HAL
open science

Approche micromécanique de l'inclusion enrobée et applications aux matériaux composites

M. Cherkaoui, H. Sabar, M. Berveiller

To cite this version:

M. Cherkaoui, H. Sabar, M. Berveiller. Approche micromécanique de l'inclusion enrobée et applications aux matériaux composites. Journal de Physique III, 1994, 4 (4), pp.719-732. 10.1051/jp3:1994161 . jpa-00249140

HAL Id: jpa-00249140

https://hal.science/jpa-00249140

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification
Physics Abstracts
62.20 — 62.20D — 62.20F

Approche micromécanique de l'inclusion enrobée et applications aux matériaux composites

M. Cherkaoui, H. Sabar et M. Berveiller

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique, URA CNRS 1215, Ile du Saulcy, Université de Metz, 57045 Metz Cedex, France

(*Reçu le 2 juin 1993, révisé le 20 décembre 1993, accepté le 4 janvier 1994*)

Résumé. — Le travail présente une étude micromécanique des contraintes et déformations dans le cas d'une inclusion enrobée hétérogène, l'enrobage étant considéré comme une couche mince dont les propriétés élastiques sont différentes de celles de l'inclusion et de la matrice. La résolution de ce problème s'appuie simultanément sur les fonctions de Green et les opérateurs interfaciaux de la mécanique des solides. On utilise les résultats de cette étude pour déterminer les propriétés effectives d'un composite à partir d'une approche autocohérente prenant en compte les interactions entre inclusions enrobées. Les résultats théoriques appliqués au cas d'un composite constitué d'une matrice polyester et de billes de verre creuses sont en bon accord avec les mesures expérimentales de Huang et Gibson.

Abstract. — A micromechanical model using Green functions techniques and interfaces operators is proposed in order to solve the elastically inhomogeneous coated inclusion problem. For a composite material made of a non dilute concentration of coated inclusions and an homogeneous matrix, the interaction between the reinforcements are solved by a self consistent scheme. The theoretical results for a composite of hollow spheres of glass in a polyester matrix are in good agreement with experimental measurements of Huang and Gibson.

1. Introduction.

De nombreux matériaux hétérogènes sont constitués par une matrice et des inclusions dont les propriétés thermomécaniques sont différentes. L'étude micromécanique de ces matériaux, maintenant bien développée, est basée soit sur l'équation intégrale proposée par Dederichs et Zeller [1] et Kröner [2] soit sur la solution obtenue par Eshelby [3] du problème d'inclusion hétérogène. Les développements plus récents ont cherché à mieux décrire les interactions entre inclusions par l'intermédiaire de la solution du problème de la paire d'inclusions [4], ou par l'intermédiaire du modèle à trois phases [5-7].

Dans de nombreuses situations, une couche mince, située à l'interface inclusions-matrice, à propriétés différentes de celles des inclusions et de la matrice, est présente dans les matériaux hétérogènes. Elle résulte d'opérations d'ensimage ou de réactions chimiques ou physiques

entre inclusions et matrice, conduisant à la formation de nouveaux composés. La présence de cette troisième phase (encore appelée enrobage ou interphase) modifie profondément les mécanismes de transfert de charge entre inclusions et matrice et affecte à la fois les propriétés thermomécaniques macroscopiques et les concentrations des contraintes.

Une étude micromécanique de composites à inclusions enrobées basée simultanément sur l'équation intégrale et sur les opérateurs interfaciaux de la mécanique des solides [8] est proposée dans ce travail. Elle est restreinte au cas de matériaux à comportement élastique linéaire et ne présentant pas de discontinuités du vecteur déplacement et du vecteur contrainte aux interfaces. L'épaisseur des enrobages (Δa) est supposée petite $\left(\frac{\Delta a}{a} \ll 1\right)$ par rapport aux dimensions caractéristiques (a) des inclusions. Contrairement à ce qui a été admis par Walpole [9], la déformation dans l'inclusion est perturbée par la présence de l'enrobage : le champ est non uniforme et sa valeur moyenne dans l'inclusion est différente de celle déduite du calcul d'Eshelby. La définition des propriétés effectives de l'élément de volume représentatif ne faisant intervenir que les tenseurs de localisation moyens sur les inclusions et l'enrobage (cf. 3.1), les déformations moyennes dans l'enrobage sont calculées à partir de l'hypothèse d'un champ uniforme selon l'épaisseur de l'enrobage en utilisant le champ moyen dans l'inclusion. Les équations sont développées dans le cas général d'inclusions ellipsoïdales et de milieux anisotropes. Elles sont particularisées au cas de matériaux élastiques isotropes et incompressibles et de renforts sphériques pour lesquels des solutions analytiques sont obtenues.

L'application du modèle proposé au cas de mousses de faible densité constituées d'une matrice de polyester et de billes creuses en verre fournit, pour le module de Young, des résultats en bon accord avec les mesures de Huang et Gibson [10].

2. Micromécanique de l'inclusion enrobée. Solution approchée.

La topologie du problème d'inclusion enrobée (Fig. 1) correspond à une inclusion de volume V_I, de constantes élastiques $C^{I}_{ijk\ell}$ entourée d'une couche mince d'un autre matériau de constantes élastiques $C^{c}_{ijk\ell}$ et de volume V_c, l'ensemble est plongé dans un milieu infini (Matrice M) de constantes élastiques $C^{0}_{ijk\ell}$. On se limite au cas de l'inclusion enrobée hétérogène c'est-à-dire sans déformations inélastiques, ce qui permet de restreindre l'étude au cas de matériaux à comportement élastique linéaire.

2.1 ÉQUATION INTÉGRALE. — Nous cherchons le champ de déformations dû à des déplacements $U^{d}_{i} = E_{ij}\, x_j$ ($x_j \in S$) imposés sur la frontière extérieure (S) de la matrice qui créent un champ uniforme ($\underline{\Sigma}$, $\underline{E}$) dans le milieu infini et homogène. En se basant sur la loi de comportement locale $\sigma_{ij}(r) = C_{ijk\ell}(r)\, \varepsilon_{k\ell}(r)$, les équations d'équilibre et la technique du tenseur de Green, on obtient l'équation intégrale suivante, portant sur le champ de déformations élastiques $\varepsilon_{ij}(r)$ [1].

$$\varepsilon_{ij}(r) = E_{ij} - \int_V \Gamma_{ijk\ell}(r - r')\, \delta C_{k\ell mn}(r')\, \varepsilon_{mn}(r')\, \mathrm{d}r' \tag{1}$$

V étant le volume du milieu infini.

