Modélisation des machines cylindriques asynchrones sans fer. Prise en compte de la longueur finie de la culasse

B. Bandelier, F. Rioux-Damidau

► To cite this version:

B. Bandelier, F. Rioux-Damidau. Modélisation des machines cylindriques asynchrones sans fer. Prise en compte de la longueur finie de la culasse. *Revue de Physique Appliquée*, 1986, 21 (5), pp.327-337. 10.1051/rphysap:01986002105032700 . jpa-00245450

HAL Id: jpa-00245450

<https://hal.science/jpa-00245450>

Submitted on 1 Jan 1986

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification
 Physics Abstracts
 89.29A

Modélisation des machines cylindriques asynchrones sans fer. Prise en compte de la longueur finie de la culasse

B. Bandelier et F. Rioux-Damidaou

Laboratoire d'Electrotechnique (*) des Universités Paris VI et XI, Bâtiment 214, 91405 Orsay, France

(Reçu le 19 novembre 1985, révisé le 27 janvier 1986, accepté le 31 janvier 1986)

Résumé. — Une précédente modélisation à base de séries de Fourier spatio-temporelles avait décrit le système formé du bobinage réel, d'une culasse et d'un rotor infiniment longs. On tient compte des dimensions réelles de la culasse en introduisant les discontinuités de perméabilité directement dans les équations de Maxwell. On obtient des équations relativement complexes et l'on donne une méthode en plusieurs étapes pour les résoudre par simple inversion de matrices.

Abstract. — A previous modelling using a double space associated with a temporal Fourier analysis described the device constituted of the real winding and of a yoke and a rotor of infinite lengths. The real dimensions of the yoke are taken into account by directly introducing the permeability discontinuities into the Maxwell's equations. Relatively complex equations are obtained and the method given permits to solve them in several steps by simply inverting matrices.

1. Introduction.

Une méthode de calcul à base de séries de Fourier et de fonctions de Bessel a été mise au point pour modéliser les machines cylindriques asynchrones sans fer [1]. Elle étend à trois dimensions les techniques utilisées antérieurement en mono- et bi-dimensionnel pour l'étude des moteurs linéaires [2-6]. Cette méthode, du type analytique soutenue par ordinateur, a permis de calculer les champs dans un système simplifié qui comportait :

- le bobinage réel, multipolaire en cuivre,
- un rotor et une culasse magnétique que l'on avait supposés très longs.

Permettant le découplage des différents harmoniques, cette modélisation s'est révélée conduire à des temps de calcul particulièrement performants.

Depuis, une étude tenant compte de la longueur réelle du rotor a été publiée [7]. Elle utilise le même principe de modélisation en imposant artificiellement que le courant soit nul dans les régions où l'on avait supposé précédemment que le rotor se prolongeait.

Cette méthode a permis de s'affranchir du couplage des harmoniques qui s'introduit lorsque l'on écrit

les équations pour un système comportant un rotor de longueur finie. Elle a montré que l'approximation du rotor très long est en général excellente pour les machines construites habituellement.

Nous allons traiter ici la modélisation d'une machine comportant une culasse de longueur réelle et un rotor de longueur infinie, ce qui nous amène à aborder le problème du couplage des harmoniques. Compte tenu de l'absence de saturation nous supposons sa perméabilité μ_r constante. Nous supposons de plus que sa conductivité est suffisamment faible pour que les courants de Foucault y soient négligeables.

2. Equations générales.

Le principe du calcul est le même que celui exposé dans [1]. Nous le supposons pour l'essentiel connu et ne rappellerons ici que les grandes lignes.

Il s'agit de résoudre les équations de Maxwell pour un système (cf. Fig. 1) formé d'une infinité de machines alignées suivant l'axe z , régulièrement espacées et suffisamment éloignées les unes des autres pour ne pas interagir. k étant le nombre d'onde, le pas du système a pour longueur $2\pi/k$ et comporte deux machines symétriques. Le rotor de rayon R , de conductivité σ est supposé de longueur infinie. Il tourne à la vitesse angulaire Ω .

(*) Unité associée au CNRS n° 845.

Fig. 1. — Le système modélisé avec rotor infiniment long, bobinage et culasse réels.

[The model with a rotor of infinite length and real winding and yoke.]

Le stator est constitué d'un bobinage polyphasé de longueur \$H\$, situé entre les rayons \$S_i\$ et \$S_e\$. Il est alimenté par un courant de pulsation \$\omega\$.

La culasse magnétique n'est plus comme dans [1] de longueur et de perméabilité infinies, mais de longueur \$H_F\$ et de perméabilité \$\mu_t\$ constante. Elle est située entre les rayons \$F_i\$ et \$F_e\$.

Dans le cadre des approximations de l'électrotechnique, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

L'induction magnétique vérifie :

— dans la culasse

$$\mathbf{B} = \mu_t \mathbf{H} \quad (2a)$$

— ailleurs

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (2b)$$

Dans [1], on tenait compte de la culasse en écrivant que le champ magnétique était radial au niveau de sa surface intérieure. Pour \$\rho < F_i\$, l'on avait \$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0\$, ce qui permettait d'écrire :

— dans le rotor (\$\rho < R\$)

$$\Delta \mathbf{H} = -\sigma \mu_0 \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta} \right) \quad (3)$$

— Dans le rotor

$$\begin{aligned} h_{1nlq}(\rho) &= A_{1nlq} J_l(b\rho) \\ h_{2nlq}(\rho) &= A_{2nlq} J_{l-1}(b\rho) \\ h_{3nlq}(\rho) &= A_{3nlq} J_{l+1}(b\rho) \end{aligned} \quad (9)$$

avec \$b^2 = -[q^2 k^2 + i\sigma\mu_0(n\omega + l\Omega)]\$.

