Analyse dimensionnelle de l'équation de Navier et application à la théorie des plaques minces

Olivier Millet, Aziz Hamdouni, Alain Cimetière, Khalid Elamri

► To cite this version:

Olivier Millet, Aziz Hamdouni, Alain Cimetière, Khalid Elamri. Analyse dimensionnelle de l'équation de Navier et application à la théorie des plaques minces. *Journal de Physique III*, 1997, 7 (10), pp.1909-1925. 10.1051/jp3:1997232 . jpa-00249690

HAL Id: jpa-00249690

<https://hal.science/jpa-00249690>

Submitted on 1 Jan 1997

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse dimensionnelle de l'équation de Navier et application à la théorie des plaques minces

Olivier Millet, Aziz Hamdouni (*), Alain Cimetière et Khalid Elamri

L3 M A, Université de Poitiers et ENSMA, SP2MI Téléport 2, 86960 Futuroscope Cedex, France

(Reçu le 3 mars 1997, révisé le 4 juin 1997, accepté le 26 juin 1997)

PACS.46 30.cn – Static elasticity

Résumé. — L'analyse dimensionnelle de l'équation de Navier fait apparaître de façon naturelle des nombres sans dimension caractéristiques de la nature physique du problème. Ces nombres sans dimension permettent de déterminer le domaine de validité du modèle de Kirchhoff-Love. Cette nouvelle approche ne nécessite aucune hypothèse *a priori* de changement d'échelle pour mettre en œuvre la méthode des développements asymptotiques.

Abstract. — The dimensional analysis of the three-dimensional Navier equation leads to non-dimensional numbers which reflect the physical problem. Thanks to these numbers, the two-dimensional Kirchhoff-Love model can be proved valid for level forces of ε^4 order. To be run, the asymptotic method developed in this paper, needs no *a priori* assumption on the changing of scales.

1. Introduction

La première justification rigoureuse des modèles bidimensionnels linéaire et non linéaire de plaques minces a été obtenue par P.G. Ciarlet et P. Destuynder [2–5, 13] à la fin des années 70 grâce à la technique des développements asymptotiques appliquée à une formulation variationnelle mixte en contraintes et déplacements du problème tridimensionnel initial. Le cadre fonctionnel utilisé est particulièrement bien adapté pour démontrer certains résultats d'existence, d'unicité et de convergence. Par la suite, une approche variationnelle en déplacements seuls, variante de l'approche en contraintes et déplacements, fut proposée dans [6, 17]. On notera également que la technique des développements asymptotiques a été appliquée avec succès dans le cas des plaques non homogènes [1] et pour des comportements élastiques non linéaires [11, 12]. Parallèlement, ces travaux furent étendus à certains modèles de coques par P. Destuynder [13], P.G. Ciarlet [7–10] et E. Sanchez-Palencia [18–20, 22].

Cependant deux problèmes subsistent encore à notre connaissance dans la justification du modèle bidimensionnel linéaire de plaque par développements asymptotiques, à savoir :

1– le choix d'hypothèses *a priori* de changements d'échelle sur le déplacement. Ces changements d'échelle déterminent l'ordre de grandeur du rapport entre les échelles de déplacement normal et de déplacement tangentiel. Notons qu'une tentative de justification de ces changements d'échelle a été proposée dans [15].

(*) Auteur auquel doit être adressée la correspondance (e-mail : hamdouA@l3ma.univ-poitiers.fr)

2— l'interprétation physique difficile des changements d'échelle portant sur les efforts. En effet, ces changements d'échelle rendent l'effort volumique s'exerçant sur la plaque dépendant de son épaisseur $2h$. Or dans les problèmes usuels d'élasticité, la seule force volumique agissant est celle associée à la pesanteur (ρg) qui est indépendante de l'épaisseur.

Nous proposons ici une nouvelle justification par méthodes asymptotiques du modèle linéaire de plaques minces permettant de résoudre les deux problèmes précités. Cette approche, qui s'inscrit dans la lignée des travaux de Goldenveizer [14], est basée sur une adimensionnalisation de l'équation de Navier. Elle ne nécessite aucune hypothèse *a priori* sur l'ordre de grandeur du rapport entre les échelles de déplacement normal et de déplacement tangentiel.

L'adimensionnalisation de l'équation de Navier permet de faire apparaître de façon naturelle des nombres sans dimension gouvernant le problème d'élasticité linéaire.

L'interprétation physique de ces nombres sans dimension permet alors de les relier au facteur de forme $\varepsilon = \frac{h}{L}$ (rapport de la demi-épaisseur sur le diamètre de la surface moyenne de la plaque).

Pour une plaque mince, ε étant petit, on met en œuvre la technique des développements asymptotiques avec ε comme petit paramètre. Pour les niveaux d'efforts usuellement rencontrés en mécanique, on aboutit au modèle bidimensionnel de Kirchhoff-Love de plaque mince dont le domaine de validité se trouve ainsi précisé grâce aux nombres adimensionnels introduits.

Il est ensuite possible, sans faire aucune hypothèse *a priori*, de déterminer l'expression des contraintes avant de revenir aux variables physiques.

2. Position du problème

Dans tout ce qui suit, les indices grecs seront supposés varier dans $\{1, 2\}$ et les indices latins dans $\{1, 2, 3\}$. On supposera également choisies une fois pour toutes une origine O ainsi qu'une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) dans l'espace euclidien de dimension trois qui sera ensuite identifié à $\mathbb{R}^3$. On indexera par une étoile (*) toutes les grandeurs dimensionnelles et on adoptera les notations suivantes :

- Grad^* , Div^* et Δ_3^* désigneront respectivement le gradient, le vecteur divergence et le laplacien tridimensionnels,
- grad^* , div^* et Δ^* le gradient, le vecteur divergence et le laplacien bidimensionnels.

Soit ω^* un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$ contenu dans le plan (O, e_1, e_2) , de diamètre L , de point courant $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ et de frontière γ_0^* régulière. On définit les ensembles :

$$\Omega^* = \omega^* \times]-h, h[$$

$$\Gamma_0^* = \gamma_0^* \times [-h, h] ; \quad \Gamma_{\pm}^* = \bar{\omega}^* \times \{\pm h\}$$

La frontière $\partial\Omega^*$ est alors la réunion de la frontière latérale Γ_0^* et des faces supérieure et inférieure $\Gamma_{\pm}^*$. On notera $X^* = (x^*, x_3^*)$ le point courant de Ω^* .

Considérons alors une plaque mince d'épaisseur $2h$ et de surface moyenne ω^* , occupant le domaine Ω^* de $\mathbb{R}^3$ dans sa configuration non déformée, supposée encastree sur son bord latéral Γ_0^* , et soumise aux efforts volumiques $(f_i^*) : \bar{\Omega}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ et surfaciques $(g_i^{*\pm}) : \Gamma_{\pm}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$.

