteurs S_1 et S_2 ne sont pas orthogonaux. Donc, en général, les sources ne sont pas séparables par l'antenne (on ne peut pas bâtir, à coup sur, une combinaison dont la sortie soit un filtrage d'une des deux sources, l'autre exclue).

En résumé:

- S_1 et S_2 ne sont pas complètement déterminés
- ce fait est indépendant du nombre de capteurs
- au mieux, on peut exprimer les 24 composantes de S_1 et S_2 comme des fonctions connues d'un seul scalaire complexe arbitraire z.

Il est donc indispensable de faire une hypothèse. Mais le niveau suffisant de celle-ci est celui d'une seule relation scalaire entre les 24 composantes. Cette relation permettrait, en effet, de calculer z et, de là, toutes les composantes. Cette relation doit être physiquement plausible et ne pas privilégier des capteurs dont la numérotation est arbitraire. Mais il faut noter que, lorsque le nombre de capteurs augmente (toujours deux sources), c'est toujours une seule relation scalaire qui permet d'aboutir. C'est donc une hypothèse de plus en plus "légère", à nombre croissant de capteurs. C'est là une façon d'exprimer qu'une plus grande antenne est toujours plus résolutive, pourvu qu'on l'exploite à fond. A la limite, pour de très grandes antennes, les vecteurs sources tendent à la séparabilité en s'identifiant aux vecteurs connus et orthogonaux V_1 et V_2 . La matrice Z tend vers une matrice unité ($\alpha \rightarrow 0$).

La relation scalaire à "inventer" ne peut non plus porter sur une quantité déjà calculable à partir des données expérimentales: par exemple la densité spectrale globale sur toute combinaison de capteurs est calculable; ce qui ne l'est pas, c'est la part de chaque source.

4- Modèle paramétrique et généralisation

On peut exprimer autrement la "légère" contrainte précédente. La relation matricielle $S = V Z$ génère 24 équations scalaires complexes pour 25 inconnues complexes: les composantes des vecteurs-sources et z.

Si on peut bâtir un modèle paramétrique général de vecteur-source (donc de front d'onde) qui comporte moins de douze complexes "libres", on pourra se ramener à un système équilibré fournissant des solutions au prix d'un certain effort informatique. On peut, en principe, affecter, par vecteur-source, 11,5 complexes, soit 23 réels (un réel pour la densité spectrale et 22 pour le front d'onde soumis à la norme). Il s'agit donc d'une représentation extrêmement riche par rapport aux modèles généralement utilisés. Mais toute représentation moins riche remet en cause les données expérimentales. Supposons, par exemple, que chacun des deux fronts d'onde soit "décrété" être une onde plane. Pour une antenne à géométrie connue, un front d'onde (normé) plan ne dépend que de deux paramètres réels: les cosinus directeurs de sa direction d'arrivée. Un vecteur source "plan" ne dépend, avec sa densité spectrale, que de trois réels. Pour les deux sources et z, on a huit réels à déterminer avec 48 équations scalaires réelles. Il faut donc que spontanément, les données expérimentales (les composantes de V_1 et V_2) vérifient les 40 relations complémentaires. Encore faudrait-il s'en assurer!

Entre autres idées de modélisation, on peut adopter par exemple le principe (l'hypothèse) qu'un front d'onde qui n'est pas plan, peut être décrit comme une somme cohérente d'ondes planes. Dans une telle

somme, chaque onde plane est définie par sa direction (deux réels) et son amplitude complexe (deux réels). Une somme cohérente de six ondes planes comporte 24 réels libres. Suivant le problème physique considéré, on peut se réduire à 23 réels, en admettant, par exemple, que l'une des six ondes planes est orthogonale à un plan connu a priori (horizontal ou vertical connu, suivant le cas). C'est une restriction très légère qui ramène à 46 réels libres pour les deux sources. Avec z (2 réels) on a 48 paramètres pour 48 équations scalaires.

