HAL
open science

Des schémas équivalents pour les circuits couplés multi-enroulements

J. Keradec, B. Cogitore, E. Laveuve, M. Bensoam

To cite this version:

J. Keradec, B. Cogitore, E. Laveuve, M. Bensoam. Des schémas équivalents pour les circuits couplés multi-enroulements. Journal de Physique III, 1994, 4 (4), pp.751-773. 10.1051/jp3:1994165 . jpa-00249143

HAL Id: jpa-00249143

https://hal.science/jpa-00249143

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

J. Phys. III France **4** (1994) 751-773

Classification
Physics Abstracts
41.10D

Des schémas équivalents pour les circuits couplés multi-enroulements

J. P. Keradec, B. Cogitore, E. Laveuve (*) et M. Bensoam (**)

Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, CNRS URA-355, Domaine Universitaire, B.P. 46, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France

(*Reçu le 24 septembre 1991, révisé les 10 novembre 1993 et 10 janvier 1994, accepté le 10 janvier 1994*)

Résumé. — Le but de cet article est de traduire le comportement électrique d'un nombre quelconque d'enroulements magnétiquement couplés, par des coupleurs et des inductances. Deux méthodes, établies mathématiquement, sont proposées. La seconde n'introduit que des inductances positives. A titre d'exemple, elle est appliquée à la représentation d'un transformateur triphasé à trois colonnes. Les schémas obtenus fournissent l'indispensable ossature de schémas plus complets, aptes à représenter le comportement haute fréquence des composants bobinés, notamment dans un logiciel de simulation électronique.

Abstract. — The aim of this paper is to represent the electrical behaviour of any number of magnetically coupled windings with couplers and inductors. Two methods, mathematicaly justified, are proposed. The second one introduces only positive inductances. As an exemple, it is applied to the representation of a three column three phase transformer. The obtained circuits supply the requisite guide to design more complete circuits which allow the high frequency behaviour of wound components to be taken into account, especialy in electronics simulation softwares.

1. Introduction.

Le récent accroissement de la fréquence de travail des convertisseurs statiques a entraîné, pour tous les composants, la recherche de modèles rendant compte de leur comportement électrique en haute fréquence. Des progrès sensibles ont été enregistrés pour la représentation des inductances et des transformateurs à deux enroulements, grâce à l'élaboration d'un circuit équivalent à constantes localisées : divers éléments judicieusement adjoints au modèle magnétostatique ont permis de prendre en compte le comportement haute fréquence des conducteurs et des noyaux magnétiques ainsi que les couplages capacitifs [1-3]. Ce circuit

(*) E. Laveuve travaille maintenant au centre de recherche chez Merlin-Gerin à Grenoble.
(**) M. Bensoam travaille maintenant au laboratoire de photo-électricité à Saint-Jérome à Marseille.

équivalent traduit correctement le comportement électrique du composant jusqu'à une fréquence environ dix à cent fois supérieure à sa fréquence de travail. On sait mesurer toutes ses valeurs numériques [4] et sa topologie est indépendante de la géométrie du composant et de la technologie adoptée pour le fabriquer.

Malheureusement, les raisonnements utilisés pour deux enroulements ne peuvent être transposés à plus de trois enroulements car aucun schéma électrique du même type n'a encore été proposé pour traduire le couplage magnétique de ces composants. La plupart des logiciels de simulation électronique acceptent la description d'un transformateur par sa matrice inductance. Cependant, pour rendre un tel modèle plus réaliste, on ne peut qu'ajouter des éléments à l'extérieur de ce composant magnétique. L'exemple du transformateur à deux enroulements nous montre que cette approche est incorrecte : des courants induits dans les parties conductrices peuvent modifier les éléments de la matrice inductance en haute fréquence [5, 6]. Ainsi, en raison de ses possibilités d'aménagements internes, le schéma électrique représentant le modèle magnétostatique s'avère plus intéressant que la matrice inductance dont il est l'équivalent mathématique.

Dans cet article nous exposons deux méthodes permettant de traduire une matrice inductance, supposée indépendante de la fréquence, par un circuit électrique composé uniquement d'inductances et de coupleurs. Ces deux méthodes sont indépendantes de toute considération technologique, ne nécessitent aucune approximation, et s'appliquent sans limitation du nombre d'enroulements. La seconde n introduit que des inductances positives susceptibles de recevoir une interprétation physique individuelle. Enfin, les schémas qu'elle fournit, convenablement complétés par des résistances et des condensateurs afin de traduire le comportement haute fréquence, sont acceptés par tous les logiciels de simulation électronique.

2. Critique des modèles classiques.

2.1 COUPLEURS SIMPLES ET MULTIPLES. — Pour représenter un transformateur réel il est utile d'introduire le « transformateur parfait à deux enroulements » ou « coupleur ». Ayant en vue l'extension des raisonnements présentés ici à des couplages capacitifs, nous préférerons l'appellation « coupleur » et nous utiliserons le graphisme de la figure 1 évitant toute allusion à un bobinage.

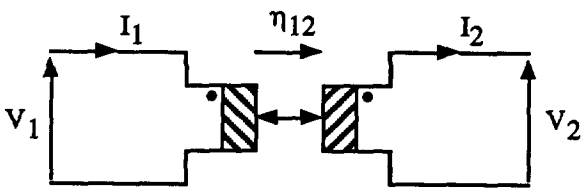

Fig. 1. — Coupleur.

[Coupler.]

Le rapport de couplage η_{12} est tel que

$$V_2 = \eta_{12} V_1 \quad \text{et} \quad I_1 - \eta_{12} I_2 = 0 .$$

Par convention, un point placé près de chaque entrée du coupleur indique l'orientation du vecteur tension de cette entrée. La flèche de courant est placée du côté du point et son sens

indique conventionnellement le sens de déplacement de la puissance moyenne. Le déplacement de l'un des points permet de changer le signe du rapport de couplage.

Par analogie avec les transformateurs à enroulements multiples, nous adopterons, pour les coupleurs à entrées multiples, la représentation de la figure 2. Elle se généralise aisément. Les flèches bidirectionnelles symbolisent l'échange de puissance.

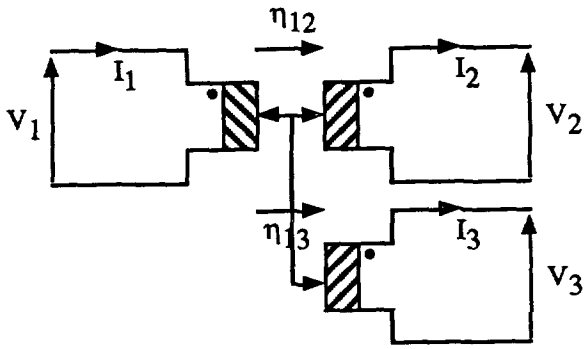

Fig. 2. — Coupleur à entrées multiples.

[Multi input coupler.]

Les rapports de couplage sont tels que

$$V_2 = \eta_{12} V_1 , \quad V_3 = \eta_{13} V_1 \quad \text{et} \quad I_1 - \eta_{12} I_2 - \eta_{13} I_3 = 0 .$$

Le symbole habituel du transformateur est conservé pour représenter le composant réel, le coupleur n'étant qu'un des éléments permettant la représentation fonctionnelle de ce composant.

2.2 MODÈLE CLASSIQUE POUR DEUX ENROULEMENTS. — En électrotechnique, le transformateur à deux enroulements est couramment représenté par le schéma de la figure 3 :

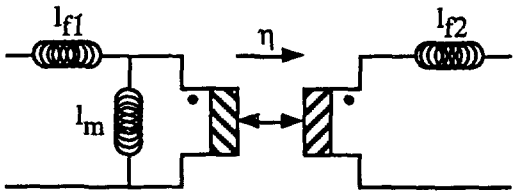

Fig. 3. — Schéma classique du transformateur à deux enroulements.

[Usual circuit of the two winding transformer.]

En général, le rapport de transformation η est choisi égal au rapport du nombre de spires, ℓ_m représente l'inductance magnétisante et ℓ_{f1} et ℓ_{f2} sont appelées inductances de fuites partielles du primaire et du secondaire [7].

Pour justifier les noms donnés aux inductances, étudions le couplage de solénoïdes

cylindriques infinis d'axes parallèles (Fig. 4). Notons S_1 et S_2 leurs sections respectives, S_{12} la surface de leur intersection, N_1 et N_2 les nombres de spires sur une hauteur h.

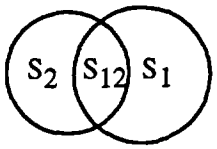

Fig. 4. — Solénoïdes partiellement couplés.

[Partly coupled solenoids.]