$\underline{\Gamma}(r - r')$ est le tenseur de Green modifié relié au tenseur de Green usuel $G_{ij}(r - r')$ du milieu infini $\underline{C}^0$ par :

$$\Gamma_{ijk\ell}(r - r') = -\frac{1}{2}\, \{G_{ki,j\ell}(r - r') + G_{kj,i\ell}(r - r')\} \tag{2}$$

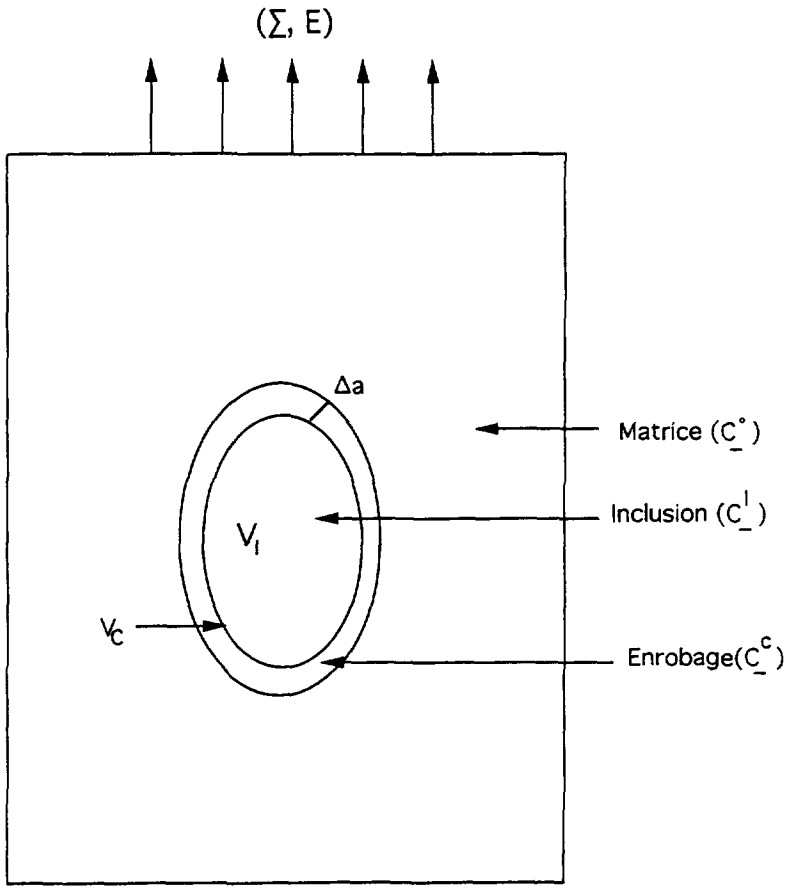

Fig. 1. — Topologie du problème de l'inclusion enrobée.

[Topology of the coated inclusion problem.]

et $\delta C_{k\ell mn}(r)$ est défini par :

$$\underline{C}(r) = \underline{C}^0 + \delta \underline{C}(r) . \tag{3}$$

Dans notre cas, et avec les notations du paragraphe précédent, on a :

$$\delta \underline{C}(r) = (\underline{C}^{\mathrm{I}} - \underline{C}^0)\, \theta^{\mathrm{I}}(r) + (\underline{C}^{\mathrm{c}} - \underline{C}^0)\, \theta^{\mathrm{c}}(r) \tag{4}$$

où les fonctions caractéristiques $\theta^{\mathrm{I}}(r)$ et $\theta^{\mathrm{c}}(r)$ sont définies par :

$$\theta^{\mathrm{I}}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r \in V_{\mathrm{I}} \\ 0 & \text{si} \quad r \notin V_{\mathrm{I}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta^{\mathrm{c}}(r) = \theta^2(r) - \theta^{\mathrm{I}}(r) \tag{5}$$

avec :

$$\theta^2(r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r \in V_2 = V_{\mathrm{I}} + V_{\mathrm{c}} \\ 0 & \text{si} \quad r \notin V_2 . \end{cases} \tag{6}$$

Dans ce cas, V_2 désigne le volume de l'inclusion composite (inclusion + enrobage). On peut aussi écrire (4) sous la forme :

$$\delta \underline{C}(r) = \Delta \underline{C}^{\mathrm{I}}\, \theta^{\mathrm{I}}(r) + \Delta \underline{C}^{\mathrm{c}}\, \theta^{\mathrm{c}}(r) \tag{7}$$

où :

$$\Delta \underline{C}^{\mathrm{I}} = \underline{C}^{\mathrm{I}} - \underline{C}^{0} \quad \text{et} \quad \Delta \underline{C}^{\mathrm{c}} = \underline{C}^{\mathrm{c}} - \underline{C}^{0}\,, \tag{8}$$

(1) devient alors :

$$\varepsilon_{ij}(r) = E_{ij} - \int_V \Gamma_{ijk\ell}(r - r')\, \Delta C^{\mathrm{I}}_{k\ell mn} \varepsilon_{mn}(r')\, \theta^{\mathrm{I}}(r')\, \mathrm{d}r' - \\ - \int_V \Gamma_{ijk\ell}(r - r')\, \Delta C^{\mathrm{c}}_{k\ell mn}\, \varepsilon_{mn}(r')\, \theta^{\mathrm{c}}(r')\, \mathrm{d}r'\,. \tag{9}$$

En tenant compte des propriétés des fonctions caractéristiques $\theta^{\mathrm{I}}(r)$ et $\theta^{\mathrm{c}}(r)$, (9) s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon_{ij}(r) = E_{ij} - \int_{V_{\mathrm{I}}} \Gamma_{ijk\ell}(r - r')\, \Delta C^{\mathrm{I}}_{k\ell mn}\, \varepsilon_{mn}(r')\, \mathrm{d}r' - \\ - \int_{V_{\mathrm{c}}} \Gamma_{ijk\ell}(r - r')\, \Delta C^{\mathrm{c}}_{k\ell mn}\, \varepsilon_{mn}(r')\, \mathrm{d}r'\,. \tag{10}$$

Les champs $\varepsilon_{ij}(r)$ sont en général difficiles à évaluer. Par ailleurs, dans les problèmes d'homogénéisation pour un milieu dans lequel $\underline{C}(r)$ est uniforme par morceaux, seules les déformations moyennes d'une phase interviennent. On se propose de déduire de (10) les déformations moyennes suivantes :

