Méthodes de détermination des courbes fréquence-température d'un résonateur à quartz vibrant en mode d'épaisseur

B. Dulmet, R. Bourquin

► To cite this version:

B. Dulmet, R. Bourquin. Méthodes de détermination des courbes fréquence-température d'un résonateur à quartz vibrant en mode d'épaisseur. *Revue de Physique Appliquée*, 1983, 18 (10), pp.619-624. 10.1051/rphysap:019830018010061900 . jpa-00245123

HAL Id: jpa-00245123

<https://hal.science/jpa-00245123>

Submitted on 1 Jan 1983

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification

Physics Abstracts

62.20D — 62.30 — 65.70

Méthodes de détermination des courbes fréquence-température d'un résonateur à quartz vibrant en mode d'épaisseur

B. Dulmet et R. Bourquin

Laboratoire de Chronométrie et Piézoélectricité, E.N.S.M.M., La Bouloie, 25030 Besançon Cedex, France

(Reçu le 9 mai 1983, révisé le 4 juillet, accepté le 8 juillet 1983)

Résumé. — La détermination des courbes fréquence-température est une étape essentielle du développement des résonateurs. Selon la démarche suivie, certaines différences appréciables sont observées. Nous comparons la méthode la plus couramment utilisée pour l'obtention des courbes fréquence-température avec une méthode fondée sur l'utilisation d'un formalisme plus général. Il s'avère que la démarche classique n'est pas la plus directe lorsque aucune simplification ne peut être opérée.

Abstract. — An accurate knowledge of the resonator's properties require theoretical analysis of frequency-temperature curves. Some significant differences are obtained, related to theoretical analysis. In this paper, we present two methods for the derivation of quartz plates temperature characteristics. The first one is classical while the second is based on a more elaborated formalism. It appears that the classical method is not the simplest when no simplification is available.

1. Introduction.

La connaissance des courbes fréquence-température est indispensable à la réalisation pratique des résonateurs piézoélectriques. En effet, dans le domaine du comportement thermoélastique, l'anisotropie du matériau est très forte, d'où la nécessité de tailler les plaques de quartz suivant des orientations cristallines très précises, la tolérance étant de l'ordre de la minute d'angle. La modélisation d'un résonateur soumis à une variation lente de la température peut être faite à l'aide de coefficients élastiques effectifs. Ces coefficients varient explicitement avec la température et peuvent être définis de différentes manières correspondant à des états de référence distincts pour les tenseurs d'efforts. Une procédure conventionnelle consiste à séparer l'étude du problème dynamique de celle du cristal non vibrant en distinguant trois états :

- un état naturel, à la température de référence T_0 , où le résonateur n'est soumis à aucune action extérieure,

- un état intermédiaire, à la température T , résultant du déplacement de l'équilibre premier par suite d'une variation lente et réversible de la température. T peut être éloignée de T_0 ,

- un état final, résultant de la superposition à l'état précédent d'une vibration haute fréquence, supposée adiabatique.

A chacun de ces états, on peut associer des variables qui permettent de décrire le comportement du résonateur. Le traitement classique [1] utilise implicitement les coordonnées de l'état intermédiaire pour décrire la vibration du résonateur et en déduire les courbes fréquence-température. Dans cette façon de faire, tous les paramètres dépendent de la température, y compris l'orientation de la plaque par rapport aux axes du système de référence (repère cristallographique). Cette variation est petite ; elle n'est pas mentionnée habituellement. Grâce à l'utilisation d'une formulation qui précise la démarche classique nous montrons comment l'effet de cette rotation cristalline intervient et dans quels cas son influence ne peut être négligée. Nous indiquerons ensuite comment l'utilisation du système de référence lié à l'état naturel permet de calculer les courbes fréquence-température d'une façon plus directe et aussi rigoureuse.

