Modèle d'anisotropie de susceptibilité magnétique induite par orientation préférentielle de forme de marqueurs paramagnétiques anisotropes dans une roche déformée

R. Vergne, Arnaud Fernandez

► To cite this version:

R. Vergne, Arnaud Fernandez. Modèle d'anisotropie de susceptibilité magnétique induite par orientation préférentielle de forme de marqueurs paramagnétiques anisotropes dans une roche déformée. *Revue de Physique Appliquée*, 1990, 25 (11), pp.1049-1093. 10.1051/rphysap:0199000250110104900 . jpa-00246276

HAL Id: jpa-00246276

<https://hal.science/jpa-00246276>

Submitted on 1 Jan 1990

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification
 Physics Abstracts
 91.60

Modèle d'anisotropie de susceptibilité magnétique induite par orientation préférentielle de forme de marqueurs paramagnétiques anisotropes dans une roche déformée

R. Vergne ⁽¹⁾ et A. Fernandez ^(2, *)

⁽¹⁾ Laboratoire de magnétisme L. Néel, CNRS-UJF, 166X, 38042 Grenoble Cedex, France

⁽²⁾ Laboratoire de Géologie régionale et appliquée, U.F.R. de Sciences, Université de Limoges, 123 rue Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex, France

(Reçu le 8 décembre 1989, révisé le 18 juin 1990, accepté le 7 août 1990)

Résumé. — De très nombreuses roches contiennent des phyllosilicates dont les propriétés magnétiques à la température ambiante sont celles d'un milieu paramagnétique anisotrope. L'élaboration d'un outil magnétique d'analyse structurale passe par l'établissement d'une relation quantitative entre déformation finie et Anisotropie de Susceptibilité Magnétique (A.S.M.). Pour y parvenir on assimile une roche polyminérale à un ensemble de constituants dispersés dans une matrice déformable amagnétique ayant les propriétés d'un fluide visqueux. Chaque minéral constitue un groupe de marqueurs ; les différents groupes sont indépendants mécaniquement et magnétiquement. Le comportement d'un minéral s'obtient en considérant ce seul minéral dispersé dans la matrice amagnétique. On répète l'opération pour chaque constituant, la roche se comporte alors comme un mélange pour lequel la contribution de chaque minéral est pondérée par sa proportion dans la roche. Le comportement mécanique de la roche est décrit par le modèle d'orientation préférentielle de forme (O.P.F.) de Fernandez. La nature magnétique des constituants et leur indépendance conduisent à une fabrique magnétique décrite par le tenseur de susceptibilité relative $[S_{ij}]$. On envisage d'abord le cas de marqueurs pour lesquels on a : $K_1 = K_2 \neq K_3$ (symétrie cylindrique). L'application du modèle au cas d'un aplatissement ou d'un étirement de révolution isovolume, en présence d'un seul type de marqueurs aboutit à une expression analytique particulièrement simple. Le tenseur $[S_{ij}]$ dépend de deux paramètres : le premier (k) est fonction de la forme des marqueurs et de la déformation finie de la roche, le second (r) de l'anisotropie magnétique intrinsèque de ceux-ci. La détermination expérimentale de $[S_{ij}]$ relatif à la roche et la connaissance des propriétés magnétiques des marqueurs permettent de remonter à la déformation finie (λ_3) de celle-ci. Les axes propres de $[S_{ij}]$ sont les axes principaux de déformation. La solution est unique. La « loi de puissance » introduite par Rathore n'est pas vérifiée dans le cadre du modèle. Elle constitue une approximation que nous avons chiffrée. Nous avons également donné l'expression du tenseur $[S_{ij}]$ dans le cas d'une déformation coaxiale isovolume quelconque pour des marqueurs de symétrie cylindrique ou monoclinique. Le cas du cisaillement simple isovolume a été traité pour un seul type de marqueurs significatifs et pour un mélange de deux marqueurs. Cette étude conduit à une situation plus complexe. Le caractère périodique des grandeurs résultant du modèle (α, k, a_{ms}) fait qu'à une valeur déterminée de l'une d'elles correspondent plusieurs valeurs de γ . Ceci est dû au fait que quand on fait croître γ , une population de marqueurs déterminée peut passer par des stades d'isotropie successifs distants de $2\gamma_c$. Pour avoir une seule solution on doit se borner à $0 < \gamma < \gamma_c$ car ailleurs γ est d'autant plus faible que la forme des marqueurs se rapproche de celle d'une sphère. Il y a là une limitation de l'utilisation du modèle pour la détermination de γ à partir des mesures magnétiques. Fabrique magnétique et fabrique structurale ne sont pas semblables, mais liées par une relation dépendant du modèle. Il y a un changement notable de la linéation et de la foliation magnétique par rapport à ces mêmes grandeurs relatives à la fabrique structurale. Pour passer d'une fabrique à l'autre il est indispensable de disposer d'un modèle. En ce qui concerne le cas d'une roche contenant deux types de marqueurs significatifs la situation la plus simple est celle où ils sont suffisamment allongés ou aplatis de manière à ce que leurs γ_c soient importants et différents. S'il n'en est pas ainsi, c'est le marqueur qui tourne le plus vite qui impose les valeurs de γ où le modèle est utilisable sans difficulté.

Abstract. — Many rocks contain minerals with a significant paramagnetic anisotropy at room temperature. Quantitative relationships between preferred dimensional orientation (O.P.F.) and anisotropy of magnetic

(*) U.R.A. n° 10, C.N.R.S., Clermont-Ferrand.

susceptibility (A.S.M.) constitute the bases of magnetic methods of structural analysis. These relationships are derived from strain response models, assuming that (1) a polymineralic rock is made of distinct groups of minerals dispersed in a non-magnetic deforming viscous matrix and (2) these groups are mechanically and magnetically independent. Accordingly, the partial magnetic contribution of each mineral may be deduced knowing the theoretical behaviour of one population of markers of that mineral. The bulk magnetic behaviour of the rock is obtained by weighting the contribution of each population by its volumic proportion in the rock. The mechanical behaviour of the rock is assumed to be described by Fernandez's O.P.F. model. Because of the magnetic properties of minerals and the magnetic and mechanical independence of each population, the bulk magnetic fabric may be described by the Relative Magnetic Susceptibility Tensor $[S_{ij}]$. We consider firstly the case of markers for which $K_1 = K_2 \neq K_3$ (cylindrical symmetry). For isovolumic axial flattening or constriction on rocks containing one single family of magnetic markers a very simple analytical solution is derived showing that the tensor $[S_{ij}]$ is related to the strain intensity and to two parameters: the first parameter (k) is a function of the shape of the markers; the second (r) is a function of the intrinsic magnetic anisotropy of the markers. The eigenvectors of $[S_{ij}]$ coincide with the principal axes of the strain. It is expected that knowing the magnetic properties of the minerals constituting a rock, experimental measurements of $[S_{ij}]$ may be used to estimate the finite strain (λ_3). The « power law » derived by Rathore is not verified by our model. Rathore's model gives only approximate results, the discrepancies being estimated here. We also derive the expression of the tensor $[S_{ij}]$ in the case of any isovolumic coaxial strain for markers of cylindrical or monoclinic symmetry. Modeling simple shear acting upon systems containing one or two families of magnetic markers has been attempted. The behaviour of preferred dimensional orientation during simple shear is known to be periodic: the period γ is related to the shape of the rigid markers (the more anisometric the markers, the higher the value of γ_c). For $\gamma = \gamma_c$, the initial isotropic fabric is restored. Similarly, the behaviour of magnetic fabrics during simple shear is periodic; accordingly a unique value of γ cannot be inferred from a given magnetic fabric unless the condition $0 < \gamma < \gamma_c$ is shown to be satisfied. Moreover, it is shown that magnetic fabric and O.P.F. are geometrically dissimilar in the sense that magnetic lineation and foliation differs noticeably from the linear and planar component of the O.P.F.

1. Introduction.

La détermination de l'anisotropie de la susceptibilité magnétique des roches, mesurée en champ faible (A.S.M.), s'avère une méthode d'avenir dans le domaine de la pétrologie structurale. Des travaux récents ont montré que les cartes d'anisotropie magnétique et les cartes structurales classiques sont tout à fait comparables et par là, que l'application de méthodes magnétiques à l'étude structurale des granitoïdes est du plus grand intérêt ([1-5]).

Dans toutes les roches l'A.S.M. a toujours pour origine une orientation préférentielle (O.P.) des marqueurs magnétiques anisométriques. Dans les roches, celle-ci est fréquemment une orientation préférentielle de forme (O.P.F.) due à leur rotation. Mais ce n'est pas le seul mécanisme de rotation des grains envisageable; nous en citerons deux autres. La déformation interne du marqueur par activation de plans de glissement cristallographiques entraîne une rotation avec changement de forme et une orientation préférentielle des axes cristallographiques. Dans ce cas et pour des roches monominérales on peut établir une relation entre fabrique structurale et déformation. L'autre est le phénomène de dissolution cristallisation. Ce phénomène se produit lorsque le grain enrobé d'un milieu aqueux est soumis à un gradient de pression. Il y a dissolution de la matière dans la zone de forte pression et dépôt de celle-ci dans la partie abritée. Il en résulte une orientation préférentielle de forme, alors que les axes cristallographiques ne sont pas réorientés. Dans

ce cas, d'une grande importance pratique, il n'est pas évident *a priori* d'établir une relation quantitative entre fabrique structurale et déformation. Ces relations quantitatives traduisant l'orientation préférentielle sont le point de départ obligé d'un modèle d'anisotropie magnétique qui les caractérise. Elles ont fait l'objet d'un certain nombre de travaux récents [6-11].

Certains de ces modèles sont basés sur des lois de distribution d'orientation des grains correspondant à des cas limites [6], à des lois statistiques d'application discutable dans les roches [8, 11] ou encore à des relations empiriques non justifiées théoriquement [9, 10]. La formulation d'un modèle général reste donc un problème ouvert. Nous aborderons dans cet article la présentation d'un modèle général de l'A.S.M. liée à l'O.P. de marqueurs paramagnétiques anisométriques dans les roches magmatiques.

La plupart des modèles concernant le développement de l'orientation préférentielle de grains anisométriques sont basés sur l'étude théorique de Jeffery [12] qui décrit la rotation de marqueurs ellipsoïdaux rigides inclus dans une matrice visqueuse sous l'effet d'un champ de déformation. Les hypothèses de base conduisant à la formulation des équations de Jeffery sont :

- le régime d'écoulement du fluide est de type laminaire (condition d'application des équations de Navier-Stokes),
- les phénomènes de gravité sont négligeables (les forces dues à la viscosité sont prépondérantes)

par rapport aux forces de pesanteur agissant sur les particules),

- les particules n'interagissent pas les unes avec les autres pendant la déformation,
- la déformation est compatible dans l'interface particule-matrice,
- la relation entre la vitesse de rotation de la particule autour de ses axes principaux et le tenseur de vitesse de déformation référé aux mêmes axes est linéaire.

Dans un magma acide partiellement cristallisé, les conditions réelles s'approchent raisonnablement des prémisses précédentes. On peut donc considérer que dans les granitoïdes l'orientation préférentielle se développe essentiellement par rotation des cristaux pendant la mise en place. Les expériences de Willis [13], réalisées sur des marqueurs de formes diverses, ont permis de vérifier l'existence d'une relation linéaire entre la vitesse de rotation des marqueurs et le tenseur de vitesse de déformation. Il est donc raisonnable de supposer que l'O.P. dans la plupart des granitoïdes se développe par rotation des cristaux, en accord avec les équations de Jeffery [12] et de Willis [13]. Il est possible à partir de celles-ci de déterminer la distribution d'orientation développée par une population de marqueurs de forme connue, incluse dans une matrice visqueuse, sous l'effet d'une déformation donnée. Divers auteurs ont proposé des distributions correspondant à différents régimes de déformation, notamment Tullis [14, 15] et Debat et ses collaborateurs [16] pour la déformation coaxiale, Reed et Tryggvason [17] et Blanchard et ses collaborateurs [18] pour la déformation plane coaxiale et par cisaillement simple, et Fernandez [19, 20] pour la déformation coaxiale générale à symétrie orthorhombique. La validité des modèles de distribution développés en [19] et [20] a été vérifiée expérimentalement par le même auteur dans le cas d'un problème plan, tant pour des déformations coaxiales (Fernandez [21]) que pour les cisaillements simples (Fernandez et ses collaborateurs [22], Fernandez [23]).

Dans les roches magmatiques, les interactions entre particules, deviennent de plus en plus importantes au fur et à mesure que la cristallisation avance, et tendent à bloquer le développement de l'orientation préférentielle. Le travail expérimental d'Ildefonse et Fernandez [20], a mis en évidence l'effet de ces interactions. Il diminue la valeur de la densité d'orientation par rapport aux valeurs théoriques correspondant à une déformation donnée. Ceci constitue probablement la seule limitation physique significative au développement de l'O.P. dans les roches magmatiques. Dans les roches métamorphiques, des processus tels que la néoformation ou la recrystallisation des grains, tendent à modifier, voire à effacer, l'orientation préférentielle acquise pendant la déformation. Un autre phénomène tend à limiter

le développement de l'O.P. dans ces roches : c'est la saturation de la pétrofabrique des phyllosilicates, qui se produit pour des déformations d'intensité très élevée ([24, 25]). Dans tous les cas, lorsque la déformation ductile est inexistante ou faible, l'orientation préférentielle se développe essentiellement par rotation des marqueurs. Les modèles basés sur les lois de rotation libre des marqueurs sont applicables pour des déformations faibles ou modérées ($\lambda_1/\lambda_3 \leq 80$).

Dans un certain nombre de roches, et plus particulièrement dans les roches magmatiques acides, l'A.S.M. a pour origine des minéraux paramagnétiques anisotropes (biotite, muscovite, amphibole, tourmaline). Il s'avère alors d'un grand intérêt de disposer d'un modèle général donnant les relations entre A.S.M. et O.P. pour des marqueurs de ce type.

Trois techniques permettent d'obtenir la distribution d'orientation d'une population de marqueurs anisométriques correspondant à une déformation finie donnée. Ce sont :

- la simulation numérique à partir des équations de Jeffery ([17, 18]),
- la méthode de simulation numérique de Willis [13],
- le modèle de Fernandez [19], basé sur la généralisation du modèle de March [26].

Le modèle de March lie la densité d'orientation de marqueurs linéaires (ou plans) passifs dans chaque direction de l'espace, au rayon ⁽¹⁾ correspondant de l'ellipsoïde de déformation finie. En principe, ce modèle n'est pas directement applicable à l'orientation préférentielle de marqueurs rigides tridimensionnels, mais il peut donner une approximation raisonnable pour des valeurs faibles de la déformation, si les marqueurs sont très plats ou très allongés. Les deux méthodes de simulation numérique présentent l'inconvénient de très mal se prêter à la solution du problème inverse, c'est-à-dire, à la détermination de la déformation responsable d'une distribution d'orientation donnée. Par contre, le modèle généralisé de Fernandez donne des relations analytiques explicites entre la densité d'orientation et les paramètres qui caractérisent la déformation finie. Il apparaît de ce fait comme un outil plus adéquat à la pétrofabrique (ou déformation finie). C'est pour cela que nous l'utiliserons dans notre analyse du problème.

2. Elaboration du modèle d'anisotropie de la roche déformée.

2.1 ASPECT MÉCANIQUE DU MODÈLE. — Nous nous proposons de traiter deux cas de déformation isovo-

⁽¹⁾ Le rayon étant la distance du centre à un point courant de l'ellipse ou de l'ellipsoïde.

luminique : la déformation coaxiale orthorhombique et le cisaillement simple. Après avoir rappelé la démarche et les hypothèses physiques permettant de décrire le comportement d'une roche, nous précisons les résultats relatifs au cas du cisaillement simple à deux dimensions et nous montrerons comment on peut l'étendre au problème tridimensionnel. En ce qui concerne la déformation coaxiale orthorhombique nous renvoyons le lecteur à la référence [27].

Précisons dès à présent un problème de notations ayant trait aux élongations quadratiques principales. Les « structuralistes » utilisent la convention suivante :

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$; λ_3 est toujours inférieur ou égal à 1. Comme nous utilisons les repères à la fois pour les grandeurs mécaniques et magnétiques nous pouvions difficilement respecter cette convention. Dans ce qui suit les λ_i , i de 1 à 3, correspondant respectivement à λ_x , λ_y , λ_z . Nous n'avons pas adopté cette dernière notation car elle conduit à une écriture très lourde pour les tenseurs décrivant les propriétés magnétiques.

L'orientation préférentielle de forme induite par la déformation finie de la roche.

2.1.1 Démarche et hypothèses physiques permettant de décrire le comportement mécanique d'une roche. — On envisage d'abord le cas d'une déformation coaxiale orthorhombique isovolume et l'on se place dans un repère invariant au cours de celle-ci : les axes principaux de déformation. La déformation finie de la roche est alors décrite par l'ellipsoïde de déformation finie. Ce dernier est le résultat, dans l'état déformé, de l'application de la transformation linéaire représentée par la matrice $[1/\lambda_i]$, à une sphère de rayon unité de l'état initial non déformé. Les λ_i étant les élongations quadratiques principales (cf. [27] p. 899).

Pour modéliser une roche polyminérale, on considère l'ensemble des grains d'un même minéral (les marqueurs) et le reste de la roche (la matrice). On assimile cet ensemble à N marqueurs indéformables identiques dispersés dans une matrice homogène déformable. Ceci revient à inclure dans le modèle le stade magmatique de l'évolution de la roche. Pour calculer l'O.P.F. des grains résultant de la déformation finie on suppose que les marqueurs sont des ellipsoïdes de révolution de demi-axes a , b , c ($a = b \neq c$) caractérisés par un facteur de forme $\kappa = (n^2 - 1)/(n^2 + 1)$ avec $n = c/a$ (marqueurs « axiaux »). On attribue à la matrice les propriétés d'un fluide visqueux. La rotation des grains sous l'effet d'un champ de déformation s'obtient à partir des équations de Jeffery [12] ; ce qui suppose implicitement que les hypothèses physiques permettant leur formulation soient satisfaites (cf. 1). La répartition volumique des marqueurs ainsi que celle

de leurs axes sont isotropes dans l'état initial non déformé.

