Homogénéisation par la méthode des formes moyennes équivalentes dans le milieu biphasé

Jacques Grolier, Monique Hucher, Jean-Marie Pouliquen, Joëlle Riss, Michel Lavaud

► To cite this version:

Jacques Grolier, Monique Hucher, Jean-Marie Pouliquen, Joëlle Riss, Michel Lavaud. Homogénéisation par la méthode des formes moyennes équivalentes dans le milieu biphasé. *Revue de Physique Appliquée*, 1989, 24 (6), pp.627-642. 10.1051/rphysap:01989002406062700 . jpa-00246088

HAL Id: jpa-00246088

<https://hal.science/jpa-00246088>

Submitted on 1 Jan 1989

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification

Physics Abstracts

91.60 — 42.20 — 44.10 — 02.90

Homogénéisation par la méthode des formes moyennes équivalentes dans le milieu biphasé

Jacques Grolier ⁽¹⁾, Monique Hucher ⁽¹⁾, Jean-Marie Pouliquen ⁽¹⁾, Joëlle Riss ⁽¹⁾
et Michel Lavaud ⁽²⁾

⁽¹⁾ Université d'Orléans, BP 6759, 45067 Orléans, France

⁽²⁾ G.R.E.M.I., C.N.R.S., Orléans, France

(Reçu le 27 avril 1988, révisé le 16 janvier 1989, accepté le 27 février 1989)

Résumé. — On peut calculer les conductivités (thermique, électrique, etc.) des roches à partir des conductivités et des fractions volumiques des minéraux constitutifs, de la forme des grains représentée par un « ellipsoïde moyen équivalent » (E.M.E.), et de leur orientation moyenne. La théorie présentée étend aux ellipsoïdes quelconques la théorie d'Ondracek jusqu'ici limitée aux ellipsoïdes de révolution.

Abstract. — A theory is presented, extending Ondracek's derivation which is normally restricted to oblate and prolate spheroids, to the case of any kind of ellipsoid representing the texture of the aggregate as an average equivalent shape (A.E.S.). With such a theory, the effective conductivity of any rock can be calculated from the conductivities of rock forming minerals, from the volume fractions, the lengths and orientations of the semi-axes a , b , c of the average equivalent ellipsoid determined by quantitative microscopy.

Notations.

Première partie : Généralisation de la théorie d'Ondracek.

OX, OY, OZ : axes principaux de l'ellipsoïde.
 a, b, c : longueurs des demi-axes principaux de l'ellipsoïde.
 $\alpha_{XD}, \alpha_{YD}, \alpha_{ZD}$: angles entre les axes principaux de l'ellipsoïde et la direction du champ.

ELECTROSTATIQUE.

E_M, E_M : champ et intensité du champ dans la matrice.
 E_D, E_D : champ et intensité du champ à l'intérieur d'un grain (de forme ellipsoïdale) de la phase dispersée.
 E_X, E_Y, E_Z : champs respectivement parallèles aux axes OX, OY, OZ de l'ellipsoïde.
 E_{DX}, E_{DY}, E_{DZ} : composantes du champ suivant chacun des axes de l'ellipsoïde.

$\varepsilon_c, \varepsilon_M, \varepsilon_D$: constantes diélectriques du composite, de la matrice, de la phase dispersée.
 F_{XD}, F_{YD}, F_{ZD} : coefficients de dépolarisation.
 D_c, D_M, D_D : induction électrique du composite biphasé, de la matrice, de la phase dispersée.

GÉNÉRALISATION AUX AUTRES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES.

$\varphi_c, \varphi_M, \varphi_D$: propriétés de champ du composite, de la matrice, de la phase dispersée.
 c_D : fraction volumique de la phase dispersée.
 c_M : fraction volumique de la matrice ($c_D + c_M = 1$).

DÉCOMPOSITION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE (17) EN ÉLÉMENTS SIMPLES.

$\lambda = F_{XD}$; $\mu = F_{YD}$; $\nu = F_{ZD}$; $t = \varphi_c / \varphi_D$; $t_n = \varphi_M / \varphi_D$
 $\ell = \cos^2 \alpha_{XD}$; $m = \cos^2 \alpha_{YD}$; $n = \cos^2 \alpha_{ZD}$;
 $x = c_D$.

Deuxième partie : Prise en compte des données de la microscopie.

A_1, A_2, A_3 : axes principaux de l'ellipsoïde.

$\bar{A}, \bar{B}, \bar{H}, \bar{L}, \bar{L}^4, N_A, N_L, N_V, \bar{S}, \bar{V}$: cf. équation (93).

$a', b', a'', b'', a''', b'''$: longueurs des demi-axes principaux des ellipses.

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$: angles entre les axes principaux de l'ellipsoïde et l'axe OX_1 .

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$: angles entre les axes principaux de l'ellipsoïde et l'axe OX_2 .

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$: angles entre les axes principaux de l'ellipsoïde et l'axe OX_3 .

β' : angle entre le plus grand des axes principaux de l'ellipse (coupe diamétrale de l'ellipsoïde par le plan OX_2X_3) et OX_3 .

β'' : angle entre le plus grand des axes principaux de l'ellipse (coupe diamétrale de l'ellipsoïde par le plan OX_1X_3) et OX_3 .

β''' : angle entre le plus grand des axes principaux de l'ellipse (coupe diamétrale de l'ellipsoïde par le plan OX_1X_2) et OX_2 .

La conductivité thermique, ou électrique, la perméabilité magnétique et plus généralement toute propriété de champ (c'est-à-dire toute grandeur physique mesurant la réponse d'un corps soumis à un champ uniforme) d'un milieu polyphasé, dépendent non seulement des propriétés physiques de ses constituants et de leurs fractions volumiques, mais aussi de la forme des particules et de l'orientation de l'échantillon, lorsque ce dernier est anisotrope, par rapport au champ appliqué. Si l'on ne tient compte que des conductivités et des fractions volumiques, on détermine seulement un intervalle de valeurs limité par les bornes de Hashin et Shtrikman (1962-1968) entre lesquelles est située la conductivité globale ou *conductivité effective* du milieu considéré.

L'une des théories permettant de prendre en compte la forme des particules et l'anisotropie de l'échantillon a été développée par Ondracek (1982-1983 et travaux cités) et ses collaborateurs dans le cadre de la métallurgie physique des matériaux frittés (Pejsa, 1980 ; Klein et Ondracek, 1981) et du traitement des minerais de fer (Ebel, 1984 ; Ebel *et al.*, 1985). On s'inspire ici de ces travaux en explicitant certains aspects et, en généralisant la méthode, on montre comment utiliser les données de la microscopie optique, pour obtenir des valeurs précises et exactes de la conductivité effective.

1. Généralisation de la théorie d'Ondracek (cas de l'ellipsoïde quelconque).

Le point de départ de la théorie d'Ondracek (1982) est un résultat de l'électrostatique donnant l'intensité du champ E_D à l'intérieur d'un ellipsoïde de constante diélectrique ε_D . Si celui-ci est plongé dans un milieu de constante diélectrique ε_M où règne un champ E_M , et si l'un des axes de l'ellipsoïde (ici l'axe OX) est parallèle à E_M ,

$$\frac{E_D}{E_M} = \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_M + (\varepsilon_D - \varepsilon_M) F_{XD}} \quad (1)$$

où les indices D et M représentent respectivement la phase dispersée (particules) et la matrice ; F_{XD} est un coefficient dit de dépolarisation ; avec des équations analogues lorsque les axes OY et OZ de l'ellipsoïde sont parallèles à E_M . Les coefficients de dépolarisation sont donnés par les équations de Stoner (1945, Eqs. (3-4)) ; avec

$$F_{XD} + F_{YD} + F_{ZD} = 1. \quad (2)$$

Si les a, b, c sont les demi-axes de l'ellipsoïde moyen équivalent (E.M.E.) (Riss et Grolier, 1986) déterminé par l'étude stéréologique du solide réel considéré, les valeurs numériques des F_{iD} obtenues en portant a, b, c , dans les formules de Stoner sont significatives de la forme des grains dans ce solide et du comportement de celui-ci quand il est placé dans un champ.

Soient $\alpha_{XD}, \alpha_{YD}, \alpha_{ZD}$, les angles entre la direction E_M du champ dans la matrice et chacun des axes principaux de l'E.M.E. On peut écrire, suivant (1) :

$$\begin{aligned} E_{DX} &= \frac{\varepsilon_M E_M \cos \alpha_{XD}}{\varepsilon_M + (\varepsilon_D - \varepsilon_M) F_{XD}} ; \\ E_{DY} &= \frac{\varepsilon_M E_M \cos \alpha_{YD}}{\varepsilon_M + (\varepsilon_D - \varepsilon_M) F_{YD}} ; \\ E_{DZ} &= \frac{\varepsilon_M E_M \cos \alpha_{ZD}}{\varepsilon_M + (\varepsilon_D - \varepsilon_M) F_{ZD}} . \end{aligned} \quad (3)$$

La composante de E_D suivant la direction E_M est la somme des champs apparents d'intensité : $E_{DX} \cos \alpha_{DX}, E_{DY} \cos \alpha_{DY}, E_{DZ} \cos \alpha_{DZ}$, son intensité est donc :

$$E_D = E_M \sum_{i=X}^Z \frac{\varepsilon_M \cos^2 \alpha_{iD}}{\varepsilon_M + (\varepsilon_D - \varepsilon_M) F_{iD}} . \quad (4)$$

L'intensité du champ E_c d'un biphasé et celle de son induction électrique D_c peuvent s'exprimer en fonction des grandeurs E_M, E_D et D_M, D_D relatives aux deux phases à l'aide des moyennes de Wiener :

$$E_c = c_M E_M + c_D E_D \text{ et } D_c = c_M D_M + c_D D_D \quad (5)$$

où c_D est la fraction volumique de la phase incluse et $c_M = 1 - c_D$, la fraction volumique de la matrice, avec :

$$D_c = \varepsilon_c E_c; \quad D_M = \varepsilon_M E_M; \quad D_D = \varepsilon_D E_D.$$