2. Généralités.

Considérons un trièdre de référence lié aux axes cristallographiques (cf. Fig. 1). Dans l'état naturel, le cristal occupe un volume V_0 délimité par sa surface extérieure S_0 ; ρ_0 désigne sa masse volumique. Un point quelconque P du solide est repéré par ses coordonnées matérielles a_i . Dans l'état intermédiaire, à la température T , ce même cristal occupe un volume V_1 limité par la surface S_1 ; ρ_1 désigne sa masse volu-

Fig. 1. — Etats du solide et variables associées.

[Mechanical configurations and associated variables.]

mique, les coordonnées du point P sont alors x_i . Les quantités $w_i = x_i - a_i$ sont les composantes du déplacement résultant de la seule variation de la température. L'état final, à un instant t donné correspond au volume $V_{(t)}$ limité par $S_{(t)}$, la masse volumique étant désignée par ρ . Les coordonnées du point P sont alors $X_i = x_i + u_i$ où u_i représente le déplacement résultant de la vibration. Les différents champs de coordonnées font apparaître les dépendances suivantes :

$$\begin{aligned} X_i(x_p, t) &\equiv X_i(a_p, T, t) \\ x_i(X_p, t) &\equiv x_i(a_p, T) \\ a_i &\equiv a_i(x_p, T) \equiv a_i(X_p, T, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Les rapports des masses volumiques sont égaux [2] aux déterminants fonctionnels J_0 , J_1 et J :

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \rho_1 J_0 ; \quad J_0 = \left| \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \right| \\ \rho_1 &= \rho J_1 ; \quad J_1 = \left| \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right| \\ \rho_0 &= \rho J ; \quad J = \left| \frac{\partial X_i}{\partial a_k} \right| \end{aligned} \quad (2)$$

La force df qui s'exerce sur un élément de surface appelé dS lorsqu'on l'observe dans l'état final permet de définir le tenseur des contraintes $\mathfrak{T}_{ij}$ telles que :

$$df_j = \mathfrak{T}_{ij} n_i dS \quad (3)$$

où les n_i désignent les cosinus directeurs de la normale à dS orientée positivement vers l'extérieur. Les tenseurs de Piola $\mathfrak{T}_{ij}$ (relatif à l'état intermédiaire) et P_{ij} (relatif à l'état naturel) sont des entités mathématiques qui expriment la notion de tenseur des efforts lorsqu'on décrit le comportement du solide en fonction de la température et du temps à l'aide des coordonnées matérielles x_i ou a_i liées à ces deux états. Par définition [2] :

$$\mathfrak{T}_{ij} n_i dS = \mathfrak{T}_{kj} n_k^1 dS^1 = P_{ij} n_i^0 dS^0, \quad (4)$$

où n_k^1 et n_i^0 sont les cosinus directeurs de la normale unitaire à l'élément de surface dS considéré dans l'état naturel (dS_0) et dans l'état intermédiaire (dS_1) (cf. Fig. 1). On peut alors déduire de (3) les relations qui existent entre les différents tenseurs d'efforts [2, 3] :

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{ij} &= J_1 \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \mathfrak{T}_{kj} \\ P_{ij} &= J_0 \frac{\partial a_i}{\partial X_k} \mathfrak{T}_{kj}. \end{aligned} \quad (5)$$

La résolution d'un problème de vibration comporte trois étapes : l'écriture des équations d'équilibre dynamique du matériau, l'utilisation des lois de comportement reliant les tenseurs des efforts aux déformations, la prise en compte des conditions aux limites du solide. Pour une définition donnée de la déformation, les trois tenseurs des efforts que nous avons mentionnés s'expriment en fonction de celle-ci à l'aide de trois types de coefficients élastiques effectifs. Ces coefficients diffèrent des coefficients matériels définis comme les coefficients du développement de l'énergie en fonction des déformations [3].