Dans ce contexte, A. Fernandez [21] fait le lien entre ce type de modèle et celui de March et généralise ce dernier. Il donne l'expression analytique de la densité D d'orientation des axes de révolution des marqueurs résultant de leur rotation et de l'invariance de leur nombre. D caractérise l'O.P.F. Le modèle conduit à une interprétation géométrique simple de la densité D : c'est le cube du rayon de l'ellipsoïde de fabrique. Dans le cas des fabriques issues de la déformation coaxiale ce dernier a pour axes les axes principaux de déformation et pour demi-axes $\sqrt{\Lambda_i}$ ($i = 1, 2, 3$) avec $\Lambda_i = \lambda_i^2$ [21]. Avant de traiter le cas du cisaillement simple tridimensionnel il est utile de rappeler les résultats du modèle de Fernandez concernant le cisaillement simple bidimensionnel isoaire et sa généralisation.

2.1.2 Problème à deux dimensions : cisaillement simple isoaire d'un ensemble de marqueurs plans elliptiques rigides, dispersés dans une matrice homogène plane déformable. — L'application des équations de Jeffery permet d'obtenir la loi décrivant la rotation des marqueurs de paramètre de forme κ soumis à un cisaillement simple isoaire d'amplitude γ . Il vient :

$$\text{Arctg}(n \text{ tg } \theta') = \text{Arctg}(n \text{ tg } \theta) - \frac{\gamma}{2} \sqrt{1 - \kappa^2}.$$

θ et θ' étant respectivement les angles de l'axe c du marqueur avec la direction de cisaillement avant et après déformation. La densité résultant de leur orientation a pour expression :

$$D = \frac{(n^2 - 1) \sin^2 \theta + 1}{(n^2 - 1) \sin^2 \theta' + 1}$$

avec

$$\theta = \text{Arctg} \left\{ \frac{1}{n} \text{tg} \left[\text{Arctg}(n \text{ tg } \theta') + \gamma \frac{n}{n^2 + 1} \right] \right\}.$$

Elle est maximale pour une valeur de α de θ' ; α est l'angle de l'axe majeur de l'ellipse de fabrique avec la direction du cisaillement.

Une population homogène de marqueurs développe, au cours d'une telle déformation, une O.P.F. dont la densité maximale augmente en même temps que l'angle α diminue, pour atteindre une valeur limite égale à n^2 lorsque $\alpha = 0$. L'axe majeur de l'ellipse de fabrique est alors suivant la direction du cisaillement. Ceci se produit pour une valeur critique γ_c de γ fonction de la forme et de la symétrie des marqueurs. On a, dans le cas de marqueurs elliptiques : $\gamma_c = \pi / \sqrt{1 - \kappa^2}$. Si γ continue à croître, l'intensité de l'O.P.F. diminue alors que l'angle α prend des valeurs négatives. Elle s'annule pour $2 \gamma_c$. On a une variation périodique conduisant à des

stades isotropes successifs pour $2\gamma_c$, $4\gamma_c$, ... dits respectivement de deuxième ordre, troisième ordre, ...

Ellipse de fabrique. — Soit un cisaillement simple isoaire d'amplitude γ et de direction OZ' défini par rapport à un système d'axes $Z'OX'$. L'ellipse de fabrique de demi-axes $\sqrt{\Lambda_i}$ a pour équation dans ses axes propres :

$$\frac{X'^2}{\Lambda_1} + \frac{Z'^2}{\Lambda_3} = 1.$$

Soit ℓ et n les cosinus directeurs du rayon ρ , on a : $\Lambda_1' \ell^2 + \Lambda_3' n^2 = 1/\rho^2$, en posant $\Lambda_i' = 1/\Lambda_i$. La densité caractérisant l'O.P.F. est $D = \rho^2$;

soit :

$$D = \{\Lambda_1' \ell^2 + \Lambda_3' n^2\}^{-1}.$$

D est maximale suivant OZ et vaut Λ_3 .

Les axes propres de l'ellipse de fabrique (ZOX) se déduisent des axes initiaux liés au milieu non déformé ($Z'OX'$) par une rotation d'un angle α , angle maximisant la densité.

Ellipse de déformation finie et ellipse de fabrique.

— Si $\kappa \neq 1$ les deux ellipses diffèrent tant par les valeurs de leurs demi-axes que par la direction de leurs axes propres. Elles sont identiques si $\kappa = 1$. Remarquons cependant (cf. Fig. 1) que si $\gamma < 2$ la différence angulaire entre l'orientation de l'axe majeur de l'ellipse de déformation finie et celui de l'ellipse de fabrique est très faible (quelques degrés). Il en sera de même pour les deux ellipsoïdes dans le problème à trois dimensions.

2.1.3 Passage au problème à trois dimensions : marqueurs axiaux dispersés dans une matrice homogène déformable, l'ensemble étant soumis à un cisaillement simple isovolume. — On envisage un ensemble de marqueurs axiaux (cf. 2.1.1) dispersés dans une matrice homogène déformable. Leur rapport d'axes $n = c/a$ est identique à celui des marqueurs bidimensionnels. On applique à l'ensemble un cisaillement simple isovolume défini dans un repère $R(OX'Y'Z')$ lié au milieu non déformé. Il est dirigé suivant OZ' et d'intensité γ . L'orientation préférentielle de forme qui en résulte est décrite par l'ellipsoïde de fabrique qui a pour équation :

$$\frac{X'^2}{\Lambda_1} + \frac{Y'^2}{\Lambda_2} + \frac{Z'^2}{\Lambda_3} = 1,$$

par rapport à ses axes propres $R(OXYZ)$. Si la direction du rayon ρ est définie par les cosinus directeurs ℓ, m, n on a :

$\Lambda_1' \ell^2 + \Lambda_2' m^2 + \Lambda_3' n^2 = 1/\rho^2$. La densité $D = \rho^3$ s'écrit :

$$D = \{\Lambda_1' \ell^2 + \Lambda_2' m^2 + \Lambda_3' n^2\}^{-3/2};$$

avec $\Lambda_i' = 1/\Lambda_i$.

L'étude de Fernandez [21] montre que pour une telle déformation on peut écrire l'équation de l'ellipsoïde de fabrique et déterminer ses axes propres par rapport aux axes initiaux liés au milieu non déformé ; c'est-à-dire situer le repère $R(OXYZ)$ par rapport à $R'(OX'Y'Z')$.

Fig. 1 — Evolution de l'angle α en fonction de γ pour des marqueurs de formes différentes. L'ellipse de déformation finie et l'ellipse de fabrique diffèrent si $\kappa \neq 1$, tant par les valeurs de leurs demi-axes que par la direction de leurs axes propres (α). Elles sont identiques si $\kappa = 1$. Si $\gamma < 2$ la différence angulaire entre l'orientation de l'axe majeur de l'ellipse de déformation finie et celui de l'ellipse de fabrique est très faible.

[Family of curves showing the evolution of the angle α as a function of γ for markers with different shapes. If $\kappa \neq 1$, the orientation (α) as well as the length of their principal semi-axes are different for fabric ellipse and finite strain ellipse. Length and orientation of principal axes for both ellipses are identical if $\kappa = 1$. In any case, for $\gamma < 2$, the angular difference in orientation for the principal axes of both ellipses is small.]

Ellipsoïde de fabrique, densité résultant de l'O.P.F. — La déformation ayant lieu sans changement de volume on a :

$\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 = 1$ et $\Lambda'_1 \Lambda'_2 \Lambda'_3 = 1$. Comme de plus $\Lambda_2 = 1$ il vient :

$$\Lambda_3 \ell^2 + m^2 + 1/\Lambda_3 n^2 = 1/\rho^2.$$

Cette expression s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\Lambda_3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{1}{\Lambda_3} \cos^2 \theta = 1/\rho^2$$

soit pour la densité $D(\theta, \varphi)$:

$$D = \left\{ \Lambda_3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{1}{\Lambda_3} \cos^2 \theta \right\}^{-3/2}.$$

Section de l'ellipsoïde de fabrique par le plan de cisaillement ZOX ; détermination de Λ_3 . — La section de l'ellipsoïde de fabrique par le plan ZOX n'est autre que l'ellipse de fabrique du problème à deux dimensions correspondant, (cf. Fernandez [21]). La résolution du problème plan associé (même direction et même intensité du cisaillement ; marqueurs bidimensionnels de même rapport d'axes) permet d'obtenir la valeur maximale de la densité $k = (D_{\max})_{2d}$ qui n'est autre que Λ_3 .

Axes propres de l'ellipsoïde de fabrique (Fig. 2). — La résolution du problème à deux dimensions permet d'obtenir l'angle α que fait l'axe majeur de l'ellipse de fabrique avec la direction du cisaillement. Cet angle α se retrouve dans la section de l'ellipsoïde de fabrique par le plan de cisaillement. Les éléments de symétrie caractérisant le cisaillement simple envisagé sont le plan de cisaillement $Z'OX'$ et l'axe de rotation OY' . Ces éléments restent inchangés au cours de la déformation ; ce qui entraîne $Z'OX' \equiv ZOX$ et $OY' \equiv OY$. Le repère $R(OXYZ)$

des axes propres de l'ellipsoïde de fabrique se déduit de $R'(OX'Y'Z')$ lié à l'état non déformé par une rotation α autour de l'axe OY' , dans le plan $Z'OX'$.

Du point de vue de la densité D résultant de l'O.P.F., un cisaillement simple isovolume défini dans (R') équivaut à une déformation plane définie dans (R) . Cette déformation plane équivalente est caractérisée par :

$$\lambda_1^* \neq \lambda_3^* ; \lambda_2^* = 1.$$

Le paramètre caractéristique de la densité D est : $k = (\lambda_3^*/\lambda_1^*)^{1/2} = \Lambda_3 = (D_{\max})_{2d}$ (cf. [27] p. 813).

Deux paramètres, l'un d'intensité (k) et l'autre angulaire (α) sont nécessaires pour caractériser le cisaillement simple.

2.2 LES HYPOTHÈSES RELATIVES AU COMPORTEMENT MAGNÉTIQUE DE LA ROCHE.

• *Rappel des propriétés cristallographiques de quelques minéraux magnétiques.* — L'examen des propriétés de divers minéraux magnétiques contenus dans les roches montre que la symétrie minimale est celle du système monoclinique. Il en est ainsi des minéraux ferrimagnétiques, antiferromagnétiques ou paramagnétiques anisotropes à la température ambiante, ces derniers étant essentiellement des substances ordonnées à basse température.

Dans les granitoïdes, auxquels nous nous intéressons plus particulièrement ici, on rencontre essentiellement des phyllosilicates (biotite, muscovite et chlorite dans les roches altérées), des amphibotes (essentiellement des hornblendes) et de la tourmaline associée à de la muscovite dans les granites leucocrates.

L'essentiel de la matrice est constitué de quartz, de plagioclases acides et de cristaux plus ou moins gros de feldspath potassique. Les granitoïdes riches en ferromagnésiens contiennent aussi des minéraux

Fig. 2. — Position de l'ellipsoïde de fabrique par rapport aux éléments de la déformation. A, éléments de la déformation par cisaillement simple : P.G., plan de glissement ; P.D., plan de déformation ; Ar, axe de rotation. B, éléments de symétrie de l'ellipsoïde de fabrique : X, Y et Z, axes binaires ; XZ, XY et ZY, plans de symétrie. C, section XZ de l'ellipsoïde de fabrique (sect. parallèle à P.D.) ; α , angle entre l'axe Z et la direction de glissement.

[Orientation of the fabric ellipsoid relative to the planar and linear elements characterizing the deformation. A simple shear : P.G., shear plane ; P.D., deformation plane ; Ar, rotation axis ; B, fabric ellipsoid : X, Y, Z, principal axes with binary symmetry ; XZ, XY, ZY, symmetry planes. C-XZ section of fabric ellipsoid (section parallel to P.D.) ; α , angle between Z axis and shear direction.]

ferrimagnétiques tels que la magnétite et l'ilménite. Le modèle ne leur est pas directement applicable. Il faut d'abord, en ce qui concerne l'A.S.M., séparer la contribution ferromagnétique de la contribution paramagnétique en utilisant une technique appropriée.

Les phyllosilicates sont de structure monoclinique et ont un comportement pseudo-hexagonal avec une très faible anisotropie dans le plan de clivage. Les hornblendes sont monocliniques alors que la tourmaline est rhomboédrique.

● *Relation entre les axes cristallographiques et les axes magnétiques du marqueur, forme du tenseur $[K_{ij}]$, choix des axes du marqueur.* — Tout tenseur symétrique de rang deux $[A_{ij}]$ est décrit par une quadrique d'équation $A_{ij} x_i x_j = 1$ (i, j de 1 à 3) ; le système d'axes $ox_1 x_2 x_3$ ayant pour origine le centre de celle-ci. Les symétries de la quadrique sont celles de la propriété décrite par le tenseur $[A_{ij}]$, qui sont elles-mêmes étroitement liées aux symétries cristallines. Le tableau I résume les effets de la symétrie cristalline sur les propriétés représentées par des tenseurs symétriques de rang deux.

Tableau I. — *Effets de la symétrie cristalline sur les propriétés représentées par des tenseurs symétriques de rang deux.*

[Effect of the crystal symmetry on the properties represented by symmetrical tensors of rank two.]

Système	Symétries	Nature et orientation de la quadrique représentative	Nombre des coef. indépendants	Tenseur rapporté aux axes d'orientation habituelle
Cubique	4 axes d'ordre 3	Sphère	1	$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$
Quadratique Hexagonal Rhomboédrique	1 axe d'ordre 4 1 axe d'ordre 6 1 axe d'ordre 3	Quadrique de révolution autour de l'axe de symétrie principal (x_3) (c).	2	$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}$
Orthorhombique	3 axes perpendicul. d'ordre 2 ; pas d'axe d'ordre supérieur	Quadrique générale avec axes (x_1, x_2, x_3) $\parallel$ aux axes binaires (a, b, c)	3	$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}$
Monoclinique	1 axe d'ordre 2	Quadrique générale avec un axe (x_2) $\parallel$ à l'axe binaire (b).	4	$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{31} \\ 0 & A_2 & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$
Triclinique	Un centre de symétrie ou pas de symétrie	Quadrique générale Aucune relation n'est imposée aux axes cristallographiques.	6	$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

La quadrique représentative du tenseur $[K_{ij}]$ est un ellipsoïde.

Le tableau II donne l'expression de $[K_{ij}]$ pour les divers types de marqueurs contenus dans les roches magmatiques acides et précise les axes cristallographiques associés à $ox_1 x_2 x_3$.

Nous traiterons le cas des marqueurs de symétrie cylindrique ($K_{11} = K_{22} \neq K_{33}$) et celui des marqueurs de symétrie monoclinique. Le cas des marqueurs de symétrie orthorhombique se traite de la même façon que le précédent en faisant $K_{13} = 0$.

Dans les roches magmatiques acides les phyllosilicates se présentent sous forme de grains aplatis suivant le plan de clivage (a, b), alors que les amphiboles et la tourmaline sont allongés suivant l'axe cristallographique c .

Comme il n'existe pas de solution analytique pour des marqueurs triaxiaux, dans le cadre du modèle de l'O.P.F. que nous utilisons, nous les assimilons à des marqueurs axiaux. L'axe de révolution des marqueurs axiaux sera noté c' , les axes a' et b' sont eux aussi équivalents — sont notés OX^* et OY^* (2). L'axe de révolution des marqueurs correspond à c' dans les phyllosilicates et à c dans les amphiboles et la tourmaline. Dans le cas des phyllosilicates et de la tourmaline, les axes de forme des grains coïncident avec les axes propres de $[K_{ij}]$, l'axe de révolution de la quadrique étant suivant OZ^* . Dans le cas des amphiboles, les correspondances entre les axes morphologiques et les axes cristallographiques sont OX^* suivant a' , OY^* suivant b et OZ^* suivant c .

Tableau II. — *Tenseurs $[K_{ij}]$ relatifs aux principaux constituants des roches magmatiques acides. Axes propres et axes cristallographiques.*

[Tensors $[K_{ij}]$ associated with the main components of acid magmatic rocks. Eigen axes and crystallographic axes.]

Phyllosilicates

Structure pseudo-hexagonale

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = K_{22} \neq K_{33}$$

$$K_1 = K_2 \neq K_3$$

x_1, x_2 suivant a, b

x_3 suivant c'

$c' \perp$ au plan (a, b)

On néglige l'anisotropie dans le plan (a, b)

Tourmaline

Structure rhomboédrique

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = K_{22} \neq K_{33}$$

$$K_1 = K_2 \neq K_3$$

x_3 suivant c

Amphiboles (hornblendes)

Structure monoclinique

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & 0 \\ K_{13} & 0 & K_{33} \end{bmatrix}$$

$$K_{11} \neq K_{22} \neq K_{33}; K_{13}$$

$$K_1 \neq K_2 \neq K_3; K_{13}$$

x_2 suivant b

plan $(a', b') \perp c$

On suppose que la matrice n'est pas magnétique, mais on peut également envisager le cas où celle-ci constitue un milieu diamagnétique ou paramagnétique isotrope. On néglige les interactions entre grains et les effets de champ démagnétisant dans chaque grain, ce qui est légitime compte tenu de leur nature paramagnétique.

Nous envisagerons d'abord le cas où le tenseur $[K_{ij}]$ relatif aux marqueurs est de symétrie cylindrique (2.3 à 3.7). Nous déterminerons ensuite l'expression du tenseur $[S_{ij}]$ dans le cas d'une déformation coaxiale isovolumique quelconque pour des marqueurs de symétrie magnétique cylindrique ou monoclinique (3.8, 3.9).