On notera

$$f^* = f_{\alpha}^* e_{\alpha} + f_3^* e_3 = f_t^* + f_3^* e_3 \quad \text{et} \quad g^{*\pm} = g_{\alpha}^{*\pm} e_{\alpha} + g_3^{*\pm} e_3 = g_t^{*\pm} + g_3^{*\pm} e_3.$$

Nous ferons dans tout ce qui suit l'hypothèse de plaque mince ($h \ll L$).

Sous l'action des efforts extérieurs la plaque se déforme et l'inconnue du problème est alors le déplacement $U^* : \bar{\Omega}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel qu'un point matériel occupant initialement la position $X^* \in \bar{\Omega}^*$ occupe dans la configuration déformée la position $X^* + U^*(X^*)$. La plaque étant supposée encastree sur son bord latéral Γ_0^* , on a :

$$U^* = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^*.$$

Dans le cadre de l'élasticité linéaire en petites déformations et en petits déplacements, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{Div}^* [\lambda \text{Tr } e^*(U^*) I + 2\mu e^*(U^*)] = -f^* & \text{dans } \Omega^* \\ U^* = 0 & \text{sur } \Gamma_0^* \\ \{\lambda \text{Tr } e^*(U^*) I + 2\mu e^*(U^*)\} n = g^* & \text{sur } \Gamma_{\pm}^* \end{cases}$$

où

$$e^*(U^*) = \frac{1}{2}(\text{Grad}^* U^* + \overline{\text{Grad}^* U^*})$$

représente le tenseur linéarisé des déformations, n la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega^*$, λ et μ les constantes de Lamé du matériau, la barre étant l'opérateur de transposition.

3. Adimensionnalisation des équations de Navier

Les équations d'équilibre précédentes conduisent naturellement à l'équation de Navier qui s'écrit :

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \text{Grad}^*(\text{Div}^* U^*) + \mu \Delta_3 U^* = -f^* & \text{dans } \Omega^* \\ U^* = 0 & \text{sur } \Gamma_0^* \\ \{\lambda \text{Tre}(U^*) I + 2\mu e^*(U^*)\} n = g^* & \text{sur } \Gamma_{\pm}^*. \end{cases}$$

En décomposant maintenant le déplacement U^* suivant une composante tangentielle et une composante normale

$$U^* = V^* + u_3^* e_3$$

les équations de Navier deviennent :

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \text{grad}^*(\text{div}^* V^*) + \mu \Delta^* V^* + (\lambda + \mu) \text{grad}^* \frac{\partial u_3^*}{\partial x_3^*} + \mu \frac{\partial^2 V^*}{\partial x_3^{2*}} &= -f_t^* \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3^*} \text{div}^* V^* + \mu \Delta^* u_3^* + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_3^{2*}} &= -f_3^*. \end{aligned} \quad (1)$$

Les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure $\Gamma_{\pm}^*$ sont données par :

$$\begin{aligned} \mu(\text{grad}^* u_3^* + \frac{\partial V^*}{\partial x_3^*}) &= \pm g_t^{*\pm} \quad \text{sur } \bar{\omega}^* \times \{\pm h\} \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3^*}{\partial x_3^*} + \lambda \text{div}^* V^* &= \pm g_3^{*\pm} \quad \text{sur } \bar{\omega}^* \times \{\pm h\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Effectuons alors l'adimensionnalisation suivante sur les données physiques et les inconnues du problème :

$$V = \frac{V^*}{V_r} \quad u_3 = \frac{u_3^*}{u_{3r}} \quad x_\alpha = \frac{x_\alpha^*}{L} \quad x_3 = \frac{x_3^*}{h}$$

$$f_3 = \frac{f_3^*}{f_{3r}} \quad g_3^\pm = \frac{g_3^{*\pm}}{g_{3r}} \quad f_t = \frac{f_t^*}{f_{tr}} \quad g_t^\pm = \frac{g_t^{*\pm}}{g_{tr}}$$

où les grandeurs indexées en r sont les grandeurs de référence du problème. Les nouvelles variables (sans étoile) qui apparaissent alors sont adimensionnelles.

L'objectif étant ici d'obtenir un modèle bidimensionnel valable en petits déplacements et petites déformations, on choisit dans un premier temps la même échelle de référence $u_{3r} = V_r = h$ pour le déplacement normal et le déplacement transverse. Notons maintenant grad, div et Δ le gradient, le vecteur divergence et le laplacien bidimensionnels définis sur ω (par rapport aux variables adimensionnelles x_α).

Les équations de Navier (1) s'écrivent alors dans $\Omega = \omega \times]-1, 1[$:

$$\varepsilon^2 \left[(1 + \beta) \text{grad} (\text{div} V) + \Delta V \right] + (1 + \beta) \varepsilon \text{grad} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = -\mathcal{F}_t f_t$$

$$\varepsilon^2 \Delta u_3 + (1 + \beta) \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_3} \text{div} V + (2 + \beta) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = -\mathcal{F}_3 f_3$$
(3)

avec les conditions aux limites :

$$\varepsilon \text{grad} u_3 + \frac{\partial V}{\partial x_3} = \pm \mathcal{G}_t g_t^\pm \quad \text{sur} \quad \bar{\omega} \times \{\pm 1\}$$

$$(2 + \beta) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \beta \varepsilon \text{div} V = \pm \mathcal{G}_3 g_3^\pm \quad \text{sur} \quad \bar{\omega} \times \{\pm 1\}$$
(4)

où l'on a posé : $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$

On voit donc apparaître naturellement cinq nombres sans dimension :

$$\varepsilon = \frac{h}{L} \quad \mathcal{F}_3 = \frac{h f_{3r}}{\mu} \quad \mathcal{F}_t = \frac{h f_{tr}}{\mu} \quad \mathcal{G}_3 = \frac{g_{3r}}{\mu} \quad \mathcal{G}_t = \frac{g_{tr}}{\mu}$$

i) le rapport de forme $\varepsilon = \frac{h}{L}$, rapport entre l'épaisseur et le diamètre de ω^* est une donnée du problème. Dans le cadre des plaques minces ε est un petit paramètre.

ii) les rapports de forces $\mathcal{F}_t = \frac{h f_{tr}}{\mu}$, $\mathcal{F}_3 = \frac{h f_{3r}}{\mu}$ et $\mathcal{G}_t = \frac{g_{tr}}{\mu}$, $\mathcal{G}_3 = \frac{g_{3r}}{\mu}$ représentent respectivement le rapport entre la résultante des efforts volumiques sur l'épaisseur (respectivement entre les efforts surfaciques) et μ regardé comme contrainte de référence. Ces nombres ne font intervenir que des grandeurs connues et doivent donc être considérés comme des données du problème.