Les excitations magnétiques créées par chacun des solénoïdes valent $N_1 I_1/h$ dans S_1 et $N_2 I_2/h$ dans S_2. Evaluons l'énergie magnétostatique W emmagasinée sur une hauteur h de ce dispositif.

$$W = \frac{1}{2}\mu_0\left[\left(\frac{N_1 I_1}{h}\right)^2 (S_1 - S_{12})\,h + \left(\frac{N_2 I_2}{h}\right)^2 (S_2 - S_{12})\,h + \left(\frac{N_1 I_1}{h} + \frac{N_2 I_2}{h}\right)^2 S_{12}\,h\right]$$
$$= \frac{1}{2}\mu_0 \frac{S_1}{h} N_1^2 I_1^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \frac{S_2}{h} N_2^2 I_2^2 + \mu_0 \frac{S_{12}}{h} N_1 N_2 I_1 I_2 .$$

Cette expression peut être identifiée à celle de l'énergie stockée par les inductances du modèle :

$$W = \frac{1}{2}\ell_{f1} I_1^2 + \frac{1}{2}\ell_{f2} I_2^2 + \frac{1}{2}\ell_m \left(I_1 + \frac{N_2}{N_1} I_2\right)^2$$

On en déduit les valeurs des trois inductances :

$$\ell_m = \mu_0 \frac{S_{12}}{h} N_1^2 , \quad \ell_{f1} = \mu_0 \frac{S_1 - S_{12}}{h} N_1^2 \quad \text{et} \quad \ell_{f2} = \mu_0 \frac{S_2 - S_{12}}{h} N_2^2 .$$

L'examen des surfaces intervenant dans ces relations montre que l'inductance magnétisante crée le flux commun aux deux enroulements alors que chaque inductance de fuite partielle correspond au flux généré par un enroulement pour lui seul.

Dans le cas particulier où S_2 est à l'intérieur de S_1, $S_{12} = S_2$ et la représentation devient celle de la figure 5.

Les composants du schéma sont tels que :

$$\ell_f = \mu_0 \frac{S_1 - S_2}{h} N_1^2 , \quad \ell_m = \mu_0 \frac{S_2}{h} N_1^2 \quad \text{et} \quad \eta = \frac{N_2}{N_1}$$

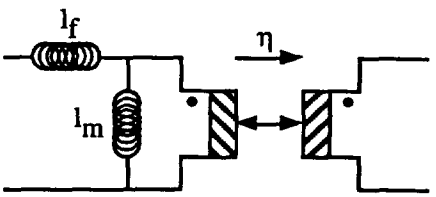

Fig. 5. — Représentation du couplage de deux solénoïdes concentriques.

[Equivalent circuit for two concentric solenoids.]

Ici, tout le flux créé par le secondaire traverse le primaire : il n'y a pas de fuites partielles au secondaire.

Malgré leur apparente cohérence, ces notions ne sont pas généralisables. Ainsi par exemple, si on étudie le couplage de deux spires quelconques dans l'espace, il est très difficile de répartir l'énergie stockée en trois parties bien localisées. En outre, si la représentation précédente est commode pour les transformateurs classiques, il est prudent de s'en méfier pour certaines géométries de circuits magnétiques ou pour des transformateurs à couplage faible parfois utilisés dans les alimentations à résonance. L'exemple suivant, montre que l'inductance de fuites partielle du primaire doit être choisie négative. Dès lors, quelle interprétation physique lui attribuer ?

Considérons les deux solénoïdes finis et concentriques de la figure 6. Ils ont des sections quasiment identiques. Le flux traversant la section du solénoïde extérieur diminue vers ses extrémités, mais il est à peu près constant sur la longueur du bobinage intérieur, comme le montre la ligne de flux ci-dessous. Il en va donc de même pour la tension apparaissant aux bornes de chaque spire.

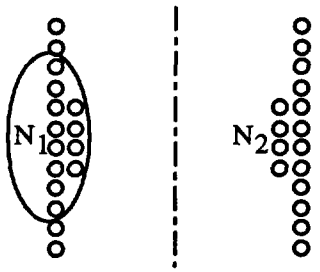

Fig. 6. — Solénoïdes ayant une inductance de fuite partielle négative.

[Solenoids with a negative partial leakage inductance.]

Pour évaluer le gain en tension à vide G_0 de ce transformateur, notons V la tension apparaissant aux bornes d'une spire de l'enroulement intérieur.

Puisque

$$V_2 = N_2 V \quad \text{et} \quad V_1 < N_1 V \Rightarrow G_0 = V_2/V_1 > N_2/N_1 .$$

On peut vérifier sur la figure 3 que ceci implique $\ell_{fl} < 0$, car ℓ_{fl} et ℓ_m doivent élever la tension..

2.3 MODÈLE MAGNÉTOSTATIQUE POUR DEUX ENROULEMENTS. — En régime sinusoïdal, les équations aux impédances se déduisent directement des équations magnétostatiques donnant les flux dans des circuits couplés :

$$\begin{aligned} V_1 &= jL_1\,\omega I_1 + jM\omega I_2 \\ V_2 &= jM\omega I_1 + jL_2\,\omega I_2 . \end{aligned} \tag{1}$$

Les relations d'Onsager [8] ont permis d'établir la symétrie de la matrice des coefficients et des considérations énergétiques [9] montrent que :

$$L_1 \geqslant 0 , \quad L_2 \geqslant 0 , \quad M^2 \leqslant L_1 L_2 . \tag{2}$$

La dernière inégalité sert à définir le coefficient de couplage k dont la valeur absolue est comprise entre 0 et 1 :

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \tag{3}$$

Ce coefficient peut également s'évaluer en fonction des inductances à vide (L_0) et en court-circuit (ℓ_{CC}) mesurées au primaire. A l'aide de (1) et (3), on établit :

$$L_0 = L_1 \quad \text{et} \quad \ell_{cc} = L_1(1 - k^2)$$

$$\Rightarrow k = \text{sgn}\ (M) \sqrt{1 - \frac{\ell_{cc}}{L_0}}$$

où sgn ( ) signifie « signe de ( ) ».

Il est facile de vérifier que le quadripôle de la figure 7 admet strictement les équations (1) : il est donc apte à représenter un transformateur à deux enroulements.

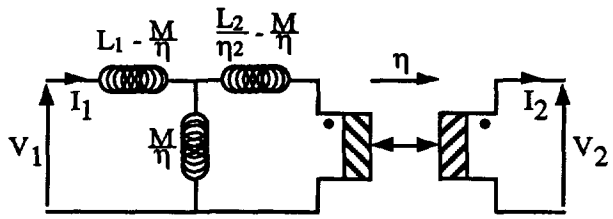

Fig. 7. — Modèle magnétostatique d'un transformateur à deux enroulements.

[Quadrupole representing a two winding transformer.]

Ce modèle se caractérise par quatre valeurs : trois inductances et un rapport de couplage. Puisque le système d'équations (1) ne dépendait que de trois paramètres (L_1, L_2 et M), il est naturel que l'on puisse choisir arbitrairement l'une des valeurs du schéma, en l'occurrence le rapport de couplage. Pour la même raison, si on veut trouver les éléments du quadripôle en partant des mesures, il faudra se donner arbitrairement une valeur.

Il est utile de remarquer que, moyennant un choix approprié de η, toutes les inductances du schéma peuvent être choisies positives, ce qui facilite les raisonnements physiques. Pour cela il faut que :

$$\frac{M}{\eta} > 0 \Rightarrow \text{sgn}\ (\eta) = \text{sgn}\ (M) \quad \text{et} \quad \frac{|M|}{L_1} \leqslant |\eta| \leqslant \frac{L_2}{|M|}. \tag{4}$$

Ce choix est toujours possible puisque les inégalités (2) impliquent :

$$\frac{|M|}{L_1} \leqslant \frac{L_2}{|M|}.$$

Remarquons qu'en choisissant $|\eta|$ égale à la moyenne géométrique des deux valeurs extrêmes (4), on est assuré d'obtenir des inductances positives.

$$\eta = \text{sgn}\ (M) \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \tag{5}$$

On vient de voir que, pour caractériser le transformateur à deux enroulements, trois paramètres indépendants sont nécessaires. Pour n enroulements, ce nombre vaut $n(n+1)/2$, ce qui correspond au nombre de coefficients indépendants de la matrice inductance (symétrique).

2.4 SCHÉMAS ÉQUIVALENTS ; TRANSFORMATION AMONT-AVAL. — Le schéma de la figure 7 peut donner naissance à plusieurs autres si on exploite les transformations connues : passages d'éléments du primaire au secondaire du coupleur, étoile-triangle pour donner une structure en π au quadripôle inductif. En outre, trois valeurs de η donnent au schéma général une allure particulière en préservant, pour les inductances présentes, des valeurs positives :

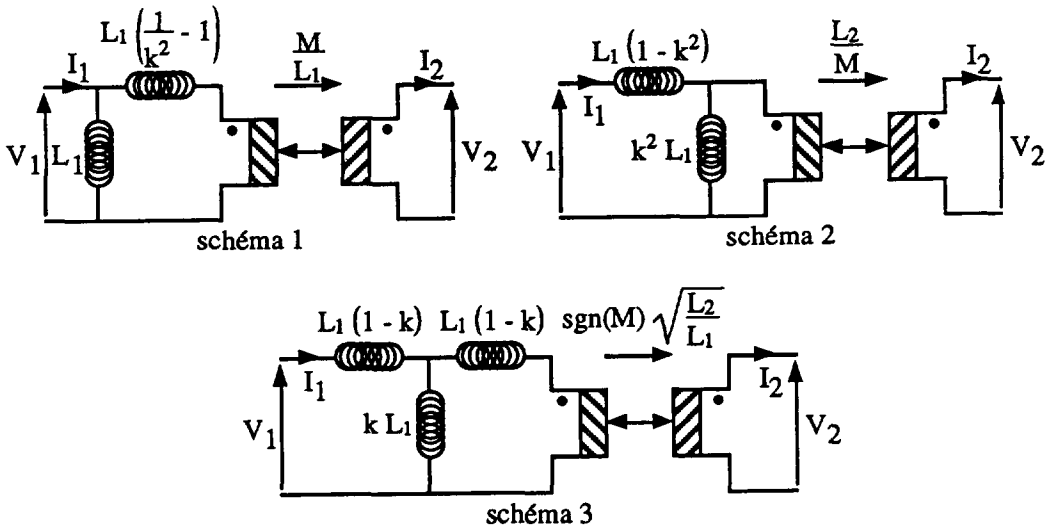

Fig. 8. — Schémas particuliers déduits de la figure 7.

