HAL
open science

Analyse de formes par moiré

J. Harthong, H. Sahli, R. Poinsignon, P. Meyrueis

To cite this version:

J. Harthong, H. Sahli, R. Poinsignon, P. Meyrueis. Analyse de formes par moiré. Journal de Physique III, 1991, 1 (1), pp.69-84. 10.1051/jp3:1991108 . jpa-00248566

HAL Id: jpa-00248566

https://hal.science/jpa-00248566

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification
Physics Abstracts
07.60L — 42.10

Analyse de formes par moiré

J. Harthong ([1]), H. Sahli ([1]), R. Poinsignon ([2]) et P. Meyrueis ([1])

([1]) Université Louis Pasteur, Ecole Nationale Supérieure de Physique, Laboratoire des Systèmes Photoniques, 7, rue de l'Université, 67084 Strasbourg Cedex, France
([2]) Société MICRAUDEL, 93, rue d'Adelshoffen, 67000 Schiltigheim, France

(*Reçu le 16 mars 1990, révisé et accepté le 19 octobre 1990*)

Résumé. — Nous présentons une analyse mathématique du moiré permettant une reconnaissance des formes. Le concept théorique de base est celui de « fonction de contour ». Nous montrons que l'analyse mathématique est simplifiée en faisant appel à ces fonctions. De plus, la méthode proposée permet de traiter d'une manière unifiée les deux différents modes d'utilisation des techniques de moiré : *le mode direct* (le plus utilisé et le mieux connu), et le *moiré inverse*, qui consiste, pour un modèle d'objet donné, à calculer et réaliser un réseau spécifique, tel que si (et seulement si) un objet est conforme au modèle, les franges de moiré obtenues seront des lignes droites parallèles. Nous proposons des formules explicites et des algorithmes pour ces traitements.

Abstract. — We present a mathematical analysis of moiré phenomena for shape recognition. The basic theoretical concept — and tool — will be the *contour function*. We show that the mathematical analysis is greatly simplified by the systematic recourse to this tool. The analysis presented permits a simultaneous treatment of two different modes of implementing the moiré technique : the direct mode (widely used and well-known), and the converse mode (scarcely used). The converse mode consists in computing and designing a grating especially for one model of object, in such a manner that if (and only if) the object is in conformity with the prescribed model, the resulting moiré fringes are parallel straight lines. We give explicit formulas and algorithms for such computations.

Introduction.

L'acquisition de formes tridimensionnelles de taille moyenne (1 *m*), pour la reconnaissance de forme et l'image de synthèse, par les méthodes classiques de stéréovision, manque de précision. Ces méthodes sont, de plus, lourdes à mettre en œuvre. Les problèmes d'éclairage qu'on y rencontre sont parfois difficiles. Un procédé se basant sur la lumière structurée permettant de projeter un motif qui sera déformé par la surface de l'objet à analyser possède certains avantages, mais aussi des inconvénients qui en limitent très fortement l'exploitation. Le moiré peut être considéré comme un cas « intelligent » de lumière structurée. Ses propriétés lui permettent de minimiser les problèmes d'interface avec un ordinateur [1]. Un dispositif à base de moiré va jouer le rôle de préprocesseur en produisant des courbes de niveau de l'objet à analyser avec un minimum de bruit. La technique du moiré pour la topométrie n'est pas aussi ancienne que la simplicité de son principe pourrait le laisser

supposer [2, 3]. Elle repose sur une simple observation : lorsqu'on superpose deux réseaux de traits, de telle sorte que les lignes de l'un fassent de très petits angles avec les lignes de l'autre, il apparaît des franges alternativement claires et sombres. L'interférométrie beaucoup plus ancienne, et l'interférométrie holographique plus récente sont pour ce qui est du principe conceptuel des proches parents du moiré : dans le cas du moiré on superpose deux réseaux, dans le cas de l'interférométrie on superpose deux ondes. Le moiré est mis en œuvre selon deux modes : le moiré de projection et le moiré d'ombre. Pour le moiré de projection, la technique consiste à projeter un réseau de lignes alernativement claires et sombres (le plus souvent avec une fréquence spatiale de l'ordre de 5 à 20 traits/mm) sur la surface de l'objet, et d'observer l'image projetée de ce réseau à travers un second réseau dit réseau référence ; alors les deux structures périodiques « interfèrent » pour produire du moiré.

Dans le cas du moiré d'ombre, un seul réseau est employé. Ce réseau est placé près de l'objet, qui est éclairé par une source ponctuelle ; l'objet est ensuite observé à travers le même réseau ; la faible parallaxe entre la source et l'observateur fait que l'ombre du réseau sur l'objet interfère avec le réseau lui-même et produit une figure de moiré. Dans les deux cas, il est possible de retrouver avec exactitude la forme de l'objet à partir de la figure de moiré. Ce qui permet par exemple de la comparer à un modèle mathématique le décrivant. Pour analyser la topographie d'une surface inconnue il est plus indiqué d'utiliser des réseaux de droites parallèles équidistantes, simplement parce que ce type de réseau est très courant. L'utilisation de ces réseaux pour le contrôle dimensionnel est possible lorsqu'il s'agit par exemple de quantifier l'erreur de forme pour savoir si une pièce est saine ou rebutable. En effet, il suffit alors de comparer une figure de franges avec une autre préalablement enregistrée et obtenue à partir d'une pièce considérée comme étalon.

Si on possède une description mathématique de l'étalon, on peut accélérer le processus en adoptant la démarche opposée qui consiste à calculer le ou les réseaux de telle sorte que pour un étalon donné et des paramètres spécifiques du montage utilisé nous obtenions un système de franges formé de lignes *droites* parallèles et équidistantes, si et seulement si l'objet est conforme à l'étalon ; une telle figure est alors très facile à utiliser pour tester la conformité de l'objet à l'étalon, puisqu'il suffit alors de vérifier si les franges sont rectilignes ou non. Dans ce cas les lignes du *réseau* ne seront pas des droites parallèles, mais des courbes spécifiques qu'il faudra calculer. Nous appellerons cette technique le moiré inverse. Par opposition, la méthode décrite précédemment sera appelée méthode directe (moiré direct).