4. Hypothèse mono-échelle

Dans le but de se ramener à un problème mono-échelle pour des raisons de simplification, il convient de définir une variable de référence et de relier ensuite les autres à cette dernière. Nous choisirons ici ε comme paramètre de référence et nous exprimerons les autres nombres sans dimension en fonction de ε .

Les efforts extérieurs constituent une des données essentielles du problème. Dans le cadre d'une hypothèse mono-échelle, il convient de relier les rapports de forces au facteur de forme ε ou de façon équivalente de se donner l'ordre de grandeur des efforts appliqués. Il est tout d'abord possible de relier $\mathcal{F}_t$ à $\mathcal{G}_t$ et $\mathcal{F}_3$ à $\mathcal{G}_3$ afin que tous les efforts interviennent au même ordre dans l'équation d'équilibre globale de la plaque. En effet l'équation d'équilibre globale s'écrit :

$$\int_{\Omega^*} f^* dx^* + \int_{\Gamma^{*+}} g^{*+} d\Gamma^* + \int_{\Gamma^{*-}} g^{*-} d\Gamma^* + \int_{\Gamma_0^*} H^* d\Gamma^* = 0$$

où $H^* = H_t^* + H_3^* e_3$ représente les efforts d'encastrement. Après adimensionnalisation et projection respective sur ω et suivant la direction e_3 , on obtient :

$$h f_{tr} \int_{\Omega} f_t dx + g_{tr} \left[\int_{\Gamma^+} g_t^+ d\Gamma + \int_{\Gamma^-} g_t^- d\Gamma \right] + \frac{H_{tr} h}{L} \int_{\Gamma_0} H_t ds dx_3 = 0$$

$$h f_{3r} \int_{\Omega} f_3 dx + g_{3r} \left[\int_{\Gamma^+} g_3^+ d\Gamma + \int_{\Gamma^-} g_3^- d\Gamma \right] + \frac{H_{3r} h}{L} \int_{\Gamma_0} H_3 ds dx_3 = 0.$$

Si l'on souhaite donc que les efforts f_3 , g_3 d'une part et f_t , g_t d'autre part interviennent au même ordre dans le développement asymptotique des équations, on doit avoir :

$$g_{tr} = h f_{tr} \quad g_{3r} = h f_{3r}$$

ou de façon équivalente :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_3 = \mathcal{G}_3. \quad (5)$$

Nous supposons d'autre part que la pesanteur est le seul effort volumique qui intervient dans les équations. À titre d'exemple, dans le cas d'une plaque (en acier de construction, en plomb ou en graphite), d'épaisseur 10^{-2} m, de diamètre 1 m et soumise à son poids, $\mathcal{F}_3$ est de l'ordre de $10^{-8} = \varepsilon^4$ et $\mathcal{F}_t = 0$ (la composante tangentielle du poids est nulle). Il est donc physiquement raisonnable de considérer des niveaux d'efforts pour lesquels $\mathcal{F}_3 = \mathcal{G}_3 = \varepsilon^4$ et $\mathcal{F}_t = 0$. Nous considérerons enfin des efforts tangentiels surfaciques beaucoup plus importants ($\mathcal{G}_t = \varepsilon^3$) afin d'obtenir des effets membranaires non négligeables. La plupart des cas usuels relèvent de ces hypothèses.

5. Développement asymptotique des équations

Étant maintenant ramené à un problème mono-échelle, la mise en œuvre de la technique des développements asymptotiques conduit à postuler l'existence d'un développement en série formelle de la solution (V, u_3) .

$$V = V^0 + \varepsilon V^1 + \varepsilon^2 V^2 + \dots$$

$$u_3 = u_3^0 + \varepsilon u_3^1 + \varepsilon^2 u_3^2 + \dots$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 1 · Pour des niveaux d'efforts extérieurs donnés vérifiant $\mathcal{F}_3 = \mathcal{G}_3 = \varepsilon^4$ et $\mathcal{G}_t = \varepsilon^3$, on a $V^0 = 0$.

En effet, un calcul similaire à celui effectué plus loin à la proposition 2, montre que pour ces niveaux d'efforts V^0 ne dépend que de (x_1, x_2) et vérifie le problème aux limites :

$$\begin{cases} \operatorname{div} n_t^0 &= 0 & \text{dans } \omega \\ V^0|_{\partial\omega} &= 0 \end{cases}$$

où :

$$n_t^0 = \frac{4\beta}{2+\beta} \operatorname{Tr} e_t(V^0) I_2 + 4e_t(V^0) \quad e_t(V^0) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} V^0 + \overline{\operatorname{grad} V^0}).$$

Il est bien connu (moyennant certaines hypothèses de régularité) que ce problème aux limites admet une unique solution dans $H_0^1(\omega)$: $V^0 = 0$.

On peut alors écrire

$$V = \frac{V^*}{V_r} = \frac{V^*}{h} = \varepsilon V^1 + \varepsilon^2 V^2 + \dots$$

soit de façon équivalente :

$$\tilde{V} = \frac{V^*}{\varepsilon V_r} = \frac{V^*}{\varepsilon h} = V^1 + \varepsilon V^2 + \dots = \tilde{V}^0 + \varepsilon \tilde{V}^1 + \varepsilon^2 \tilde{V}^2 + \dots$$

On voit donc que pour ces niveaux d'efforts l'échelle des déplacements tangentiels $V_r = u_{3r} = h$ est mal choisie, et qu'il faut prendre $V_r = \varepsilon u_{3r} = \varepsilon h$ afin que $\tilde{V}$ soit de l'ordre de l'unité. Il convient donc de "réadimensionnaliser" le déplacement tangentiel V^* avec $V_r = \varepsilon u_{3r}$ comme échelle de référence.

La relation $V_r = \varepsilon u_{3r}$, qui est obtenue ici comme conséquence de notre démarche, est formellement équivalente aux hypothèses sur les changements d'échelle effectuées dans [4-6, 15] aussi bien dans le cas linéaire que dans le cas non linéaire. Elle traduit le fait que le déplacement tangentiel V^* est très inférieur à la déflexion u_3^* et conduit (proposition 2) aux hypothèses de Kirchhoff-Love. Considérer $V_r = \varepsilon u_{3r}$ comme hypothèse *a priori* revient à avoir déjà une idée intuitive de la solution.

Nous effectuons donc une nouvelle adimensionnalisation des équations d'équilibre avec cette fois $u_{3r} = h$, $V_r = \varepsilon h$ et nous continuerons à noter les composantes du déplacement adimensionnel par V et u_3 .

