Etude, au moyen des équations de Gabor et Nelson, du compartimentage annulaire d'un milieu conducteur

J. Troquet, R. Evrard

► To cite this version:

J. Troquet, R. Evrard. Etude, au moyen des équations de Gabor et Nelson, du compartimentage annulaire d'un milieu conducteur. *Revue de Physique Appliquée*, 1987, 22 (3), pp.185-192. 10.1051/rphysap:01987002203018500 . jpa-00245529

HAL Id: jpa-00245529

<https://hal.science/jpa-00245529>

Submitted on 1 Jan 1987

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification
Physics Abstracts
87.10 — 41.10

Etude, au moyen des équations de Gabor et Nelson, du compartimentage annulaire d'un milieu conducteur

J. Troquet et R. Evrard

Instituts de Physiologie et de Physique, Université de Liège, B-4000 Liège, Belgique

(Reçu le 24 novembre 1986, accepté le 4 décembre 1986)

Résumé. — Le compartimentage annulaire d'un milieu conducteur permet d'étudier les différentes situations élémentaires de rapport entre un générateur dipolaire et l'interface contiguë. D'autre part, la modélisation physique nous évitant le calcul des distributions de potentiel, nous pouvons pleinement profiter des avantages techniques d'un réseau discret de résistances de configuration carrée. L'application des équations de Gabor et Nelson aux informations disponibles conduit à opposer les compartiments passifs aux actifs et aux pseudo-actifs, les derniers substituant un générateur image à une hétérogénéité passive. L'association de tous les compartiments caractérise exactement le système. Par contre, l'utilisation des seules informations superficielles revient à ignorer le compartimentage, c'est-à-dire à considérer le milieu comme homogène, même quand ceci ne représente qu'une première approximation de la réalité. Les relations entre cette description simplifiée et le traitement complet sont quantitativement précisées dans chaque cas de figure ; elles sont en outre exprimées *via* le principe de réciprocité, complétant ainsi la cohérence recherchée. Ici aussi, le réductionnisme ne présente que des avantages puisque les mêmes méthodes peuvent être étendues aux situations géométriquement les plus complexes. Orienté vers des analogies biologiques, notre travail vise à concrétiser les étapes du calcul d'un générateur à partir de ses effets potentiométriques et de faciliter ainsi la compréhension de cette synthèse.

Abstract. — Partitioning a conductive medium results either from digitations of the insulating boundary or from a multilayer disposition. In the latter case, an annular inhomogeneity provides the simplest way for studying all the elementary relations between a dipole generator and the interface in the vicinity of which it lies. Using a physical model, the potential distributions are directly available and we can take advantage of a square network of resistances. The electrical information is finally treated by means of the Gabor-Nelson equations to define the compartments which are passive and those which are active or pseudoactive : the latter substituting an image generator to the passive inhomogeneity. The superposition of all the compartments leads to an exact characterization of the system. Restricting the observations to the sole insulating surface leads to approximate results the validity of which is discussed. In each case, the relations between the approximative and the correct results are justified ; they are also expressed through the reciprocity principle to strengthen the consistency of our approach. Oriented towards biological applications, our work tries to renew the steps in the calculation of a generator from its potential distributions and so to improve the understanding of the inverse problem.

1. Introduction.

Le problème inverse de l'électrocardiologie porte sur la détermination d'un générateur équivalent au cœur à partir de distributions de potentiel mesuré en des points adéquats. La méthode de Gabor et Nelson 1954 [1] fournit une réponse à ce problème. Dans le cas d'un système présentant des hétérogénéités délimitées par des interfaces, les points adéquats se situent au niveau de ces frontières.

Avec des notations légèrement différentes de

celles de Brody 1956 [2], on écrit alors la formule de Gabor et Nelson sous la forme

$$\mathbf{M} = \gamma_1 \iint_1 \mathbf{n}_1 V(\mathbf{r}) dS + (\gamma_2 - \gamma_1) \iint_2 \mathbf{n}_2 V(\mathbf{r}) dS \\ + \dots + (\gamma_k - \gamma_{k-1}) \iint_k \mathbf{n}_k V(\mathbf{r}) dS \quad (1)$$

où $\gamma_1 \dots \gamma_k$ représentent les conductivités dans les différentes couches emboîtées les unes dans les

autres, les indices allant en croissant vers l'intérieur du système. Quant à l'indice des intégrales, il se rapporte aux interfaces dont les normales externes sont désignées par $\mathbf{n}_1 \dots \mathbf{n}_k$. La couche i est donc comprise entre l'interface externe i et l'interface interne $i + 1$. Enfin, $V(\mathbf{r})$ est le potentiel mesuré au niveau où la normale est précisée et $\mathbf{M}$ est le moment dipolaire cherché. Cette formulation souligne la nécessité d'une information interne lorsqu'il y a des différences de conductivité.

