



HAL
open science

Modélisation 3D des perturbations géomagnétiques induites. Validation du modèle éléments finis

J. Vatry, J. Berthier, P. Massé, R. Blanpain

► **To cite this version:**

J. Vatry, J. Berthier, P. Massé, R. Blanpain. Modélisation 3D des perturbations géomagnétiques induites. Validation du modèle éléments finis. *Journal de Physique III*, 1997, 7 (9), pp.1821-1828. 10.1051/jp3:1997225 . jpa-00249683

HAL Id: jpa-00249683

<https://hal.science/jpa-00249683>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation 3D des perturbations géomagnétiques induites. Validation du modèle éléments finis (*)

J. Vatry (**), J. Berthier, P. Massé et R. Blanpain

LETI (CEA – Technologies Avancées) Département Systèmes, CEA Grenoble,
17 rue des Martyrs, 38054 Grenoble Cedex 9, France

(Reçu le 20 mars 1997, révisé le 5 mai 1997, accepté le 13 juin 1997)

PACS.02 70.Dh – Finite-element and Galerkin methods

PACS.91 25.Qi – Geoelectricity; electromagnetic induction and conductivity

Résumé. — L'environnement magnétique très basse fréquence des zones côtières résulte d'influences multiples. Entre autres, les phénomènes d'induction électromagnétique, fortement tridimensionnels, sont provoqués par les variations temporelles du champ magnétique terrestre. Nous proposons une méthode de résolution avec des éléments finis nodaux en formulation quadrivecteur complexe pour des géométries tridimensionnelles, en utilisant le logiciel générateur Flux Expert. La première étape de validation de notre modèle est effectuée par comparaison avec d'autres méthodes pour des géométries simples de référence.

Abstract. — Three dimensional electromagnetic induction, due to time variations of geomagnetic field, is a part of low frequency electromagnetic environment of coastal areas. In this paper, a 3D nodal finite element modelling using complex scalar and vector potentials is presented. This model, implemented in Flux Expert software, is first checked against other numerical methods for various simple geometries to determine its accuracy.

1. Introduction

L'environnement magnétique des zones côtières peut être décomposé en quatre contributions distinctes. Le *champ magnétique dipolaire terrestre*, ou champ de Gauss, est de loin le plus important en terme d'amplitude. Dans la bande de fréquence qui nous intéresse, entre 0,001 et 1 Hz, ce champ est constant dans le temps et dans l'espace. Le *champ géologique* est dû aux propriétés magnétiques des roches, source d'anomalies spatiales. Le *champ hydrodynamique* est le résultat des mouvements de l'eau de mer conductrice dans le champ magnétique terrestre [1]. Enfin, le *champ géomagnétique*, sujet de cette étude, est provoqué par les variations temporelles des sources de courant magnétosphériques et ionosphériques qui créent par induction des courants électriques dans les parties conductrices de l'écorce terrestre et dans les océans [2]. Les trois dernières contributions ont des valeurs typiques allant de la dizaine à la centaine de nano-Teslas.

(*) Le contenu de cet article a été présenté à NUMELEC 97

(**) Auteur auquel doit être adressée la correspondance (e-mail: jvatry@cea.fr)

Dans les zones côtières, les forts contrastes de conductivité électrique entre l'océan et le continent sont à l'origine de l'effet côtier : les courants électriques induits circulent principalement le long de la côte dans l'eau de mer beaucoup plus conductrice et provoquent une augmentation importante de la composante verticale de l'induction magnétique [3].

Ce phénomène a été modélisé dans des cas simples de manière analytique [4] et par des méthodes numériques pour des géométries 2D [5,6]. La principale difficulté réside dans la prise en compte simultanément de la grande complexité de la bathymétrie réelle d'une zone côtière qui est purement 3D, d'un modèle adapté pour la géologie du sous-sol qui se situe à la frontière entre la croûte continentale et la croûte océanique et d'un modèle réaliste pour la nature des sources externes du champ géomagnétique. Des modèles 3D commencent à apparaître, utilisant la méthode des différences finies [7]. Des méthodes intégrales permettent également de tenir compte d'inhomogénéités 3D locales dans un milieu tabulaire régional [8].