— hors rotor (\$R < \rho < F_i\$)

$$\Delta \mathbf{H} = -\nabla \wedge \mathbf{J} \quad (4)$$

Dans le cas d'une culasse courte, ces équations restent valables pour \$\rho < F_i\$. Les différences apparaissent pour \$\rho > F_i\$. En effet, des discontinuités en \$\mu\$ interviennent au niveau des extrémités de la culasse où l'on a :

$$\Delta \mathbf{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) \quad (5)$$

avec

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) \cdot \mathbf{B} \quad (6)$$

3. Décomposition en série de Fourier.

Les équations (3), (4) et (5) se résolvent en écrivant la décomposition en série de Fourier spatio-temporelle des champs et des courants. Pour une grandeur \$\mathcal{G}\$ on a :

$$\mathcal{G}(\rho, \theta, z, t) = \sum_{n,l,q \in \mathbb{Z}} G_{n,l,q}(\rho) e^{i(n\omega t + l\theta + qkz)} \quad (7)$$

En remplaçant dans (3), (4), (5) \$\mathbf{H}\$ et \$\mathbf{J}\$ par leur décomposition et en intégrant en \$t\$, \$\theta\$ et \$z\$ sur une période relative à chacune de ces variables (voir [1] et [2]) on obtient les équations d'évolution des modes pour

$$\begin{aligned} H_{1n,l,q}(\rho) &= H_{2n,l,q}(\rho) \\ H_{2n,l,q}(\rho) &= (H_\rho - iH_\theta)_{n,l,q}(\rho) = H_{3-n,-l,-q}^*(\rho) \end{aligned} \quad (8)$$

4. Rappel des résultats de la modélisation présentée dans [1].

Cette modélisation suppose le rotor et la culasse magnétique infiniment longs. Les équations d'évolution qui sont des équations de Bessel, sans second membre à l'intérieur du rotor, avec second membre à l'extérieur, ne font intervenir qu'une seule valeur de \$n\$, \$l\$ et \$q\$ à la fois.

La linéarité des équations permet d'exprimer chaque mode sous la forme \$\mathbf{H}_{nlq} = I_n \cdot \mathbf{h}_{nlq}\$. A la différence de [1], nous écrirons les expressions pour les harmoniques \$h_{nlq}\$, ce qui donne :

— Hors rotor

$$\begin{aligned} h_{1nlq}(\rho) &= (G_{1nlq} + C_{2lq}(\rho)) J_l(a\rho) + (\tilde{G}_{1nlq} + \tilde{C}_{2lq}(\rho)) Y_l(a\rho) \\ h_{2nlq}(\rho) &= (G_{1nlq} + C_{2lq}(\rho)) J_{l-1}(a\rho) + (\tilde{G}_{1nlq} + \tilde{C}_{2lq}(\rho)) Y_{l-1}(a\rho) \\ h_{3nlq}(\rho) &= -(G_{1nlq} + C_{2lq}(\rho)) J_{l+1}(a\rho) - (\tilde{G}_{1nlq} + \tilde{C}_{2lq}(\rho)) Y_{l+1}(a\rho) - (u_{2lq} + u_{3lq})/qk \end{aligned} \quad (10)$$

avec $a^2 = -q^2 k^2$.

Les cinq constantes A_1, A_2, A_3, G_1 et $\tilde{G}_1$ étant déterminées pour chaque triplet n, l et q par le système linéaire (61) de [1]. $C_{2lq}(\rho)$ et $\tilde{C}_{2lq}(\rho)$ sont des intégrales calculées dans [1].

Elles valent en posant $Z = a\rho = i q k \rho$

$$\begin{aligned} C_{2lq}(\rho) &= \frac{\pi}{2 q k} \int_{aR}^{a\rho} (u_{1lq} Y_l(z) - u_{2lq} Y_{l-1}(z)) Z dZ \\ \tilde{C}_{2lq}(\rho) &= -\frac{\pi}{2 q k} \int_{aZ}^{a\rho} (u_{1lq} J_l(z) - u_{2lq} J_{l-1}(z)) Z dZ \end{aligned} \quad (11)$$

u_{lq} exprime la décomposition en série de Fourier du bobinage.

5. Modélisation d'une culasse magnétique réelle.

5.1 DESCRIPTION DES DISCONTINUITÉS DE μ . — La différence avec la modélisation d'une culasse de longueur infinie est due au terme $\nabla(1/\mu)$ qui apparaît dans (6). Si S est la surface de transition air-fer on a (cf. Fig. 2) :

$$\nabla\left(\frac{1}{\mu}\right) \cdot \mathbf{B} = \left(\frac{1}{\mu_f} - \frac{1}{\mu_0}\right) (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_S) \delta_S \quad (12)$$

où δ_S est la distribution de Dirac [3] et $\mathbf{n}_S$ la normale à la surface S orientée dans le sens air-fer. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_S$ étant continue, l'expression (12) représente le saut que subit le champ normal $\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}$ à la traversée de la surface S .