3. Plaque plane infinie : traitement du problème rapportée à l'état intermédiaire.

La démarche habituelle ne fait pas apparaître l'état naturel et ne fait pas non plus de distinction explicite entre l'état intermédiaire et l'état final. Elle revient de fait à se placer dans l'état intermédiaire, à confondre les tenseurs $\mathfrak{T}_{ij}$ et P_{ij} (ce qui est sans conséquence pour l'application envisagée), et à dériver par rapport à la température tous les termes qui interviennent dans l'expression de la fréquence [1, 8]. Du fait de l'anisotropie de la dilatation thermique du cristal, il existe une variation d'orientation de la plaque par rapport aux axes cristallographiques. Ce phénomène, généralement omis, apparaît clairement lorsque après avoir défini l'état naturel comme état de référence, on traite le problème de vibration à l'aide de variables rapportées à l'état intermédiaire. C'est cette démarche que nous adoptons ici.

Considérons une plaque infinie d'épaisseur $2h_0$ dans l'état naturel, la normale étant alors repérée par rapport aux axes cristallographiques à l'aide des angles θ_0 et Φ_0 (cf. Fig. 2). En travaillant avec des variables rapportées à l'état intermédiaire, la vitesse de propagation de l'onde d'épaisseur se calcule en résolvant l'équation d'équilibre :

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathfrak{T}_{ji}}{\partial x_j}. \quad (6)$$

Dans le cas où il n'y a pas de contrainte statique, le tenseur $\mathfrak{T}_{ij}$ se développe en fonction des gradients de déplacement [4]. Au premier ordre :

$$\mathfrak{T}_{ij} = B_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \dots \quad (7)$$

Fig. 2. — Orientation d'une coupe à double rotation.

[Doubly rotated cut.]

Dans le cas de la propagation d'une onde plane progressant dans la direction du vecteur unitaire $\mathbf{n}(n_1^1, n_2^1, n_3^1)$:

$$u_k = \bar{u}_k \exp\left(j\omega\left(t - \frac{n_i^1 x_i}{v}\right)\right), \quad (8)$$

on obtient la vitesse de propagation en portant cette expression dans (6) :

$$\rho_1 v^2 \bar{u}_i = B_{ijkl} n_j^1 n_l^1 \bar{u}_k. \quad (9)$$

Le problème consiste à résoudre le système aux valeurs propres (9) qui dans le cas général conduit à trois valeurs distinctes de la vitesse de propagation, correspondant aux trois modes *A*, *B* et *C* [5]. Les vecteurs propres normés correspondant à ces vitesses $\bar{u}_k^A, \bar{u}_k^B, \bar{u}_k^C$ donnent la polarisation du déplacement particulière associée à l'onde plane.

Pour une plaque dont les faces sont libres, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\mathcal{T}_{ki} n_k^1 = 0 \quad \text{pour} \quad n_i^1 x_i = \pm h(T) \quad (10)$$

et les fréquences de résonance sont données par :

$$f_n(T) = \frac{nv(T)}{4h(T)} = \frac{n}{4h(T)} \left[\frac{C_e(T)}{\rho_1(T)} \right]^{1/2} \quad (11)$$

où *n* désigne le rang de partiel de la vibration et où $C_e(T) = \rho_1 v^2$ est le coefficient élastique effectif pour la vibration considérée. Ce coefficient est solution de l'équation aux valeurs propres qui découle de (9) :

$$|B_{ijkl} n_j^1 n_l^1 - C_e \delta_{ik}| = 0 \quad (12)$$

où δ_{ik} est le symbole de Kronecker.

Les coefficients élastiques B_{ijkl} ne dépendent que de la température :

$$B_{ijkl}(T) = B_{ijkl}(T_0) + \sum_n B_{ijkl}^{(n)}(T - T_0)^n, \quad (13)$$

où les $B_{ijkl}^{(n)}$ sont les coefficients de température des coefficients élastiques, habituellement tabulés à 25 °C pour $n = 1, 2, 3$ [9].

