Modélisation tridimensionnelle des feuilletages ferromagnétiques par éléments finis

J.P. Bastos, G. Quichaud

► To cite this version:

J.P. Bastos, G. Quichaud. Modélisation tridimensionnelle des feuilletages ferromagnétiques par éléments finis. *Revue de Physique Appliquée*, 1984, 19 (2), pp.139-147. 10.1051/rphysap:01984001902013900 . jpa-00245166

HAL Id: jpa-00245166

<https://hal.science/jpa-00245166>

Submitted on 1 Jan 1984

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification
Physics Abstracts
07.50 — 41.10D

Modélisation tridimensionnelle des feuilletages ferromagnétiques par éléments finis

J. P. Bastos et G. Quichaud

Laboratoire d'Electrotechnique, Université Paris-Sud, Bâtiment 214, 91405 Orsay, France

(Reçu le 8 août 1983, révisé le 21 octobre, accepté le 27 octobre 1983)

Résumé. — Nous présentons dans cet article, une méthode de calcul 3-D de distribution de champs magnétiques, lorsque, dans le domaine étudié il y a un feuilletage fer-air. La modélisation de ce dernier est associée à une méthode variationnelle par éléments finis. Nous tenons compte de la non-linéarité du fer et une méthode de Newton-Raphson appliquée à ce problème 3-D anisotropique est développée.

Abstract. — We propose in this paper a 3-D magnetic fields calculation, when, in the studied domain, there is a iron-air lamination. This model is applied to a variational finite elements method. The iron nonlinearity is considered and a Newton-Raphson method for this 3-D anisotropic problem is described.

1. Introduction.

Il est courant, dans les machines et autres structures électrotechniques, d'utiliser des feuilletages magnétiques. Ainsi, dans cet article nous nous intéressons à la détermination de la distribution de champs dans des domaines comprenant de tels matériaux feuilletés.

Dans une première étude [1] nous avons mis en œuvre une modélisation 2-D (bidimensionnelle) des feuilletages fer-air. On remarque, toutefois, que dans la plupart des cas 2-D, le champ se développe dans le sens du feuilletage, selon lequel le matériau magnétique est isotrope, ce qui limite l'utilisation de ce modèle 2-D à certains problèmes assez particuliers.

Par contre, lorsque nous traitons des problèmes 3-D (tridimensionnels) l'anisotropie dans le matériau magnétique ne doit pas être négligée, car la distribution du champ à l'intérieur du feuilletage peut être fort différente de celle qu'on aurait si le matériau était isotrope.

Nous présentons, dans le cadre de cet article, une modélisation 3-D de feuilletages fer-air au moyen d'une méthode variationnelle par éléments finis. Signalons que, dans cette modélisation, l'évolution temporelle des phénomènes physiques (hystérésis et courants de Foucault) n'est pas prise en compte.

Dans l'exposé qui suit, nous allons d'abord développer la modélisation du feuilletage magnétique en définissant son tenseur de perméabilité utilisable en 3-D dont la présentation nous paraît nécessaire pour

la compréhension du document. Nous décrivons ensuite son insertion dans la méthode par éléments finis 3-D, qui, à l'aide du potentiel scalaire, permet le calcul de la distribution du champ magnétique dans le domaine étudié. Ensuite, compte tenu du fait que nous traitons des problèmes non linéaires nous donnons une nouvelle présentation de la méthode de Newton-Raphson, dont l'utilisation est généralisée à un tenseur de perméabilité. Finalement, des aspects pratiques de la mise en œuvre et un exemple de calcul sont donnés.

2. Modélisation 3-D du feuilletage fer-air.

2.1 GÉNÉRALITÉS. — Rappelons succinctement dans un calcul de champ par éléments finis, on forme un système matriciel dont la solution conduit aux potentiels aux nœuds ainsi qu'aux champs dans les éléments du maillage. Pour générer cette matrice nous devons connaître la perméabilité dans les différents matériaux du domaine.

Lorsque les perméabilités sont constantes, le problème est linéaire. Par contre, il est non linéaire lorsque la perméabilité dépend des champs et on utilise alors une méthode de résolution itérative telle que les valeurs des champs obtenus correspondent, avec la précision désirée, aux valeurs des perméabilités qui les ont générés.

