Loi de comportement en fluage biaxial de l'aluminium (99,5 % en poids) à haute température; identification du potentiel d'écoulement stationnaire Ω (σ_{ij} , α_{stij} , T)

C. Lexcellent, J. Birocheau, C. Oytana

► To cite this version:

C. Lexcellent, J. Birocheau, C. Oytana. Loi de comportement en fluage biaxial de l'aluminium (99,5 % en poids) à haute température; identification du potentiel d'écoulement stationnaire Ω (σ_{ij} , α_{stij} , T). Revue de Physique Appliquée, 1982, 17 (11), pp.729-736. 10.1051/rphysap:019820017011072900 . jpa-00245050

HAL Id: jpa-00245050

<https://hal.science/jpa-00245050>

Submitted on 1 Jan 1982

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification
Physics Abstracts
80.00 — 81.40L

Loi de comportement en fluage biaxial de l'aluminium (99,5 % en poids) à haute température ; identification du potentiel d'écoulement stationnaire $\Omega(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}^{st}, T)$

C. Lexcellent, J. Birocheau et C. Oytana

Laboratoire de Mécanique Appliquée associé au C.N.R.S., Faculté des Sciences,
Route de Gray, La Bouloie, 25030 Besançon Cedex, France

(Reçu le 12 février 1982, révisé le 12 juillet 1982, accepté le 21 juillet 1982)

Résumé. — Nous étudions en fluage biaxial le comportement de l'aluminium A5 (99,5 % en poids) en régime stationnaire pour $T = 355^\circ\text{C}$. Nous vérifions :

- 1) • La possibilité d'écrire les vitesses obtenues sous la forme :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{st} = K' (\sigma'_{ij} - \lambda_{ij}^{st}) [\sigma_{eq}^{st}(\bar{\sigma} - \bar{\alpha})]^{n-1},$$

avec $n = 2$.

- La normalité du vecteur vitesse $\dot{\epsilon}_{st}$ dans l'espace des contraintes à l'équipotentielle :

$$\sigma_{eq}^{st}(\bar{\sigma} - \bar{\alpha}_{st}) = \text{constante},$$

ce qui permet d'écrire :

$$\dot{\epsilon}_{st} = \frac{2}{3} K' [\sigma_{eq}^{st}(\bar{\sigma} - \bar{\alpha}_{st})]^n \text{grad}(\sigma_{eq}^{st}).$$

- 2) L'existence d'un « potentiel d'écoulement » au sens de Rice en régime stationnaire complètement déterminé dans le domaine des contraintes appliquées pas trop fortes ($\sqrt{J_2(\bar{\sigma})} \leq 0,9 \times 10^7 \text{ N/m}^2$) sous la forme :

$$\Omega(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}^{st}, T) = \frac{2}{3} \frac{K'}{n+1} [\sigma_{eq}^{st}]^{n+1} + \frac{C}{k+1} (\sqrt{J_2(\alpha^{st})})^{k+1} + \Omega_0,$$

avec $k = 5$.

- 3) Le lien existant entre un modèle rhéologique et les mesures plus classiques telles celles de r et de h permettant d'accéder à des paramètres physiques pour identifier le modèle d'écoulement plastique à chaud. L'étude réalisée sur ce métal permet d'envisager une généralisation du potentiel Ω pour des matériaux ayant le même comportement en contrainte effective que l'aluminium A5 et son exploitation en fluage transitoire.

Abstract. — We study with biaxial creep tests the behaviour of aluminium (99.5 % weight) for the stationary flow, for $T = 355^\circ\text{C}$. We confirm :

- 1) • The possibility to write the strain rates with the form :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{st} = K' (\sigma'_{ij} - \lambda_{ij}^{st}) [\sigma_{eq}^{st}(\bar{\sigma} - \bar{\alpha})]^{n-1},$$

with $n = 2$.

- The normality of the rate vector in the stress space to the equipotential $\sigma_{eq}^{st}(\bar{\sigma} - \bar{\alpha}_{st}) = \text{constant}$, that allows to write :

$$\dot{\epsilon}_{st} = \frac{2}{3} K' [\sigma_{eq}^{st}(\bar{\sigma} - \bar{\alpha}_{st})]^n \text{grad}(\sigma_{eq}^{st}).$$

2) The existence of a potential flow in the Rice sense for the stationary flow completely determined for applied stress such $\sqrt{J_2(\sigma)} \leq 0.9 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ with the form :

$$\Omega(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}^{\text{st}}, T) = \frac{2}{3} \frac{K'}{n+1} [\sigma_{\text{eq}}^{\text{st}}]^{n+1} + \frac{C}{k+1} (\sqrt{J_2(\alpha^{\text{st}})})^{k+1} + \Omega_0,$$

with $k = 5$.

3) The bond existing between a rheological model and the usual measures such those of r and h , which permit the knowledge of physical parameters to identify the model.

The study permit to face a generalization of the potential flow Ω for materials which have the same behaviour with the internal stress as aluminium A5, and his use for the transient creep.

NOTATIONS : Fluage biaxial.

CONTRAINTES BIAxiaLES.

