

Influence de l'erreur de mesure de température de surface par thermocouples de contact sur la détermination de la diffusivité thermique par méthode "flash"

M. Lachi, A. Degiovanni

► **To cite this version:**

M. Lachi, A. Degiovanni. Influence de l'erreur de mesure de température de surface par thermocouples de contact sur la détermination de la diffusivité thermique par méthode "flash". Journal de Physique III, EDP Sciences, 1992, 2 (11), pp.2247-2265. <10.1051/jp3:1992244>. <jpa-00248880>

HAL Id: jpa-00248880

<https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00248880>

Submitted on 1 Jan 1992

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification

Physics Abstracts

44.10 — 44.30 — 44.50 — 66.70

Influence de l'erreur de mesure de température de surface par thermocouples de contact sur la détermination de la diffusivité thermique par méthode « flash »

M. Lachi et A. Degiovanni

E.N.S.E.M., L.E.M.T.A., C.N.R.S. - URA 875, 2 Avenue de la Forêt de Haye,
54500 Vandœuvre les Nancy, France

(Reçu le 9 mars 1992, révisé le 30 juin 1992, accepté le 24 juillet 1992)

Résumé. — Nous présentons une modélisation de la mesure de température de surface par thermocouple. La solution du modèle s'effectue par séparation de variables et par méthode des « quadripôles ». Cette dernière méthode permet une représentation élégante des résultats et une extrapolation simple. L'application du modèle permet de déterminer l'influence du détecteur de température sur la détermination de la diffusivité thermique par méthode « flash ». Des exemples pour un thermocouple à semi-conducteur et pour un thermocouple métallique sont donnés.

Abstract. — A model of surface temperature measurement using a thermocouple is presented. The solution of the model is found by separation of variables and by the « quadripoles » method. This last method allows both a neat representation of the results and a simple extrapolation. Application of this model leads to the determining of the temperature detector's influence on the estimation of heat diffusivity of the heat pulse (« flash ») method. Examples are given for a semi-conducting thermocouple and for a metallic thermocouple.

Nomenclature.

A, B, C, D	termes de la matrice de transfert inverse d'un milieu
a	diffusivité thermique ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
e	épaisseur de l'échantillon (m)
h	coefficient d'échange ($\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$)
J_0	fonction de Bessel de 1 ^{re} espèce d'ordre 0
J_1	fonction de Bessel de 1 ^{re} espèce d'ordre 1
l	longueur du détecteur (m)
p	variable de Laplace (s^{-1})
R	rayon de l'échantillon (m)
R_c	résistance de contact milieu-détecteur (par unité de surface) ($\text{K m}^2 \text{W}^{-1}$)
R_{cd}	résistance de contact côté détecteur ($\text{K m}^2 \text{W}^{-1}$)
R_{cm}	résistance de contact côté milieu ($\text{K m}^2 \text{W}^{-1}$)
r	coordonnée d'espace (radiale) (m)

r_0	rayon du détecteur (m)
S	section de l'échantillon (m^2)
s	section du détecteur (m^2)
T	température (K)
T_e	température extérieure (K)
t	temps (s)
Z_c	impédance de constriction ($K m^2 W^{-1}$)
Z_d	impédance du détecteur ($K m^2 W^{-1}$)
z	coordonnée d'espace (axiale) (m)
β_n	valeurs propres (solution de $J_1(\beta_n R) = 0$) (m^{-1})
Φ	transformée de Laplace de φ ($W s m^{-2}$)
φ_0	densité de flux surfacique en $z = 0$ ($W m^{-2}$)
φ_1	densité de flux surfacique en $z = e$ ($W m^{-2}$)
λ	conductivité thermique ($W m^{-1} K^{-1}$)
θ	transformée de Laplace de $T - T_e$ (Ks)
ρc	chaleur volumique ($J m^{-3} K^{-1}$)

INDICES.

- 1 milieu 1 (échantillon)
2 milieu 2 (détecteur).

Dans les installations de mesure de la diffusivité thermique par méthode « flash », deux méthodes sont couramment utilisées pour la mesure de la température :

- sans contact, par détecteur de rayonnement infrarouge,
- avec contact, par thermocouple à contacts séparés.

C'est la deuxième technique que nous utilisons [1-3].

La mesure de température de surface par thermocouples à contacts séparés consiste à appuyer les deux éléments du couple sur la surface du matériau, la jonction est assurée par le matériau lui-même, s'il est conducteur électrique, ou par une fine couche métallique (argent ou or) déposée sur sa surface, s'il est isolant.

La présence du couple modifie le champ de température ; les lignes de flux convergent vers le couple, c'est l'effet de « macroconstriction », tandis qu'à l'échelle microscopique, le contact n'étant jamais parfait, il existe de nouvelles convergences des lignes de flux vers les zones de contacts réels, c'est ce qu'on appelle l'effet de « microconstriction ». Ces effets se traduisent par des échanges non uniformes au niveau de la surface de l'échantillon.

Les travaux antérieurs [4-8] avaient pour but de déterminer l'erreur sur la mesure de température ; ici, on va s'attacher à la conséquence de cette modification du champ de température sur le calcul de la diffusivité dans le cas particulier de l'utilisation des thermocouples à semi-conducteur (c'est-à-dire massif et non filiforme comme les thermocouples métalliques) ; on donnera à titre de comparaison un exemple pour des thermocouples métalliques.

Un appareillage de mesure est présenté à la figure 1. Comme le montre le détail du thermocouple à la figure 2, les plaquettes semi-conductrices sont brasées sur deux cylindres en cuivre coulissant dans le bloc isotherme en laiton ; on supposera dans la modélisation que la température des cylindres ne varie pas au cours du temps. D'autre part, les deux plaquettes seront simulées par un cylindre de révolution.