2.2 ETUDE DES CHAMPS DANS LE FEUILLETAGE. — Admettons qu'on isole une région du feuilletage suffisamment petite pour qu'on puisse considérer que le champ global $\mathbf{H}$ y soit constant. En connaissant ce champ, nous désirons calculer l'induction correspondante $\mathbf{B}$ et en déduire le tenseur de perméabilité. La figure 1 représente un domaine élémentaire du feuilletage rapporté à ses axes principaux $OXYZ$ tels que OZ soit perpendiculaire au feuilletage. Nous noterons ε et $(1 - \varepsilon)$ les quantités relatives d'air et de fer (taux de remplissage) du feuilletage considéré. D'une façon générale nous utilisons les indices « a » et « f » pour air et fer et « t » et « n » pour tangentiel et normal au feuilletage.

Fig. 1. — Feuilletage fer-air 3-D.

[Iron-air lamination.]

La conservation des composantes tangentielles des champs magnétiques et des composantes normales des inductions dans les matériaux du feuilletage permet d'établir les relations :

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{H}_{at} = \mathbf{H}_{ft} \quad (1)$$

$$B_n = B_{an} = B_{fn} = B_z. \quad (2)$$

En écrivant [1] que le flux magnétique tangentiel engendré par $\mathbf{H}_t$ est la somme des flux tangentiels dans l'air et dans le fer, nous obtenons, à l'aide de (1) la perméabilité tangentielle μ_t suivante :

$$\mu_t = \varepsilon \mu_a + (1 - \varepsilon) \mu_f \quad (3)$$

où μ_a est la perméabilité de l'air et μ_f celle du fer.

D'autre part, la circulation du champ H_n étant la somme des circulations des champs H_f et H_a dans la direction OZ , nous obtenons à l'aide de (2) l'expression de la perméabilité normale μ_n suivante :

$$\frac{1}{\mu_n} = \frac{1 - \varepsilon}{\mu_f} + \frac{\varepsilon}{\mu_a}. \quad (4)$$

En présence de saturation, μ_f est une fonction P du module du champ dans le fer H_f que nous notons :

$$\mu_f = \mu_a P(H_f^2) \quad \text{où} \quad H_f = \sqrt{H_{ft}^2 + H_{fn}^2}. \quad (5)$$

Cette fonction P est déduite de la courbe $B(H)$ caractéristique du matériau utilisé et, elle est introduite dans le calcul à l'aide d'une formule analytique à partir de laquelle on déduit facilement la dérivée $\frac{\partial \mu_f}{\partial H_f^2}$. H_{ft} et H_{fn} s'expriment en fonction du champ $\mathbf{H}$ dans le feuilletage au moyen des relations suivantes :

$$\begin{aligned} H_{ft} &= H_t \\ H_{fn} &= \frac{\mu_n}{\mu_f} H_n. \end{aligned} \quad (6)$$

μ_f est donc définie par l'équation implicite

$$\frac{\mu_f}{\mu_a} = P \left[H_t^2 + \frac{H_n^2}{\left(\frac{\mu_f}{\mu_a} \varepsilon + 1 - \varepsilon \right)^2} \right] \quad (7)$$

qui est résolue par la méthode d'approximations successives suivante :

- $H_f = 0$ (matériau linéaire)
- avec H_f , on calcule μ_f (Eq. 5)
- avec μ_f , on calcule μ_n (Eq. 4)
- avec μ_n , on calcule H_{fn} (Eq. 6)
- avec H_{fn} et H_{tn} , on obtient le nouveau H_f
- on retourne à « b) » jusqu'à la convergence.

A la sortie de cet algorithme nous avons μ_f et, par conséquent, au moyen de (4) et (5), les valeurs de μ_n et μ_t cherchées.

2.3 LE TENSEUR DE PERMÉABILITÉ. — $OXYZ$ est le système de coordonnées lié au matériau anisotrope, OX , OY , OZ étant les axes principaux du feuilletage (Fig. 1). Appelons $Oxyz$ le système de coordonnées globales du domaine étudié, dont le feuilletage fait partie.