Nous proposons une modélisation purement 3D de l'effet côtier en utilisant la méthode des éléments finis, bien adaptée à la description fine de la géométrie. La formulation et la résolution du problème sont effectuées avec le logiciel générateur Flux Expert [9]. Devant la complexité des phénomènes étudiés, il semble nécessaire d'apporter un soin particulier à la validation de notre modèle. En effet, dans des cas 3D, la direction des courants électriques est *a priori* quelconque par rapport aux sauts de conductivité électrique. La prise en compte des conditions de continuité des champs au niveau de ces interfaces est alors essentielle. Dans un premier temps, nous testons notre modèle pour un milieu tabulaire dans lequel les couches géologiques sont parallèles, horizontales et s'étendent à l'infini ; une solution analytique existe [10]. Nous traitons ensuite le cas d'un milieu 2D, pour lequel nous comparons les résultats de notre modèle avec ceux issus d'une méthode différences finies [11] et d'une méthode spectrale [12]. Pour les deux géométries, les sources sont assimilées à des ondes planes en incidence verticale.

Cette première étape dans la validation de notre modèle 3D nous permettra ensuite d'envisager des calculs purement 3D, qui seront testés soit expérimentalement, soit à l'aide d'autres méthodes numériques 3D

2. Modèle

2.1. ÉQUATION DE DIFFUSION. — Pour un milieu homogène de conductivité électrique σ , de perméabilité magnétique $\mu = \mu_0$, avec des hypothèses de quasi-stationnarité et en l'absence de courants et de charges externes, les équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{E} = 0 \\ \text{div } \mathbf{B} = 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{array} \quad (1)$$

L'hypothèse $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ est parfaitement justifiée dans la mesure où nous travaillons à des fréquences inférieures à 1 Hz et avec des conductivités électriques inférieures à 10 S m^{-1} .

2.2. POTENTIELS ÉLECTROMAGNÉTIQUES. — La résolution du système (1) en termes (\mathbf{E}, \mathbf{B}) comporte six inconnues complexes non continues aux interfaces. Par contre, l'utilisation du quadrivecteur potentiel électromagnétique (\mathbf{A}, V) permet de passer à quatre inconnues continues sur tout le domaine, ce qui permet l'utilisation d'éléments nodaux

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) = -j\omega\sigma \mathbf{A} - \sigma \text{grad } V. \quad (2)$$

L'unicité du potentiel vecteur \mathbf{A} est assurée par la condition de jauge de Coulomb et le choix d'une référence nulle pour \mathbf{A} à l'infini. Finalement, les relations (2) et la loi de conservation

du courant nous conduisent au système classique sous forme discrète :

$$\begin{aligned}
 \iiint \nu \text{rot} \mathbf{B}_J \cdot \text{rot} \mathbf{A} &+ \iint \mathbf{n} \cdot (\nu \text{rot} \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}_J) + \iiint P \text{div} \mathbf{B}_J \cdot \text{div} \mathbf{A} - \iint \mathbf{n} \cdot P \mathbf{B}_J \text{div} \mathbf{A} \\
 &+ \iiint j \omega \sigma \mathbf{B}_J \cdot \mathbf{A} + \iiint j \omega \sigma \mathbf{B}_J \cdot \text{grad} v = \iiint \mathbf{B}_J \cdot \mathbf{J}_S \\
 \iiint \text{grad} \beta_j \cdot j \omega \sigma \mathbf{A} &- \iint \mathbf{n} \cdot \beta_j j \omega \sigma \mathbf{A} + \iiint \text{grad} \beta_j \cdot j \omega \sigma \text{grad} v \\
 &- \iint \mathbf{n} \cdot \beta_j j \omega \sigma \text{grad} v = 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

où $\nu = 1/\mu$, \mathbf{J}_S représente les sources de courant externes et \mathbf{B}_J et β_j les fonctions de projection. Afin de symétriser la matrice, le potentiel scalaire V est exprimé à l'aide d'un potentiel auxiliaire v défini par $V = \partial v / \partial t$ [13]. Le coefficient P représente la pénalité. Il permet d'introduire explicitement la condition de jauge dans la première relation du système (3) et permet de mieux conditionner la matrice.