La polarisation étant en effet un phénomène intéressant tout le volume, les grandeurs qui y interviennent sont des grandeurs extensives. Par suite :

$$\frac{E_D}{E_M} = \frac{c_M}{c_D} \cdot \frac{\varepsilon_M - \varepsilon_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_D}. \quad (6)$$

Comparant à l'équation générale (4), on obtient :

$$\frac{c_M}{c_D} \cdot \frac{\varepsilon_M - \varepsilon_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_D} = \varepsilon_M \left[\frac{\cos^2 \alpha_{XD}}{\varepsilon_M + (\varepsilon_D - \varepsilon_M) F_{XD}} + \frac{\cos^2 \alpha_{YD}}{\varepsilon_M + (\varepsilon_D - \varepsilon_M) F_{YD}} + \frac{\cos^2 \alpha_{ZD}}{\varepsilon_M + (\varepsilon_D - \varepsilon_M) F_{ZD}} \right]. \quad (7)$$

Comme Ondracek, nous remplaçons ici les ε par des φ

$$\varepsilon_c \rightarrow \varphi_c, \quad \varepsilon_M \rightarrow \varphi_M, \quad \varepsilon_D \rightarrow \varphi_D$$

pour signifier que l'équation (7), et par suite la théorie établie en électrostatique, vaut en fait pour toute propriété de champ :

$$\frac{c_M}{c_D} \cdot \frac{\varphi_M - \varphi_c}{\varphi_c - \varphi_D} = \varphi_M \sum_{i=X}^Z \frac{\cos^2 \alpha_{iD}}{\varphi_M + (\varphi_D - \varphi_M) F_{iD}} = \varphi_M \Omega \quad (8)$$

d'où l'on tire :

$$\varphi_c = \varphi_M \frac{c_M + c_D \varphi_D \Omega}{c_M + c_D \varphi_M \Omega}. \quad (9)$$

Lorsque l'ellipsoïde est de révolution, $F_{XD} = F_{YD}$. Posons $F_{XD} = F_{YD} = F_D$ et donc, $F_{ZD} = 1 - 2 F_D$. Par ailleurs, $\cos^2 \alpha_{XD} = \cos^2 \alpha_{YD}$; posons $\cos^2 \alpha_{ZD} = \cos^2 \alpha_D$. L'équation (9) devient alors, en remplaçant c_M par $1 - c_D$:

$$\varphi_c = \varphi_M \frac{1 - c_D + c_D \varphi_D \left\{ \frac{1 - \cos^2 \alpha_D}{\varphi_M + (\varphi_D - \varphi_M) F_D} + \frac{\cos^2 \alpha_D}{\varphi_M + (\varphi_D - \varphi_M)(1 - 2 F_D)} \right\}}{1 - c_D + c_D \varphi_M \left\{ \frac{1 - \cos^2 \alpha_D}{\varphi_M + (\varphi_D - \varphi_M) F_D} + \frac{\cos^2 \alpha_D}{\varphi_M + (\varphi_D - \varphi_M)(1 - 2 F_D)} \right\}} \quad (10)$$

analogue à l'équation (19b) d'Ondracek (1983).

Lorsque l'ellipsoïde se réduit à une sphère, on a : $F_{XD} = F_{YD} = F_{ZD} = 1/3$ et $\cos^2 \alpha_{XD} = \cos^2 \alpha_{YD} = \cos^2 \alpha_{ZD} = 1/3$, soit,

$$\varphi_c = \varphi_M \left\{ \frac{2 \varphi_M + \varphi_D - 2 c_D (\varphi_M - \varphi_D)}{2 \varphi_M + \varphi_D + c_D (\varphi_M - \varphi_D)} \right\} \quad (11)$$

qui est l'une des diverses expressions de l'équation de Maxwell-Clausius-Mossoti.

Comme l'équation de Maxwell qu'elle généralise, l'équation (9) n'est valable que pour les milieux à faible concentration, c'est-à-dire sans interaction entre particules.

1.1 CAS D'UNE CONCENTRATION PLUS FORTE. — On considère maintenant un milieu biphasé représenté par l'équation générale (9), comme un milieu homogène de propriété φ_c et l'on y introduit à

nouveau une faible quantité de particules, avec une concentration dc_D . Alors φ_c devient $\varphi_c + d\varphi_c$; φ_M devient φ_c ; $c_M + c_D + dc_D = 1$ et l'équation (9) devient, après division du numérateur et du dénominateur par $1 - c_D - dc_D$:

$$\varphi_c + d\varphi_c \sim \varphi_c \left\{ \frac{1 + \left[\frac{dc_D}{1 - c_D - dc_D} \right] \varphi_D \Omega}{1 + \left[\frac{dc_D}{1 - c_D - dc_D} \right] \varphi_c \Omega} \right\} \quad (12)$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dc_D}{1 - c_D - dc_D} = \frac{d\varphi_c}{\varphi_c (\varphi_D - \varphi_c - d\varphi_c) \Omega}. \quad (13)$$

Avec les relations de simplification, $dc_D \ll 1 - c_D$ et $d\varphi_c \ll \varphi_c$, on obtient l'équation approchée :

$$\frac{dc_D}{1 - c_D} = \frac{d\varphi_c}{\varphi_c (\varphi_D - \varphi_c) \left[\frac{\cos^2 \alpha_{XD}}{\varphi_c + (\varphi_D - \varphi_c) F_{XD}} + \frac{\cos^2 \alpha_{YD}}{\varphi_c + (\varphi_D - \varphi_c) F_{YD}} + \frac{\cos^2 \alpha_{ZD}}{\varphi_c + (\varphi_D - \varphi_c) F_{ZD}} \right]} \quad (14)$$

Il s'agit maintenant d'intégrer (14),

— au premier membre, entre les limites de concentration : 0 et c_D ;

— au second membre, entre les limites des propriétés de champ : φ_M et φ_c .

Divisant par φ_D^2 les numérateur et dénominateur du deuxième membre de l'équation (14) et posant, pour simplifier l'écriture :

$$\varphi_c/\varphi_D = t ; \quad c_D = x ; \quad F_{XD} = \lambda ; \quad F_{YD} = \mu ; \\ F_{ZD} = \nu , \quad \text{d'où} \quad \lambda + \mu + \nu = 1 \quad (15)$$

$$\cos^2 \alpha_{XD} = \ell ; \quad \cos^2 \alpha_{YD} = m ; \\ \cos^2 \alpha_{ZD} = n , \quad \text{d'où} \quad \ell + m + n = 1 \quad (16)$$

on obtient :

$$\frac{dx}{1-x} = R(t) dt \quad (17)$$

avec

$$R(t) = \frac{1}{\frac{\ell}{\frac{1}{1-t} + \frac{\lambda}{t}} + \frac{m}{\frac{1}{1-t} + \frac{\mu}{t}} + \frac{n}{\frac{1}{1-t} + \frac{\nu}{t}}} \quad (18)$$

Après réduction, on trouve :

$$R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} \quad (19)$$

avec :

$$P(t) = \{t(1-\lambda) + \lambda\} \{t(1-\mu) + \mu\} \times \\ \times \{t(1-\nu) + \nu\} \quad (20)$$

$$Q(t) = t(1-t)(ut^2 + vt + w) \quad (21)$$

$$u = \ell(1-\mu)(1-\nu) + m(1-\nu)(1-\lambda) + \\ + n(1-\lambda)(1-\mu) \quad (22)$$

$$v = \ell(\mu + \nu - 2\mu\nu) + m(\lambda + \nu - 2\lambda\nu) + \\ + n(\lambda + \mu - 2\lambda\mu) \quad (23)$$

$$w = \ell\mu\nu + m\lambda\nu + n\lambda\mu \quad (24)$$

Dans la suite, on posera :

$$T(t) = ut^2 + vt + w = u(t-t_1)(t-t_2) \quad (25)$$

avec :

$$t_1 = \frac{-v + \sqrt{v^2 - 4uw}}{2u} \\ \text{et} \quad t_2 = \frac{-v - \sqrt{v^2 - 4uw}}{2u} \quad (26)$$

et on écrira $P(t)$ sous la forme :

$$P(t) = C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + q \quad (27)$$

avec :

$$C_1 = (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) \quad (28)$$

$$C_2 = (1-\lambda)(1-\mu)\nu + (1-\nu)(1-\lambda)\mu + \\ + (1-\mu)(1-\nu)\lambda \quad (29)$$

$$C_3 = (1-\lambda)\mu\nu + (1-\mu)\lambda\nu + (1-\nu)\lambda\mu \quad (30)$$

$$q = \lambda\mu\nu \quad (31)$$

(*) Lorsque les racines de $Q(t)$ sont toutes distinctes, on peut décomposer $R(t)$ sous la forme :

$$R(t) = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{t-t_1} + \frac{D}{t-t_2} \quad (32)$$

(**) Lorsqu'elles ne sont pas toutes distinctes, la décomposition (32) n'est plus nécessairement valable et il faut calculer les valeurs correspondantes de $R(t)$. Notons tout d'abord que la racine $t=1$ est toujours simple, car t_1 et t_2 sont toujours négatifs ou nuls (cf. annexe 1). Par contre, la racine $t=0$ est multiple si $w=0$. D'après (24), ceci n'est possible que si l'on a :

— soit $\lambda=0$ et $\ell=0$, c'est-à-dire si les inclusions sont des cylindres ($\lambda=0 \Leftrightarrow a=\infty$) d'axes perpendiculaires au champ ($\ell=0 \Leftrightarrow \alpha_{XD}=\pi/2$). Utilisant les équations (20) à (24), on obtient :

$$R(t) = \frac{1}{t(1-t)} \frac{\{t(1-\mu) + \mu\} \{t\mu + (1-\mu)\}}{(1-t)\{m(1-2\mu) + \mu\} + t} \quad (33a)$$

et (32) reste valable avec $C=0$.