Le tenseur de perméabilité du feuilletage dans son système d'axes principaux s'écrit :

$$[\mu]_F = \begin{bmatrix} \mu_t & 0 & 0 \\ 0 & \mu_t & 0 \\ 0 & 0 & \mu_n \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Supposons que la position relative du feuilletage, par rapport aux systèmes d'axes $Oxyz$, est obtenu par les rotations successives : α autour de l'axe Ox et β autour de l'axe Oy , la matrice de rotation correspondante est

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Nous obtenons ainsi les relations suivantes entre composantes de l'induction et du champ (car $[R]^{-1} = [R]^t$)

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = [R]^t \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = [R]^t [\mu]_F \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \\ = [R]^t [\mu]_F [R] \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Ce qui donne l'expression du tenseur de perméabilité $[\mu]$ dans le système Oxyz.

$$[\mu] = [R]^t [\mu]_F [R]. \quad (11)$$

Comme conclusion de ce paragraphe, le tenseur de perméabilité se détermine de la façon suivante :

— le calcul donne les composantes du champ dans le repère global,

— on détermine, au moyen de la matrice associée au changement de repère, H_n et H_t ,

— l'algorithme précédent détermine la perméabilité des tôles magnétiques, d'où μ_n et μ_t ; puis, grâce à (11), nous obtenons le tenseur $[\mu]$.

3. La méthode variationnelle.

Dans cette méthode, au lieu de discrétiser et résoudre directement les équations physiques du système, on minimise une fonctionnelle définie dans le domaine [2, 3].

3.1 L'ÉQUATION À RÉSOUDRE. — Si, dans le domaine, étudié il n'y a pas de courant, nous pouvons définir un potentiel scalaire V dont dérive le champ magnétique $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = -\nabla V.$$

Pour tenir compte de l'anisotropie magnétique, on utilise un tenseur de perméabilité $[\mu]$, dont les composantes sont fonctions de $\mathbf{H}$.

L'équation à résoudre $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ s'écrit alors :

$$\nabla \cdot [\mu] \nabla V = 0. \quad (12)$$

3.2 LA FONCTIONNELLE. — Pour déterminer un potentiel V satisfaisant l'équation 12 ci-dessus dans le domaine 3-D, on utilise une méthode variationnelle [2]. Celle-ci conduit à minimiser une fonctionnelle telle que l'équation d'Euler correspondante soit équivalente à $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ associée aux conditions aux limites du problème. Ces conditions aux limites sont telles que, sur la frontière du domaine, le potentiel V est fixé (cond. de Dirichlet) ou la composante normale du champ est nulle (cond. de Neuman).

La fonctionnelle qui satisfait ces conditions est, dans le domaine Ω :

$$\mathcal{F} = \int_{\Omega} \left[\int_0^{H_x, H_y, H_z} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{h} \right] d\Omega. \quad (13)$$

Remarquons que $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{h}$ est bien une différentielle totale exacte, comme nous l'avons montré en [3].

3.3 LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE. — Pour la mise en œuvre numérique de la méthode, on discrétise le domaine Ω en tétraèdres, dont les potentiels aux sommets sont inconnus. A l'intérieur de chaque tétraèdre on prend une approximation linéaire de V sous la forme suivante :

$$V(x, y, z) = p + qx + ry + sz.$$

Cette équation, vérifiée aux sommets du tétraèdre devient :

$$V(x, y, z) = \sum_{l=1,4} \frac{1}{D} (a_l + b_l x + c_l y + d_l z) V_l \quad (14)$$

où D est le volume du tétraèdre multiplié par six, et les termes a_l, b_l, c_l, d_l sont obtenus pour $l = 1$ comme suit :

$$a_1 = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad b_1 = - \begin{bmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \\ c_1 = - \begin{bmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{bmatrix} \quad d_1 = - \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix}.$$

On obtient de même les coefficients pour $l = 2, 3, 4$ au moyen de permutations circulaires des indices. Sur la figure 2, on peut voir le sens de numérotation des noeuds utilisé.

Fig. 2. — Élément de maillage tétraédrique.
[Tetrahedral mesh element.]

Le domaine étant discrétisé, la fonctionnelle $\mathcal{F}$ devient la somme des fonctionnelles $\mathcal{F}_i$ affectées à chacun des tétraèdres qui composent le domaine.

$$\mathcal{F} = \sum_i \mathcal{F}_i \quad (i \text{ indice des tétraèdres}).$$

La condition de minimisation de la fonctionnelle par rapport à un potentiel V_K s'écrit

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial V_K} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial V_K} = 0$$

On montre [3] que, pour un tétraèdre numéroté i , on a :

$$\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial V_K} = \iiint \mathbf{B}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial V_K} dx dy dz \quad (15)$$

où l'intégrale est étendue au volume de ce tétraèdre.