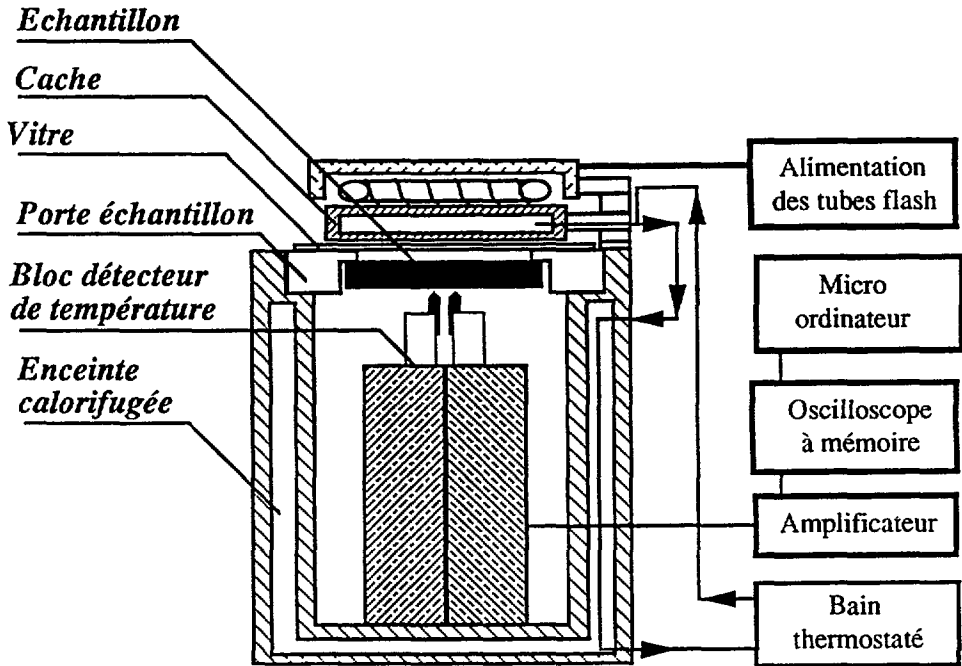


Fig. 1. — Schéma de principe de l'enceinte de mesure de la diffusivité thermique par méthode flash. [Functional sketch of the chamber for thermal diffusivity measurement by the heat pulse method.]

1. Modèle mathématique.

Les hypothèses précédentes nous permettent de retenir la géométrie suivante (Fig. 3) : un échantillon homogène, cylindrique de rayon R , d'épaisseur e et présentant une symétrie de révolution autour de l'axe Oz est soumis à une perturbation de flux sur toute la face avant ($z = 0$). La prise de température est effectuée par un thermocouple de rayon r_0 , appuyé au centre de la face arrière de l'échantillon.

Pour simplifier l'écriture, nous supposons que l'échantillon est isolé en dehors du contact échantillon-couple. Nous donnons la solution complète (avec échange superficiel sur l'échantillon en $z = 0$ et $z = e$) en annexe.

Le problème correspondant est représenté par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} & 0 < r < R \quad \text{et} \quad 0 < z < e & (1) \\ \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} = \frac{1}{a_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} & 0 < r < r_0 \quad \text{et} \quad e < z < 1 + e & (2) \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} = - \frac{\varphi_0(r, t)}{\lambda_1} \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad r = R \quad (4)$$

$$T_1 \text{ finie} \quad \text{en} \quad r = 0 \quad (5)$$

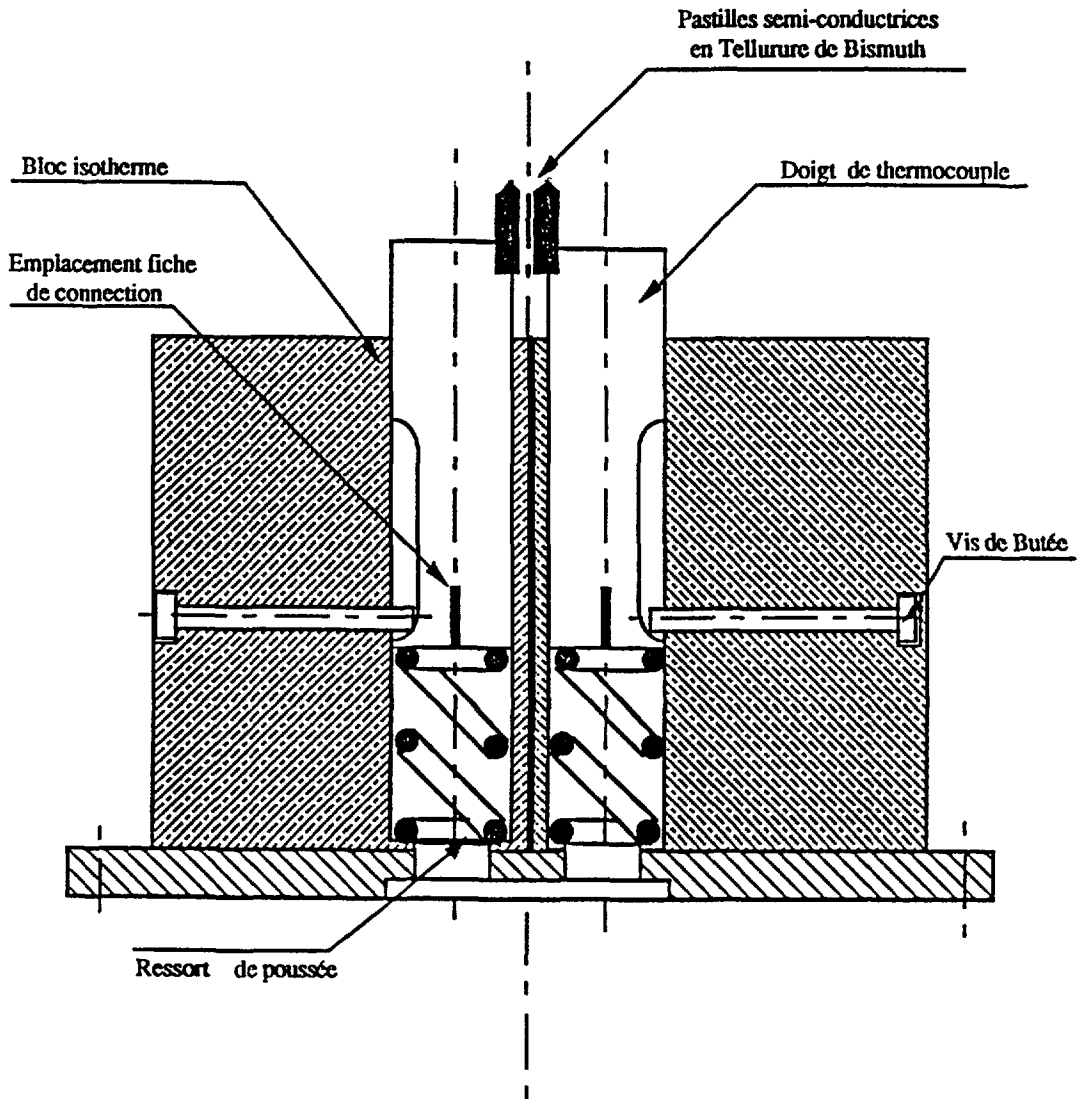


Fig. 2. — Bloc détecteur de température.
[Temperature detector block.]