σ_{ij} : composantes du tenseur macroscopique de la contrainte appliquée.

σ'_{ij} : composantes du tenseur déviateur de la contrainte appliquée.

Contrainte appliquée équivalente :

$$\bar{\sigma}_a = \sqrt{J_2(\sigma)} = \frac{3}{2} \{ \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \}^{1/2} = (\sigma_{zz}^2 + \frac{3}{2} \sigma_{z\theta}^2 + \frac{3}{2} \sigma_{\theta z}^2)^{1/2}.$$

α_{ij} : composantes du tenseur de la contrainte interne mesurées par la méthode des décréments de contrainte (voir processus expérimental).

λ_{ij} : composantes du tenseur déviateur de la contrainte interne.

Contrainte effective équivalente :

$$\sigma_{\text{eq}} = \frac{3}{2} \{ (\sigma'_{ij} - \lambda_{ij}) (\sigma'_{ij} - \lambda_{ij}) \}^{1/2} = \sqrt{J_2(\sigma - \alpha)}$$

$$\sigma_{\text{eq}} = [(\sigma_{zz} - \alpha_{zz})^2 + \frac{3}{2}(\sigma_{z\theta} - \alpha_{z\theta})^2 + \frac{3}{2}(\sigma_{\theta z} - \alpha_{\theta z})^2]^{1/2}.$$

Déformations multiaxiales.

$\dot{\epsilon}_{ij}$: composantes du tenseur de la vitesse de déformation en fluage.

$\dot{\epsilon}_{ij}^{\text{st}}$: valeur de $\dot{\epsilon}_{ij}$ pendant le fluage stationnaire.

$\dot{\epsilon}_{zzt}$ et $\dot{\epsilon}_{z\theta t}$: vitesses de déformation axiale et de cisaillement instantanées obtenues après un décrement de contraintes.

$\dot{\epsilon}_{\text{eq}}$: vitesse de déformation équivalente :

$$\dot{\epsilon}_{\text{eq}} = \frac{2}{3} \{ \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \}^{1/2} = (\dot{\epsilon}_{zz}^2 + \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{z\theta}^2 + \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{\theta z}^2)^{1/2}.$$

1. Introduction. — Les équations constitutives pour le fluage et la plasticité haute température sont en général difficilement utilisables dans la pratique. Par suite des problèmes complexes posés par la justification expérimentale d'un modèle et par son identification. Il paraît donc intéressant de rechercher une équation constitutive utilisable assez simplement à des températures où le fluage a une grande importance, et pour des matériaux usuels.

De telles équations ont été initialement proposées par Robinson [1] et Chang [2] pour le fluage des métaux à hautes températures, en utilisant la représentation de la variable d'état de Onat [3].

La densité de dislocation (modèle de Lagneborg [4]) ou des paramètres équivalents sont utilisés comme variable d'état interne, et les effets de la restauration sont pris en compte.

Ces modèles dits à « variables internes » ont été justifiés sur un plan fondamental dans un certain

nombre de publications [5], [6], [7], [8] en particulier du point de vue thermodynamique. Un certain nombre de modèles du comportement à structure héréditaire constitue une seconde classe d'approches du problème [9]. En théorie, il devrait être possible de passer de l'une à l'autre par exemple en déterminant des variables internes sous forme de fonctionnelles à partir des théories héréditaires. L'un des points d'achoppement est l'introduction d'un potentiel dissipatif ou d'écoulement dans le premier groupe de modèles qui n'intervient pas automatiquement dans le second groupe. Cependant, celui-ci constitue une généralisation du principe du travail maximum de Hill et de la règle de normalité [8] dont les vérifications expérimentales sont nombreuses et dont l'extension au cas viscoplastique paraît prometteuse [10]. Les défauts quelquefois mis en évidence par les expériences de cyclage étant en fait représentatifs des trop grandes simplifications des modèles.

La comparaison théorique et expérimentale complète des deux approches probablement plus complémentaires qu'opposées n'est pas l'objet du présent travail. On notera simplement que les résultats obtenus en [10] ainsi que ceux présentés ici sont constants avec un modèle à une seule variable interne et que la validité de celui-ci et sa construction proviennent essentiellement d'un plan d'expérience et non de l'identification d'un modèle à une courbe expérimentale. Cela cependant n'exclut pas la possibilité d'une analyse des résultats par un modèle à structure héréditaire.

Dans le présent travail, nous nous sommes attachés à définir plus précisément la forme du potentiel plastique d'écoulement de Rice [5] $\Omega(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, T)$ dans le cas particulier de l'aluminium (99,5 % Al) à haute température. $\Omega(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, T)$ détermine dans l'espace des contraintes, des surfaces « équipotentielles » [10] que nous déterminerons pour notre alliage ; les variables d'état interne α_{ij} ont été justifiées et utilisées [11] pour caractériser l'état du matériau obtenu pour une température T , une contrainte appliquée σ_{ij} , une histoire de déformation fixées.

2. Conditions et résultats expérimentaux. — 2.1

MATÉRIEL EXPÉRIMENTAL. — Les essais biaxiaux ont été réalisés sur une machine à contraintes σ_{zz} et $\sigma_{z\theta}$ constantes [12].