[Special circuits deduced from figure 7.]

L'équivalence des schémas 1 et 2 permet de définir la transformation Amont-Aval de la figure 9, par référence à la position de l'inductance série.

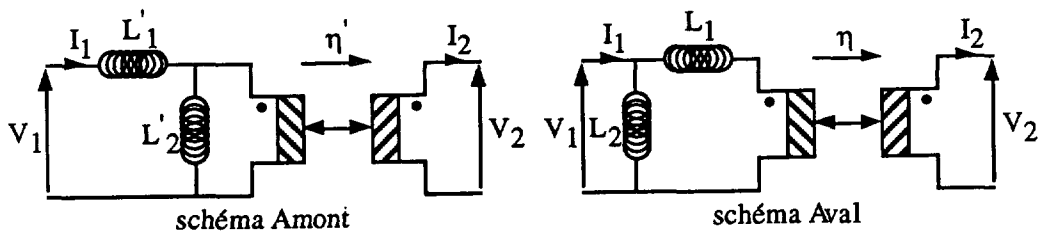

Fig. 9. — Schémas Amont et Aval.

[Up and down circuits.]

Ces deux schémas sont strictement équivalents si les valeurs sont choisies comme suit :

$$\text{Amont} \rightarrow \text{Aval} \quad L_1 = (L_1' + L_2')\frac{L_1'}{L_2'}, \quad L_2 = L_1' + L_2', \quad \eta = \eta' \frac{L_2'}{L_1' + L_2'}$$

$$\text{Aval} \rightarrow \text{Amont} \quad L_1' = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}, \quad L_2' = L_1 + L_2, \quad \eta' = \eta \frac{L_1 + L_2}{L_2}$$

2.5 MODÈLE CLASSIQUE POUR TROIS ENROULEMENTS. — Une représentation proposée par de nombreux auteurs [7] est décrite par la figure 10. Elle s'obtient en ajoutant sur la figure 3 une entrée au coupleur ainsi qu'une inductance de fuite en série avec cette entrée.

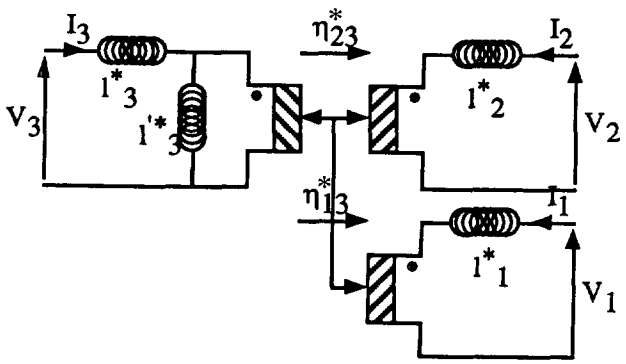

Fig. 10. — Schéma classique d'un transformateur trois enroulements.

[Conventional circuit of a three winding transformer.]

Ce schéma se caractérise par six paramètres ajustables alors que la matrice inductance comprend six coefficients indépendants.

Les inductances du schéma sont-elles positives ? Pour le savoir, exprimons ces inductances en fonction des éléments L_{ij} de la matrice inductance. Pour cela, identifions l'énergie magnétostatique W du schéma avec la forme générale. On a :

$$2\,W = \ell_1^* I_1^2 + \ell_2^* I_2^2 + \ell_3^* I_3^2 + \ell_3'^*(\eta_{13}^* I_1 + \eta_{23}^* I_2 + I_3)^2$$

et, d'après [10]

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} L_{ij} I_i I_j \quad \text{avec} \quad L_{ji} = L_{ij}\,. \tag{6}$$

Cela fournit les relations suivantes :

$$\ell_1^* = L_{11} - \frac{L_{12} L_{13}}{L_{23}} \qquad \ell_2^* = L_{22} - \frac{L_{12} L_{23}}{L_{13}}$$

$$\ell_3^* = L_{33} - \frac{L_{13} L_{23}}{L_{12}} \qquad \ell_3'^* = \frac{L_{13} L_{23}}{L_{12}}$$

$$\eta_{13}^* = \frac{L_{12}}{L_{23}} \qquad \eta_{23}^* = \frac{L_{12}}{L_{13}}$$

Le signe de $\ell_3'^*$ est celui de $L_{12} L_{13} L_{23}$. Aucune loi physique n'imposant que ce produit soit positif, le schéma de la figure 10 aboutit, dans certains cas, à l'introduction d'inductances négatives.

Ce type de représentation, quelquefois gênant dans le cas de trois enroulements, devient incorrect pour quatre enroulements et plus. En effet, si on se contente d'ajouter pour chaque enroulement supplémentaire un coupleur et une inductance « de fuite », le nombre de paramètres ajustables devient insuffisant pour représenter le transformateur le plus général. Pour quatre enroulements par exemple, nous obtenons un total de huit paramètres ajustables, alors que la matrice L_{ij} comprend dix coefficients indépendants.

Nous devons donc trouver une approche plus générale qui reste valable quel que soit le nombre d'enroulements.

3. Approche par la matrice admittance.

3.1 MULTIPOLES INDUCTIFS. — Pour représenter le transformateur à deux enroulements, nous avons associé un coupleur et un quadripôle inductif. Avec la croissance du nombre d'enroulements, des multipôles inductifs plus complexes vont être introduits et il devient indispensable d'en chercher une représentation générale.

Considérons un multipôle passif à n entrées. Sa matrice impédance est symétrique et possède $n(n+1)/2$ éléments indépendants. Il en va de même pour sa matrice admittance. Notre problème peut donc s'énoncer ainsi : comment doit-on disposer $n(n+1)/2$ inductances pour que le schéma obtenu soit susceptible de représenter n'importe quel transformateur à n entrées ?

A titre d'exemple, étudions le cas où $n = 4$. Le schéma représenté sur la figure 11 a été obtenu ainsi : nous avons placé $n + 1 = 5$ nœuds en en reliant un au potentiel de référence. Nous avons ensuite relié chaque nœud à chacun des autres par une inductance.

B, C, D, et E ont les valeurs suivantes

$$B = A_{11} + (A_{12} + A_{13} + A_{14})$$
$$C = A_{22} + (A_{12} + A_{23} + A_{24})$$
$$D = A_{33} + (A_{13} + A_{23} + A_{34})$$
$$E = A_{44} + (A_{14} + A_{24} + A_{34}).$$

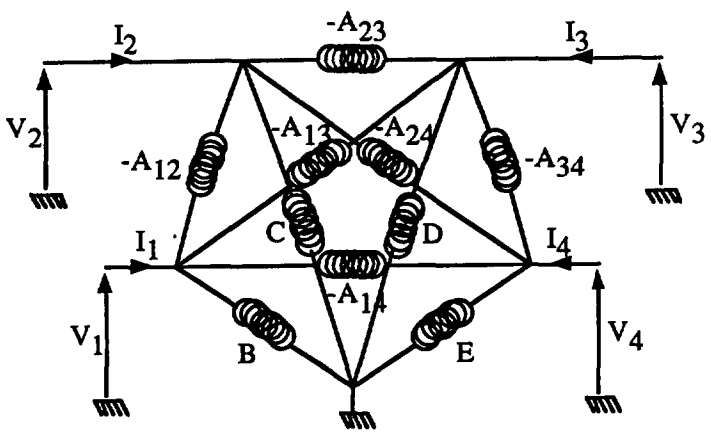

Fig. 11. — Schéma d'un multipôle passif à quatre entrées.

[Circuit of a four port passive multipole.]

Le choix des dix inductances de ce circuit permet d'ajuster indépendamment les dix paramètres de sa matrice admittance. Réciproquement, on peut toujours attribuer aux inductances de la figure 11 des valeurs telles que sa matrice admittance s'identifie à n'importe quelle matrice admittance fixée. On appelle multipôle associé le schéma construit comme indiqué ci-dessus.

Pour qu'un schéma soit équivalent à un ensemble de circuits magnétiquement couplés, il faut qu'il rende compte des diverses isolations galvaniques. Pour parvenir à ce résultat, il suffit de placer des coupleurs de rapport 1 en série avec $n-1$ des n entrées du multipôle associé.

Lorsque toutes les inductances du circuit associé sont positives, il est clair que tous les gains en tension à vide sont positifs et plus petits que 1. Réciproquemnt, dès qu'un transformateur ne remplit pas ces conditions, ce qui est très fréquent, nous sommes contraints d'introduire des inductances négatives, comme ce fut le cas pour le transformateur de la figure 6.

3.2 CHOIX DES RAPPORTS DE COUPLAGES. — La présence d'inductances négatives dans le schéma équivalent ôte l'espoir d'accession à une justification physique individuelle. En outre, les logiciels de simulation électronique interdisent généralement d'affecter une valeur négative à une inductance.

Nous allons voir qu'un choix judicieux des rapports de couplage des coupleurs de sortie permet d'éviter la présence d'inductances négatives dans bien des cas. Pour abréger l'écriture nous prendrons cette fois l'exemple d'un transformateur à 3 enroulements. Les coupleurs sont placés en série avec les entrées 2 et 3 du multipôle associé.