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{I}}_{ij} = \frac{1}{V_{\mathrm{I}}} \int_{V_{\mathrm{I}}} \varepsilon_{ij}(r)\, \mathrm{d}r\,; \quad \bar{\varepsilon}^{\mathrm{c}}_{ij} = \frac{1}{V_{\mathrm{c}}} \int_{V_{\mathrm{c}}} \varepsilon_{ij}(r)\, \mathrm{d}r\,; \\ \bar{\varepsilon}^{2}_{ij} = \frac{1}{V_2} \int_{V_2} \varepsilon_{ij}(r)\, \mathrm{d}r\,. \tag{11}$$

A partir de l'équation intégrale (10), on calcule $\underline{\bar{\varepsilon}}^2$ par :

$$\bar{\varepsilon}^{2}_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{V_2} \int_{V_2} \int_{V_{\mathrm{I}}} \Gamma_{ijk\ell}(r - r')\, \Delta C^{\mathrm{I}}_{k\ell mn}\, \varepsilon_{mn}(r')\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}r' \\ - \frac{1}{V_2} \int_{V_2} \int_{V_{\mathrm{c}}} \Gamma_{ijk\ell}(r - r')\, \Delta C^{\mathrm{c}}_{k\ell mn}\, \varepsilon_{mn}(r')\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}r'\,. \tag{12}$$

D'après les résultats d'Eshelby [3] concernant l'uniformité de $\int \Gamma(r - r')\, \mathrm{d}r$ pour une inclusion ellipsoïdale, on a :

$$\int_{V_2} \Gamma_{ijk\ell}(r - r')\, \mathrm{d}r = T_{ijk\ell}(\underline{C}^{0}) \quad \text{si} \quad r' \in V_2\,. \tag{13}$$

Par conséquent (12) s'écrit sous la forme suivante :

$$\bar{\varepsilon}^2_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{V_2} T_{ijk\ell}(\underline{C}^0)\, \Delta C^{\mathrm{I}}_{k\ell mn} \int_{V_{\mathrm{I}}} \varepsilon_{mn}(r')\, \mathrm{d}r' - \frac{1}{V_2} T_{ijk\ell}(\underline{C}^0)\, \Delta C^{\mathrm{c}}_{k\ell mn} \int_{V_{\mathrm{c}}} \varepsilon_{mn}(r')\, \mathrm{d}r' \tag{14}$$

En considérant les expressions (11), on obtient :

$$\bar{\varepsilon}^2_{ij} = E_{ij} - \frac{V_{\mathrm{I}}}{V_2} T_{ijk\ell}(\underline{C}^0)\, \Delta C^{\mathrm{I}}_{k\ell mn}\, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{I}}_{mn} - \frac{V_{\mathrm{c}}}{V_2} T_{ijk\ell}(\underline{C}^0)\, \Delta C^{\mathrm{c}}_{k\ell mn}\, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{c}}_{mn}\,. \tag{15}$$

Par ailleurs, on peut aussi écrire $\underline{\bar{\varepsilon}}^2$ sous la forme suivante :

$$\bar{\varepsilon}^2_{ij} = \frac{1}{V_2} \left\{ \int_{V_{\mathrm{I}}} \varepsilon_{ij}(r)\, \mathrm{d}r + \int_{V_{\mathrm{c}}} \varepsilon_{ij}(r)\, \mathrm{d}r \right\}. \tag{16}$$

Compte tenu des équations (11), on obtient :

$$\bar{\varepsilon}^2_{ij} = \frac{V_{\mathrm{I}}}{V_2}\, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{I}}_{ij} + \frac{V_{\mathrm{c}}}{V_2}\, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{c}}_{ij}\,. \tag{17}$$

En remplaçant dans (15) $\underline{\bar{\varepsilon}}^2$ par son expression (17), on obtient :

$$\frac{V_{\mathrm{I}}}{V_2} (I_{ijmn} + T_{ijk\ell}(\underline{C}^0)\, \Delta C^{\mathrm{I}}_{k\ell mn})\, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{I}}_{mn} + \frac{V_{\mathrm{c}}}{V_2} (I_{ijmn} + T_{ijk\ell}(\underline{C}^0)\, \Delta C^{\mathrm{c}}_{k\ell mn})\, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{c}}_{mn} = E_{ij} \tag{18}$$

où $\underline{I}$ est le tenseur unité du 4e ordre.

On obtient alors une équation dont les inconnues sont $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{I}}_{ij}$ et $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{c}}_{ij}$. Ce résultat, exact, ne suppose pas que les champs $\varepsilon(r)$ sont uniformes dans V_{I} ou dans V_{c}. Pour résoudre complètement le problème, il faut relier $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{I}}_{ij}$ et $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{c}}_{ij}$ par une autre équation, ce qui fait l'objet du paragraphe suivant où on introduit les opérateurs interfaciaux.

2.2 OPÉRATEURS INTERFACIAUX. — Le champ de contraintes dans la couche enrobée varie de manière complexe. De plus, il existe une discontinuité des champs σ et ε au passage d'une interface. Lorsque l'épaisseur de l'enrobage est faible, on peut admettre raisonnablement que les champs $\underline{\sigma}$ ou (et) $\underline{\varepsilon}$ sont uniformes selon l'épaisseur de la couche, si bien que l'on peut relier les déformations de part et d'autre de l'interface à partir d'une formulation simplifiée des équations de champ (équilibre et compatibilité) conduisant aux opérateurs interfaciaux [8].

On suppose que les deux milieux (1) et (2) de constantes élastiques $\underline{C}^1$ et $\underline{C}^2$ sont séparés par une interface de normale unitaire $\underline{n}$.

Les équations d'équilibre :

$$(\sigma^1_{ij} - \sigma^2_{ij})\, n_j = 0 \tag{19}$$

associées à la condition de compatibilité

$$\varepsilon^1_{ij} - \varepsilon^2_{ij} = \frac{1}{2} (\lambda_i\, n_j + \lambda_j\, n_i) \tag{20}$$

et aux lois de comportement $\underline{\sigma}^1 = \underline{C}^1\,\underline{\varepsilon}^1$, $\underline{\sigma}^2 = \underline{C}^2\,\underline{\varepsilon}^2$ imposent la relation :

$$\varepsilon^2_{ij} - \varepsilon^1_{ij} = P_{ijk\ell}(n, \underline{C}^2)\,\Delta C^{12}_{k\ell mn}\,\varepsilon^1_{mn} \tag{21}$$

où $\underline{\varepsilon}^2 - \underline{\varepsilon}^1$ est le saut des déformations à travers l'interface.

λ_i est un vecteur quelconque car (20) décrit la discontinuité de $\underline{\varepsilon}$ admissible au passage d'une interface.