Cette formulation a été décrite à l'aide du logiciel générateur Flux Expert [9].

3. Validation

La première étape de la validation de notre modèle est effectuée pour des cas de référence simples : milieu tabulaire et géométrie bidimensionnelle. La validité des hypothèses physiques simplificatrices admises ainsi que la formulation discrète implémentée sont ainsi testées. Néanmoins, seul un véritable calcul 3D permettra de vérifier la capacité de notre modèle à simuler un milieu réel. Une telle validation est actuellement en cours de réalisation.

3.1. MILIEU TABULAIRE. — Considérons un repère orthonormé $(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ où z est vertical et positif vers le haut. Dans le cas simple d'une géométrie tabulaire, pour laquelle les couches du sous-sol sont horizontales, parallèles entre elles et s'étendent à l'infini, une solution analytique existe : c'est la formulation de Lipskaya qui sert de base à l'algorithme récursif de Kunetz pour un milieu à n couches [10]. La forme générale des solutions de l'équation d'Helmholtz pour la couche n est

$$f = f_n^+ e^{k_n z} + f_n^- e^{-k_n z} \tag{4}$$

où $k_n^2 = j \omega \mu \sigma_n$ et f_n^+ et f_n^- sont des constantes calculables à partir des conditions de continuité de l'induction magnétique, des composantes tangentielles du champ électrique et du courant normal

La continuité des champs électromagnétiques aux interfaces entraîne la continuité de l'impédance normale Z définie par le rapport entre E_x et B_y ou entre E_y et B_x . Nous obtenons finalement une relation de récurrence en exprimant l'impédance de l'interface supérieure de la couche n en fonction de l'impédance de l'interface supérieure d'une couche m plus profonde.

3.2. GÉOMÉTRIE BIDIMENSIONNELLE. — Dans le cas d'une géométrie 2D, la conductivité électrique σ , le champ électrique \mathbf{E} et l'induction magnétique \mathbf{B} sont indépendants de x . Les composantes des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} se décomposent en deux modes totalement découplés, le mode *transverse électrique* (TE) qui correspond à des courants source circulant suivant la direction transverse Ox et permet de calculer les composantes E_x , B_y et B_z , et le mode *transverse magnétique* (TM) qui correspond à des courants source circulant dans le plan de calcul suivant la direction Oy et permet de calculer les composantes B_x , E_y et E_z .

3.2.1. *Différences finies.* — En mode TE, l'inconnue est la composante transverse E_x . Les composantes non nulles de l'induction magnétique \mathbf{B} sont calculées par dérivation. Nous obtenons

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = jkE_x \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \frac{j}{\omega} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{y} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \mathbf{z} \right) \quad (5)$$

où $k = \omega\mu\sigma$. En mode TM, l'inconnue est la composante transverse B_x , à laquelle on a rajouté le terme en $\text{grad}\sigma \wedge \text{rot}\mathbf{B}$, tenant ainsi compte des contrastes de conductivité électrique. Les composantes non nulles du champ électrique \mathbf{E} sont calculées par dérivation. Nous obtenons

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial\sigma}{\partial y} \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial\sigma}{\partial z} \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) = jkB_x \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\mu\sigma} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} \mathbf{y} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \mathbf{z} \right). \quad (6)$$

Notre objectif est la résolution des équations (5) et (6) dans le demi-espace $z < 0$ défini par une distribution de k donnée [11]. Dans l'air, l'induction magnétique sera considérée uniforme et horizontale.

Nous faisons l'hypothèse que lorsque $y \rightarrow \pm\infty$, la conductivité électrique σ ne varie plus qu'en fonction de la profondeur, c'est-à-dire que nous imposons des conditions aux limites tabulaires à l'infini [14].

3.2.2. *Méthode spectrale.* — La méthode employée est basée sur la décomposition en séries de Fourier spatiales des interfaces entre couches, et permet de décrire de façon simple les problèmes 2D à couches non interrompues [12, 15].