L'alternative que nous proposons ici est de considérer le système couche par couche pour mieux distinguer les compartiments passifs obéissant à l'équation de Laplace de ceux contenant des sources et obéissant donc à l'équation de Poisson. Les compartiments étant maintenant étudiés séparément, les termes de courant normal aux frontières ne se simplifient plus et nous devons écrire

$$\mathbf{M} = \gamma \oint \mathbf{n}V(\mathbf{r}) dS + \oint \mathbf{r}j_n(\mathbf{r}) dS \quad (2a)$$

ou encore

$$\mathbf{M} = \gamma \left(\oint \mathbf{n}V(\mathbf{r}) dS + \oint \mathbf{r}E_n(\mathbf{r}) dS \right) \quad (2b)$$

lorsque le compartiment est actif. Le même résultat reste valable pour un compartiment passif mais alors $\mathbf{M} = 0$.

Les intégrales $\oint$ sont effectuées sur l'ensemble des frontières du compartiment. Quant à $j_n(\mathbf{r})$ et $E_n(\mathbf{r})$, ils spécifient les composantes de la densité de courant et du champ électrique normales aux surfaces considérées et orientées positivement vers l'extérieur du compartiment.

Considérons le cas où un seul compartiment : le i -ème, est actif. Il est délimité extérieurement par la frontière i et intérieurement par l'interface $i + 1$. Quand on lui applique l'équation (2a), on obtient donc

$$\frac{\mathbf{M}}{\gamma_i} = \oint \mathbf{n}V(\mathbf{r}) dS + \frac{1}{\gamma_i} \oint \mathbf{r}j_n(\mathbf{r}) dS.$$

En combinant cette équation avec celles des compartiments $i + 1$ et $i - 1$ voisins, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{M}}{\gamma_i} = & \iint_{i-1} \mathbf{n}V(\mathbf{r}) dS - \iint_{i+2} \mathbf{n}V(\mathbf{r}) dS + \\ & + \frac{1}{\gamma_{i-1}} \oint \mathbf{r}j_n(\mathbf{r}) dS + \frac{1}{\gamma_i} \oint \mathbf{r}j_n(\mathbf{r}) dS + \\ & + \frac{1}{\gamma_{i+1}} \oint \mathbf{r}j_n(\mathbf{r}) dS. \end{aligned}$$

Les intégrales de potentiel sont prises sur la surface externe $i - 1$ du compartiment $i - 1$ et sur la surface interne $i + 2$ du compartiment $i + 1$, les normales étant orientées vers l'extérieur des surfaces comme

dans l'équation (1). Les intégrales de potentiel se compensent deux à deux sur les surfaces du compartiment i . De proche en proche, on étend ce résultat à tout le volume, de sorte que

$$\frac{\mathbf{M}}{\gamma_i} = \iint_1 \mathbf{n}V(\mathbf{r}) dS + \sum_{l=1}^k \frac{1}{\gamma_l} \oint \mathbf{r}j_n(\mathbf{r}) dS \quad (3)$$

où la seule intégrale de potentiel qui subsiste est prise sur la frontière imperméable, en l'occurrence, la plus externe.

Si les intégrales de courant sont exprimées interface par interface, l'équation (3) devient

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{M}}{\gamma_i} = & \iint_1 \mathbf{n}V(\mathbf{r}) dS + \\ & + \sum_{l=2}^k \left(\frac{1}{\gamma_l} - \frac{1}{\gamma_{l-1}} \right) \iint_l \mathbf{r}j_n(\mathbf{r}) dS \quad (3a) \end{aligned}$$

étant entendu que, de nouveau, la normale est positive vers l'extérieur du volume inclus par la surface en cause. Le deuxième terme fait donc bien apparaître les corrections nécessitées par l'hétérogénéité.

Cette formulation revient en quelque sorte à traiter le milieu comme s'il était homogène et de conductivité γ_i , à condition d'y ajouter un moment fictif par compartiment et dont la valeur peut être déduite de l'équation (3). A ce titre, le moment fictif ne peut être localisé en un point particulier mais se rapporte à l'ensemble de la couche. Puisque l'on remplace ainsi chaque hétérogénéité par un moment fictif, celui-ci joue le rôle d'une image, à condition de ne pas s'intéresser à la distribution locale du potentiel mais à l'effet global dans les intégrales de surface. Au contraire, dans le modèle analytique de Arthur et Geselowitz 1970 [3], une infinité d'images élémentaires détermine la distribution de potentiel. Les contributions intégrales, tant partielles que totales, sont cependant tout à fait équivalentes aux nôtres. Pour le but que nous poursuivons, la déduction des images élémentaires constitue toutefois un préalable inutile.