5.2 ETABLISSEMENT DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION RELATIVES AUX HARMONIQUES SPATIAUX DES CHAMPS. — Les équations (5) et (6) donnent :

$$\Delta \mathbf{H} = \nabla\left(\nabla\left(\frac{1}{\mu}\right) \cdot \mathbf{B}\right) \quad (13)$$

et compte tenu de (12)

$$\Delta \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\mu_f} - \frac{1}{\mu_0}\right) \nabla[(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_S) \delta_S]. \quad (14)$$

Dans l'équation (14), nous remplaçons $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$ par leur décomposition en série de Fourier. En procédant comme au paragraphe 3, il apparaît immédiatement que les équations ne font intervenir qu'une seule valeur de n à la fois. Pour simplifier, nous n'indiquerons plus cette valeur de n que nous supposons connue et nous écrirons h_{lq} au lieu de h_{nlq} ... Pour la composante en z , il vient ainsi

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{l^2}{\rho^2} - q^2 k^2\right) h_{lq}(\rho) - \frac{k}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{\mu_f} - \frac{1}{\mu_0}\right) \times \\ \times \sum_{l'q'} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/k} \frac{\partial}{\partial z} ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_S)(\rho))_{l'q'} e^{i(l'\theta + q'kz)} \delta_S e^{-i(l\theta + qkz)} d\theta dz = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

où $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_S)_{l'q'}$ représente l'harmonique spatial $l' q'$ de la composante normale de $\mathbf{B}$.

Dans (15) ρ est fixé. δ_S permet de ne conserver le point M de coordonnées ρ, θ, z que s'il appartient à S , c'est-à-dire à la surface limite de la culasse qui est formée de trois surfaces dont nous étudierons les contributions séparément. Elles sont définies de la manière suivante (cf. Fig. 3)

$$\begin{aligned} -\rho_S &= F_i & z_A &\leq z_S \leq z_B & \text{et} & z_C &\leq z_S \leq z_D \\ -\rho_S &= F_e & z_A &\leq z_S \leq z_B & \text{et} & z_C &\leq z_S \leq z_D \\ -F_i &\leq \rho_S \leq F_e & z_S &= z_A, z_B, z_C, z_D. \end{aligned} \quad (16)$$

Fig. 2. — Discontinuité entre l'air et le fer.

[The air-iron discontinuity.]

Fig. 3. — Dimensions géométriques de la culasse.

[The yoke geometric dimensions.]

5.3 CONTRIBUTION DES DIFFÉRENTS TYPES DE SURFACE. — a) Pour une surface cylindrique du type $\rho_S = \text{Cte}$ (c'est le cas aux rayons F_i et F_e lorsque la culasse est de longueur infinie) on a :

$$\rho_S = \delta(\rho - \rho_S).$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_S = \varepsilon b_\rho \quad \text{avec} \quad \varepsilon = 1 \quad \text{si} \quad \rho_{\text{fer}} > \rho_{\text{air}} \\ \varepsilon = -1 \quad \text{sinon}.$$

L'intégrale de (15) est non nulle seulement pour $l' = l$ et $q' = q$. Elle s'écrit :

$$\frac{(2\pi)^2}{k} i q k \varepsilon b_{\rho l q}(\rho) \delta(\rho - \rho_S) \quad (17)$$

et l'on retrouve le découplage des différents harmoniques observé dans [1].

b) Pour une surface du type $z_S = \text{Cte}$ (plan perpendiculaire à l'axe) on a :

$$\delta_S = \delta(z - z_S)$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_S = \varepsilon b_1 \quad \text{avec} \quad \varepsilon = 1 \quad \text{si} \quad z_{\text{fer}} > z_{\text{air}} \\ \varepsilon = -1 \quad \text{sinon}.$$

D'après les propriétés de la distribution de Dirac [8]

$$\frac{\partial}{\partial z} [\delta(z - z_S)] e^{-i q k z} = i q k e^{-i q k z} \delta(z - z_S)$$

et l'intégrale de (15) s'écrit :

$$2 \pi i q k \sum_{q'} \varepsilon b_{1 l q'} e^{i(q' - q) k z_S}. \quad (18)$$

Elle fait intervenir un couplage en q dans l'équation d'évolution des modes $h_{l q}$.

Remarquons que le problème étant indépendant de θ il y a toujours découplage des harmoniques en l .

On pourrait aussi traiter le cas d'une culasse de forme quelconque comportant par exemple des surfaces du type $\theta = \text{Cte}$ (fente, encoches). On aurait :

$$\delta_S = \delta(\theta - \theta_S).$$

L'intégrale de (15) s'écrit :

$$\frac{2\pi}{k} i q k \sum_{l'} \varepsilon b_{\theta l' q} e^{i(l' - l) \theta_S}.$$

Il y aurait alors couplage des harmoniques en l .

5.4 EQUATIONS D'ÉVOLUTION POUR UNE CULASSE MAGNÉTIQUE RÉELLE. — Ecrivons maintenant les équations pour une culasse cylindrique de rayon intérieur F_i , de rayon extérieur F_e , de longueur H_F (la culasse de longueur *infinie* serait telle que $H_F = \pi/k$). La surface limite est définie par (16).

5.4.1 Influence des surfaces interne et externe. — Pour décrire la surface interne ($\rho_S = F_i$) et externe ($\rho_S = F_e$) de la culasse, nous posons :

$$\alpha(z) = 1 \quad \text{pour} \quad z_A \leq z \leq z_B \quad \text{et} \quad z_C \leq z \leq z_D$$

$$\alpha(z) = 0 \quad \text{ailleurs}.$$

Dans le cas de la surface interne de la culasse on a :

$$\delta_S = \delta(\rho - F_i) \alpha(z).$$

L'intégrale de (15) devient, en remplaçant $\alpha(z)$ par sa décomposition en série de Fourier

$$\sum_{q' q'' \in \mathbb{Z}} 2 \pi \delta(\rho - F_i) \int_0^{2\pi/k} i(q' + q'') k [b_{\rho l q'}(\rho) \alpha_{q''}] e^{i(q' + q'' - q) k z} dz$$

qui est non nul seulement si $q' + q'' = q$.