Les cosinus directeurs n_j^1 sont liés aux angles de coupe θ_0 et ϕ_0 . Pour une plaque donnée, ceux-ci sont définis à la température T_0 . En raison de l'anisotropie de la dilatation thermique, les angles définissant l'orientation de la plaque par rapport aux axes cristallographiques varient avec la température. Cette variation, très petite, est ordinairement négligée. Comme nous supposons que la dilatation thermique s'effectue à contrainte nulle, la déformation qui en résulte est homogène dans toute la plaque [6, 7] et peut être décrite à l'aide des quantités $\partial w_i / \partial a_j$ qui ne dépendent que de la température. Une surface plane est donc transformée en une autre surface plane. Par ailleurs, lorsqu'on se place dans le repère cristallographique, les $\partial w_i / \partial a_j$ pour $i \neq j$ sont tous nuls. Considérons deux vecteurs matériels unitaires $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{u}'_0$ situés dans le plan de la plaque à la température T_0 :

$$\mathbf{u}_0 \begin{vmatrix} \cos \phi_0 \\ \sin \phi_0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{u}'_0 \begin{vmatrix} \sin \theta_0 \sin \phi_0 \\ -\sin \theta_0 \cos \phi_0 \\ \cos \theta_0 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Lorsque la température varie, ces vecteurs deviennent $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}'_1$:

$$\mathbf{u}_1 \begin{vmatrix} \cos \phi_0 \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial a_1}\right) \\ \sin \phi_0 \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial a_2}\right) \\ 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{u}'_1 \begin{vmatrix} \sin \theta_0 \sin \phi_0 \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial a_1}\right) \\ -\sin \theta_0 \cos \phi_0 \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial a_2}\right) \\ \cos \theta_0 \left(1 + \frac{\partial w_3}{\partial a_3}\right) \end{vmatrix} \quad (15)$$

La normale $\mathbf{n}^1$ à la plaque est alors portée par le vecteur égal au produit vectoriel de $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}'_1$:

$$\mathbf{n}^1 = \frac{1}{\lambda} \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}'_1 = \frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} \cos \theta_0 \sin \phi_0 \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial a_2}\right) \left(1 + \frac{\partial w_3}{\partial a_3}\right) \\ - \cos \theta_0 \cos \phi_0 \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial a_1}\right) \left(1 + \frac{\partial w_3}{\partial a_3}\right) \\ - \sin \theta_0 \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial a_1}\right) \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial a_2}\right) \end{vmatrix} \quad (16)$$

où λ est un facteur de normalisation.

Dans le cas du quartz (classe 32), la normale unitaire est alors donnée par :

$$\mathbf{n}^1 = \frac{1}{\alpha} \begin{vmatrix} \cos \theta_0 \sin \phi_0 \\ - \cos \theta_0 \cos \phi_0 \\ - \sin \theta_0 (1 + \partial w_1 / \partial a_1) / (1 + \partial w_3 / \partial a_3) \end{vmatrix} \quad (17)$$

où

$$\alpha = \{ 1 + \sin^2 \theta_0 [-1 + (1 + \partial w_1 / \partial a_1) / (1 + \partial w_3 / \partial a_3)] \}^{1/2}. \quad (18)$$

Seul l'angle θ varie avec T . En posant $\theta(T) = \theta_0(T_0) + \delta\theta(T)$, on obtient aisément :

$$\sin \delta\theta = \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_0}{\alpha} [-1 + (1 + \partial w_1 / \partial a_1) / (1 + \partial w_3 / \partial a_3)]. \quad (19)$$

Pour obtenir la variation relative d'épaisseur de la plaque en fonction de la température, il suffit de considérer un vecteur matériel $\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$ égal à $2 h_0 \mathbf{n}_0$ dans l'état naturel :