2.3 EXPRESSION DE LA SUSCEPTIBILITÉ DE LA ROCHE SUIVANT LA DIRECTION DU CHAMP APPLIQUÉ $\mathbf{h}_0$. — Le calcul est analogue à celui développé dans [27] annexe 2 et qui a trait à la susceptibilité réversible de marqueurs suivant une loi de Rayleigh. Soit s_{h_0} la susceptibilité suivant le champ magnétisant $\mathbf{h}_0 = \mathbf{u}_0 h_0$, $K_1 = K_2 \neq K_3$ les susceptibilités principales des marqueurs, $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_0)^2$ le carré du cosinus de l'angle que fait le champ magnétique avec la direction de l'axe de révolution des marqueurs orientés suivant le vecteur unitaire courant $\mathbf{u}(\theta, \varphi)$ et

$D_0 D(\theta, \varphi) d\Omega$ le nombre de ces grains. θ et φ étant les angles habituels des coordonnées sphériques, $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. On obtient finalement :

$$s_{h_0} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \{ (K_1 + (K_3 - K_1)) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_0)^2 \} \times \\ \times D_0 D(\theta, \varphi) d\Omega .$$

On définit une susceptibilité réduite S en rapportant s à la valeur s_0 qu'elle aurait pour une répartition uniforme de la direction de leurs axes de révolution sur la sphère de rayon unité ($D(\theta, \varphi) = 1$, $D_0 = N/2\pi$). Il vient : $s_0 = N\bar{K} = 2\pi D_0 \bar{K}$, $\bar{K}$ étant la susceptibilité moyenne $(2K_1 + K_3)/3$. S s'écrit en faisant apparaître H_m :

$$S_{h_0} = (K_1/\bar{K}) - H_m I \text{ où :}$$

$$H_m = (K_1 - K_3)/\bar{K};$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_0)^2 D(\theta, \varphi) d\Omega .$$

L'anisotropie de S se déduit de celle de I . Elle est fonction de l'anisotropie magnétique du grain et de l'O.P.F. résultant de la déformation considérée.

Il est à remarquer que l'on retrouve cette même intégrale dans d'autres processus d'aimantation réversibles : susceptibilité initiale d'un ensemble de grains fins allongés dont l'anisotropie de forme est prépondérante, susceptibilité réversible d'un ensemble de grains suivant une loi de Rayleigh [27].

(²) Nous avons adopté la notation (R'^*) ($OX'Y'Z'^*$) pour éviter toute confusion avec le repère (R') ($OX'Y'Z'$) utilisé en 4.

3. Application au cas particulier d'une déformation coaxiale de révolution : aplatissement et étirement.

3.1 La densité, fonction de θ seulement, s'écrit : $D = \{\sqrt{k} \sin^2 \theta + 1/k \cos^2 \theta\}^{-3/2}$ où le paramètre k a pour expression $k = \lambda_3^2$ (cf. [27] p. 893). L'axe OZ étant un axe de révolution, il suffit de faire l'étude dans un plan quelconque le contenant, par exemple, ZOX. L'intégrale I a une expression analytique simple :

$$I = \frac{1}{2} \{ (1 + k^{-3/4} J) - \cos^2 \theta_0 (1 + 3 k^{-3/4} J) \},$$

avec $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$.

θ_0 étant l'angle du champ magnétisant avec l'axe OZ. J prend les valeurs J^+ ou J^- suivant le signe de $C = k^{-3/2} - 1$; avec :

$$\begin{aligned} J^+ &= C^{-1} (1 + C)^{-1/2} - \\ &\quad - (C)^{-3/2} \text{Log} \{ C^{1/2} + (1 + C)^{1/2} \} \\ J^- &= C^{-1} (1 + C)^{-1/2} + (-C)^{-3/2} \arcsin (-C)^{1/2}. \end{aligned}$$

A partir de ces résultats, on détermine les indicatrices de I , puis celles de la susceptibilité relative S . Par analogie avec $a_d = \sqrt{\lambda_1}/\sqrt{\lambda_3}$, on définit $a_{ms} = S_1/S_3$ qui caractérise l'anisotropie de S . La connaissance de la nature des marqueurs et de leurs propriétés magnétiques (H_m) et la détermination expérimentale de $H_r = (S_1 - S_3)/\bar{S}$, $\bar{S}$ étant la susceptibilité moyenne $(2S_1 + S_3)/3$, permettent d'accéder à $R = H_r/H_m$. R étant connu, le modèle permet de remonter à la déformation finie, c'est-à-dire à λ_3 .

3.2 TENSEUR $[I_{ij}]$ ET TENSEUR $[S_{ij}]$ DÉCRIVANT LA SUSCEPTIBILITÉ RELATIVE. — En général, si $p_i = [A_{ij}] q_j$, l'intensité de la propriété $[A_{ij}]$ dans une certaine direction s'obtient en appliquant $\mathbf{q}$ dans cette direction et en mesurant $p_{\parallel}/q$, $p_{\parallel}$ étant la composante de $\mathbf{p}$ parallèle à $\mathbf{q}$. L'indicatrice de l'intensité de la propriété $[A_{ij}]$ que l'on obtient en faisant varier la direction dans laquelle on l'observe a pour expression analytique dans les axes principaux de $[A_{ij}]$:

$$A = A_{ii} \ell_i^2; i \text{ de } 1 \text{ à } 3,$$

où les ℓ_i caractérisent la direction de $\mathbf{q}$. Pour des axes quelconques on a :

$$A = A_{ij} \ell_i \ell_j; i, j \text{ de } 1 \text{ à } 3.$$

En coordonnées sphériques l'équation de l'indicatrice s'écrit dans le premier cas :

$$A = A_{11} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + A_{22} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + A_{33} \cos^2 \theta.$$

La symétrie de révolution autour de l'axe OZ impose : $A_{11} = A_{22}$; seul subsiste θ dans A :

$$\begin{aligned} A &= A_{11} \sin^2 \theta + A_{33} \cos^2 \theta \\ &= A_{11} + (A_{33} - A_{11}) \cos^2 \theta \\ &= a + b \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

L'indicatrice de I a pour expression dans le plan ZOX

$$I = \frac{1}{2} \{ (1 + k^{-3/4} J) - \cos^2 \theta_0 (1 + 3 k^{-3/4} J) \};$$

θ_0 étant l'angle du champ magnétisant avec l'axe OZ. I est donc l'indicatrice d'une propriété décrite par le tenseur $[I_{ij}]$ dont les axes propres sont le repère invariant $R(OXYZ)$.

Il vient :

$$[I_{ij}] = \begin{bmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix};$$

avec :

$$\begin{aligned} I_{11} &= I_{22} = a = \frac{1}{2} (1 + k^{-3/4} J). \\ I_{33} &= a + b = -k^{-3/4} J. \end{aligned}$$

L'indicatrice de la susceptibilité relative S mesurée parallèlement au champ magnétisant se déduit de $I(\theta_0)$ par la relation linéaire $S(\theta_0) = (K_1/\bar{K}) - H_m I(\theta_0)$. $S(\theta_0)$ a la même forme analytique que $I(\theta_0)$; c'est l'indicatrice de la susceptibilité relative décrite par le tenseur $[S_{ij}]$. Ce dernier s'écrit dans ses axes propres (repère $R(OXYZ)$) :

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} S_{11} & & \\ & S_{22} & \\ & & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & & \\ & S_2 & \\ & & S_3 \end{bmatrix};$$

avec :

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{22} = (K_1/\bar{K}) - (1/2 H_m)(1 + k^{-3/4} J) \\ S_{33} &= (K_1/\bar{K}) + H_m k^{-3/4} J. \end{aligned}$$

Le tenseur $S_{\perp}$ étant déterminé, les susceptibilités relatives parallèle et transverse au champ magnétisant ont pour expression :

$$\begin{cases} S_{\parallel} = S_{11} \sin^2 \theta_0 + S_{33} \cos^2 \theta_0 \\ S_{\perp} = (S_{11} - S_{33}) \sin \theta_0 \cos \theta_0. \end{cases}$$

3.3 PROPRIÉTÉS DES INDICATRICES $I(\theta_0)$, $S(\theta_0)$; CONSÉQUENCES. — L'ensemble des indicatrices $I_k(\theta_0)$ dans le plan ZOX correspondant à $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ ont un point commun défini en coordonnées polaires par $\theta_0 = \hat{A}$ et $I(\hat{A}) = 1/3$.

Pour ce point, indépendant de k , on doit avoir : $\frac{dI}{dk} = 0$, soit :

$$\frac{d(k^{-3/4} J)}{dk} (1 - 3 \cos^2 \hat{A}) = 0.$$

Si le premier terme est différent de zéro cette condition est réalisée pour $\cos^2 \hat{A} = 1/3$ soit $\hat{A} = 54,73$ degrés. $I(\hat{A})$ vaut alors $1/3$, quel que soit k .

Ceci entraîne $S(\hat{A}) = 1$, car

$$S(\hat{A}) = (K_1/\bar{K}) - H_m I(\hat{A})$$

$$\text{avec } \bar{K} = \frac{2K_1 + K_3}{3} \quad \text{et} \quad H_m = \frac{K_1 - K_3}{\bar{K}}.$$

Pour la susceptibilité relative parallèle on a $S_{\parallel}(\hat{A}) = \frac{2S_{11} + S_{33}}{3} = 1$ alors que la susceptibilité relative transverse vaut :

$$S_{\perp}(\hat{A}) = (S_{11} - S_{33}) \cos \hat{A} \sin \hat{A} = -\frac{H_m}{3\sqrt{2}} (1 + 3k^{-3/4} J) = f(k, H_m).$$

Ces résultats entraînent les deux conséquences suivantes :

- Il existe un cône de demi-angle $\hat{A}$ et d'axe OZ sur lequel la susceptibilité relative parallèle est

toujours égale à 1 ; c'est-à-dire identique à ce qu'elle serait si l'ensemble des marqueurs étaient uniformément répartis.

- Il existe un cône de susceptibilité transverse constante d'axe OZ et de demi-angle au sommet $\hat{B} = 90 - \hat{A}$. Sur ce dernier la valeur de la susceptibilité relative transverse est une fonction de k et de H_m .

3.4 ALLURE DES INDICATRICES DES TENSEURS $[I_{ij}]$ ET $[S_{ij}]$. — $[I_{ij}]$ est fonction de $k = \lambda^2$ seulement, c'est-à-dire de l'intensité de la déformation finie et de la forme des marqueurs. La figure 3 illustre l'évolution de $(I_z)_k = f(I_x)_k$ pour $k = 0,1 ; 0,25 ; 0,6666 ; 1,5 ; 4 ; 10$. Les groupes de courbes A et B correspondant respectivement aux valeurs de $k < 1$ et $k > 1$. A chaque valeur de k dans A correspond $1/k$ dans B.

$[S_{ij}]$ est une fonction de k et de l'anisotropie intrinsèque $[K_{ij}]$ des marqueurs. Par analogie avec définition de $a_{ms} = \frac{S_1}{S_3}$ introduisons le paramètre

$$r = \frac{K_1}{K_3}. \quad \text{Il vient :}$$

$$(S_{k,r})_{\theta_0} = \frac{3r}{2r+1} - \frac{3(r-1)}{2r+1} (I_k)_{\theta_0}.$$

Deux paramètres sont nécessaires pour décrire la susceptibilité relative. L'influence de l'anisotropie intrinsèque des marqueurs se traduit par l'évolution de S en fonction de r à k donné. Les figures 4 et 5 illustrent cette évolution pour le couple de valeurs de k : $10 - 0,1$ et pour r valant $0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 2 ; 5 ; 10$.

3.5 ETUDE DU RAPPORT $R = H_r/H_m$. — Ce rapport compare l'anisotropie des susceptibilités principales de la roche (H_r) à celle des marqueurs (H_m). R a pour valeur :

$$R = [(S_1 - S_3)/\bar{S}] / [(K_1 - K_3)/\bar{K}] = I_3 - I_1 ;$$

il dépend uniquement du paramètre k .

La figure 6 donne l'évolution de R en fonction de k . Pour plus de clarté nous avons tracé $R(k)$ pour $k > 1$ et $R(1/k)$ pour $k < 1$.

3.6 ANISOTROPIE MAGNÉTIQUE DE LA SUSCEPTIBILITÉ RELATIVE : a_{ms} . — L'anisotropie magnétique de la susceptibilité relative a_{ms} a pour expression :

$$a_{ms} = \frac{S_1}{S_3} = \frac{1 - \left(\frac{r-1}{r}\right) I_1}{1 - \left(\frac{r-1}{r}\right) I_3} = a_{ms}(k, r).$$

Fig. 3. — Evolution des indicatrices $(I_z)_k = f(I_x)_k$ pour diverses valeurs du paramètre k . Les courbes 1 à 6 correspondent respectivement à $k = 0,1 ; 0,25 ; 0,6666 ; 1,5 ; 4 ; 10$. Pour les groupes A (1, 2, 3) et B (4, 5, 6) on a respectivement $k < 1 ; k > 1$.

[Plot showing the evolution of the indicatrices $(I_z)_k = f(I_x)_k$ as a function of k . Curves 1 to 6 correspond to $r = 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 2 ; 5$ and 10 respectively. For set A (1, 2, 3), $k < 1$; for set B (4, 5, 6), $k > 1$.]

Fig. 4.

Fig. 5.

Figs. 4 et 5. — Evolution des indicatrices $(S_z)_{k,r} = f(S_x)_{k,r}$ en fonction de r à k donné. $k = 10$: figure 4; $k = 0,1$: figure 5. Les courbes 1 à 6 correspondent respectivement à $r = 0,1$; $0,2$; $0,5$; 2 ; 5 ; 10 . On notera la dissymétrie entre les indicatrices correspondant à k et $1/k$.

[Plot showing the evolution of the indicatrices $(S_z)_{k,r} = f(S_x)_{k,r}$ as a function of r for a given k . Figure 4; $k = 10$; figure 5: $k = 0.1$. Curves 1 to 6 correspond to $r = 0.1$; 0.2 ; 0.5 ; 2 ; 5 and 10 respectively. Notice the dissymmetry of indicatrices corresponding to k and $1/k$.]

Fig. 6. — Evolution du rapport $R = f(k)$ pour $k > 1$ et $R = g(1/k)$ pour $k < 1$. On notera la dissymétrie des courbes $k > 1$, $k < 1$.

[Curves $R = f(k)$ pour $k > 1$ and $R = g(1/k)$ for $k < 1$. Notice the dissymmetry of curves corresponding to $k > 1$ and $k < 1$.]

C'est à la fois une fonction de k , c'est-à-dire du type de marqueur (κ) et de l'amplitude de la déformation (λ_3) et de r qui caractérise l'anisotropie magnétique du marqueur.

Les figures 7 et 8 donnent l'évolution de a_{ms} en fonction de k à r donné. Nous avons pris pour $r > 1$ les valeurs 2, 5, 10 soit $K_1 = 2 K_3$; $K_1 = 5 K_3$; $K_1 = 10 K_3$, et pour $r < 1$, celles correspondant à

$K_3 = 2 K_1$; $K_3 = 5 K_1$; $K_3 = 10 K_1$ soit 0,5; 0,2; 0,1.

Le tableau III résume qualitativement les résultats et précise la forme des ellipsoïdes des S , compte tenu de celle de l'ellipsoïde de déformation finie et de celle de l'ellipsoïde des K .

Le passage en coordonnées logarithmiques nous donne l'évolution de $\text{Log } a_{ms}$ en fonction de la

Fig. 7.

Fig. 8.

Figs. 7 et 8. — Evolution de $a_{ms} = f(k)$ à r donné. Les courbes 1 à 6 correspondent respectivement à $r = 0,1$; $0,2$; $0,5$; 2 ; 5 ; 10 . Figure 7: $k < 1$; figure 8: $k > 1$.

[Curves giving $a_{ms} = f(k)$ for a given value of r . Curves 1 to 6 correspond to $r = 0,1$; $0,2$; $0,5$; 2 ; 5 and 10 . Figure 7: $k < 1$; figure 8: $k > 1$.]

Tableau III. — *Déformation coaxiale de révolution isovolume : caractéristiques de l'ellipsoïde des susceptibilités relatives $S(a_{ms})$ en fonction du type de marqueurs (κ), de l'anisotropie magnétique intrinsèque des marqueurs (k, r) et du type de déformation finie (λ_i).*

[Isovolumic, revolution coaxial strain : characteristics of the ellipsoid of relative susceptibilities $S(a_{ms})$ versus the type of markers (κ), the intrinsic magnetic anisotropy of markers (k, r) and the type of finite strain (λ_i).]

Type de marqueur	Type de déformation Type d'ellipsoïde de déformation	r relatif à l'ellipsoïde des K	a_{ms} relatif à l'ellipsoïde des S
—	—	—	—
● Allongé	Aplatissement $\lambda_3 < 1$ $\lambda_3 < \lambda_1 = \lambda_2$	$r < 1$ $K_3 > K_1 = K_2$	$a_{ms} > 1$ $S_3 < S_1 = S_2$
		$r > 1$ $K_3 < K_1 = K_2$	$a_{ms} < 1$ $S_3 > S_1$
$0 < \kappa \leq 1$	● Etirement $\lambda_3 > 1$ $\lambda_3 > \lambda_1 = \lambda_2$	● $r < 1$ $K_3 > K_1 = K_2$	● $a_{ms} < 1$ $S_3 > S_1 = S_2$
		● $r > 1$ $K_3 < K_1 = K_2$	● $a_{ms} > 1$ $S_3 < S_1 = S_2$
●● Aplati	●● Aplatissement $\lambda_3 < 1$ $\lambda_3 < \lambda_1 = \lambda_2$	●● $r < 1$ $K_3 > K_1 = K_2$	●● $a_{ms} < 1$ $S_3 > S_1 = S_2$
		●● $r > 1$ $K_3 < K_1 = K_2$	●● $a_{ms} > 1$ $S_3 < S_1 = S_2$
$-1 \leq \kappa < 0$	Etirement $\lambda_3 > 1$ $\lambda_3 > \lambda_1 = \lambda_2$	$r < 1$ $K_3 > K_1 = K_2$	$a_{ms} > 1$ $S_3 < S_1 = S_2$
		$r > 1$ $K_3 < K_1 = K_2$	$a_{ms} < 1$ $S_3 > S_1 = S_2$

déformation naturelle ε_3 . En effet $\text{Log } a_{ms} = g(\text{Log } k) = g(2\kappa\varepsilon_3)$. La figure 9 nous montre cette évolution paramétrée en r . La figure 10 détaille le voisinage de l'origine.