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = h_2(T_2 - T_e) \quad \text{en } r = r_0 \quad (6)$$

$$T_2 = T_e \quad \text{en } z = 1 + e \quad (7)$$

$$T_2 \text{ finie} \quad \text{en } r = 0 \quad (8)$$

les conditions initiales :

$$T_1(r, z, 0) = T_e \quad 0 < r < R \quad \text{et} \quad 0 < z < e \quad (9)$$

$$T_2(r, z, 0) = T_e \quad 0 < r < r_0 \quad \text{et} \quad e < z < 1 + e \quad (10)$$

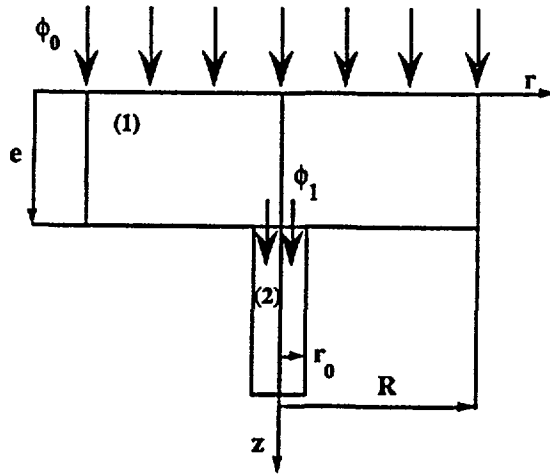


Fig. 3. — Modèle retenu pour l'analyse mathématique.

[Model for the mathematical analysis.]

les conditions de passage au niveau du contact (en $z = e$) :

$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} = - \varphi_1(r, t) & (11) \\ T_1 - T_2 = R_c \varphi_1(r, t). & (12) \end{cases}$$

2. Hypothèses simplificatrices.

Nous cherchons à calculer une erreur de mesure et non un champ de température local avec une grande précision, aussi, nous allons faire un certain nombre d'approximations qui nous permettront de résoudre analytiquement le système précédent.

— Le diamètre du couple (r_0) est suffisamment petit pour pouvoir supposer que la densité de flux à l'interface milieu (1)-milieu (2) est uniforme.

— Le nombre de Biot associé au couple ($h_2 r_0 / \lambda_2$) est petit (inférieur à 10^{-1}), ce qui permet d'utiliser l'hypothèse de l'ailette.

— Dans le cas qui nous préoccupe (méthode « flash ») le flux absorbé par l'échantillon est réparti uniformément sur la face $z = 0$.

Les équations du problème sont alors données par les systèmes suivants :

• Milieu (1)

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \tag{13}$$

$$- \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \varphi_0(t) \quad \text{en } z = 0 \tag{14}$$

$$\begin{aligned} - \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} &= \varphi_1(t) \quad \text{en } z = e, \quad r < r_0 \\ &= 0 \quad \text{en } z = e, \quad r_0 < r < R \end{aligned} \tag{15}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r = 0 \quad \text{et } r = R \quad (16)$$

$$T_1 = T_e \quad \text{à } t = 0. \quad (17)$$

• *Milieu (2)*

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - \frac{2 h_2}{r_0 \lambda_2} (T_2 - T_e) = \frac{1}{a_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad (18)$$

$$- \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} = \varphi_1(t) \quad \text{en } z = e \quad (19)$$

$$T_2 = T_e \quad \text{en } z = 1 + e \quad (20)$$

$$T_2 = T_e \quad \text{à } t = 0. \quad (21)$$

• *A l'interface milieu (1)-milieu (2)*

Avec les hypothèses précédentes, la condition de passage ne peut plus être vérifiée localement, mais seulement en valeur moyenne, soit :

$$\bar{T}_1 - T_2 = R_c \varphi_1(t) \quad \text{en } z = e \quad (22)$$

où

$$\bar{T}_1 = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} 2 \pi T_1 r \, dr.$$

3. Solution analytique.

Après un changement de variable et en utilisant la transformation de Laplace en temps, soit $\mathcal{L}(T - T_e) = \theta$, le nouveau système s'écrit :

• *Milieu (1)*

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial r^2} = \frac{p}{a_1} \theta_1 \quad (23)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial z} = - \frac{\Phi_0(p)}{\lambda_1} \quad \text{en } z = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial z} = - \frac{\Phi_1(p)}{\lambda_1} \quad \text{en } z = e, \quad r < r_0 \quad (25)$$

$$= 0 \quad \text{en } z = e, \quad r_0 < r < R$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r = 0, \quad r = R. \quad (26)$$

• *Milieu (2)*

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} - \frac{2 h_2}{r_0 \lambda_2} \theta_2 = \frac{p}{a_2} \theta_2 \quad (27)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial z} = - \frac{\Phi_1(p)}{\lambda_2} \quad \text{en } y = e \quad (28)$$

$$\theta_2 = 0 \quad \text{en } z = \ell + e. \quad (29)$$

• *Interface milieu (1)-milieu (2)*

$$\bar{\theta}_1 - \theta_2 = R_c \Phi_1(p) \quad (30)$$

où :

$$\theta_1 = \mathcal{L}(T_1 - T_e), \quad \theta_2 = \mathcal{L}(T_2 - T_e), \quad \bar{\theta}_1 = \mathcal{L}(\bar{T}_1 - T_e)$$

$$\Phi_0 = \mathcal{L}(\varphi_0), \quad \Phi_1 = \mathcal{L}(\varphi_1).$$

3.1 SOLUTION θ_2 . — Le système (2) traduit un champ de température unidirectionnel ; il est alors commode d'utiliser la notion de matrice de transfert pour résoudre le problème (ou de quadripôle thermique [9]), en effet, on démontre que la solution du système (2) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \theta_e \\ \Phi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_s \\ \Phi_s \end{bmatrix}$$

où θ_e et Φ_e sont les transformées de Laplace de la température et de la densité de flux en $z = e$ et θ_s et Φ_s en $z = \ell + e$.

avec :

$$A = D = \text{ch } \sqrt{p^*} \ell$$

$$B = \text{sh } \sqrt{p^*} \ell / \lambda_2 \sqrt{p^*}$$

$$C = \lambda_2 \sqrt{p^*} \text{sh } \sqrt{p^*} \ell$$

$$p^* = p/a_2 + 2 h_2/r_0 \lambda_2.$$

où :

La relation (29) nous donne $\theta_s = 0$, soit finalement :

$$\theta_e = \theta_2(z = e) = Z_d \Phi_1 \quad (31)$$

avec :

$$Z_d = \frac{B}{D} = \frac{\ell \text{ th } (\sqrt{p/a_2 + 2 h_2/r_0 \lambda_2} \ell)}{\lambda_2 (\sqrt{p/a_2 + 2 h_2/r_0 \lambda_2} \ell)} \quad (32)$$