Le transformateur est caractérisé par V_1, V_2', V_3', I_1, I_2' et I_3' et son comportement est décrit par la matrice symétrique $[L]$ telle que :

$$\begin{aligned} V_1 &= jL_{11}\,\omega I_1 + jL_{12}\,\omega I_2' + jL_{13}\,\omega I_3' \\ V_2' &= jL_{21}\,\omega I_1 + jL_{22}\,\omega I_2' + jL_{23}\,\omega I_3' \\ V_3' &= jL_{31}\,\omega I_1 + jL_{32}\,\omega I_2' + jL_{33}\,\omega I_3' . \end{aligned}$$

En appelant V_2, I_2, V_3 et I_3 les grandeurs électriques présentes à l'entrée des coupleurs, on a :

$$V_2' = \eta_{12} V_2 , \quad I_2' = \frac{1}{\eta_{12}} I_2 \quad \text{et} \quad V_3' = \eta_{13} V_3 , \quad I_3' = \frac{1}{\eta_{13}} I_3 .$$

En s'inspirant de la relation (6), nous choisissons les rapports de couplage suivants :

$$\eta_{12} = \operatorname{sgn}\,(L_{12}) \sqrt{\frac{L_{22}}{L_{11}}} \quad \text{et} \quad \eta_{13} = \operatorname{sgn}\,(L_{13}) \sqrt{\frac{L_{33}}{L_{11}}} \tag{7}$$

Les relations aux impédances caractérisant le multipôle associé deviennent :

$$\begin{aligned} V_1 &= jL_{11}\,\omega I_1 + jL_{12}\,\omega \frac{I_2}{\eta_{12}} + jL_{13}\,\omega \frac{I_3}{\eta_{13}} \\ \frac{V_2'}{\eta_{12}} &= V_2 = jL_{21}\,\omega \frac{I_1}{\eta_{12}} + jL_{22}\,\omega \frac{I_2}{\eta_{12}^2} + jL_{23}\,\omega \frac{I_3}{\eta_{12}\,\eta_{13}} \\ \frac{V_3'}{\eta_{13}} &= V_3 = jL_{31}\,\omega \frac{I_1}{\eta_{13}} + jL_{32}\,\omega \frac{I_2}{\eta_{12}\,\eta_{13}} + jL_{33}\,\omega \frac{I_3}{\eta_{13}^2} . \end{aligned} \tag{8}$$

En remarquant que :

$$\frac{L_{22}}{\eta_{12}^2} = L_{11} \quad \text{et} \quad \frac{L_{33}}{\eta_{13}^2} = L_{11} .$$

Il est naturel de réécrire la nouvelle matrice en mettant $jL_{11}\,\omega$ en facteur. On fait alors apparaître les coefficients de couplage :

$$k_{ij} = \frac{L_{ij}}{\sqrt{L_{ii}\,L_{jj}}}\,.$$

Finalement,

$$[V] = jL_{11}\,\omega\,[k]\,[I] \quad \text{avec} \quad [k] = \begin{vmatrix} 1 & |k_{12}| & |k_{13}| \\ |k_{12}| & 1 & \pm k_{23} \\ |k_{13}| & \pm k_{23} & 1 \end{vmatrix}.$$

Les définitions (7) rapprochées de l'écriture (8) permettent de constater que les éléments de la 1re ligne de la matrice inductance (et donc de la 1re colonne) sont positifs. Ceci explique l'apparition des valeurs absolues dans la matrice $[k]$. En revanche, le signe qui précède k_{23} est celui du produit $L_{12}\,L_{13}$.

En définitive, si le signe de $L_{12}\,L_{13}\,L_{23}$ est positif, le multipôle à placer en amont des coupleurs ne présente que des gains à vide inférieurs à 1 : on peut espérer le composer uniquement d'inductances positives. En revanche, on doit abandonner cet espoir si $L_{12}\,L_{13}\,L_{23}$ est négatif, ce qui ne saurait être écarté à priori.

Cette approche a été utilisée par plusieurs auteurs [11]. Elle est mathématiquement correcte et générale et donc préférable à celle présentée en 2.5. Cependant, elle aboutit encore quelquefois à l'introduction d'inductances négatives, incompatibles avec l'utilisation de logiciels de simulation.

4. Approche par orthogonalisation.

4.1 ENERGIE MAGNÉTOSTATIQUE ET FORMES QUADRATIQUES. — L'énergie magnétostatique d'un ensemble de circuits couplés à n entrées (6) est une forme quadratique des courants qu'il est possible d'écrire sous forme matricielle en introduisant la matrice colonne $[I]$ dont les composantes sont les n courants d'entrées I_i.

$$W = \frac{1}{2}\,[I]^{\mathrm{t}}\,[L]\,[I]$$

où t signifie « transposée ».

Partant des n courants I_i, on peut définir un autre jeu de n courants indépendants I'_j par combinaison linéaire, ce qui s'écrit matriciellement :

$$[I'] = [M]\,[I] \Rightarrow [I] = [M]^{-1}\,[I']$$

d'autre part

$$[I]^{\mathrm{t}} = [[M]^{-1}\,[I']]^{\mathrm{t}} = [I']^{\mathrm{t}}\,[M]^{-1\,t}$$

L'énergie magnétostatique s'écrit alors

$$W = \frac{1}{2}\,[I']^{\mathrm{t}}\,[M]^{-1\,\mathrm{t}}\,[L]\,[M]^{-1}\,[I'] = \frac{1}{2}\,[I']^{\mathrm{t}}\,[L']\,[I']\,.$$

La matrice $[L]$ étant réelle et symétrique, on montre qu'il est toujours possible de choisir $[M]$ pour que $[L']$ soit réelle et diagonale [10]. On dit alors que les courants I'_i forment une

base propre (orthogonale) de $[L]$. Avec un tel choix, (6) se simplifie et s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} L'_{ii} I'^2_i$$

La forme quadratique est « réduite » et l'énergie admet la même écriture que si chacun des n courants I' passait dans une inductance L'_{ii}.

Puisque l'énergie du système est positive ou nulle quels que soient les courants I_i, elle l'est également quels que soient les courants I'_i : les n inductances L'_{ii} sont nécessairement positives.

4.2 CHANGEMENT DE BASE POUR LES COURANTS ET LES TENSIONS. — Dans le paragraphe précédent nous avons vu qu'un changement de base des courants peut amener une formulation plus simple de l'énergie magnétique. La figure 12 montre que cette opération mathématique se concrétise facilement sur un schéma grâce à l'introduction de coupleurs, pour les tensions et pour les courants.

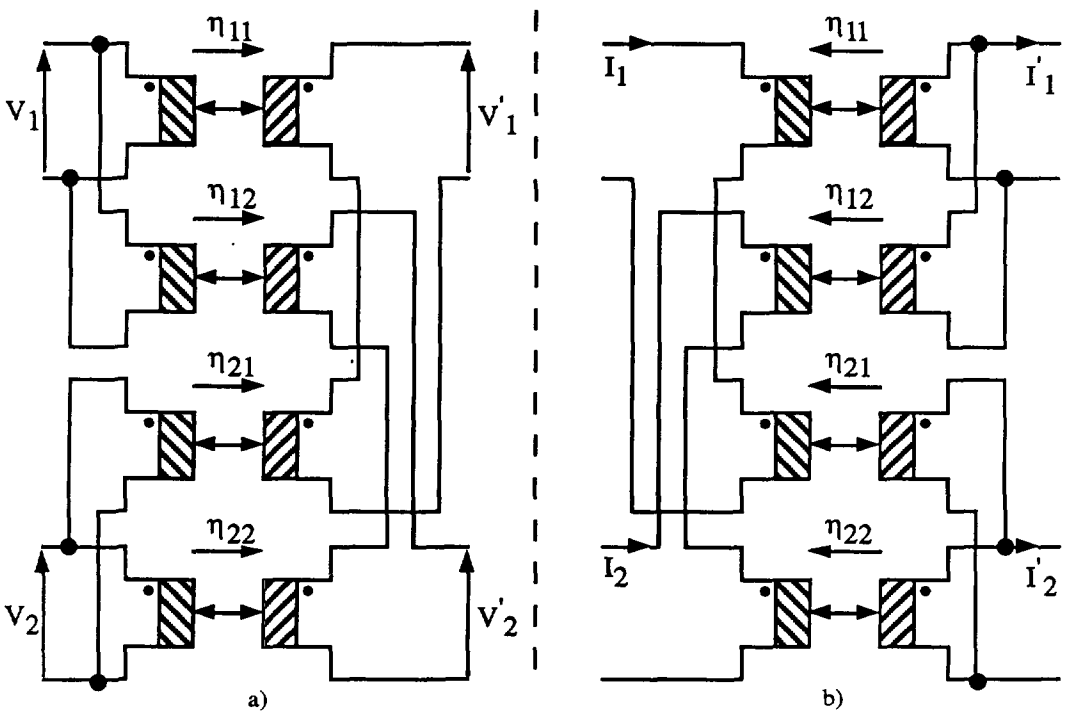

Fig. 12. — Exemples de changements de base pour deux variables.

[Base transfer examples for two variables.]