L'aluminium A5 (99,5 % d'Al) a été choisi en raison de la bonne connaissance que nous en avons en fluage monoaxial [11], avec l'idée d'étendre au biaxial la notion d'équation d'état plastique étudiée en fluage uniaxial.

Les éprouvettes sont des tubes (longueur $l = 25$ mm, diamètres $\varnothing = 4,5-6,5$ mm) choisis pour leur usinage facile et l'obtention de contraintes relativement homogènes. Par exemple, dans le cas le plus défavorable de la torsion pure, la variation relative de contrainte le long d'un rayon est inférieure à 20 % [12].

Les éprouvettes sont homogénéisées par un recuit de 20 min. à 400 °C suivi d'une trempe à l'eau glacée ce qui conduit à l'obtention de grains moyens d'environ 0,2 mm.

Les essais de fluage ont été réalisés à la température de 355 °C, dans une gamme de contraintes axiales σ_{zz} de $0,4 \times 10^7$ N/m² à $1,2 \times 10^7$ N/m² et de contraintes de cisaillement $\sigma_{z\theta}$ de 0,2 à $0,6 \times 10^7$ N/m².

Les déformations axiales et de cisaillement sont mesurées respectivement par un L.V.D.T. et un R.V.D.T. (les plus petits changements de déformation détectés sont de l'ordre de 4×10^{-5}) à la fois sur les mors à l'extérieur du four ou dans le cas des déformations axiales directement sur l'éprouvette avec des tiges d'alumine, transmettant l'élongation de l'éprouvette en dehors du four. Actuellement, les imprécisions sur les mesures viennent plus du fait que nous avons à étudier des vitesses de fluage transitoire que du dispositif expérimental qui n'introduit que des erreurs négligeables.

La température est régulée par un système Proportionnel-Intégral-Dérivé, ce qui, dans l'intervalle de température de nos expériences, donne une stabilité avec une précision de 1 °C. Le gradient de température le long de l'échantillon étant de ± 1 °C (des mors en alumine ont été utilisés).

2.2 PROCÉDÉ EXPÉRIMENTAL. — Le procédé (matériel expérimental et manipulations) a été mis au point par Mermet, Delobelle et Oytana [10], [12]. Les quelques rappels et résultats rapportés ci-dessous montrent en fait l'application de leurs méthodes au cas de l'aluminium A5. Ils seront utilisés dans le paragraphe 3 afin d'écrire une forme de potentiel d'écoulement stationnaire.

L'essai consiste en une généralisation de la méthode de la « dip test technique » au cas du fluage biaxial. Pour une température T , des contraintes σ_{zz} et $\sigma_{z\theta}$ fixées, on réalise un état de fluage stationnaire représenté par le point A (Fig. 1). On effectue alors des décrets de contrainte ($\Delta\sigma_{zz}$, $\Delta\sigma_{z\theta}$) et on mesure les vitesses instantanées $\dot{\epsilon}_{zzt}$ et $\dot{\epsilon}_{z\theta t}$ obtenues par un vecteur en chaque point B atteint par décrement (Fig. 1) [12].

Fig. 1. — Directions des vitesses de déformation instantanées après des décrets de contraintes biaxiales effectuées à partir du point de fonctionnement A (fluage stationnaire).

[Strain rate directions after biaxial stress decrements starting from the working point A (stationary creep).]

La connaissance de ces directions d'écoulement permet la détermination expérimentale de l'allure des surfaces équipotentielles auxquelles la vitesse de déformation est normale.

La précision sur la détermination de la direction de l'écoulement est bonne car elle ne nécessite pas la connaissance directe de chacune des composantes de la vitesse de déformation transitoire. Les écarts observés proviennent le plus souvent de ce que à cause du nombre important de points de mesure le temps laissé entre deux essais fait que le fluage stationnaire peut n'être pas chaque fois atteint. La validité de l'existence et de la forme des équipotentielles est confirmée par les expériences similaires sur d'autres

Fig. 2. — Sensibilité de la vitesse de fluage stationnaire $\dot{\epsilon}_{eq}^{st}$ à la contrainte effective équivalente σ_{eq}^{st} .

[Sensitivity of stationary creep rate $\dot{\epsilon}_{eq}^{st}$ with effective equivalent stress σ_{eq}^{st} .]

matériaux présentées en [10] et les résultats obtenus avec précision sur le rapport $\dot{\epsilon}_{zz}^{st}/\dot{\epsilon}_{z\theta}^{st}$ (cf. équation (2) plus loin).

Les coordonnées du centre de ces équipotentielles α_{zz}^{st} et $\alpha_{z\theta}^{st}$ sont la généralisation biaxiale de la contrainte interne.

α_{zz}^{st} et $\alpha_{z\theta}^{st}$ sont identiques à celles définies et mesurées en contrainte uniaxiale par la dip test technique d'Ahlquist et Nix [13].