Les interfaces doivent être symétriques par rapport à l'axe vertical Oz et périodiques. Afin de pouvoir négliger cette périodicité, il est nécessaire que la période spatiale λ soit largement supérieure à la plus grande des périodes des interfaces. Les séries de Fourier sont également tronquées à partir d'un nombre L de coefficients tel que la plus petite période des interfaces soit prise en compte. Ces hypothèses conduisent à un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients des séries de Fourier tronquées. Il est résolu pour chaque mode en utilisant les conditions de continuité des grandeurs électromagnétiques entre les couches successives.

En mode TM, dans l'air, nous obtenons $B_x = B_0$ et $E_y = E_z = 0$. Dans les milieux conducteurs ($z < 0$), les trois composantes précédentes sont définies par la relation (6). Pour chaque couche n , l'induction magnétique est définie par

$$B_x^n(y, z, \omega) = B_0 \sum_{l=0}^L \left[A_l^n e^{R_l^n z} + B_l^n e^{-R_l^n z} \right] \cos(k_l y) \quad (7)$$

où $R_l^n = \sqrt{k_l^2 - j\omega\mu\sigma_n}$ et $k_l = \frac{2\pi l}{\lambda}$. Les composantes E_y^n et E_z^n sont calculées par dérivation suivant la relation (6).

La résolution pour le mode TE se fait de manière similaire. Les composantes E_x , B_y et B_z sont définies par les relations (5). Dans l'air, nous avons maintenant

$$E_x = -j\omega\mu B_0 \sum_{l=0}^L A_l \cos(k_l y) \quad (8)$$

et les composantes B_y et B_z correspondantes. Dans les milieux conducteurs, nous obtenons

$$E_x^n(y, z, \omega) = j\omega\mu B_0 \sum_{l=0}^L \left[B_l^n e^{R_l^n z} + C_l^n e^{-R_l^n z} \right] \cos(k_l y). \quad (9)$$

Les composantes B_y^n et B_z^n sont obtenues par dérivation suivant la relation (5).

Pour chaque mode, les coefficients A_l^n et B_l^n d'une part et A_l , B_l^n et C_l^n d'autre part sont calculés grâce aux conditions de continuité aux interfaces. En mode TM, nous utilisons la continuité de B_x et de la composante tangentielle du champ électrique que nous écrivons

$$\mathbf{E}_T = E_y + E_z \frac{dF_n(y)}{dy} = 0 \quad (10)$$

où $z_n = F_n(y)$ désigne l'équation de l'interface n . Pour le mode TE, nous écrivons la continuité de E_x et de B_y .

4. Résultats

4.1. MILIEU TABULAIRE. — Pour les validations, nous avons fait le choix d'une structure interne du globe simplifiée ; nous modélisons un milieu à trois zones. La première est constituée par l'eau de mer, la deuxième par des sédiments résistifs, la troisième et dernière étant plus conductrice. Les valeurs de la conductivité électrique dans chaque zone sont respectivement 3, 0,001 et 20 S m⁻¹. Enfin, les épaisseurs des couches sont respectivement 0,5, 20 et 30 km. Le calcul, réalisé pour une fréquence de 0,01 Hz, est en accord avec le modèle analytique avec une précision supérieure à un pourcent.

4.2. GÉOMÉTRIE BIDIMENSIONNELLE. — La géométrie de référence, représentée sur la figure 1, correspond au milieu tabulaire précédent dans lequel nous avons introduit une fosse sous marine de longueur infinie.

Pour le mode TE, les courants source circulent dans le plan horizontal $z = 50$ km suivant la direction Ox . Par conséquent, les courants électriques induits dans la mer et le sous-sol circulent parallèlement à la direction de la fosse et aux gradients de conductivité électrique. Comme pour le cas tabulaire, seule la composante A_x est non nulle. Les calculs ont été réalisés à la fréquence de 0,01 Hz. Les composantes E_x , B_y et B_z sont continues aux interfaces entre les milieux. Cela se traduit par une très bonne précision du calcul éléments finis 3D par rapport au calcul 2D différences finies et au calcul 2D méthode spectrale. Nous présentons sur la figure 1 les résultats obtenus pour B_z au niveau du talus de la fosse sous-marine. La concentration de courant électrique circulant dans la direction transverse Ox principalement dans l'eau de mer conductrice produit une augmentation importante de B_z : c'est l'effet côtier.