3.2 SOLUTION θ_1 . — Le système (1) étant non homogène, on sépare le système en deux sous-systèmes :

$$\theta_1 = \theta_{11} + \theta_{12} \quad (33)$$

avec θ_{11} solution de :

$$\frac{\partial^2 \theta_{11}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{11}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_{11}}{\partial r^2} = \frac{p}{a_1} \theta_{11} \quad (34)$$

$$\frac{\partial \theta_{11}}{\partial z} = - \frac{\Phi_0}{\lambda_1} \quad \text{en } z = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial \theta_{11}}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = e \quad (36)$$

$$\frac{\partial \theta_{11}}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r = 0 \quad \text{et } r = R \quad (37)$$

et θ_{12} solution de :

$$\frac{\partial^2 \theta_{12}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{12}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_{12}}{\partial r^2} = \frac{p}{a_1} \theta_{12} \quad (38)$$

$$\frac{\partial \theta_{12}}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial \theta_{12}}{\partial z} = -\frac{\Phi_1}{\lambda_1} \quad \text{en } z = e; \quad r < r_0 \quad (40)$$

$$= 0 \quad \text{en } z = e; \quad r_0 < r < R$$

$$\frac{\partial \theta_{12}}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r = 0 \quad \text{et } r = R. \quad (41)$$

Après séparation des variables d'espace (pour θ_{12}), on obtient :

$$\theta_{11} = \frac{\Phi_0}{\lambda_1 \gamma_0} \frac{\text{ch} [\gamma_0(e-z)]}{\text{sh}(\gamma_0 e)} \quad (42)$$

avec : $\gamma_0 = \sqrt{p/a_1}$

$$\begin{aligned} \theta_{12} = & -\frac{\Phi_1}{\lambda_1 \gamma_0 R^2} \frac{r_0^2 \text{ch}(\gamma_0 z)}{\text{sh}(\gamma_0 e)} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \Phi_1}{\lambda_1 \gamma_n \beta_n R^2} \frac{r_0 J_1(\beta_n r_0)}{J_0^2(\beta_n R) \text{sh}(\gamma_n e)} \text{ch}(\gamma_n z) J_0(\beta_n r) \end{aligned} \quad (43)$$

avec : $\gamma_n^2 = \beta_n^2 + p/a_1$

$$\beta_n \text{ solution de } J_1(\beta_n R) = 0 \quad (44)$$

en pratique on utilise une solution approchée de (44) :

$$\beta_n R = n\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{8 \left(n\pi + \frac{\pi}{4} \right)}$$

pour $n = 1$ l'erreur est de 5×10^{-5} , pour $n > 1$ elle est toujours inférieure à 10^{-6}

3.3 CALCUL DE Φ_1 . — La condition de passage (30) nous permet de calculer Φ_1 et par suite les champs de température $\theta_1(r, z, p)$ et $\theta_2(z, p)$, soit :

$$\begin{aligned} R_c \Phi_1 = & \frac{\Phi_0}{\lambda_1 \gamma_0} \frac{1}{\text{sh}(\gamma_0 e)} - \frac{\Phi_1}{\lambda_1 \gamma_0 R^2} \frac{r_0^2 \text{ch}(\gamma_0 e)}{\text{sh}(\gamma_0 e)} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \Phi_1}{\lambda_1 \gamma_n \beta_n R^2} \frac{r_0 J_1(\beta_n r_0) \text{ch}(\gamma_n e)}{J_0^2(\beta_n R) \text{sh}(\gamma_n e)} \frac{2}{r_0 \beta_n} J_1(\beta_n r_0) - Z_d \Phi_1 \end{aligned} \quad (45)$$

en posant :

$$\alpha_n = \gamma_n e \quad \omega_n = \beta_n R \quad \text{et} \quad r^* = \frac{r_0}{R}$$

on obtient :

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_0}{\alpha_0 \operatorname{sh}(\alpha_0)} \frac{1}{F(p)}$$

avec :

$$F(p) = \frac{\lambda_1}{e} (R_c + Z_d) + \frac{r^{*2} \operatorname{ch}(\alpha_0)}{\alpha_0 \operatorname{sh}(\alpha_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\alpha_n \omega_n^2} \frac{J_1^2(\omega_n r^*) \operatorname{ch}(\alpha_n)}{J_0^2(\omega_n) \operatorname{sh}(\alpha_n)} \quad (46)$$

3.4 CALCUL DE LA TEMPÉRATURE MESURÉE PAR LE THERMOCOUPLE. — Le thermocouple étant du type à « contact séparé », la température mesurée par ce dernier est intermédiaire entre la température de surface de l'échantillon et la température de surface du thermocouple. Si on appelle R_{cm} la résistance de contact du côté de l'échantillon et R_{cd} la résistance du côté du détecteur ($R_{cm} + R_{cd} = R_c$), la température mesurée par le couple est alors donnée par (voir Fig. 4) :

$$\theta_m = \bar{\theta}_1(x=e) - R_{cm} \Phi_1$$

soit :

$$\theta_m = (R_{cd} + Z_d) \Phi_1 \quad (47)$$

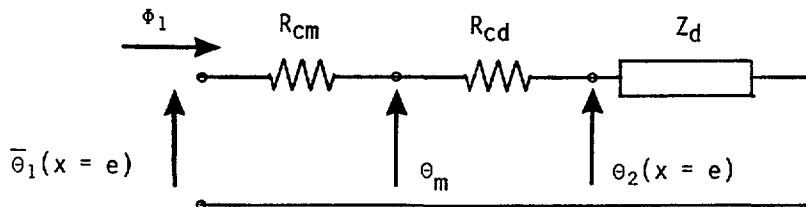


Fig. 4. — Schéma électrique équivalent (température mesurée par le thermocouple).

[Equivalent electrical diagram (temperature measured by a thermocouple).]

4. Quadripôles thermiques.

La solution précédente est lourde à utiliser, en effet, la série converge très lentement et nécessite le calcul d'un grand nombre de termes, variables suivant les cas mais elle permet de prendre en compte des constrictions non complètement établies, lorsque par exemple l'épaisseur ou/et le rayon de l'échantillon ne sont pas très grands devant le rayon du couple.