Une précaution importante à apporter aux essais consiste à partir d'une même histoire de chargement pour les éprouvettes utilisées. En effet, les études réalisées en fluage monoaxial sur l'A5 [11] et fluage biaxial sur le 2024-T81 Al par G.M. Brown [14] mettent en évidence une grande dépendance du comportement du matériau avec l'histoire. Il avait été montré que ce résultat pouvait être interprété par l'introduction d'une seule variable interne y (type dureté de Hart [15]).

Dans un premier temps, les éprouvettes utilisées homogénéisées étaient directement soumises au fluage biaxial représenté par le point A($T, \sigma_{zz}, \sigma_{z\theta}$).

2.3 RÉSULTATS. — L'étude écrite ci-dessous confirme l'extension de la loi puissance en fluage biaxial proposée par [12].

On vérifie (Fig. 2) la relation :

$$\dot{\epsilon}_{eq}^{st} = K[\sigma_{eq}^{st}(\sigma, \alpha^{st})]^n \quad \text{avec } n = 2 \quad (1)$$

valeur identique à celle trouvée en monoaxial pour l'A5.

D'autre part, une formulation voisine de celle de Rice [5] a été utilisée. Nous avons vérifié (Fig. 3) la possibilité d'écrire chaque composante de la vitesse sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{zz}^{st} &= K' \frac{2}{3} (\sigma_{zz} - \alpha_{zz}^{st}) [\sigma_{eq}^{st}]^{n-1}, \\ \dot{\epsilon}_{z\theta}^{st} &= K' (\sigma_{z\theta} - \alpha_{z\theta}^{st}) [\sigma_{eq}^{st}]^{n-1}, \\ \dot{\epsilon}_{\theta z}^{st} &= K' (\sigma_{\theta z} - \alpha_{\theta z}^{st}) [\sigma_{eq}^{st}]^{n-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

Fig. 3. — Tracé du rapport des composantes de la vitesse de fluage stationnaire $\dot{\epsilon}_{zz}^{st}/\dot{\epsilon}_{z\theta}^{st}$ en fonction du rapport des composantes de la contrainte effective : $\frac{\sigma_{zz} - \alpha_{zz}^{st}}{\sigma_{z\theta} - \alpha_{z\theta}^{st}}$.

[Graph of the ratio of stationary creep rate components $\dot{\epsilon}_{zz}^{st}/\dot{\epsilon}_{z\theta}^{st}$ as a function of the ratio of effective stress components : $\frac{\sigma_{zz} - \alpha_{zz}^{st}}{\sigma_{z\theta} - \alpha_{z\theta}^{st}}$.]

soit :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{st} = K'(\sigma'_{ij} - \lambda_{ij}^{st}) [\sigma_{eq}^{st}(\sigma, \alpha)]^{n-1}; \quad (3)$$

qui peut encore s'écrire compte tenu de l'expression de $(\partial \sigma_{eq} / \partial \sigma_{ij})_{st}$:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{st} = K[\sigma_{eq}^{st}]^n \left(\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{st}. \quad (4)$$

Formulation qui introduit la règle de normalité du vecteur vitesse de déformation dans l'espace des contraintes appliquées :

$$\dot{\epsilon}_{st} = K[\sigma_{eq}^{st}]^n \text{grad}(\sigma_{eq}^{st}), \quad (5)$$

à la surface $\sigma_{eq}^{st} = \text{Cte}$ au point de fonctionnement A($\sigma_{zz}, \sigma_{z\theta}, \sigma_{\theta z}$).

3. Définition et détermination du potentiel d'écoulement. — **3.1 RÈGLE DE NORMALITÉ. UTILISATION DES VITESSES DE FLUAGE STATIONNAIRE.** — Rice [16] introduit un potentiel d'écoulement $\Omega(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \rho, T)$ (où ρ est une variable interne scalaire caractéristique d'un écrouissage isotrope) tel que :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial \Omega(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \rho, T)}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Les résultats de Oytana, Delobelle, Mermet [12] montrent que, d'une manière générale ρ peut être négligé en cours de fluage à haute température et d'autre part que $\partial \Omega / \partial \sigma_{ij}$ ne dépend que de σ_{eq} . Les résultats présentés aux paragraphes précédents sont

conformes à ces conclusions (en particulier l'unicité des courbes des figures 1 et 3 et la figure 2); celles-ci, exprimées par (4), permettent une détermination de $\partial\Omega/\partial\sigma_{ij}$ par :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{st} = K \sigma_{eq}^n \left(\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{st} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij}, \alpha_{ij}^{st}, T) \quad (6)$$

qui par intégration permet d'écrire :

$$\Omega = F(\sigma_{eq}, T) + \Phi(\alpha_{ij}, T) \quad (7)$$

avec :

$$F = \frac{2}{3} \frac{K'}{n+1} \sigma_{eq}^{n+1}. \quad (8)$$

Remarque : La détermination de Ω conduisant à (7) et (8) utilise essentiellement l'écoulement stationnaire étudié au paragraphe précédent. Les résultats obtenus sont en accord avec le modèle de Rice [16] précisé expérimentalement en [8]. La validité du modèle représenté entre autres par (6) est admise dans la mesure où nos essais sont en accord avec lui.