En regroupant les termes $q' > 0$ et $q' < 0$, il reste compte tenu de la symétrie ($b_{\rho l - q'} = -b_{\rho l q'}$)

$$\sum_{q' \in \mathbb{N}} \frac{4 \pi^2}{k} i q k b_{\rho l q'}(\rho) \alpha_{qq'} \delta(\rho - F_i) \quad (19)$$

avec

$$\alpha_{qq'} = \alpha_{q-q'} - \alpha_{q+q'} = \frac{2}{\pi} (-1)^{(q'-q)/2} \left\{ \frac{\sin(q-q') k H_F / 2}{q-q'} + \frac{\sin(q+q') k H_F / 2}{q+q'} \right\}$$

et

$$\alpha_{qq} = \frac{1}{\pi} \left(k H_F + \frac{\sin q k H_F}{q} \right). \quad (20)$$

Pour la surface externe de la culasse ($\rho_s = F_e$) les équations sont similaires à celles obtenues pour $\rho = F_i$. L'intégrale de (15) se déduit directement de l'expression (19) en remplaçant F_i par F_e et en changeant le signe car la normale est dans le sens air-fer. On obtient :

$$- \sum_{q' \in \mathbb{N}} \frac{4 \pi^2}{k} i q k b_{\rho l q'}(\rho) \alpha_{qq'} \delta(\rho - F_e). \quad (21)$$

Remarquons que les expressions (19) et (21) introduisent un couplage des harmoniques en q . En revanche, les modes angulaires (en l) restent toujours découplés.

5.4.2 Contribution des surfaces limites aux extrémités de la culasse. — Les surfaces limites aux extrémités de la culasse sont du type : $z_s = \text{Cte}$, $F_i \leq \rho \leq F_e$.

On utilise donc l'équation (18) avec $z_s = z_A, z_B, z_C, z_D$ (Fig. 3), ε valant alternativement $+1$ et -1 . Pour ces surfaces, l'intégrale de (15) s'écrit :

$$2 \pi i q k \sum_{q'} b_{1l q'}(\rho) [e^{i(q'-q)kz_A} - e^{i(q'-q)kz_B} + e^{i(q'-q)kz_C} - e^{i(q'-q)kz_D}]. \quad (22)$$

Compte tenu de ce que q et q' sont impairs [9] on obtient en remplaçant z_A, z_B, z_C et z_D par leurs valeurs :

$$8 \pi q k \sum_{q' \in \mathbb{Z}} (-1)^{\frac{q'-q}{2}} b_{1l q'}(\rho) \sin(q' - q) \frac{k H_F}{2}.$$

Vu la symétrie du système, $b_{1l q} = b_{1l -q}$ et on obtient finalement :

$$16 \pi q k \sum_{q' \in \mathbb{N}} b_{1l q'}(\rho) (-1)^{\frac{q'-q}{2}} \sin q' \frac{k H_F}{2} \cos q \frac{k H_F}{2}. \quad (23)$$

Notons que ce terme qui n'existe que pour $F_i \leq \rho \leq F_e$ introduit également un couplage des seuls modes en q .

5.4.3 Contribution de l'ensemble des surfaces limites de la culasse. — Au total, les contributions à l'intégrale de (15) des différentes surfaces limites de la culasse sont données par (19), (21) et (23). Comme nous l'avons souligné, les modes en l sont découplés. Aussi nous considérerons les équations correspondant à une valeur de l fixée et nous écrirons seulement les harmoniques sous la forme h_q (au lieu de $h_{nl q}$ ou $h_{l q}$ comme nous le faisons jusque-là puisque nous avons fixé n). En regroupant les contributions des différentes surfaces dans (15) on obtient

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{l^2}{\rho^2} - q^2 k^2 \right) h_{1q}(\rho) - \frac{k}{(2 \pi)^2} \left(\frac{1}{\mu_f} - \frac{1}{\mu_0} \right) \left\{ \sum_{q' \in \mathbb{N}} \frac{4 \pi^2}{k} i q k b_{\rho q'}(\rho) \alpha_{qq'} [\delta(\rho - F_i) - \delta(\rho - F_e)] + \right. \\ \left. + 16 \pi q k \sum_{q' \in \mathbb{N}} b_{1q'}(\rho) (-1)^{\frac{q'-q}{2}} \sin q' \frac{k H_F}{2} \cos q \frac{k H_F}{2} \right\} = 0. \quad (24)$$

Posons comme dans (23) de [1] $Z = a \rho = i q k \rho$

$$h' = \frac{\partial h}{\partial Z}$$

et de plus

$$V_q = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_f} \right) \frac{1}{qk} \left[\frac{i}{2} (\delta(\rho - F_i) - \delta(\rho - F_e)) \sum_{q' \in \mathbb{N}} (b_{2q'} + b_{3q'}) (\rho) \alpha_{qq'} + \right. \\ \left. + \frac{4k}{\pi} \cos q \frac{kH_F}{2} \sum_{q' \in \mathbb{N}} (-1)^{\frac{q'-q}{2}} b_{1q'} (\rho) \sin q' \frac{kH_F}{2} \right]. \quad (25)$$

On obtient alors

$$h''_{1q} + \frac{1}{Z} h'_{1q} + \left(1 - \frac{l^2}{Z^2} \right) h_{1q} = V_q. \quad (26)$$

Pour obtenir l'équation d'évolution de $h_{2q}(h_3)$ on additionne les équations relatives à $h_{\rho q}$ et à $-ih_{\theta q} (+ih_{\theta})$. Dans les intégrales équivalentes à celle de (15), apparaissent $\frac{\partial}{\partial \rho}$ et $-\frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(+\frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$ à la place de $\frac{\partial}{\partial z}$. On obtient finalement :

$$h''_{2q} + \frac{1}{Z} h'_{2q} + \left[1 - \left(\frac{l-1}{Z} \right)^2 \right] h_{2q} = \frac{l}{Z} V_q + V'_q \quad (27)$$

$$h''_{3q} + \frac{1}{Z} h'_{3q} + \left[1 - \left(\frac{l+1}{Z} \right)^2 \right] h_{3q} = -\frac{l}{Z} V_q + V'_q. \quad (28)$$

Les équations d'évolution du champ magnétique (26), (27) et (28) couplent donc par l'intermédiaire de V_q les différents modes en q .