$\underline{P}$ est l'opérateur interfacial qui dépend de la normale $\underline{n}$ à l'interface au point considéré et des constantes élastiques du milieu (2) et $\Delta\underline{C}^{12} = \underline{C}^1 - \underline{C}^2$.

On montre que l'opérateur $\underline{P}$ s'écrit sous la forme suivante :

$$P_{ijk\ell} = \frac{1}{4}\,(K^{-1}_{ik}\,n_j\,n_\ell + K^{-1}_{jk}\,n_i\,n_\ell + K^{-1}_{i\ell}\,n_j\,n_k + K^{-1}_{j\ell}\,n_i\,n_k) \tag{22}$$

où $\underline{K}^{-1}$ est l'inverse de la matrice de Christoffel $\underline{K}$ dont les composantes sont données par :

$$K_{ik} = C^2_{ijk\ell}\,n_j\,n_\ell\,. \tag{23}$$

En appliquant les formules (21), (22) et (23) au problème de l'inclusion enrobée, on peut alors relier les déformations ε^c et ε^I de part et d'autre de l'interface par la relation exacte :

$$\varepsilon^c_{ij} = \varepsilon^I_{ij} + P_{ijk\ell}\,\Delta C^{Ic}_{k\ell mn}\,\varepsilon^I_{mn}\,. \tag{24}$$

En première approximation, on remplace dans (24) ε^I_{ij} par sa valeur moyenne $\bar{\varepsilon}^I_{ij}$ sur V_I de telle sorte qu'on peut écrire :

$$\varepsilon^c_{ij} = \bar{\varepsilon}^I_{ij} + P_{ijk\ell}(n, \underline{C}^c)\,\Delta C^{Ic}_{k\ell mn}\,\bar{\varepsilon}^I_{mn}\,. \tag{25}$$

L'épaisseur de l'enrobage étant supposée petite, le calcul de la valeur moyenne de la déformation dans l'enrobage est effectué en supposant que $\underline{\varepsilon}^c(r)$ est uniforme selon l'épaisseur de l'enrobage et égal à ε^c de (25). Dans ce cas, $\varepsilon^c(r)$ ne dépend que de la normale à la frontière de V_I et on a :

$$\bar{\varepsilon}^c_{ij} = \frac{1}{V_c}\int_{V_c} \varepsilon^c_{ij}(r)\,\mathrm{d}r = \bar{\varepsilon}^I_{ij} + \frac{1}{V_c}\left\{\int_{V_c} P_{ijk\ell}\,\mathrm{d}r\right\}\Delta C^{Ic}_{k\ell mn}\,\bar{\varepsilon}^I_{mn}\,. \tag{26}$$

On pose :

$$T^*_{ijk\ell}(\underline{C}^c) = \frac{1}{V_c}\int_{V_c} P_{ijk\ell}\,\mathrm{d}r\,. \tag{27}$$

Finalement, on obtient à partir de (18) et de (26) le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{V_I}{V_2}\,(I_{ijmn} + T_{ijk\ell}(\underline{C}^0)\,\Delta C^I_{k\ell mn})\,\bar{\varepsilon}^I_{mn} + \frac{V_c}{V_2}\,(I_{ijmn} + T_{ijk\ell}(\underline{C}^0)\,\Delta C^c_{k\ell mn})\,\bar{\varepsilon}^c_{mn} = E_{ij} \\ &\bar{\varepsilon}^c_{ij} = \bar{\varepsilon}^I_{ij} + T^*_{ijk\ell}(\underline{C}^c)\,\Delta C^{Ic}_{k\ell mn}\,\bar{\varepsilon}^I_{mn} \end{aligned}\right. \tag{28}$$

permettant de trouver $\bar{\underline{\varepsilon}}^I$ et $\bar{\underline{\varepsilon}}^c$ en fonction de $\underline{E}$.

On voit alors que la solution du problème de l'inclusion enrobée hétérogène se ramène au calcul des tenseurs $\underline{T}$ et $\underline{T}^*$. Dans le cas général d'inclusions ellipsoïdales et d'une anisotropie quelconque des tenseurs $\underline{C}$, une méthode numérique utilisant la transformée de Fourier du

tenseur $\underline{G}$ a été développée [11]. Ici on poursuit le calcul dans le cas d'une inclusion enrobée sphérique et des propriétés élastiques isotropes.

2.3 CAS PARTICULIER D'UNE INCLUSION SPHÉRIQUE ET DE MATÉRIAUX ISOTROPES. — Le calcul du tenseur $\underline{T}$ est classique et se déduit du tenseur d'Eshelby usuel par :

$$T_{ijk\ell}(\underline{C}^0) = \frac{1}{30\,\mu^0(1-\nu^0)}\left\{(4-5\,\nu^0)(\delta_{ik}\,\delta_{j\ell}+\delta_{i\ell}\,\delta_{jk})-\delta_{ij}\,\delta_{k\ell}\right\} \tag{29}$$

où μ^0 et ν^0 sont respectivement le module de cisaillement et le rapport de Poisson de la matrice.

Dans le cas présent, une forme analytique pour le tenseur $\underline{T}^*$ peut être trouvée, permettant de résoudre le système (28) dans le cas de renforts enrobés sphériques et de matériaux isotropes.

Dans de telles conditions, l'opérateur interfacial $\underline{P}$ s'écrit sous la forme :

$$P_{ijk\ell}(\underline{C}^c) = \frac{1}{2\,\mu^c}\left\{\frac{1}{2}(\delta_{ik}\,n_j\,n_\ell+\delta_{jk}\,n_i\,n_\ell+\delta_{i\ell}\,n_j\,n_k+\delta_{j\ell}\,n_i\,n_k)-\frac{1}{1-\nu^c}\,n_i\,n_j\,n_k\,n_\ell\right\} \tag{30}$$

où μ^c et ν^c sont respectivement le module de cisaillement et le rapport de Poisson de l'enrobage.

Les n_i sont les composantes du vecteur unitaire normal à la surface de l'inclusion.

On peut étendre l'intégrale de l'opérateur $\underline{P}$ sur V_c en une intégrale sur le volume infini V, en l'écrivant sous une forme utilisant les fonctions caractéristiques θ^2 et θ^1

$$T^*_{ijk\ell} = \frac{1}{V_c}\int_V P_{ijk\ell}\,\{\theta^2(r)-\theta^1(r)\}\,\mathrm{d}r\,. \tag{31}$$

Dans le cas de l'approximation d'une couche mince, on peut écrire :

$$\theta^2(r)-\theta^1(r) = \delta\,\theta^1(r) \tag{32}$$

et

$$\delta\,\theta^1(r) \approx \sum_i \Delta a_i\,\frac{\partial\,\theta^1(r)}{\partial a_i} \tag{33}$$

où les a_i désignent les demi-axes de l'inclusion ellipsoïdale.