Il est certes conceptuellement commode de recourir à des expressions en courant ; cependant, en pratique, les mesures de courant sont difficiles à exécuter, tout spécialement en milieu continu et *in vivo*. Aussi, préférons-nous écrire les équations en termes de potentiel et de champ électrique. De cette façon, l'équation (3a) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{M}}{\gamma_i} = & \iint_1 \mathbf{n}V(\mathbf{r}) dS + \\ & + \sum_{l=2}^k \iint_l \mathbf{r}(E_n^{(l)}(\mathbf{r}) - E_n^{(l-1)}(\mathbf{r})) dS \quad (3b) \end{aligned}$$

où $E_n^{(l)}(\mathbf{r})$ est la composante normale du champ dans le compartiment l , donc de conductivité γ_l . Il faut

remarquer que $E_n^{(l)}(\mathbf{r})$ et $E_n^{(l-1)}(\mathbf{r})$, bien que mesurés au niveau de la même paroi, sont différents du fait de la discontinuité du champ au niveau de l'hétérogénéité. Cette dernière formulation présente aussi l'avantage de ne plus faire intervenir explicitement les conductivités qui, en pratique, sont souvent mal connues.

Les équations ci-dessus s'appliquent au milieu continu. Elles sont cependant transposables aux structures discrètes telles que les réseaux de résistances, ainsi que l'un d'entre nous l'a montré dans un article récent Troquet *et al.* 1985 [4]. Ces réseaux présentent encore l'avantage de l'accessibilité des sites de mesure et de l'absence d'effet parasite de polarisation si gênant en cuve rhéoelectrique. Dans une note préliminaire, Troquet 1986 [5], le même auteur a discuté l'effet Brody selon les points de vue développés ci-dessus et au moyen du réseau de résistances que nous venons d'évoquer. Le but du présent article est de généraliser cette approche.

2. Méthodes et techniques.

Du point de vue technique, nous utilisons un réseau plan de résistances où les contours sont pris le long d'une série d'éléments conducteurs, comme le montre la figure 1. Le système continu correspondant à ce réseau de résistances serait une lame suffisamment mince pour que potentiel et champ ne varient pas de façon appréciable sur son épaisseur h . Dans toutes les équations (1) à (3), l'intégrale dans la direction normale au plan de la lame est alors triviale et se réduit à un facteur h . Les intégrales qui subsistent à ce stade sont des intégrales de contour dans le plan de la lame.

Pour passer du système continu à deux dimensions auquel nous avons réduit le problème, à notre réseau de résistances, on discrétise les intégrales en les remplaçant par des sommes sur des éléments finis de longueur arbitraire dl . Il est évident que l'approximation ainsi opérée est d'autant meilleure que le nombre d'éléments considérés, donc de résistances, est important. Dans cette discrétisation, le produit $j_n(\mathbf{r}) dS$ devient tout simplement le courant normal au contour considéré. Toutefois, ce courant est en général différent de part et d'autre de l'interface du fait d'une composante circulant dans les éléments résistifs matérialisant le contour et désignés par J_{55} sur la figure 1. Un problème analogue se poserait d'ailleurs en milieu continu en raison du fait que les mesures de gradient de potentiel ne peuvent être effectuées qu'à une distance finie de la frontière.

Nous sommes donc amenés à prendre pour courant dans les éléments résistifs normaux au contour soit J_{46} dans la figure 1, la moyenne des flux sur les deux versants de l'interface à savoir respectivement J_{45} et J_{56} à l'intérieur et à l'extérieur de la frontière perméable située au niveau 5 dans la figure 1. En milieu continu, la même moyenne des composantes

Fig. 1. — Au sein de la représentation du réseau comme une succession de milieux continus, nous détaillons une partie du maillage réel. Nous indiquons en outre comment s'exerce la contrainte de discrétisation sur la densité de courant normale à une interface. Les indices numériques se rapportent aux niveaux en y entre lesquels circule la densité de courant considérée. Ainsi J_{45} par exemple représente la densité de courant dans les résistances sous-jacentes à l'interface située au niveau 5. Pour ce qui est de la justification de la moyenne, voir le texte. Dans l'encart, l'épaisseur du trait suggère la différence entre les éléments résistifs destinée à introduire une hétérogénéité.

[The different parts of the resistive network are represented as pieces of a continuous medium ; nevertheless, the real discretization is locally drawn. We also indicate how to calculate the current density in such a situation. The numerical indices refer to the y levels between which the current J flows. J_{45} for instance, represents the current in the resistance just inside the interface situated on the level 5. About the justification of the mean, see the text. In the disk, the line thickness suggests the difference between the resistances introducing the inhomogeneity.]

normales du courant obtenues en des points équidistants de la frontière éliminerait semblablement les erreurs à l'ordre linéaire en cette distance. En réalité, nous utilisons les différences de potentiel aux bornes de résistances qui, dans le cas de l'hétérogénéité, sont différentes de part et d'autre du contour. En conséquence, la moyenne de termes en différences de potentiel doit être pondérée en fonction de l'importance des résistances correspondantes.