3.7 EST-IL POSSIBLE DE DÉFINIR À PARTIR DES SUSCEPTIBILITÉS PRINCIPALES S_i UN « ELLIPSOÏDE DE FABRIQUE MAGNÉTIQUE » TEL QUE $D = \rho^3$? VALIDITÉ D'UNE « LOI DE PUISSANCE ». — On norme d'abord les susceptibilités S_i de manière à avoir l'équivalent de la relation de conservation du volume $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$; c'est-à-dire $S'_1 S'_2 S'_3 = 1$. Pour cela, il faut que $S'_i = cS_i$ avec $c = (S_1 S_2 S_3)^{-1/3}$. On va rechercher un coefficient κ' caractéristique du marqueur tel que $S_3^{\kappa'/2} \sin^2 \theta + \frac{1}{S_3^{\kappa'}} \cos^2 \theta = \frac{1}{\rho^2}$. En effet l'ellipsoïde de fabrique de rayon ρ tel que : $D = \rho^3$ a pour équation :

$$\lambda_3^{\kappa'/2} \sin^2 \theta + \frac{1}{\lambda_3^{\kappa'}} \cos^2 \theta = \frac{1}{\rho^2}.$$

$D = \rho^3$ est vérifiée si : $\lambda_3^{\kappa'} = S_3^{\kappa'}$ soit $\lambda_3 = S_3^{\kappa'/\kappa} = (cS_3)^{\kappa'/\kappa}$. En introduisant a_{ms} et k il vient : $\text{Log } a_{ms} = -\frac{3}{2\kappa'} \text{Log } k = m \text{Log } k$. Cette relation qui traduit la similitude des deux ellipsoïdes de fabrique entraîne la loi de puissance $\lambda_i/\lambda_j = \{S_i/S_j\}^p$ introduite empiriquement par J. S. Rathore [9]. En toute rigueur cette relation n'est jamais vérifiée. La dissymétrie entre le cas de l'étirement et l'influence de la forme des marqueurs et de leur anisotropie magnétique font que les limites de validité de l'approximation diffèrent suivant les cas envisagés. κ' découle de la pente m de la droite approchée dans le diagramme $\text{Log } a_{ms} = m \text{Log } k$. L'exposant p de la loi de puissance approchée vaut κ'/κ . L'examen du réseau de courbes $\text{Log } a_{ms} = m \text{Log } k$ paramétré en r montre que l'approximation linéaire paraît raisonnable pour des valeurs de k comprises entre 0,5 et 2 (cf. Fig. 10). Le tableau IV précise quantitativement sa validité pour deux valeurs de l'anisotro-

Fig. 9.

Fig. 10.

Figs. 9 et 10. — Evolution de $\text{Log}(a_{ms}) = g(\text{Log } k) = g(2 \kappa \varepsilon_3)$ pour diverses valeurs de r . Les courbes 1 à 6 correspondant respectivement à $r = 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 2 ; 5 ; 10$. La figure 10 détaille l'évolution précédente au voisinage de l'origine.

[Curves $\text{Ln}(a_{ms}) = g(\text{Ln } k) = g(2 \kappa \varepsilon_3)$ for different values of r . Curves 1 to 6 correspond to $r = 0.1 ; 0.2 ; 0.5 ; 2 ; 5$ and 10 respectively. Figure 10 shows a detail of curves 1 to 6 near the origin.]

pie relative intrinsèque des marqueurs — 17 pour κ compris entre 1 et 0,5, r valant 2 et $r = 2$ ($K_1 = 2 K_3$) et $r = 0,5$ ($K_3 = 2 K_1$). Les entre +7 et +14, pour la même variation de valeurs de p correspondantes varient de -8 à κ , mais pour $r = 0,5$.

Tableau IV. — Validité de la « loi de puissance » exprimée par la variation de la pente de la droite approchée $\text{Log } a_{ms} = m \text{ Log } k$ en fonction de la forme des marqueurs et de leur anisotropie $r = K_1/K_3$, du type de déformation et de l'amplitude de celle-ci.

[Validity of the « power law », expressed by the change in the slope of the approximate linear relationship $\text{Log } a_{ms} = m \text{ Log } k$ versus the shape of markers and their anisotropy $r = K_1/K_3$, the type of deformation and its magnitude.]

						$K_1 = 2 K_3$ $r = 2$	$K_3 = 2 K_1$ $r = 0,5$
n	κ	k_1	k_2	$(\lambda_3)_1$	$(\lambda_3)_2$	$10^2 \Delta m/m$	$10^2 \Delta m/m$
∞	1	0,99	0,5	0,99	0,5	11,5	7,5 ap.
		1,01	2	1,01	2	6,5	2 ét.
5	0,96	0,99	0,5	0,989	0,48	11,5	7,5 ap.
		1,01	2	1,01	2,058	6,5	2 ét.
1,5	0,5	0,99	0,5	0,98	0,25	11,5	7,5 ap.
		1,01	2	1,02	4	6,5	2 ét.

Le changement de signe de $\kappa (n \rightarrow 1/n)$ fait que $\Delta m/m$ s'échange entre aplatissement et étirement.

F. Hrouda [11] arrive à des conclusions analogues : l'exposant p de la loi de puissance est fonction de la déformation. Remarquons cependant que le développement mathématique de son modèle manque d'une certaine cohérence interne. Ce point a fait l'objet d'une discussion entre F. Hrouda et P. Rochette [28]. Nous avons montré dans [27] qu'une approximation de ce type est également valable pour d'autres grandeurs magnétiques telles que l'aimantation rémanente isotherme à saturation (ARIS) et l'aimantation thermorémanente (ATR) d'un ensemble de grains fins monodomaines, ou de la susceptibilité d'un polydomaine idéal. Les limites de validité sont du même ordre.

Partant des mêmes hypothèses B. Henry [10] justifie la loi de puissance $\lambda_i/\lambda_j = [K_i/K_j]^{p'} (1)$ qui diffère de $\lambda_i/\lambda_j = [S_i/S_j]^p$. Nous avons analysé ce travail dans [29]. Une définition incorrecte de l'ellip-

erronnée du facteur de forme magnétique (l'équivalent de κ'), qui combiné au facteur de forme géométrique des marqueurs détermine p' , invalident son raisonnement. Il en résulte que la justification théorique qu'il donne de (1) n'est pas valable.

3.8 EXPRESSION DU TENSEUR $[S_{ij}]$ POUR DES MARQUEURS DE SYMÉTRIE MONOCLINIQUE. — Pour ce type de marqueurs le tenseur de susceptibilité $[K_{ij}]$, rapporté aux axes $OX'^* Y'^* Z'^*$ définis en 2.2, s'écrit :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & 0 \\ K_{13} & 0 & K_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & K_{13} \\ 0 & K_2 & 0 \\ K_{13} & 0 & K_3 \end{bmatrix}.$$

Le calcul de $[S_{ij}]$, exprimé dans les axes principaux de déformation, est analogue à celui que nous avons développé dans le cas de marqueurs ayant une symétrie cylindrique. Nous en donnons les grandes lignes dans l'annexe 3. On obtient :

$$[S_{ij}] = (K_3/\bar{K}) I_{ij}.$$

$\bar{K}$ est la susceptibilité moyenne $\frac{K_1 + K_2 + K_3}{3}$.

Le tenseur source d'anisotropie $[I_{ij}]$ s'écrit avec les notations précédentes :

$$[I_{ij}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} u_i u_j D(\theta, \varphi) d\Omega.$$

u_i, u_j étant les composantes du vecteur unitaire courant $\mathbf{u}(\theta, \varphi)$.

On montre que les intégrales I_{ij} sont toujours nulles à cause de la valeur des limites d'intégration sur φ .

Seules subsistent les S_{ii} . Ce résultat est à comparer avec celui que nous avons obtenu pour les marqueurs de symétrie cylindrique. On avait :

$$S_{ii} = (K_1/\bar{K})(1 - I_{ii}) + (K_3/\bar{K}) I_{ii}.$$

Les intégrales I_{ii} ont même valeur dans les deux cas, ce qui entraîne la relation :

$$(S_{ii})_{\text{mono.}} = (S_{ii})_{\text{cyl.}} - (K_1/\bar{K})(1 - I_{ii}).$$

Dans le cas d'une symétrie cylindrique les axes de forme du marqueur axial sont confondus avec les axes propres de $[K_{ij}]$, ce qui entraîne l'existence du terme $\frac{K_1}{\bar{K}} (1 - I_{ii})$.

Dans le cas de la symétrie monoclinique, l'assimilation du grain à un marqueur axial (et non triaxial) et l'absence de données sur l'orientation des axes autres que OZ'^* , font que nous devons considérer la répartition de OX'^* et OY'^* comme uniforme.

$$\frac{K_3}{\bar{K}}.$$

Remarquons que dans le cas de marqueurs de symétrie monoclinique l'ellipsoïde des S est homothétique de l'ellipsoïde des I , alors que dans le cas de marqueurs de symétrie cylindrique on passe de l'un à l'autre par une relation linéaire.

3.9 EXPRESSION DU TENSEUR $[S_{ij}]$ DANS LE CAS D'UNE DÉFORMATION COAXIALE ISOVOLUMIQUE QUELCONQUE. MARQUEURS DE SYMÉTRIE CYLIN-

DRIQUE ET MONOCLINIQUE. — Par ordre de complexité nous avons les trois cas suivants :

- déformation coaxiale de révolution isovolumique ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$)
- déformation coaxiale plane isovolumique ($\lambda_1 \neq \lambda_2$; $\lambda_3 = 1$);
- déformation coaxiale isovolumique quelconque ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$).

Les densités correspondantes (cf. [27] p. 813) ont pour expression :

$$D(\theta) = \left\{ \sqrt{k} \sin^2 \theta + \frac{1}{k} \cos^2 \theta \right\}^{-3/2} \quad k = \lambda_3^*$$

$$D(\theta, \varphi) = \left\{ k' \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \frac{1}{k'} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \right\}^{-3/2}$$

$$k' = (\lambda_2 / \lambda_1)^{\kappa/2}$$

$$D(\theta, \varphi) = \{ \Lambda'_1 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \Lambda'_2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \Lambda'_3 \cos^2 \theta \}^{-3/2}.$$

k et k' sont les paramètres caractéristiques de la déformation envisagée. Les Λ'_i sont les coefficients de l'ellipsoïde de fabrique relatif à la déformation caractérisée par $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. On a $\Lambda_i = 1/\lambda_i$; $\Lambda_i = \lambda_i^{\kappa}$ (i de 1 à 3).

Nous envisageons de plus deux types de symétrie pour les marqueurs : cylindrique et monoclinique ; soit au total six cas.

On passe de la symétrie monoclinique des marqueurs à la symétrie cylindrique par la relation :

$$(S_{ii})_{\text{cyl.}} = (K_1/\bar{K})(1 - I_{ii}) + (S_{ii})_{\text{mono.}}$$

Il suffit donc de traiter le cas monoclinique et pour cela de calculer les intégrales I_{ii} . Nous avons déjà fait ce calcul pour une déformation coaxiale de révolution isovolumique avec des marqueurs de symétrie cylindrique. Dans le cas de marqueurs monocliniques on obtient avec les notations définies en 3.2.

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} (K_3/\bar{K})(1 + k^{-3/4} J)$$

$$S_3 = - (K_3/\bar{K}) k^{-3/4} J.$$

Le calcul des I_{ii} pour les deux autres cas : $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_3 = 1$; $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ est donné dans l'annexe 1.

4. Déformation rotationnelle : cas du cisaillement simple isovolume.

4.1 ELABORATION DU MODÈLE.

4.1.1 *Cas des marqueurs de symétrie cylindrique* : $K_1 = K_2 \neq K_3$. — On considère un ensemble de marqueurs axiaux, magnétiquement anisotropes, caractérisés par un rapport d'axes n , un facteur de forme κ et un tenseur de susceptibilité intrinsèque

$[K_{ij}]$, dispersés dans une matrice homogène déformable. Les axes propres de $[K_{ij}]$ coïncident avec ceux des marqueurs et la matrice n'est pas magnétique. Soit $R'(OX'Y'Z')$ un repère lié au milieu non déformé ; envisageons un cisaillement simple isovolumique de direction OZ' et d'amplitude γ . Les résultats exposés au paragraphe 2.1.3 nous montrent que la densité D résultant de l'O.P.F. due à l'application du cisaillement simple tel qu'il a été défini dans $R'(OX'Y'Z')$ est équivalente à celle qui résulterait d'une déformation coaxiale plane isovolumique définie dans $R(OXYZ)$. La déformation équivalente est caractérisée par $\lambda_1^* \neq \lambda_3^*$, $\lambda_2^* = 1$. La densité D qui en résulte a pour expression en coordonnées sphériques :

$$D(\theta, \varphi) = \left\{ k \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{1}{k} \cos^2 \theta \right\}^{-3/2}.$$

Le paramètre caractéristique k vaut (cf. [27] p. 893) :

$$k = (\lambda_3^* / \lambda_1^*)^{\kappa/2} = \Lambda_3 = (D_{\text{max}})_{2d}.$$

$R(OXYZ)$ se déduit de $R'(OX'Y'Z')$ par la rotation α décrite en 2.1.3.

Le calcul de l'anisotropie magnétique résultant de la densité D est identique à celui qui a été développé au paragraphe 2.3.

Elle est décrite par l'intégrale I :

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_0)^2 D(\theta, \varphi) d\Omega.$$

L'expression de $D(\theta, \varphi)$ est celle qui correspond à la déformation équivalente ; nous avons utilisé les notations définies en 2.3.

I est une moyenne pondérée de la densité, l'élément de pondération étant le carré du cosinus de l'angle que fait le champ magnétique appliqué de direction $\mathbf{u}_0$ avec le vecteur courant $\mathbf{u}(\theta, \varphi)$. I dépend de la direction du champ magnétique et de l'O.P.F. Pour une direction de champ donné I dépend seulement de k .

Le tenseur source de l'anisotropie $[I_{ij}]$ a pour axes propres $R(OXYZ)$ et pour valeurs propres I_{11} , I_{22} , I_{33} qui correspondent respectivement aux valeurs de I suivant OX , OY , OZ pour des champs appliqués selon les mêmes directions. On a :

$$\begin{cases} I_{11} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi D(\theta, \varphi) \times \\ \quad \times \sin \theta d\theta d\varphi \\ I_{22} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi D(\theta, \varphi) \times \\ \quad \times \sin \theta d\theta d\varphi \\ I_{33} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta D(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \end{cases}$$

Le calcul de ces intégrales est donné dans l'annexe 1.

La susceptibilité relative de l'ensemble est décrite par le tenseur $[S_{ij}]$ (cf. 3.2). Les axes propres de $[S_{ij}]$ sont identiques à ceux de $[I_{ij}]$. Les susceptibilités principales S_{11} , S_{22} , S_{33} dans les directions OX , OY , OZ se déduisent des valeurs propres du tenseur $[I_{ij}]$ compte tenu de l'anisotropie magnétique des marqueurs. Pour le type de grains considérés la susceptibilité magnétique est de révolution autour de OZ^* : $K_1 = K_2 \neq K_3$. On a en posant $K_1 = rK_3$:

$$S_{ii} = \frac{3r}{2r+1} - \frac{3(r-1)}{2r+1} I_{ii} (i \text{ de } 1 \text{ à } 3) .$$

4.1.2 Cas des marqueurs de symétrie monoclinique : $K_1 \neq K_2 \neq K_3$; $K_{13} \neq 0$ (cf. 2.2 et 3.8). — L'élaboration du modèle est en tous points analogue à celle que nous avons développée en 4.1.1. Seules diffèrent les valeurs du S_{ii} . On a :

$$S_{ii} = \frac{K_3}{\bar{K}} I_{ii}$$

les I_{ii} ayant les mêmes valeurs que dans le cas de marqueurs de symétrie cylindrique.

4.2 RÉSULTATS. — Pour illustrer notre propos nous avons utilisé deux types de marqueurs axiaux. Les marqueurs 1 sont allongés ($n = 1,5$) alors que les marqueurs 2 sont aplatis ($n = 0,2$). Du point de vue

Fig. 11. — Cisaillement simple isovolume : disposition des axes dans le plan $Z'OX'$ pour des marqueurs de rapport d'axes n et $1/n$.

[Isovolumic simple shear : orientation of axes in the plane $Z'OX'$ for markers with aspect ration n and $1/n$.]

Tableau V. — *Cisaillement simple isovolume : résumé schématique de la variation $\alpha = f(\gamma)$ pour des marqueurs de rapport d'axes n et $1/n$.*

[Simple isovolumic shear : sketch of the dependence of $\alpha = f(\gamma)$ for markers with aspect ratios n and $1/n$.]

γ	0	γ_c	$2\gamma_c$	$3\gamma_c$	$4\gamma_c$
$\alpha(n)$	45	0	-45	45	0
$\alpha(1/n)$	-45	-90	-135	-45	-90

Fig. 12. — $\alpha = f(\gamma)$ pour le marqueur 1 : $n = 1.5$. $\gamma_c^1 = 3,40$. α s'annule pour $\gamma = \gamma_c^1$, $3\gamma_c^1$, $5\gamma_c^1$ et prend les valeurs $\pm 45^\circ$ pour $\gamma = 2\gamma_c^1$, $4\gamma_c^1$ qui correspondent aux isotropies de second et troisième ordre.

[Evolution of $\alpha = f(\gamma)$ for markers 1 with aspect ratio $n = 1.5$. $(\gamma_c)_1 = 3.40$. Angle α is zero for $\gamma = (\gamma_c)_1$, $3(\gamma_c)_1$, $5(\gamma_c)_1$... and takes the values $\pm 45^\circ$ for $\gamma = 2(\gamma_c)_1$, $4(\gamma_c)_1$... corresponding to second and third order isotropies.]

Fig. 13. — $\alpha = f(\gamma)$ pour le marqueur 2 : $n = 0,2$. $\gamma_c^2 = 8,16$. α s'annule pour $\gamma = \gamma_c^2$ et prend les valeurs -135 , -45 pour $\gamma = 2\gamma_c^2$ qui correspond à l'isotropie de second ordre.