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 = 2 h_0 \begin{vmatrix} - \cos \theta_0 \sin \phi_0 \\ \cos \theta_0 \cos \phi_0 \\ \sin \theta_0 \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Lorsque la température varie, un tel vecteur se transforme en $\mathbf{M}'_1 \mathbf{M}'_2$:

$$\mathbf{M}'_1 \mathbf{M}'_2 = 2 h_0 \begin{vmatrix} - \cos \theta_0 \sin \phi_0 \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial a_1}\right) \\ \cos \theta_0 \cos \phi_0 \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial a_1}\right) \\ \sin \theta_0 \left(1 + \frac{\partial w_3}{\partial a_3}\right) \end{vmatrix}. \quad (21)$$

On obtient l'épaisseur $2 h(T)$ en projetant $\mathbf{M}'_1 \mathbf{M}'_2(T)$ sur la normale $\mathbf{n}^1(T)$. D'où :

$$\frac{\Delta h(T)}{h_0} = \frac{1}{\alpha} \left[\cos^2 \theta \frac{\partial w_1}{\partial a_1} + \sin^2 \theta \frac{\partial w_3}{\partial a_3} (1 + \partial w_1 / \partial a_1) / (1 + \partial w_3 / \partial a_3) \right]. \quad (22)$$

On peut définir les coefficients de dilatation linéique $\alpha_{ij}^{(n)}$ comme étant ceux qui figurent dans le développement des quantités $\partial w_i / \partial a_j$ en fonction des puissances de $(T - T_0)$:

$$\frac{\partial w_i}{\partial a_j}(T) = \sum_n \alpha_{ij}^{(n)} (T - T_0)^n. \quad (23)$$

Pour le quartz, les coefficients $\alpha_{ij}^{(n)}$ ont des valeurs numériques connues [1]. On peut donc exprimer numériquement $\partial w_i / \partial a_i$ dans (19) et (22). Avec la définition 23, la variation de masse volumique est donnée par ⁽¹⁾ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho(T)}{\rho_0} = & - (2 \alpha_{11}^{(1)} + \alpha_{33}^{(1)}) (T - T_0) - [2 \alpha_{11}^{(2)} + \alpha_{33}^{(2)} - 3(\alpha_{11}^{(1)})^2 - (\alpha_{33}^{(1)})^2 \\ & - 2 \alpha_{11}^{(1)} \alpha_{33}^{(1)}] (T - T_0)^2 - [2 \alpha_{11}^{(3)} + \alpha_{33}^{(3)} - 2 \alpha_{11}^{(1)} (3 \alpha_{11}^{(2)} + \alpha_{33}^{(2)}) \\ & - 2 \alpha_{33}^{(1)} (\alpha_{11}^{(2)} + \alpha_{33}^{(2)}) + 3(\alpha_{11}^{(1)})^2 \alpha_{33}^{(1)} + 2 \alpha_{11}^{(1)} (\alpha_{33}^{(1)})^2 + 4(\alpha_{11}^{(1)})^3 \\ & + (\alpha_{33}^{(1)})^3] (T - T_0)^3. \end{aligned} \quad (24)$$

Les courbes fréquence-température peuvent être calculées à partir de l'expression 11 à l'aide des relations 22 et 24, et en résolvant l'équation 12, dans laquelle les cosinus directeurs sont remplacés par leurs valeurs exactes pour chaque valeur de la température.

La variation d'angle $\delta \theta$ est assez faible dans le cas du quartz : par exemple, pour une coupe AT ($\phi_0 = 0$, $\theta_0 = 35^\circ 20'$), $\delta \theta$ est de l'ordre de deux minutes d'angle pour une variation de température de 200 °C. Par contre, son influence sur les courbes fréquence-température ne peut pas être négligée, surtout dans le cas des coupes pour lesquelles la vitesse de propagation de l'onde plane dépend fortement de la direction de propagation. Sur la figure 3, les courbes en trait plein

Fig. 3. — Courbes fréquence-température de coupes AT.
[Frequency-temperature curves of AT cuts.]

correspondent aux fréquences calculées en tenant compte de cette variation d'angle pour la coupe AT. Les courbes en trait pointillé sont obtenues en négligeant cette variation d'angle, conformément à la démarche la plus communément adoptée. Pour cette coupe, on constate que l'écart entre les deux familles de courbes correspond à une variation d'angle θ_0 de l'ordre de 2 minutes d'angle.