Nous présentons dans cet article une théorie mathématique générale applicable à des réseaux arbitraires. Par arbitraires nous entendons des réseaux de lignes ou de courbes non nécessairement rectilignes, qui seront alors des courbes de niveau d'une certaine fonction que nous appellerons *fonction de contour* du réseau. Cette théorie se base uniquement sur ces fonctions de contour, de sorte que les réseaux eux-mêmes peuvent être oubliés dans le processus d'analyse. Une telle théorie (se basant uniquement sur les fonctions de contour) est particulièrement intéressante pour l'analyse mathématique du moiré inverse. De plus, comme nous allons le voir, elle simplifie l'analyse du moiré direct. Pour le calcul effectif, les formules mahématiques seront converties en algorithmes. La première étape de cette conversion consiste à transformer toutes les informations concernant les figures de moiré, la surface de l'objet ou la structure des réseaux en fonctions de contour qui peuvent être vectorisées (segmentées). Dans une seconde étape l'algorithme n'opère que sur ces fonctions vectorisées. Il faut préciser que les fonctions de contour contiennent plus d'information que la simple donnée de leurs courbes de niveau (qui sont soit les lignes du réseau, soit les franges du moiré) ; en effet la figure de courbes de niveau ne permet pas de distinguer les « creux » des « bosses », alors que les fonctions de contour incluent cette distinction. Le problème — classique en théorie du moiré — de cette distinction est résolu par diverses techniques (voir [4, 5]).

Dans cette contribution nous nous plaçons au-delà de ce problème puisque nous ignorons les courbes pour ne considérer que les fonctions de contour et le calcul numérique de ces fonctions. Il est alors bien clair que les techniques connues pour lever l'indétermination des creux et des bosses devront simplement être mises en œuvre pour l'enregistrement de la fonction de contour du moiré ; elles n'interviennent plus ensuite.

1. Analyse mathématique du moiré de projection.

Le moiré dit de projection est un mode classique de mise en œuvre du moiré (voir par exemple [6]). Pour le moiré de projection on dispose de deux réseaux (grilles) formés de lignes droites parallèles et équidistantes : le premier réseau, désigné par P, est projeté sur l'objet ; à travers le second, désigné par R, on observe l'image de P. Généralement P est appelé réseau projeté et R réseau de référence. La figure 1 montre la géométrie du montage. Nous notons par A et B les centres optiques des objectifs, C l'intersection des deux axes optiques. Le montage est symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle ACB, qui est aussi la médiatrice du segment AB ; il est donc naturel de prendre cet axe de symétrie pour axe Oz, et par commodité nous prendrons comme origine O le milieu du segment AB. Nous appellerons m la distance OA = OB = AB/2 et p la distance du réseau R au centre optique A ou, ce qui revient au même, du réseau P au centre optique B (voir Fig. 1). De plus nous définissons des systèmes de coordonnées dans les plans des réseaux : (t, s) dans le plan du réseau P et (u, v) dans le plan du réseau R, s et v étant orientés parallèlement aux lignes des réseaux, c'est-à-dire perpendiculairement au plan (x, z) de la figure (en fait s et v sont identiques à y, alors que t et u sont liés à x, z par des formules de rotation).

Nous notons θ l'angle OCB (ou ACO) et m la longueur du segment OA (ou OB). Les formules de transformations géométriques nous permettent de passer du système de coordonnées dans l'espace (x, y, z) aux systèmes des réseaux P et R par les systèmes d'équations :

$$\begin{aligned} x - m &= p \sin\theta + t \cos\theta \\ z &= p \cos\theta - t \sin\theta \\ y &= s \\ x + m &= -p \sin\theta + u \cos\theta \\ z &= p \cos\theta + u \sin\theta \\ y &= v \end{aligned} \tag{1.0}$$

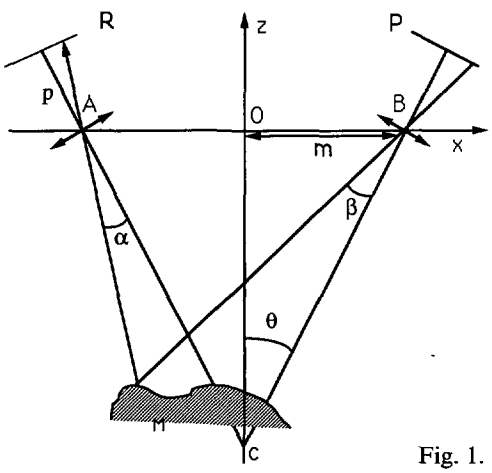

Fig. 1.

Maintenant considérons un point M de l'objet, de coordonnées x, y, z et voisin du point C. Nous voulons définir la relation mathématique entre la position du point M (donné par ses coordonnées x, y, z) et le champ de franges de moiré obtenu par superposition des deux réseaux, en ne faisant intervenir dans l'analyse que les fonctions de contour (comme il a été annoncé dans l'introduction).

Le point M situé sur l'objet n'est pas nécessairement dans le plan x, z de la figure. Appelons alors α l'angle orienté entre le vecteur projection de **AM** sur le plan x, z et le vecteur **AC** (sur la Fig. 1 l'angle α semble être l'angle MAC car tout est vu en projection). De même β est l'angle orienté entre le vecteur projection de **BM** sur le plan x, z et le vecteur **BC**.

Si u, v sont les coordonnées dans R de l'image de M à travers la lentille (objectif supposé sans aberrations) A, et t, s les coordonnées dans P de l'image de M à travers la lentille B, nous obtenons les relations :

$$\begin{aligned}
\frac{x+m}{z} &= \tan(\alpha - \theta) \\
\frac{x-m}{z} &= \tan(\beta + \theta) \\
\frac{y}{z} &= \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha-\theta)} \cdot \frac{v}{p} = \frac{\cos\beta}{\cos(\beta+\theta)} \cdot \frac{s}{p} \\
\frac{u}{p} &= \tan\alpha \\
\frac{t}{p} &= \tan\beta\,.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Ces expressions traduisent le fait que la lumière se propage le long d'une ligne droite.

Si le réseau P est projeté sur une surface d'équation $z = h(x, y)$, les équations des franges exprimées dans le système de coordonnées (u, v) sont obtenues en éliminant x, y, z, α, β dans le système à 7 équations obtenu à partir de (1.1) en ajoutant l'équation de la surface de l'objet :

$$z = h(x, y)\,. \tag{1.2}$$

Après élimination, t et s sont fonctions de u, v (m, p et θ étant les paramètres caractéristiques du montage).

Dans la méthode directe, le moiré est utilisé pour déterminer la topographie de l'objet à partir de la forme des franges. Dans ce cas, la fonction de contour du moiré [1] $f(u, v)$ est connue et nous recherchons la fonction $h(x, y)$. Dans le cas du moiré inverse, la surface de l'objet est connue et nous désirons calculer la fonction de contour du réseau P ou R (ou les deux) de manière à obtenir des franges de moiré parallèles, c'est-à-dire de manière à obtenir pour le moiré une fonction de contour linéaire ; dans ce cas h et f seront connues et les fonctions inconnues seront φ ou ψ, c'est-à-dire respectivement les fonctions de contour de P et R.