Nous avons déjà montré [10] que l'on pouvait dans certains cas représenter ce type de solution sous la forme d'associations de quadripôles thermiques (ou d'impédances). Pour cela, il est nécessaire que la constriction soit indépendante des conditions aux limites du système, c'est-à-dire en pratique que l'épaisseur (e) soit grande devant le rayon du couple r_0 ; si de plus, le rayon de l'échantillon (R) est grand devant r_0 , alors l'impédance de

constriction s'écrit [10] :

$$Z_c = \frac{2 r_0}{\lambda} \int_0^\infty \frac{J_1^2(\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + pr_0^2/a_1}} d\varepsilon. \quad (48)$$

Une très bonne approximation de cette impédance est donnée par la mise en parallèle de la résistance de constriction (régime permanent) avec l'impédance d'un barreau infini (temps court) comme l'indique la figure 5, soit :

$$Z_c \approx \frac{1}{\frac{3 \pi}{8 r_0} \lambda_1 + \sqrt{\lambda_1 \rho c_1 p}} \quad (49)$$

Il est alors possible de représenter la solution du problème sous la forme du schéma de la figure 6, soit la température mesurée :

$$\theta_m = \frac{Z_d + R_{cd}}{A(s + 2 h_1 S \cdot Z_u) + CSZ_u + Bh_1(s + h_1 SZ_u)} \quad (50)$$

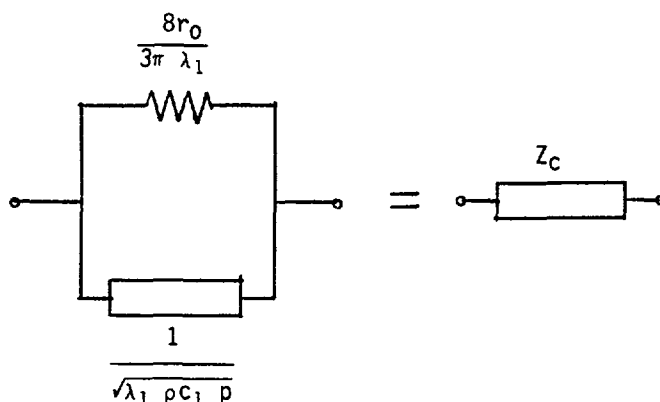


Fig. 5. — Schéma électrique équivalent à une constriction thermique.

[Electrical diagram equivalent to a thermal constriction.]

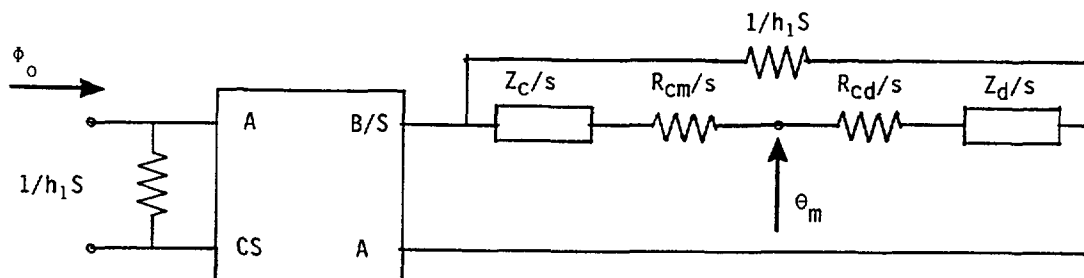


Fig. 6. — Schéma électrique équivalent à l'ensemble échantillon + détecteur.

[Electrical diagram equivalent to the « sample + detector system.]

avec :

$$\begin{aligned} Z_u &= Z_d + Z_c + R_{cm} + R_{cd} \\ A &= \text{ch} \sqrt{p/a_1} e \\ B &= \frac{1}{\lambda_1 \sqrt{p/a_1}} \text{sh} \sqrt{p/a_1} e \\ C &= \lambda_1 \sqrt{p/a_1} \text{sh} \sqrt{p/a_1} e \\ \text{où :} \quad s &= \pi r_0^2 \quad \text{et} \quad S = \pi R^2 \end{aligned}$$

après mise sous forme adimensionnelle :

$$\theta_m^* = \frac{Z_d^* + R_{cd}^*}{(r^{*2} + 2 H Z_u^*) \text{ch} \sqrt{p^*} + Z_u^* \sqrt{p^*} \text{sh} \sqrt{p^*} + H (r^{*2} + H Z_u^*) \text{sh} \sqrt{p^*} / \sqrt{p^*}} \quad (51)$$

avec :

$$\begin{aligned} Z_u^* &= Z_d^* + Z_c^* + R_{cm}^* + R_{cd}^* \\ Z_d^* &= R_d^* \frac{\text{th} \sqrt{p^* K_1 + K_2}}{\sqrt{p^* K_1 + K_2}} \\ Z_c^* &= \frac{1}{\frac{3 \pi e^*}{8 r^*} + \sqrt{p^*}} \end{aligned}$$

il apparaît alors huit paramètres adimensionnés :

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{p e^2}{a_1}; & r^* &= \frac{r_0}{R}; & e^* &= \frac{e}{R} \\ H &= \frac{h_1 e}{\lambda_1}; & K_1 &= \frac{a_1 \ell^2}{e^2 a_2}; & K_2 &= \frac{2 h_2 \ell^2}{r_0 \lambda_2} \\ R_d^* &= \frac{\ell \lambda_1}{\lambda_2 e}; & R_{cd}^* &= \frac{\lambda_1}{e} R_{cd}; & R_{cm}^* &= \frac{\lambda_1}{e} R_{cm}. \end{aligned}$$

La formule (51) est beaucoup plus simple à utiliser que la formule (47) ; de plus le temps de calcul est d'environ 100 fois plus petit.

La température est obtenue par un retour numérique de Laplace [11].

Remarque : Le calcul s'applique également à une mesure par thermocouple classique (métallique) à contact séparé ou non ; seules les valeurs de R_{cm} , R_{cd} et Z_d changent. En particulier Z_d est alors l'impédance d'une ailette infinie, soit :

$$Z_d = \frac{1}{\sqrt{\rho c_2 \lambda_2 p + 2 h_2 \lambda_2 / r_0}}. \quad (52)$$

5. Exemples de résultats.

Ce qui nous intéresse ici c'est la détermination de la diffusivité thermique à partir de la température mesurée par le couple. Pour divers détecteurs et échantillons nous simulons une

expérience et nous analysons les thermogrammes obtenus par 3 méthodes :

- la méthode des temps partiels [1] ;
- la méthode des moments temporels [2] ;
- la méthode de Parker [12].

La première méthode s'appuie sur un modèle unidirectionnel à deux paramètres (un nombre de Biot et un nombre de Fourier) ; l'identification s'opérant à partir d'un nombre limité de points du thermogramme.

La deuxième s'appuie sur un modèle bidimensionnel (en géométrie cylindrique) à deux paramètres identiques aux précédents ; l'identification utilise tout le thermogramme jusqu'à son maximum sous forme d'intégrales.

Enfin le troisième s'appuie sur un modèle unidirectionnel sans échange à un paramètre et n'utilise qu'un point du thermogramme (le temps de demi-montée).

Les pertes sont évaluées par l'intermédiaire du temps réduit correspondant à 5/6 du maximum du thermogramme soit $t_{5/6}^*$ (pour des pertes nulles $t_{5/6}^* = 0,253$).