On a donc accès, si difficile que soit la résolution, à des modèles extrêmement riches: six ondes planes presque totalement libres pour le champ d'une source! Cependant, outre les difficultés de résolution, une certaine défiance vis à vis des mesures expérimentales fait qu'on préfère souvent un modèle "pauvre"; ce qui engendre une matrice interspectrale a priori définie complètement par un nombre restreint de ses éléments. Ceux-là seuls font donc l'objet de mesures, ce qui dispense de tout contrôle expérimental de la forme d'onde postulée, et ce qui utilise l'antenne en dessous de sa capacité naturelle. Ces procédures "expéditives" sont parfaitement compréhensibles lorsque des besoins opérationnels "temps-réel" (détection-communications) ne laissent pas assez de marge pour tout mesurer et tout calculer. Mais si on "fait de la physique" en temps différé pour approcher la "vraie" structure des fronts d'onde, on doit rechercher l'hypothèse minimale qui engendre le maximum de richesse paramétrique. Des compromis sont toujours possibles dans des contextes physiques donnés; mais cet exposé est fait pour "tâter la limite".

Dans tous les cas, la richesse du modèle est limitée par la capacité de l'antenne: le nombre de capteurs. Et la question cruciale est de savoir si l'antenne est capable de bien représenter le champ global dans sa complexité. Le seul test expérimental de cette capacité représentative est l'étude de la succession des valeurs propres (donc la mesure des auto-interspectres). Il faut vraiment que les plus petites soient négligeables devant les autres, sans quoi tout modèle, riche ou pauvre, est en défaut. On peut d'ailleurs montrer que le rapport des deux valeurs propres extrêmes ne peut qu'augmenter avec le nombre de capteurs. C'est encore une façon d'exprimer la croissance de la capacité résolvante avec ce nombre.

Ce qui précède se généralise à n capteurs et p sources lorsque $p < n$. La "matrice d'indétermination" Z est unitaire, d'ordre et de rang p . Elle comporte $p(p-1)$ scalaires réels. Il faut donc "économiser" ce même nombre sur la description des p vecteurs-sources, c'est à dire $(p-1)$ réels par source. Il en reste quand même:

$$2n - (p-1) = 2n - p + 1$$

Par exemple, pour 12 capteurs et 8 sources, chaque vecteur-source est modélisable par 17 réels (ce qui correspond à plus de quatre ondes planes cohérentes). On voit donc que:

- à nombre égal de sources, la "richesse" de la description de chaque vecteur-source augmente toujours avec le nombre de capteurs (à condition de tout mesurer),
- à nombre constant de capteurs, une source de plus ne réduit que d'un seul réel la richesse de description des vecteurs-sources impliqués; c'est qu'une source de plus enrichit la description globale du champ de $(2n+1)$ équations réelles.

Il est théoriquement possible d'aller jusqu'à $p = n-1$ mais ce n'est pas "physiquement" souhaitable. En effet une marge de plusieurs valeurs propres négligeables est nécessaire pour être sûr que l'antenne possède la capacité d'assumer la description du champ. On peut discuter sur l'importance de cette marge, mais, si elle n'existe pas, il faut se résigner à augmenter le nombre de capteurs jusqu'à ce qu'elle apparaisse. La résolution du système d'équations n'a d'intérêt que dans la mesure où le champ global est bien représenté. Car s'il y a des solutions parasites, on est au moins sûr que la solution physique est dans le système, puisqu'il transcrit les effets mesurés de cette solution. D'autre part des solutions parasites peuvent être éliminées par les conditions d'inégalité liées aux éléments d'une matrice unitaire (par exemple, dans le cas de deux sources : $|z| < 1$).

5- Cas de deux sources corrélées

Revenons à douze capteurs et deux sources en supposant cette fois qu'elles peuvent être corrélées. Peut-on, sous hypothèse minimale, et à partir des mêmes données expérimentales contenues dans la matrice VV^+ , retrouver les vecteurs-sources et l'interspectre des deux sources. On sait qu'on ne pourra, au mieux, accéder qu'aux sources apparentes, dont les vecteurs-transferts sont normés (ce sont les fronts d'ondes) et qui sont ici corrélées. Appelons G leur matrice interspectrale (2,2). Les deux fronts d'onde sont F_1 et F_2 : ce sont les deux colonnes de F (12,2).