A partir de la théorie générale du moiré [7] nous avons la relation :

$$\varphi(t, s) - \psi(u, v) = \varepsilon f(u, v)\,. \tag{1.3}$$

Nous allons montrer ici que cette formule est l'équation générale du phénomène de moiré ; elle sera la base de tous les algorithmes de calcul concernant n'importe lequel des 3 cas suivants que nous allons considérer et qui incluent toutes les situations pratiques :

---

[1] Nous rappelons que la « fonction de contour » du moiré est la fonction $f(u, v)$ telle que les franges de moiré soient les courbes d'équations $f(u, v) = \varepsilon n$, où ε est le pas du réseau et n un entier.

Cas 1 : nous supposons connues φ, ψ et f, et nous désirons calculer h. Ce cas correspond à la méthode directe (moiré direct). Nous obtenons $z = h(x, y)$ comme fonction implicite en éliminant $s, t, u, v, \alpha, \beta$ des équations (1.1) et (1.3).

Cas 2 : h et φ étant connues, nous recherchons ψ telle que $f(u, v) = u$ (ou plus généralement $f(u, v) = au + bv$ pour a et b données). Ce cas correspond au moiré inverse. Nous obtenons ψ à partir de l'équation (1.3) par :

$$\psi(u, v) = \varphi(t, s) - \varepsilon f(u, v) = \varphi(t, s) - \varepsilon u \tag{1.4}$$

où t et s sont des fonctions de u, v déterminées par élimination de x, y, z, α, β entre (1.1) et (1.2).

Cas 3 : Nous connaissons les réseaux et l'objet, et nous désirons calculer la figure de moiré. Dans ce cas φ, ψ, et h sont connues et nous recherchons f. La même équation (1.3) est de nouveau utilisée, nous obtenons :

$$f(u, v) = \frac{\varphi(t(u, v), s(u, v)) - \psi(u, v)}{\varepsilon}$$

où t et s représentent les mêmes fonctions implicites que dans le cas 2.

En dernière instance les fonctions implicites doivent être calculées par ordinateur, mais par des manipulations algébriques, nous pouvons réduire ces formules. Ainsi dans le cas 1 nous exprimons u, v, t, s en fonction de x, y, z :

$$\begin{aligned} u &= p \cdot \frac{x + m + z \tan\theta}{z - (x + m)\tan\theta} \\ v &= \frac{p}{\cos\theta} \cdot \frac{y}{z - (x + m)\tan\theta} \\ t &= p \cdot \frac{x - m - z\tan\theta}{z + (x - m)\tan\theta} \\ s &= \frac{p}{\cos\theta} \cdot \frac{y}{z + (x - m)\tan\theta} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Si dans (1.3) nous remplaçons u, v, t, s par ces expressions, on obtient une relation entre les 3 variables x, y, z qui est l'équation de l'objet analysé. En pratique z devra ensuite être calculé comme une fonction explicite de x, y.

Dans les cas 2 et 3, nous exprimons t, s, x, y, z en fonction de u, v. Ceci est un peu plus compliqué que le cas précédent, nous introduisons alors un certain nombre de variables auxiliaires :

$$\begin{aligned} r &= \frac{x + m}{z} \\ q &= \frac{x - m}{z} \\ w &= \frac{y}{z}; \end{aligned} \tag{1.6}$$

en fonction de u, v nous obtenons :

$$\begin{aligned} r &= \frac{u - p\tan\theta}{p + u\tan\theta} \\ w &= \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{v}{p + u\tan\theta} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Maintenant, si nous exprimons x, y, z en fonction de r, q, w nous obtenons :

$$\begin{aligned} x &= m \cdot \frac{r+q}{r-q} \\ y &= \frac{2\,mw}{r-q} \\ z &= \frac{2\,m}{r-q} \end{aligned} \tag{1.8}$$

La relation $z = h(x, y)$ étant connue, si nous remplaçons x, y, z par leurs expressions précédentes, de même pour r, w en utilisant les relations (1.7) nous obtenons une relation entre q, u, v dans laquelle q peut être calculé en fonction de u, v. Il ne nous reste alors qu'à déterminer t en fonction de u, v ; ceci est donné par :

$$t = p \cdot \frac{q - \tan\theta}{1 + q\tan\theta} \tag{1.9}$$

Un inconvénient subsiste lors du calcul pratique : la relation implicite entre q, u, v est incommode, car elle fait intervenir $r - q$ en dénominateur ; pour y remédier on utilisera plutôt $z = 2\,m/(r - q)$ comme variable auxiliaire ; ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned} x &= zr - m \\ y &= zw \end{aligned}$$

et la relation entre q, u, v devient la relation suivante entre z, u, v :

$$z = h(zr - m, zw)\,. \tag{1.10}$$

Il reste à déterminer t et s par :

$$\begin{aligned} t &= p \cdot \frac{(r - \tan\theta)\,z - 2\,m}{(1 + r\tan\theta)\,z - 2\,m\tan\theta} \\ s &= \frac{p}{\cos\theta} \cdot \frac{wz}{(1 + r\tan\theta)\,z - 2\,m\tan\theta} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Nous pouvons maintenant déduire l'algorithme général :

pour chaque u, v

a) calculer r, w à partir de (1.7)

b) calculer la valeur de z vérifiant (1.10) par une méthode itérative

c) calculer t et s à partir de (1.11).

2. Analyse mathématique du moiré d'ombre.

Nous allons établir une équation pour la fonction de contour du moiré qui va jouer le même rôle que l'équation (1.3) pour le moiré de projection. Par contre, la forme de cette équation sera différente que dans le cas précédent du fait que dans le cas du moiré de projection deux réseaux (P et R) sont utilisés tandis que dans le cas du moiré d'ombre un seul réseau est utilisé. Sur la figure 2, nous représentons la source de lumière par S (S étant une source

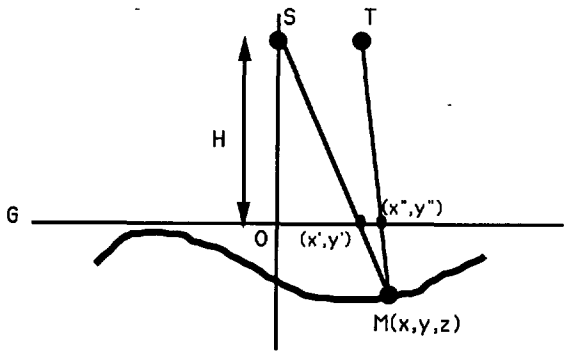

Fig. 2.