3.2 ETUDE DE $\Phi(\alpha_{ij}, T)$. — La température intervient essentiellement par l'énergie d'activation et ne pose pas de problème direct. Nous considérerons dans la suite essentiellement des essais à une température fixée ($T = 355^\circ\text{C}$).

Dans (7), Φ reste indéterminée. En utilisant les résultats expérimentaux, la seule relation (6) qui porte sur des dérivées ne permet pas la détermination de la constante d'intégration. Seules des conditions supplémentaires imposées à $\Omega(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, T)$ peuvent permettre de le faire. Celles-ci seront les suivantes :

— Ω est minimum par rapport aux variables internes lorsque le fluage est stationnaire (c'est-à-dire lorsque $d\alpha_{ij}/dt = 0$). Cette condition, introduite par Rice [5], découle de la méthode thermodynamique qu'il a utilisée pour définir Ω .

— La règle de normalité est insuffisante pour décrire les lois de comportement du fluage. Il est nécessaire de préciser la loi d'évolution des contraintes internes; celle-ci peut être obtenue à partir de Ω ; ainsi Ponter et Leckie [17] introduisent la loi physique de Bailey Orowan sous la forme :

$$\dot{\alpha}_{ij} = -h(\alpha) \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_{ij}}. \quad (9)$$

(9) doit être identique à la loi de Bailey Orowan (qui seule, a une signification physique évidente) qui, généralisée à un état de contrainte multiaxiale, s'écrit [12] :

$$\frac{d\sqrt{J_2(\alpha)}}{dt} = h(\sqrt{J_2(\alpha)}) \dot{\epsilon}_{eq} - r(\sqrt{J_2(\alpha)}). \quad (10)$$

L'identification de (9) et (10) entraîne une condition supplémentaire sur Φ . Les deux conditions (thermo-

dynamique et physique) ainsi introduites vont nous permettre de définir Φ à une constante près dans les deux paragraphes suivants.

3.3 CONDITION SUR LE FLUAGE STATIONNAIRE. — Elle s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_{ij}} \right)_{st} = -\dot{\epsilon}_{ij}^{st} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_{ij}} \right)_{st} = 0. \quad (11)$$

De plus, la figure 3 et les expériences du type de celle montrée sur la figure 1 confirment un résultat montré en [12] sur d'autres alliages :

$$\frac{\alpha_{ij}^{st}}{\sigma_{ij}} = p \quad (12)$$

avec p scalaire indépendant de i et j dépendant de la contrainte appliquée donc en fait de $\sqrt{J_2(\sigma)}$ (et de la température).

(11) et (12) montrent que Φ ne dépend que de $J_2(\alpha)$. On posera :

$$\Phi(\alpha_{ij}, T) = G(\sqrt{J_2(\alpha)}, T). \quad (13)$$

A une température donnée, G ne dépend que de $\sqrt{J_2(\alpha)}$ et peut donc être déterminée par des essais purement uniaxiaux. La concordance de ces résultats et de ceux obtenus en traction-torsion constituant alors en fait une confirmation expérimentale du modèle physique et rhéologique utilisé.

3.4 LOI D'ÉVOLUTION DES CONTRAINTES INTERNES. — a) D'après (9) et (13), on a :

$$\dot{\alpha}_{ij} = h(\sqrt{J_2(\alpha)}) \left[\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\partial G(\sqrt{J_2(\alpha)})}{\partial \alpha_{ij}} \right],$$

qui donne :

$$\frac{d\sqrt{J_2(\alpha)}}{dt} = h(\sqrt{J_2(\alpha)}) \left(\dot{\epsilon}_{eq} - \frac{dG(\sqrt{J_2(\alpha)})}{d\sqrt{J_2(\alpha)}} \right), \quad (14)$$

par comparaison avec (10) cela conduit à la condition :

$$\frac{dG}{d\sqrt{J_2(\alpha)}} = \frac{r(\sqrt{J_2(\alpha)})}{h(\sqrt{J_2(\alpha)})}. \quad (15)$$

Les expériences présentées ici et des travaux sur d'autres alliages [12] ont montré la validité de la représentation des lois physiques du fluage par le modèle constitué des équations (6) et (10). La fonction $G(\sqrt{J_2(\alpha)})$ est unique pour un matériau à une température donnée, il en est de même de la fonction $dG(\sqrt{J_2(\alpha)})/d\sqrt{J_2(\alpha)}$ qui peut donc être déterminée par des mesures en fluage stationnaire. Dans ce cas, (14) s'écrit :

$$\left(\frac{d\sqrt{J_2(\alpha)}}{dt} \right)_{st} = 0 = h(\sqrt{J_2(\alpha)^{st}}) \times \left(\dot{\epsilon}_{eq}^{st} - \frac{dG(\sqrt{J_2(\alpha)^{st}})}{d\sqrt{J_2(\alpha)^{st}}} \right),$$

d'où :

$$\frac{dG(\sqrt{J_2(\alpha)^{st}})}{d(\sqrt{J_2(\alpha)^{st}})} = \dot{\epsilon}_{eq}^{st} \quad (16)$$