Les vecteurs $\mathbf{H}_i$ et $\frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial V_K}$ relatifs à ce tétraèdre se déduisent de l'expression 14 comme suit :

$$\mathbf{H}_i = -\nabla V = \sum_{l=1,4} \frac{1}{D_i} (b_l \mathbf{i} + c_l \mathbf{j} + d_l \mathbf{k}) V_l$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial V_K} = \frac{1}{D_i} (b_K \mathbf{i} + c_K \mathbf{j} + d_K \mathbf{k})$$

où $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sont les vecteurs unitaires du repère global Oxyz.

Comme les coefficients b_l, c_l, d_l sont constants pour un tétraèdre, l'expression 15, s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial V_K} = \frac{D_i}{6} \left[\frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial V_K} \right] [\mu] [H_i] = \frac{D_i}{6} \left[\frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial V_K} \right] [B_i]. \quad (16)$$

Ainsi, pour les quatre sommets de ce tétraèdre, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial V_1} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial V_2} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial V_3} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial V_4} \end{bmatrix} = \frac{1}{6 D_i} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

que l'on note sous la forme simplifiée

$$[\mathcal{F}] = [S_i] [V]. \quad (18)$$

Les matrices $[S_i]$, appelées de « contributions », sont calculées pour chaque tétraèdre puis assemblées dans un système global, comportant tous les potentiels des nœuds. La résolution de ce système, après insertion des conditions aux limites, donne les potentiels inconnus aux nœuds.

Si le problème n'est pas linéaire, on applique la méthode d'approximations successives suivantes :

a) on choisit une valeur initiale de potentiel aux nœuds,

b) avec ces potentiels, on calcule $\mathbf{H}$ dans les tétraèdres,

c) avec $\mathbf{H}$, on obtient $[\mu]$ (paragraphe 2),

d) avec $[\mu]$, on calcule $[S_i]$ des tétraèdres,

e) on assemble les $[S_i]$, formant le système de contributions,

f) on résout le système global, après insertion des conditions aux limites, obtenant les nouveaux potentiels,

g) on revient à « b) » jusqu'à la convergence.

4. Mise en œuvre de la méthode de Newton-Raphson dans le cas d'un problème anisotrope.

La solution du problème, lorsqu'on utilise la méthode itérative décrite ci-dessus, a l'avantage d'être obtenue par un processus qui est toujours convergent. Toutefois, dans certains cas, la convergence est lente, comme par exemple, dans la zone du coude de saturation des courbes $B(H)$. Ceci nous a incité à mettre en œuvre une méthode de Newton-Raphson [4], dont la convergence quadratique est plus rapide, malgré qu'elle ne soit pas toujours assurée. Signalons que les cas de divergences rencontrés sont assez rares.

4.1 PRINCIPE DE LA MÉTHODE. — Le développement en série de Taylor limité au premier ordre d'une matrice colonne $[Q]$, fonction de la matrice colonne $[x]$, s'écrit au voisinage de $[x] = [x]_m$

$$[Q]_m + \left[\frac{DQ}{Dx} \right]_m ([x] - [x]_m)$$

où $\left[\frac{DQ}{Dx} \right]_m$ représente le Jacobien de $[Q]$ en $[x]_m$.

Ainsi, par exemple lorsque $[Q]$ et $[x]$ ont deux composantes, on a :

$$\left[\frac{DQ}{Dx} \right]_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Si $[x]_m$ n'est pas éloignée d'une racine de $[Q]$, alors $[x]_{m+1}$ telle que

$$[Q]_m + \left[\frac{DQ}{Dx} \right]_m ([x]_{m+1} - [x]_m) = 0. \quad (19)$$

représente en général une meilleure approximation que $[x]_m$ de cette racine. L'algorithme de Newton-Raphson consiste à résoudre (19) et ainsi à chercher cette racine comme limite de la suite des $[x]_m$ définie par la récurrence :

$$[x]_{m+1} = [x]_m - \left[\frac{DQ}{Dx} \right]_m^{-1} [Q]_m. \quad (20)$$

Dans notre cas, $[\mathcal{F}] = \sum_i [\mathcal{F}_i]$, définie en (17) et (18), joue le rôle de $[Q]$ et les potentiels inconnus $[V]$ celui de $[x]$. Dans ces conditions, l'expression 20 devient

$$[V]_{m+1} = [V]_m - \left[\frac{D\mathcal{F}'}{DV} \right]_m [\mathcal{F}']_m \quad (21)$$

où $\left[\frac{D\mathcal{F}'}{DV} \right] = \sum_i \left[\frac{D\mathcal{F}'_i}{DV} \right]$ représente le Jacobien de

$$[\mathcal{F}] = \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial V} \right].$$

Nous allons montrer dans le paragraphe suivant que le Jacobien est symétrique, ce qui est fondamental pour la mise en œuvre informatique de (21).