Par contre, dans le cas de la coupe RT ($\phi = 15^\circ$, $\theta_0 = -30^\circ$) pour laquelle la vitesse de l'onde plane varie fortement avec l'angle θ_0 , le phénomène consi-

déré ne peut être négligé. L'écart entre les deux familles de courbes représentées sur la figure 4 correspondrait à une variation de θ_0 de l'ordre du degré.

Fig. 4. — Courbes fréquence-température de coupes RT.
[Frequency-temperature curves of RT cuts.]

4. Traitement du problème rapporté à l'état naturel.

La prise en compte de la variation d'orientation de la plaque nécessite de recalculer les cosinus directeurs figurant dans l'expression 12 pour chaque valeur de la température. L'obtention rigoureuse de la variation de fréquence en fonction de la température peut être notablement simplifiée en se plaçant dans l'état naturel et en utilisant le tenseur P_{ij} . Les équations 6 et 10 sont alors remplacées par :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial a_i}. \quad (25)$$

$$P_{ki} n_k^0 = 0 \text{ lorsque } n_i^0 a_i = \pm h_0. \quad (26)$$

Par le jeu des relations de passage (5) entre les différents tenseurs d'efforts, on montre que le tenseur de Piola rapporté à l'état naturel peut s'écrire, puisque dans le cas présent il n'y a pas de contrainte statique :

$$P_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial a_k} \quad (27)$$

où le tenseur A_{ijkl} est celui des coefficients élastiques effectifs rapportés à l'état initial. Ces coefficients sont reliés aux coefficients B_{ijkl} utilisés habituellement par :

$$A_{ijkl} = J_0 \frac{\partial a_i}{\partial x_m} \frac{\partial a_k}{\partial x_n} B_{mjnl}. \quad (28)$$

⁽¹⁾ On rencontre fréquemment l'expression approchée [8] :

$$\frac{\Delta \rho(T)}{\rho_0} = - \sum_n (2 \alpha_{11}^{(n)} + \alpha_{33}^{(n)}) (T - T_0)^n.$$

A la température de référence T_0 , les coefficients A_{ijkl} ont la même valeur que les coefficients B_{ijkl} puisque pour $T = T_0$, $\partial a_i / \partial x_m = \delta_{im}$. En revanche, les dépendances de ces deux familles par rapport à la température ne sont pas les mêmes : $A_{ijkl}^{(n)} \neq B_{ijkl}^{(n)}$ en général.

Dans le cas qui nous préoccupe, les coefficients $\partial a_i / \partial x_m$ sont nuls lorsque $i \neq m$ et les produits $\partial a_i / \partial x_i \partial a_k / \partial x_k$ qui figurent dans (28) s'expriment facilement en fonction des coefficients de dilatation $\alpha_{ii}^{(n)}$ et $\alpha_{kk}^{(n)}$ lorsqu'on les développe en puissance de $(T - T_0)$. J_0 s'obtient en développant l'inverse de $\Delta \rho / \rho_0$ (que nous avons donné en (24)) sur les puissances de $(T - T_0)$. En écrivant que :

$$B_{mjnl}(T) = B_{mjnl}(T_0) \left[1 + \sum_p B_{mjnl}^{(p)} (T - T_0)^p \right] \quad (29)$$

on peut identifier $A_{ijkl}(T)$ au développement du membre de droite de l'expression 28 en fonction de $(T - T_0)$. Il apparaît alors que la symétrie des coefficients A_{ijkl} par rapport aux indices est plus faible que celle des coefficients B_{ijkl} . Compte tenu de la définition 27 choisie par les coefficients A_{ijkb} , il est possible d'exprimer ces coefficients sous forme d'une matrice

symétrique en effectuant la réduction d'indices $(ij) \rightarrow \lambda$:

$$\begin{aligned} (11) &\rightarrow 1; (22) \rightarrow 2; (33) \rightarrow 3; (23) \rightarrow 4; (31) \rightarrow 5 \\ (12) &\rightarrow 6; (32) \rightarrow 7; (13) \rightarrow 8; (21) \rightarrow 9. \end{aligned}$$

Les coefficients de température $A_{\lambda\mu}^{(n)}$ sont tabulés [4] à partir des valeurs $B_{\lambda\mu}^{(n)}$ communément adoptées.