Il est alors facile de montrer que :

$$\delta\,\theta^1(r) = -\sum_i \Delta a_i\cdot\frac{x_i}{a_i}\cdot\frac{\partial\,\theta^1(r)}{\partial x_i} \tag{34}$$

D'après les propriétés des fonctions caractéristiques [12]

$$\frac{\partial\,\theta^1(r)}{\partial x_i} = -\,n_i\,\delta\,(S_1) \tag{35}$$

où $\delta\,(S_1)$ est la distribution de Dirac sur la surface S_1 de l'inclusion ; on a alors :

$$\delta\,\theta^1(r) = \sum_i n_i\cdot\Delta a_i\cdot\frac{x_i}{a_i}\,\delta\,(S_1)\,. \tag{36}$$

Par ailleurs, dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale, les composantes du vecteur normal

unitaire s'écrivent sous la forme :

$$n_i = \frac{x_i}{a_i^2} \frac{1}{\left(\frac{x_1^2}{a_1^4} + \frac{x_2^2}{a_2^4} + \frac{x_3^2}{a_3^4} \right)^{1/2}} \tag{37}$$

Finalement, on obtient pour $\delta \theta^{\mathrm{I}}(r)$:

$$\delta \theta^{\mathrm{I}}(r) = \frac{1}{\left(\frac{x_1^2}{a_1^4} + \frac{x_2^2}{a_2^4} + \frac{x_3^2}{a_3^4} \right)^{1/2}} \cdot \sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2} \cdot \frac{\Delta a_i}{a_i} \cdot \delta(S_{\mathrm{I}}) . \tag{38}$$

Dans le cas d'une inclusion sphérique de rayon a et d'un enrobage d'épaisseur uniforme Δa, il reste :

$$\delta \theta^{\mathrm{I}}(r) = \Delta a \; \delta(S_{\mathrm{I}}) . \tag{39}$$

En remplaçant $\delta \theta^{\mathrm{I}}(r)$ par son expression (39) et en considérant les propriétés de la distribution de Dirac, (31) s'écrit sous la forme d'une intégrale de surface

$$T^*_{ijk\ell}(\underline{C}^{\mathrm{c}}) = \frac{\Delta a}{V_{\mathrm{c}}} \int_{S_{\mathrm{I}}} P_{ijk\ell} \, \mathrm{d}S_{\mathrm{I}} . \tag{40}$$

On trouve alors le résultat analytique suivant pour $T^*_{ijk\ell}$.

$$T^*_{ijk\ell}(\underline{C}^{\mathrm{c}}) = \frac{\Delta a \, . \, S_{\mathrm{I}}}{V_{\mathrm{c}}} \cdot \frac{1}{30 \, \mu^{\mathrm{c}}(1 - \nu^{\mathrm{c}})} \left\{ (4 - 5 \, \nu^{\mathrm{c}})(\delta_{ik} \, \delta_{j\ell} + \delta_{i\ell} \, \delta_{jk}) - \delta_{ij} \, \delta_{k\ell} \right\} . \tag{41}$$

C'est-à-dire $T^*(C^{\mathrm{c}}) = \dfrac{\Delta a \, S_{\mathrm{I}}}{V_{\mathrm{c}}} T(C^{\mathrm{c}}) = T(C^{\mathrm{c}})$.

Dans le cas d'un matériau incompressible pour lequel :

$$\varepsilon_{kk} = 0 \quad \text{et} \quad \nu^{\mathrm{I}} = \nu^0 = \nu^{\mathrm{c}} = \frac{1}{2} ,$$

on résout complètement le système (28) et on trouve pour les déviateurs $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{I}}_{ij}$ et $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{c}}_{ij}$:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^{\mathrm{I}}_{ij} &= A^{\mathrm{I}}(q) \, E_{ij} \\ \bar{\varepsilon}^{\mathrm{c}}_{ij} &= \left\{ 1 + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{q}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{q}\right)^{2/3}} \cdot \left(\frac{\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{c}}} - 1 \right) \right\} A^{\mathrm{I}}(q) \, E_{ij} . \end{aligned} \tag{42}$$

Avec :

$$q = \frac{a^3}{(a + \Delta a)^3} \tag{43}$$

et

$$A^{\mathrm{I}}(q) = \frac{5 \frac{\mu^0}{\mu^{\mathrm{c}}}}{q \left(3 \frac{\mu^0}{\mu^{\mathrm{c}}} + 2 \frac{\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{c}}} \right) + (1 - q) \left(3 \frac{\mu^0}{\mu^{\mathrm{c}}} + 2 \right) + \frac{6}{5} (1 - q)} \times \tag{44}$$

$$\times \frac{1}{\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{q}\right)^{2/3} + 1} \right) \left(\frac{\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{c}}} - 1 \right) \left(3 \frac{\mu^0}{\mu^{\mathrm{c}}} + 2 \right)}$$

Pour vérifier la pertinence des approximations effectuées, on compare le terme $A^{\mathrm{I}}(q)$ à celui que l'on peut déduire d'un calcul exact dans le cas d'une inclusion sphérique enrobée obtenue par Zaoui *et al.* [6].

Dans le cas où $\frac{\mu^0}{\mu^c} = 5$ et $\frac{\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^c} = 10$, les valeurs obtenues par la présente approche, notées $A^{\mathrm{I}}(q)$, et celles déduites des formules exactes, notées $A^{\mathrm{I}}_{\underline{\cdot}}(q)$, sont reportées dans le tableau I en fonction de q (proche de 1). On constate que les deux modèles donnent pratiquement les mêmes résultats, en particulier lorsque $\frac{\Delta a}{a}$ tend vers 0.

L'avantage de la méthode simplifiée présentée ici réside dans le fait qu'elle peut s'étendre (par voie numérique) au cas d'inclusions ellipsoïdales enrobées quelconques et de matériaux anisotropes.

Tableau I. — *Valeurs du facteur* $A^{\mathrm{I}}(q)$ *déduites de la formule* (44) *et valeurs exactes* $A^{\mathrm{I}}_{\underline{\cdot}}(q)$ *déduites du calcul* [6] *pour différentes valeurs de* q.