Rappelons en effet, que la maille du réseau étant carrée et de côté dl , représenté par une résistance $R_{(l)}$, la conductivité $\gamma_{(l)}$ est tout simplement remplacée par $\frac{dl}{R_{(l)} dS}$ où $dS = h dl$ avec h réduit arbitrairement à la valeur unitaire. Il s'ensuit donc que

$$j_n(\mathbf{r}) = \gamma_{(l)} E_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{2h} \left(\frac{\Delta V_{(l)}}{dl R_{(l)}} + \frac{\Delta V_{(l-1)}}{dl R_{(l-1)}} \right).$$

Remarquons en outre qu'après transformation du même genre, les équations (3) à (3b) contiendraient $h dl$ dans tous leurs termes ce qui pourrait donner lieu à simplification.

De même, la paire source puits qui injecte le courant dans le système est connectée aux bornes d'une résistance élémentaire de telle sorte que le facteur distance dans l'expression du moment M est tout simplement dl et par conséquent $M = I dl$ où I est le courant injecté. Pour faciliter la discussion, nous garderons aussi le facteur dl dans sa signification d'unité de mesure de longueur.

Pour vérifier la validité de la procédure, nous avons tout d'abord traité un réseau homogène en le morcelant de façon fictive. Comme nous le montrons dans le paragraphe consacré aux résultats, les équations (1) et (3) sont bien satisfaites. Nous avons ensuite envisagé une hétérogénéité annulaire, but ultime de notre travail.

Le réseau que nous utilisons est de configuration carrée comprenant, dans le cas homogène, 23 lignes de 22 résistances qui valent chacune $10\text{ k}\Omega \pm 1\%$. Il est alimenté par un injecteur de $195\text{ }\mu\text{A}$ soit au centre (disposition désignée par c dans les tableaux I à III) soit près d'un côté. Dans le dernier cas, la paire source-puits est orientée perpendiculairement (disposition n) ou parallèlement à ce côté (disposition t).

On simule l'hétérogénéité annulaire en remplaçant certaines résistances de $10\text{ k}\Omega$ par des éléments de $2,4$ ou de $41,2\text{ k}\Omega$ dans la région que l'on veut perturber. On a ainsi un système de trois compartiments concentriques dont les deux extrêmes présentent une conductivité inchangée, l'anneau intermédiaire introduisant la perturbation (voir cartouche des tableaux I à III). Les mêmes dispositions c , n et t de l'alimentation sont à nouveau utilisées.

On mesure, au voltmètre digital et par rapport au point milieu de la paire source-puits les distributions

TABLEAU I.

Front. perm. ext.		Posit.	Front. perm. int.	
$\ominus$ 1170.9	$\ominus$ 768.5		$\ominus$ 1042.7	$\ominus$ 899.6
$\ominus$ 216.2	$\ominus$ 175.3	n	$\ominus$ 100.2	$\ominus$ 66.3
$\ominus$ 646.5	$\ominus$ 647.7	t	$\ominus$ 256.6	$\ominus$ 256.6
$\oint V dl$	$\oint EI dl$	Quant.	$\oint V dl$	$\oint EI dl$
mV dl		Unité	mV dl	

TABLEAU II.

Front. perm. ext.		Posit.	Front. perm. int.	
$\ominus$ 896.3	$\ominus$ 559.7		$\ominus$ 1304.5	$\ominus$ 626.2
$\ominus$ 393.4	$\ominus$ 115.1	n	$\ominus$ 77.8	$\ominus$ 43.5
$\ominus$ 878.5	$\ominus$ 456.1	t	$\ominus$ 183.2	$\ominus$ 182.4
$\oint V dl$	$\oint EI dl$	Quant.	$\oint V dl$	$\oint EI dl$
mV dl		Unité	mV dl	

TABLEAU III.

Front. perm. ext.		Posit.	Front. perm. int.	
$\ominus$ 985.1	$\ominus$ 675.3		$\ominus$ 742.6	$\ominus$ 1210.6
$\ominus$ 115.2	$\ominus$ 189.7	n	$\ominus$ 85.5	$\ominus$ 59.9
$\ominus$ 454.5	$\ominus$ 851.1	t	$\ominus$ 229.4	$\ominus$ 232.8
$\oint V dl$	$\oint EI dl$	Quant.	$\oint V dl$	$\oint EI dl$
mV dl		Unité	mV dl	

de potentiel le long de la frontière externe imperméable et des différentes interfaces. Afin de pouvoir calculer la moyenne des courants normaux aux interfaces, de la manière décrite précédemment, nous mesurons également le potentiel aux bornes des résistances normales jouxtant ces interfaces. Enfin, comme nous l'avons expliqué plus haut, les intégrales sont remplacées par des sommes. Les potentiels et les champs considérés dans ces sommes sont calculés par interpolation linéaire, au milieu des éléments résistifs.