Pour le mode TM, les courants source circulent dans le plan horizontal $z = 50$ km suivant la direction Oy . Les courants induits, qui circulent perpendiculairement à la direction de la fosse, rencontrent des gradients de conductivité élevés, ce qui provoque l'apparition de courants de conduction au niveau du talus et donc de forts gradients de potentiel scalaire électrique V . Il faut également permettre le rebouclage des courants dans le domaine de calcul ; il est donc nécessaire de conserver de part et d'autre de l'inhomogénéité 2D une zone tabulaire sur laquelle nous sommes capables d'imposer des conditions aux limites (CAL). Finalement, seule la composante A_x est nulle. Les CAL sont les suivantes : région Haut : $A_y = 1$, $A_z = 0$, région Bas : $A_y = A_z = 0$, régions Est et Ouest : $A_z = V = 0$ (Fig. 1). Pour tout le reste, on impose des conditions de Neumann homogène. La figure 2 présente les résultats pour B_x et E_y . La continuité de B_x illustre la bonne précision atteinte par le calcul éléments finis 3D par rapport aux méthodes 2D de référence. Par contre, les résultats obtenus pour la composante horizontale E_y du champ électrique, discontinue au niveau du talus de la fosse sous-marine, montrent un écart beaucoup plus important entre les différentes méthodes. Il en est de même pour la composante E_z .