[Comparison at different parameter q for the $A^{\mathrm{I}}(q)$ values obtained using (44) and exact determination $A^{\mathrm{I}}_{\underline{\cdot}}(q)$ performed by [6].]

q	0.9	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1
$A^{\mathrm{I}}(q)$	0.6392	0.6457	0.6523	0.6592	0.6663	0.6737	0.6812	0.6891	0.6972	0.7056	0.7142
$A^{\mathrm{I}}_{\underline{\cdot}}(q)$	0.6607	0.6639	0.6674	0.6613	0.6757	0.6805	0.6859	0.6918	0.6985	0.7059	0.7142

2.4 DISCUSSION. — Dans le cas général d'une inclusion enrobée ellipsoïdale dans une matrice anisotrope, le problème de la détermination des champs de déformations moyennes locaux est résolu par les équations (28). Elles nécessitent le calcul du tenseur $\underline{T}^*$ (en plus du tenseur $\underline{T}$ usuel) qui requiert des méthodes numériques dans le cas d'une matrice anisotrope. Lorsque l'inclusion composite est de forme sphérique et la matrice isotrope, $\underline{T}^*$ est donné par (41). La comparaison avec une méthode de résolution directe [6] montre que le tenseur $\underline{T}^*$, calculé à partir de la valeur moyenne selon l'épaisseur de l'enrobage avec un champ moyen dans l'inclusion, constitue une évaluation correcte des effets de l'enrobage, tout au moins lorsque $\frac{\Delta a}{a} \ll 1$. Le calcul des contraintes moyennes dans V_{I} et V_{c} découle directement de (28).

Dans la suite, nous utilisons les résultats précédents pour calculer les propriétés élastiques d'un matériau composite contenant de nombreuses inclusions enrobées. Dans ce cas, il faut prendre en compte les interactions entre ces dernières, interactions qui sont évaluées par l'intermédiaire d'une approche autocohérente dans laquelle une inclusion enrobée est plongée dans un milieu infini dont les propriétés sont celles du milieu homogène équivalent.

3. Approximation autocohérente pour des matériaux composites à renforts enrobés.

On suppose que dans le matériau composite à trois phases, la première est constituée d'inclusions dont les constantes élastiques sont désignées par $\underline{C}^{\mathrm{I}}$, la seconde est formée par l'enrobage dont les constantes élastiques sont désignées par $\underline{C}^{\mathrm{c}}$. La troisième phase est une matrice de constantes élastiques $\underline{C}^{\mathrm{M}}$. En se basant sur l'approximation autocohérente pour les interactions entre inclusions enrobées, on peut appliquer les résultats de l'inclusion enrobée hétérogène pour déterminer les propriétés effectives de ce matériau composite.

3.1 HOMOGÉNÉISATION. — On désigne par $\underline{C}^{\mathrm{eff}}$ les constantes élastiques effectives du matériau composite à trois phases définies par :

$$\Sigma_{ij} = C^{\mathrm{eff}}_{ijk\ell} E_{k\ell} \,. \tag{45}$$

De même, on peut écrire d'après la linéarité du problème :

$$\varepsilon_{ij}(r) = A_{ijk\ell}(r) E_{k\ell} \tag{46}$$

où $\underline{A}$ est le tenseur localisation des déformations.

La déformation d'ensemble E_{ij} imposée à la frontière du volume élémentaire représentatif est la moyenne des déformations locales :

$$E_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(r)\, \mathrm{d}r \,. \tag{47}$$

En appelant $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{I}}_{ij}$ la déformation moyenne dans la phase « inclusions », $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{c}}_{ij}$ la déformation moyenne dans la phase « enrobage » et $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{M}}_{ij}$ celle dans la matrice, on peut écrire à partir de (47) :

$$E_{ij} = \frac{V_{\mathrm{I}}}{V} \bar{\varepsilon}^{\mathrm{I}}_{ij} + \frac{V_{\mathrm{c}}}{V} \bar{\varepsilon}^{\mathrm{c}}_{ij} + \frac{V_{\mathrm{M}}}{V} \bar{\varepsilon}^{\mathrm{M}}_{ij} \,. \tag{48}$$

On pose :

$$f_{\mathrm{I}} = \frac{V_{\mathrm{I}}}{V} \text{ la fraction volumique de la phase « inclusions »}$$

$$f_{\mathrm{c}} = \frac{V_{\mathrm{c}}}{V} \text{ la fraction volumique de la phase « enrobage »}$$

$$f_{\mathrm{M}} = \frac{V_{\mathrm{M}}}{V} \text{ la fraction volumique de la matrice .}$$

Avec ces notations, (48) s'écrit :

$$E_{ij} = f_{\mathrm{I}}\, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{I}}_{ij} + f_{\mathrm{c}}\, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{c}}_{ij} + f_{\mathrm{M}}\, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{M}}_{ij} \,. \tag{49}$$

De même pour les contraintes, si on appelle Σ_{ij} la contrainte macroscopique, $\bar{\sigma}^{\mathrm{I}}_{ij}$ la contrainte moyenne dans la phase « inclusions », $\bar{\sigma}^{\mathrm{c}}_{ij}$ la contrainte moyenne dans la phase « enrobage » et $\bar{\sigma}^{\mathrm{M}}_{ij}$ celle dans la matrice, on a :

$$\Sigma_{ij} = f_{\mathrm{I}}\, \bar{\sigma}^{\mathrm{I}}_{ij} + f_{\mathrm{c}}\, \bar{\sigma}^{\mathrm{c}}_{ij} + f_{\mathrm{M}}\, \bar{\sigma}^{\mathrm{M}}_{ij} \,. \tag{50}$$

D'après (46), on peut écrire les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^{\mathrm{I}}_{ij} &= A^{\mathrm{I}}_{ijk\ell} E_{k\ell} \\ \bar{\varepsilon}^{\mathrm{c}}_{ij} &= A^{\mathrm{c}}_{ijk\ell} E_{k\ell} \,. \end{aligned} \tag{51}$$

Par ailleurs, la loi de Hooke permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{\mathrm{I}}_{ij} &= C^{\mathrm{I}}_{ijk\ell}\, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{I}}_{k\ell} \\ \bar{\sigma}^{\mathrm{c}}_{ij} &= C^{\mathrm{c}}_{ijk\ell}\, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{c}}_{k\ell} \end{aligned} \tag{52}$$

et compte tenu de (51), on a :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{\mathrm{I}}_{ij} &= C^{\mathrm{I}}_{ijk\ell}\, A^{\mathrm{I}}_{k\ell mn}\, E_{mn} \\ \bar{\sigma}^{\mathrm{c}}_{ij} &= C^{\mathrm{c}}_{ijk\ell}\, A^{\mathrm{c}}_{k\ell mn}\, E_{mn} \,. \end{aligned} \tag{53}$$