5.5. EXPRESSIONS DES CHAMPS. — Dans la région du rotor les champs sont toujours donnés par les expressions (9) et pour $R \leq \rho \leq F_i$ par les expressions (10).

Pour $\rho \geq F_i$ ils sont déterminés par les équations (26), (27) et (28). Formellement ce sont des équations de Bessel qui ont la même forme apparente que les équations (30), (31) et (32) de [1] dont les seconds membres étaient T_1, T_2, T_3 . Mais ici, le second membre est inconnu puisque V_q dépend des b_q . En traitant V_q comme s'il était connu on peut écrire les champs.

$$\begin{aligned} h_{1q} &= (G_{1q} + C_{2q} + F_{1q}(\rho)) J_l(a\rho) + (\tilde{G}_{1q} + \tilde{C}_{2q} + \tilde{F}_{1q}(\rho)) Y_l(a\rho) \\ h_{2q} &= (G_{1q} + C_{2q} + F_{2q}(\rho)) J_{l-1}(a\rho) + (\tilde{G}_{1q} + \tilde{C}_{2q} + \tilde{F}_{2q}(\rho)) Y_{l-1}(a\rho) \\ h_{3q} &= (-G_{1q} - C_{2q} + F_{3q}(\rho)) J_{l+1}(a\rho) + (-\tilde{G}_{1q} - \tilde{C}_{2q} + \tilde{F}_{3q}(\rho)) Y_{l+1}(a\rho). \end{aligned} \quad (29)$$

G_{1q} et $\tilde{G}_{1q}$ sont des constantes. Les intégrales C_{2q} et $\tilde{C}_{2q}$ liées à un second membre du type de T_1, T_2 et T_3 sont toujours données par (11).

F_{1q}, F_{2q}, F_{3q} et $\tilde{F}_{1q}, \tilde{F}_{2q}, \tilde{F}_{3q}$ sont des intégrales liées aux seconds membres de (26), (27) et (28).

$$F_{1q}(a\rho) = -\frac{\pi}{2} \int_{aF_i}^{a\rho} V_q Y_l(Z) Z dZ \quad (30a)$$

$$F_{2q}(a\rho) = -\frac{\pi}{2} \int_{aF_i}^{a\rho} \left(\frac{l}{Z} V_q + V'_q \right) Y_{l-1}(Z) Z dZ \quad (30b)$$

$$F_{3q}(a\rho) = -\frac{\pi}{2} \int_{aF_i}^{a\rho} \left(-\frac{l}{Z} V_q + V'_q \right) Y_{l+1}(Z) dZ \quad (30c)$$

où $Z = a\rho = iqk\rho$.

Les expressions de $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2$ et $\tilde{F}_3$ s'obtiennent en remplaçant Y par J dans celles de F_1, F_2, F_3 et en changeant le signe.

Considérons l'intégrale $F_{2q}(\rho)$. Elle peut s'écrire :

$$F_{2q}(a\rho) = -\frac{\pi}{2} \int_{aF_i}^{a\rho} [(l-1) V_q Y_{l-1} + (ZY_{l-1} V_q)' - ZY_{l-1} V_{lq}] dZ$$

soit

$$F_{2q}(a\rho) = -\frac{\pi}{2} [ZY_{l-1} V_q]_{aF_i}^{a\rho} + F_{1q}(a\rho). \quad (31)$$

De même :

$$\tilde{F}_{2q}(a\rho) = +\frac{\pi}{2} [ZJ_{l-1} V_q]_{aF_i}^{a\rho} + \tilde{F}_{1q}(a\rho). \quad (32)$$

De la même manière :

$$F_{3q}(a\rho) = -\frac{\pi}{2} [ZY_{l+1} V_q]_{aF_i}^{a\rho} - F_{1q}(a\rho) \quad (33)$$

et

$$\tilde{F}_{3q}(a\rho) = +\frac{\pi}{2} [ZJ_{l+1} V_q]_{aF_i}^{a\rho} + \tilde{F}_{1q}(a\rho). \quad (34)$$

En remplaçant (31), (32), (33) et (34) dans les expressions des champs (29), les termes tout intégrés s'éliminent et il reste simplement :

$$\begin{aligned} h_{1q}(\rho) &= (G_{1q} + C_{2q} + F_{1q}(\rho)) J_l(a\rho) + (\tilde{G}_{1q} + \tilde{C}_{2q} + \tilde{F}_{1q}(\rho)) Y_l(a\rho) \\ h_{2q}(\rho) &= (G_{1q} + C_{2q} + F_{1q}(\rho)) J_{l-1}(a\rho) + (\tilde{G}_{1q} + \tilde{C}_{2q} + \tilde{F}_{1q}(\rho)) Y_{l-1}(a\rho) \\ h_{3q}(\rho) &= - (G_{1q} + C_{2q} + F_{1q}(\rho)) J_{l+1}(a\rho) - (\tilde{G}_{1q} + \tilde{C}_{2q} + \tilde{F}_{1q}(\rho)) Y_{l+1}(a\rho). \end{aligned} \quad (35)$$

— Pour $\rho < F_i$ les intégrales $F_{1q}(\rho)$ et $\tilde{F}_{1q}(\rho)$ sont nulles et l'on retrouve les expressions (10).