Proposition 2 : Pour des niveaux d'efforts extérieurs donnés vérifiant $\mathcal{F}_3 = \mathcal{G}_3 = \varepsilon^4$ et $\mathcal{G}_t = \varepsilon^3$, le premier terme (V^0, u_3^0) du développement de (V, u_3) est un déplacement de Kirchhoff-Love qui satisfait à :

$$\text{i) } u_3^0 = \zeta_3^0(x_1, x_2) \quad V^0 = \zeta_t^0(x_1, x_2) - x_3 \operatorname{grad} \zeta_3^0$$

$$\text{ii) } \zeta_3^0 \text{ est solution du problème de flexion}$$

$$\frac{8}{3} \frac{\beta+1}{\beta+2} \Delta^2 \zeta_3^0 = p_3 + \operatorname{div} M_t \quad \text{avec} \quad u_3^0|_{\partial\omega} = \frac{\partial u_3^0}{\partial n}|_{\partial\omega} = 0$$

où l'on a posé :

$$M_t = g_t^+ - g_t^- \quad p_3 = \int_{-1}^1 f_3 dx_3 + (g_3^+ + g_3^-)$$

iii) ζ_t^0 est solution du problème de membrane

$$\operatorname{div} n_t^0 = -p_t \quad \text{avec} \quad \zeta_t^0|_{\partial\omega} = 0$$

$$\text{où :} \quad n_t^0 = \frac{4\beta}{2+\beta} \operatorname{Tre}_t(\zeta_t^0) I_2 + 4e_t(\zeta_t^0) \quad e_t(\zeta_t^0) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\zeta_t^0 + \overline{\operatorname{grad}\zeta_t^0})$$

$$p_t = g_t^+ + g_t^-$$

Démonstration : La démonstration de ce résultat comporte trois étapes numérotées de i) à iii).
 i) (u_3^0, V^0) est un déplacement de Kirchhoff-Love.

Pour des niveaux d'efforts de type $\mathcal{F}_3 = \mathcal{G}_3 = \varepsilon^4$, $\mathcal{F}_t = 0$ et $\mathcal{G}_t = \varepsilon^3$, l'adimensionnalisation des équations d'équilibre (1)-(2) avec $u_{3r} = h$ et $V_r = \varepsilon u_{3r}$, conduit sur $\Omega = \omega \times]-1, 1[$ à :

$$\varepsilon^2[(1+\beta)\operatorname{grad} \operatorname{div} V + \Delta V] + (1+\beta)\operatorname{grad} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = 0 \quad (6)$$

$$\varepsilon^2[(1+\beta)\frac{\partial}{\partial x_3}\operatorname{div} V + \Delta u_3] + (2+\beta)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = -\varepsilon^4 f_3.$$

Les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure sont données par

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u_3 + \frac{\partial V}{\partial x_3} &= \pm \varepsilon^2 g_t^\pm \quad \text{pour } x_3 = \pm 1 \\ (2+\beta)\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \varepsilon^2 \beta \operatorname{div} V &= \pm \varepsilon^4 g_3^\pm \quad \text{pour } x_3 = \pm 1. \end{aligned} \quad (7)$$

On postule à nouveau l'existence d'un développement en série formelle de la solution "réadimensionnalisée" (V, u_3) :

$$\begin{aligned} V &= V^0 + \varepsilon V^1 + \varepsilon^2 V^2 + \dots \\ u_3 &= u_3^0 + \varepsilon u_3^1 + \varepsilon^2 u_3^2 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

En reportant les développements de V et de u_3 dans les équations (6) et (7) et en annulant successivement les facteurs des différentes puissances de ε , on obtient des problèmes couplés $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots$ faisant intervenir les inconnues du développement (8). Le problème $\mathcal{P}_0$ s'écrit alors :

$$(1+\beta)\operatorname{grad} \frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 V^0}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (9)$$

$$(2+\beta)\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (10)$$

$$\frac{\partial V^0}{\partial x_3} = -\operatorname{grad} u_3^0 \quad \text{pour } x_3 = \pm 1, \quad (11)$$

$$(2+\beta)\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} = 0 \quad \text{pour } x_3 = \pm 1. \quad (12)$$

L'équation (10) nous donne $u_3^0 = x_3 \phi_3^0(x_\alpha) + \zeta_3^0(x_\alpha)$ et (12) implique alors $\phi_3^0 = 0$. On a donc :

$$u_3^0 = \zeta_3^0(x_1, x_2) \quad (13)$$

D'autre part, (9) et (13) impliquent :

$$V^0 = -x_3 \phi(x_\alpha) + \zeta_t^0(x_1, x_2)$$

qui devient avec (11) :

$$V^0 = \zeta_t^0(x_1, x_2) - x_3 \text{grad } u_3^0. \quad (14)$$

Le point i) de la proposition 2 est ainsi démontré.

Les problèmes étant couplés deux à deux de façon décalée ($\mathcal{P}_0$ est couplé avec $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_4 \dots$ alors que $\mathcal{P}_1$ est couplé avec $\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_5 \dots$), le problème $\mathcal{P}_1$ conduit à un résultat similaire pour u_3^1 et V^1 . Même si ce résultat ne sert pas dans la démonstration des points ii) et iii), il sera nécessaire au calcul des contraintes et se trouve donc explicité ici.

Les équations du problème $\mathcal{P}_1$ sont similaires à celles du problème $\mathcal{P}_0$:

$$(1 + \beta) \text{grad } \frac{\partial u_3^1}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 V^1}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (15)$$

$$(2 + \beta) \frac{\partial^2 u_3^1}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (16)$$

$$\frac{\partial V^1}{\partial x_3} = -\text{grad } u_3^1 \quad \text{pour } x_3 = \pm 1, \quad (17)$$

$$(2 + \beta) \frac{\partial u_3^1}{\partial x_3} = 0 \quad \text{pour } x_3 = \pm 1. \quad (18)$$

Ainsi on a :

$$u_3^1 = \zeta_3^1(x_1, x_2) \quad (19)$$

$$V^1 = \zeta_t^1(x_1, x_2) - x_3 \text{grad } u_3^1.$$

u) Équation de flexion.