De même dans la matrice, on a :

$$\bar{\sigma}^{\mathrm{M}}_{ij} = C^{\mathrm{M}}_{ijk\ell}\, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{M}}_{k\ell} \,. \tag{54}$$

D'après (49) :

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{M}}_{ij} = \frac{1}{f_{\mathrm{M}}} \left\{ E_{ij} - (f_{\mathrm{I}}\, A^{\mathrm{I}}_{ijk\ell} + f_{\mathrm{c}}\, A^{\mathrm{c}}_{ijk\ell})\, E_{k\ell} \right\} \tag{55}$$

et

$$\bar{\sigma}^{\mathrm{M}}_{ij} = \frac{1}{f_{\mathrm{M}}}\, C^{\mathrm{M}}_{ijk\ell} \left\{ I_{k\ell mn} - (f_{\mathrm{I}}\, A^{\mathrm{I}}_{k\ell mn} + f_{\mathrm{c}}\, A^{\mathrm{c}}_{k\ell mn}) \right\} E_{mn} \,. \tag{56}$$

Des relations (50), (52), (56), nous déduisons pour Σ_{ij} .

$$\Sigma_{ij} = \left\{ C^{\mathrm{M}}_{ijmn} + f_{\mathrm{I}}(C^{\mathrm{I}}_{ijk\ell} - C^{\mathrm{M}}_{ijk\ell})\, A^{\mathrm{I}}_{k\ell mn} + f_{\mathrm{c}}(C^{\mathrm{c}}_{ijk\ell} - C^{\mathrm{M}}_{ijk\ell})\, A^{\mathrm{c}}_{k\ell mn} \right\} E_{mn} \tag{57}$$

relation qui permet d'obtenir les constantes élastiques $\underline{C}^{\mathrm{eff}}$ sous la forme :

$$C^{\mathrm{eff}}_{ijmn} = C^{\mathrm{M}}_{ijmn} + f_{\mathrm{I}}(C^{\mathrm{I}}_{ijk\ell} - C^{\mathrm{M}}_{ijk\ell})\, A^{\mathrm{I}}_{k\ell mn} + f_{\mathrm{c}}(C^{\mathrm{c}}_{ijk\ell} - C^{\mathrm{M}}_{ijk\ell})\, A^{\mathrm{c}}_{k\ell mn} \,. \tag{58}$$

On voit que pour déterminer le tenseur $\underline{C}^{\mathrm{eff}}$, il est nécessaire d'évaluer les tenseurs localisation $\underline{A}^{\mathrm{I}}$ et $\underline{A}^{\mathrm{c}}$. Ces tenseurs sont calculés par la méthode autocohérente qui consiste à utiliser les résultats du problème de l'inclusion enrobée hétérogène dans lequel il suffit de remplacer dans les équations $\underline{C}^{0}$ par $\underline{C}^{\mathrm{eff}}$ qui représente, dans ce cas, le milieu homogène équivalent. Par conséquent, le système (28) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{f_{\mathrm{I}}}{f_{\mathrm{I}} + f_{\mathrm{c}}} (I_{ijmn} + T_{ijk\ell}(\underline{C}^{\mathrm{eff}})\, \Delta C^{\mathrm{I}}_{k\ell mn})\, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{I}}_{mn} + \dfrac{f_{\mathrm{c}}}{f_{\mathrm{I}} + f_{\mathrm{c}}} (I_{ijmn} + T_{ijk\ell}(\underline{C}^{\mathrm{eff}})\, \Delta C^{\mathrm{c}}_{k\ell mn})\, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{c}}_{mn} = E_{ij} \\ \bar{\varepsilon}^{\mathrm{c}}_{ij} = \bar{\varepsilon}^{\mathrm{I}}_{ij} + T^{*}_{ijk\ell}(\underline{C}^{\mathrm{c}})\, \Delta C^{\mathrm{Ic}}_{k\ell mn}\, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{I}}_{mn} \end{cases} \tag{59}$$

$$\Delta C^{\mathrm{I}} = C^{\mathrm{I}} - C^{\mathrm{eff}} \qquad \Delta C^{\mathrm{c}} = C^{\mathrm{c}} - C^{\mathrm{eff}}$$

D'après (59), on trouve pour $\underline{A}^{\mathrm{I}}$ et $\underline{A}^{\mathrm{c}}$ ·

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{I}}_{ijrs} = \Bigg\{ & \frac{f_{\mathrm{I}}}{f_{\mathrm{I}} + f_{\mathrm{c}}} (I_{ijrs} + T_{ijk\ell}(\underline{C}^{\mathrm{eff}})\, \Delta C^{\mathrm{I}}_{k\ell rs}) + \\ & + \frac{f_{\mathrm{c}}}{f_{\mathrm{I}} + f_{\mathrm{c}}} (I_{ijmn} + T_{ijk\ell}(\underline{C}^{\mathrm{eff}})\, \Delta C^{\mathrm{c}}_{k\ell mn})(I_{mnrs} + T^{*}_{mnk\ell}(\underline{C}^{\mathrm{c}})\, \Delta C^{\mathrm{Ic}}_{k\ell rs}) \Bigg\}^{-1} \\ A^{\mathrm{c}}_{ijpq} = {} & (I_{ijmn} + T^{*}_{ijk\ell}(\underline{C}^{\mathrm{c}})\, \Delta C^{\mathrm{Ic}}_{k\ell mn})\, A^{\mathrm{I}}_{mnpq} \,. \end{aligned} \tag{60}$$

Les formules (59), (60) ont été développées dans le cas général (milieux anisotropes, inclusions enrobées ellipsoïdales) et particularisées au cas d'inclusions sphériques et de matériaux isotropes. Sous cette dernière forme, elles ont été appliquées au cas d'une matrice en polyester contenant des billes sphériques creuses (paragraphe 4).

Auparavant, il paraît cependant intéressant de présenter la solution analytique de (59) dans le cas de milieux isotropes incompressibles à renforts sphériques.

3.2 RÉSULTATS ANALYTIQUES DANS LE CAS DE MILIEUX ISOTROPES INCOMPRESSIBLES À RENFORTS SPHÉRIQUES. — On se propose de déterminer le module de cisaillement effectif dans le cas d'inclusions enrobées sphériques et des matériaux isotropes incompressibles.