[Evolution of $\alpha = f(\gamma)$ for markers 2 with aspect ratio $n = 0,2$, $(\gamma_c)_2 = 8,16$. The angle α is zero for $\gamma = (\gamma_c)_2$ and takes the values -135 , -45 for $\gamma = 2(\gamma_c)_2$ corresponding to the second order isotropy.]

magnétique nous avons supposé $K_1 = K_2 \neq K_3$. Nous avons choisi arbitrairement $r = 0,5$ pour les marqueurs du type 1 et $r = 3,0$ pour ceux du type 2.

4.2.1 Rotation des axes. — L'angle α résulte de la résolution du problème plan correspondant (cf. 2.1.3). Si pour un cisaillement γ et pour un rapport d'axes n on a α , pour ce même cisaillement et pour un marqueur de rapport d'axes $1/n$ on a $\alpha - 90$. La figure 11 montre la disposition des axes dans le plan $Z'OX'$. Quand on passe de n à $1/n$ on a : $Z(1/n) \equiv -X(n)$ et $X(1/n) \equiv Z(n)$. Les symétries du problème font qu'il y a simplement échange des axes : $Z(1/n) \equiv X(n)$; $X(1/n) \equiv Z(n)$.

La variation de α en fonction de γ est périodique et de période $2\gamma_c$, avec $\gamma_c = \pi / \sqrt{1 - \kappa^2}$. γ_c est identique pour des marqueurs de rapport d'axes n et $1/n$. Le tableau V résume schématiquement cette variation.

Les figures 12 et 13 ont trait à la variation $\alpha(\gamma)$ pour les 2 marqueurs dont nous étudierons les mélanges ; soit : marqueur 1 : $n = 1,5$; marqueur 2 : $n = 0,2$.

4.2.2 Détermination de $k = (D_{\max})_{2d} = \Lambda_3$ (cf. 2.1.3) ; *variation en fonction de γ* . — Pour des valeurs de γ croissantes k oscille entre 1 et n^2 avec une période $2\gamma_c$. Pour $\gamma = 0$ on a le stade isotrope initial k vaut alors 1. Quand γ croît,

k croît également jusqu'à la valeur n^2 qui est atteinte pour $\gamma = \gamma_c$, puis décroît de n^2 à 1, cette dernière valeur étant obtenue pour $\gamma = 2\gamma_c$ (isotropie du second ordre)... Les figures 14 et 15 nous montrent cette variation pour les marqueurs 1 et 2.

4.2.3 Evolution des susceptibilités relatives principales S_{ii} en fonction de γ pour les marqueurs 1 et 2. — Nous avons pris $r = 0,5$ pour les marqueurs 1 et $r = 3,0$ pour les marqueurs 2. Les figures 16 et 17 illustrent cette évolution. On a pour les marqueurs 1 : $S_1 < S_2 < S_3$ alors que l'anisotropie intrinsèque était $K_1 = K_2 < K_3$. Inversement les marqueurs 2 sont caractérisés par : $S_1 > S_2 > S_3$, leur anisotropie intrinsèque étant $K_1 = K_2 > K_3$. L'axe intermédiaire est toujours l'axe de symétrie du cisaillement.

4.2.4 Evolution de la forme de l'ellipsoïde des susceptibilités relatives en fonction de γ pour les marqueurs 1 et 2. Linéation et foliation magnétiques ; anisotropie magnétique totale. — Pour un ellipsoïde de demi-axes k_1, k_2, k_3 tels que $k_1 > k_2 > k_3$ les paramètres L, F, P valent respectivement $L = \frac{k_1}{k_2}$, $F = \frac{k_2}{k_3}$,

$$P = \frac{k_1}{k_3}.$$

Cette définition entraîne pour les marqueurs 1 :

$$L = \frac{S_3}{S_2}, F = \frac{S_2}{S_1}, P = \frac{S_3}{S_1}, \text{ car } S_1 < S_2 < S_3.$$

Fig. 14. — $D_{\max} = k = f(\gamma)$ pour le marqueur 1 ($n = 1,5$). $\gamma_c^1 = 3,40$. On notera le caractère oscillatoire de k avec une période $2\gamma_c^1$ (isotropies successives d'ordre supérieur).

[Curve $D_{\max} = k = f(\gamma)$ for marker 1 ($n = 1.5$). $(\gamma_c)_1 = 3.40$. Notice the periodicity of k with a period $2(\gamma_c)_1$ (successive higher order isotropies).]

Fig. 15. — $D_{\max} = k = f(\gamma)$ pour le marqueur 2 ($n = 0,2$). $\gamma_c^2 = 8,16$. Même remarque que pour la figure 14. La rotation plus lente du marqueur 2 fait que seule l'isotropie de second ordre est atteinte.

[Curve $D_{\max} = k = f(\gamma)$ for marker 2 ($n = 0.2$). $(\gamma_c)_2 = 8.16$. The periodic behaviour is similar to the preceding case.]

Fig. 16. — Marqueurs 1 : évolution de S_{ii} en fonction de γ . On remarquera le caractère périodique de celle-ci (période $2\gamma_c^1$). On a $S_1 < S_2 < S_3$ alors que : $K_1 = K_2 < K_3$.

[Evolution of S_{ii} as a function of γ for markers 1. Notice that the evolution is periodical (period = $2(\gamma_c)_1$). We have $S_1 < S_2 < S_3$ while $K_1 = K_2 < K_3$.]

Fig. 17. — Marqueurs 2 : évolution de S_{ii} en fonction de γ . On remarquera le caractère périodique de celle-ci (période $2\gamma_c^2$). On a pour le marqueur 2 : $S_1 > S_2 > S_3$ alors que : $K_1 = K_2 > K_3$.

[Evolution of S_{ii} as a function of γ of markers 2. Notice the periodical behaviour with period $2(\gamma_c)_2$. We have $S_1 > S_2 > S_3$ while $K_1 = K_2 > K_3$.]

Fig. 18. — Marqueurs 1 : évolution des paramètres L, F, P en fonction de γ ($r = 0,5$). On remarquera la périodicité de cette évolution et on notera que $L > F$.
[Evolution of the parameters L, F and P a function of γ ($r = 0.5$) for markers 1. Notice the periodical behaviour and that $L > F$.]

Fig. 19. — Marqueurs 2 : évolution des paramètres L, F, P en fonction de γ ($r = 3,0$). On remarquera la périodicité de cette évolution et on notera que $F > L$.
[Evolution of the parameters L, F and P as a function of γ ($r = 3.0$) for markers 2. Notice the periodicity and that $F > L$.]

Fig. 20. — Diagramme de Flinn pour les marqueurs 1 et 2. γ varie de 0 à 17,5. On remarquera l'accentuation des linéations et des foliations magnétiques par rapport à celle correspondant à l'ellipsoïde de déformation finie : les points représentatifs d'une déformation plane isovolume se situent sur la première bissectrice.

[Flinn's diagram showing the evolution of magnetic fabrics for markers 1 and 2 (γ varies from 0 to 17.5). Notice that magnetic lineation and magnetic foliation are exaggerated relatively to the corresponding properties of the finite strain ellipsoid. The points corresponding to isovolumic plane strain lie on the first bisector.]

Pour les marqueurs 2, $S_1 > S_2 > S_3$ implique

$$L = \frac{S_1}{S_2}, F = \frac{S_2}{S_3}, P = \frac{S_1}{S_3}.$$

Les figures 18 et 19 nous montrent les variations de L, F, P pour les marqueurs 1 et 2. Les variations sont périodiques, la période étant $2\gamma_c$.

Nous pouvons également représenter cette évolution en utilisant le diagramme de Flinn (cf. [21] p. 35) ; c'est l'objet de la figure 20. On remarque l'accentuation des linéations et des foliations magnétiques par rapport à celles correspondant à l'ellipsoïde de déformation finie. En effet pour une déformation plane isovolume les points représentatifs de l'ellipsoïde de déformation finie évoluent sur la première bissectrice. La tangente à l'origine des deux courbes est suivant la première bissectrice. Ce résultat montre qu'il n'y a pas une simple similitude entre l'ellipsoïde de déformation finie et l'ellipsoïde des susceptibilités relatives.

Une autre façon d'illustrer ce qui précède consiste à étudier l'évolution du paramètre K , que nous avons appelé GK pour éviter toute confusion avec k

et les composantes de $[K_{ij}]$. Pour un ellipsoïde de demi-axes X_i tels que $X_1 \geq X_2 \geq X_3$ on a :

$$K = \frac{(X_1/X_2) - 1}{(X_2/X_3) - 1} = \frac{L - 1}{F - 1}.$$

K est la pente de la droite joignant l'origine au point représentatif de l'ellipsoïde de demi-axes X_i dans le diagramme de Flinn ; l'origine étant prise au point (1, 1). Les figures 20a et 20b représentent l'évolution de GK en fonction de γ pour les marqueurs 1 et 2. On observe des variations périodiques de période $2\gamma_c$. Pour les marqueurs 1 ($S_1 < S_2 < S_3$), GK croît de 1 à $(GK)_{\max}$ quand γ croît de 0 à γ_c , puis décroît de $(GK)_{\max}$ à 1 quand γ croît de γ_c à $2\gamma_c$. Pour les marqueurs 2 ($S_1 > S_2 > S_3$), GK décroît de 1 à $(GK)_{\min}$ quand γ croît de 0 à γ_c , puis croît de $(GK)_{\min}$ à 1 quand γ croît de γ_c à $2\gamma_c$. Un cisaillement isovolume est caractérisé en analyse structurale par $GK = 1$.

Il y a accentuation de la linéation magnétique pour les marqueurs du type 1 et accentuation de la foliation magnétique pour les marqueurs du type 2.

4.2.5 Evolution des propriétés en fonction du paramètre k . — L'étude de l'évolution des propriétés en fonction de γ suppose que l'on résolve le problème plan associé pour chaque valeur du rapport d'axes n . Par contre une étude en fonction de k permet d'avoir une idée qualitative de cette évolution pour une granulométrie plus étendue. Nous nous sommes bornés à des valeurs de n comprises entre 0,1 et 10, ce qui correspond à des valeurs de k inférieures ou égales à 100.

Pour un marqueur de rapport d'axes n ou $1/n$, k varie de 1 à n^2 . La variation est monotone en k et périodique en γ , la période étant $2\gamma_c$. Le tableau VI précise les valeurs de κ, k, γ_c en fonction de n ou $1/n$.

Tableau VI. — Valeurs de κ, k et γ_c en fonction de n et $1/n$.

[Values of κ, k and γ_c fonctions of n and $1/n$.]

$1/n$	n	κ	k	γ_c
—	—	—	—	—
0,1	10	0,9802	100	15,8650
0,2	5	0,9231	25	8,1681
0,25	4	0,8829	16	6,6759
0,3333	1,5	0,8846	2,25	3,4034

Les figures 21 et 22, 23 montrent l'évolution en fonction de k des composantes I_{ii} du tenseur source d'anisotropie et des composantes S_{ii} du tenseur anisotropie relative, à anisotropie intrinsèque r donnée. Les figures 24 et 25 illustrent l'évolution de la forme de l'ellipsoïde des susceptibilités relatives en fonction de k pour $r = 0,5$ (marqueur de type 1) et

Fig. 20a.

Fig. 20b.

[Evolution of GK as a function of γ for markers 1 (20a) and 2 (20b).]

$r = 3,0$ (marqueur de type 2). Pour cela nous avons étudié la variation des paramètres L , F , P .

La figure 26 illustre cette évolution dans le diagramme de Flinn. L'étude faite pour les valeurs de k voisines de 1 montre que la tangente à l'origine des deux courbes est bien la première bissectrice. Les figures 26a et 26b montrent respectivement la variation de GK en fonction de k pour les marqueurs 1 et 2.

4.2.6 Modèle de March considéré comme cas limite du précédent : marqueurs linéaires et planaires. —

Nous avons précisé ce point de vue dans l'annexe 2, nous nous bornerons dans ce qui suit à souligner les différences entre le modèle et sa limite.

- La rotation β des axes en fonction de γ s'obtient à partir d'une loi analytique simple. On a pour des marqueurs linéaires $\beta_L = \alpha$ et pour des marqueurs

Fig. 21. — Variation des composantes I_{ii} du tenseur source d'anisotropie en fonction du paramètre k . Pour $k = 1$: milieu isotrope, on a : $I_{11} = I_{22} = I_{33} = 1/3$.

[Variations of components I_{ii} of the anisotropy tensor as functions of k . For isotropic systems we have $k = 1$ and $I_{11} = I_{22} = I_{33} = 1/3$.]

Fig. 22. — Variation des composantes S_{ii} du tenseur de susceptibilité relative en fonction du paramètre k pour $r = 0,5$.

[Variations of components S_{ii} of the relative susceptibility tensor as functions of k for $r = 0.5$.]

Fig. 23. — Variation des composantes S_{ii} du tenseur de susceptibilité relative en fonction du parmètres k pour $r = 3,0$.
[variations of components S_{ii} of the relative susceptibility tensor as functions of k for $r = 3.0$.]

Fig. 24.

Fig. 25.

Figs. 24 et 25. — Variation de L , F , P en fonction du paramètre k pour $r = 0,5$ (Fig. 24) et pour $r = 3,0$ (Fig. 25).
[Variations of parameters L , F and P as functions of k for $r = 0.5$ (Fig. 24) and $r = 3.0$ (Fig. 25).]

Fig. 26. — Diagramme de Flinn relatif à l'évolution de S_{ii} en fonction de k pour les marqueurs 1 et 2, r valant respectivement 0,5 et 3,0. k varie de 1 à 100. La tangente à l'origine des deux courbes est suivant la première bissectrice.

[Flinn's diagram showing the evolution of S_{ii} as a function of k for markers 1 ($r = 0.5$) and 2 ($r = 3.0$). The parameter k varies from 1 to 100. The tangent common to both curves at the origin follows the first bisector.]

planaires $\beta_P = \beta_L + \pi/2 = \alpha + \pi/2$. Les figures 27 et 28 montrent l'évolution de β_L et β_P en fonction de γ .

• $\gamma_c = \pi / \sqrt{1 - \kappa^2}$ devient infini ; car $\kappa = \pm 1$.
 k croît de façon monotone avec γ (cf. Fig. 29) et devient infini en même temps que γ . L'orientation totale des marqueurs de March tend vers une limite qui n'est obtenue que pour une déformation infinie. Il n'y a plus d'états isotropes successifs au cours de la croissance de γ . C'est là la différence essentielle entre le modèle et sa limite.

La figure 30 montre l'évolution des I_{ii} en fonction de γ pour des marqueurs planaires. Pour des marqueurs linéaires I_{33} et I_{11} sont inversés. L'évolution des S_{ii} en fonction de γ est illustrée par les figures 31 et 32. Nous avons pris $r = 0,5$ pour les marqueurs linéaires (Fig. 31) et $r = 3,0$ pour les marqueurs planaires (Fig. 32). Nous avons déterminé pour ces mêmes marqueurs L , F et P en fonction de γ (cf. Figs. 33 et 34). L'évolution de la forme de l'ellipsoïde des S en fonction de γ dans le diagramme de Flinn est qualitativement analogue à celle de la figure 26. Les figures 35 et 36 montrent l'évolution de GK en fonction de k pour des marqueurs linéaires ($r = 0,5$) et planaires ($r = 3,0$). Les remarques que

Fig. 26a.

Fig. 26b.

Fig. 26a, b. — Evolution de GK en fonction de γ pour les marqueurs 1 (Fig. 26a) et 2 (Fig. 26b).
[Evolution of GK as a function of γ for markers 1 (26a) and 2 (26b).]

Fig. 27. — Modèle de March : évolution de $\beta_L = \alpha$ en fonction de γ .
[March's model : evolution of $\beta_L (= \alpha)$ as a function of γ .]

Fig. 28. — Modèle de March : évolution de $\beta_p = \alpha + \pi/2$ en fonction de γ .
[March's model : evolution of $\beta_p \left(= \alpha + \frac{\pi}{2} \right)$ as a function of γ .]

Fig. 29. — Modèle de March : évolution de $D_m = k$ en fonction de γ . D_m croît de façon monotone avec γ ; γ_c est ∞ .

[March's model : evolution of $D_m = k$ as a function of γ . D_m increases progressively with γ . γ_c is ∞ .]

Fig. 30. — Modèle de March : évolution des I_{ii} en fonction de γ pour des marqueurs planaires. Pour des marqueurs linéaires I_{33} et I_{11} sont inversés.

[March's model : evolution of I_{ii} as a function of γ for planar markers. For linear markers I_{33} and I_{11} are inversed.]

Fig. 31.

Fig. 32.

Figs. 31 et 32. — Modèle de March : évolution des S_{ii} en fonction de γ pour des marqueurs linéaires ($r = 0,5$) (Fig. 31) et pour des marqueurs planaires ($r = 3,0$) (Fig. 32).

[March's model : evolution of S_{ii} as a function of γ for linear markers ($r = 0.5$) (Fig. 31) and for planar markets ($r = 3.0$; Fig. 32).]

Fig. 33.

Fig. 34.

Figs. 33 et 34. — Modèle de March : évolution de L , F , P en fonction de γ pour des marqueurs linéaires ($r = 0,5$) (Fig. 33) et planaires ($r = 3,0$) (Fig. 34).

[March's model : evolution of L , F and P as a function of γ for linear markers ($r = 0.5$; Fig. 33) and planar markers ($r = 3.0$; Fig. 34).]

Fig. 35.

Fig. 36.

Figs. 35 et 36. — Modèle de March : évolution de GK en fonction de γ . Figure 35 : marqueurs linéaires $r = 0,5$; figure 36 : marqueurs planaires $r = 3,0$.

[March's model : evolution of GK as a function of γ for linear markers ($r = 0.5$; Fig. 35) and planar markers $r = 3.0$; Fig. 36).]

nous avons faites au paragraphe 4.2.4 sont également valables ici.

Pour conclure nous montrerons sur un exemple concret les différences entre le modèle et sa limite. Soit 2 marqueurs de rapport d'axes $n = 5$ et $1/n' = 0,2$. On pourrait être tenté par l'approximation de March. Le modèle donne pour $\gamma_c = 8,16$, $k = n^2 = 25$. Les angles α valent respectivement -90° et 0° . L'assimilation à des marqueurs linéaires et planaires donne pour $\gamma = \gamma_c$: $k = 68,70$, $\beta_L = 6,87^\circ$ et $\beta_P = 96,87^\circ$. Le modèle de March conduit à une orientation préférentielle beaucoup plus importante des marqueurs: $k_{\text{March}} = 2,74 k_{\text{modèle}}$. Les angles α et β diffèrent; mais dans des proportions moindres.