lumineuse ponctuelle), l'observateur ou la caméra par T, et le point objet courant par M. Nous notons (x', y') les coordonnées du point d'intersection du segment SM et du plan du réseau, (x'', y'') les coordonnées du point d'intersection du segment TM et du réseau, et x, y, z les coordonnées du point M. Pour des raisons de simplicité nous supposons que T et S sont placés à la même distance H du plan du réseau, de façon que le segment ST soit parallèle à l'axe des abscisses. Ceci est une restriction de pure commodité car le problème peut être traité sous d'autres hypothèses. Soit $t = \mathrm{ST}/H$ (tangente de l'angle SOT). Un calcul géométrique simple nous donne les relations de proportionnalité :

$$\begin{aligned} \frac{x'' - x'}{tH} &= \frac{z}{H+z} \\ y'' - y' &= 0 \\ \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} &= \frac{H}{H+z} \end{aligned} \tag{2.1}$$

A partir de ces 4 équations nous exprimons x', y', x'', y'' en fonction de x, y, z. Si nous introduisons le paramètre $r = H/(H+z)$ ces équations deviennent :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{Hx}{H+z} \\ y' &= \frac{Hy}{H+z} \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{H(x+tz)}{H+z} \\ y'' &= \frac{Hy}{H+z} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Pour exprimer le point courant sur le réseau il est plus intéressant d'utiliser les coordonnées (x', y') ; soit $f(x', y')$ la fonction de contour du moiré ; si $\varphi(x', y')$ est la fonction de contour du réseau nous avons :

$$\varphi(x'', y'') - \varphi(x', y') = \varepsilon f(x', y') . \tag{2.4}$$

Ceci est l'équation annoncée.

Mis à part le fait que (x'', y'') dépend de (x', y') différemment que t, s en fonction de u, v, la différence entre (2.4) et (1.3) réside dans le fait que la même fonction φ apparaît deux fois dans le membre gauche de la relation (2.4), avec des arguments non identiques. Or dans le cas

du moiré inverse c'est la fonction inconnue. Par conséquent, contrairement à (1.3) nous avons ici à résoudre une équation fonctionnelle. Du point de vue mathématique ceci est plus difficile que la résolution d'une équation différentielle. Dans l'équation (1.3) nous n'avions qu'à calculer ψ comme fonction composée par rapport aux fonctions données φ et f. Ceci n'est pas possible ici.

Cependant l'équation (2.4) peut être ramenée à une équation différentielle si nous supposons que le paramètre t est petit (ceci signifie que le moiré peut être observé à faible parallaxe). Dans ce cas, et comme nous allons le voir, l'équation (2.4) peut être réduite par approximation à une équation différentielle qui peut être résolue par une méthode numérique. Si le paramètre t n'est pas petit, alors l'équation (2.4) peut être résolue par une méthode numérique en vectorisant la fonction inconnue φ ; le vecteur est alors obtenu comme solution d'un système linéaire de N équations à N inconnues (l'équation (2.4) est linéaire), N étant inversement proportionnel au pas de discrétisation et donc très grand. Nous citons en bibliographie un article [8] qui avait pour but l'étude expérimentale de la validité de la réduction de l'équation (2.4) à une équation différentielle avec différentes valeurs non petites de t : les résultats sont qualitativement acceptables, mais pour des mesures exactes le paramètre t doit être petit.

Malgré ces difficultés (qui se rencontrent surtout dans le cas du moiré inverse), le problème se traite de la même manière que pour le moiré de projection : nous allons considérer les 3 cas décrits précédemment :

1) la méthode directe, déterminer la topologie de l'objet à partir du réseau et de l'image de moiré observée ;

2) le moiré inverse, déterminer le réseau à partir de la figure de moiré et de l'objet supposé connu ;

3) calculer la figure de moiré, connaissant le réseau et l'objet.

Le calcul se présente alors dans les cas 1) et 2) comme suit (nous laissons 3), très facile, de côté) :

1) Nous recherchons une relation entre x, y, z qui décrit la surface de l'objet. Remplaçons x'', y'', x', y' par leurs valeurs en fonction de x, y, z ou x, y, r dans (2.4) ; nous en déduisons :

$$\varphi(rx + (1 - r)\, tH, ry) - \varphi(rx, ry) = \varepsilon f(rx, ry)\,. \tag{2.5}$$

Si, comme c'est le cas généralement $\varphi(x', y') = x'$, (2.5) devient :

$$(1 - r)\, tH = \varepsilon f(rx, ry)\,. \tag{2.6}$$

L'algorithme implanté sur ordinateur devra extraire r de cette équation, en fonction de x, y (ceci peut être résolu par une méthode d'approximation itérative) ; ensuite on obtiendra $z = H(1/r(x, y) - 1)$ qui est l'équation recherchée.

2) C'est le cas où se rencontre la difficulté décrite plus haut. Dans ce cas nous exprimons x'', y'', x, y, r en fonction de x', y'. A partir de (2.1) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} x'' &= x' + \frac{Htz}{H + z} = x' + rtz \\ y'' &= y \\ x &= \frac{x'}{r} \\ y &= \frac{y'}{r} \end{aligned} \tag{2.7}$$

A partir de l'équation de la surface observée $z = h(x, y)$, des équations (2.7) et en tenant compte du fait que $r(H + z) = H$, nous obtenons :

$$H\left(\frac{1}{r} - 1\right) = h\left(\frac{x'}{r}, \frac{y'}{r}\right). \tag{2.8}$$

Ceci est une expression implicite de r en fonction de x', y'. Par une méthode itérative, nous pouvons ensuite calculer $r(x', y')$:

$$\begin{aligned} x'' &= x' + r(x', y')\, th\left(\frac{x'}{r(x', y')}, \frac{y'}{r(x', y')}\right) \\ y'' &= y'. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ainsi x'', y'' sont exprimées en fonction de x', y' : $x''(x', y')$, $y''(x', y')$. En reportant cela dans (2.4) on obtient :

$$\varphi(x''(x', y'), y''(x', y')) - \varphi(x', y') = \varepsilon f(x', y'). \tag{2.10}$$

Nous remarquons que (2.10) est une équation fonctionnelle dont l'inconnue est la fonction φ. Si t est infiniment petit, nous pouvons développer $\varphi(x''(x', y'), y''(x', y')) = \varphi(x' + trh, y')$ à l'ordre 1 en t, nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} &\varphi(x''(x', y'), y''(x', y')) - \varphi(x', y') \simeq \\ &\qquad \simeq tr(x', y')\, h\left(\frac{x'}{r(x', y')}, \frac{y'}{r(x', y')}\right) \cdot \frac{\partial \varphi(x', y')}{\partial x'}(x', y'). \end{aligned}$$

Tenant compte de cette approximation, l'équation fonctionnelle (2.10) devient une équation différentielle (et par conséquent plus facile à résoudre) :

$$r(x', y')\, h\left(\frac{x'}{r(x', y')}, \frac{y'}{r(x', y')}\right) \cdot \frac{\partial \varphi(x', y')}{\partial x'}(x', y') \simeq \frac{\varepsilon}{t} f(x', y'). \tag{2.11}$$

Le paramètre t/ε est le rapport de deux nombres infiniment petits : si la parallaxe t est du même ordre que le pas du réseau ε, le rapport t/ε est une quantité qui n'est ni grande ni petite.