3. Résultats.

Le tableau I rassemble nos résultats concernant le cas homogène et les dispositions c , n et t précisées en encart. Nous en concluons que l'intégrale de $nV(\mathbf{r})$ (que nous écrivons $\oint V dl$ dans les tableaux et la figure 2) sur le contour isolant, divisée par la résistance élémentaire du réseau ($dl = 1$) restituée à 5 % près la valeur du courant de source ($195 \mu A$) donc en accord avec la théorie.

On aboutit à une conclusion similaire pour un compartiment actif, cette fois affecté d'une frontière perméable imposant de devoir tenir compte de la contribution en champ électrique normal $E_{(n)}$. Pour s'en convaincre, il suffit de se reporter au cas de l'alimentation centrée, qu'il s'agisse de la frontière externe imperméable ($\oint V dl$), ou de la frontière perméable intérieure ($\oint V dl + \oint El dl$), la dernière composante exprimant, dans les tableaux et la

figure 2, ce qui était noté antérieurement $\oint \mathbf{r} E_{(n)}(\mathbf{r}) dS$. La précision est alors voisine de 1 %.

Pour les compartiments passifs, la somme des intégrales de potentiel et de champ, toujours divisée par R , s'avère bien négligeable par rapport au courant d'alimentation comme il se doit puisque ces compartiments ne contiennent pas de source. L'erreur est à nouveau au niveau du %. Dans le cas de l'anneau par exemple, la somme des contributions en potentiel et en champ doit être effectuée tant sur la frontière perméable externe que sur l'intérieure. On obtient ainsi $1,2 \text{ mV dl}$ ce qui est tout à fait négligeable face à $\frac{M}{\gamma h} = 1\,837,6 \text{ mV dl}$ pour la disposition t prise pour exemple.

Envisageons maintenant l'existence d'une hétérogénéité annulaire. Si la conductivité de l'anneau est 4,2 fois plus forte qu'au centre et à la périphérie, nous nous reportons au tableau II. En revanche, si la conductivité de l'anneau est 4,2 fois moindre que celle du centre et de la périphérie, on consultera les résultats du tableau III.

Fig. 2. — Comme il est dit dans le texte, le moment d'un dipôle centré dans un réseau homogène est représenté par la hauteur d'un rectangle dont la base est proportionnelle à la distance origine-bord libre et dont la diagonale indique la répartition entre $\oint V dl$ et $\oint El dl$, les deux composantes de $M/\gamma h$. En présence d'une hétérogénéité annulaire, dont la conductivité est moindre que celle du milieu qui l'enserme, moins de courant quitte le compartiment central ; par conséquent, le compartiment périphé-

que s'appauvrit ce qui se traduit par des pentes différentes de celle de la diagonale de référence. De plus, à partir de l'anneau jusqu'au bord libre, $\oint V dl + \oint El dl$ sous-estime $M/\gamma h$. La différence entre le moment réel et le moment sous-estimé est assimilable à un générateur image qui se substituerait à l'hétérogénéité pour entretenir le confinement central du courant.

[For a central dipole energizing a homogenous network, the symmetry allows the following representation. Indeed, as $\oint V dl + \oint El dl$ is equal to $M/\gamma h$ everywhere from the origin to the insulating boundary, and as the two components have complementary values, the constant ordinate M leads to a rectangle, the diagonal of which indicates the two parts of M . When an annular inhomogeneity is present, the conductivity of which is less than that of the surroundings, less current leaves the inner compartment so that $\oint V dl$ increases faster. Reciprocally, the

outer compartment is less feeded and $\oint V dl$ increases slower. Between the two compartments, $\oint V dl$ decreases as if there was an opposite generator taking some current from the outer compartment to force it in the inner one. Such an image generator is responsible for the low value of $\oint V dl$ on the insulating boundary. Note that the same underestimation would result from $\oint V dl + \oint El dl$ taken over the outer face of the inhomogeneity so that the outer compartment remains globally passive, i.e. it follows the Laplace equation.]

De l'ensemble de ces observations, nous déduisons que, quel que soit le sens de la modification de conductivité dans l'anneau, l'intégrale du potentiel sur le contour isolant sous-estime le moment du générateur quand ce dernier est situé dans la région entourée par l'hétérogénéité. Dans le cas où le moment est extérieur à l'hétérogénéité, si la conductivité de l'anneau est plus grande que celle des régions qui l'enserrent, l'intégrale de potentiel sur le contour isolant sous-estime encore le moment du générateur lorsque ce dernier est parallèle à la limite perméable externe de l'hétérogénéité. Elle le surestime au contraire pour un anneau moins conducteur que le centre et la périphérie du réseau.

D'une manière analogue, l'intégrale de potentiel sur le contour isolant surestime le moment du générateur quand celui-ci est normal à la limite perméable externe de l'hétérogénéité et que l'anneau est plus conducteur que le reste du réseau. Le même générateur s'avère par contre sous-estimé si la conductivité de l'anneau devient inférieure à celle du centre et du compartiment périphérique, en l'occurrence actif.