L'annulation du facteur de ε^2 conduit au problème $\mathcal{P}_2$:

$$(1 + \beta) \text{grad div } V^0 + \Delta V^0 + (1 + \beta) \text{grad } \frac{\partial u_3^2}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 V^2}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (20)$$

$$(1 + \beta) \frac{\partial}{\partial x_3} \text{div } V^0 + \Delta u_3^0 + (2 + \beta) \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (21)$$

$$\text{grad } u_3^2 + \frac{\partial V^2}{\partial x_3} = \pm g_t^\pm \quad \text{pour } x_3 = \pm 1, \quad (22)$$

$$(2 + \beta) \frac{\partial u_3^2}{\partial x_3} + \beta \text{div } V^0 = 0 \quad \text{pour } x_3 = \pm 1. \quad (23)$$

En remplaçant alors V^0 par son expression trouvée en (14), l'équation (20) peut s'écrire sous la forme :

$$-x_3(2 + \beta) \text{grad } \Delta u_3^0 + \beta \text{grad } \frac{\partial u_3^2}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} (\text{grad } u_3^2 + \frac{\partial V^2}{\partial x_3}) + [(1 + \beta) \text{grad div } \zeta_t^0 + \Delta \zeta_t^0] = 0. \quad (24)$$

En multipliant maintenant la dernière expression par x_3 et en intégrant par rapport à l'épaisseur après avoir pris la divergence, il vient :

$$-\frac{2}{3}(2+\beta)\Delta^2 u_3^0 + \beta \int_{-1}^1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \Delta u_3^2 dx_3 + \int_{-1}^1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} (\Delta u_3^2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \operatorname{div} V^2) dx_3 = 0. \quad (25)$$

Mais, compte tenu de (14), (21) peut s'écrire sous la forme :

$$-\beta \Delta u_3^0 + (2+\beta) \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial x_3^2} = 0 \quad (26)$$

qui devient en tenant compte de la condition aux limites (23) :

$$\frac{\partial u_3^2}{\partial x_3} = -\frac{\beta}{2+\beta} \left(-x_3 \Delta u_3^0 + \operatorname{div} \zeta_t^0 \right) = -\frac{\beta}{2+\beta} \operatorname{div} V^0. \quad (27)$$

Remplaçant alors :

$$\int_{-1}^1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \Delta u_3^2 dx_3 = \frac{2\beta}{3(2+\beta)} \Delta^2 u_3^0$$

dans (25), on obtient :

$$-\frac{8\beta+1}{3\beta+2} \Delta^2 u_3^0 + \int_{-1}^1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} (\Delta u_3^2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \operatorname{div} V^2) dx_3 = 0. \quad (28)$$

D'autre part, l'intégration par partie du second terme de (28) conduit à :

$$\int_{-1}^1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} (\Delta u_3^2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \operatorname{div} V^2) dx_3 = \left[x_3 (\Delta u_3^2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \operatorname{div} V^2) \right]_{-1}^1 - \left\{ \int_{-1}^1 \Delta u_3^2 dx_3 + [\operatorname{div} V^2]_{-1}^1 \right\}$$

et avec la condition aux limites (22) le premier terme du second membre devient :

$$\left[x_3 (\Delta u_3^2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \operatorname{div} V^2) \right]_{-1}^1 = \operatorname{div} (g_t^+ - g_t^-)$$

L'équation (28) s'écrit alors :

$$\frac{8\beta+1}{3\beta+2} \Delta^2 u_3^0 + \underbrace{\int_{-1}^1 \Delta u_3^2 dx_3 + [\operatorname{div} V^2]_{-1}^1}_{(a)} = \operatorname{div} M_t$$

où l'on a posé :

$$M_t = g_t^+ - g_t^-.$$

Il convient maintenant d'expliciter le problème $\mathcal{P}_4$ pour éliminer le terme (a).

La deuxième équation et la deuxième condition aux limites du problème $\mathcal{P}_4$ s'écrivent :

$$(1+\beta) \frac{\partial}{\partial x_3} \operatorname{div} V^2 + \Delta u_3^2 + (2+\beta) \frac{\partial^2 u_3^4}{\partial x_3^2} = -f_3 \quad \text{dans } \Omega, \quad (29)$$

$$(2+\beta) \frac{\partial u_3^4}{\partial x_3} + \beta \operatorname{div} V^2 = \pm g_3^\pm \quad \text{pour } x_3 = \pm 1. \quad (30)$$

En intégrant alors (29) entre -1 et 1 , on a .

$$\left[(1 + \beta) \operatorname{div} V^2 + (2 + \beta) \frac{\partial u_3^4}{\partial x_3} \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \Delta u_3^2 dx_3 = - \int_{-1}^1 f_3 dx_3$$

qui devient avec (30) .

$$\underbrace{[\operatorname{div} V^2]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \Delta u_3^2 dx_3}_{(a)} = - \left[\int_{-1}^1 f_3 dx_3 + (g_3^+ + g_3^-) \right].$$

On obtient donc finalement :

$$\frac{8}{3} \frac{\beta + 1}{\beta + 2} \Delta^2 u_3^0 = \int_{-1}^1 f_3 dx_3 + (g_3^+ + g_3^-) + \operatorname{div} M_t \quad (31)$$

qui constitue après retour au domaine initial (voir paragraphe 7) l'équation standard bidimensionnelle des plaques minces en flexion. Le point ii) de la proposition 2 est ainsi prouvé.

m) Équation de membrane .

En intégrant maintenant directement (24) sur l'épaisseur, il reste :

$$\int_{-1}^1 \beta \operatorname{grad} \frac{\partial u_3^2}{\partial x_3} dx_3 + \left[\operatorname{grad} u_3^2 + \frac{\partial V^2}{\partial x_3} \right]_{-1}^1 + 2[(1 + \beta) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \zeta_t^0) + \Delta \zeta_t^0] = 0. \quad (32)$$

Utilisant alors d'une part la condition aux limites (22)

$$\left[\operatorname{grad} u_3^2 + \frac{\partial V^2}{\partial x_3} \right]_{-1}^1 = g_t^+ + g_t^-$$

et d'autre part l'équation de couplage (27)

$$\frac{\partial u_3^2}{\partial x_3} = - \frac{\beta}{2 + \beta} \left(-x_3 \Delta u_3^0 + \operatorname{div} \zeta_t^0 \right) = - \frac{\beta}{2 + \beta} \operatorname{div} V^0$$

l'équation (32) devient :

$$\frac{4 + 6\beta}{2 + \beta} \operatorname{grad} \operatorname{div} \zeta_t^0 + 2\Delta \zeta_t^0 = -(g_t^+ + g_t^-). \quad (33)$$

Il est également possible d'écrire (33) de façon plus intrinsèque sous la forme :

$$\operatorname{div} n_t^0 = -p_t$$

où l'on a posé :

$$n_t^0 = \frac{4\beta}{2 + \beta} \operatorname{Tr} \left(e_t(\zeta_t^0) \right) I_2 + 4e_t(\zeta_t^0)$$

$$e_t(\zeta_t^0) = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \zeta_t^0 + \overline{\operatorname{grad} \zeta_t^0}) \quad \text{et} \quad p_t = g_t^+ + g_t^-$$

La proposition 2 est ainsi démontrée.