Si s_1 et s_2 sont les signaux émis, le $j^{\text{ème}}$ capteur reçoit:

$$(s_1 \text{ filtré par } f_j^1) + (s_2 \text{ filtré par } f_j^2)$$

où les f_j sont les éléments des vecteurs de F .

Des règles classiques donnent alors l'inter-spectre entre deux capteurs et leurs auto-spectres. Tous calculs faits, la matrice interspectrale (12,12) exprimée en termes d'inconnues à calculer, s'écrit:

$$F G F^+$$

Elle est bien de rang 2, car elle transforme en vecteur nul toute direction orthogonale à la fois à F_1 et F_2 . La résolution consiste donc à tirer le meilleur parti de:

$$F G F^+ = V V^+$$

pour calculer F et G .

Or, G étant hermitienne définie positive peut se mettre sous la forme:

$$G = H H^+$$

où H est une matrice (2,2) inversible.

En posant $S = F H$ la première équation matricielle s'écrit:

$$S S^+ = V V^+.$$

On connaît cette relation; elle implique:

a) que les colonnes S_1 et S_2 de S soient des vecteurs situés dans le sous-espace (V_1, V_2)

b) que : $S = V Z$, où Z (2,2) est unitaire arbitraire.

Comme

$$S = F H \text{ ou } F = S H^{-1}$$

les fronts d'onde F_1 et F_2 sont des formes linéaires de S_1 et S_2 , donc également dans le sous-espace (V_1, V_2). La propriété:

"fronts d'onde dans le sous-espace des vecteurs propres expérimentaux"

n'est pas altérée par la corrélation entre sources. Les vecteurs S_1 et S_2 se présentent comme les vecteurs-sources de deux sources fictives non-corrélées, qu'on peut appeler les "images" des sources. Elles sont, pour l'antenne, équivalentes aux sources vraies (ou apparentes) et leur connaissance peut suffire dans certains problèmes. De toute façon, on peut leur appliquer les mêmes restrictions paramétriques qu'à des sources apparentes non corrélées. On peut donc calculer S_1 et S_2 , en réduisant de 24 à 23 réels leur représentation paramétrique. Supposons la chose faite et les images déterminées. En général S_1 et S_2 ne sont pas orthogonaux; s'ils le sont, ils se confondent avec V_1 et V_2 . La question se pose alors de savoir si, sous hypothèse minimale, on peut "remonter" des images aux sources apparentes. Il s'agit donc de déterminer F et H (2,2) à partir de:

$$F = S H^{-1}$$

où S est désormais connu (12,2).

On avait:

$$G = H H^+$$

mais classiquement, une matrice interspectrale s'écrit:

$$(\text{unitaire}) (\text{diagonale des valeurs propres}) (\text{unitaire})^+$$

Donc H a la forme:

$$(\text{unitaire}) (\text{diagonale})$$

et H^{-1} a la forme:

$$(\text{diagonale}) (\text{unitaire})$$

qu'on écrit:

$$H^{-1} = D W$$

où D est la diagonale des inverses des racines carrées des valeurs propres de G (inconnues), et où W est unitaire (2,2);

Donc on a:

$$F = S D W$$

La matrice (2,2) DW dépend de deux réels pour D et d'un complexe (2 réels) pour W unitaire (2,2).

Or, les vecteurs F_1 et F_2 sont normés; posons:

$$F_1^+ F_1 = F_2^+ F_2 = 1$$

Ce sont deux relations scalaires réelles entre les quatre réels de DW . Donc, implicitement, les deux éléments de D sont, par les relations de norme, des expressions connues des deux réels de W .