3. Mesures de formes de surface.

Le moiré est appliqué ici dans le but de mesurer la topographie d'une surface S à partir de la répartition des franges de moiré et par conséquent de restituer la forme de l'objet analysé. Cette dernière peut être obtenue à partir d'une carte de profondeur, qui associe à chaque couple (x, y) la profondeur z au point correspondant. La fonction qui relie ainsi z à x, y est la fonction h et $z = h(x, y)$ sera alors l'équation de la surface. Nous passons ainsi d'une image (classique 2D) codée en niveau de gris et représentant les courbes de niveau de la fonction $f(u, v)$, à une nouvelle forme $z = h(x, y)$ qui situe les points de l'objet dans l'espace. Pour trouver la relation explicite $z = h(x, y)$, il faut résoudre l'équation implicite $G_{\{x,y\}}(z) = 0$ où

$$\begin{aligned} G_{\{x,y\}}(z) = p \cdot \frac{x - m - z \tan\theta}{z + (x - m)\tan\theta} - p \cdot \frac{x + m + z\tan\theta}{z - (x + m)\tan\theta} - \\ - \varepsilon f\left(p \cdot \frac{x + m + z\tan\theta}{z - (x + m)\tan\theta}, \frac{p}{\cos\theta} \cdot \frac{y}{z - (x + m)\tan\theta}\right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

L'image des « altitudes » de la surface observée est obtenue par discrétisation à pas constant selon les axes Ox et Oy. On obtient ainsi les listes de points (x, y, z) représentant des coupes planes et parallèles de la surface. Puis en appliquant une procédure de

triangulation consistant à relier deux coupes consécutives par des facettes triangulaires, on obtient une approximation polyédrale de la surface étudiée (Fig. 7). La valeur z de chaque point est obtenue par une méthode de résolution numérique de l'équation $G(z) = 0$ (dichotomie).

L'étude de l'allure des courbes $G(z)$ en fonction du numéro de frange $f(u, v) = N$ avec N entier (cf. [9]), nous a permis d'utiliser dans un premier temps la méthode de subdivision binaire (dichotomie) pour calculer une valeur approchée de la racine de l'équation $G(z) = 0$. Notons que l'évaluation de $G(z)$ nécessite la connaissance de la valeur de la fonction de contour du moiré $f(u, v)$ en un point $P_i(u, v)$ obtenue à partir de l'image des franges de moiré.

Le mot frange sera employé ici pour désigner les squelettes des franges de moiré, résultats des opérations d'extraction de contours. L'équation (3.0) nous a permis d'exprimer la relation entre un point $P_i(u, v)$ de l'image, la fonction de contour du moiré $f(u, v)$ en ce point et un point $M(x, y, z)$ de la surface analysée. Le point $P_i(u, v)$ n'appartenant pas forcément à une frange, la fonction de contour du moiré en ce point sera donnée par :

$$f(u, v) = N + \delta$$

où : N est le numéro de frange

δ est une fraction de frange obtenue par interpolation.

Pour déterminer cette fonction en chaque point $P_i(u, v)$, un certain nombre de prétraitements sont effectués sur les squelettes des franges, à savoir l'indexation des franges et la segmentation des contours.

Soit m le nombre de franges contenues dans l'image, ces franges seront numérotées de 0 à $m - 1$, à partir d'une frange référence considérée comme frange $m = 0$.

Remarquons que l'indexage des franges est dans ce cas relatif, et on ne sait pas *a priori* distinguer entre deux surfaces dont l'une est localement convexe et l'autre localement concave. Chaque frange est ensuite décrite par la ligne polygonale que constitue son squelette. On cherche ici à approximer un contour par une succession de segments de droites en tolérant un écart maximum η autour de la droite.

On obtient ainsi une liste de points $S_i(u_i, v_i)$ constituant une ligne polygonale qui représente une frange. Soient :

$$F_0 = \langle S_0^0, .., S_{n_0}^0 \rangle$$
$$F_1 = \langle S_0^1, .., S_{n_1}^1 \rangle$$
$$\cdot \quad \cdot\cdot$$
$$F_m = \langle S_0^m, .., S_{n_m}^m \rangle$$

les lignes polygonales correspondant aux m franges.

La valeur de $f(u, v)$ en un point $P_i(u, v)$ est déterminée de la manière suivante : on recherche dans la direction optimale la frange N « inférieure » au point $P_i(u, v)$; on cherche dans les 8 directions Est, Nord-Est, .. , Sud, Sud-Est, les franges les plus proches du point considéré ; soient N_i, $i = 1 \quad . 8$, ces numéros de franges (si dans une direction j, on ne rencontre pas de franges on prend $N_j = m$, m étant le nombre total de franges). N sera donnée par :

$$N = \min_{i=1}^{i=8} \{N_i\}$$

δ est obtenue par interpolation linéaire comme indiqué dans la figure 4.

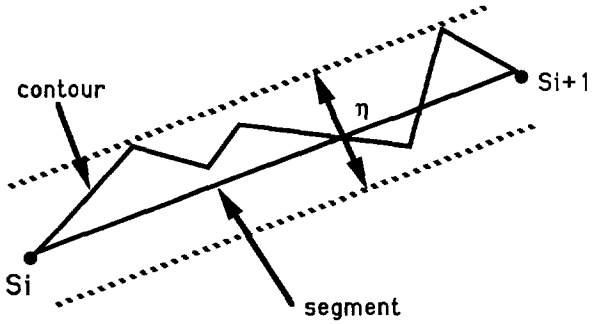

Fig. 3.