— Pour $F_i \leq \rho \leq F_e$ on remplace V_q dans (30a) par son expression (25). L'intégrale en $\delta(\rho - F_i)$ est immédiate et il reste

$$\begin{aligned} F_1(a\rho) &= \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_f} \right) \cdot \left[-\frac{2}{q} \cos q \frac{kH_F}{2} \int_{aF_i}^{\rho} \sum_{q' \in \mathbb{N}} (-1)^{\frac{q'-q}{2}} \sin q' \frac{kH_F}{2} b_{1q'}(\rho) Y_l(Z) Z dZ + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\pi}{4} qkF_i \sum_{q' \in \mathbb{N}} \alpha_{qq'}(b_2 + b_3)_{q'}(F_i) Y_l(aF_i) \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

$\tilde{F}_1$ se déduit directement de (36) en remplaçant Y_l par J_l et en changeant le signe.

Le premier terme de (36) (celui qui comporte l'intégrale) rend compte de la discontinuité du champ à la transition air-fer aux extrémités de la culasse.

Le second terme exprime la discontinuité à la surface interne de la culasse (au rayon F_i).

Si on se place au rayon $\rho = F_i + \varepsilon$ (surface interne) seul ce second terme est présent dans F_1 puisque l'intégrale de (36) est alors nulle. Dans ce cas on constate que :

$$F_1(aF_i) J_l(aF_i) + \tilde{F}_1(aF_i) Y_l(aF_i) = 0$$

et $h_{1q}(F_i) = (G_1 + C_2) J_l(aF_i) + (\tilde{G}_1 + \tilde{C}_2) Y_l(aF_i)$ qui est l'expression du champ dans l'air.

La continuité de h_1 est donc bien assurée au rayon F_i . On peut vérifier que celle de h_θ l'est également.

— Pour $\rho \geq F_e$ l'expression de $F_{1q}(\rho) + i\tilde{F}_{1q}(\rho)$ devient :

$$\begin{aligned} F_{1q}(\rho) + i\tilde{F}_{1q}(\rho) &= \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_f} \right) \left[-\frac{2}{q} \cos q \frac{kH_F}{2} \int_{aF_i}^{aF_e} \sum_{q' \in \mathbb{N}} (-1)^{\frac{q'-q}{2}} \sin q' \frac{kH_F}{2} b_{1q'}(\rho) \times \right. \\ &\quad \times (Y_l(Z) - iJ_l(Z)) Z dZ + \frac{i\pi}{4} qkF_i \sum_{q' \in \mathbb{N}} \alpha_{qq'}(b_2 + b_3)_{q'}(F_i) (Y_l(aF_i) - iJ_l(aF_i)) \\ &\quad \left. - \frac{i\pi}{4} qkF_e \sum_{q' \in \mathbb{N}} \alpha_{qq'}(b_2 + b_3)_{q'}(F_e) (Y_l(aF_e) - iJ_l(aF_e)) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

où la partie en Y_l correspond à F_1 et celle en J_l à $\tilde{F}_1$.

(37) comporte un terme supplémentaire par rapport à (36) qui exprime la discontinuité du champ à la traversée de la surface extérieure de la culasse (au rayon F_e).

Notons enfin que $F_{1q}(\infty) = F_{1q}(F_e)$.

Lorsque la culasse est infiniment longue (c'est-à-dire $H_F = \pi/k$) le premier terme de (36) (et de (37)) est nul. D'autre part $\alpha_{qq'} = \delta_{qq'}$, δ étant le symbole de Kronecker. Dans ce cas, comme cela était prévisible, le couplage de modes disparaît.

5.6 DÉTERMINATION DES CONSTANTES POUR UNE CULASSE DE LONGUEUR FINIE. — Les champs d'un mode donné dépendent des cinq constantes A_{1q} , A_{2q} , A_{3q} , G_{1q} et $\tilde{G}_{1q}$ qui sont déterminées à partir des conditions aux limites.

Les quatre premières équations du système (61) de [1], qui correspondent à des conditions aux limites du rotor et à l'intérieur de celui-ci, restent valables. La cinquième qui considérait que le champ était radial pour $\rho = F_i$ doit être modifiée. Nous devons écrire que les champs sont nuls à l'infini. En supposant qu'il n'y a pas de conducteur au-delà du rayon S_e , on a :

$$\begin{aligned} C_{2q}(\infty) &= C_{2q}(S_e) \\ \tilde{C}_{2q}(\infty) &= \tilde{C}_{2q}(S_e). \end{aligned}$$

Compte tenu de ce que $F_{1q}(\infty) = F_{1q}(F_e)$ et $\tilde{F}_{1q}(\infty) = \tilde{F}_{1q}(F_e)$, la condition des champs nuls à l'infini s'écrit :

$$\begin{aligned} G_{1q} + C_{2q}(S_e) + F_{1q}(F_e) + \\ + i[\tilde{G}_{1q} + \tilde{C}_{2q}(S_e) + \tilde{F}_{1q}(F_e)] = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Les équations s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} 2aA_{1q} - bA_{2q} + bA_{3q} &= 0 \\ J_l(bR)A_{1q} - J_l(aR)G_{1q} - Y_l(aR)\tilde{G}_{1q} &= 0 \\ J_{l-1}(bR)A_{2q} - J_{l-1}(aR)G_{1q} - Y_{l-1}(aR)\tilde{G}_{1q} &= 0 \\ J_{l+1}(bR)A_{3q} - J_{l+1}(aR)G_{1q} - Y_{l+1}(aR)\tilde{G}_{1q} &= 0 \\ G_{1q} + i\tilde{G}_{1q} &= -C_{2q}(S_e) - i\tilde{C}_{2q}(S_e) - \\ &\quad - F_{1q}(F_e) - i\tilde{F}_{1q}(F_e) \end{aligned} \quad (39)$$

où $F_{1q}(F_e) + i\tilde{F}_{1q}(F_e)$ est donné par (37).