Remarque · On aurait pu également adimensionnaliser directement le déplacement U^* avec $V_r = u_{3r} = L$. Compte tenu de la linéarité des équations, cela revient à diviser par ε les premiers membres des équations adimensionnelles (3) et (4). En mettant en oeuvre la technique des développements asymptotiques, on obtiendrait les mêmes équations qu'à la proposition 2 avec un second membre nul, équations qui admettent comme unique solution $(V_0, u_3^0) = (0, 0)$ dans $[H_0^1(\omega)]^2 \times H_0^2(\omega)$. On serait alors conduit à "réadimensionnaliser" le déplacement avec $V_r = u_{3r} = h$, ce qui nous ramène au cas traité ici

6. Calcul des contraintes

Il est maintenant possible de déduire, de la loi de comportement tridimensionnelle ainsi que des résultats précédemment obtenus, l'expression des composantes du tenseur des contraintes. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, la loi de comportement s'écrit :

$$\sigma^* = \lambda \operatorname{Tr}(e^*) I + 2\mu e^* \quad (34)$$

où :

$$e^* = \frac{1}{2}(\operatorname{Grad}^* U^* + \overline{\operatorname{Grad}^* U^*})$$

représente le tenseur linéarisé des déformations.

Décomposant U^* sous la forme $U^* = V^* + u_3^* e_3$, les composantes du tenseur des contraintes s'écrivent alors :

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} \lambda \left[\operatorname{div}^* V^* + \frac{\partial u_3^*}{\partial x_3^*} \right] I_2 + 2\mu e_t^*(V^*) & \mu \left[\frac{\partial V^*}{\partial x_3^*} + \operatorname{grad}^* u_3^* \right] \\ \mu \left[\overline{\frac{\partial V^*}{\partial x_3^*}} + \overline{\operatorname{grad}^* u_3^*} \right] & \lambda \operatorname{div}^* V^* + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3^*}{\partial x_3^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_t^* & \sigma_s^* \\ \overline{\sigma_s^*} & \sigma_n^* \end{pmatrix}$$

où l'on a posé :

$$e_t^*(V^*) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}^* V^* + \overline{\operatorname{grad}^* V^*})$$

et où I_2 désigne l'identité de $\mathbb{R}^2$.

Adimensionnalisant alors σ^* composante par composante avec $u_{3r} = h$ et $V_r = \varepsilon u_{3r}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t^*}{\mu} &= \beta \frac{\partial u_3}{\partial x_3} I_2 + \varepsilon^2 \left[\beta \operatorname{div} V I_2 + 2e_t(V) \right] \\ \frac{\sigma_s^*}{\mu} &= \varepsilon \left[\operatorname{grad} u_3 + \frac{\partial V}{\partial x_3} \right] \\ \frac{\sigma_n^*}{\mu} &= (2 + \beta) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \varepsilon^2 \beta \operatorname{div} V \end{aligned} \quad (35)$$

où :

$$e_t(V) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} V + \overline{\operatorname{grad} V}).$$

Remplaçons maintenant V et u_3 par leurs développements (8) et utilisons certains résultats

précédemment obtenus pour simplifier les expressions. D'une part nous avons les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-love vérifiées par les deux premiers termes du développement de (V, u_3) qui s'écrivent :

$$\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial V^0}{\partial x_3} + \text{grad } u_3^0 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_3^1}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial V^1}{\partial x_3} + \text{grad } u_3^1 = 0.$$

D'autre part, le problème $\mathcal{P}_3$ conduit de façon analogue à une autre relation de couplage, similaire à (27), où les indices sont simplement décalés :

$$\frac{\partial u_3^3}{\partial x_3} = -\frac{\beta}{2+\beta} \text{div } V^1. \quad (36)$$

Utilisant alors les relations de couplage (27) et (36), ainsi que les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-love ci-dessus, (35) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\sigma_t^*}{\varepsilon^2 \mu} = \frac{2\beta}{2+\beta} \text{div } V^0 I_2 + 2e_t(V^0) + \varepsilon \left[\frac{2\beta}{2+\beta} \text{div } V^1 I_2 + 2e_t(V^1) \right] + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{\sigma_s^*}{\varepsilon^2 \mu} = \varepsilon \left[\text{grad } u_3^2 + \frac{\partial V^2}{\partial x_3} \right] + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{\sigma_n^*}{\varepsilon^2 \mu} = \varepsilon^2 \left[(2+\beta) \frac{\partial u_3^4}{\partial x_3} + \beta \text{div } V^2 \right] + O(\varepsilon^3).$$

Le choix de l'échelle de référence des contraintes $\sigma_r = \varepsilon^2 \mu$ apparaît alors naturellement. En effet, si on choisit la même contrainte de référence pour toutes les composantes de σ^* , l'adimensionnalisation des contraintes doit être telle qu'au moins une composante de $\sigma = \frac{\sigma^*}{\sigma_r}$ soit de l'ordre de 1.

L'existence d'un développement de la solution (V, u_3) en puissances de ε implique donc l'existence d'un développement de σ en puissances de ε :

$$\sigma = \sigma^0 + \varepsilon \sigma^1 + \varepsilon^2 \sigma^2 + \dots \quad (37)$$

avec :

$$\begin{aligned} \sigma_t^0 &= \frac{2\beta}{2+\beta} \text{Tr} e_t(V^0) I_2 + 2e_t(V^0) \\ \sigma_s^1 &= \text{grad } u_3^2 + \frac{\partial V^2}{\partial x_3} & \sigma_s^0 &= 0 \\ \sigma_n^2 &= (2+\beta) \frac{\partial u_3^4}{\partial x_3} + \beta \text{div } V^2 & \sigma_n^1 &= 0 & \sigma_n^0 &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Il est également possible d'écrire σ_t^0 sous la forme

$$\sigma_t^0 = \frac{1}{2} n_t^0 + \frac{3}{2} x_3 m_t^0 \quad (39)$$

où l'on a posé :

$$m_t^0 = -\left\{ \frac{4\beta}{3(2+\beta)} \Delta \zeta_3^0 I_2 + \frac{4}{3} \text{grad}(\text{grad} \zeta_3^0) \right\}$$

$$n_t^0 = \frac{4\beta}{2+\beta} \text{Tre}_t(\zeta_t^0) I_2 + 4e_t(\zeta_t^0) \quad \text{et} \quad e_t(\zeta_t^0) = \frac{1}{2} (\text{grad} \zeta_t^0 + \overline{\text{grad} \zeta_t^0}).$$

Les expressions explicites de σ_s^1 et de σ_n^2 s'obtiennent maintenant par intégration sur l'épaisseur. La démarche est analogue à celle développée par P.G. Ciarlet et P. Destuynder dans [4] et [6].