Par ailleurs, la différence entre $M/\gamma h$ et l'intégrale sur le contour isolant devrait être égale à la somme des intégrales de potentiel sur les frontières perméables, multipliée par le rapport $(\gamma' - \gamma)/\gamma$ en accord avec l'équation (1). Ceci n'est cependant vérifié que très approximativement, l'écart à la théorie pouvant dépasser 20 %. Nous discuterons ce point en détail plus loin. Par contre, si nous nous référons à la formule (2b) qui conserve les intégrales de champ, les résultats obtenus sont nettement plus favorables. En général, l'erreur avoisine 2 à 3 %.

La représentation graphique des composantes en potentiel $\left(\oint V dl\right)$ et en champ $\left(\oint E dl\right)$ n'est pas simple. Néanmoins, dans le cas du dipôle centré, la symétrie autorise une condensation axiale illustrée par la figure 2. D'après le tableau I, c'est-à-dire en l'absence d'hétérogénéité, nous savons en effet que l'intégrale de potentiel progresse de façon monotone depuis le centre jusqu'au bord libre, tandis que l'intégrale en champ manifeste une évolution non seulement inverse mais encore complémentaire puisque sur tout le domaine, y compris ses limites, la somme de ces deux composantes aboutit à $M/\gamma h$. Graphiquement, ces évolutions sont donc représentables par la diagonale d'un rectangle dont l'abscisse s'étend du centre au bord libre et dont l'ordonnée forme une somme constante à partir de deux composantes complémentaires variables.

Par rapport à cette référence, un anneau moins conducteur tend à confiner le courant autour du centre actif, de telle sorte que, sur la frontière perméable interne de l'hétérogénéité, l'intégrale de potentiel dépasse la valeur obtenue au même endroit lorsque le réseau est complètement homogène. Cor-

rélativement, cette augmentation de l'intégrale de potentiel réduit d'autant celle de champ puisque leur somme reste égale à $M/\gamma h$. La variation de pente à l'intérieur du compartiment central est donc en rapport avec la rétention relative du courant qu'entraîne l'accroissement de résistance dans le compartiment contigu.

Au-delà de l'anneau, la situation est opposée puisque le retour à la conductivité normale correspond en fait à une circulation appauvrie dont témoigne la diminution de pente. Certes, les deux variations opposées de pente pourraient se compenser, auquel cas l'intégrale de potentiel sur le contour isolant resterait égale à $M/\gamma h$. La réalité est toutefois différente puisque l'hétérogénéité annulaire introduit un écart de potentiel, que nous avons appelé l'image de cette hétérogénéité.

Il en va d'ailleurs de même si, au lieu de réfléchir le courant dans le secteur central, l'hétérogénéité devenue plus conductrice, empêche encore le courant de gagner le compartiment externe avec une intensité optimale.

Considérons maintenant les cas où le dipôle est extérieur à l'anneau. Lorsqu'il est normal à la surface d'un anneau plus conducteur que son environnement, l'intégrale de potentiel sur le contour isolant incite à surestimer M d'une manière analogue à celle que prédit Brody à propos des potentiels électrocardiographiques de surface soumis à l'influence de la masse de sang intracardiaque. Il s'ensuit qu'en moyenne, l'hétérogénéité plus conductrice met en place une image de signe opposé à l'accroissement de l'intégrale de potentiel sur le contour isolant et *vice versa* lorsque l'hétérogénéité est moins conductrice ou que le dipôle est parallèle à l'hétérogénéité.

La cohérence de nos expériences peut encore être mise en évidence par une autre méthode que celle des images à laquelle nous venons de recourir : à savoir l'application du théorème de Helmholtz 1853 [6]. Pour cela, il faut chercher à connaître le champ électrique à l'endroit du dipôle lorsque le courant alimente la périphérie du réseau.

Ainsi, lorsque le réseau est homogène, une alimentation de 195 μA répartie uniformément entre les 23 lignes de 22 résistances de 10 k Ω , fait naître aux bornes de chacune d'elles, un champ électrique de 84,7 mV par déplacement élémentaire dl . Réciproquement, selon le principe de Helmholtz, l'injection dipolaire doit alors susciter sur le contour isolant une distribution de potentiel dont l'intégrale doit satisfaire à la relation formulée par Plonsey 1963 [7] :

$$\iint V(\mathbf{r}) i_r dS = E_r \cdot M \quad (4)$$

où i_r est la densité de courant injecté en chaque point de la périphérie dans la situation où l'on

mesure le champ réciproque E_r , M et $V(r)$ conservant la même signification qu'antérieurement. Dans le cas présent, où la densité de courant i_r est uniforme, l'intégrale se ramène à la somme des potentiels aux points d'injection multipliée par le courant I_r . Comme ce courant est choisi égal à celui de la source dipolaire $I dl$ dans la situation directe il disparaît de l'équation (4).