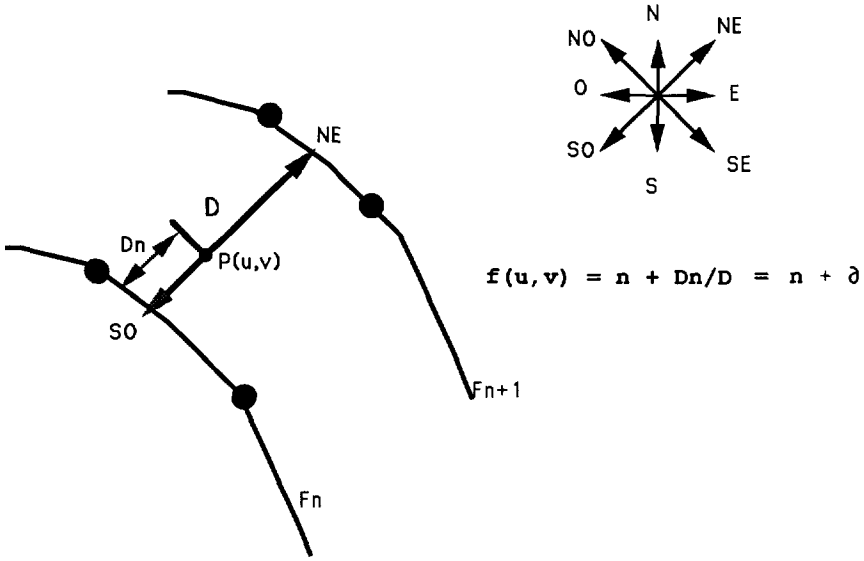

Fig. 4.

Notons que le choix de la frange de référence (frange 0), lors de l'initialisation, n'affecte pas l'analyse. En effet un changement de la numérotation revient à ajouter une constante à la fonction de contour ; on voit d'après l'équation (1.3) qui est à la base de l'analyse, que cela ne changera les fonctions φ et ψ que par l'addition d'une constante, et par conséquent cela ne changera rien aux réseaux correspondants.

Par contre, nous n'avons pas tenu compte des distorsions dues aux optiques, ni des problèmes de calibrage de caméra (correspondance entre un point dans l'image numérisée et sa position réelle sur l'écran digital), ce qui explique la déformation de la surface par rapport à sa topographie réelle (comparaison entre les Figs. 5 et 7).

La figure 6 montre la figure de moiré d'une « tôle ondulée », obtenue avec des réseaux de 20 traits/mm, la figure 7 montre une représentation polyédrale de la surface de la « tôle » obtenue à partir des franges de moiré.

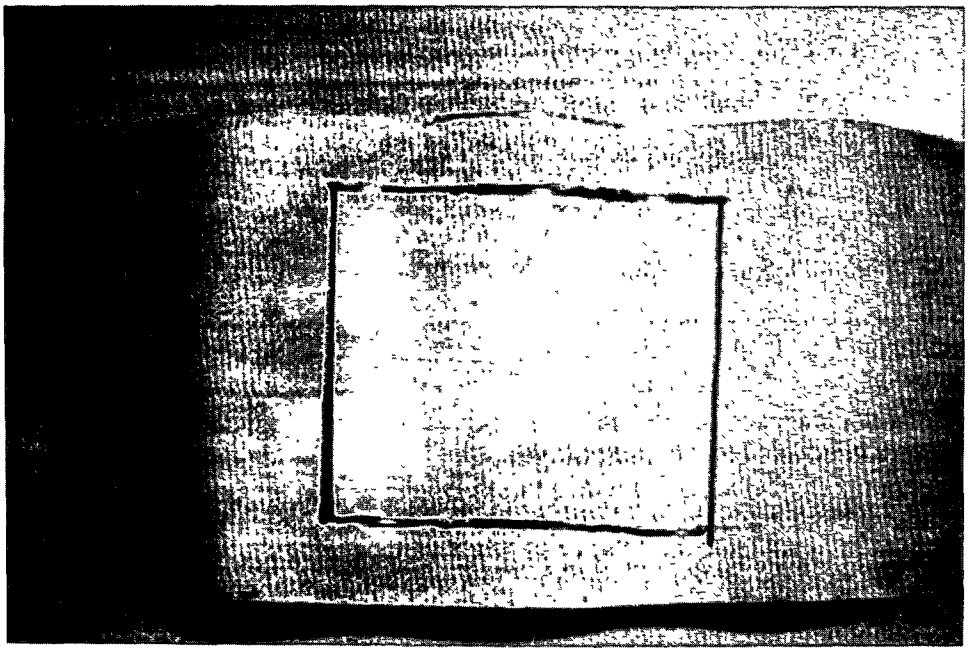

Fig. 5. — L'éprouvette : une pièce de tôle ondulée.

[The test-piece of corrugated iron.]

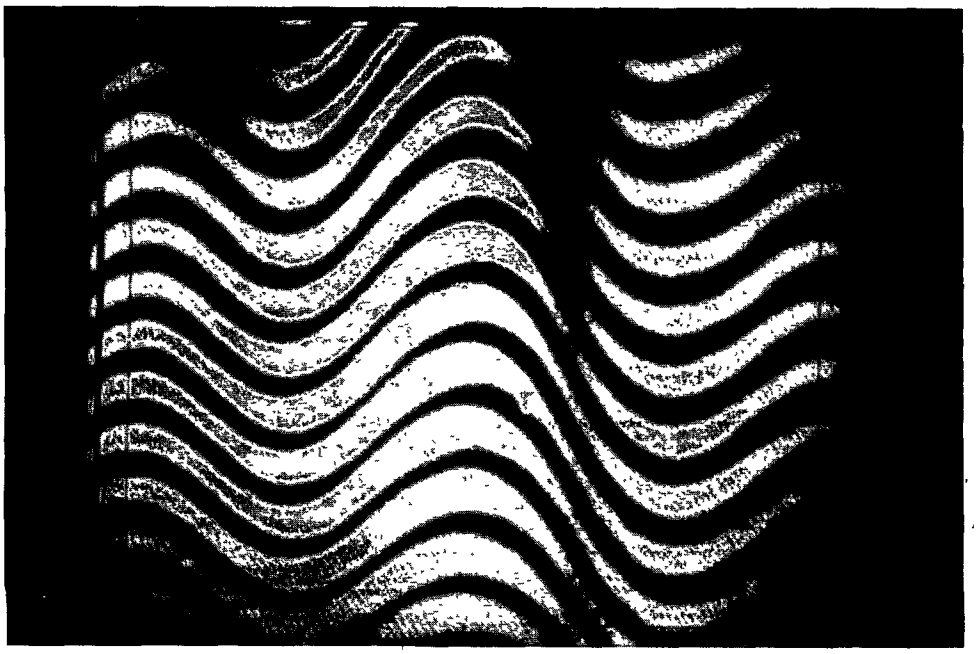

Fig. 6. — Les franges de moiré sur l'éprouvette.