Les relations de passage d'une base à l'autre sont respectivement pour les tensions (Fig. 12a) et les courants (Fig. 12b) :

$$\begin{aligned} V'_1 &= \eta_{11} V_1 + \eta_{21} V_2 \\ V'_2 &= \eta_{12} V_1 + \eta_{22} V_2 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} I'_1 &= \eta_{11} I_1 + \eta_{12} I_2 \\ I'_2 &= \eta_{21} I_1 + \eta_{22} I_2 . \end{aligned}$$

4.3 ORTHOGONALISATION DE SCHMIDT ET SCHÉMA GÉNÉRAL. — Nous avons montré au 4.1 que l'énergie prenait une forme simple si on l'exprimait en fonction des courants orthogonaux I'. Le paragraphe 2 nous a appris comment réaliser un changement de base à l'aide de n^2 coupleurs.

Nous cherchons maintenant à réaliser le changement de base nécessaire à l'aide d'un minimum de coupleurs. La méthode de Schmidt [12] nous fournit la démarche adéquate. D'après cette méthode, si les courants I_i sont indépendants, il est toujours possible de trouver des coefficients λ_{ij} tels que les I'_i définis ci-dessous soient orthogonaux.

$$\begin{aligned} I'_1 &= I_1 \\ I'_2 &= \lambda_{12} I'_1 + I_2 \\ I'_3 &= \lambda_{13} I'_1 + \lambda_{23} I'_2 + I_3 \end{aligned}$$

On voit que pour n courants il faudra trouver $n(n-1)/2$ coefficients. Il est possible également, à l'aide d'un nombre identique de coefficients λ'_{ij}, d'exprimer les courants I' exclusivement en fonction des courants I :

$$\begin{aligned} I'_1 &= I_1 \\ I'_2 &= \lambda'_{12} I_1 + I_2 \\ I'_3 &= \lambda'_{13} I_1 + \lambda'_{23} I_2 + I_3 \end{aligned}$$

La figure 13 montre comment élaborer des schémas tels que chaque courant I' passe dans une inductance positive. Chaque cadre en pointillés représente le schéma au rang $n-1$.

Pour le schéma à 4 enroulements

$$\begin{aligned} I_{\ell 1} &= I_1 \\ I_{\ell 2} &= \eta_{12} I_1 + I_2 \\ I_{\ell 3} &= \eta_{13} I_1 + \eta_{23} I_2 + I_3 \\ I_{\ell 4} &= \eta_{14} I_1 + \eta_{24} I_2 + \eta_{34} I_3 + I_4 . \end{aligned}$$

Ces schémas comprennent $n(n+1)/2$ paramètres à déterminer soit autant que d'éléments indépendants dans la matrice inductance. Ces paramètres se répartissent en $n(n-1)/2$ rapports de couplages, et n inductances positives.

Les matrices inductances de ces schémas se calculent rapidement en procédant par itération comme suggéré ci-dessous :

- 1 enroulement (inductance) :

$$[L_1] = \text{matrice à élément valant } \ell_1$$

- 2 enroulements :

$$[L_2] = \begin{bmatrix} [L_1] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \ell_2 \begin{bmatrix} \eta_{12}^2 & \eta_{12} \\ \eta_{12} & \ell \end{bmatrix}$$

- 3 enroulements :

$$[L_3] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{bmatrix} + \ell_3 \begin{bmatrix} \eta_{13}^2 & \eta_{13}\,\eta_{23} & \eta_{13} \\ \eta_{13}\,\eta_{23} & \eta_{23}^2 & \eta_{23} \\ \eta_{13} & \eta_{23} & 1 \end{bmatrix} .$$

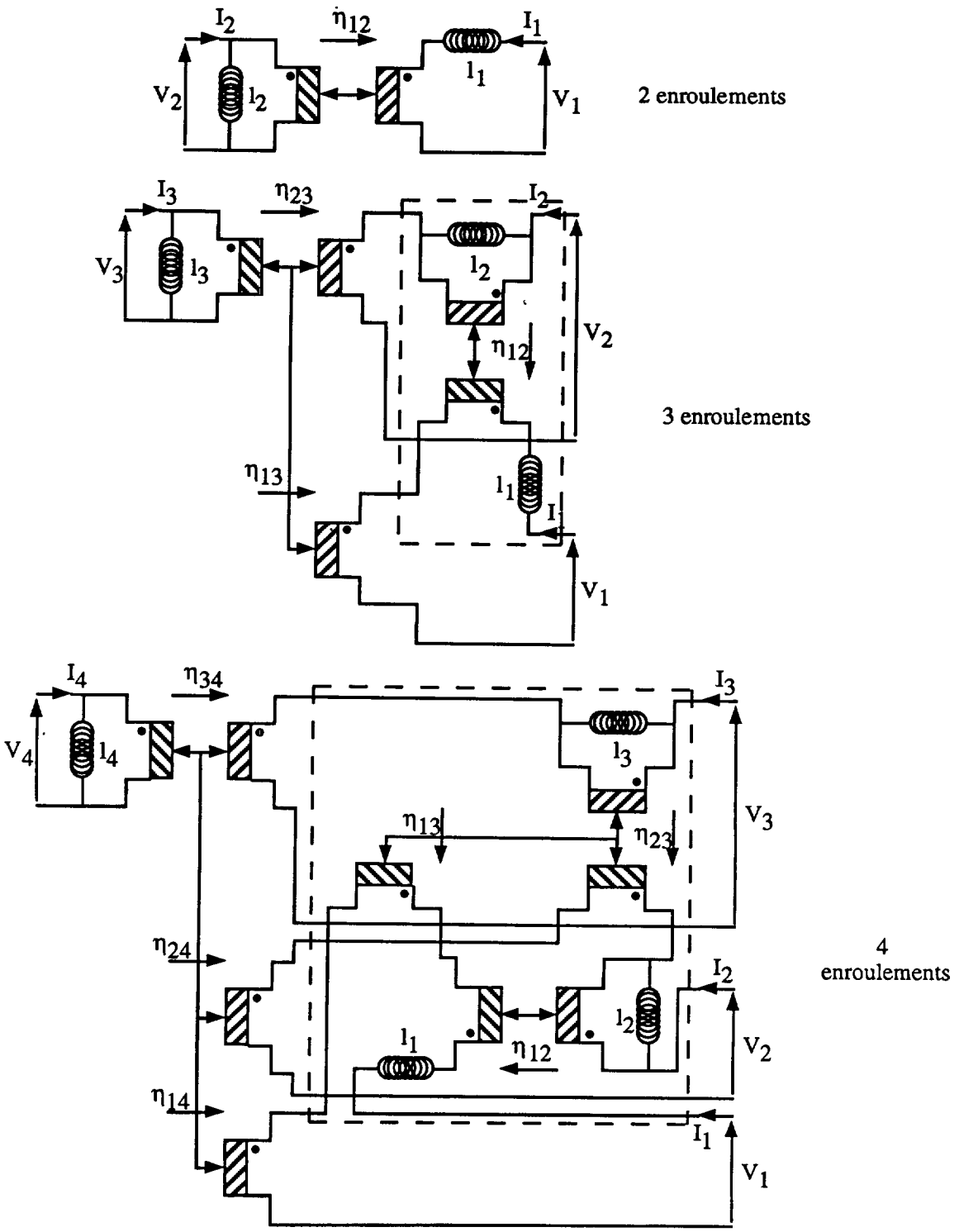

Fig. 13. — Schémas de transformateurs obtenus en utilisant la méthode de Schmidt.

[Transformer circuits obtained using Schmidt method.]

L'énergie magnétostatique du transformateur à n enroulements s'écrit maintenant :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \ell_i \left(\sum_{j=1}^{i-1} \eta_{ji} I_j + I_i \right)^2 \tag{9}$$

Le fait que W soit positive ou nulle entraîne entre les L_{ij} de nombreuses inégalités qu'il ne faut pas perdre de vue lorsqu'on utilise (6). En revanche, dans (9), seuls les ℓ_i doivent être positives..

4.4 MESURE ET CALCUL DES PARAMÈTRES DU SCHÉMA GÉNÉRAL. — En observant le schéma du transformateur à 4 enroulements de la figure 13, on constate que toutes ses inductances sont aisément accessibles à la mesure :

$\ell_1 =$ inductance vue de 1 quand toutes les entrées sont en court-circuit
$\ell_2 =$ inductance vue de 2 quand toutes les entrées sont en court-circuit sauf 1
$\ell_3 =$ inductance vue de 3 quand toutes les entrées sont en court-circuit sauf 1 et 2
$\ell_4 =$ inductance vue de 4 quand toutes les entrées sont en court-circuit sauf 1, 2 et 3.

Ainsi, ces inductances sont directement mesurables et donc nécessairement positives. Les rapports de couplages sont également mesurables directement :

$\eta_{i4} = \dfrac{V_i}{V_4}$ en alimentant 4, les autres entrées restant à vide

$\eta_{i3} = \dfrac{V_i}{V_3}$ en alimentant 3, les autres entrées restant à vide sauf 4 en court-circuit

$\eta_{12} = \dfrac{V_1}{V_2}$ en alimentant 2, les autres entrées restant à vide sauf 4 et 3 en court-circuit.

La détermination des dix paramètres du schéma en fonction des dix coefficients indépendants de la matrice inductance s'opère facilement en identifiant les deux expressions de l'énergie magnétostatique (6) et (9). Le calcul est simple si on prend l'identification à rebours : L_{44}, L_{43}, L_{42}, L_{41}, L_{33}, .