— soit $\lambda=\mu=0$, c'est-à-dire si les inclusions sont des feuillets. La direction du champ peut alors être quelconque. D'après (18), on a :

$$R(t) = \frac{1}{(1-t)\{nt + (1-n)\}} \quad (33b)$$

et (32) reste encore valable avec $A=C=0$.

Enfin, on peut avoir $t_1=t_2=-1$ pour $\ell=1$, $\mu=\nu=1/2$, c'est-à-dire si les inclusions sont des cylindres de révolution, d'axes parallèles au champ, on a alors :

$$R(t) = \frac{1}{1-t} \quad (33c)$$

et (32) reste toujours valable avec $A=C=D=0$.

1.2 CALCUL DES COEFFICIENTS DE L'ÉQUATION (32). — Poursuivant la décomposition en éléments simples, il vient :

$$A = \frac{\lambda\mu\nu}{\ell\mu\nu + m\lambda\nu + n\lambda\mu} = \frac{q}{w} \quad (34)$$

$$A - B + C + D = \frac{(\lambda-1)(\mu-1)(\nu-1)}{\ell(\mu-1)(\nu-1) + m(\lambda-1) \times \\ \times (\nu-1) + n(\lambda-1)(\mu-1)} \\ = -\frac{C_1}{u} \quad (35)$$

$$B = 1 \quad (36)$$

$$C = \frac{P(t_1)}{t_1(1-t_1)u(t_1-t_2)} = \frac{P(t_1)}{u(1-t_1)\left(t_1^2 - \frac{w}{u}\right)} = \frac{P(t_1)}{Q_1(t_1)} \quad (37)$$

$$D = \frac{P(t_2)}{t_2(1-t_2)u(t_2-t_1)} = \frac{P(t_2)}{u(1-t_2)\left(t_2^2 - \frac{w}{u}\right)} = \frac{P(t_2)}{Q_1(t_2)} \quad (38)$$

en posant dans (37) et (38),

$$Q_1(t) = (1-t)(ut^2 - w) = (ut^2 + vt + w)(a't + b') + (at + b). \quad (39)$$

Après avoir identifié les deux membres de (39), on trouve finalement :

$$\begin{aligned} a' &= -1; \quad b' = 1 + (v/u); \\ a &= 2w - v\{1 + (v/u)\} \\ \text{et } b &= w\{-1 - (1 + v/u)\} = -w(2 + v/u) \end{aligned} \quad (40)$$

de même,

$$P(t) = (ut^2 + vt + w)(c't + d') + (ct + d) \quad (41)$$

Après avoir identifié les deux membres de (41), on trouve, avec la notation utilisée dans les équations (27) à (31) :

$$\begin{aligned} c' &= C_1/u; \quad d' = \{C_2 - (vC_1/u)\}/u; \\ c &= C_3 - (wC_1/u) - v\{C_2 - (vC_1/u)\}/u \\ \text{et } d &= q - w\{C_2 - (vC_1/u)\}/u. \end{aligned} \quad (42)$$

Soit, en utilisant (37), (38), (39) et (41) :

$$P(t_i) = ct_i + d; \quad Q_1(t_i) = at_i + b;$$

avec $i = 1, 2$,

et donc,

$$C = R_1(t_1), \quad \text{et} \quad D = R_1(t_2), \quad (43)$$

avec :

$$R_1(t) = \frac{ct + d}{at + b}. \quad (44)$$

N.B. On trouvera en annexe 1, les domaines de variation de u , v , w , des racines t_1 et t_2 et de $(A - B + C + D)$.

Les coefficients C et D sont ainsi exprimés en fonction de sept variables u , v , w , q , C_1 , C_2 , et C_3 . Ils ne dépendent en fait que de quatre variables

indépendantes ℓ , m , λ , et μ par exemple. Si l'on utilise les premières, on devra manipuler des polynômes de degré 9, degré de $C_3 u$ qui apparaît dans l'expression de c (Eq. (42)), après réduction au même dénominateur. On peut réduire à trois le degré de ces polynômes et aussi le nombre de leurs termes, en utilisant les quatre variables suivantes : q (Eq. (31)), w (Eq. (24)),

$$r = \lambda\mu + \mu\nu + \lambda\nu \quad (45)$$

$$\text{et} \quad s = \ell\lambda + m\mu + n\nu. \quad (46)$$

D'où, d'après (29) et en utilisant (16), puis (15),

$$C_2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 3q = 1 - 2r + 3q. \quad (47)$$

De même, d'après (28), puis (30) et utilisant (15) dans les deux cas,

$$C_1 = r - q \quad (48)$$

$$\text{et} \quad C_3 = r - 3q \quad (49)$$

(22) devient alors :

$$u = s + w \quad (50)$$

(23) devient alors :

$$v = 1 - u - w = 1 - s - 2w \quad (51)$$

(26) devient alors :

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{s + 2w - 1 + \sqrt{(1-s)^2 - 4w}}{2(s+w)} \\ \text{et } t_2 &= \frac{s + 2w - 1 - \sqrt{(1-s)^2 - 4w}}{2(s+w)}. \end{aligned} \quad (52)$$

Les coefficients a , b , c et d valent respectivement :

$$a = (-1 + s + 3w + sw)/(s + w) \quad (53)$$

$$\text{et } b = -w(1 + s)/(s + w) \quad (54)$$

$$c = \frac{s^2(1 - q) + s(-wr - q + 3w - 1) + w(2w + q - 2r - 1) + r - q}{(s + w)^2} \quad (55)$$

et

$$d = \{s^2q + sw(r - 1) + w(r - q - w)\}/(s + w)^2. \quad (56)$$

1.3 CAS DE L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION : DÉCOMPOSITION DE $R(t)$. — Lorsque les inclusions ont en moyenne la forme d'un ellipsoïde de révolution (hypothèse d'Ondracek), on a la relation $\lambda = \mu$ et donc, $\nu = 1 - 2\lambda$. Portant ces valeurs dans l'équation (18), et tenant compte de (16), on obtient :

$$R(t) = \frac{\{t(1 - \lambda) + \lambda\} \{2\lambda t + (1 - 2\lambda)\}}{t(1 - t) \{t(n - 3n\lambda + 2\lambda) + (1 - n - 2\lambda + 3n\lambda)\}}. \quad (57)$$

On voit que $R(t)$ ne dépend que de deux paramètres n et λ . Les paramètres ℓ et m peuvent être choisis arbitrairement, pourvu qu'on ait $\ell \geq 0$, $m \geq 0$ et $\ell + m + n = 1$.

Revenant aux notations d'Ondracek, en remplaçant t par φ_c/φ_D , λ par F_D et n par $\cos^2 \alpha_D$, on obtient :

$$R(t) = \frac{[\varphi_c(1 - F_D) + \varphi_D F_D][2 F_D \varphi_c + (1 - 2 F_D) \varphi_D]}{\varphi_c(\varphi_D - \varphi_c) \left\{ \frac{\varphi_c}{\varphi_D} (\cos^2 \alpha_D - 3 F_D \cos^2 \alpha_D + 2 F_D) + (1 - \cos^2 \alpha_D - 2 F_D + 3 F_D \cos^2 \alpha_D) \right\}}$$

et puisque $\frac{dc_D}{1 - c_D} = R(t) dt = R(t) d\varphi_c/\varphi_D$, alors :

$$\frac{dc_D}{1 - c_D} = d\varphi_c \frac{2 F_D(1 - F_D) \varphi_c^2 + (1 - 3 F_D + 4 F_D^2) \varphi_c \varphi_D + F_D(1 - 2 F_D) \varphi_D^2}{\varphi_c(\varphi_D - \varphi_c) \{ \varphi_c[2 F_D + \cos^2 \alpha_D(1 - 3 F_D)] + \varphi_D[1 - 2 F_D - \cos^2 \alpha_D(1 - 3 F_D)] \}}$$

qui est l'équation (26) d'Ondracek.

La décomposition en éléments simples s'écrit :

$$R(t) = \frac{A}{t} + \frac{B}{1 - t} + \frac{C'}{t - t_1'} \quad (58)$$

En posant :

$$a_1 = n - 3 n \lambda + 2 \lambda \quad (59)$$

$$\text{et} \quad t_1' = 1 - (1/a_1), \quad (60)$$

le dénominateur de (57) vaut alors : $a_1 t(1 - t)(t - t_1')$ et l'on calcule :

$$A = \frac{\lambda(1 - 2\lambda)}{1 - a_1} \quad (61)$$

$$B = 1$$

$$C' = 1 + \lambda \frac{a_1 + 2\lambda - 2}{a_1(1 - a_1)} \quad (62)$$

soit, en revenant aux notations d'Ondracek :

$$A = \frac{F_D(1 - 2 F_D)}{1 - \cos^2 \alpha_D(1 - 3 F_D) - 2 F_D}; \quad B = 1$$

$$C' = 1 - \frac{F_D(1 - 2 F_D)}{1 - 2 F_D - \cos^2 \alpha_D(1 - 3 F_D)} - \frac{2 F_D(1 - F_D)}{2 F_D + \cos^2 \alpha_D(1 - 3 F_D)}.$$

On retrouve bien les coefficients R et S d'Ondracek, avec $R = A$, $S = -B$. Le coefficient C' est le coefficient T d'Ondracek après rectification d'une erreur sur le signe de T ($C' = -T$).

N.B. On trouvera en annexe 2, les domaines de variation de a_1 , t_1' , A et C' pour $\lambda = \mu$ (cas de l'ellipsoïde de révolution).