4.2 SYMÉTRIE DU JACOBIEN. — Une composante de

$[\mathcal{F}_i] = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial V} \right]$ s'écrit, d'après (16)

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial V_k} \right] = \frac{D_i}{6} \left[\frac{\partial H_i}{\partial V_k} \right]^t [B_i].$$

Comme $\left[\frac{\partial H_i}{\partial V_k} \right]$ est indépendant de $[V]$, l'élément $\left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}_i}{\partial V_k \partial V_l} \right]$ du Jacobien se met sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}_i}{\partial V_k \partial V_l} = \frac{D_i}{6} \left[\frac{\partial H_i}{\partial V_k} \right]^t \left[\frac{\partial B_i}{\partial V_l} \right].$$

En introduisant dans cette expression le Jacobien $\left[\frac{DB_i}{DH_i} \right]$ de $[B_i]$ considéré comme fonction de $[H_i]$, on a

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}_i}{\partial V_k \partial V_l} = \frac{D_i}{6} \left[\frac{\partial H_i}{\partial V_k} \right]^t \left[\frac{DB_i}{DH_i} \right] \left[\frac{\partial H_i}{\partial V_l} \right] \quad (22)$$

où

$$\left[\frac{DB_i}{DH_i} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial H_x} & \frac{\partial B_x}{\partial H_y} & \frac{\partial B_x}{\partial H_z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial H_x} & \frac{\partial B_y}{\partial H_y} & \frac{\partial B_y}{\partial H_z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial H_x} & \frac{\partial B_z}{\partial H_y} & \frac{\partial B_z}{\partial H_z} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Comme nous l'avons déjà noté, $B_x dH_x + B_y dH_y + B_z dH_z$ est une différentielle totale exacte, ce qui entraîne que l'expression 23 soit aussi une matrice symétrique. Dans ces conditions (22) s'écrit également

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}_i}{\partial V_k \partial V_l} = \frac{D_i}{6} \left[\frac{\partial H_i}{\partial V_l} \right]^t \left[\frac{DB_i}{DH_i} \right] \left[\frac{\partial H_i}{\partial V_k} \right] = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_i}{\partial V_l \partial V_k}$$

ce qui entraîne bien la symétrie du Jacobien de $[\mathcal{F}]$.

4.3 CALCUL DES ÉLÉMENTS DU JACOBIEN DE $[\mathcal{F}']$. —

Le calcul numérique des éléments $\frac{\partial^2 \mathcal{F}_i}{\partial V_k \partial V_l}$ nécessite la détermination du Jacobien $\left[\frac{DB_i}{DH_i} \right]$. Le caractère tensoriel d'un Jacobien conduit à écrire :

$$\left[\frac{DB_i}{DH_i} \right] = [R]^t \left[\frac{DB_i}{DH_i} \right]_F [R]$$

$$\left[\frac{DB_i}{DH_i} \right]_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu_t H_x}{\partial H_x} & \frac{\partial \mu_t H_x}{\partial H_y} & \frac{\partial \mu_t H_x}{\partial H_z} \\ \frac{\partial \mu_t H_y}{\partial H_x} & \frac{\partial \mu_t H_y}{\partial H_y} & \frac{\partial \mu_t H_y}{\partial H_z} \\ \frac{\partial \mu_n H_z}{\partial H_x} & \frac{\partial \mu_n H_z}{\partial H_y} & \frac{\partial \mu_n H_z}{\partial H_z} \end{bmatrix}.$$