Ces équations (39) ne forment pas un système indépendant. Par l'intermédiaire de F_{1q} et $\tilde{F}_{1q}$, il apparaît un couplage avec tous les autres systèmes de même type correspondant aux mêmes valeurs de n et l mais à des valeurs de q différentes.

Si la décomposition en série de Fourier se limite à Q harmoniques suivant z , on obtient finalement un système de $5 \times Q$ équations à $5 \times Q$ inconnues, mais qui est compliqué puisque F_1 et $\tilde{F}_1$ dépendent des harmoniques b_q des champs.

6. Méthode de résolution.

Si nous considérons seulement l'un des sous-systèmes (39), les quatre premières équations permettent de calculer les rapports

$$\frac{A_{1q}}{G_{1q}}, \frac{A_{2q}}{G_{1q}}, \frac{A_{3q}}{G_{1q}} \text{ et } \frac{\tilde{G}_{1q}}{G_{1q}}$$

qui sont indépendants de la culasse. Il ne reste plus que l'équation :

$$G_{1q} \left(1 + \frac{i\tilde{G}_{1q}}{G_{1q}} \right) = -C_{2q} - i\tilde{C}_{2q} - F_{1q} - i\tilde{F}_{1q} \quad (40)$$

où $C_2 + i\tilde{C}_2$ est connu.

Dans $F_{1q} + i\tilde{F}_{1q}$ apparaissent les champs $b_{1q'}(\rho)$, $(b_2 + b_3)_{q'}(F_i)$ et $(b_2 + b_3)_{q'}(F_e)$. (Cf. (37).)

$b_{1q'}(\rho)$ reste à déterminer.

$(b_2 + b_3)_{q'}(F_i)$ est la composante normale à la transition air-fer. On peut donc, par continuité l'écrire $\mu_0(h_2 + h_3)_{q'}(F_i - \varepsilon)$, qui s'exprime simplement en fonction des G_{1q} , cf. (10).

$(b_2 + b_3)_{q'}(F_e)$ ne peut pas être calculé dans l'air au rayon $F_e + \varepsilon$ car le troisième terme de discontinuité en F_e fait intervenir $(b_2 + b_3)_{q'}(F_e)$ lui-même. On s'affranchit de ce troisième terme en calculant $(b_2 + b_3)_{q'}(F_e - \varepsilon)$. Comme ce champ est multiplié par $\alpha_{qq'}$ (cf. (37)), il n'intervient que là où la culasse est présente. On peut alors l'écrire sous la forme $\mu_f(h_2 + h_3)_{q'}(F_e - \varepsilon)$ qui s'exprime d'après (35) et (36) en fonction des G_{1q} et des $b_{1q}(\rho)$.

Au total, $F_{1q} + i\tilde{F}_{1q}$ dépend des G_{1q} et des $b_{1q}(\rho)$ avec $F_i < \rho < F_e$, et on peut montrer que (40) s'écrit, après discrétisation de l'intégrale de (37) sous la forme :

$$\begin{aligned} G_{1q} \left(1 + i \frac{\tilde{G}_{1q}}{G_{1q}} \right) &= C_q + \sum_{q'} \lambda_{qq'} G_{1q'} + \\ &\quad + \sum_i \sum_{q'} \varphi_{qq'i} b_{1q'}(\rho_i). \end{aligned} \quad (42)$$

A chaque valeur de q correspond une équation du type de (42). C_q est un terme connu qui dépend des intégrales C_2 et $\tilde{C}_2$.

L'ensemble de ces Q équations forme un système linéaire où les inconnues sont les G_{1q} , mais où les $b_{1q}(\rho_i)$ sont indéterminés. Sous forme matricielle, il s'écrit :

$$AG = C + \sum_{i=1}^{it} \Phi_i B_{1i}$$

soit

$$(A - A)G = C + \sum_{i=1}^{it} \Phi_i B_{1i} \quad (43)$$

où it est le nombre de points d'intégration entre F_i et F_e

G est le vecteur des Q inconnues

B_{1i} est le vecteur dont les Q composantes sont les $b_{1q}(\rho_i)$, indéterminées.

Nous n'exprimons pas ces $b_{1q}(\rho_i)$ en fonction des h_{1q} . En effet le calcul des coefficients de Fourier $(\mu h)_q$ pose des problèmes du point de vue numérique car μ et h sont tous deux discontinus au même point. Pour résoudre (43) nous procéderons en deux temps.

Nous rechercherons d'abord une expression formelle de G en fonction des B_{1i} , puis nous évaluerons les B_{1i} en écrivant que $h_1(\rho_i) = \frac{b_1(\rho_i)}{\mu}$.

— Cherchons G sous la forme

$$G = G_0 + \sum_{i=1}^{it} \Gamma_i B_{1i}. \quad (44)$$

En reportant (44) dans (43), on obtient

$$G_0 = (A - \Lambda)^{-1} C \quad (45)$$

$$\Gamma_i = (A - \Lambda)^{-1} \Phi_i. \quad (46)$$

— Pour déterminer B_{1i} on part de la relation entre $h_1(\rho_j)$ et $b_1(\rho_j)$ que l'on écrit :

$$h_{1q}(\rho_j) = \sum_{q'=1}^{\theta} v_{qq'} b_{1q'}(\rho_j) \quad (47)$$

où $v_{qq'}$ tient compte du fait que $\mu = \mu_r$ dans la culasse et μ_0 à l'extérieur.