1.4 EQUATION GÉNÉRALE (CAS DE L'ELLIPSOÏDE QUELCONQUE). — Reprenant les équations (17), (18) et (32), il vient :

$$\frac{dx}{1 - x} = \frac{dc_D}{1 - c_D} = A \frac{dt}{t} + B \frac{dt}{1 - t} + C \frac{dt}{t - t_1} + D \frac{dt}{t - t_2} \quad (63)$$

dont la solution est donnée par :

$$-\ln(1 - c_D) = A \ln \frac{t}{t_M} - \ln \left| \frac{1 - t}{1 - t_M} \right| + C \ln \left| \frac{t - t_1}{t_M - t_1} \right| + D \ln \left| \frac{t - t_2}{t_M - t_2} \right|. \quad (64)$$

Comme on a montré que t_1 et t_2 sont toujours négatifs (cf. annexe 1), on peut enlever les deux derniers signes de valeur absolue dans (64), et réécrire cette équation sous la forme :

$$F(t) = \frac{F(t_n)}{1 - c_D} \quad (65)$$

avec :

$$F(t) = \frac{t^A(t + |t_1|)^C(t + |t_2|)^D}{|1 - t|}. \quad (66)$$

Pour étudier la variation de $F(t)$, on examine le signe de sa dérivée, d'où l'on déduit : $F(t)$ monotone croissante dans l'intervalle

$$0 \leq t \leq 1 \quad (67)$$

$F(t)$ monotone décroissante dans l'intervalle

$$1 \leq t < +\infty. \quad (68)$$

L'équation (63) admet donc une solution et une seule dans chacun des intervalles $0 \leq t \leq 1$ et $1 \leq t < +\infty$.

Aux bornes, on a, d'après (66),

$$F(t)_{t \rightarrow 0} \sim |t_1|^C |t_2|^D t^A. \quad (69)$$

D'après (34),

$$A > 0 \quad \text{et donc} \quad F(0) = 0. \quad (70)$$

Pour $t \rightarrow 1$,

$$F(t)_{t \rightarrow 1} \sim (1 + |t_1|)^C (1 + |t_2|)^D \frac{1}{|1 - t|}. \quad (71)$$

Enfin, pour $t \rightarrow \infty$,

$$F(t)_{t \rightarrow \infty} \sim t^{(A+C+D-1)} \quad (72)$$

et, comme d'après (35) et (36), l'exposant de t est négatif,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0. \quad (73)$$

Cas général.

Il résulte de (65) et (66) :

$$1 - c_D = \left(\frac{t_n}{t} \right)^A \left| \frac{1 - t}{1 - t_n} \right| \times \\ \times \left(\frac{t_n - t_1}{t - t_1} \right)^C \left(\frac{t_n - t_2}{t - t_2} \right)^D \quad (74)$$

soit, en remplaçant t par φ_c/φ_D et t_n par φ_M/φ_D ,

$$1 - c_D = \left(\frac{\varphi_M}{\varphi_c} \right)^A \left| \frac{\varphi_D - \varphi_c}{\varphi_D - \varphi_M} \right| \times \\ \times \left(\frac{\varphi_M - \varphi_D t_1}{\varphi_c - \varphi_D t_1} \right)^C \left(\frac{\varphi_M - \varphi_D t_2}{\varphi_c - \varphi_D t_2} \right)^D. \quad (75)$$

Dans ce résultat, les cinq constantes A , C , D , t_1 et t_2 s'expriment en fonction de q , r , s et w . Exprimant ces constantes avec les notations F_{iD} et $\cos^2 \alpha_{iD}$, il vient :

$$q = F_{XD} F_{YD} F_{ZD} \quad (76)$$

$$r = F_{XD} F_{YD} + F_{YD} F_{ZD} + F_{ZD} F_{XD} \quad (77)$$

$$s = F_{XD} \cos^2 \alpha_{XD} + F_{YD} \cos^2 \alpha_{YD} + \\ + F_{ZD} \cos^2 \alpha_{ZD} \quad (78)$$

$$w = F_{XD} F_{YD} \cos^2 \alpha_{ZD} + F_{YD} F_{ZD} \cos^2 \alpha_{XD} + \\ + F_{ZD} F_{XD} \cos^2 \alpha_{YD} \quad (79)$$

d'où, d'après (34) :

$$A = \frac{q}{w} = \frac{F_{XD} F_{YD} F_{ZD}}{F_{XD} F_{YD} \cos^2 \alpha_{ZD} + F_{YD} F_{ZD} \cos^2 \alpha_{XD} + F_{ZD} F_{XD} \cos^2 \alpha_{YD}} \quad (80)$$

et d'après (37), (38), (39), (41) et (42) :

$$C = \frac{\{s^2(1 - q) + s(3w - wr - q - 1) + w(2w + q - 2r - 1) + r - q\} t_1 + s^2 q + sw(r - 1) + w(r - q - w)}{(s + w)[(-1 + s + 3w + sw) t_1 - w(1 + s)]} \quad (81)$$

$$D = \frac{\{s^2(1 - q) + s(3w - wr - q - 1) + w(2w + q - 2r - 1) + r - q\} t_2 + s^2 q + sw(r - 1) + w(r - q - w)}{(s + w)[(-1 + s + 3w + sw) t_2 - w(1 + s)]} \quad (82)$$

avec

$$t_1 = \frac{(s + 2w - 1) + \sqrt{(1 - s)^2 - 4w}}{2(s + w)} \quad (83)$$

et

$$t_2 = \frac{(s + 2w - 1) - \sqrt{(1 - s)^2 - 4w}}{2(s + w)}. \quad (84)$$

Cas particuliers.

— Pour $c_D = 0$, le composite se réduit à la matrice, et la solution de (74) est :

$$t = t_n, \text{ soit } \varphi_c = \varphi_M. \quad (85)$$

— Pour $c_D = 1$, le composite se réduit à la phase dispersée, et la solution de (74) est :

$$t = 1, \text{ soit } \varphi_c = \varphi_D. \quad (86)$$

Pour une phase dispersée solide, la solution (86) n'est généralement pas atteinte

(+) pour une phase dispersée constituée de cylindres, la densité maximum de cylindres est égale à la densité maximum de cercles dans un plan, c'est-à-dire :

$$c_D \leq \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \sim 0,91 \quad (87)$$

(++) pour une phase dispersée constituée de sphères de même rayon en empilement compact, $\lambda = \mu = \nu = 1/3$ et :

$$c_D \leq \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \sim 0,74 \quad (88)$$

(+++) pour une phase dispersée constituée de feuillets, on peut avoir $c_D = 1$, soit $\varphi_c = \varphi_D$. La solution (86) est dans ce cas atteinte.

— Si $t_n \gg 1$, soit $\varphi_M/\varphi_D \gg 1$ et donc, $t = \varphi_c/\varphi_D \gg 1$, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) \sim t^{A-B+C+D} \Rightarrow \\ \Rightarrow t \sim t_n(1 - c_D)^{-1/(A-B+C+D)}. \quad (89)$$

Ceci généralise l'équation de Pejsa (1980, p. 329) :

$$\varphi_c = \varphi_M(1 - c_D) \left[\frac{\cos^2 \alpha_D - 1}{F_D - 1} + \frac{\cos^2 \alpha_D}{2F_D} \right] \quad (90)$$

équation approchée pour le cas de l'ellipsoïde de révolution et d'un fort contraste de conductivité entre matrice et phase dispersée.

En effet, dans le cas de l'ellipsoïde de révolution, $\lambda = \mu$ et donc $\nu = 1 - 2\lambda$. Reprenant (35) et (36), et en tenant compte de (16), on retrouve bien l'exposant de l'équation de Pejsa.

— Si $t_n \ll |t_1|$ et donc $t \ll |t_1|$, (65) devient alors :

$$|t_1|^C |t_2|^D t^A \sim \frac{|t_1|^C |t_2|^D t_n^A}{1 - c_D} \Rightarrow \quad (91)$$

$$\Rightarrow t \sim t_n(1 - c_D)^{-1/A}. \quad (92)$$

2. Prise en compte des données de la microscopie.

En pratique, on peut disposer de deux types d'échantillons, parallélépipédiques et cylindriques. On ne traite ici que du cas du bloc parallélépipédique ou cubique.

On admet que son étude stéréologique, suivant des coupes mutuellement perpendiculaires A , B , C (et éventuellement suivant d'autres coupes) a révélé l'existence d'un ellipsoïde moyen équivalent (E.M.E.), représentatif de la forme des pores, ou de celles des grains de l'une des phases en présence sur l'ensemble du volume, et l'existence d'une ellipse moyenne équivalente (e.m.e.) associée à chacune des coupes A , B , C . Sous réserve que l'échantillon soit suffisamment homogène (au sens usuel de ce terme), on peut admettre que les trois e.m.e. en question sont elles-mêmes des coupes diamétrales de l'E.M.E.

La définition de la forme moyenne équivalente, selon Riss et Grolier (1986) et Riss (1987), et le principe de sa mise en œuvre sont exposés maintenant, à l'intention du praticien. Une *forme moyenne équivalente* (F.M.E.) à un ensemble de particules d'un agrégat est définie par deux données conjointes : une forme canonique et une taille telle que les fonctionnelles V , S , $\bar{H}$ (volume, aire de la surface et hauteur moyenne projetée) de la F.M.E. soient égales aux moyennes des fonctionnelles des particules. En particulier, nous appellerons (s'il existe) *ellipsoïde moyen équivalent* (E.M.E.) à l'ensemble des grains de l'une des phases constitutives de la roche étudiée, un ellipsoïde triaxial défini par sa forme (rapports des demi-axes), par sa taille et dont les fonctionnelles V , S , $\bar{H}$ sont égales aux moyennes $\bar{V}$, $\bar{S}$, $\bar{\bar{H}}$ de ces mêmes fonctionnelles estimées sur la population de grains étudiés. Les méthodes stéréologiques à mettre en œuvre dans cette estimation sont maintenant bien connues.