La moyenne des résultats du tableau I pour la frontière non perméable donne alors 1 866 mV pour le membre de gauche de cette équation. La mesure directe du champ au niveau de la source conduit à 1 863 mV soit $84,7 \text{ mV/dl} \times 22 \text{ dl}$, pour le membre de droite. Dans ce cas en effet, la densité de courant $i_r = I_r/S$ étant uniforme, on peut diviser les deux membres de (4) par i_r et la régression de $\iint V(r) dS$ en fonction de E_r est de la forme $ax + b$ où x représente E_r , a symbolise $I dl \times S/I_r$, soit le nombre de pas d'intégration et b une constante non significativement différente de 0.

En présence d'hétérogénéités, il est difficile d'injecter sur le pourtour, un courant de densité uniforme. Il est plus simple de conserver les mêmes connexions qui consistent à raccorder en parallèle tous les nœuds du côté inférieur du pourtour à la borne négative du générateur et tous ceux du côté supérieur à la borne positive. Ici, pareille approximation semble tolérable puisque la régression obtenue sur l'ensemble des résultats s'établit à $y = 21,3x + 65$ ($r = 0,99$) où les différences entre d'une part 21,3 et 22, d'autre part entre 65 et 0 ne sont pas statistiquement significatives. Autrement dit, nos hétérogénéités n'ont pas suffisamment d'effet à la périphérie pour qu'une perturbation systématique de la régression puisse être dégagée des fluctuations aléatoires.

On peut néanmoins rendre uniforme le courant injecté aux différentes entrées du réseau en disposant en série des résistances ajustables. La régression se conforme alors encore mieux au modèle théorique puisqu'elle devient ainsi : $y = 21,9x + 2$ ($r = 0,99$).

4. Discussion.

Dans le cas d'une seule hétérogénéité passive matérialisée dans notre réseau, le formalisme général présenté à l'introduction apparaît sous la forme simplifiée suivante : lorsque le dipôle est situé extérieurement par rapport à l'anneau, l'application de l'équation (2) à la couche externe donne :

$$\frac{M}{\gamma} = \iint_1 \mathbf{n}V(\mathbf{r}) dS - \iint_2 \mathbf{n}V(\mathbf{r}) dS - \iint_2 \mathbf{r}E_n^{(1)} dS.$$

Pour un dipôle situé dans le compartiment central, on a :

$$\begin{aligned} \frac{M}{\gamma} = & \iint_3 \mathbf{n}V(\mathbf{r}) dS + \iint_3 \mathbf{r}E_n^{(3)}(\mathbf{r}) dS + \\ & + \iint_1 \mathbf{n}V(\mathbf{r}) dS - \iint_2 \mathbf{n}V(\mathbf{r}) dS \\ & - \iint_2 \mathbf{r}E_n^{(1)}(\mathbf{r}) dS. \end{aligned}$$

Pour l'anneau, ici toujours passif, on écrit enfin :

$$\begin{aligned} 0 = & \iint_3 \mathbf{n}V(\mathbf{r}) dS + \iint_3 \mathbf{r}E_n^{(2)}(\mathbf{r}) dS - \\ & - \iint_2 \mathbf{n}V(\mathbf{r}) dS - \iint_2 \mathbf{r}E_n^{(2)}(\mathbf{r}) dS. \end{aligned}$$

Le résultat nul provient de ce que le champ $E_n^{(2)}$ est bien celui mesuré dans l'anneau. Si au contraire, on utilise les champs $E_n^{(1)}$ et $E_n^{(3)}$ extérieurs à l'anneau, le résultat n'est plus nul mais caractérise l'effet global des images au sens où nous l'avons défini. La continuité du courant montre immédiatement que les champs de part et d'autre des frontières de l'anneau sont dans le rapport γ'/γ . Donc, les intégrales en potentiel sur ces mêmes frontières devraient être aux intégrales en champ dans le rapport inverse, ce champ étant celui extérieur à l'anneau, comme c'est le cas dans les tableaux I à III.

Lorsque γ/γ' vaut 4,2 (voir Tabl. III), la moyenne pour les trois expériences c , n et t s'établit à 4,3. En revanche, quand γ/γ' vaut 0,24, la même moyenne est de 0,35. Dans les deux circonstances, les valeurs correspondant à l'alimentation n se conforment le mieux aux prévisions. Les autres types d'alimentation c et t fournissent des résultats qui suivent moins étroitement la théorie. Néanmoins, la cohérence de l'ensemble des mesures satisfaisant au principe de réciprocité, atteste, selon nous, que l'ordre de grandeur des images reste adéquat. En conséquence, la variabilité expérimentale est sans doute imputable au faible nombre des mailles de notre réseau, en particulier dans l'épaisseur de l'anneau.