4.3 RETOUR AUX HYPOTHÈSES PHYSIQUES SERVANT DE BASE AU MODÈLE. — On considère une roche polyminérale comme un ensemble de p constituants dispersés dans une matrice déformable amagnétique ayant les propriétés d'un fluide visqueux. La granulométrie et les propriétés magnétiques de chaque constituant sont connues; il en est de même de leur proportion q_i telle que $\sum_1^p q_i = 1$. Chaque

minéral constitue un groupe de marqueurs; les différents groupes de marqueurs sont indépendants mécaniquement et magnétiquement. Le comportement d'un minéral s'obtient en considérant ce seul minéral dispersé dans la matrice amagnétique. On répète l'opération pour chacun des constituants, le comportement de la roche est alors celui d'un mélange, chaque comportement individuel étant pondéré par q_i . L'O.P.F. globale résultant de la déformation finie de la roche est caractérisée par la densité d'orientation $D(\theta, \varphi)$ qui est la somme pondérée des densités partielles relatives à chacun des p constituants. La susceptibilité relative ayant trait à chaque minéral est décrite par un tenseur de rang deux, la susceptibilité relative de la roche le sera par la somme pondérée de ces tenseurs.

Un tel point de vue suppose une connaissance exhaustive de la structure de la roche et des propriétés de ses constituants, ce qui est rarement le cas. Dans ce qui précède nous avons envisagé le cas d'un seul groupe de marqueurs dont les propriétés magnétiques son preon eran

l'apport magnétique des autres constituants. Cette approximation n'est pas toujours légitime et une approche plus réaliste consiste à assimiler l'ensemble des autres constituants à un milieu magnétique isotrope caractérisé par une susceptibilité χ que l'on affecte à la matrice. Pour cela on détermine la susceptibilité moyenne de la roche, on lui retranche la susceptibilité moyenne du groupe de marqueurs et la valeur ainsi obtenue est attribuée à χ . La susceptibilité relative que nous avons introduite pour éviter tout problème d'unités a une signification physique

simple; c'est la susceptibilité de la roche rapportée à la susceptibilité de cette dernière réduite en poudre. La susceptibilité moyenne de la roche n'est autre que celle de la poudre. Cette dernière approche néglige l'O.P.F. due à l'anisométrie des constituants autres que les marqueurs considérés. Elle néglige également leur anisotropie magnétique. L'étude que nous consacrons au cas d'un mélange de deux groupes de marqueurs permet de mieux saisir les conséquences de ces deux approximations.

5. Cas d'une roche dans laquelle il y a plusieurs marqueurs significatifs soumise à un cisaillement simple isovolume.

5.1 INTÉRÊT GÉOLOGIQUE. — L'analyse théorique du développement de la fabrique sous l'effet d'un cisaillement simple isovolume montre que l'orientation finale de l'ellipsoïde de fabrique caractérisé par l'angle α et les valeurs $\sqrt{\Lambda_i}$ de ses demi-axes dépendent fortement de la forme des marqueurs par l'intermédiaire du coefficient κ . Lors de l'évolution d'un système contenant deux ou plusieurs populations de marqueurs de formes différentes sous l'effet d'une déformation, il se développe pour chaque population une sous-fabrique qui lui est propre. Cette dernière est décrite par l'ellipsoïde de sous-fabrique correspondant. Ces fabriques sont dites hétéroaxiales car les ellipsoïdes qui les caractérisent ont des formes et des orientations différentes.

Le comportement magnétique d'un tel système, lors d'une évolution de ce type, sera différent de celui qu'il aurait eu s'il avait été soumis à une déformation coaxiale. En effet dans ce dernier cas les ellipsoïdes de sous-fabrique ont les mêmes axes.

La détermination du régime de déformation sous lequel a évolué une masse magmatique, localement ou dans son ensemble, est d'une grande importance en pétrologie structurale. La reconstruction précise d'un pluton n'est possible que si l'on connaît le régime de déformation, la symétrie et l'intensité de la déformation finie, ainsi que l'orientation des axes de déformation.

Ces quelques considérations justifient l'intérêt de l'étude que nous allons développer.

lité magnétique relative d'une roche contenant un seul type de marqueurs. Cas d'un cisaillement simple isovolume: expression de $[S_{ij}]$ dans $R(OXYZ)$: axes après déformation et de $[S'_{ij}]$ dans les axes initiaux $R'(OX'Y'Z')$. Symétries. — Avec les conventions faites en 4.1 les composantes de $[S_{ij}]$ s'écrivent dans $R(OXYZ)$:

$$S_{ii} = \frac{3}{2r+1} - \frac{3(r-1)}{2r+1} I_{ii},$$

pour des marqueurs de symétrie cylindrique et

$S_{ii} = \frac{K_3}{K} I_{ii}$ pour des marqueurs de symétrie monoclinique (i de 1 à 3). Il est de symétrie orthorhombique. Retour aux axes initiaux R' ($OX'Y'Z'$) liés au milieu non déformé. — On passe du repère (R') au repère (R) par une rotation α autour de OY' , dans le plan $Z'OX'$. La matrice de changement d'axes correspondante est :

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

La relation générale de passage d'un tenseur $[T_{kl}]$, exprimé dans (R), dans le repère (R') s'écrit : $[T'_{ij}] = a_{ik} a_{jl} [T_{kl}]$; a_{ik} et a_{jl} étant les éléments de la matrice de changements d'axes. On obtient :

$$[S'_{ij}] = \begin{bmatrix} S'_{11} & 0 & S'_{13} \\ 0 & S'_{22} & 0 \\ S'_{31} & 0 & S'_{33} \end{bmatrix};$$

avec :

$$[S'_{ij}]^T = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha (S_{11} + \chi) + \sin^2 \alpha (S_{33} + \chi) & 0 & -\cos \alpha \sin \alpha (S_{11} - S_{33}) \\ 0 & S_{22} + \chi & 0 \\ -\cos \alpha \sin \alpha (S_{11} - S_{33}) & 0 & \sin^2 \alpha (S_{11} + \chi) + \cos^2 \alpha (S_{33} + \chi) \end{bmatrix}.$$

5.1.2 Tenseur décrivant l'anisotropie de la susceptibilité relative d'une roche contenant un mélange de deux marqueurs dans les proportions p et q . Cas où la matrice n'est pas magnétique. — Chaque marqueur est caractérisé dans le repère (R) par un tenseur $[S_{ij}]$ et dans (R') par $[S'_{ij}]$. Soit p et q les proportions respectives des marqueurs 1 et 2 dans le mélange étudié. On a $p + q = 1$.

5.1.2.1 Le tenseur somme caractérisant le mélange. — $[S'_{ij}]^1$ et $[S'_{ij}]^2$ étant exprimés dans les mêmes axes on peut définir le tenseur somme caractérisant le mélange. On a :

$$\begin{cases} [S'_{ij}]^{(1+2)} = p [S'_{ij}]^1 + q [S'_{ij}]^2 \\ p + q = 1. \end{cases}$$

Le tenseur somme a la même symétrie que les tenseurs $[S'_{ij}]^1$ et $[S'_{ij}]^2$, c'est-à-dire la symétrie monoclinique.

Les composantes de $[S'_{ij}]^{(1+2)}$ s'obtiennent en sommant celles de $[S'_{ij}]^1$ et $[S'_{ij}]^2$, pondérées respectivement par p et q . On a :

$$S'_{11}{}^{(1+2)} = p \{ \cos^2 \alpha_1 S_{11}^1 + \sin^2 \alpha_1 S_{33}^1 \} + q \{ \cos^2 \alpha_2 S_{11}^2 + \sin^2 \alpha_2 S_{33}^2 \}$$

$$\begin{cases} S'_{11} = \cos^2 \alpha S_{11} + \sin^2 \alpha S_{33} \\ S'_{33} = \sin^2 \alpha S_{11} + \cos^2 \alpha S_{33} \\ S'_{13} = S'_{31} = -\sin \alpha \cos \alpha S_{11} + \cos \alpha \sin \alpha S_{33} \\ \quad = 1/2 \sin 2 \alpha [S_{33} - S_{11}]. \end{cases}$$

S'_{ij} est de symétrie monoclinique ; on retrouve les symétries du cisaillement simple.

Nous allons envisager maintenant le cas d'une matrice isotrope diamagnétique ou paramagnétique.

Matrice isotrope diamagnétique ou paramagnétique.

— On a :

$$[\chi_{ij}^M] = \begin{bmatrix} \chi & & \\ & \chi & \\ & & \chi \end{bmatrix}.$$

Dans le repère R la susceptibilité totale a pour expression :

$$[S_{ij}] + [\chi_{ij}^M] = \begin{bmatrix} S_{11} + \chi & & \\ & S_{22} + \chi & \\ & & S_{33} + \chi \end{bmatrix} = [S_{ij}^T].$$

Dans (R') il vient :

$$\begin{aligned} S'_{22}{}^{(1+2)} &= p S'_{22}{}^1 + q S'_{22}{}^2 \\ S'_{33}{}^{(1+2)} &= p \{ \sin^2 \alpha_1 S_{11}^1 + \cos^2 \alpha_1 S_{33}^1 \} + q \{ \sin^2 \alpha_2 S_{11}^2 + \cos^2 \alpha_2 S_{33}^2 \} \\ S'_{13}{}^{(1+2)} &= S'_{31}{}^{(1+2)} = p \{ -\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 (S_{11}^1 - S_{33}^1) \} + q \{ -\sin \alpha_2 \cos \alpha_2 (S_{11}^2 - S_{33}^2) \}. \end{aligned}$$

5.1.2.2 Diagonalisation du tenseur somme par la méthode du cercle de Mohr, axes propres et valeurs propres. — La symétrie monoclinique du tenseur $[S'_{ij}]^{(1+2)}$ résultant des éléments de symétrie du

cisaillement simple fait que cette méthode est ici particulièrement bien adaptée (cf. [30], p. 44 à 47). Les axes propres se déduisent de (R') par une rotation autour de OY' dans le plan $Z'OX'$.

Les valeurs propres de $[S'_{ij}]^{(1+2)}$ sont données par la relation :

$$\begin{aligned} S_{11}^{1+2} &= 1/2 (S'_{11}{}^{(1+2)} + S'_{33}{}^{(1+2)}) - r_M \\ S_{22}^{1+2} &= S'_{22}{}^{(1+2)} \\ S_{33}^{1+2} &= 1/2 (S'_{11}{}^{(1+2)} + S'_{33}{}^{(1+2)}) + r_M \\ r_M^2 &= 1/4 (S'_{33}{}^{(1+2)} - S'_{11}{}^{(1+2)}) + S'_{13}{}^{(1+2)}. \end{aligned}$$

L'axe propre OY est parfaitement défini, il coïncide avec OY' . Les deux autres sont dans le plan $Z'OX'$; mais on peut choisir arbitrairement X et Z (cf. [30], p. 167); l'angle ψ dont ont tourné les axes est défini à $\pi/2$ près. Ce dernier est donné par la relation :

$$\operatorname{tg} 2 \psi = \frac{2 S_{13}^{\prime(1+2)}}{S_{33}^{\prime(1+2)} - S_{11}^{\prime(1+2)}}.$$

Nous reviendrons sur cette indétermination et les conséquences qu'elle entraîne à propos d'un exemple concret.

5.1.3 Etude d'un cas particulier. Résultats. — Nous avons étudié un mélange de deux marqueurs du type $K_1 = K_2 \neq K_3$, ayant les caractéristiques suivantes :

marqueur 1 : $n = 1,5$, $K_3 = 2 K_1$, $r = 0,5$;
marqueur 2 : $n = 0,2$, $K_1 = 3,0 K_3$, $r = 3,0$.

Les proportions respectives de ces derniers sont p et q , avec $p + q = 1$. Pour les trois mélanges envisagés M_1, M_2, M_3 ⁽³⁾ on a : $p = 0,75$; $0,5$; $0,25$. La matrice est supposée non magnétique. Les valeurs critiques de γ sont respectivement $\gamma_c^1 = 3,40$ et $\gamma_c^2 = 8,16$. Nous avons fait l'étude pour γ compris entre 0 et 17,5, cette dernière valeur étant légèrement supérieure à $2 \gamma_c^2$.

5.1.3.1 Les susceptibilités relatives parallèles au champ, leur évolution en fonction de γ . Définition du marqueur équivalent au mélange de deux marqueurs. — Nous avons déterminé pour chaque marqueur, en fonction de γ , les tenseurs $[S_{ij}]$ et $[S'_{ij}]$ ainsi que les rotations α correspondantes (cf. Figs. 16, 17, 12, 13). Pour chaque mélange nous avons exprimé les tenseurs somme $[S_{ij}^{\prime(1+2)}]$ et $[S_{ij}^{(1+2)}]$. A partir de ces valeurs nous avons défini le marqueur équivalent au mélange. Il peut être du type 1 : $S_1 < S_2 < S_3$ ou du type 2 : $S_1^* > S_2^* > S_3^*$. On a de plus : $S_1^* = S_3$; $S_3^* = S_1$. Les rotations correspondantes sont alors ψ et ψ^* , avec $\psi^* = \psi - 90^\circ$. Ces deux interprétations résultent de l'indétermination due à la symétrie monoclinique (cf. 5.1.2.2). La figure 37 montre l'évolution de $S_{ii} = S_i$ en fonction de γ pour les mélanges M_1, M_2, M_3 en termes de marqueurs du type 1. Pour les valeurs de γ croissantes envisagées on passe par γ_c^1 , $2 \gamma_c^1$, γ_c^2 , $3 \gamma_c^1$, $4 \gamma_c^1$, $2 \gamma_c^2$. Les marqueurs 1 passent par les isotropies d'ordre 2 et 3 alors que les marqueurs 2 atteignent et dépassent l'isotropie d'ordre 2 (cf. Figs. 16 et 17). Pour $\gamma = 2 \gamma_c^1$, $4 \gamma_c^1$ la répartition des marqueurs 1 est isotrope, il en résulte que le marqueur équivalent est du type 2. On a alors $S_1^* > S_2^* > S_3^*$ et la rotation est définie par ψ^* . Pour $\gamma = 2 \gamma_c^2$ la répartition des marqueurs 2

Fig. 37. — Evolution des $S_{ii} = S_i$ en fonction de γ pour les mélanges M_1, M_2, M_3 . Les résultats sont exprimés en termes de marqueurs équivalents du type 1.

[Evolution of the $S_{ii} = S_i$ as a function of γ for mixtures M_1, M_2 and M_3 .]

⁽³⁾ Nous avons également utilisé sur certaines figures la notation : ME 1, ME 2, ME 3 au lieu de M_1, M_2, M_3 .

Fig. 38. — Evolution de ψ en fonction de γ pour les mélanges M_1 , M_2 , M_3 . ψ est la rotation des axes propres du tenseur somme $[S_{ij}^{1+2}]$ par rapport aux axes initiaux ayant servi à définir le cisaillement. Les résultats sont exprimés en termes de marqueurs équivalents du type 1.

[Evolution of ψ as a function of γ for mixtures M_1 , M_2 and M_3 . ψ gives the angular rotation of the eigenvectors of the bulk addition tensor $[S_{ij}^{1+2}]$ relative to the initial axes.]

est alors isotrope ce qui entraîne que le marqueur équivalent est le type 1, soit $S_1 < S_2 < S_3$, la rotation étant décrite par l'angle ψ .

5.1.3.2 Rotation des axes pour les mélanges de marqueurs M_1 , M_2 , M_3 . — La figure 38 montre la rotation $\psi(\gamma)$ des axes propres du tenseur somme $[S_{ij}^{1+2}]$ par rapport aux axes initiaux ayant servi à définir le cisaillement. On envisage ici des marqueurs équivalents du type 1. Pour des marqueurs équivalents du type 2, $\psi^*(\gamma)$ est identique à $\psi(\gamma)$ à condition de décaler l'origine des ψ de -90° .

Les points A, B, C communs aux trois courbes de mélange correspondent respectivement à $2\gamma_c^1$, $4\gamma_c^1$, $2\gamma_c^2$. Le marqueur équivalent est alors du type 2 ou 1. La rotation correspondante est $\alpha_1(\gamma)$ ou $\alpha_2(\gamma)$ pour ces mêmes valeurs de γ .

Le point D correspond à l'intersection de la courbe $\alpha_1(\gamma)$ avec les courbes $\psi(\gamma)$ relatives aux mélanges. C'est également le point d'intersection de $\alpha_2(\gamma)$ avec $\psi^*(\gamma)$. Les valeurs de γ satisfaisant à $\psi(\gamma) = 0$ ou $\psi^*(\gamma) = -90^\circ$ sont celles pour lesquelles (R) et (R') coïncident. Il est alors impossible de faire la distinction entre un cisaillement simple isovolume et une déformation plane isovolume.

5.1.3.3 Paramètres caractérisant la forme de l'ellipsoïde des susceptibilités relatives des mélanges. Linéation et foliation magnétique (L , F); anisotropie magnétique totale (P). — L'évolution des paramètres L , F , P est indépendante du choix du type de marqueur équivalent. La figure 39 montre cette évolution en fonction de γ . Deux remarques préliminaires permettent de mieux comprendre l'apparente complexité des résultats relatifs aux mélanges. Les marqueurs du type 2 ont une plus grande anisotropie magnétique que celle des marqueurs du type 1. Il en est de même de leur anisométrie. Le rôle prépondérant des marqueurs du type 2 est occulté en partie par la facilité avec laquelle tournent les marqueurs du type 1.

L'examen de la figure 39 et la comparaison avec les figures 18 et 19 montrent une évolution globale simple de la foliation et de l'anisotropie totale. Il y a une influence croissante des marqueurs 2 de M_1 à M_3 et une déformation progressive des courbes représentatives de F et P , qui sont comprises entre celles qui ont trait aux marqueurs 1 et 2. Le caractère périodique des grandeurs relatives aux marqueurs 1 s'estompe quand le pourcentage de marqueurs 2 augmente.

Fig. 39. — Evolution de L , F , P en fonction de γ pour les mélanges M_1 , M_2 , M_3 .