Des équations stéréologiques suivantes (où le signe double barre désigne la moyenne d'un paramètre qui est lui-même une moyenne) :

$$\left. \begin{aligned} N_A &= N_V \bar{\bar{H}}, \quad \bar{\bar{B}} = \pi \bar{S}/(4 \bar{\bar{H}}), \quad \bar{\bar{A}} = \bar{V}/\bar{\bar{H}} \\ N_L &= N_V \bar{S}/4, \quad \bar{\bar{L}} = 4 \bar{V}/\bar{S} \text{ et } \bar{\bar{L}}^4 = 12 \bar{V}^2/(\pi \bar{S}) \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

et où, $\bar{\bar{H}}$ (qui est égal à $\bar{H}$) est la moyenne de la hauteur moyenne projetée des particules et de la F.M.E.,

$\bar{S}$ (qui est égal à S) l'aire moyenne de la surface des particules,

$\bar{V}$ (qui est égal à V) le volume moyen des particules,

N_V le nombre de particules par unité de volume,

N_A le nombre de particules par unité de surface de la préparation,

$\bar{\bar{B}}$ la moyenne des périmètres des coupes planes des particules,

$\bar{\bar{A}}$ l'aire moyenne des coupes planes des particules,

N_L le nombre des particules par unité de longueur des traversées,

$\bar{\bar{L}}$ la moyenne des intercepts linéaires,

$\bar{\bar{L}}^4$ la moyenne de la puissance 4 des intercepts linéaires, on tire les rapports $\bar{V}/\bar{\bar{H}}$, $\bar{V}/\bar{S}$, $\bar{S}/\bar{\bar{H}}$, $\bar{V}^2/\bar{V}$ et, les particules équivalentes ayant toutes le même volume en raison même de la définition de l'E.M.E., on obtient immédiatement les trois fonctionnelles $\bar{\bar{H}}$, S et V .

On notera que la procédure peut être simplifiée si l'on utilise l'estimateur (non biaisé et pondéré en volume) du volume moyen des particules établi par Jensen & Gundersen (1985) :

$$V = (\pi/3) \bar{\bar{L}}^3.$$

Il suffit alors de connaître les deux rapports $V/\bar{H}$ et $S/\bar{H}$ pour obtenir S et $\bar{H}$. On a $E(A) = V/\bar{H}$ et $E(B) = \pi S/4 \bar{H}$ où A et B sont respectivement l'aire de la surface et le périmètre des particules telles qu'elles apparaissent sur des sections au hasard (« I.U.R. sections », Weibel 1981).

En définitive, on détermine l'E.M.E. en se référant à des tables ou à des abaques dressées une fois pour toutes et donnant directement les rapports $a/\bar{H}$, $b/\bar{H}$, $c/\bar{H}$ de l'ellipsoïde de fonctionnelles V , S , $\bar{H}$ (Riss et Grolier 1986 et Riss 1987). On suppose dans ce qui suit qu'il existe effectivement une E.M.E. (on conçoit en effet qu'il puisse ne pas en être ainsi et que la F.M.E. soit par exemple un polyèdre).

C'est par une méthode analogue (dont les modalités pratiques restent toutefois à expliciter) que l'on pourra déterminer les e.m.e. associées aux coupes A , B , C . Toutefois les difficultés de mise en œuvre étant supposées résolues, nous considérons maintenant que l'E.M.E. est connu (par ses demi-axes a , b , c); et les e.m.e., par leurs demi-axes (a' , b'), (a'' , b''), (a''' , b'''). Il faut en déduire aussi, afin d'utiliser les formules (75) à (84), l'orientation de l'E.M.E., généralement oblique par rapport au champ appliqué. Autrement dit, il s'agit de trouver les cosinus directeurs de A_1 , A_2 , A_3 par rapport à OX_3 (Fig. 1). On traite ici le cas le plus général — champ triaxial — et l'on détermine l'orientation de l'E.M.E. par rapport à chacun des axes.

Dans le système d'axes A_1 , A_2 , A_3 , l'équation de l'ellipsoïde est :

$$\frac{A_1^2}{a^2} + \frac{A_2^2}{b^2} + \frac{A_3^2}{c^2} = 1. \quad (94)$$

Pour écrire cette équation dans le système d'axes X_1 , X_2 , X_3 lié à l'échantillon et au champ, on écrit la matrice de changement d'axes (a_{ij}) :

	A_1	A_2	A_3
X_1	$\cos \theta_1$	$\cos \theta_2$	$\cos \theta_3$
X_2	$\cos \gamma_1$	$\cos \gamma_2$	$\cos \gamma_3$
X_3	$\cos \alpha_1$	$\cos \alpha_2$	$\cos \alpha_3$

Fig. 1. — Orientation mutuelle des axes principaux de l'ellipsoïde moyen équivalent et d'un champ triaxial OX_1 , OX_2 , OX_3 .

[Mutual orientation of the main axes of the average equivalent ellipsoid and of OX_1 , OX_2 , OX_3 triaxial field.]

où

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont les angles que fait X_1 avec A_1, A_2, A_3 ;

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont les angles que fait X_2 avec A_1, A_2, A_3 ;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont les angles que fait X_3 avec A_1, A_2, A_3 ;

Il n'est pas nécessaire de déterminer les neuf valeurs de ces angles ; en effet, du fait des propriétés des matrices orthogonales,

$$a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} \text{ et } a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij},$$

seules trois de ces neuf valeurs sont indépendantes et la matrice est entièrement connue si l'on a déterminé α_1, α_2 et γ_1 par exemple.

2.1 EQUATION DE L'ELLIPSOÏDE DANS LE SYSTÈME D'AXES X_1, X_2, X_3 . — Portons dans (94) les valeurs :

$$\begin{aligned} A_1 &= X_1 \cos \theta_1 + X_2 \cos \gamma_1 + X_3 \cos \alpha_1 \\ A_2 &= X_1 \cos \theta_2 + X_2 \cos \gamma_2 + X_3 \cos \alpha_2 \\ A_3 &= X_1 \cos \theta_3 + X_2 \cos \gamma_3 + X_3 \cos \alpha_3 \end{aligned} \quad (95)$$

L'équation de l'ellipsoïde devient alors :

$$\begin{aligned} &X_1^2 \left[\frac{\cos^2 \theta_1}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta_2}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta_3}{c^2} \right] + 2 X_2 X_3 \left[\frac{\cos \gamma_1 \cos \alpha_1}{a^2} + \frac{\cos \gamma_2 \cos \alpha_2}{b^2} + \frac{\cos \gamma_3 \cos \alpha_3}{c^2} \right] \\ &+ X_2^2 \left[\frac{\cos^2 \gamma_1}{a^2} + \frac{\cos^2 \gamma_2}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma_3}{c^2} \right] + 2 X_3 X_1 \left[\frac{\cos \alpha_1 \cos \theta_1}{a^2} + \frac{\cos \alpha_2 \cos \theta_2}{b^2} + \frac{\cos \alpha_3 \cos \theta_3}{c^2} \right] \\ &+ X_3^2 \left[\frac{\cos^2 \alpha_1}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha_2}{b^2} + \frac{\cos^2 \alpha_3}{c^2} \right] + 2 X_1 X_2 \left[\frac{\cos \theta_1 \cos \gamma_1}{a^2} + \frac{\cos \theta_2 \cos \gamma_2}{b^2} + \frac{\cos \theta_3 \cos \gamma_3}{c^2} \right] = 1 \end{aligned} \quad (96)$$

2.2 UTILISATION DES COUPES DIAMÉTRALES.

• Dans le plan perpendiculaire à OX_1 .

a', b', β' sont connus. L'équation de l'ellipse (Fig. 2), rapportée à ses axes principaux est :

$$\frac{X'^2}{a'^2} + \frac{Y'^2}{b'^2} = 1. \quad (97)$$

Fig. 2. — Coupe de l'ellipsoïde moyen équivalent par le plan $X_2 OX_3$.

[The average equivalent ellipsoid cut by the $X_2 OX_3$ plane.]

La matrice de changement d'axes est :

	X_2	X_3
X'	$\sin \beta'$	$\cos \beta'$
Y'	$-\cos \beta'$	$\sin \beta'$

soit :

$$X' = X_2 \sin \beta' + X_3 \cos \beta'$$

et

$$Y' = -X_2 \cos \beta' + X_3 \sin \beta'.$$

Portant ces valeurs dans (97), on obtient :

$$\left(\frac{X_2 \sin \beta' + X_3 \cos \beta'}{a'} \right)^2 + \left(\frac{-X_2 \cos \beta' + X_3 \sin \beta'}{b'} \right)^2 = 1$$

c'est-à-dire l'équation de l'ellipse dans le système d'axes $OX_2 X_3$.

$$X_2^2 \left[\frac{\sin^2 \beta'}{a'^2} + \frac{\cos^2 \beta'}{b'^2} \right] + X_3^2 \left[\frac{\cos^2 \beta'}{a'^2} + \frac{\sin^2 \beta'}{b'^2} \right] + X_2 X_3 \left[\frac{b'^2 - a'^2}{a'^2 b'^2} \right] \sin 2\beta' = 1. \quad (98)$$

• Dans le plan perpendiculaire à OX_2 .

a'', b'', β'' sont connus. L'équation de l'ellipse (Fig. 3), rapportée à ses axes principaux, est :

$$\frac{X''^2}{a''^2} + \frac{Y''^2}{b''^2} = 1. \quad (99)$$

Fig. 3. — Coupe de l'ellipsoïde moyen équivalent par le plan $X_1 OX_3$.

[The average equivalent ellipsoid cut by the $X_1 OX_3$ plane.]