Avec l'hypothèse d'une couche mince, on peut écrire en première approximation :

$$q = \frac{a^3}{(a + \Delta a)^3} \approx 1 - 3\,\frac{\Delta a}{a} \tag{61}$$

Avec (61), on obtient la forme simplifiée de $A^{\mathrm{I}}_{ijk\ell}$ et $A^{\mathrm{c}}_{ijk\ell}$:

$$A^{\mathrm{I}} = \frac{5\,\mu^{\mathrm{eff}}}{(3\,\mu^{\mathrm{eff}} + 2\,\mu^{\mathrm{I}}) + \dfrac{18}{5}\dfrac{\Delta a}{a}\,(\mu^{\mathrm{I}} - \mu^{\mathrm{c}})\left(\dfrac{\mu^{\mathrm{eff}}}{\mu^{\mathrm{c}}} - 1\right)} \tag{62}$$

et :

$$A^{\mathrm{c}} = \left\{1 + \frac{2}{5}\left(1 - \frac{\Delta a}{a}\right)\left(\frac{\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{c}}} - 1\right)\right\} A^{\mathrm{I}}\,. \tag{63}$$

De la relation (58), nous déduisons pour μ^{eff}.

$$\mu^{\mathrm{eff}} = \mu^{\mathrm{M}} + f_{\mathrm{I}}(\mu^{\mathrm{I}} - \mu^{\mathrm{M}})\,A^{\mathrm{I}} + f_{\mathrm{c}}(\mu^{\mathrm{c}} - \mu^{\mathrm{M}})\,A^{\mathrm{c}} \tag{64}$$

où :

A^{I} et A^{c} sont donnés par (62) et (63).

4. Application au cas d'une matrice contenant des billes de verre creuses.

Dans un travail récent, Huang et Gibson [10] ont proposé un modèle micromécanique basé sur la solution du problème d'une inclusion sphérique creuse située dans une matrice infinie isotrope obtenue par Lur'e [13]. Les interactions entre inclusions ont été négligées et leurs résultats ne sont valables que dans le cas de milieux dilués.

Effectivement, dans le cas d'une matrice en résine époxy contenant des billes de verre creuses, les résultats de leur modèle ne s'accordent avec leurs mesures expérimentales du module de Young que pour des fractions volumiques d'inclusions enrobées ne dépassant pas 0,1 (Fig. 2). En reprenant les propriétés et paramètres définissant le matériau (rappelés dans le Tab. II) donnés par Huang et Gibson, nous avons calculé le module de Young équivalent à partir du modèle proposé dans ce travail (Eqs. (58), (59), (60)). La figure 2 représente simultanément les résultats des mesures de Huang et Gibson, leurs calculs théoriques ainsi que les valeurs obtenues à partir des formules ((58), (59), (60)).

On observe que le modèle proposé fournit des résultats en bon accord avec les mesures expérimentales, y compris dans le cas de milieux non dilués.

Ce modèle peut également s'appliquer au problème de l'endommagement interfacial des composites biphasés classiques. Utilisé à la fois pour la détermination des propriétés effectives

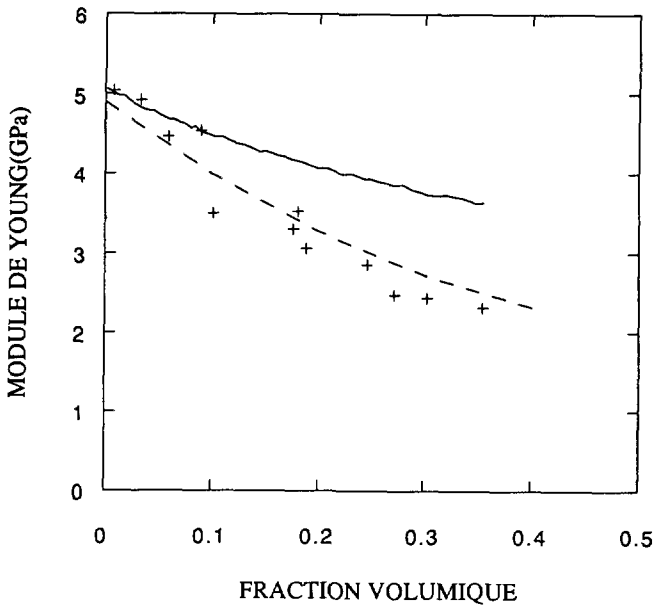

Fig. 2. — Module de Young en fonction de la fraction volumique d'inclusions enrobées. (——) D'après le modèle de Huang et Gibson [10], (++) d'après les mesures expérimentales [10], (- -) d'après le modèle proposé dans ce travail.

[Young modulus *versus* coated inclusion volume fraction. (——) From Huang and Gibson's model [10], (++) experimental data [10], (- -) proposed model.]

Tableau II. — *Paramètres mécaniques du matériau étudié par Huang and Gibson* [10].
[Material parameters used by Huang and Gibson [10].]

	GLASS	POLYESTER	Δa/a
μ(GPa)	28.5	1.75	0.017
ν	0.23	0.4	

macroscopiques et pour l'évaluation des contraintes locales dans les renforts et l'enrobage, il permet d'atteindre une conception optimisée des matériaux composites.

Bibliographie

[1] Dederichs P. H., Zeller R., Variational treatment of the elastic constants of disordered Materials, *Z. Phys.* **259** (1973).

[2] Kröner E., Bounds for effective elastic moduli of disordered materials, *J Mech Phys. Solids* (1980) 25.

[3] Eshelby J. D., Elastic inclusions and inhomogeneities, Prog. in Solid Mech. (Amsterdam, 1961).

[4] Berveiller M., Fassi-Fehri O., Hihi A., The problem of two plastic and heterogeneous inclusions, *Int. J. Engng. Sci.* (1987) 25.

[5] Christensen R. M., Lo K. H., Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models, *J. Mech. Phys. Solids* (1979) 27.

[6] Zaoui A., Hervé E., Modelling the effective behavior of nonlinear matrix-inclusion composites, *Eur. J. Mech.* (A) **9** (1990).

[7] Weng G. J., Luo H. A., On Eshelby's S-tensor in a three-phase cylindrically concentric solid, *Mech. Mater.* (1989) 8.

[8] Hill R., Interfacial Operators in the mechanics of composite media, *J. Mech. Phys. Solids* **31** (1983).

[9] Walpole J., A coated inclusion in an elastic medium, *Math. Proc. Camb.* **83** (1977).

[10] Huang J. S., Gibson L. J., Elastic moduli of a composite of Hollow spheres in a Matrix, *J. Mech. Phys. Solids* **41** (1993).

[11] Mura T., Kinoshita N., Green's functions for anisotropic elasticity, *Phys. Status Solidi* **47** (1971).

[12] Dewit R., *J. Res. Nat. Bur. Standards, A Physics and Chemistry.* **77A,** n 1 (1973).

[13] Lur'e A. I., Three dimensional problems of the theory of Elasticity (1964).