5.1 INFLUENCE DE LA « RÉSISTANCE » DU DÉTECTEUR EN CONTACT PARFAIT. — Pour essayer de découpler les effets, nous nous plaçons dans le cas du contact parfait. Dans un premier temps on néglige la « capacité » thermique des détecteurs ainsi que l'effet d'ailette ($h_2 = 0$), soit :

$$R_{cm} = R_{cd} = 0 \quad \text{et} \quad Z_d = \frac{\ell}{\lambda_2}$$

Dans ce cas, le système est caractérisé par trois paramètres adimensionnels :

$$R_d^*, \quad e^* \quad \text{et} \quad r^*$$

Les paramètres r^* et e^* sont fixés respectivement à 0,16 et 0,368 (dans notre installation de mesure $r_0 = 2$ mm, $R = 12,5$ mm et $e = 4,6$ mm).

Le tableau I montre l'influence de la résistance du détecteur par rapport à la résistance de l'échantillon (la diffusivité mesurée est celle obtenue par l'analyse des thermogrammes ; la diffusivité simulée est celle introduite dans le modèle ($a_s = a_1$)).

Les valeurs de $t_{5/6}^*$ nous renseignent indirectement sur les fuites thermiques par les détecteurs. On remarque que, même pour des valeurs de R_d^* supérieures à 1, les fuites ne sont

Tableau I. — *Diffusivité mesurée/diffusivité simulée en fonction de R_d^* à dimensions échantillon-détecteurs fixes ([1] temps partiels, [2] Parker).*

[Identified/true diffusivity as a function of R_d^* (fixed dimensions of both sample and detector). ([1] Partial times, [2] Parker).]

Cas n°	R_d^*	$t_{5/6}^*$	a_m/a_s [1]	a_m/a_s [2]
1	0,1	0,206	1,180	1,34
2	1,0	0,233	1,040	1,086
3	100,0	0,253	1,004	1,001

pas négligeables ($t_{5/6}^* < 0,253$), mais que le modèle à fuites réparties (coefficient d'échange uniforme sur les faces de l'échantillon) fonctionne bien (erreur sur la diffusivité inférieure à 4 %).

Dans une seconde configuration, nous avons fait varier l'épaisseur de l'échantillon en tenant fixe les caractéristiques des détecteurs ($Z_d = 3 \times 10^{-3}$) et la conductivité thermique de l'échantillon ($\lambda_1 = 1,5 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$).

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau II.

Ces résultats sont intéressants car ils montrent que l'erreur est bornée, ce qui signifie, par exemple, que pour un échantillon de conductivité $\lambda_1 \approx 1,5 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, l'erreur est toujours inférieure à 4 % quelle que soit son épaisseur.

Tableau II. — Diffusivité mesurée/diffusivité simulée en fonction de l'épaisseur de l'échantillon (e^*) à caractéristiques du détecteur fixes ([1] temps partiels, [2] Parker).

[Identified/true diffusivity as a function of reduced thickness (e^*) (fixed characteristics of the detector). ([1] Partial times, [2] Parker).]

Cas n°	e^*	R_d^*	$t_{5/6}^*$	a_m/a_s [1]	a_m/a_s [2]
4	0,074	5,0	0,228	1,005	1,061
2	0,368	1,0	0,233	1,039	1,086
5	0,736	0,5	0,242	1,038	1,061
6	3,680	0,1	0,223	1,005	1,077

5.2 INFLUENCE SIMULTANÉE DE LA « RÉSISTANCE » ET DE LA « CAPACITÉ » DES DÉTECTEURS. —

On néglige l'effet d'ailette ($h_2 = 0$), l'impédance des détecteurs est alors donné par :

$$Z_d = \frac{\ell}{\lambda_2} \frac{\text{th} \sqrt{p/a_2} \ell}{\sqrt{p/a_2} \ell}$$

Nous avons simulé trois milieux différents (4,6 mm d'épaisseur) avec pour détecteurs des pastilles de tellure de bismuth d'environ 3 mm de longueur ($\lambda_2 = 1$ et $a_2 = 0,5 \times 10^{-6}$) :

* Cas n° 7 — un isolant léger ($\lambda_1 = 0,067 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ et $a_1 = 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$) soit :

$$K_1 = 0,09 \quad \text{et} \quad R_d^* = 0,1 .$$

* Cas n° 8 — un isolant lourd ($\lambda_1 = 0,67 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ et $a_1 = 5,5 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$) soit :

$$K_1 = 0,49 \quad \text{et} \quad R_d^* = 1 .$$

* Cas n° 9 — un conducteur ($\lambda_1 = 33 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ et $a_1 = 1,4 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$) soit :

$$K_1 = 12,25 \quad \text{et} \quad R_d^* = 50 .$$

* Cas n° 10 — identique au cas n° 7, avec le détecteur 2 fois plus long, soit :

$$K_1 = 0,36 \quad \text{et} \quad R_d^* = 0,2 .$$

* Cas n° 11 — identique au cas n° 8, avec le détecteur 2 fois plus long, soit :

$$K_1 = 1,96 \quad \text{et} \quad R_d^* = 2 .$$

* Cas n° 12 — identique au cas n° 8, avec le détecteur 2 fois plus court, soit :

$$K_1 = 0,1225 \quad \text{et} \quad R_d^* = 0,5 .$$

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau III.

Tableau III. — *Influence de la capacité thermique des détecteurs* ([1] moments, [2] temps partiels, [3] Parker).

[Effect of the detectors heat capacity. ([1] Moments, [2] partial times, [3] Parker).]

Cas n°	R_d^*	K_1	$t_{5/6}^*$	a_m/a_s [1]	a_m/a_s [2]	a_m/a_s [3]
7	0,1	0,09	0,185	0,98	0,94	1,12
8	1,0	0,49	0,245	0,94	0,92	0,93
9	50,0	12,25	0,261	0,99	1,00	0,97
10	0,2	0,36	0,224	0,90	0,83	0,89
11	2,0	1,96	0,299	0,92	0,96	0,86
12	0,5	0,1225	0,215	1,00	0,95	1,04

Ces résultats montrent que l'effet capacitif joue en sens inverse de l'effet résistif. Il faut également signaler que l'effet capacitif augmente artificiellement le $t_{5/6}^*$, celui-ci pouvant dans certains cas être supérieur à 0,253, qui est la valeur limite sans perte. Néanmoins, si l'on ne s'éloigne pas trop de la valeur limite, les résultats obtenus pour la diffusivité sont encore valables. On constate que dans tous les cas les valeurs obtenues sont inférieures aux valeurs théoriques, ce qui pourrait expliquer les valeurs toujours légèrement plus faibles, trouvées par notre technique lors des comparaisons inter-laboratoires. D'autre part, la compétition entre l'effet capacitif et l'effet résistif ne permet pas de prévoir le résultat. Il suffit pour s'en convaincre de comparer les résultats des cas 8, 11 et 12 où seule la longueur des détecteurs change. Certains résultats ne sont pas très bons. Il faut néanmoins se souvenir que nous n'avons pas pris en compte la constriction dans le détecteur (le contact détecteur-milieu se faisant dans la réalité par quelques points).