Pour $F_i < \rho_j < F_e$, $h_{1q}(\rho_j)$ est donné par la première des équations (35). Il s'exprime en fonction des G_{1q} que nous venons de déterminer et qui dépendent des $b_{1q}(\rho_i)$ (cf. (44), (45) et (46)), et en fonction des $b_{1q}(\rho_i)$ eux-mêmes. En reportant cette expression de $h_{1q}(\rho_j)$ dans (47) on obtient un système linéaire de $Q \times it$ équations qui permet de déterminer les $b_{1q}(\rho_i)$.

On en tire immédiatement les G_{1q} par (44) et donc $\tilde{G}_{1q}$, A_{1q} , A_{2q} et A_{3q} . On peut alors calculer les coefficients de Fourier des champs à la surface du rotor, dans le bobinage et en déduire les performances de la machine de façon identique à [1].

7. Modélisation numérique.

7.1 ORGANISATION DU CALCUL. — Dans le cas d'une culasse infinie, les coefficients de Fourier des champs sont obtenus en résolvant pour chaque valeur de n , l et q un système de 5 équations à 5 inconnues, le système (61) de [1].

Pour la culasse courte, on résout successivement pour chaque valeur de n et l .

- 1) Q systèmes de 4 équations à 4 inconnues
- 2) un système de Q équations à Q inconnues (45)
- 3) un système de $Q \times it$ équations à $Q \times it$ inconnues correspondant à (47).

Le temps de calcul est directement lié à la taille des matrices considérées, c'est-à-dire au nombre d'harmonique Q suivant z et au nombre it de points d'intégration entre F_i et F_e . Il est environ 7 fois plus grand que celui mis en jeu en [1] mais reste encore très court pour une modélisation tridimensionnelle.

7.2 RÉSULTATS. — Pour tester cette modélisation nous l'avons appliquée à une machine ayant un rotor de 0,25 m de diamètre et un bobinage hélicoïdal de 1 m de long et 2 cm d'épaisseur alimenté par un courant sinusoïdal. Le diamètre intérieur de la culasse est de 0,317 cm.

Nous avons tout d'abord testé l'influence de l'épaisseur de la culasse pour deux valeurs de glissement dans le cas d'une culasse de même longueur que le bobinage, et d'une culasse de longueur moitié. Au-delà d'une épaisseur de 1 à 2 cm les performances apparaissent pratiquement indépendantes de cette épaisseur (Fig. 4).

Ensuite, nous avons étudié l'influence de la perméabilité de la culasse. Au-delà de $\mu_r/\mu_0 = 100$, les performances sont peu modifiées.

Fig. 4. — Couple et puissance réactive en fonction de l'épaisseur de la culasse (ω_r est la pulsation rotorique).

[The torque (a) and the reactive power (b) as a function of the yoke thickness (ω_r is the rotor angular frequency).]

Enfin, pour une épaisseur de 3 cm et $\mu_f = 100 \mu_0$ nous avons tracé le couple, la puissance réactive et le facteur de puissance en fonction de la pulsation rotorique pour diverses valeurs de la longueur de la culasse. Nous constatons (Fig. 6) que les calculs effectués pour une culasse de longueur infinie donnent pratiquement les mêmes résultats que ceux obtenus avec une culasse de même longueur que le bobinage.

L'influence de la diminution de cette longueur ne commence à être sensible que lorsque H_F/H devient inférieur à 0,8.

De façon générale, la diminution de la longueur de la culasse réduit le couple, la puissance réactive et le facteur de puissance. De plus, elle déplace légèrement la valeur de la pulsation rotorique donnant le couple maximum vers des valeurs plus élevées.

Fig. 5. — Couple et puissance réactive en fonction de la perméabilité relative (ω_R est la pulsation rotorique).

[The torque (a) and the reactive power (b) as a function of the relative permeability (ω_R is the rotor angular frequency).]

Fig. 6. — Couple, puissance réactive et facteur de puissance en fonction de la pulsation rotorique pour diverses longueurs de culasse.

[The torque (a), the reactive power (b), the power factor (c) as a function of the rotor angular frequency for different yoke lengths.]

Bibliographie

- [1] RIOUX-DAMIDAU, F., *Revue Phys. Appl.* **18** (1983) 113.
 - [2] POLOUJADOFF, M., *The theory of linear induction machinery* (Oxford University Press) 1980.
 - [3] JUFER, M., *Rev. Gen. Elect.* **80** (1971) 108.
 - [4] KANT, M., MOUILLET, A., SCHEUER, J. M., *Rev. Gen. Elect.* **80** (1971) 13.
 - [5] SABONNADIÈRE, J. C., POLOUJADOFF, M., *Rev. Gen. Elect.* **80** (1971) 34.
 - [6] ISMA'EL, M. E., *Proc. IEE* **125** (1978) 657.
 - [7] RIOUX-DAMIDAU, F., *Revue Phys. Appl.* **20** (1985) 235.
 - [8] RODDIER, F., *Distributions et transformations de Fourier*, (McGraw Hill) 1978.
 - [9] RIOUX-DAMIDAU, F., BANDELIER, B., BURET, F., *Rev. Gen. Elect.* (1985) 203.
 - [10] BANDELIER, B., Thèse de Doctorat, Université Paris VI, Avril 1986.
-