Procédant de la même manière que pour la coupe précédente, on obtient l'équation de l'ellipse dans le système d'axes $OX_1 X_3$, soit :

$$X_1^2 \left[\frac{\sin^2 \beta''}{a''^2} + \frac{\cos^2 \beta''}{b''^2} \right] + X_3^2 \left[\frac{\cos^2 \beta''}{a''^2} + \frac{\sin^2 \beta''}{b''^2} \right] + X_1 X_3 \left[\frac{b''^2 - a''^2}{a''^2 b''^2} \right] \sin 2\beta'' = 1. \quad (100)$$

• Dans le plan perpendiculaire à OX_3 .

a''', b''', β''' sont connus. L'équation de l'ellipse (Fig. 4), rapportée à ses axes principaux est :

$$\frac{X'''^2}{a'''^2} + \frac{Y'''^2}{b'''^2} = 1. \quad (101)$$

Procédant encore de même que pour les coupes précédentes, on obtient :

$$X_1^2 \left[\frac{\sin^2 \beta'''}{a'''^2} + \frac{\cos^2 \beta'''}{b'''^2} \right] + X_2^2 \left[\frac{\cos^2 \beta'''}{a'''^2} + \frac{\sin^2 \beta'''}{b'''^2} \right] + X_1 X_2 \left[\frac{b'''^2 - a'''^2}{a'''^2 b'''^2} \right] \sin 2\beta''' = 1. \quad (102)$$

Dans ce qui suit, on s'inspire en partie de Ramsay (1967, pp. 142-147) qui traite de ce problème géométrique, à propos des relations entre ellipses coupes et ellipsoïdes de déformation. Comparant les équations

Fig. 4. — Coupe de l'ellipsoïde moyen équivalent par le plan $X_1 OX_2$.

[The average equivalent ellipsoid cut by the $X_1 OX_2$ plane.]

des ellipses coupes et les équations déduites de l'équation générale de l'ellipsoïde pour $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, et $X_3 = 0$, on trouve les coefficients $A, B, \dots F$, de l'ellipsoïde oblique. Son équation est de la forme :

$$AX_1^2 + BX_2^2 + CX_3^2 + 2DX_1X_2 + 2EX_2X_3 + 2FX_3X_1 = 1 \quad (103)$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin^2 \beta''}{a'^2} + \frac{\cos^2 \beta''}{b'^2} \\ &= \frac{\sin^2 \beta'''}{a''^2} + \frac{\cos^2 \beta'''}{b''^2}; \\ B &= \frac{\sin^2 \beta'}{a'^2} + \frac{\cos^2 \beta'}{b'^2} \\ &= \frac{\cos^2 \beta'''}{a''^2} + \frac{\sin^2 \beta'''}{b''^2}; \\ C &= \frac{\cos^2 \beta'}{a'^2} + \frac{\sin^2 \beta'}{b'^2} \\ &= \frac{\cos^2 \beta''}{a''^2} + \frac{\sin^2 \beta''}{b''^2}; \\ D &= \frac{1}{2} \left[\frac{b''^2 - a''^2}{a''^2 b''^2} \right] \sin 2\beta'''; \\ E &= \frac{1}{2} \left[\frac{b'^2 - a'^2}{a'^2 b'^2} \right] \sin 2\beta'; \\ F &= \frac{1}{2} \left[\frac{b''^2 - a''^2}{a''^2 b''^2} \right] \sin 2\beta''. \end{aligned}$$

Par ailleurs, les extrémités des axes principaux de l'ellipsoïde sont sur des sphères de rayon $r = a, b, c$, et d'équation :

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = r^2. \quad (104)$$

Différentiant (104) et (103), on obtient :

$$X_1 dX_1 + X_2 dX_2 + X_3 dX_3 = 0,$$

soit

$$X_i dX_i = 0 \quad (105)$$

et

$$(AX_1 + DX_2 + FX_3) dX_1 + (BX_2 + DX_1 + EX_3) \times dX_2 + (CX_3 + EX_2 + FX_1) dX_3 = 0. \quad (106)$$

Multipliant (105) par un facteur q arbitraire (multiplicateur de Lagrange), on a :

$$qX_1 dX_1 + qX_2 dX_2 + qX_3 dX_3 = 0. \quad (107)$$

Comparant (106) et (107) et regroupant les termes en X_i , on obtient :

$$\begin{cases} (A - q)X_1 + DX_2 + FX_3 = 0 \\ DX_1 + (B - q)X_2 + EX_3 = 0 \\ FX_1 + EX_2 + (C - q)X_3 = 0 \end{cases}. \quad (108)$$

Multipliant respectivement par X_1, X_2 , et X_3 , puis additionnant, on a :

$$AX_1^2 + BX_2^2 + CX_3^2 + 2DX_1X_2 + 2EX_2X_3 + 2FX_3X_1 - q(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) = 0 \quad (109)$$

d'où, d'après (103) et (104) :

$$1 - qr^2 = 0; \text{ soit } q = 1/r^2. \quad (110)$$

Les équations (108) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} (A - 1/r^2)X_1 + DX_2 + FX_3 = 0 \\ DX_1 + (B - 1/r^2)X_2 + EX_3 = 0 \\ FX_1 + EX_2 + (C - 1/r^2)X_3 = 0 \end{cases}. \quad (111)$$

d'où l'on tire :

$$\frac{X_2}{X_3} = \frac{(A - 1/r^2)E - DF}{D^2 - (B - 1/r^2)(A - 1/r^2)} = J$$

et :

$$\frac{X_1}{X_3} = \frac{(B - 1/r^2)F - DE}{D^2 - (B - 1/r^2)(A - 1/r^2)} = K.$$

Ainsi, $X_2^2 = J^2 X_3^2$ et $X_1^2 = K^2 X_3^2$; utilisant alors (104), on obtient :

$$X_3 = \pm r / (1 + J^2 + K^2)^{1/2}. \quad (112)$$

Les projections $(X_3)_a, (X_3)_b, (X_3)_c$ de a, b , et c sur X_3 sont données par (112) pour les valeurs respectives $r = a, r = b$, et $r = c$.

Soit :

$$a \cos \alpha_1 = \pm a / (1 + J_a^2 + K_a^2)^{1/2}$$

$$\text{et } b \cos \alpha_2 = \pm b / (1 + J_b^2 + K_b^2)^{1/2}$$

ou encore :

$$\cos \alpha_1 = \pm 1/(1 + J_a^2 + K_a^2)^{1/2} \quad (113)$$

et :

$$\cos \alpha_2 = \pm 1/(1 + J_b^2 + K_b^2)^{1/2} \quad (114)$$

avec :

$$J_a = [(A - 1/a^2) E - DF]/[D^2 - (B - 1/a^2) \times (A - 1/a^2)] \quad (115)$$

et :

$$K_a = [(B - 1/a^2) F - DE]/[D^2 - (B - 1/a^2) \times (A - 1/a^2)] \quad (116)$$

et des valeurs analogues pour J_b et K_b en remplaçant a par b dans (115) et (116).

Reste à calculer γ_1 , la troisième valeur indépendante des neuf angles fixant la position de l'E.M.E. par rapport au champ. Il faut pour cela déterminer la projection $(X_2)_a$ de a sur X_2 et donc extraire du système d'équations (111) la valeur de X_2 , soit :

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{DE - F(B - 1/r^2)}{DF - E(A - 1/r^2)} = L,$$

soit :

$$X_1^2 = L^2 X_2^2 \quad (117)$$

alors d'après (104) :

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = r^2 = X_2^2[1 + L^2 + (1/J^2)],$$

d'où

$$X_2 = \pm r/[1 + L^2 + (1/J^2)]^{1/2}. \quad (118)$$

La projection $(X_2)_a$ de a sur X_2 est donnée en remplaçant r par a , d'où :

$$a \cos \gamma_1 = \pm a/[1 + L_a^2 + (1/J_a^2)]^{1/2}$$

soit :

$$\cos \gamma_1 = \pm 1/[1 + L_a^2 + (1/J_a^2)]^{1/2} \quad (119)$$

avec :

$$L_a = [DE - F(B - 1/a^2)]/[DF - E(A - 1/a^2)]. \quad (120)$$

La valeur de J_a est donnée par (115).

N.B. Dans le cas du champ uniaxial (traité en première partie), il suffit de déterminer α_1 et α_2 (α_3 s'en déduisant à partir de $\sum \cos^2 \alpha_i = 1$, $i = 1, 2, 3$). γ_1 n'est utile que dans le cas du champ triaxial.

Conclusion : développements et perspectives d'application.

La théorie présentée concerne les milieux biphasés, ou pouvant être considérés comme tels, par exemple les milieux poreux à une seule phase fluide. Dans les

situations plus complexes, la théorie s'applique également dans le cadre d'une procédure itérative d'homogénéisation.

On aura noté que l'un des fondements de la théorie est l'uniformité du champ électrique dans l'inclusion. Autrement dit, la valeur du gradient est la même en tout point appartenant à l'inclusion. Il en est bien ainsi — on l'a vu — lorsque l'inclusion (homogène), plongée dans un milieu lui-même uniforme, est sphérique ou ellipsoïdale. Il y aurait lieu de rechercher si d'autres corps convexes fermés possèdent eux aussi cette propriété.

On sait par ailleurs qu'en physique macroscopique (Feynman 1969, Leontiev 1985), il y a une analogie formelle entre diverses lois de transfert d'énergie et d'écoulement de la matière. Dans tous les cas, le problème revient à traiter d'un champ qui obéit, au moins dans certains cas particuliers, aux mêmes équations différentielles générales : celles qui parmi les équations de Maxwell concernent les régimes indépendants du temps. Moyennant certaines précautions, il apparaît comme parfaitement fondé de mener l'étude générale des propriétés de champ par le biais de l'électrostatique ou par le choix de tout autre potentiel.

Enfin, nous reconnaissons bien volontiers qu'il reste encore à vérifier expérimentalement la validité de la théorie proposée pour le modèle de l'ellipsoïde quelconque. Il conviendra pour cela de mettre en jeu conjointement l'analyse d'images nécessaire à la description exacte du matériau et au calcul, et les mesures physiques sur des échantillons judicieusement choisis.