[The Moiré fringes on the test-piece.]

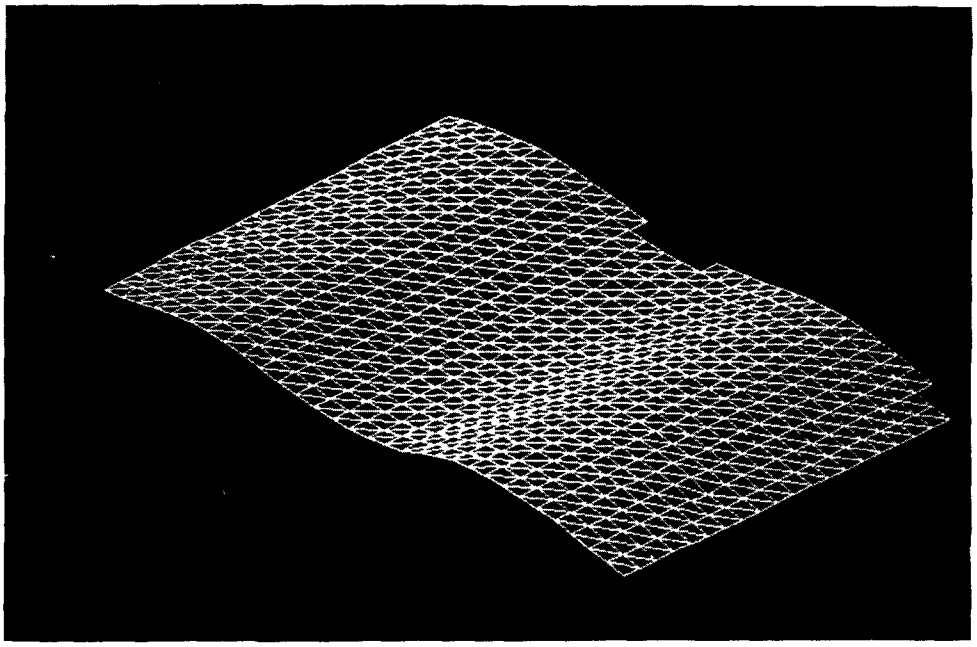

Fig. 7. — La surface de l'éprouvette reconstituée numériquement.

[The reconstructed surface of the test-piece.]

4. Calcul d'un réseau donnant un système de franges rectilignes et parallèles (moiré inverse).

Pour calculer un tel réseau, nous avons développé un algorithme basé sur l'étude donnée au § 2 et qui nous permette de calculer en chaque point la densité du réseau.

Nous avons appliqué cet algorithme à des objets de forme géométrique simple, un cylindre et une sphère.

Cas du cylindre : l'axe du cylindre est placé parallèlement à l'axe des x comme le montre la figure 8, les coordonnées (x, y, z) du point M de la surface cylindrique vérifient la relation :

$$z - z_0 = \sqrt{R^2 - y^2}\,.$$

La figure 9 montre le réseau obtenu avec les paramètres caractéristiques du montage :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0.05 \text{ mm} \quad \text{pas du réseau} \\ m &= 131 \text{ mm} \\ p &= 93 \text{ mm} \\ \theta &= 11^\circ \end{aligned}$$

et du cylindre

$$\begin{aligned} z_0 &= -863 \text{ mm} \\ R &= 200 \text{ mm}\,. \end{aligned}$$

Cas de la sphère : la figure 10 montre une coupe méridienne ; les coordonnées (x, y, z) d'un point M de la sphère vérifient la relation :

$$z - z_0 = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}\,.$$

La figure 11 montre le réseau obtenu avec les mêmes paramètres.

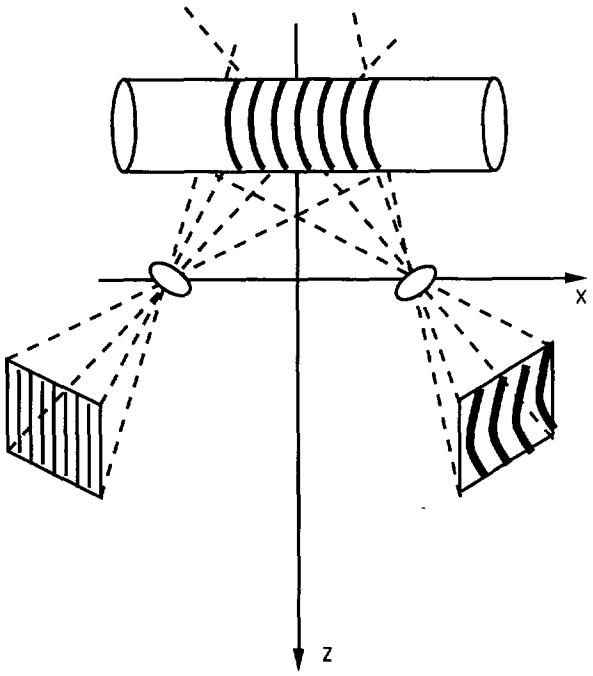

Fig. 8. — Dispositif expérimental pour moiré inverse : cylindre.

[Experimental setup for converse moiré : cylinder.]

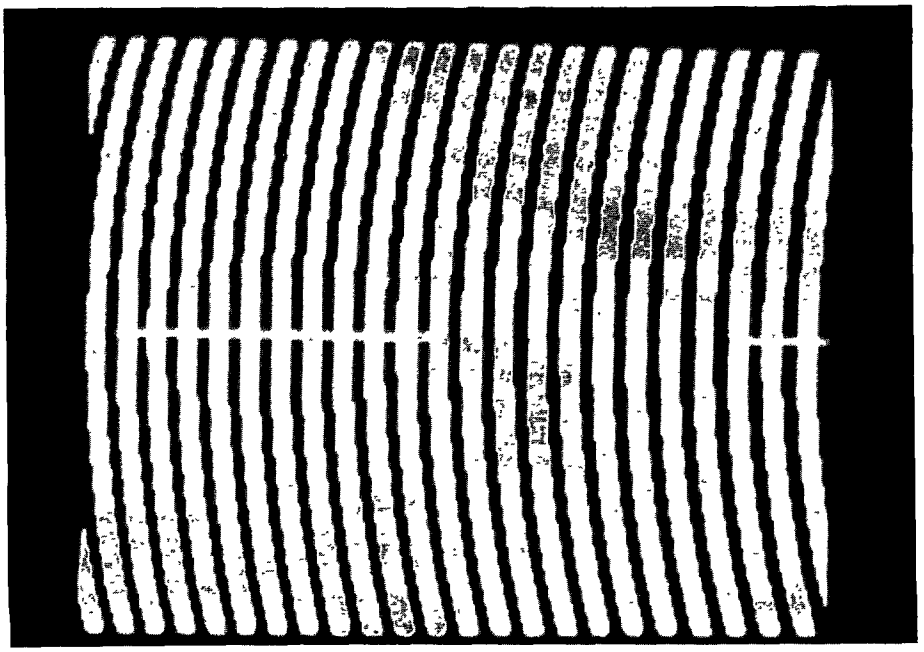

Fig. 9. — Le réseau spécifique pour un cylindre.