Comme nous l'avons signalé en présentant les résultats, notre façon (Eq. (2b)) de calculer l'effet des images est plus favorable que celle de Brody basée sur l'équation (1). Notre manière originale d'analyser un système multicouches fait aussi ressortir clairement pourquoi l'intégrale de potentiel sur le contour isolant ne peut caractériser correctement M que dans le cas où la complète homogénéité du modèle rend l'information interne tout à fait redondante.

Par son caractère bidimensionnel et sa simplification géométrique extrême, le système multicouches minimum que nous utilisons voudrait dépouiller les principes en cause des complications que requiert une simulation plus réaliste et néanmoins encore fort

idéalisée, telle que celle de Rudy *et al.* 1979 [8]. En effet, de telles simulations, qui tendent à une meilleure appréciation de l'importance relative des facteurs déterminants n'ajoutent guère aux explications basées sur les seuls principes au contraire, elles s'accompagnent de réticences circonstancielles préjudiciables à la netteté des conclusions. Ainsi, on s'étonne que, 30 ans après l'introduction en électrocardiologie, des études physicomathématiques de l'hétérogénéité, Kramer *et al.* 1984 [9] cherchent à illustrer chez le chien la justesse des prédictions de Rudy *et al.* qui pourtant devraient pouvoir se suffire à elles-mêmes. Pour notre part, nous préférons que cet excellent matériel expérimental serve plutôt à montrer dans quelle mesure l'effet observé au départ d'une morphologie canine, est approximativement justifié par une simulation en configuration sphérique ou, mieux encore, comment les deux effets peuvent se superposer après anamorphose *ad hoc*.

Par ailleurs, d'autres travaux électrocardiologiques actuels, par exemple Manoach *et al.* 1972 [10] laissent croire que l'application *in vivo* des principes électrodynamiques pourrait être en défaut. Ainsi, les auteurs cités contestent l'effet Brody parce qu'ils observent toujours une atténuation des potentiels cutanés, quelle que soit la conductivité du liquide qu'ils injectent dans le péricarde. Cette atténuation, conforme à la théorie, comme le montrent nos expériences sur le réseau est donc interprétée erronément en donnant des raisons biologiques (compression du cœur) à un phénomène qui n'en requiert pas.

Pour y revenir, la théorie des systèmes multicouche très élaborés s'attache beaucoup plus à déduire les distributions de potentiel qu'à les intégrer pour calculer un équivalent du générateur posé au départ. Ce choix expose à toutes les difficultés, non seulement celles du problème direct, mais encore celles de la comparaison quantitative des nappes de potentiel théoriques avec celles que l'on observe *in vivo*.

Notre point de vue est résolument inverse. D'emblée, le système conducteur résout lui-même le problème direct dans un cadre peu représentatif mais néanmoins suffisant car l'effet recherché est plus en rapport avec la disposition relative des sources et des frontières qu'avec les proportions respectées pour les différents types d'agencement. Les données recueillies dans les conditions les plus simples sont ensuite traitées par les équations de Gabor et Nelson, dont la généralité permet de les étendre aux situations réelles mais qui, pour l'instant, servent à identifier les facteurs déterminants plutôt qu'à les détailler.

Nous espérons ainsi exprimer quelle perturbation il faut attendre d'une hétérogénéité et surtout quelle cohérence unit les informations nécessaires à décrire la réalité sans la déformer ou à corriger les approximations consécutives à des traitements parcellaires. Bref, notre propos consiste à comprendre le mécanisme d'intervention de l'hétérogénéité à l'échelle globale du problème inverse en nous inspirant des concepts d'image et de réciprocité sans déroger aux exigences des équations de Poisson et de Laplace régissant les différentes couches du système.

Bibliographie

- [1] GABOR, D. and NELSON, C. V., *J. Appl. Phys.* **25** (1954) 413.
- [2] BRODY, D., *Circ. Res.* **4** (1956) 731.
- [3] ARTHUR, R. M. and GESELOWITZ, D. B., *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **17** (1970) 141.
- [4] HELMHOLTZ, H., *Ann. Phys. Chem.* **29** (1853) 211 et 353.
- [5] TROQUET, J., LAMBIN, Ph. and NELSON, C. V., *J. Theor. Biol.* **114** (1985) 399.
- [6] TROQUET, J., *Bull. Ac. R. Belg. Cl. Sc.* (1986) sous presse.
- [7] PLONSEY, R., *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **10** (1963) 9.
- [8] RUDY, Y., PLONSEY, R. and LIEBMAN, J., *Circ. Res.* **44** (1979) 104.
- [9] KRAMER, D. A., HAMLIN, R. L. and WEED, H. R., *Circ. Res.* **55** (1984) 788.
- [10] MANOACH, M., GITTER, S., GROSMAN, E. and VARON, D., *Am. Heart J.* **84** (1972) 72.