5.3 INFLUENCE DE LA RÉSISTANCE DE CONTACT ET DES ÉCHANGES EXTÉRIEURS. — En première approximation, nous supposons que les résistances de contact sont inversement

proportionnelles aux conductivités thermiques des milieux, soit :

$$\frac{R_{cm}}{\lambda_2} = \frac{R_{cd}}{\lambda_1}$$

Reprenons les cas précédents (paragraphe 5.2, cas nos 7, 8 et 9) et fixons la résistance de contact côté détecteur (R_{cd}) égale à 10^{-3} K m²/W, on obtient pour chaque nouveau cas :

$$\begin{aligned} \text{cas n° 13 : } & R_{cm} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ K m}^2/\text{W} \\ \text{cas n° 14 : } & R_{cm} = 1,5 \times 10^{-3} \text{ K m}^2/\text{W} \\ \text{cas n° 15 : } & R_{cm} = 3 \times 10^{-5} \text{ K m}^2/\text{W} . \end{aligned}$$

Le tableau IV donne les résultats.

Tableau IV. — Influence de la résistance de contact ([1] moments, [2] temps partiels, [3] Parker).

[Effect of the contact resistance. ([1] Moments, [2] partial times, [3] Parker).]

Cas n°	R_d^*	K_1	R_c^*	R_{cd}^*	$t_{5/6}^*$	a_m/a_s [1]	a_m/a_s [2]	a_m/a_s [3]
13	0,1	0,09	0,235	0,015	0,194	0,90	0,86	1,01
14	1	0,49	0,370	0,150	0,253	0,88	0,88	0,87
15	50	12,25	7,520	7,300	0,261	1,00	1,01	0,98

On retrouve la même tendance, c'est-à-dire des valeurs de diffusivité identifiée plus faibles, la résistance de contact accentuant encore cet effet (il faut comparer 13-14-15 respectivement avec 7-8-9).

Si l'on prend en compte les échanges extérieurs sur l'échantillon, les relations (14) et (15) deviennent :

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \varphi_0(t) - h_1(T_1 - T_e) \quad \text{en } z = 0 \quad (14')$$

$$\begin{aligned} -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} &= \varphi_1(t) + h_1(T_1 - T_e) \quad \text{en } z = 0 ; \quad r < r_0 & (15') \\ &= h_1(T_1 - T_e) \quad \text{en } z = 0 ; \quad r_0 < r < R . \end{aligned}$$

La nouvelle solution est donnée en annexe.

Le tableau V donne les résultats pour $h_1 = h_2 = 20 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ (soit $K_2 = 0,18$). On constate une influence en sens inverse de la résistance de contact, donc bénéfique dans notre cas.

Ces derniers résultats (qui représentent le mieux la réalité de la mesure) montrent que ces détecteurs (associés à la méthode des moments temporels) donnent des valeurs plus petites que la réalité ; néanmoins l'écart maximum obtenu sur l'isolant léger ne dépasse pas 8 %. D'autre part, lorsque les échanges avec l'extérieur vont augmenter (mesure à haute température par exemple), cette erreur va diminuer (uniformisation des pertes sur la face arrière).

Tableau V. — *Prise en compte de tous les paramètres* ([1] moments, [2] temps partiels, [3] Parker).

[Effect of all parameters. ([1] Moments, [2] partial times, [3] Parker).]

Cas n°	R_d^*	K_1	R_{cd}^*	H	$t_{5/6}^*$	a_m/a_s [1]	a_m/a_s [2]	a_m/a_s [3]
16	0,1	0,09	0,015	1,3	0,130	0,92	0,96	1,36
17	1	0,49	0,15	0,13	0,221	0,94	0,89	0,95
18	50	12,25	7,3	0,0027	0,261	1,01	1,01	0,98
19	1	0	0,15	0,13	0,207	1,06	1,02	1,14

Pour mettre en évidence le rôle de la capacité thermique du détecteur, nous avons simulé (cas n° 19) le cas n° 17 en supposant K_1 nul (c'est-à-dire $\rho c_2 = 0$) ; on trouve alors une valeur supérieure, ce qui confirme les premiers résultats (Tab. III). Une amélioration de la mesure serait obtenue si l'on pouvait diminuer cette capacité.

Enfin, le dernier tableau (Tab. VI) donne les résultats pour un couple classique de type chromel-alumel fin (diamètre total de 200 μm) en supposant le contact parfait (cas idéal pour un tel couple). ($r^* = 0,008$; $e^* = 0,368$; $R_{cd}^* = R_{cm}^*$; $\lambda_2 = 15 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$; $h = 20 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$; $\rho c_2 = 3\,600\,000 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$).

Tableau VI. — *Thermocouple chromel-alumel* ([1] moments, [2] temps partiels, [3] Parker).

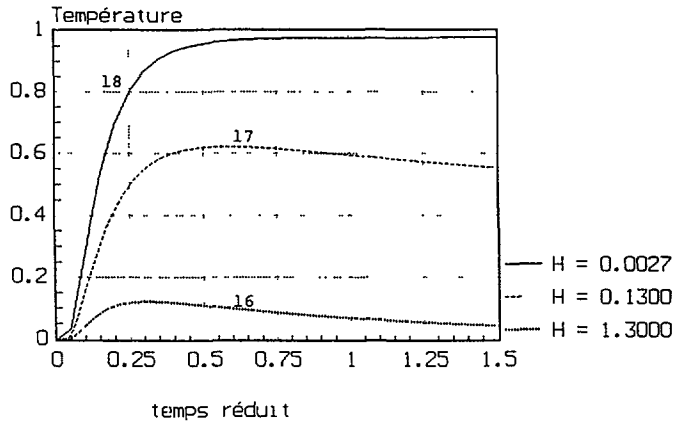
[Chromel-alumel thermocouple. ([1] Moments, [2] partial times, [3] Parker).]