Remerciements.

Les auteurs ont plaisir à remercier M. le Professeur G. Ondracek et M.B. Ebel pour l'information généreusement accordée lors d'une visite (J.G.) à Karlsruhe en juin 1986 (et les discussions ultérieures) ; la Sté Nationale Elf-Aquitaine (Production) (MM. C. Jablon et V. Maury) puisque c'est lors du semestre sabbatique de l'un d'entre nous (J.G.) au Centre de Recherches de Pau que l'idée de ce travail fut esquissée ; Mme L. Brulé — sans elle l'obstacle de la langue serait resté infranchissable ; MM. J. Chappelle, J. Fronteau, M. Lepiller et G. Sabatier pour de nombreuses discussions.

Annexe 1.

Domaines de variation des coefficients u , v , w , des racines t_1 et t_2 , de A et de $(A - B + C + D)$.

Nous donnons ici, sans les démonstrations établies par nous-mêmes, le seul exposé des résultats. On rappelle que $0 \leq \lambda \leq 1$, de même pour μ , ν , ℓ , m et n .

a) DOMAINE DE VARIATION DE

$$u = \ell(1 - \mu)(1 - \nu) + m(1 - \lambda) \times \\ \times (1 - \nu) + n(1 - \lambda)(1 - \mu). \quad (22)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \lambda - 1 \leq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 \leq u \leq \ell + m + n \Rightarrow 0 \leq u \leq 1$$

avec $u = 0$ pour $\ell = 0$ et $\lambda = 1$ (ou $m = 0$ et $\mu = 1$; ou $n = 0$ et $\nu = 1$); et $u = 1$ pour $\ell = 1$ et $\mu = \nu = 0 \Leftrightarrow \ell = 1$ et $\lambda = 1$ (ou $m = \mu = 1$; ou $n = \nu = 1$).

b) DOMAINE DE VARIATION DE

$$w = \ell\mu\nu + m\lambda\nu + n\lambda\mu. \quad (24)$$

La borne inférieure est évidemment nulle ($\ell = 0$, $\lambda = 0$).

La borne supérieure s'obtient en prenant $\lambda \leq \mu \leq \nu$ par exemple $\Rightarrow (\lambda - \mu) \leq 0$ et $(\lambda - \nu) \leq 0 \Rightarrow w = \mu\nu + m(\lambda - \mu)\nu + n(\lambda - \nu)\times \mu \leq \mu\nu$, maximal pour $\mu = \nu$ d'où $2\mu = 1 - \lambda$, donc $w \leq \mu^2$ ou $w \leq (1 - \lambda)^2/4 \Rightarrow 0 \leq w \leq 1/4$.

c) DOMAINE DE VARIATION DE

$$v = 1 - u - w. \quad (51)$$

La borne supérieure de v est 1 pour $u = 0$ ($n = 0$ et $\nu = 1$) et $w = 0$ ($\ell = 0$, $\lambda = 0$) soit $v = 1$ pour $m = 1$ et $\nu = 1$.

La borne inférieure s'obtient en remarquant que $0 \leq \lambda^2 \leq \lambda \leq 1$, de même pour μ et $\nu \Rightarrow$ d'après (23),

$$v \geq \ell(\mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu) + \\ + m(\lambda^2 + \nu^2 - 2\lambda\nu) + n(\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu)$$

soit $v \geq \ell(\mu - \nu)^2 + m(\lambda - \nu)^2 + n(\lambda - \mu)^2 \geq 0$, borne inférieure de v ; $0 \leq v \leq 1$.

d) DOMAINES DE VARIATION DE t_1 et t_2 . — $t_1 t_2 = w/u$; w et u étant positifs, t_1 et t_2 sont de même signe; $t_1 + t_2 = -v/u$; v et u étant positifs, t_1 et t_2 sont négatifs et, d'après (26), $|t_2| \geq |t_1|$.

(.) Pour $m = \mu = 1$, $u = 1$, soit d'après (51), $v = w = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 0$.

(..) Pour $\ell = 0$ et $\lambda = 1$; on a $u = 0$ et donc $t_2 \rightarrow -\infty$.

(...) Pour $\ell = 1$ et $\mu = \nu = 1/2$, on a $u = w = 1/4$ donc, d'après (51), $v = 1/2$ d'où $T(t) = (t^2 + 2t + 1)/4 = (t + 1)^2/4$, soit $t_1 = t_2 = -1$.

On a par ailleurs: $((1 - \mu)(1 - \nu) = 1 - \mu - \nu + \mu\nu = \lambda + \mu\nu$ et deux identités analogues établies par permutation circulaire sur λ , μ , ν , d'où

$$u = \ell(\lambda + \mu\nu) + m(\mu + \lambda\nu) + \\ + n(\nu + \lambda\mu) = w + (\ell\lambda + m\mu + n\nu)$$

soit $u \geq w$ et $t_1 t_2 = w/u \leq 1$; puisque $|t_1| \leq |t_2|$, on en déduit $|t_1|^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq t_1 \leq 0$.

La borne -1 est atteinte pour $\ell = 1$ et $\mu = \nu = 1/2$ (...).

La borne 0 est atteinte pour $m = \mu = 1$ (..).

D'autre part,

$$-\infty < t_2 \leq 0.$$

La borne $-\infty$ est atteinte pour $\ell = 0$ et $\lambda = 1$ (..).

La borne 0 est atteinte pour $m = \mu = 1$ (..).

Le cas des racines doubles

$$t_1 = t_2 = 0 \quad (m = \mu = 1)$$

$$\text{et} \quad t_1 = t_2 = -1 \quad (\ell = 1 \text{ et } \mu = \nu = 1/2)$$

correspondent respectivement à des inclusions planes ($\lambda = \mu = 0$) et à des inclusions cylindriques ($\lambda = 0$); (cf. Eqs. (33a), (33b), et (33c).

e) DOMAINE DE VARIATION DE

$$A = \frac{\lambda\mu\nu}{\ell\mu\nu + m\lambda\nu + n\lambda\mu}. \quad (34)$$

On a démontré que $0 \leq A \leq 1$.

La borne 0 est atteinte pour $\lambda = 0$ et/ou $\mu = 0$ et/ou $\nu = 0$.

La borne 1 est atteinte pour $n = 1$ et λ et μ très petits.

f) DOMAINE DE VARIATION DE

$$(A - B + C + D) = \frac{(\lambda - 1)(\mu - 1)(\nu - 1)}{\ell(\mu - 1)(\nu - 1) + m(\lambda - 1)(\nu - 1) + n(\lambda - 1)(\mu - 1)} \quad (35)$$

On a démontré que

$$-1 \leq (A - B + C + D) \leq 0.$$

La borne 0 est atteinte pour $\lambda = 1$ ou $\mu = 1$ ou $\nu = 1$.

La borne -1 est atteinte pour $n = 1$, $\nu = 0$ et λ et μ très petits.

Annexe 2.

Domaines de variation de a_1 , t'_1 , A et C' pour $\lambda = \mu$ (cas de l'ellipsoïde de révolution).

Les relations $\lambda = \mu$, $0 \leq \nu \leq 1$ et $2\lambda + \nu = 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - 2\lambda \leq 1$ ou encore $0 \leq \lambda \leq 1/2$; a_1 , t'_1 , A et C' sont des fonctions de n et de λ . Elles ont été étudiées graphiquement. On ne présente ici que les résultats.

a) DOMAINE DE VARIATION DE

$$a_1 = n + (2 - 3n)\lambda. \quad (59)$$

$$0 \leq a_1 \leq 1$$

avec $a_1 = 0$ pour $n = 0$ et $\lambda = 0$
et $a_1 = 1$ pour $\lambda = 0$ et $n = 1$ ou $\lambda = 1/2$ et $n = 0$.

b) DOMAINE DE VARIATION DE

$$t'_1 = 1 - 1/a_1 = 1 - 1/\{n + (2 - 3n)\lambda\}. \quad (59) \text{ et } (60)$$

Pour

$$0 \leq \lambda \leq 1/3, \quad -\infty < t'_1 \leq 0.$$

La valeur $-\infty$ est atteinte pour $n = 0$ et $\lambda = 0$.

La valeur 0 est atteinte pour $n = 1$ et $\lambda = 0$.

Pour

$$1/3 \leq \lambda \leq 1/2, \quad -1 \leq t'_1 \leq 0.$$

La valeur -1 est atteinte pour $n = 1$ et $\lambda = 1/2$.

La valeur 0 est atteinte pour $n = 0$ et $\lambda = 1/2$.

Rapprochant ces résultats de ceux de l'annexe 1 (cas général), on en déduit que :

$$t'_1 = t_2 \text{ pour } 0 \leq \lambda \leq 1/3$$

et

$$C = 0, \quad D = C',$$

et

$$t'_1 = t_1 \text{ pour } 1/3 \leq \lambda \leq 1/2$$

et

$$C = C', \quad D = 0.$$

c) DOMAINE DE VARIATION DE

$$A = \frac{\lambda(1 - 2\lambda)}{1 - a_1} = \frac{\lambda(1 - 2\lambda)}{1 - n - (2 - 3n)\lambda}. \quad (61)$$

On démontre que : $0 \leq A \leq 1$

avec $A = 0$ pour $n = 0$ et $\lambda = 0$

et $A = 1$ pour $n = 1$ et $\lambda \rightarrow 0$.

La fonction $A(n, \lambda)$ n'est en effet pas continue pour $n = 1$ et $\lambda = 0$. $A(1, \lambda) = 1 - 2\lambda$ et $A(n, 0) = 0$ d'où $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(1, \lambda) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow 1} A(n, 0) = 0$. De

même $A(n, \lambda)$ n'est pas continue pour $n = 0$ et $\lambda = 1/2$, d'où

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1/2} A(0, \lambda) = 1/2 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow 0} A(n, 1/2) = 0.$$

d) DOMAINE DE VARIATION DE

$$C' = 1 + \lambda \frac{a_1 + 2(\lambda - 1)}{a_1(1 - a_1)}; \quad (62)$$

avec $a_1 = n + (2 - 3n)\lambda$.