Par conséquent, la matrice DW , qui n'est pas unitaire, (ses lignes sont orthogonales, mais pas ses colonnes) ne dépend plus, néanmoins, que de deux réels. Il existe donc une matrice Q (2,2) telle que la relation:

$$F = S Q$$

assure la norme de F_1 et F_2 , quels que soient les deux réels dont Q dépend. Il suffit donc d'abaisser de 24 à 23 réels la paramétrisation de F_1 et F_2 pour avoir un système d'équations équilibré qui détermine toutes leurs composantes, plus les deux réels de Q ; et aussi, de ce fait, les valeurs propres de G , les deux réels (le

complexe) de W , ce qui permet d'atteindre les densités spectrales et l'interspectre des deux sources apparentes. On peut donc en principe résoudre le problème posé en deux étapes:

- légère restriction de modélisation pour les sources-images
- légère restriction de modélisation sur les fronts d'onde des sources apparentes (en plus de la norme).

6- Sources-images séparables

Dans le cas particulier (grandes antennes par exemple) où S_1 et S_2 seraient orthogonaux, on a vu, qu'alors:

$$S = V$$

et par conséquent:

$$F = V D W = U [\Lambda^{1/2} D] W$$

Les vecteurs F_1 et F_2 sont normés; on voit que c'est automatiquement le cas, quel que soit W , si

$$\Lambda^{1/2} D = I \text{ (unité 2,2)}$$

car U_1 et U_2 sont unitaires et orthogonaux.

Physiquement cela signifie que les valeurs propres de G (relatives aux sources apparentes) sont égales aux valeurs propres expérimentales (qui sont aussi les densités spectrales des sources-images).

Reste alors la relation:

$$F = U W$$

qui assure la norme de F_1 et F_2 . En réduisant leur modélisation de 24 à 23 réels, on peut déterminer les deux réels arbitraires de W .

Mais il existe une autre solution. C'est lorsque simultanément:

- la matrice diagonale réelle positive:

$$\Delta^2 = \Lambda D^2$$

a pour éléments $(1+\rho)$ et $(1-\rho)$, avec $0 < \rho < 1$

- la matrice W a la forme particulière qui correspond à:

$$\alpha = \pi/4$$

(tous les éléments ont pour module $\sqrt{2}/2$).

On vérifie en effet que dans ce cas la matrice (2,2) $F^+ F$ a ses éléments diagonaux égaux à 1; ce sont précisément les carrés des modules de F_1 et F_2 . Si ces conditions sont remplies la matrice Δ ne comporte plus qu'un réel indéterminé, soit ρ . La matrice unitaire W ne comporte plus qu'un réel indéterminé, l'angle φ .

Donc dans la relation qui assure la norme de F_1 et F_2 :

$$F = U \Delta W$$

deux réels restent libres à droite.

On peut les calculer en abaissant de 24 à 23 réels la paramétrisation de F_1 et F_2 . On en déduit les éléments de Δ , donc ceux de D , donc les valeurs propres de G . On a aussi W , donc la matrice G .

Les deux types de solutions précédentes sont en concurrence. Si le champ est bien représenté par l'antenne, un seul type doit donner un résultat. La généralisation à p sources de la solution du premier type est facile. Elle correspond à:

$$F^+ F = I \text{ (unité p,p)}$$

Pour le second type c'est très compliqué. Il faut exprimer que tous les éléments diagonaux de $F^+ F$ sont égaux à 1 et que les modules des éléments de W sont tous égaux à $\sqrt{n}$.

7- Conclusion

Cet exposé n'apporte pas un problème résolu. Il cherche à souligner une certaine contradiction interne dans le développement du traitement spatial. D'une part on cherche, très légitimement, à utiliser des antennes de plus en plus grandes, pour augmenter le pouvoir de résolution dans des champs acoustiques compliqués; d'autre part, on conserve des modèles de fronts d'onde trop simples en regard de cette complication. Ce qui conduit soit à une sous-utilisation de l'antenne, soit à un désaccord entre mesures et modèles. Les moyens d'en sortir ne sont ni simples, ni faciles à mettre en oeuvre. Mais la nature n'est pas tenue d'être simple et c'est en épousant sa complexité qu'on peut mieux la comprendre. Dans l'analyse des champs acoustiques, des méthodes de paramétrisation plus riches et plus souples semblent faire partie des perfectionnements possibles.