Cas n°	λ_1 $\text{W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$	a_1 $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$	H	$t_{5/6}^*$	a_m/a_s [1]	a_m/a_s [2]	a_m/a_s [3]
20	0,067	$1,0 \times 10^{-7}$	1,3	0,167	0,93	0,88	1,13
21	0,67	$5,5 \times 10^{-7}$	0,13	0,223	0,89	0,85	0,91
22	33	$1,4 \times 10^{-5}$	0,0027	0,256	0,99	0,98	0,97

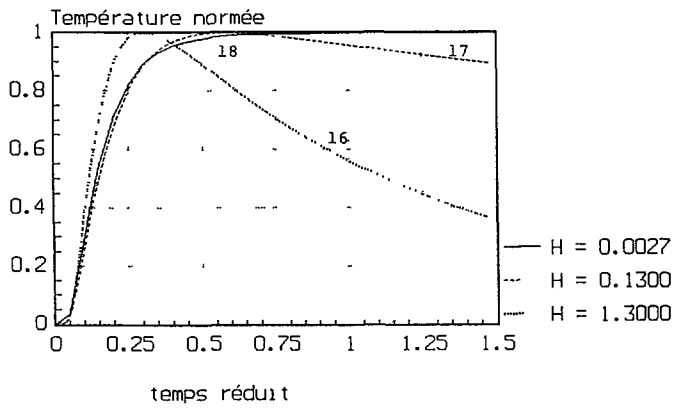
Sur la figure 7 nous présentons les thermogrammes simulés pour les cas 16, 17 et 18. Il est intéressant de constater que les courbes normalisées se coupent plusieurs fois, ce qui signifie que la diffusivité « apparente » varie le long du thermogramme ; c'est ce que montre le tableau VII où l'on a reporté les valeurs obtenues aux temps $t_{1/2}$ et $t_{5/6}$ (méthode de Parker).

6. Conclusion.

Nous avons bâti un modèle de mesure de température de surface par contact en régime transitoire, l'utilisation de la notion de « quadripôle thermique » aboutit d'une part à une



a)



b)

Fig. 7. — a) Exemple de thermogrammes simulés correspondant aux cas 16, 17 et 18 (influence des pertes). b) Exemple de thermogrammes normalisés par le maximum (cas 16, 17 et 18).

[a) Example of simulated thermograms corresponding to cases 16, 17 and 18 (heat loss effect).
 b) Example of thermograms that have been normalized by their maxima (cases 16, 17 and 18).]

Tableau VII. — Variation de la diffusivité apparente avec le temps.

[Variation of apparent diffusivity with partial time.]

Cas n°	Parker 1/2	Parker 5/6
16	1,36	1,73
17	0,95	1,02
18	0,98	0,98

représentation générale du système particulièrement simple, permettant la prise en compte d'un grand nombre de paramètres bien identifiés, et d'autre part à une réduction importante du temps de calcul.

Ce modèle très général nous a permis d'étudier l'erreur de mesure introduite par le capteur lors d'une identification de la diffusivité thermique par méthode flash et thermocouple.

Il apparaît qu'il y a compétitivité entre la résistance thermique du détecteur qui introduit une erreur par excès et sa capacité thermique qui introduit une erreur par défaut.

Dans les cas étudiés (thermocouple à semi-conducteur et métallique), les valeurs identifiées sont inférieures aux valeurs théoriques. Si l'on excepte le cas particulier d'isolant léger (de type mousse de polyuréthane par exemple), les écarts restent inférieurs à 6 % et diminuent lorsque les échanges surfaciques augmentent.

Annexe.

Solution dans le cas général avec pertes.

Dans la formule (42) :

$$\begin{aligned} \text{ch} [\gamma_0(e - z)] &\text{ est remplacé par } Q_0 \text{ch} (\gamma_0 z) - P_0 \text{sh} (\gamma_0 z) \\ \text{sh} (\gamma_0 e) &\text{ est remplacé par } P_0. \end{aligned}$$

Dans la formule (43) :

$$\begin{aligned} \text{ch} (\gamma_0 z) &\text{ est remplacé par } H \text{sh} (\gamma_0 z) + \gamma_0 e \text{ch} (\gamma_0 z) \\ \text{sh} (\gamma_0 e) &\text{ est remplacé par } P_0 + \frac{H}{\gamma_0 e} Q_0 \\ \text{sh} (\gamma_n e) &\text{ est remplacé par } P_n + \frac{H}{\gamma_n e} Q_n \\ \text{ch} (\gamma_n z) &\text{ est remplacé par } H \text{sh} (\gamma_n z) + \gamma_n e \text{ch} (\gamma_n z) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} P_0 &= \gamma_0 e \text{sh} (\gamma_0 e) + H \text{ch} (\gamma_0 e) \\ Q_0 &= \gamma_0 e \text{ch} (\gamma_0 e) + H \text{sh} (\gamma_0 e) \\ P_n &= \gamma_n e \text{sh} (\gamma_n e) + H \text{ch} (\gamma_n e) \\ Q_n &= \gamma_n e \text{ch} (\gamma_n e) + H \text{sh} (\gamma_n e). \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] DEGIOVANNI A., Diffusivité et méthode flash, *Rev. Gén. Therm.* **185** (1977) 417-442.
- [2] DEGIOVANNI A. et LAURENT M., Une nouvelle technique d'identification de la diffusivité thermique pour la méthode flash, *Revue Phys. Appl.* **21** (1986) 229-237.
- [3] AMAZOUZ M., MOYNE C. et DEGIOVANNI A., Measurement of the thermal diffusivity of anisotropic materials, *High Temperature, High Pressure* **19** (1987) 37-41.
- [4] LEMESLE A. (épouse GERY), Contribution à l'étude des mesures de température de surface par contacts séparés, en régimes permanent et transitoire, Thèse d'état, INSA Lyon I (1980).
- [5] GERY A., LAURENT M., SINICKI G. et DEGIOVANNI A., Mesure de la température de surface en régime permanent à l'aide de détecteurs à contacts séparés, *Entropie* **70** (1976) 31.
- [6] DEGIOVANNI A., GERY A., LAURENT M., MACQUERON J. L. et SINICKI G., Réponse en régime transitoire de détecteurs de température de surface, *C.R. Acad. Sci. Paris* **280** (1975) 393.

- [7] GERY A., DEGIOVANNI A., PETIT D. et DARD J., Mesure des températures de surfaces par contacts séparés, *Revue Phys. Appl.* **17** (1982) 163-175.
- [8] GERY A., DEGIOVANNI A. et LAURENT M., Surface temperature measurements with intrinsic contacting thermocouples. Steady errors and transient effects. Analytical and experimental study, 8^e Int. Thermal Conductivity Conference, Rapid city, USA (3-5 octobre 1983).
- [9] DEGIOVANNI A., Conduction dans un « mur » multicouches avec sources : extension de la notion de quadripôle, *Int. J. Heat Mass Transfer* **31** (1988) 553-557.
- [10] DEGIOVANNI A., LAMINE A. S., MOYNE C., Thermal contacts in transient states : a new model and two experiments, *A.I.A.A. J. Thermophys.* **6**, n 1 (1992).
- [11] STEHFEST H., Algorithm 368, Numerical inversion of Laplace Transforms, *Commun. A.C.M.* **13** (1970) 47-49.
- [12] PARKER W. J., JENKINS R. H., BUTTLER C. P., ABBOTT G. L., Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity, *J. Appl. Phys. USA* **32** (1961) 1679-1684.