La fonction $G(\sqrt{J_2(\alpha)})$ pourra donc être obtenue par la courbe $\dot{\epsilon}_{eq}^{st} = f(\sqrt{J_2(\alpha)^{st}})$.

b) En fait, $\dot{\epsilon}_{eq}^{st}$ dépend de σ_{eq}^{st} , le passage de $\dot{\epsilon}_{eq}^{st}(\sigma_{eq}^{st})$ à $\dot{\epsilon}_{eq}^{st}(\sqrt{J_2(\alpha)^{st}})$ nécessite la connaissance de la relation entre $\sqrt{J_2(\alpha)^{st}}$ et $\sqrt{J_2(\sigma)}$. Cette relation est montrée figure 4. Les points sont obtenus pour $T = 623$ K à partir d'essais en contrainte uniaxiale de traction ou biaxiale traction-torsion avec différents rapports $\sigma_{z\theta}/\sigma_{zz}$.

Fig. 4. — Evolution de la contrainte interne équivalente $\sqrt{J_2(\alpha^{st})}$ avec la contrainte appliquée équivalente $\sqrt{J_2(\sigma)}$.

[Evolution of equivalent internal stress $\sqrt{J_2(\alpha^{st})}$ with equivalent applied stress $\sqrt{J_2(\sigma)}$.]

En fait, des relations de type (6) et (10) prévoient effectivement qu'une relation unique lie $\sqrt{J_2(\alpha)}$ et $\sqrt{J_2(\sigma)}$ quel que soit le rapport $\sigma_{z\theta}/\sigma_{zz}$. Cette relation peut donc, en fait, être déterminée à partir d'essais uniaxiaux. Le fait que les points de la figure 4 se situent sur une courbe unique quel que soit ce rapport, est une confirmation de la validité physique du modèle utilisé. La forme de la courbe de la figure 4 est évidemment celle obtenue en contrainte uniaxiale lorsque $\sqrt{J_2(\alpha^{st})}$ est remplacé par la contrainte interne σ_i mesurée par la dip test technique d'Ahlquist et Nix [13] et que $\sqrt{J_2(\alpha)}$ est remplacé par la contrainte appliquée.

c) On peut maintenant tracer (Fig. 5) la courbe $\ln \dot{\epsilon}_{eq}^{st}$ en fonction de $\ln(\sqrt{J_2(\alpha^{st})})$ avec les valeurs obtenues en fluage stationnaire par les méthodes décrites précédemment (Fig. 1).

En stationnaire, compte tenu de (15) et de la remarque du paragraphe précédent, la fonction $G(\sqrt{J_2(\alpha)})$ est unique, sa dérivée également, la figure 5 représente donc la relation liant $dG(\sqrt{J_2(\alpha)})/d\sqrt{J_2(\alpha)}$ en fonction de $\sqrt{J_2(\alpha)}$.

L'équation (15) montre que la figure 5 représente

Fig. 5. — Dépendance de la vitesse de fluage stationnaire $\dot{\epsilon}_{eq}^{st}$ à la contrainte interne équivalente $\sqrt{J_2(\alpha^{st})}$.

[The dependence of stationary creep rate $\dot{\epsilon}_{eq}^{st}$ with equivalent internal stress $\sqrt{J_2(\alpha^{st})}$.]

en échelles logarithmiques la variation $\frac{r}{h}(\sqrt{J_2(\alpha^{st})})$ avec $\sqrt{J_2(\alpha^{st})}$, qui est en champ complexe la généralisation de la contrainte interne uniaxiale. Du point de vue physique, on sait que r est une fonction croissante de la contrainte interne alors que h est plutôt légèrement décroissante, ce qui explique l'allure croissante de la courbe. Plus précisément, sauf aux grandes valeurs de $\sqrt{J_2(\alpha)}$ qui correspondent à des contraintes appliquées très importantes (comme le montre la figure 4 où la saturation de $\sqrt{J_2(\alpha)}$ entraîne qu'aux fortes contraintes, il faut une augmentation importante de la contrainte appliquée pour provoquer une variation plus faible de la contrainte interne), on a :

$$\ln \frac{r}{h} = k \ln \frac{\sqrt{J_2(\alpha)}}{C},$$

d'où :

$$\frac{r}{h} = \left(\frac{\sqrt{J_2(\alpha)}}{C} \right)^k \quad \text{avec } k = 5.$$

Birocheau [11] sur le même matériau en uniaxial a mesuré r par la méthode de Mitra et McLean [18] et h par la méthode de Oikawa-Sugarawa [19], et trouve un rapport de 4,8. La bonne concordance des deux résultats est d'ailleurs évidente si l'on tient compte de ce que les valeurs de r et h , ainsi déterminées vérifient en stationnaire $r/h = \dot{\epsilon}_{st}$. Ce dernier paramètre étant utilisé ici pour construire la figure 5 mais en contrainte biaxiale ce qui conforte le modèle utilisé.

3.5 DÉTERMINATION DE $G(\sqrt{J_2(\alpha)})$. — La courbe obtenue figure 5 peut être considérée comme représentant une fonction $f(u)$ qui sera approximée par une fonction linéaire ku dans le domaine de contraintes appliquées pas trop élevées

$$(\sqrt{J_2(\alpha)} \leq 0,9 \times 10^7 \text{ N/m}^2)$$

en posant la notation simplificatrice $u = \ln(\sqrt{J_2(\alpha)})$.