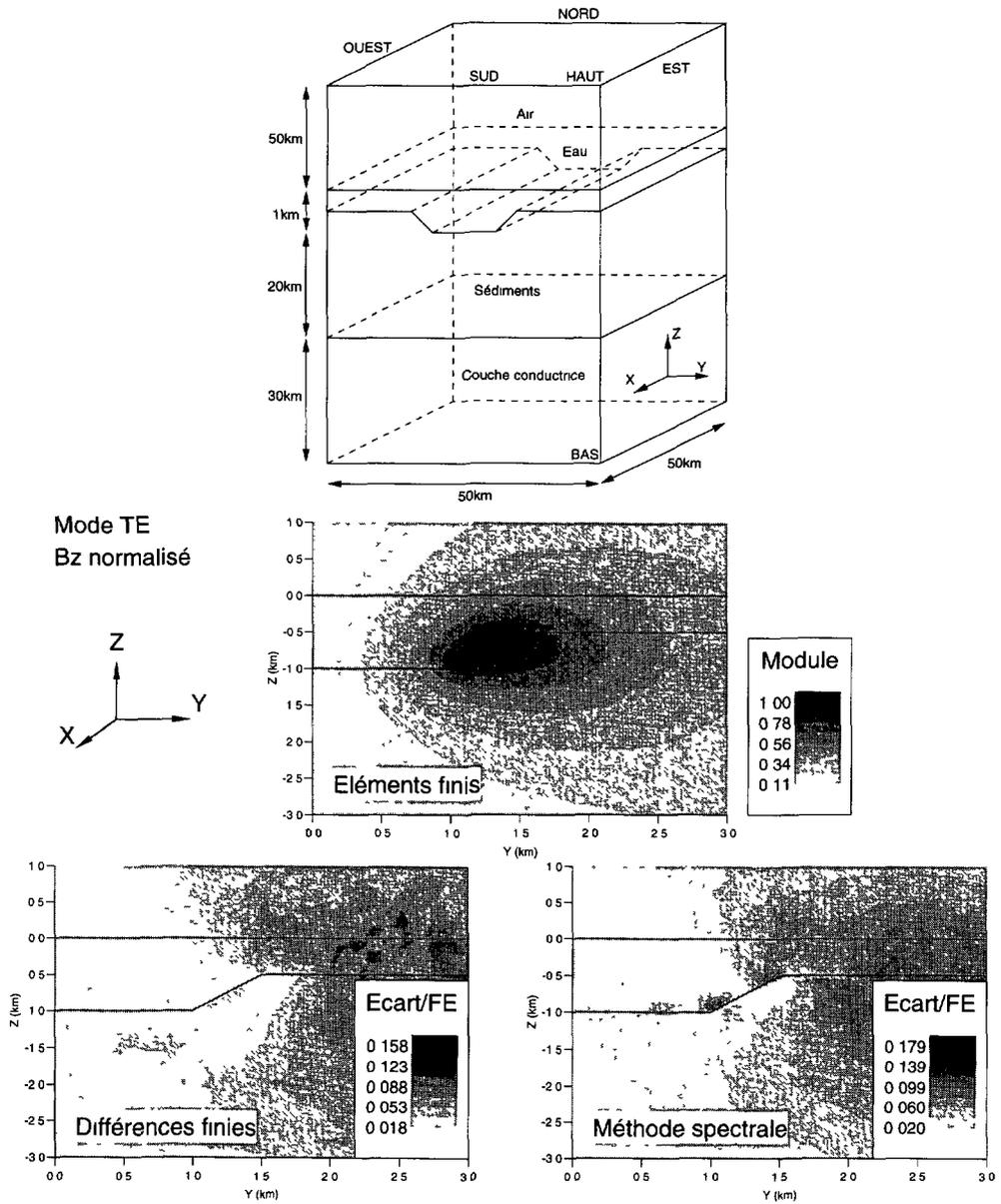


Fig. 1 — Géométrie 2D. Domaine de calcul éléments finis et module normalisé de B_z en mode TE à proximité de la fosse sous-marine pour une fréquence de 0,01 Hz. Résultats éléments finis (Flux Expert) et écart par rapport aux méthodes différences finies et spectrale.

[2D geometry. Finite element domain and normalized modulus of B_z in TE mode at the vicinity of the underwater trough for a frequency of 0.01 Hz. Finite element results (Flux Expert) and gap with finite difference and spectral methods.]

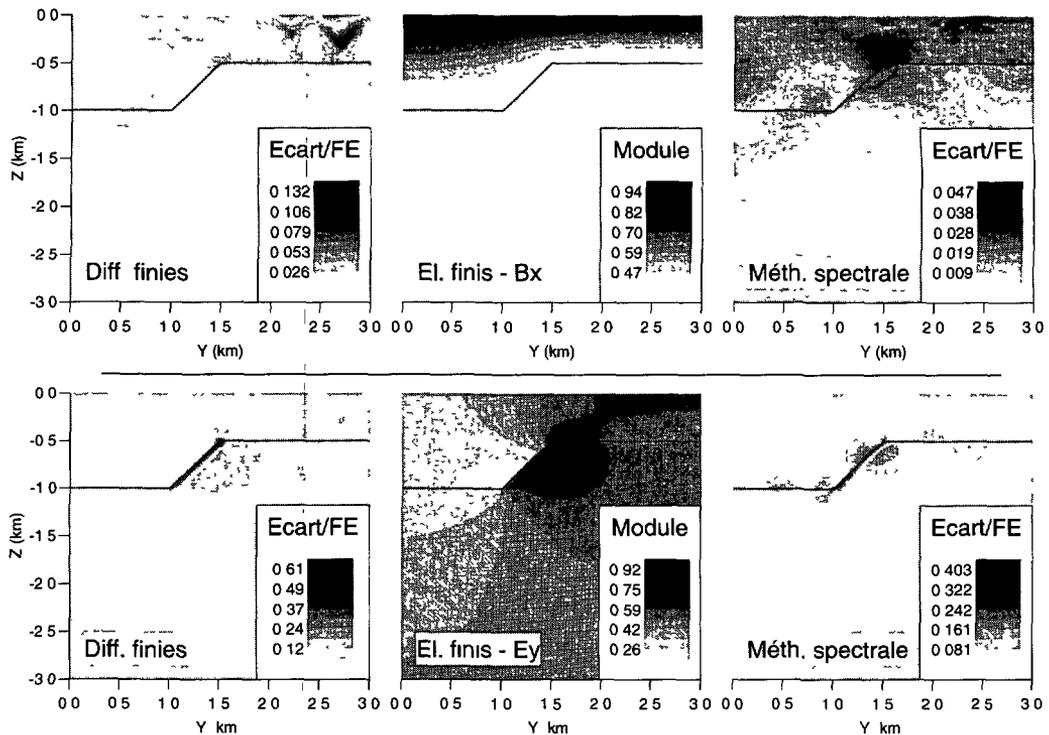


Fig. 2. — Géométrie 2D. Module normalisé de B_x et E_y en mode TM à proximité de la fosse sous-marine pour une fréquence de 0,01 Hz. Résultats éléments finis (Flux Expert) et écart par rapport aux méthodes différences finies et spectrale.