Calcul σ_s^1 :

Prenant le gradient de (27) et remplaçant l'expression ainsi obtenue dans (20), il vient :

$$\frac{2+3\beta}{2+\beta} \text{grad div} V^0 + \Delta V^0 + \frac{\partial^2 V^2}{\partial x_3^2} + \text{grad} \frac{\partial u_3^2}{\partial x_3} = 0.$$

Compte tenu alors de (38) et des conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_s^1 &= -\text{div} \sigma_t^0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_s^1 &= \pm g_t^\pm & \text{sur } \Gamma^\pm. \end{cases}$$

L'intégration de l'équation précédente conduit à :

$$\sigma_s^1 = -\frac{2(1+\beta)}{2+\beta} (1-x_3^2) \text{grad} \Delta u_3^0 + \frac{g_t^+ - g_t^-}{2} + \frac{x_3}{2} (g_t^+ + g_t^-) \quad (40)$$

où l'équation d'équilibre (31) a été utilisée afin de regrouper certains termes.

Calcul de σ_n^2 :

L'égalité (29) s'écrit encore :

$$\beta \frac{\partial \text{div} V^2}{\partial x_3} + (2+\beta) \frac{\partial^2 u_3^4}{\partial x_3^2} + \Delta u_3^2 + \frac{\partial \text{div} V^2}{\partial x_3} = -f_3$$

On obtient alors compte tenu de (38) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_n^2 &= -\text{div} \sigma_s^1 - f_3 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_n^2 &= \pm g_3^\pm & \text{sur } \Gamma^\pm. \end{cases}$$

Compte tenu de (40), l'intégration de σ_n^2 conduit à :

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \frac{2x_3}{3} (1-x_3^2) \frac{\beta+1}{\beta+2} \Delta^2 u_3^0 + \frac{1+x_3}{2} \int_{-1}^1 f_3 dx_3 - \int_{-1}^{x_3} f_3(t) dt \\ &+ \frac{g_3^+ - g_3^-}{2} + \frac{x_3}{2} (g_3^+ + g_3^-) + \frac{1}{4} (1-x_3^2) \text{div} (g_t^+ + g_t^-) \end{aligned} \quad (41)$$

7. Retour aux variables initiales

Le retour au domaine initial Ω^* ainsi qu'aux variables physiques V^* , u_3^* , f^* et g^* conduit à définir :

$$V^{*0} = V_r V^0 = \varepsilon h V^0$$

$$u_3^{*0} = u_{3r} u_3^0 = h u_3^0$$

On a alors le résultat suivant .

Proposition 3 : Le déplacement (V^{*0}, u_3^{*0}) est un déplacement de Kirchhoff-Love qui vérifie l'équation standard bibimensionnelle des plaques minces en flexion :

$$u_3^{*0} = \zeta_3^{*0}(x_1^*, x_2^*) \quad V^{*0} = \zeta_t^{*0}(x_1^*, x_2^*) - x_3^* \text{grad} \zeta_3^{*0}$$

$$\frac{2}{3} \frac{E h^3}{1 - \nu^2} \Delta^{*2} u_3^{*0} = p_3^* + \text{div}^* M_t^*$$

$$h \text{div}^* n_t^{*0} = -p_t^*$$

où :

$$n_t^{*0} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \text{Tr} e_t^*(\zeta^{*0}) I_2 + 4\mu e_t^*(\zeta^{*0}) \quad e_t^*(\zeta^{*0}) = \frac{1}{2} (\text{grad}^* \zeta_t^{*0} + \overline{\text{grad}^* \zeta_t^{*0}})$$

$$M_t^* = h(g_t^{*+} - g_t^{*-}), \quad p_t^* = g_t^{*+} + g_t^{*-}, \quad p_3^* = \int_{-h}^h f_3^* dx_3^* + (g_3^{*+} + g_3^{*-}).$$

En effet, l'équation (31) devient après retour aux variables initiales :

$$\frac{8}{3} \frac{L^4 g_{3r}}{u_{3r}} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \Delta^{*2} u_3^{*0} = \int_{-h}^h f_3^* dx_3^* + (g_3^{*+} + g_3^{*-}) + \frac{L g_{3r}}{g_{tr}} \text{div}^* (g_t^{*+} - g_t^{*-})$$

avec $g_{3r} = h f_{3r}$.

Or compte tenu du choix des niveaux d'efforts, on a :

$$\frac{L^4 g_{3r}}{u_{3r}} = \frac{G_3}{\varepsilon^4} \mu h^3 = \mu h^3 \quad \text{et} \quad \frac{L g_{3r}}{g_{tr}} = h.$$

Remarquant d'autre part que :

$$4 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \mu = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

on obtient finalement :

$$\frac{2}{3} \frac{E h^3}{1 - \nu^2} \Delta^{*2} u_3^{*0} = p_3^* + \text{div}^* M_t^*$$

où :

$$M_t^* = h(g_t^{*+} - g_t^{*-})$$

représente le moment de flexion induit par les efforts surfaciques tangentiels. On retrouve bien après retour au domaine initial l'équation standard bidimensionnelle des plaques minces en flexion.

D'autre part, le retour aux variables dimensionnelles dans l'équation (33) conduit à :

$$\frac{L^2 g_{tr}}{V_r} \left[\frac{4+6\beta}{2+\beta} \text{grad}^*(\text{div}^* \zeta_t^{*0}) + 2\Delta^* \zeta_t^{*0} \right] = -(g_t^{*+} + g_t^{*-}).$$

Or compte tenu des niveaux d'efforts appliqués on a :

$$\frac{L^2 g_{tr}}{V_r} = h\mu \frac{G_t}{\varepsilon^3} = h\mu$$

d'où l'équation de membrane dimensionnelle énoncée à la proposition 3.

Compte tenu maintenant de l'adimensionnalisation des contraintes, le retour aux variables physiques conduit à définir :

$$\sigma_t^{*0} = \varepsilon^2 \mu \sigma_t^0 \quad \sigma_s^{*0} = \varepsilon^3 \mu \sigma_s^1 \quad \sigma_n^{*0} = \varepsilon^4 \mu \sigma_n^2$$

On a alors l'expression suivante des contraintes physiques sur l'épaisseur :

Proposition 4 :

$$\begin{aligned} \sigma_t^{*0} &= n_t^{*0} + \frac{3x_3^*}{2} m_t^{*0} \\ \sigma_s^{*0} &= -2(h^2 - (x_3^*)^2) \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \text{grad}^* \Delta^* \zeta_3^{*0} + \frac{g_t^{*+} - g_t^{*-}}{2} + \frac{x_3^*}{2h} (g_t^{*+} + g_t^{*-}) \\ \sigma_n^{*0} &= \frac{2}{3} x_3^* (h^2 - (x_3^*)^2) \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta^{*2} \zeta_3^{*0} + \left(\frac{1}{2} + \frac{x_3^*}{2h} \right) \int_{-h}^h f_3^* dx_3^* - \int_{-h}^{x_3^*} f_3^*(t^*) dt^* \\ &\quad + \frac{1}{2} (g_3^{*+} - g_3^{*-}) + \frac{x_3^*}{2h} (g_3^{*+} + g_3^{*-}) + \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{x_3^*}{h} \right)^2 \right) \text{div}^* \left[h(g_t^{*+} + g_t^{*-}) \right] \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} m_t^{*0} &= - \left\{ \frac{4\lambda\mu}{3(\lambda + 2\mu)} \Delta^* \zeta_3^{*0} I_2 + \frac{4\mu}{3} \text{grad}^*(\text{grad}^* \zeta_3^{*0}) \right\} \\ n_t^{*0} &= \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \text{Tre}_t^*(\zeta^{*0}) I_2 + 4\mu e_t^*(\zeta^{*0}) \end{aligned}$$

8. Conclusion

Cette nouvelle approche constructive, consistant à traiter directement l'équation de Navier sans passer par une formulation variationnelle, présente de nombreux avantages. Elle permet notamment d'introduire (lors de l'adimensionnalisation de l'équation de Navier) des nombres sans dimension caractérisant la nature physique du problème. Ces nombres sont similaires à ceux introduits par J. Sanchez-Hubert et E. Sanchez-Palencia dans [21].