[The specific grating for the cylinder.]

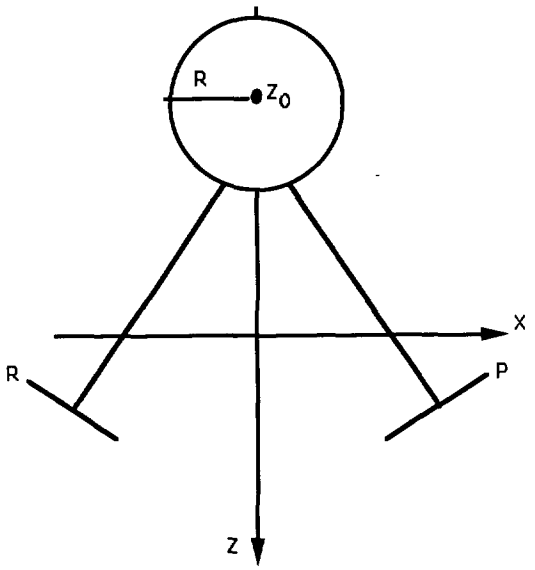

Fig. 10. — Dispositif expérimental pour moiré inverse : sphère.

[Experimental setup for converse moiré : sphere.]

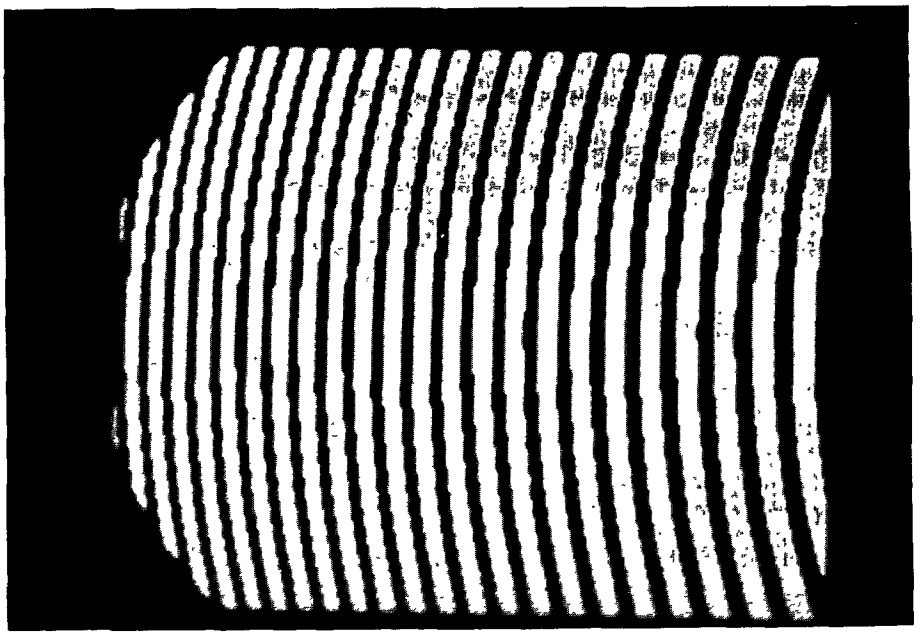

Fig. 11. — Le réseau spécifique pour une sphère.

[The specific grating for the sphere.]

Conclusion.

Nous avons établi les bases d'un préprocesseur moiré qui, associé à un ordinateur par une interface, constituera un moyen opérationnel de saisie de forme d'objet 3D. Le système n'est pas universel, son domaine d'exploitation optimal semble être celui des objets relativement compacts d'un volume inférieur au m^3.

Des problèmes restent à résoudre pour contrôler les effets de certaines aberrations. Les résultats expérimentaux confirment cependant l'efficacité du modèle. Des développements technologiques sont nécessaires avant d'arriver à un produit. Ce produit sera certainement économiquement attractif.

De par ses performances, il ne se substituera pas à des systèmes de vision robotique actuels, mais permettra d'aller plus loin, dans la saisie de forme tridimensionnelle en rapidité, précision, globalité des mesures.

Remerciements.

Les auteurs remercient : l'Institut Franco-Allemand pour les Applications de la Recherche, le Conseil Régional d'Alsace, la Société TELMAT, la Société MICRAUDEL pour leur support à l'avancement des travaux faisant l'objet de la présente publication.

Bibliographie

[1] IDESAWA M. and YATAGAI T., 3-D Shape Input and Processing by Moiré technique, proceeding of the 5th Intern. Conf. on Pattern Recognition, I.E.E.E. (1980) pp. 1085-1090.

[2] DANTU P., Utilisation des réseaux pour l'étude des déformations, *Ann. Inst. Techn. Bât. Trav. Publ.* **121** (1958) 78-98.

[3] EBBENI J., Etude générale du phénomène de moirure, Dissertation présentée pour l'obtention du grade de docteur en sciences physiques, Université libre de Bruxelles (1969).

[4] REID G. T., Moiré fringes in metrology, *Opt. Lasers in Eng.* **5** (1984) 63-93.

[5] BENOIT P., MATHIEU E. and THOMAS A., Sign Determination of Contour Lines, Opt. Lasers Eng. **5** (1984) 63-93.

[6] TAKEDA N., Fringe Formula for Projection Type Moiré Topography. *Opt. Lasers Eng.* **3** (1982) 45-52.

[7] HARTHONG J., Le moiré, *Adv. Appl. Math.* **2** (1981) 24-75.

[8] HARTHONG J. and ANNONI H., Mise en évidence des écarts de forme entre une surface matérielle et un modèle de référence par moiré à partir d'un réseau spécifique, *C. R. Acad. Sci. (II), Paris* **296** (1983) 39-41.

[9] DOTY J. L., Projection moiré for remote contour analysis, *J. Opt. Soc. Am.* **73** (1983) 366-372.

Articles réguliers