5. Simplifications.

5.1 IDENTITÉ DE 2 ENROULEMENTS. — Supposons que, parmi les enroulements d'un transformateur, deux soient identiques au point qu'on puisse permuter leurs bornes sans modifier le fonctionnement du composant. Prenons l'exemple d'un transformateur quatre enroulements.

L'énergie magnétostatique du système se calcule grâce à la formule (9). L'observation de la figure 13 montre que

$$W = \frac{1}{2}\ell_1 I_1^2 + \frac{1}{2}\ell_2(\eta_{12} I_1 + I_2)^2 + \frac{1}{2}\ell_3(\eta_{13} I_1 + \eta_{23} I_2 + I_3)^2 + \frac{1}{2}\ell_4(\eta_{14} I_1 + \eta_{24} I_2 + \eta_{34} I_3 + I_4)^2$$

Si par exemple les enroulements 1 et 2 sont identiques, la permutation des courants I_1 et I_2 ne modifie pas W quels que soient I_3 et I_4. Pourtant l'énergie s'écrit maintenant :

$$W = \frac{1}{2}\ell_1 I_1^2 + \frac{1}{2}\ell_2(\eta_{12} I_2 + I_1)^2 + \frac{1}{2}\ell_3(\eta_{13} I_2 + \eta_{23} I_1 + I_3)^2 + \frac{1}{2}\ell_4(\eta_{14} I_2 + \eta_{24} I_1 + \eta_{34} I_3 + I_4)^2 .$$

L'identité des deux écritures devant être assurée quels que soient les quatre courants, cela implique des relations supplémentaires entre les divers paramètres du circuit :

$$\eta_{23} = \eta_{13}\,, \quad \eta_{24} = \eta_{14} \quad \text{et} \quad \ell_1 = \ell_2(1 - \eta_{12}^2)\,.$$

Cette dernière égalité implique à son tour

$$|\eta_{12}| < 1\,, \quad \text{puisque} \quad \ell_1 > 0 \quad \text{et} \quad \ell_2 > 0\,. \tag{10}$$

L'identité des deux enroulements réduit donc le nombre de paramètres indépendants de dix à sept et W peut être exprimée en fonction de ces sept paramètres :

$$W = \frac{1}{2}\ell_2(I_1^2 + I_2^2) + \ell_2\,\eta_{12}\,I_1\,I_2 + \frac{1}{2}\ell_3[\eta_{13}(I_1 + I_2) + I_3]^2 + \frac{1}{2}\ell_4[\eta_{14}(I_1 + I_2) + \eta_{34}\,I_3 + I_4]^2$$

Le nombre de coefficients indépendants de la matrice inductance subit la même réduction : $L_{11} = L_{22}$ et, pour $i > 2$, $L_{i1} = L_{i2}$ ainsi que $L_{1i} = L_{2i}$.

L'énergie représentée par les deux premiers termes peut être écrite comme une somme de deux termes positifs. W prend alors la forme suivante :

$$W = \frac{1}{2}\ell_2\frac{1+\eta_{12}}{2}(I_1 + I_2)^2 + \frac{1}{2}\ell_2\frac{1-\eta_{12}}{2}(I_1 - I_2)^2 + \frac{1}{2}\ell_3[\eta_{13}(I_1 + I_2) + I_3]^2 + \frac{1}{2}\ell_4[\eta_{14}(I_1 + I_2) + \eta_{34}\,I_3 + I_4]^2 \tag{11}$$

En tenant compte de (10), on a les propriétés suivantes :

$$\ell_2\frac{1+\eta_{21}}{2} > 0 \quad \text{et} \quad \ell_2\frac{1-\eta_{21}}{2} > 0\,.$$

Si on omet le second terme de (11), on reconnaît l'expression de l'énergie d'un système à trois enroulements dont les courants sont $I_{12} = I_1 + I_2$, I_3 et I_4. Le second terme peut être interprété comme étant l'énergie stockée par une inductance parcourue par $I_1 - I_2$.

Le circuit représentant un transformateur à quatre enroulements dont deux sont identiques s'obtient donc en partant de celui d'un transformateur à trois enroulements auquel on adjoint, sur l'une des sorties, le circuit de dédoublement suivant :

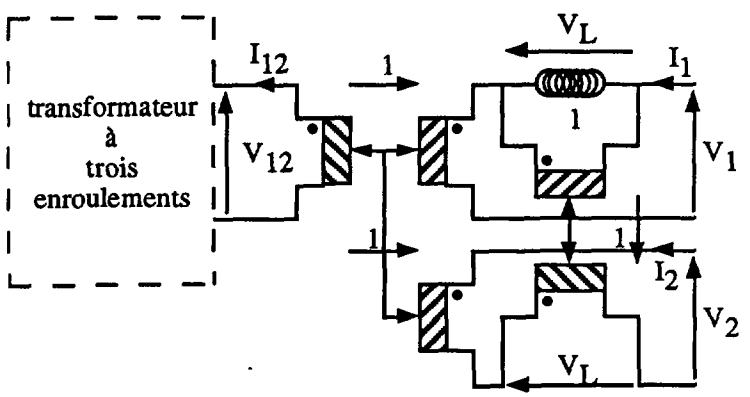

Fig. 14. — Prise en compte de deux enroulements identiques.

[Taking identity of two windings into account.]

Dans ce circuit, les valeurs de ℓ, I_{12}, V_{12} sont

$$\ell = \ell_2 \frac{1 - \eta_{12}}{2}, \quad I_{12} = I_1 + I_2, \quad V_{12} = V_1 + V_L = V_2 - V_L = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

Pour rendre ce dessin plus symétrique, on peut partager ℓ en deux en la représentant par deux inductances à 21 placées de part et d'autre du coupleur.

Si les 2 enroulements ne sont pas isolés (enroulement à point milieu), on peut alors supprimer le coupleur « vertical », et le schéma devient celui de la figure 15.

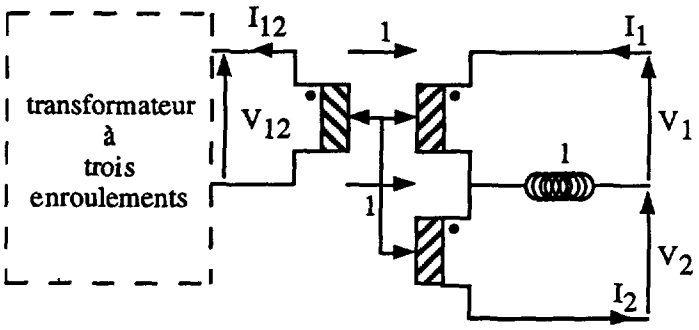

Fig. 15. — Simplification dans le cas d'un enroulement à point milieu.

[Simplification in case of a middle point winding.]

Ces résultats se généralisent aisément pour un transformateur à n enroulements.

5.2 PRISE EN COMPTE D'UN FORT COUPLAGE. — La simplification précédente n'exigeait aucune approximation. Celle-ci en nécessite une très souvent admissible en pratique : elle suppose que deux enroulements sont très fortement couplés entre eux alors qu'ils le sont plus faiblement aux autres.

Reprenons l'exemple d'un transformateur à quatre enroulements dans lequel les enroulements 3 et 4 sont parfaitement couplés entre eux alors qu'ils le sont plus faiblement aux autres. Une identification directe grâce à la matrice impédance déduite du dernier schéma de la figure 13 permet d'obtenir le coefficient de couplage entre les enroulements 3 et 4 :

$$\begin{aligned} L_{33} &= \eta_{34}^2 \ell_4 + \ell_3 \\ L_{34} &= \eta_{34}^2 \ell_4 \qquad \Rightarrow |k_{34}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\ell_3}{\eta_{34}^2 \ell_4}}}. \\ L_{44} &= \ell_4 \end{aligned}$$

Pour que le couplage soit parfait, ℓ_3 doit donc être nulle. L'énergie magnétostatique s'écrit alors

$$W = \frac{1}{2}\ell_1 I_1^2 + \frac{1}{2}\ell_2(\eta_{12} I_1 + I_2)^2 + \frac{1}{2}\ell_4(\eta_{14} I_1 + \eta_{24} I_2 + \eta_{34} I_3 + I_4)^2$$

En posant $I_3' = \eta_{34} I_3 + I_4$, on fait apparaître l'énergie d'un système à trois entrées. Le schéma du transformateur devient celui de la figure 16 :

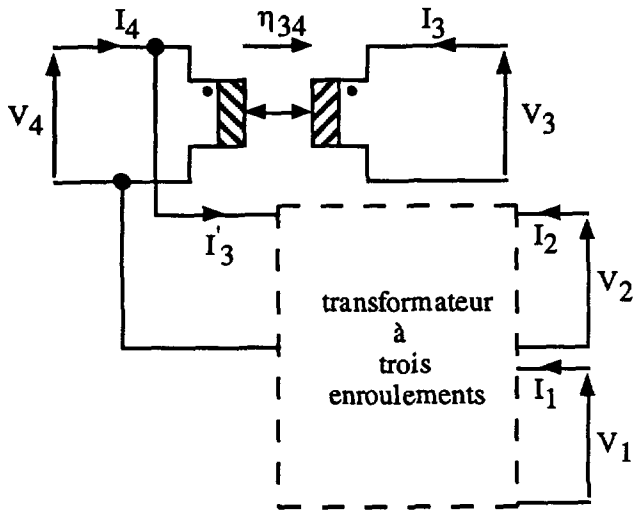

Fig. 16. — Schéma idéal lorsque deux enroulements sont très fortement couplés.