Après dérivation des produits, en remarquant que, par exemple,

$$H_x \frac{\partial \mu_t}{\partial H_y} = H_x \frac{\partial \mu_t}{\partial H_t^2} \frac{\partial H_t^2}{\partial H_y} = 2 H_x H_y \frac{\partial \mu_t}{\partial H_t^2},$$

on a

$$\left[\frac{DB_i}{DH_i} \right]_F = [\mu]_F + 2 \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu_t}{\partial H_t^2} H_x^2 & \frac{\partial \mu_t}{\partial H_t^2} H_x H_y & \frac{\partial \mu_t}{\partial H_n^2} H_x H_z \\ \frac{\partial \mu_t}{\partial H_t^2} H_y H_x & \frac{\partial \mu_t}{\partial H_t^2} H_y^2 & \frac{\partial \mu_t}{\partial H_n^2} H_y H_z \\ \frac{\partial \mu_n}{\partial H_t^2} H_z H_x & \frac{\partial \mu_n}{\partial H_t^2} H_z H_y & \frac{\partial \mu_n}{\partial H_n^2} H_z^2 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

L'évaluation du second membre de l'expression 24 nécessite les calculs des différentes dérivées de perméabilités. Calculons alors, $\frac{\partial \mu_t}{\partial H_n^2}$ qui, compte tenu

de la symétrie de la matrice est identique à $\frac{\partial \mu_n}{\partial H_t^2}$.

De l'expression 4 nous tirons

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial H_t^2} = (1 - \varepsilon) G^2 \frac{\partial \mu_f}{\partial H_t^2} \quad (25)$$

où nous avons posé $G = \frac{\mu_a}{\mu_t + (1 - \varepsilon) \mu_a}$.

La valeur de $\frac{\partial \mu_f}{\partial H_t^2}$, obtenue à l'aide des expressions 6 et 7 est :

$$\frac{\partial \mu_f}{\partial H_t^2} = \mu_a \frac{\partial P}{\partial H_f^2} \frac{\partial H_f^2}{\partial H_t^2} = \frac{\mu_a \frac{\partial P}{\partial H_f^2}}{1 + 2 \frac{\partial P}{\partial H_f^2} H_n^2 \varepsilon G^3}$$

et nous avons alors pour (25)

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial H_t^2} = \frac{G^2 (1 - \varepsilon) \mu_a \frac{\partial P}{\partial H_f^2}}{1 + 2 G^3 H_n^2 \varepsilon \frac{\partial P}{\partial H_f^2}} = \frac{\partial \mu_t}{\partial H_n^2}.$$

Les expressions de $\frac{\partial \mu_t}{\partial H_t^2}$ et $\frac{\partial \mu_n}{\partial H_n^2}$ sont calculées de façon analogue.

Ainsi, nous obtenons :

$$\left[\frac{DB_i}{DH_i} \right] = [R]^t \begin{bmatrix} \mu_t + 2 AH_x^2 & 2 AH_x H_y & 2 AG^2 H_x H_z \\ 2 AH_x H_y & \mu_t + 2 AH_y^2 & 2 AG^2 H_y H_z \\ 2 AG^2 H_x H_z & 2 AG^2 H_y H_z & \mu_n + 2 AG^4 H_z^2 \end{bmatrix} [R] \quad (26)$$

où

$$A = \frac{\mu_a (1 - \varepsilon) \frac{\partial P}{\partial H_f^2}}{1 + 2 G^3 \frac{\partial P}{\partial H_f^2} H_n^2 \varepsilon}.$$

Et l'expression d'un terme du Jacobien est

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}_i}{\partial V_k \partial V_l} = \frac{1}{6 D_i} [b_l \quad c_l \quad d_l] \left[\frac{DB_i}{DH_i} \right] \begin{bmatrix} b_k \\ c_k \\ d_k \end{bmatrix}. \quad (27)$$

L'assemblage des expressions 27 des tétraèdres donne le Jacobien de $[\mathcal{F}]$ qui, une fois résolu, conduit aux potentiels aux noeuds. Le processus, itératif global est semblable à celui présenté au paragraphe 2.

5. Mise en œuvre du système informatique.

Les programmes 2-D et 3-D de calcul de champ et les programmes auxiliaires d'entrées et de sorties graphiques forment le système informatique EFOR3. En 2-D, l'utilisation des potentiels vecteur et scalaire est possible, tandis, qu'en 3-D, seul le potentiel scalaire est actuellement disponible. Signalons cependant que le système 3-D est d'utilisation générale.

Voyons plus en détail les caractéristiques informatiques du programme de calcul de champ 3-D.

5.1 LES ÉLÉMENTS DU MAILLAGE. — La description d'un domaine en tétraèdres n'étant pas simple, nous utilisons des éléments de maillage de forme hexaédrique et prismatique de base triangulaire. Le programme se charge automatiquement de découper

ces éléments en tétraèdres. Toutefois, ce découpage doit être fait de telle façon que l'équilibre de contributions sur les noeuds soit assuré. Signalons qu'il est possible de découper un hexaèdre en tétraèdres de 74 façons différentes [5].