Fig. 6. — Evolution du paramètre d'écrouissage h avec la température.

[Temperature dependence of hardening parameter h .]

Dans ce cas, l'intégration de la fonction :

$$\text{Ln} \frac{dG}{d\sqrt{J_2(\alpha)}} = f(u), \quad (17)$$

conduit à :

$$G(\sqrt{J_2(\alpha)}) = \int_0^u \exp[f(u) + u] du + G(0). \quad (18)$$

Notons que la borne arbitraire u_0 tient compte de ce que les deux conditions introduites au § 3.2 font intervenir des dérivées de $\Phi(\alpha_{ij})$ donc de $G(\sqrt{J_2(\alpha)})$ qui n'est donc définie qu'à une constante arbitraire près.

La connaissance de $f(u)$ entraîne dès lors celle de $G(\sqrt{J_2(\alpha)})$ donc de Ω .

L'identification complète des lois d'écoulement plastique à chaud suppose de plus l'introduction de la relation (9) de Ponter et Leckie [17], donc la détermination expérimentale de $h(\alpha)$. Un exemple d'une telle détermination pour l'alliage étudié dans le présent travail est donné figure 6. Les équations constitutives sont alors connues à partir du modèle introduit en [2], [12], [17]...

Aux contraintes appliquées pas trop élevées ($\sqrt{J_2(\alpha)} \leq 0,9 \times 10^7 \text{ N/m}^2$). La relation linéaire obtenue figure 5 compte tenu de (17) conduit à :

$$G(\sqrt{J_2(\alpha)}) = \frac{C}{K+1} (\sqrt{J_2(\alpha)})^{k+1} + G_0 \quad (19)$$

avec $k = 5$.

Dans ce cas, le potentiel d'écoulement est complètement déterminé et s'écrit :

$$\Omega = \frac{2}{3} \frac{K'}{(n+1)} [\sigma_{eq}]^{n+1} + \frac{C}{k+1} (\sqrt{J_2(\alpha)})^{k+1} + \Omega_0. \quad (20)$$

3.6 REMARQUE CONCERNANT p . — La relation (12) valable en stationnaire entraîne que :

$$\sqrt{J_2(\alpha)} = p \sqrt{J_2(\sigma)},$$

et

$$\sigma_{eq}^{st} = \sqrt{J_2(\sigma)} - \sqrt{J_2(\alpha)^{st}} = \sqrt{J_2(\alpha^{st})} \left(\frac{1}{p} - 1 \right). \quad (21)$$

La relation (4) s'écrit alors :

$$\dot{\epsilon}_{eq}^{st} = K \sigma_{eq}^{st n} = K \sqrt{J_2(\alpha^{st})} \left(\frac{1}{p} - 1 \right)^n.$$

Compte tenu de (16) et (17) et de la figure 5, cela conduit à :

$$\left(\frac{df}{du} \right) = n + n \frac{\partial \text{Ln} \left(\frac{1}{p} - 1 \right)}{\partial u}$$

avec

$$u = \text{Ln} (\sqrt{J_2(\alpha^{st})}),$$

soit dans le cas général :

$$\frac{dp}{p(1-p)} = \frac{1}{n} \left(n - \frac{df}{du} \right) du. \quad (22)$$

Cette relation (22) permet d'étendre le calcul aux grandes valeurs de la contrainte aux faibles contraintes $df/du = k$. L'intégration de (22) ou l'écriture directe à partir de (16), (17) donne alors :

$$p = \frac{1}{1 + \frac{(\sqrt{J_2(\alpha)})^{\frac{k-n}{n}}}{k^{1/n}}}, \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} k = 5 \\ n = 2. \end{matrix}$$

4. **Conclusion.** — Les résultats expérimentaux obtenus sur l'alliage d'aluminium A5 en fluage haute température, en contrainte biaxiale traction-torsion selon la méthode exposée en [12] confirment la validité des lois d'écoulement dans lesquelles l'écrouissage est représenté par la contrainte interne et donc dans les équations constitutives dans lesquelles on introduira une variable tensorielle. Ces résultats sont en accord avec ceux observés en [12] sur d'autres alliages.

On a alors introduit le potentiel plastique de Rice en lui demandant de répondre aux conditions suivantes :

— La vitesse de fluage est normale aux surfaces $\Omega(\sigma, \alpha, T) = \text{Cte}$.

— Ω est minimum par rapport au α_{ij} lorsque l'on est en fluage stationnaire ($\dot{\alpha}_{ij} = 0$).

— La loi d'évolution des α_{ij} est donnée par une relation de type (9) qui doit être assimilable à la loi d'Orowan.

On a pu montrer en utilisant certains résultats expérimentaux que Ω est alors défini à une constante près.