[2D geometry. Normalized modulus of B_x and E_y in TM mode at the vicinity of the underwater trough for a frequency of 0.01 Hz. Finite element results (Flux Expert) and gap with finite difference and spectral methods.]

4.3. CONCLUSION. — Cette étude a permis une validation partielle de notre modèle éléments finis tridimensionnel des effets géomagnétiques induits dans une zone côtière. Nous avons vérifié, pour des géométries 1D et 2D, la validité de la formulation (\mathbf{A}, V) utilisée et des conditions aux limites imposées.

Nous avons entrepris la réalisation d'un modèle 3D complet, comprenant une description fine de la géométrie sur un domaine de quelques dizaines de kilomètres et un modèle réaliste pour la structure géologique du sous-sol (sédiments conducteurs, couche résistive, couche conductrice). Ce modèle devra nous permettre une compréhension globale de la circulation des courants électriques dans la zone étudiée et des perturbations magnétiques associées.

La validation expérimentale complète d'un tel modèle 3D est actuellement en cours de réalisation. L'utilisation des enregistrements magnétiques et électriques réalisés au large de la côte Est des États Unis lors de l'expérience SEA nous permettra de tester la validité de nos hypothèses et l'influence des paramètres du modèle [16]. Cette validation fera l'objet d'une publication ultérieure.

Bibliographie

- [1] Blanpain R., Chaillout J. J. et Berthier J., Phénomènes physiques électromagnétiques très basse fréquence en milieu océanique ; rapport final, LETI/DSYS/SETIA/080992/C364 (1992).
- [2] Jacobs J.A., Geomagnetism, New York, Academic Press (1987).
- [3] Parkinson W.D. and Jones F.W., The geomagnetic coast effect, *Rev. Geophys. Space Phys.* **17** (1979) 1999-2015.
- [4] Weaver J.T., The electromagnetic field within a discontinuous conductor with reference to geomagnetic micropulsations near a coastline, *Can. J. Phys.* **41** (1963) 484-495.
- [5] Cox C.S. and Filloux J.H., Two dimensional numerical models of the California electromagnetic coastal anomaly, *J. Geomag. Geoelectr.* **26** (1974) 257-267.
- [6] Neumann G.A. and Hermance J.F., The geomagnetic coast effect in the Pacific Northwest of North America, *Geophys. Res. Lett.* **12** (August 1985) 502-505.
- [7] Agarwal A.K. *et al.*, Electromagnetic modelling in three dimensions using massively parallel processing, *Ann. Geophysicae* **12** n°1 (1994).
- [8] Wannamaker P.E. *et al.*, Electromagnetic modeling of three-dimensional bodies in layered earths using integral equations, *Geophys.* **49** (1984) 60-74.
- [9] Flux Expert, marque déposée de DT2I, 8 chemin des Prèles, 38240 Meylan.
- [10] Berdichevsky M.N. and Zhdanov M.S., Advanced theory of deep geomagnetic sounding, New-York, Elsevier (1984).
- [11] Brewitt-Taylor C.R. and Weaver J.T., On the finite difference solution of two-dimensional induction problems, *Geophys. J. R. astr. Soc.* n°47 (1976) 375-396.
- [12] Osella A.M. and Martinelli P., Magnetotelluric response of anisotropic 2-D structures, *Geophys. J. Int.* n°115 (1993) 819-828.
- [13] Biro O. and Preis K., On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents, *IEEE Trans. Magn.* **25** (July 1989) 3145-3159.
- [14] Weaver J.T. *et al.*, Improved boundary conditions for the numerical solution of E-polarization problems in geomagnetic induction, *Geophys. J. R. astr. Soc.* n°54 (1978) 309-317.
- [15] Dassot G., Berthier J. et Blanpain R., Modélisation et simulation de l'environnement magnétique des marges continentales, 15° Colloque GRETSI (Juan les Pins, France, septembre 1995).
- [16] Wannamaker P.E. *et al.*, Magnetotelluric experiment probes deep physical state of Southeastern U.S., *EOS Trans.* **77** n°34 (1996).