5.2 LE STOKAGE DE LA MATRICE DE CONTRIBUTION ET DU JACOBIEN. — La matrice de contribution (assemblage des $[\mathcal{F}_i]$) ainsi que le Jacobien sont des matrices bandes symétriques. Ceci nous permet de stocker en mémoire réelle seule la demi-bande supérieure. En plus, cette dernière est très creuse, ce qui nous a incité à stocker uniquement les termes susceptibles de ne pas être nuls. Nous avons alors créé deux matrices parallèles, où, dans la première, il y a uniquement les valeurs de contributions entre noeuds et, dans la deuxième, l'adressage des noeuds entre lesquels les contributions sont établies. Malgré l'existence de deux matrices, l'économie de mémoire est très importante par rapport au procédé de stockage direct [3].

5.3 LA RÉOLUTION DU SYSTÈME FINAL D'ÉQUATIONS. — A chaque itération de la méthode d'approximations successives présentée au paragraphe 2 ou de la méthode de Newton-Raphson, on est amené à résoudre un système d'équations linéaires.

Les méthodes directes du type « élimination de Gauss » et ses variantes ont l'inconvénient de générer de nouveaux éléments dans la matrice de coefficients. Nous utilisons alors une méthode de sur-relaxation qui ne modifie pas la structure creuse de la matrice, ce qui est donc cohérent avec le type de stockage choisi. Cette méthode de résolution de systèmes linéaires étant itérative, elle introduit une boucle secondaire dans les algorithmes évoqués ci-dessus.

Lorsque les coefficients de relaxation intervenant dans la méthode de sur-relaxation sont bien choisis [6], cette dernière fournit une convergence rapide. Pour une matrice de contributions bien conditionnée (cas linéaires ou très saturés), la convergence se fait en moins de $N/3$ itérations, où N est le nombre de nœuds. Pour une matrice moins bien conditionnée (fer au coude de saturation) le nombre d'itérations est d'environ $N/2$. Lorsque la matrice de coefficients est le Jacobien, la convergence est atteinte pour un nombre d'itérations plus important d'un rapport 1,5 à 1,8 comparé à la matrice de contributions. Dans l'ensemble, la performance de cette méthode est satisfaisante.

6. Résultats obtenus.

6.1 L'EXEMPLE. — Comme exemple d'utilisation du système EFOR3, nous avons choisi un problème qui soit typiquement tridimensionnel ayant, toutefois, une géométrie simple pour que la visualisation des résultats soit d'interprétation plus aisée.

Il est représenté sur la figure 3. Les caractéristiques générales du problème sont les suivantes :

- Nous imposons des équipotentiels sur les surfaces A et B (cond. de Dirichlet). La différence de potentiel ainsi engendrée nous permet d'avoir un système travaillant en régime de forte non-linéarité.
- sur les autres frontières, nous avons des conditions de Neuman, c'est-à-dire que le champ magnétique est tangent à ces frontières.
- Le plus grand plot est constitué de fer massif, donc isotrope. Le plus petit est feuilleté avec $(1 - \epsilon) = 0,95$ de fer. Nous appliquons à ce dernier

Fig. 3. — Domaine étudié.
[Studied domain.]

une rotation de 90° autour de l'axe Ox , ce qui place les lames de fer parallèles au plan Oxz . La perméabilité dans la direction « y » est donc très faible.

- La courbe $\mu(H)$ utilisée pour le fer des plots est celle représentée sur la figure 4.
- Le découpage du domaine est représenté sur la figure 3. Le nombre de nœuds résultant est 847.

Fig. 4. — Courbe de perméabilité du fer.
[Iron permeability curve.]

6.2 CONVERGENCES ET PERFORMANCES GLOBALES. — Remarquons d'abord que la méthode de Newton-Raphson est très efficace lorsqu'on a déjà une bonne approche de la solution. A la suite de nombreux tests, nous avons remarqué que son utilisation à partir de la

Fig. 5. — Courbe de convergence des deux méthodes développées.
[Convergence curves of the developed methods.]

5^e itération de la méthode d'approximations successives représente le meilleur compromis.