La méthode illustrée par la figure 5 permet d'accéder à la relation physique liant le rapport r/h à la contrainte interne généralisée $\sqrt{J_2(\alpha)}$. Une mesure de $r(\sqrt{J_2(\alpha)})$ ou $h(\sqrt{J_2(\alpha)})$ obtenue par exemple par les méthodes de Mitra-McLean ou Oikawa-Sugawara permet théoriquement de déterminer complètement les lois d'écoulement écrites par exemple sous les formes (4) et (10) ou (7) et (9). Sauf aux vitesses de fluage importantes, on trouve dans le cas de l'alliage A5 :

$$\Omega = \frac{2}{3} \frac{K'}{n+1} \sigma_{eq}^{n+1} + \frac{C}{k+1} \sqrt{J_2(\alpha)}^{k+1} + \Omega_0.$$

On peut donc ainsi établir le lien nécessaire existant entre un modèle rhéologique fortement conforté par l'expérience [12] et les mesures plus classiques (et certainement plus controversées), telles celles de r et de h qui cherchent à accéder plus directement à des paramètres physiques et l'écoulement plastique à chaud.

Bibliographie

- [1] ROBINSON, D. N., PUGH, C. E. and CORUM, J. M., « Constitutive equation for describing high temperature inelastic behavior of structural alloys », « Specialists » Meeting on High-Temperature structural design Technology of LMFBRs, April 27-30 1976, International atomic energy agency IWGR/11 (October 1976) 44-57.
- [2] CHANG, S. J. (Union Carbide Corporation - Oak Ridge), « A creep-recovery constitutive equation and its time independent limit ». *Developments in theoretical and applied mechanics* vol. 9. Proceedings of the Ninth Southeastern Conference on theoretical and applied Mechanics. Session 4B, Material Behavior. May 4-5, 1978, 497-507.
- [3] ONAT, E. T. and FARDSHISHEN, « Representation of creep of Metals » ORNL-4783, August, 1972.
- [4] LAGNEBORG, R., « A Modified Recovery-creep Model and its Evaluation ». *Met. Sci. J.* **6** (1972) 127-33.
- [5] RICE, J. R., « On the structure of stress-strain Relations for Time dependent Plastic deformation in Metals ». *J. Appl. Mech.* **37** (1970) 728-737.
- [6] PONTER, Ar. S., BATAILLE, J. and KESTIN, J., « A thermodynamic model for the time dependent plastic deformation of solids ». *J. Mécan.* **18** (1979).
- [7] MOREAU, J. J., « Sur les lois de frottement de viscosité et de viscoplasticité ». *C. R. Hebd. Séan. Acad. Sci. C* **271** (1970) 608-611.
- [8] CHABOCHE, J. L., Thèse d'état : « Description thermodynamique et phénoménologique de la viscoplasticité avec endommagement ». Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, Publication n° 1978-3.
- [9] TERRIEZ, J. M., Thèse d'Etat (1980) Institut Mécanique, Grenoble.
- [10] OYTANA, C., DELOBELLE, P., MERMET, A., « Constitutive equations study in biaxial stress experiments ». *J. Eng. Mater. Techn.* **104/1** (1982).
- [11] BIROCHEAU, J., « Etude en fluage de la phase β de Cu-Sn. Contribution à l'introduction d'une équation d'état dans le fluage de l'aluminium » Thèse, Faculté des Sciences et des Techniques de l'Université de Besançon (1979).
- [12] DELOBELLE, P., OYTANA, C., MERMET, A., « Appareillage pour l'étude des propriétés rhéologiques des matériaux en régime biaxial à vitesses linéaires, contraintes (σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$), ou déformation (ε_{zz} , $\varepsilon_{\theta\theta}$), constantes ». *Revue Phys. Appl.* **14** (1979) 933-938.
- [13] ALHQUIST, L. N. and NIX, W. D., « A technique for measuring mean internal stress during high temperature creep ». *Scripta Metall.* **3** (1969) 679-682.
- [14] BROWN, G. M., « Inelastic Deformation of an aluminium temperature ». *J. Mech. Phys. Solids* (Pergamon Press) 1970, **18**, p. 383 to 396.
- [15] HART, E. W. LI CY, YAMADA, H., WIRE, G. L., « *Phenomenological theory : a guide to constitutive Relations and fundamental deformation properties* », « Constitutive equations in plasticity ». (The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., London) A. S. Argon Ed., 1975, p. 149-197.
- [16] RICE, J. R., « *Continuum mechanics and Thermodynamics of plasticity in relation to microscale deformation mechanisms* », « Constitutive equations in plasticity » (The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., London) A.S. Argon Ed., 1975, p. 23-75.
- [17] PONTER, Ar. S. and LECKIE, F. A., « Constitutive relationships for the time dependent deformation of metals ». *Trans. ASME J. Eng. Mat. Tech.* **98** (1976) 47-51.
- [18] MITRA, S. M. and MCLEAN, D., « Cold work and recovery in creep at ostensibly constant structure ». *Metal. Sci. Journal* (1967) 1-192.
- [19] OIKAWA-SUGAWARA, « Instantaneous plastic strain associated with stress increments during the steady creep of Al and Al-5,5 pct at Mg alloy ». *Scripta Metall.* **12** (1978) 85-89.