[Evolution of L , F and P as a function of γ for mixtures M_1 , M_2 and M_3 .]

L'évolution de la linéation est plus complexe et traduit encore le caractère prépondérant des marqueurs 2. Il peut paraître surprenant que la linéation magnétique des marqueurs 2 seuls soit supérieure à celle des marqueurs 1 seuls. Le tenseur $[S_{ij}]$ se déduisant du tenseur $[I_{ij}]$ par la relation linéaire :

$$S_{ii} = \frac{3r}{2r+1} - \frac{3(r-1)}{2r+1} I_{ii}$$

et les valeurs numériques de r et des I_{ii} relatives aux marqueurs 1 et 2 étant différentes, il n'est pas exclu que l'on ait $L_2 > L_1$ (cf. Figs. 18 et 19). Cette remarque étant faite, l'évolution de L relative aux mélanges $M_1 M_2 M_3$ est logique ; elle traduit simplement l'influence croissante des marqueurs 2 de M_1 à M_3 .

Les marqueurs 1 tournant beaucoup plus vite que les marqueurs 2, peuvent atteindre des angles d'ordre supérieur bien avant que l'on ait atteint $2\gamma_c^2$. Il en résulte que l'interprétation des graphes n'est simple que si la variation de γ est telle que l'on ait : $0 < \gamma < 2\gamma_c^1$. S'il n'en est pas ainsi on a pour une valeur déterminée des paramètres L , F , P un grand nombre de valeurs de γ possibles et au-delà de $2\gamma_c^2$ la situation devient inextricable. Il en est d'ailleurs de même des valeurs de ψ et ψ^* (cf. Fig. 38). Par contre si l'on se borne à des cisaillements pas trop importants $0 < \gamma < \gamma_c^1$, à chaque valeur des paramètres correspond une seule valeur

de γ . Si $0 < \gamma < 2\gamma_c^1$ on a au maximum deux solutions. Il en est de même pour la rotation des axes. La figure 40 montre l'évolution de GK en fonction de γ pour les marqueurs 1 et 2 et pour les mélanges M_1 , M_2 , M_3 .

5.1.4 Comparaison du modèle avec l'expérience. Détermination de l'amplitude et des éléments de symétrie du cisaillement simple. — On suppose que les caractéristiques magnétiques des marqueurs et de la matrice sont connues. Une étude préalable permet de déterminer n_1 , n_2 , p . Le modèle permet de calculer : $L(\gamma)$, $F(\gamma)$, $P(\gamma)$, $\psi(\gamma)$.

On détermine le tenseur $[S_{ij}]$ dans un système d'axes liés à l'échantillon, en tenant compte si cela est nécessaire des propriétés magnétiques de la matrice. Les axes étant quelconques par rapport aux axes propres de $[S_i]$ on a en général six composantes non nulles. On diagonalise la matrice $[S_{ij}]$. Les valeurs propres sont les susceptibilités relatives principales S_1 , S_2 , S_3 . Les vecteurs propres permettent de déterminer les axes propres. L'axe correspondant à la valeur intermédiaire des S est l'axe OY' , le plan défini par les deux autres est le plan de cisaillement $Z'OX'$. La détermination des paramètres L , F , P permet de remonter à γ et à ψ ou ψ^* . On peut donc déterminer les éléments de symétrie du cisaillement simple et son amplitude. Il reste l'indétermination sur ψ qui est une conséquence de la symétrie monoclinique. Cette détermination suppose que les

Fig. 40. — Evolution de GK en fonction de γ pour les marqueurs 1 et 2 et pour les mélanges M_1 , M_2 , M_3 .

[Evolution of GK as a function of γ for markers 1 and 2 and for mixtures M_1 , M_2 and M_3 .]

conditions discutées au paragraphe précédent (5.1.3.3) soient remplies.

5.1.5 Quelques remarques concernant l'application du modèle au cas des roches magmatiques acides. —

Le premier point concerne les propriétés magnétiques des minéraux contenus dans ce type de roches et qui seront utilisés comme marqueurs. L'examen des données disponibles montre qu'elles sont relativement peu nombreuses, souvent anciennes et dépendent beaucoup de l'origine des minéraux. On peut avec les techniques actuelles mesurer l'anisotropie de la susceptibilité magnétique de monocristaux d'un volume relativement faible ($\sim 10 \text{ mm}^3$) avec une précision suffisante. De telles déterminations sont indispensables pour la biotite, la muscovite, les amphiboles et la tourmaline ; l'origine des monocristaux mesurés étant la même que celle des roches étudiées.

Le second concerne le choix des marqueurs significatifs. Ce dernier suppose une bonne connaissance de la granulométrie de la roche et des propriétés magnétiques de tous ses constituants.

Le troisième point a trait à l'intérêt de l'étude des mélanges (cf. 5.1.3) ; nous en donnerons deux exemples. Le premier est celui des granitoïdes appartenant à la lignée calcoalcaline dans lesquels on rencontre à la fois biotite et amphibole. Ces deux minéraux peuvent apparaître en proportions élevées

dans les diorites, diorites quartziques et les tonalites (20 à 35 %). Ce fait justifie l'étude du comportement de systèmes à deux marqueurs, et en particulier le choix de ces derniers comme marqueurs significatifs. Leurs caractéristiques cristallographiques en font deux marqueurs de type opposé : l'amphibole est un marqueur allongé, la biotite un marqueur plat. Les observations pétrographiques montrent d'ailleurs que dans les roches plutoniques calcoalcalines de composition intermédiaire, l'amphibole se développe généralement en prismes courts tandis que la biotite présente toujours des cristaux plats de rapport axial inférieur à $1/3$. Dans la modélisation, nous ne prendrons pas en compte les modifications de texture résultant de phénomènes réactionnels (transformation pyroxène-amphibole), ni la formation d'aggrégats. Les valeurs du rapport d'allongement choisies pour les marqueurs 1 et 2 (cf. 5.1.3) correspondent à des cas fréquents.

Le second concerne les granites leucocrates contenant à la fois de la tourmaline et de la muscovite. Ces deux constituants peuvent être pris comme marqueurs significatifs. La tourmaline se présente sous forme de grains allongés suivant l'axe c qui est un axe de susceptibilité minimale. La muscovite est un marqueur aplati analogue à la biotite, la susceptibilité minimale étant suivant l'axe c' perpendiculaire au plan de clivage. Cette situation diffère du point

de vue magnétique du cas des mélanges d'amphibole et de biotite. Les grains d'amphibole sont allongés suivant l'axe c qui est un axe de susceptibilité maximale. Le traitement quantitatif du premier cas nécessite la prise en compte du caractère monoclinique de l'amphibole alors que pour le second l'hypothèse $K_1 = K_2 \neq K_3$ est rigoureuse.

Pour illustrer notre propos considérons des marqueurs du type 1 ($n = 1,5$) constitués par une amphibole (hornblende) pour laquelle le tenseur $[K_{ij}]$ a les valeurs indiquées sur le tableau VII [32]. Comme K_1 et K_2 ne diffèrent que $\sim 12\%$ et que K_{13} n'intervient pas dans le résultat final on peut être tenté de faire l'approximation $K_1 = K_2 \neq K_3$. Cette dernière donne cependant des résultats très différents du calcul correct prenant en compte la symétrie monoclinique. Les grandeurs qui nous intéressent sont périodiques en γ , de période $2\gamma_c$. Elles sont maximales ou minimales pour $\gamma = \gamma_c$. Il en résulte

que pour avoir l'amplitude maximale de leur variation il suffit de considérer les deux valeurs $\gamma = 0$ et $\gamma = \gamma_c$. Le tableau VII résume les résultats obtenus. On a toujours $S_1 < S_2 < S_3$; mais l'amplitude de variation des S est beaucoup plus faible dans le cas de l'approximation cylindrique que dans celui où l'on prend en compte la symétrie monoclinique. Ceci est dû à l'importance du terme $\frac{K_1}{\bar{K}} (1 - I_{ii})$ comparée

à celle de $\frac{K_3}{\bar{K}} I_{ii}$ (cf. 3.8). Il en est de même des

grandeurs L , F , P et GK . Pour des marqueurs de symétrie cylindrique on a une linéation magnétique supérieure à la foliation magnétique. Il en va différemment pour une symétrie monoclinique. F est alors supérieur à L , bien que l'ellipsoïde des K soit un ellipsoïde allongé.

Tableau VII. — Amplitude des variations des grandeurs S_{ii} , L , F , P , GK pour un marqueur du type 1 ($n = 1,5$) quand γ varie de 0 à γ_c . Cas d'une hornblende de symétrie monoclinique : calcul rigoureux et approximation $K_1 = K_2 \neq K_3$.

[Amplitudes of variations of quantities S_{ii} , L , F , P , GK for a type 1 marker ($n = 1.5$) when γ varies from 0 to γ_c . Case of a hornblende with monoclinic symmetry : rigorous results and approximation $K_1 = K_2 \neq K_3$.]

Symétrie cylindrique $K_1 = K_2 \neq K_3$							Symétrie monoclinique $K_1 \neq K_2 \neq K_3 ; K_{13}$		
γ	I_{11}	I_{22}	I_{33}	S_1	S_2	S_3	S_1	S_2	S_3
0	1/3	1/3	1/3	1	1	1	1	1	1
$\gamma_c = 3,403$	0,187	0,315	0,497	1,005	1,033	1,072	0,221	0,372	0,586

Symétrie cylindrique					Symétrie monoclinique			
γ	L	F	P	GK	L	F	P	GK
0	1	1	1	1	1	1	1	1
$\gamma_c = 3,403$	1,038	1,027	1,066	1,384	1,577	1,683	2,654	0,838

	$10^6 K_1$	$10^6 K_2$	$10^6 K_3$	$10^6 K_{13}$	$10^6 \bar{K}$	
Hornblende monoclinique	73,5	63,3	89,8	7,83	76,2	
Approximation cylindrique $K_1 = K_2 \neq K_3$		$10^6 K_1$ 73,5	$10^6 K_3$ 89,8	$\bar{K}$ 76,2	r 1,222	Les K sont en unité SI

6. Conclusion.

Dans les deux cas étudiés la relation entre la déformation finie d'une roche et son A.S.M. résultant de l'O.P.F. de marqueurs paramagnétiques anisotropes revêt une forme analytique particulièrement simple. La susceptibilité magnétique de la roche déformée est celle d'un milieu linéaire décrit par un tenseur de rang deux. C'est une conséquence des propriétés magnétiques intrinsèques des marqueurs.

Pour la déformation coaxiale isovolumique de révolution d'un ensemble de marqueurs identiques de caractéristiques données, il y a correspondance biunivoque entre les grandeurs découlant du modèle : R , a_{ms} et la déformation finie λ_3 . Il en résulte que la comparaison du modèle avec l'expérience est relativement aisée.

Le cisaillement simple isovolume conduit à une situation plus complexe. Le caractère périodique des grandeurs résultant du modèle : α , k , a_{ms} ... fait qu'à une valeur déterminée de l'une d'elles correspondent

plusieurs valeurs de γ . Ceci est dû au fait que quand on fait croître γ , une population déterminée de marqueurs peut passer par des stades d'isotropie successifs distants de $2\gamma_c$. Pour avoir une seule solution on doit se borner à $0 < \gamma < \gamma_c$; par ailleurs γ_c est d'autant plus faible que la forme du marqueur se rapproche de celle d'une sphère. Il y a là une limitation de l'utilisation du modèle pour la détermination de l'amplitude d'un cisaillement à partir de mesures magnétiques. En ce qui concerne le cas d'une roche contenant deux types de marqueurs significatifs la situation la plus simple est celle où ils sont suffisamment allongés ou aplatis de manière à ce que leurs γ_c soient importants et différents. S'il n'en est pas ainsi, c'est le marqueur qui tourne le plus vite qui impose les valeurs de γ où le modèle est utilisable simplement. Les choses seraient grandement facilitées si nous disposions d'un critère permettant d'affirmer que la rotation de tel ou tel marqueur correspond à des cisaillements entraînant des O.P.F. comprises entre l'isotropie et l'isotropie d'ordre deux.

Il est très important de ne pas perdre de vue, dans l'utilisation de l'A.S.M. comme outil d'analyse structurale, qu'il n'y a pas similitude entre fabrique magnétique et fabrique structurale. La relation liant l'une et l'autre est le fait d'un modèle. Toute interprétation, même qualitative, des corrélations observées entre fabrique magnétique et fabrique structurale nécessite l'élaboration d'un modèle. La représentation dans le diagramme de Flinn des résultats relatifs au cisaillement simple isovolume illustre bien ce propos.

Un certain nombre de roches, en particulier les roches magmatiques acides, ont une constitution et des mécanismes d'orientation préférentielle qui sont ceux que nous avons envisagés. Dès lors une étude conjointe de leurs propriétés magnétiques et structurales peut constituer un bon test de validité du modèle proposé.

DÉVELOPPEMENTS ET LIMITATIONS DU MODÈLE. — Ce qui a été dit pour des marqueurs paramagnétiques anisotropes est une conséquence d'un comportement magnétique décrit par un tenseur de rang deux. C'est le cas de marqueurs présentant certains processus d'aimantation réversibles tels que la susceptibilité initiale d'un ensemble de grains fins allongés dont l'anisotropie de forme est prépondérante, ou encore la susceptibilité réversible d'un ensemble de grains suivant une loi de Rayleigh (cf. [27]). Ceci s'applique également à un ensemble de marqueurs allongés de rapport n pas trop grand ($n < 10$), ayant une structure magnétique de « polydomaines idéaux ». En effet leur susceptibilité en champ faible s'approxime bien par un tenseur de rang 2 (cf. [27]).

En ce qui concerne les aimantations rémanentes (ARIS, ARISD, ATR, ATRD) telles qu'elles ont été définies en [27] il est toujours possible de faire le

calcul des indicatrices point par point comme on l'a fait pour une déformation coaxiale. Par contre il ne sera pas en général possible, pour ces diverses grandeurs, de définir un milieu linéaire caractérisé par un tenseur de rang 2. Le problème de la rotation des axes reste similaire et ce que nous en avons dit s'applique intégralement. Par contre dans ce dernier cas la comparaison du modèle avec l'expérience et la détermination de l'amplitude et des éléments de symétrie du cisaillement simple initial est beaucoup moins évidente.

Il y a une part d'arbitraire dans la démarche permettant de modéliser une roche polyminérale. L'optimisation du choix des marqueurs significatifs sera grandement facilitée par une bonne connaissance de la minéralogie magnétique de la roche.

On oublie trop souvent que l'utilisation du modèle mécanique implique la validité des hypothèses qui sont à la base des équations de Jeffery. Par ailleurs on néglige les interactions mécaniques entre marqueurs. Ce dernier point a été discuté par Fernandez.

On néglige également les interactions magnétiques entre grains, ce qui est légitime pour des marqueurs paramagnétiques; mais qui peut l'être moins pour des grains ferromagnétiques ou ferrimagnétiques. Il peut y avoir localement des interactions non négligeables. Enfin ce type de modèle, comme celui décrit en [27] dont il est le développement d'un cas particulier, ignore les interactions magnétoélastiques. Ces dernières peuvent jouer un rôle en présence de tensions internes et de marqueurs magnétostrictifs dans la roche.

Remerciements.

L'un de nous : R. Vergne, remercie J. Pierre et J. C. Cotillard pour leur aide dans le domaine de l'informatique. Cette dernière lui a grandement facilité l'acquisition et la présentation des résultats numériques. Il remercie également J. L. Porteseil.

Annexe 1

Calcul des composantes du tenseur $[I_{ij}]$.

1. DÉFORMATION COAXIALE DE RÉVOLUTION ISO-VOLUMIQUE. — Les composantes du tenseur $[I_{ij}]$ s'obtiennent à partir des trois intégrales doubles ci-dessous :

$$\begin{cases} I_{11} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} D(\theta, \varphi) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \times \\ \quad \times \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ I_{22} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} D(\theta, \varphi) \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \times \\ \quad \times \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ I_{33} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} D(\theta, \varphi) \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi . \end{cases}$$

La densité $D(\theta, \varphi)$ a pour expression :

$$D(\theta, \varphi) = \left\{ k \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{1}{k} \cos^2 \theta \right\}^{-3/2}.$$

On a trois possibilités pour le paramètre k : $k = 1$; $k > 1$; $k < 1$.

La première correspond au cas du milieu isotrope ; l'intégration donne :

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = 1/3.$$

La seconde s'applique à tous les marqueurs à l'exclusion des marqueurs planaires pour lesquels $k < 1$.

L'intégration sur θ ne présente pas de difficultés (cf. [31], p. 81 à 83 et p. 86). On pose $a = k \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi$, $c = 1/k - k \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$, ce qui entraîne $a > 0$, $c < 0$ si $k > 1$. c peut devenir positif si $k < 1$. On obtient :

$$\begin{cases} I_{11} = \int_0^{2\pi} F_1(k, \varphi) d\varphi \\ I_{22} = \int_0^{2\pi} F_2(k, \varphi) d\varphi \\ I_{33} = \int_0^{2\pi} F_3(k, \varphi) d\varphi. \end{cases}$$

F_1, F_2, F_3 ont pour expression si $k > 1$:

$$F_1 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{k}}{a} - F_3 \right\} \cos^2 \varphi$$

$$F_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{k}}{a} - F_3 \right\} \sin^2 \varphi$$

$$F_3 = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sqrt{k}}{c} + (-c)^{-3/2} \operatorname{Arcsin} \left\{ \frac{-c}{a} \right\}^{1/2} \right\}.$$

Si $k < 1$ et $c > 0$ les nouvelles valeurs de F_1, F_2, F_3 s'obtiennent en remplaçant F_3 par F'_3 ; avec :

$$F'_3 = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sqrt{k}}{c} + (c)^{-3/2} \operatorname{Ln} \left\{ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c} + \sqrt{c+a}} \right\} \right\}.$$

L'intégration sur la variable φ n'est pas évidente.

intéressons plus aux valeurs des I_{ij} qu'à leurs expressions analytiques nous avons effectué une intégration numérique par la méthode Simpson à partir des expressions de F_1, F_2, F_3 .