On démontre que $0 \leq C' \leq 1$ pour $0 \leq \lambda \leq 1/3$ et $0 \leq C' \leq 1/2$ pour $1/3 \leq \lambda \leq 1/2$, avec $C' = 0$ pour $\lambda = 1/3$ et $C' = 1$ pour $\lambda = 0$, $\forall n$.

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a $C' = 0$ pour $0 \leq \lambda \leq 1/2$. La fonction $C'(n, \lambda)$ n'est pas continue pour $n = 0$ et $\lambda = 0$. $C'(n, 0) = 1$ et $C'(0, \lambda) = 0$. Elle n'est pas continue non plus pour $n = 0$ et $\lambda = 1/2$: $C'(0, \lambda) = 0$ et $C'(n, 1/2) = 1 - 1/(2 - n)$ d'où $\lim_{n \rightarrow 0} C'(0, 1/2) = 1/2$.

e) CALCUL DES DIVERS COEFFICIENTS DANS LE CAS DE L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION ($\lambda = \mu$). — Portant dans (22) $\lambda = \mu$ (d'où $\nu = 1 - 2\lambda$) et utilisant $a_1 = n + (2 - 3n)\lambda$, on calcule : $u = (1 - \lambda)a_1$; de même pour (23), $v = 1 - (a_1 + \lambda) + 2\lambda a_1$; pour (24), $w = \lambda(1 - a_1)$; pour (31), $q = \lambda^2(1 - \lambda)$; pour (45), $r = \lambda(2 - 3\lambda)$; et pour (46), $s = a_1 + \lambda$.

Utilisant (50) et (51), on calcule le discriminant de $T(t)$, soit $\sqrt{\Delta} = (1 - n)(1 - 3\lambda)$ pour $0 \leq \lambda \leq 1/3$ et $\sqrt{\Delta} = -(1 - n)(1 - 3\lambda)$ pour $1/3 \leq \lambda \leq 1/2$ et donc $t_1 = -\lambda a_1/u$ pour $0 \leq \lambda \leq 1/3$ et $t_2 = -\lambda a_1/u$ pour $1/3 \leq \lambda \leq 1/2$.

Portant (24), (31), (45) et (46) dans (55) et (56), on a montré à l'aide du langage de calcul formel Numath que c et d peuvent se factoriser sous la forme :

$$c = \{n(n - 1)(1 - \lambda)^3(1 - 3\lambda)^2\}/u^2$$

et

$$d = \{n(n - 1)\lambda(1 - \lambda)^2(1 - 3\lambda)^2\}/u^2;$$

de (43) et (44), on tire : $C = R_1(t_1) = \frac{ct_1 + d}{at_1 + b}$, soit,

pour $0 \leq \lambda \leq 1/3$ et

$$t_1 = -\lambda a_1/u,$$

$$C = \frac{c(-\lambda a_1) + ud}{u(at_1 + b)} = \frac{u^2 c(-\lambda a_1) + u^3 d}{u^3(at_1 + b)} = 0.$$

Les seuls coefficients qui interviennent dans la décomposition de $R(t)$ sont donc : A , B et $D = C'$.

Pour $1/3 \ll \lambda \leq 1/2$, on a $D = R_1(t_2)$, (45), avec $t_2 = -\lambda a_1/u$; c'est donc D qui est nul et A , B et $C (= C')$ interviennent seuls dans la décomposition de $R(t)$.

Annexe 3.

Solution de l'équation générale pour des inclusions sphériques ($\lambda = \mu = \nu = 1/3$).

On vérifie, d'après (59) et (61) que, dans ces conditions, $A = 1/3$ et, d'après (62), que $C' = 0$. L'équation (65) s'écrit alors :

$$\frac{t^{1/3}}{|1-t|} = \frac{F(t_n)}{1-c_D},$$

soit

$$t = \frac{|1-t|^3 \{F(t_n)\}^3}{(1-c_D)^3}.$$

Posant alors : $Q = (1-c_D)/F(t_n)$, $u = 1-t$, et $\varepsilon = \text{signe de } (1-t) = \pm 1$, il vient $Q^3(1-u) = \varepsilon u^3$, ou encore : $u^3 + \varepsilon Q^3 u - \varepsilon Q^3 = 0$; équation du 3^e degré en u .

On rappelle que l'équation du 3^e degré : $x^3 + ax + b = 0$ admet toujours la solution réelle :

$$x_1 = \{(-b/2) + \{(a^3/27) + (b^2/4)\}^{1/2}\}^{1/3} + \{(-b/2) - \{(a^3/27) + (b^2/4)\}^{1/2}\}^{1/3},$$

les puissances fractionnaires portant sur des grandeurs considérées comme complexes.

Faisant alors $a = \varepsilon Q^3$ et $b = -\varepsilon Q^3$, on obtient la solution réelle :

$$u_1 = \frac{Q}{2^{1/3}} \{ [\varepsilon + \{1 + (4 \varepsilon Q^3/27)\}^{1/2}]^{1/3} + [\varepsilon - \{1 + (4 \varepsilon Q^3/27)\}^{1/2}]^{1/3} \}.$$

Pour $\varepsilon = 1$, la quantité $1 + (4 \varepsilon Q^3/27)$ est positive et l'équation $u^3 + \varepsilon Q^3 u - \varepsilon Q^3 = 0$ admet donc une seule racine réelle, et puisqu'on a montré que :

$$\frac{t^{1/3}}{|1-t|} = \frac{F(t_n)}{1-c_D} \text{ admet une solution unique, on a } t = 1 - u_1.$$

Pour $\varepsilon = -1$, la quantité $1 + (4 \varepsilon Q^3/27)$ peut devenir négative, mais, par continuité, la solution réelle $t = 1 - u_1$ est bien toujours solution de

$$\frac{t^{1/3}}{|1-t|} = \frac{F(t_n)}{1-c_D}.$$

On a vérifié le programme de résolution numérique de $F(t) = F(t_n)/(1-c_D)$ en comparant les résultats à la solution exacte $(1-u_1)$. Les résultats coïncident jusqu'à la cinquième décimale, au moins.

Bibliographie

- EBEL B., Universität Karlsruhe, Diplomarbeit (1984).
- EBEL B., JEULIN D., ONDRACEK G., The property-microstructure relationship of a composite consisting of five phases (MRS-Europe) 1985, pp. 187-194.
- FEYNMAN R. P., LEIGTON R. B., SANDS M., Le Cours de physique de Feynman (Bilingua Addison-Wesley) 1969-1970.
- GROLIER J., HUCHER M., POULIQUEN J. M., RISS J., Prise en compte des données de la microscopie quantitative dans le calcul de la conductivité des roches. Généralisation de la théorie d'Ondracek, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série II* **305** (1987) 1499-1502.
- GUNDERSEN H. J. G., JENSEN E. B., Stereological estimation of the volume — weighted mean volume of arbitrary particles observed on random sections, *J. Micros.* **138** (1985) 127-142.
- HASHIN Z., SHTRIKMAN S., A variational Approach to the Theory of the Effective Magnetic Permeability of Multiphase Materials, *J. Appl. Phys.* **33** (1962) 3125-3131.
- HASHIN Z., Assessment of the Self-Consistent Scheme Approximation : Conductivity of particulate Composites, *J. Compos. Mater.* **2** (1968) 284-300.
- KLEIN P., ONDRACEK G., La corrélation entre structure et propriété de champ pour des solides frittés polyphasés. *Rev. Chim. Miner.* **18** (1981) 392-411.
- LÉONTIEV A., Théorie des échanges de chaleur et de masse (Ed. Mir, Moscou) 1985.
- ONDRACEK G., The key positions of stereology in quantitative microstructure-correlations of multiphase materials, *Acta Stereologica. Proc. 3rd Eur. Symp. Stereol. 2nd Part*, 5-21 (1982).
- ONDRACEK G., Zur quantitativen Gefüge-Feldeigenschafts-Korrelation mehrphasiger Werkstoffe, Teil I : Theorie des Gefügestruktur-Feldeigenschafts-Gleichungen zweiphasiger Werkstoffe, *Metall*, 1982, Heft 5, 36, 523 ; Teil II : Die Bestimmung des Gefügedaten durch quantitative Gefügeanalyse, *Metall*, Heft 12, 36, 1288 ; Teil III : Vergleich berechneter und experimenteller Feldeigenschaftswerte für metallische Zweiphasenwerkstoffe, *Metall*, Heft 10, 37, 1016 (1982-83).

- ONDRACEK G., The Quantitative Microstructure. Field Property Correlation of Multiphase and Porous Materials, *Rev. Powder Metall. Phys. Ceram.* **3** (1987) 205-322.
- PEJSA R., Property Determination of Sintered Iron by Stereological Microstructure Analysis, *Mikroskopie* **37** (1980) 325-330.
- RAMSAY J., Folding and fracturing of rocks (McGraw Hill) 1967.
- RISS J., Average equivalent shape : classification of convex bodies. Intern. Congress Stereol., Caen, *Acta Stereol., Suppl. III* **6** (1987) 1034-1040.
- RISS J., GROLIER J., Average equivalent shape : definition and identification. *Acta Stereol.* **5/1** (1986) 37-48.
- STONER E. C., The Demagnetizing Factors for Ellipsoids (1945) **7**, **36**, **263**, 803-821.
- WEIBEL E. R., Stereological Methods. Practical Methods for Biological Morphometry (Academic Press) Vol. 1 (1979).
- Stereological Methods. Theoretical Foundations (Academic Press) Vol. 2 (1980).
-