L'interprétation des nombres adimensionnels obtenus, nécessaire pour pouvoir ensuite les

relier aux différentes puissances de ε , amène aux conclusions suivantes :

i) la donnée de l'ordre de grandeur des efforts extérieurs ou de façon équivalente de $\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{G}_t$ et $\mathcal{G}_3$ en fonction de ε détermine :

a) le rapport $\frac{u_{3r}}{V_r}$

b) le modèle bidimensionnel final.

ii) pour des niveaux d'efforts extérieurs vérifiant $\mathcal{G}_t = \varepsilon^3$ et $\mathcal{F}_3 = \mathcal{G}_3 = \varepsilon^4$, le rapport $\frac{u_{3r}}{V_r}$ est égal à $\frac{1}{\varepsilon}$ et le modèle bidimensionnel obtenu est celui de Kirchhoff-Love. La plupart des cas usuels de plaques minces en flexion relèvent de ces hypothèses.

On justifie ainsi pour ces niveaux d'efforts le décollage en ε entre les composantes tangentielle et normale du déplacement, généralement pris comme hypothèse, aussi bien dans le cas linéaire [4, 6] que dans le cas non linéaire (modèle de Von Karman [5]).

Ainsi, le modèle de Kirchhoff-Love est valable pour des niveaux d'efforts où $\mathcal{F}_3 = \frac{hf_{3r}}{\mu}$ et $\mathcal{G}_3 = \frac{g_{3r}}{\mu}$ sont de l'ordre de $(\frac{h}{L})^4$ ($\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{G}_3$ étant des données du problème). Pour ces niveaux d'efforts, la déflexion est de l'ordre de l'épaisseur.

Notons enfin que même si cette approche, basée sur une formulation forte du problème est avant tout formelle, il est ensuite possible de revenir au cadre fonctionnel introduit par P.G. Ciarlet et P. Destuynder [4-6] pour retrouver les résultats classiques d'existence, d'unicité et de convergence.

Bibliographie

- [1] Caillerie D., Thin elastic and periodic plates, *Math. Methods in Appl. Sci.* **6** (1984) 159-191.
- [2] Ciarlet P.G. et Destuynder P., Une justification du modèle bi-harmonique en théorie des plaques, *C.R. Acad. Sci. Paris* **285** (1977) 851-854.
- [3] Ciarlet P.G. et Destuynder P., Une justification du modèle non linéaire en théorie des plaques, *C.R. Acad. Sci. Paris* **287** (1978) 33-36.
- [4] Ciarlet P.G. et Destuynder P., Justification of the two-dimensional linear plate model, *J. Mécanique* **18** (1979) 315-344.
- [5] Ciarlet P.G. et Destuynder P., A justification of nonlinear model in plate theory, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg* **17/18** (1979) 227-258.
- [6] Ciarlet P.G., Plates and junctions in elastic multi-structures, *An Asymptotic Analysis* (Masson, Paris, 1990).
- [7] Ciarlet P.G., Lods V. et Miara B., Analyse asymptotique des coques linéairement élastiques. I. Coques "membranaires", *C.R. Acad. Sci. Paris* **318** (1994) 863-868.
- [8] Ciarlet P.G., Lods V. et Miara B., Analyse asymptotique des coques linéairement élastiques. II. Coques "en flexion", *C.R. Acad. Sci. Paris* **319** (1994) 95-100.
- [9] Ciarlet P.G., Lods V. et Miara B., Analyse asymptotique des coques linéairement élastiques. III. Une justification du modèle de W. T. Koiter, *C.R. Acad. Sci. Paris* **319** (1994) 299-304.

- [10] Ciarlet P.G. et Lods V., Analyse asymptotique des coques linéairement élastiques. IV. Coques "membranaires sensibles", *C.R. Acad. Sci. Paris* **321** (1995) 649-654.
- [11] Cimetière A., Sur la modélisation et le flambage des plaques élastoplastiques, Thèse d'état, université de Poitiers, 1987.
- [12] Davet J L., Justification de modèles de plaques non linéaires pour des lois de comportement générales, *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, **20** (1986) 225-249.
- [13] Destuynder P., Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques, Thèse d'État, Université de Pierre et Marie Curie, Paris, 1980.
- [14] Goldenveizer A.L., Derivation of an approximate theory of bending of a plate by the method of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity, *Prkl. Math. Mech.* **26** (1962) 668-686.
- [15] Miara B., Justification des mises à l'échelle et des hypothèses sur les données dans l'analyse asymptotique des modèles bidimensionnels de plaques. I Le cas linéaire, *C.R. Acad. Sci. Paris* **314** (1992) 687-690.
- [16] Miara B., Justification of the asymptotic analysis of elastic plates, I. The linear case, *Asymptotic Analysis* **9** (1994) 47-60.
- [17] Raoult A., Analyse Mathématique de Quelques Modèles de Plaques et de Poutres Élastiques ou Élasto-Plastiques. Thèse d'État, Université de Pierre et Marie Curie, Paris, 1988.
- [18] Sanchez-Palencia E., Statique et dynamique des coques minces. I Cas de flexion pure non inhibée , *C.R. Acad. Sci. Paris* **309** (1989) 411-417.
- [19] Sanchez-Palencia E., Statique et dynamique des coques minces. I. Cas de flexion pure inhibée - Approximation membranaire , *C.R. Acad. Sci. Paris* **309** (1989) 531-537.
- [20] Sanchez-Palencia E., Passage à la limite de l'élasticité tridimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces , *C.R. Acad. Sci. Paris* **311** (1990) 909-916. .
- [21] Sanchez-Hubert J. et Sanchez-Palencia E., Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation (Masson, 1992).
- [22] Sanchez-Palencia E., Coques élastiques minces peu courbées. Transition continue entre les théories de plaques et de coques , *C.R. Acad. Sci. Paris* **318** (1994) 783-790