Les fréquences de résonance de la plaque sont données par :

$$f_n(T) = \frac{n}{4h_0} \left[\frac{C_e'(T)}{\rho_0} \right]^{1/2} \quad (30)$$

où le nouveau coefficient élastique effectif est solution de l'équation aux valeurs propres :

$$|A_{jilk} n_j^0 n_l^0 - C_e' \delta_{ik}| = 0. \quad (31)$$

L'intérêt principal de la méthode proposée réside dans le fait que seuls les coefficients A_{ijkl} varient avec la température dans l'équation aux fréquences. Il en découle immédiatement que la dépendance de la fréquence de la plaque en fonction de la température est donnée par :

$$\begin{aligned} f_n(T) = f_n(T_0) \left\{ 1 + \frac{1}{2} C_e'^{(1)} (T - T_0) + \left[\frac{1}{2} C_e'^{(2)} - \frac{1}{8} (C_e'^{(1)})^2 \right] (T - T_0)^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} C_e'^{(3)} - \frac{1}{4} C_e'^{(1)} C_e'^{(2)} + \frac{1}{16} (C_e'^{(1)})^3 \right] (T - T_0)^3 \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

ou :

$$C_e'^{(n)} = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n C_e'}{\partial T^n} \bigg|_{T=T_0} \quad (T = T_0).$$

5. Conclusion.

La rotation d'orientation cristalline considérée, bien que numériquement petite, peut amener une erreur

importante sur la détermination des courbes fréquence-température. L'utilisation comme variables indépendantes des coordonnées de l'état naturel permet de simplifier notablement l'obtention des courbes fréquence-température, l'expression 32 conduisant au même résultat que la procédure exposée au paragraphe 3.

Bibliographie

- [1] BECHMANN, R., BALLATO, A., LUKASZEK, T. J., *High Order Temperature Coefficients of the Elastic Stiffness Compliances of quartz* (P.I.R.E.) 1962, p. 1812.
- [2] THURSTON, R. N., *Waves in Solids*, Handbuch der Physik VI a/4 (Springer Verlag, Berlin) 1974.
- [3] BAUMHAUER, J. C., TIERSTEN, H. F., *Non linear electro-elastic equations for small fields superposed on a bias*, J.A.S.A. **54** N° 4 (1973) 1017.
- [4] DULMET, B., BOURQUIN, R., *Influence du choix de l'état de référence sur les coefficients de température des modules élastiques du quartz*, C. R. Hebd. Séan. Acad. Sci. **294** (1982).
- [5] DIEULESANT, J., ROYER, D., *Ondes élastiques dans les solides* (Editeur Masson & Cie) 1974.
- [6] TASI, J., HERRMANN, G., *Thermoelastic Dissipation in High Frequency Vibrations of Crystal Plates*, J.A.S.A. **36** (1964) 100.
- [7] SINHA, B. K., TIERSTEN, H. F., *First Temperature derivatives of the fundamental elastic constants of quartz*, J. Appl. Phys. **50** (4) (1979) 2732-2739.
- [8] BALLATO, A., LUKASZEK, T., *Higher Order Temperature Coefficients of frequency of Mass-Loaded Piezoelectric Crystal Plates*, Proceedings of Annual Frequency Control Symposium, 1975, p. 10.
- [9] Les $B_{ijkl}^{(n)}$ correspondent aux coefficients $T_{C_{ij}}^{(n)}$ de la référence 1.