[Ideal circuit when two windings are perfectly coupled.]

En outre, l'identification des deux formes de l'énergie magnétostatique (6) et (9) permet de montrer que l'on a les relations suivantes entre les L_{ij} associés aux lignes et colonnes 3 et 4 :

$$L_{33} = \eta_{34}^2 L_{44} \quad \text{et} \quad L_{i3} = \eta_{34} L_{i4} \,. \tag{12}$$

Les deux relations précédentes se généralisent aisément dans le cas d'un transformateur à n entrées.

Le schéma de la figure 16 est idéalisé car le couplage n'est en pratique jamais parfait. En effet, l'inductance de l'entrée 3 n'est pas nulle lorsque l'entrée 4 est en court-circuit. Pour

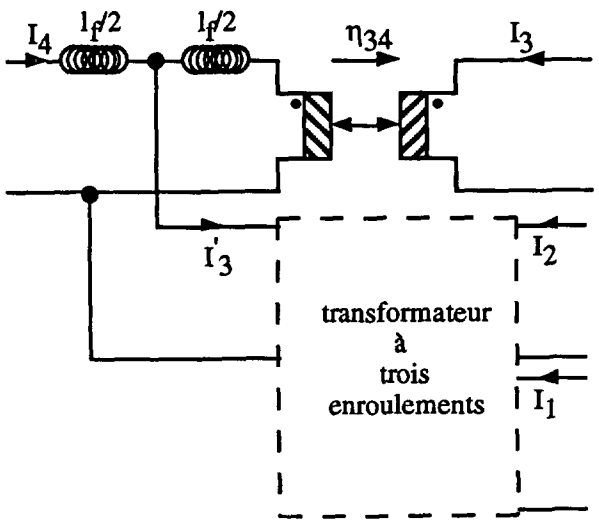

Fig. 17. — Schéma pratique lorsque deux enroulements sont très fortement couplés.

[Realistic circuit usual when two windings are very tightly coupled.]

améliorer le réalisme du schéma, il faut y introduire des fuites, conformément à ce qui est fait pour le transformateur à deux enroulements. En utilisant pour ce dernier le modèle en T de la figure 8, l'entrée coté I_3' du transformateur à trois enroulements fournit l'inductance parallèle (magnétisante).

6. Application à un transformateur triphasé trois colonnes.

6.1 DESCRIPTION DU TRANSFORMATEUR ÉTUDIÉ. — Nous avons pris l'exemple d'un transformateur triphasé à 6 enroulements qui a été étudié au laboratoire [13], dont la géométrie est décrite par la figure 18, et dont les caractéristiques principales sont :

$$P_N = 12{,}5 \text{ kVA} \quad V_{N1} = 83 \text{ V} \quad V_{N2} = 220 \text{ V}.$$

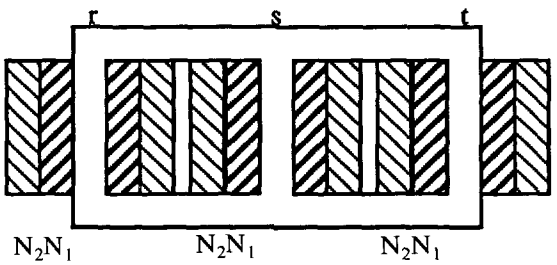

Fig. 18. — Géométrie du transformateur étudié.

[Studied transformer geometry.]

Les colonnes étant nommées r, s, t, r_2 désigne le secondaire qui est sur la colonne r.

L'observation de la géométrie de ce transformateur montre d'une part que les enroulements des colonnes r et t jouent le même rôle, d'autre part que le couplage entre le primaire et le secondaire d'une même jambe doit être beaucoup plus fort que celui entre enroulements de jambes différentes. La matrice inductance mesurée dans l'étude initiale figure ci-dessous :

$$[L] = \begin{array}{c} \\ r_1 \\ s_1 \\ t_1 \\ r_2 \\ s_2 \\ t_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} r_1 & s_1 & t_1 & r_2 & s_2 & t_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 111 & -69 & -42 & 292 & -182 & -110 \\ -69 & 137 & -68 & -182 & 362 & -180 \\ -42 & -68 & 110 & -110 & -180 & 290 \\ 292 & -182 & -110 & 775 & -482 & -292 \\ -182 & 362 & -180 & -482 & 960 & -477 \\ -110 & -180 & 290 & -292 & -477 & 770 \end{bmatrix} \end{array} \tag{13}$$

(les valeurs sont en mH).

6.2 PRISE EN COMPTE DES SIMPLIFICATIONS. — On constate, en rapprochant certains coefficients, qu'aux erreurs de mesures près ($\leqslant 1{,}5\ \%$), des égalités apparaissent :

$$L_{t_1} = L_{t_1} \quad L_{t_1 s_1} = L_{t_1 s_1} \quad L_{t_1 s_2} = L_{t_1 s_2} \quad L_{t_1 t_2} = L_{t_1 t_2} \quad L_{t_1 t_2} = L_{t_1 t_2} \quad L_{s_1 t_2} = L_{s_1 t_2}$$

$$L_{s_2 t_2} = L_{s_2 t_2} \quad L_{t_2} = L_{t_2}.$$

Ainsi l'inversion complète des colonnes r et t ne change pas le système et elles peuvent bien être considérées comme identiques.

D'autre part, le calcul des coefficients de couplages fournit les résultats suivants :

$$k_{r_1 r_2} = \frac{L_{r_1 r_2}}{\sqrt{L_{r_1 r_1} L_{r_2 r_2}}} = 0{,}996 \quad k_{s_1 s_2} = \frac{L_{s_1 s_2}}{\sqrt{L_{s_1 s_1} L_{s_2 s_2}}} = 0{,}998$$

$$k_{t_1 t_2} = \frac{L_{t_1 t_2}}{\sqrt{L_{t_1 t_1} L_{t_2 t_2}}} = 0{,}996$$

et pour I et J variant de 1 à 2 :

$$k_{r_I s_J} = -0{,}56 \quad k_{r_I t_I} = -0{,}38 \quad k_{s_J t_I} = -0{,}55 \,.$$

Ceci confirme la pertinence de l'hypothèse concernant les couplages.

6.3 SCHÉMA ÉQUIVALENT AU COUPLAGE DES TROIS PRIMAIRES. — En tenant compte des propriétés détaillées plus haut, nous pouvons représenter r_1, s_1, t_1 comme sur la figure 19 :

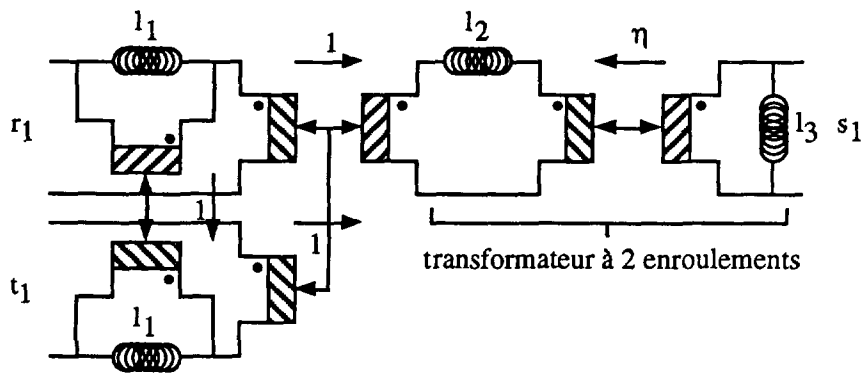

Fig. 19. — Schéma initial représentant les trois primaires.

[Initial circuit representing the three primary windings.]

En faisant passer ℓ_2 de l'autre côté du coupleur de rapport η, et en changeant le sens puis la valeur des coupleurs de rapport 1, on peut éliminer un coupleur. Le schéma devient alors celui de la figure 20.

On remarque que ce schéma comporte quatre paramètres ajustables, ce qui correspond au nombre de coefficients indépendants de la matrice inductance (3,3) lorsque deux entrées sont identiques. Le calcul des quatre paramètres peut se faire en identifiant la partie de la matrice (13) relative aux trois primaires, avec la matrice inductance du circuit, ce qui fournit l'égalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\ell_1 + \eta^2\ell_2 + \eta^2\ell_3 & \eta\ell_3 & -\frac{1}{2}\ell_1 + \eta^2\ell_2 + \eta^2\ell_3 \\ \eta\ell_3 & \ell_3 & \eta\ell_3 \\ -\frac{1}{2}\ell_1 + \eta^2\ell_2 + \eta^2\ell_3 & \eta\ell_3 & \frac{1}{2}\ell_1 + \eta^2\ell_2 + \eta^2\ell_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 111 & -69 & -42 \\ -69 & 137 & -68 \\ -42 & -68 & 110 \end{bmatrix}$$

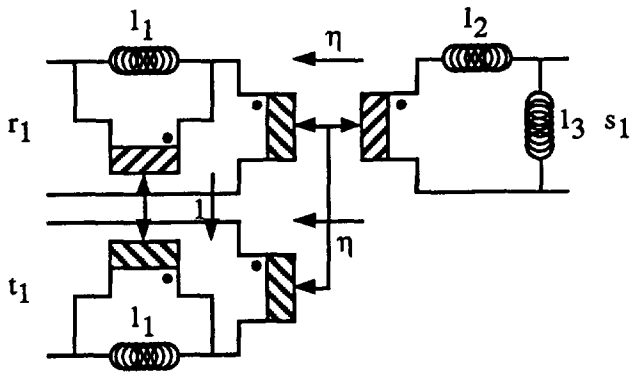

Fig. 20. — Schéma final représentant les trois primaires.