Sur la figure 5, nous avons représenté l'erreur relative moyenne sur les potentiels aux noeuds lors du passage d'une itération à une nouvelle en fonction du nombre d'itérations. La courbe en trait plein est relative à la méthode d'approximations successives, et celle en pointillé, à la méthode de Newton-Raphson. A la 17^e itération l'erreur est inférieure à 2×10^{-5} pour la première méthode. Pour atteindre la même erreur avec la méthode de Newton-Raphson, il suffit de 8 itérations, dont les 5 premières sont obtenues au moyen de la méthode d'approximations successives. En ce qui concerne le temps de calcul sur UNIVAC

1110/81, la durée d'une itération de la méthode d'approximations successives est de 42 s alors qu'elle est de 72 s pour la méthode de Newton-Raphson.

Une façon efficace et simple de vérifier la convergence obtenue consiste à calculer les différents flux traversant les surfaces parallèles au plan Oyz car, étant donné les conditions aux frontières imposées, ces flux doivent être identiques. L'erreur obtenue pour la première méthode est de 0,4 %, tandis que, pour Newton-Raphson, elle est de 0,014 %.

Remarquons finalement que le fait d'utiliser un plot anisotrope n'augmente que très peu le temps de calcul par rapport à ce qu'on aurait si le plot en question était isotrope.

Fig. 6a, b, c, d. — Lignes de champs magnétiques dans le domaine étudié.

[Magnetic field lines in the domain.]

6.3 COURBES DE CHAMPS OBTENUES. — La représentation graphique de lignes de champs dans un domaine 3-D est généralement un problème délicat. Afin de faciliter la visualisation des courbes de champs obtenues à l'aide du programme traceur de EFOR3, nous avons doté ce dernier de la possibilité qui consiste à déplacer l'angle de vue de l'observateur. Nous avons ainsi donné sur les figures 6a, b, c, d, les courbes de champs pour quatre différents angles de vue, dont les 3 premières correspondent aux projections du domaine de la figure 3 sur les plans principaux du repère Oxyz.

7. Conclusion.

La prise en compte de feuilletages magnétiques dans les systèmes 3-D de calcul de champ nous semble un problème de première importance.

Nous proposons dans cet article une modélisation numérique de tels feuilletages qui s'intègre d'une façon simple dans un programme d'éléments finis 3-D.

Les calculs effectués à l'aide du système EFOR3 ont donné satisfaction, aussi bien en régime linéaire qu'en régime saturé, pour lequel nous présentons une méthode de Newton-Raphson adaptée au problème anisotrope. Sur le plan numérique, le système EFOR3 a fourni une bonne stabilité de calcul et, lorsqu'on utilise la méthode de Newton-Raphson, on a une convergente très rapide vers la solution.

Lorsque la comparaison est cohérente, nous avons vérifié que les résultats 3-D et 2-D sont en très bon accord et que ces derniers ont été confirmés expérimentalement [3, 7] en notre laboratoire. Remarquons finalement que les mesures faites en [8] donnent des valeurs très proches du calcul 3-D appliqué au problème en question.

Bibliographie

- [1] BASTOS, J. P., JABLON, C., QUICHAUD, G., RIOUX-DAMIDAU, F., Modélisation magnétique et numérique par éléments finis de feuilletages ferromagnétiques. *Revue Phys. Appl.* **15** (1980).
- [2] Zienkiewicz *The finite element method in engineering science* (McGraw-Hill).
- [3] BASTOS, J. P., Calcul de performances intrinsèques des machines à réluctance variable polydiscoïdes par une méthode d'éléments finis. Thèse de Docteur-Ingénieur, Paris VI 12/5/1980.
- [4] SILVESTER et CHARI, Finite element solution of saturable magnetic field problems. *IEEE Trans. Power PAS* **89** (1970) n° 7.
- [5] LAUBER, T. S. and BRESSANI, M., Tetrahedral decomposition of hexahedra for automatic three-dimensional grid generation. *Compumag* (1983) 313.
- [6] NORRIE, D. H., DEVRIES, G., *An introduction to finite elements analysis* (Academic Press) 1978.
- [7] GOYET, R., Contribution à l'étude des machines à réluctance variable à disques imbriqués, thèse Doctorat d'Etat Paris VI.
- [8] Contribution à l'étude des machines à réluctance polydiscoïdes. Expérimentation en génératrice d'un prototype de 200 kW et modélisation à partir d'essais statiques. Alain Lévêque, thèse de Docteur-Ingénieur, Paris VI, 30/9/83.