2. DÉFORMATION COAXIALE PLANE ISOVOLUME. — La densité $D(\theta, \varphi)$ a pour expression :

$$D(\theta, \varphi) = \left\{ k' \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \frac{1}{k'} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \right\}^{-3/2}.$$

On pose :

$$c = -k' \cos^2 \varphi - \frac{1}{k'} \sin^2 \varphi + 1$$

$$a = k' + \frac{1}{k'};$$

k' est toujours positif.

L'intégration sur θ est analogue à celle que nous avons effectuée dans le cas précédent. Seules diffèrent les valeurs de F_1, F_2, F_3 .

On obtient :

$$F_1 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a \sqrt{c+a}} - F_3 \right\} \cos^2 \varphi$$

$$F_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a \sqrt{c+a}} - F_3 \right\} \sin^2 \varphi.$$

L'expression de F_3 dépend du signe de c ; on a :

$$\begin{aligned} c > 0 \quad F_3^+ &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{c \sqrt{c+a}} + \frac{1}{c \sqrt{c}} \operatorname{Ln} \left\{ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c} + \sqrt{c+a}} \right\} \right\} \\ c < 0 \quad F_3^- &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{c \sqrt{c+a}} - \frac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{Arcsin} \left\{ \sqrt{\frac{-c}{a}} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

L'intégration sur φ n'est pas évidente. On peut effectuer une intégration numérique par la méthode de Simpson avec un test sur le signe de c .

3. DÉFORMATION COAXIALE ISOVOLUME QUELCONQUE. — La densité $D(\theta, \varphi)$ s'écrit :

$$D(\theta, \varphi) = \left\{ \Lambda'_1 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \Lambda'_2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \Lambda'_3 \cos^2 \theta \right\}^{-3/2}.$$

On pose :

$$c = \Lambda'_3 - \Lambda'_1 \cos^2 \varphi - \Lambda'_2 \sin^2 \varphi$$

$$a = \Lambda'_1 + \Lambda'_2.$$

Le calcul est analogue à celui que nous avons développé en 2. Seules changent les valeurs de c et de a .

Annexe 2

Le modèle de March considéré comme un cas limite du modèle développé par Fernandez ; marqueurs linéaires et planaires.

1. RAPPEL DE QUELQUES RÉSULTATS RELATIFS AU MODÈLE DE MARCH [26]. — On considère les marqueurs passifs, c'est-à-dire des marqueurs dont

la viscosité est identique à celle de la matrice. March a montré que la densité d'orientation développée par des marqueurs linéaires est proportionnelle au cube du rayon vecteur de l'ellipsoïde de déformation finie, alors que celle qui est relative à des marqueurs planaires s'obtient de la même façon à partir du rayon vecteur de l'ellipsoïde inverse. Ces deux ellipsoïdes ont pour équation :

$$\begin{aligned} 1/\rho^2 &= \lambda_1' \ell^2 + \lambda_2' m^2 + \lambda_3' n^2 \\ 1/\rho_i^2 &= \lambda_1 \ell^2 + \lambda_2 m^2 + \lambda_3 n^2; \end{aligned}$$

ℓ, m, n étant les cosinus directeurs de la direction du rayon vecteur ρ . Les λ_i sont les elongations quadratiques et l'on a : $\lambda_i' = 1/\lambda_i$.

Il vient en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} 1/\rho^2 &= \lambda_1' \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \lambda_2' \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \lambda_3' \cos^2 \theta \\ 1/\rho_i^2 &= \lambda_1 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \lambda_3 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

2. APPLICATION AU CAS D'UNE DÉFORMATION COAXIALE DE RÉVOLUTION ISOVOLUME. — Une telle déformation est caractérisée par :

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \quad \text{et} \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1.$$

L'ellipsoïde de déformation finie est de révolution autour de OZ et a pour équation :

$$1/\rho^2 = \sqrt{\lambda_3} \sin^2 \theta + \frac{1}{\lambda_3} \cos^2 \theta.$$

Celle de l'ellipsoïde inverse s'écrit :

$$1/\rho_i^2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \sin^2 \theta + \lambda_3 \cos^2 \theta.$$

Les densités d'orientation développées par des marqueurs linéaires et planaires s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} D_L(\theta) &= \left\{ \sqrt{\lambda_3} \sin^2 \theta + \frac{1}{\lambda_3} \cos^2 \theta \right\}^{-3/2} \\ D_P(\theta) &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \sin^2 \theta + \lambda_3 \cos^2 \theta \right\}^{-3/2}. \end{aligned}$$

Ces deux expressions sont de la forme :

$$D(\theta) = \left\{ \sqrt{k} \sin^2 \theta + \frac{1}{k} \cos^2 \theta \right\}^{-3/2}.$$

3. APPLICATION AU CAS D'UN CISAILLEMENT SIMPLE ISOVOLUME. — Soit un repère $R'(OX'Y'Z')$ lié au milieu non déformé ; on envisage un cisaillement simple isovolume d'amplitude γ dirigé suivant OZ'. Ce dernier est équivalent à une déformation plane isovolume définie dans un repère $R(OXYZ)$

et caractérisée par $\lambda_1^* \neq \lambda_3^*, \lambda_2^* = 1$. Le volume étant conservé on a de plus $\lambda_1^* = 1/\lambda_3^*$. Les éléments de symétrie du cisaillement : plan de déformation $Z'OX'$ et axe de rotation OY' se conservent au cours de la déformation. Il en résulte que ZOX est identique à $Z'OX'$ et que OY est confondu avec OY' .

a) *Marqueurs linéaires.* — L'ellipsoïde de déformation finie a pour équation dans ses axes propres $R(OXYZ)$:

$$\begin{aligned} 1/\rho_2 &= \lambda_3^* \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \\ &+ \frac{1}{\lambda_3^*} \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

La section de celui-ci par le plan ZOX décrit l'ellipse de déformation finie du problème plan correspondant. Son axe majeur fait un angle α avec la direction du cisaillement OZ' . $R(OXYZ)$ se déduit de $R'(OX'Y'Z')$ par une rotation α dans le plan $Z'OX'$ autour de l'axe OY' .

La densité $D_L(\theta, \varphi)$ a pour expression :

$$\begin{aligned} D_L(\theta, \varphi) &= \\ &= \left\{ \lambda_3^* \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_3^*} \cos^2 \theta \right\}^{-3/2}. \end{aligned}$$

Elle est maximale suivant OZ et vaut : $\lambda_3^{*3/2}$.

b) *Marqueurs planaires.* — L'ellipsoïde inverse a pour équation dans ses axes propres $R(OXYZ)$:

$$\begin{aligned} 1/\rho_i^2 &= \frac{1}{\lambda_3^*} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \\ &+ \lambda_3^* \cos^2 \theta; \end{aligned}$$

soit pour $D_P(\theta, \varphi)$:

$$\begin{aligned} D_P(\theta, \varphi) &= \\ &= \left\{ \frac{1}{\lambda_3^*} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_3^* \cos^2 \theta \right\}^{-3/2}. \end{aligned}$$

Elle est maximale suivant OX et vaut : $\lambda_3^{*3/2}$.

La section de l'ellipsoïde inverse par le plan ZOX n'est autre que l'ellipse inverse du problème plan correspondant. Son axe majeur OX fait avec la direction du cisaillement un angle $\alpha + \pi/2$.

$R(OXYZ)$ se déduit de $R'(OX'Y'Z')$ par une rotation $\alpha + \pi/2$ dans le plan $Z'OX'$ autour de OY' .

D_L et D_P sont de la forme générale :

$$\left\{ k \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{1}{k} \cos^2 \theta \right\}^{-3/2}.$$

4. RÉSULTATS DU MODÈLE DE FERNANDEZ POUR

DES MARQUEURS LINÉAIRES ET PLANAIRES. — On montre d'abord que l'O.P.F. résultant de marqueurs linéaires ou plans est indépendante du contraste de viscosité entre les marqueurs et la matrice. Les marqueurs linéaires et plans axiaux se comportent comme des marqueurs de March [21].

a) *Déformation coaxiale de révolution isovolume.* — La densité a pour expression (cf. [27]) :

$$D(\theta) = \left\{ \sqrt{k} \sin^2 \theta + \frac{1}{k} \cos^2 \theta \right\}^{-3/2};$$

avec $k = \lambda_3^\kappa$.

Pour un marqueur linéaire $\kappa = 1$, alors qu'il vaut -1 pour un marqueur planaire. $\kappa = 1$ entraîne $k = \lambda_3$; $\kappa = -1$ conduit à $k = \frac{1}{\lambda_3}$. Les expressions

de la densité obtenues sont bien identiques à celles données par l'application directe du modèle de March.

b) *Cisaillement simple isovolume.* — On considère le cisaillement déjà défini dans $R'(OX'Y'Z')$. La densité caractérisant l'O.P.F. qu'il induit a pour expression générale dans $R(OXYZ)$:

$$D(\theta, \varphi) = \left\{ k \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{1}{k} \cos^2 \theta \right\}^{-3/2}$$

avec $k = (\lambda_3^*/\lambda_1^*)^{\kappa/2}$.

Pour des marqueurs linéaires $\kappa = 1$ soit $k = \lambda_3^*$; alors que pour les marqueurs plans $\kappa = -1$ ce qui entraîne $k = 1/\lambda_3^*$. Les expressions de la densité sont identiques à celles que l'on obtient par une application directe du modèle de March.

Le passage de $R'(OX'Y'Z')$ à $R(OXYZ)$ se fait par une rotation β dans le plan $Z'OX'$ autour de OY' ; β étant la direction qui maximalise la densité dans le problème plan équivalent. On a $\beta_L = \alpha$ et $\beta_p = \pi/2 + \alpha$. α est l'angle de l'axe majeur de l'ellipse de déformation finie avec la direction du cisaillement, dans le plan de cisaillement $Z'OX'$.

c) *Expression analytique de β_L et k en fonction de l'intensité γ du cisaillement.* — La solution analytique du problème à deux dimensions que l'on obtient à partir des équations de Jeffery en faisant $\kappa = +1$ est :

On a pour l'angle β_L qui maximalise la densité :

$$\beta_L = \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \left(\frac{2}{\gamma} \right).$$

A toute direction θ avant déformation correspond la direction θ' après déformation.

Soit θ_M l'angle θ correspondant à β_L ; il a pour expression :

$$\theta_M = \operatorname{Arctg} \left\{ \frac{\operatorname{tg} \beta_L}{1 - \gamma \operatorname{tg} \beta_L} \right\}.$$

Le maximum de densité $(D_{\max})_{2d}$ est égal à k . Il vaut :

$$(D_{\max})_{2d} = k = \frac{\sin^2 \theta_M}{\sin^2 \beta_L}.$$

Annexe 3

Calcul des composantes du tenseur $[S_{ij}]$ pour des marqueurs de symétrie monoclinique.

Soit $R(OXYZ)$ un repère fixe dans lequel est définie la densité $D(\theta, \varphi)$. Considérons un grain que nous assimilons à un marqueur axial. Soit $R'*(OX'*Y'*Z'*)$ un repère lié à celui-ci. L'axe de révolution $OZ'*$ est suivant $\pm \mathbf{u}(\theta, \varphi)$. ($R'*$) est défini de la manière suivante :

- OX'_0* est suivant l'intersection du plan XOY et du plan perpendiculaire à $OZ'*$;
- OY'_0* est tel que le trièdre $OX'_0*Y'_0*Z'*$ soit un trièdre direct ;
- $OX'*$ se déduit de OX'_0* par une rotation d'un angle ψ autour de $OZ'*$ dans le plan perpendiculaire à $OZ'*$.

Les axes de forme de marqueur ($OX'*Y'*Z'*$) sont liés aux axes cristallographiques de la manière suivante (cf. 2.2) :

$OZ'*$ est suivant c , $OY'*$ suivant b et $OX'*$ suivant a' . $a'bc$ forment un trièdre direct, a' est dans le plan (ab) .

Le modèle mécanique ne donne aucune information sur l'orientation des axes $OX'*$, $OY'*$ dans le plan perpendiculaire à l'axe de révolution des grains. Nous supposons que ces axes sont équirépartis dans ce plan.

On passe de (R) à $(R'*)$ et inversement par les relations :

$$\begin{bmatrix} X'^* \\ Y'^* \\ Z'^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell'_1 & m'_1 & n'_1 \\ \ell'_2 & m'_2 & n'_2 \\ \ell'_3 & m'_3 & n'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell'_1 & \ell'_2 & \ell'_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \\ n'_1 & n'_2 & n'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'^* \\ Y'^* \\ Z'^* \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs unitaires $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ de (R') ont pour composantes :

$$\mathbf{i}' \begin{vmatrix} \ell'_1 = \sin \varphi \cos \psi \\ m'_1 = -\cos \varphi \cos \psi \\ n'_1 = 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{j}' \begin{vmatrix} \ell'_2 = \cos \theta \cos \varphi \cos \psi \\ m'_2 = \cos \theta \sin \varphi \cos \psi \\ n'_2 = -\sin \theta \cos \psi \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{k}' \begin{vmatrix} \ell'_3 = \sin \theta \cos \varphi \\ m'_3 = \sin \theta \sin \varphi \\ n'_3 = \cos \theta \end{vmatrix} \quad \mathbf{k}' \equiv \mathbf{u}(\theta, \varphi).$$

Soit $\mathbf{h}_0$ le champ magnétisant défini dans (R) .

$\mathbf{h}_0 = \mathbf{u}_0 h_0$, $\mathbf{u}_0(\theta_0, \varphi_0)$ étant le vecteur unitaire de la direction du champ. A $\mathbf{u}_0$ dans (R) correspond $\mathbf{u}'_0$ dans (R'*). $\mathbf{u}'_0$ a pour composantes X'_0 , Y'_0 , Z'_0 .

L'aimantation pour un champ unité de direction $\mathbf{u}_0$ s'écrit dans (R'*):

$$M'_i = K_{ij}(u'_0)_j;$$

avec

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & K_{13} \\ 0 & K_2 & 0 \\ K_{13} & 0 & K_3 \end{bmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} M'_1 &= K_1 X'_0 + K_{13} Z'_0 \\ M'_2 &= K_2 Y'_0 \\ M'_3 &= K_{13} X'_0 + K_3 Z'_0. \end{aligned}$$

Cette aimantation a pour expression dans (R):

$$\begin{aligned} M_1 &= \ell'_1 M'_1 + \ell'_2 M'_2 + \ell'_3 M'_3 \\ M_2 &= m'_1 M'_1 + m'_2 M'_2 + m'_3 M'_3 \\ M_3 &= n'_1 M'_1 + n'_2 M'_2 + n'_3 M'_3. \end{aligned}$$

L'aimantation d'un grain résultant de l'application d'un champ magnétisant unité, de direction $\mathbf{u}_0$ dans (R), mesurée dans la direction $\mathbf{u}$ dans (R) vaut :

$$(\mathbf{M} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} =$$

$$= \{M_1 \sin \theta \cos \varphi + M_2 \sin \theta \sin \varphi + M_3 \cos \theta\} \mathbf{u}.$$

On a dN grains dont l'axe OZ' pointe dans la direction $\mathbf{u}$.

$$dN = D_0 D(\theta, \varphi) d\Omega.$$

Si tous ces grains avaient les mêmes axes OX' , OY' on aurait :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} D_0 D(\theta, \varphi) d\Omega.$$

Mais les axes OX' , OY' sont équirépartis dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{u}$. La probabilité de trouver un angle ψ est $\frac{1}{2\pi}$; on aura donc :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} D_0 D(\theta, \varphi) \times d\Omega \frac{1}{2\pi} d\psi.$$

* Le champ magnétisant a pour direction OX : $\mathbf{u}_0(1, 0, 0)$.

Les composantes de $\mathbf{u}_0$ dans (R'*) valent :

$$\mathbf{u}_0 \begin{cases} X'_0 = \ell'_1 \\ Y'_0 = \ell'_2 \\ Z'_0 = \ell'_3. \end{cases}$$

L'aimantation due a un champ magnétisant unité de direction $\mathbf{u}_0$ dans (R'*) s'écrit :

$$\begin{aligned} M'_1 &= K_1 \ell'_1 + K_{13} \ell'_3 \\ M'_2 &= K_2 \ell'_2 \\ M'_3 &= L_{13} \ell'_1 + K_3 \ell'_3. \end{aligned}$$

Exprimée dans (R) cette aimantation s'écrit :

$$\begin{aligned} M_1 &= \ell'_1 M'_1 + \ell'_2 M'_2 + \ell'_3 M'_3 \\ M_2 &= m'_1 M'_1 + m'_2 M'_2 + m'_3 M'_3 \\ M_3 &= n'_1 M'_1 + n'_2 M'_2 + n'_3 M'_3. \end{aligned}$$

CALCUL DE S_{11} .

La contribution à S_{11} d'un grain dont l'axe OZ' est suivant $\mathbf{u}$ est :

$$(\mathbf{M}^1 \cdot \mathbf{u}) \ell'_3 = A_{11}.$$

$$A_{11} = M_1^1 \ell'^2_3 + M_2^1 m'_3 \ell'_3 + M_3^1 n'_3 \ell'_3.$$

Pour l'ensemble de tous les grains on a :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{\bar{K}} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \times \\ &\times \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{11} D(\theta, \varphi) d\Omega d\psi. \end{aligned}$$

CALCUL DE S_{13} .

On a de même :

$$\begin{aligned} S_{13} &= \frac{1}{\bar{K}} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \times \\ &\times \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{13} D(\theta, \varphi) d\Omega d\psi; \end{aligned}$$

avec :

$$A_{13} = M_1^1 \ell'_3 n'_3 + M_2^1 m'_3 n'_3 + M_3^1 n'^2_3.$$

** Le champ magnétisant a pour direction OY : $\mathbf{u}_0(0, 1, 0)$.

Un calcul analogue conduit à l'expression de S_{22} .

$$\begin{aligned} S_{22} &= \frac{1}{\bar{K}} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \times \\ &\times \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{22} D(\theta, \varphi) d\Omega d\psi; \end{aligned}$$

avec :

$$A_{22} = M_1^2 \ell'_3 m'_3 + M_2^2 m'^2_3 + M_3^2 n'_3 m'_3.$$

*** Le champ magnétisant a pour direction OZ : $\mathbf{u}_0(0, 0, 1)$.