[Ultimate circuit representing the three primary windings.]

L'imprécision des mesures et les imperfections de la symétrie apparaissent alors car les deux égalités suivantes attendues ne sont pas parfaitement vérifiées par les valeurs expérimentales :

$$L_{l_1 s_1} = L_{s_1 l_1}(-69 \text{ mH} \neq -68 \text{ mH}) \quad \text{et} \quad L_{l_1 t_1} = L_{t_1 l_1}(111 \text{ mH} \neq 110 \text{ mH}).$$

En prenant alors respectivement pour ces coefficients les valeurs moyennes – 68,5 mH et 110,5 mH, on obtient :

$$\eta = -1 \quad \ell_1 = 152{,}5 \text{ mH} \quad \ell_2 = 0 \text{ mH} \quad \ell_3 = 137 \text{ mH}.$$

ℓ_2 représente la part de flux créée dans une colonne et non récupérée dans une des deux autres. Sa valeur est très faible (68 mH + 42 mH – 110 mH $\neq$ 0) devant celle des autres inductances et l'obtention d'une valeur nulle s'explique par l'imprécision sur les éléments de la matrice $[L]$. En pratique, cette valeur, inférieure à 1 mH, se déduit d'essais en court-circuit.

6.4 SCHÉMA ÉQUIVALENT DU TRANSFORMATEUR COMPLET. — En tenant compte maintenant du très fort couplage primaire-secondaire sur une même jambe, nous devons ajouter trois coupleurs associés à trois inductances pour représenter complètement le transformateur. Compte tenu des valeurs des coefficients de couplages $k \neq 1$, les rapports de couplages η sont choisis égaux au rapport de transformation 220 V/83 V = 2,65. On obtient ainsi le schéma de la figure 21.

Les inductances ℓ_{fl}, ℓ_{fs} et ℓ_{ft} représentent les fuites respectives de chaque colonne. Leurs valeurs faibles devant les coefficients L_{ij} permettent de les représenter indifféremment au primaire, au secondaire, ou comme indiqué au 5.2. Des mesures en court-circuit [13] montrent que l'ordre de grandeur de ℓ_f est 0,4 mH.

Si on néglige les inductances de fuites ℓ_{fl}, ℓ_{fs} et ℓ_{ft}, la matrice inductance du système complet se déduit de celle relative aux 3 primaires grâce aux relations suivantes déduites des relations (12) :

$$L_{I_2 J_2} = 2{,}65^2 L_{I_1 J_1} \quad \text{et} \quad L_{I_1 J_2} = 2{,}65 L_{I_1 J_1}.$$

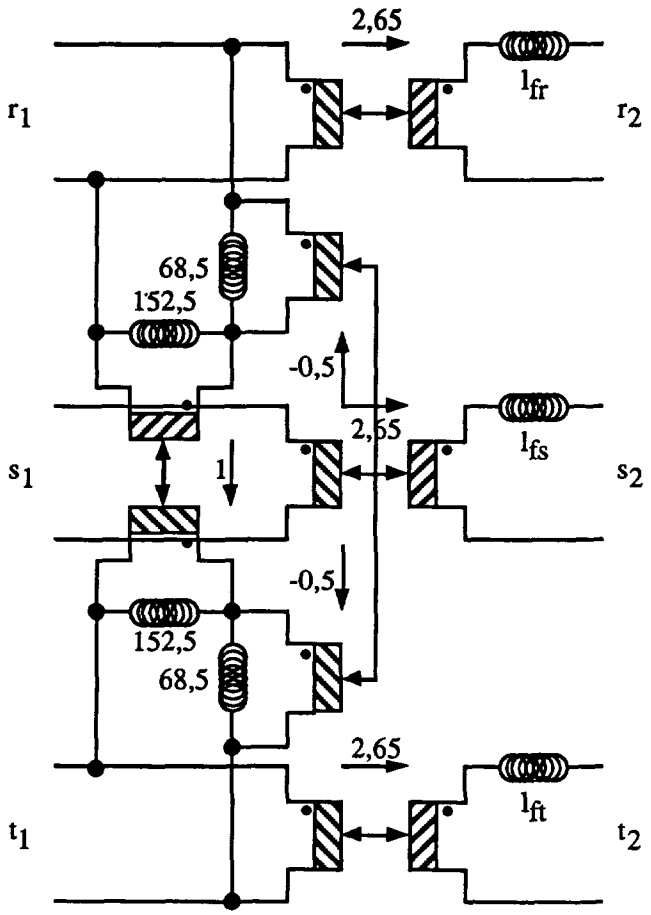

Fig. 21. — Schéma complet du transformateur triphasé six enroulements.

[Complete circuit of the six winding three phase transformer.]

On a alors la matrice suivante, dont les éléments peuvent être comparés à ceux de la matrice (13)

$$[L] = \begin{array}{c} \\ r_1 \\ s_1 \\ t_1 \\ r_2 \\ s_2 \\ t_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} r_1 & s_1 & t_1 & r_2 & s_2 & t_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 110{,}5 & -68{,}5 & -42 & 293 & -181{,}5 & -111{,}5 \\ -68{,}5 & 137 & -68{,}5 & -68{,}5 & 363 & -181{,}5 \\ -42 & -68{,}5 & 110{,}5 & -111{,}5 & -181{,}5 & 293 \\ 293 & -68{,}5 & -111{,}5 & 776 & -481 & -295 \\ -181{,}5 & 363 & -181{,}5 & -481 & 962 & -481 \\ -111{,}5 & -181{,}5 & 293 & -295 & -481 & 776 \end{bmatrix} \end{array}.$$

On constate que les différences sont très faibles ($< 1{,}5\ \%$).

Ce schéma permet d'étudier le fonctionnement du transformateur en régime déséquilibré, et en particulier les cas extrêmes : phase temporairement à vide ou en court-circuit (défaut fugitif).

7. Conclusion.

Les méthodes présentées permettent de générer des schémas équivalents simples pour traduire le couplage magnétique de plusieurs bobinages. La méthode dite par orthogonalisation présente l'avantage de n'introduire que des inductances positives : chacune peut être l'objet d'une interprétation physique individuelle, et le schéma obtenu peut être introduit dans un logiciel de simulation électronique.

La modélisation du fonctionnement haute fréquence d'un transformateur amène à fractionner ses enroulements pour introduire des capacités : un enroulement à deux couches est regardé comme un ensemble de deux enroulements couplés reliés extérieurement. Dans cette optique le travail présenté ici peut s'avérer utile pour l'étude de transformateurs à faible nombre d'enroulements.

Notons enfin que la notion de coupleur ainsi que les méthodes, ici appliquées à l'énergie magnétostatique, sont transposables à l'énergie électrostatique. Leur utilité a été démontrée lors de l'étude des couplages capacitifs (capacités parasites) dans les transformateurs [3].

Bibliographie

[1] Flanagan W. M., Handbook of Transformer Applications (Mc Graw-Hill Book Company, 1986) pp. 2.1-2.9.

[2] Laveuve E., Modélisation des Transformateurs des Convertisseurs Haute Fréquence, Thèse de Doctorat, INPG, Grenoble (septembre 1991).

[3] Keradec J. P., Cogitore B., Laveuve E., Des circuits à constantes localisées pour représenter les transformateurs haute fréquence, *Rev. Générale Elec.* n 5 (mai 1992) 36-47.

[4] Cogitore B., Keradec J. P., Barbaroux J., The Two Winding Ferrite Core Transformer : An Experimental Method to obtain a Wide Frequency Range Equivalent Circuit, IMTC 93, *IEEE* (May 1993) Irvine, California.

[5] Laveuve E., Keradec J. P., Meunier G., Influence of Induced Currents in Conductors on Leakage and Losses in a Transformer, *Elec. Machines Power Systems* **19** (1991) pp. 55-68.

[6] Cogitore B., Keradec J. P., Cornec R., Representation of Copper Losses of Magnetic Components in High Frequency : An Equivalent Circuit with Fixed Value Model, EECC 93, ESA (May 1993) Noordwijk, The Netherlands.

[7] Hsu S. P., Middlebrook R. D., Cuk S., Transformer Modelling and Design for Leakage Control.

[8] Landau, Lifschitz, Physique statistique (éditions Mir, Moscou, 1967) pp. 454-457.

[9] Landau, Lifschitz, Electrodynamique des milieux continus (éditions Mir, Moscou, 1969) pp. 176-178.

[10] Dawhajre A. A., Modelling and Estimation of Leakage Phenomena in Magnetic Circuits, Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, Division of Engineering and Applied Science, Pasadena, California (April 1986).

[11] Dawhajre A. A., Middlebrook R. D., Modelling and Estimation of Leakage Phenomena in Magnetic Circuits, PESC'86, *IEEE* (Vancouver, June 1986).

[12] El-Hamamsy S., Chang E. I., Magnetic Modelling for Computer Aided Design of Power Electronic Circuits, PESC 89, *IEEE*, pp. 635-645.

[13] Leitloff V., La modélisation des transformateurs dans CIRCUIT, 2ème Studienarbeit, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (juin 1990) pp. 53-59.