Division non fractionnaire de fréquence dans un résonateur à quartz

J.H. Balbi, M. Dulmet, A. Thirard

► To cite this version:

J.H. Balbi, M. Dulmet, A. Thirard. Division non fractionnaire de fréquence dans un résonateur à quartz. *Revue de Physique Appliquée*, 1982, 17 (1), pp.1-7. 10.1051/rphysap:019820017010100 . jpa-00244964

HAL Id: jpa-00244964

<https://hal.science/jpa-00244964>

Submitted on 1 Jan 1982

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

REVUE DE PHYSIQUE APPLIQUÉE

Classification

Physics Abstracts

61.80C — 77.60 — 78.20H

Division non fractionnaire de fréquence dans un résonateur à quartz

J. H. Balbi, M. Dulmet et A. Thirard

Laboratoire de Mécanique Appliquée et Laboratoire de Chronométrie et Piézoélectricité,
Université de Franche-Comté, 25030 Besançon Cedex, France

(Reçu le 15 juillet 1981, accepté le 14 septembre 1981)

Résumé. — Un type nouveau de résonance est découvert dans le spectre d'un résonateur à quartz. L'analyse expérimentale montre qu'il s'agit d'un couplage entre trois fréquences propres, ces fréquences admettant une combinaison à coefficients entiers égale à zéro. Pour interpréter ce phénomène, on construit un modèle simple, mais non linéaire qui est ensuite représenté dans la base modale. L'on accède ainsi à la courbe amplitude-fréquence théorique qui correspond bien à celle fournie par l'expérience. Ce phénomène ouvre une voie pour la division non fractionnaire de fréquence.

Abstract. — A new kind of resonance is discovered in the spectrum of a quartz resonator. An experimental analysis shows that it is due to a coupling between three eigenfrequencies, and that a linear combination with integer coefficients of these frequencies is null. To explain this phenomenon, one constructs a simple but non-linear model which is then rewritten in the modal bases. So is obtained the theoretical amplitude-frequency curve which is in good agreement with the experimental one. This phenomenon leads to non-rational frequency division.

1. Introduction. — Au cours du relevé du spectre d'un résonateur à quartz, nous avons mis en évidence une résonance tout à fait inhabituelle. Ordinairement, au voisinage d'une fréquence propre f_0 , la courbe amplitude-fréquence admet un pic droit (Fig. 1) si le niveau d'excitation est faible, ou un pic incurvé (Fig. 2) si le niveau d'excitation est élevé. Ce défaut appelé défaut d'isochronisme est dû à l'influence des non-linéarités.

Or, dans le cas présent, la courbe de résonance possède deux pics incurvés en sens contraire. On

Fig. 1. — Courbe de résonance linéaire.

[Linear resonance curve.]

Fig. 2. — Courbe de résonance non linéaire; cas habituel.

[Usual non-linear resonance curve.]

trouvera à la figure 3 la courbe de résonance schématisée.

Une première investigation faite au moyen de la topographie aux rayons X a montré que :

1) Lorsque la fréquence n'appartient pas à l'intervalle déterminé par les fréquences des deux pics de résonance, la vibration a lieu à la fréquence d'excitation voisine de la fréquence propre que nous noterons f_{15} . En effet, la topographie dans la tranche de la pastille de quartz présente alors 15 noeuds.

Fig. 3. — La résonance observée.

[The observed resonance.]

2) Lorsque la fréquence appartient à l'intervalle limité par les fréquences des deux pics de résonance, la fréquence de la vibration est très différente de la fréquence d'excitation. La topographie de tranche montre 7 noeuds dans l'épaisseur de la pastille. Nous remarquons que cette fréquence correspond à une autre fréquence propre du résonateur que nous noterons f_7 .

De toute évidence, ce phénomène est causé par les non-linéarités du quartz mais son explication n'est pas triviale car le rapport f_{15}/f_7 n'est pas rationnel. On est donc en présence d'un phénomène de division non fractionnaire de fréquences.

Une analyse spectrale du signal électrique de sortie a alors indiqué la présence d'une troisième fréquence, qui est la fréquence propre avec 23 noeuds dans la tranche : f_{23} , mais l'amplitude associée à cette fréquence est trop faible pour qu'elle apparaisse sur la topographie.

De plus, on constate que ces trois fréquences vérifient la relation :

$$f_7 + f_{23} - 2f_{15} \sim 0. \quad (1)$$

On est ainsi en présence d'un couplage entre trois fréquences propres et l'on se propose d'établir le mécanisme d'un tel couplage.

2. Modélisation du phénomène. — 2.1 PRÉMODÈLE. — Les topographies de surface de la pastille de quartz montrant que les trois modes propres sont des purs cisaillements d'épaisseur, le modèle unidimensionnel plan-plan est suffisant. C'est-à-dire que seul intervient le déplacement u suivant l'axe x_1 (on est en coupe A.T.) qui ne dépend que de la variable d'espace x_2 . De plus, on néglige l'effet piézoélectrique, faible dans le quartz.

Nous utiliserons une notation condensée pour les dérivées partielles, c'est-à-dire que nous écrirons :

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = u_{,2}.$$

Si l'on se place en régime libre, linéaire, non amorti, l'équation dans le milieu est :

$$\ddot{u} - c^2 u_{,22} = 0. \quad (2)$$

De plus, sur la frontière $x_2 = \pm b$ (si $2b$ est l'épaisseur de la pastille), la contrainte $T_6 = c_{66} u_{,2}$ est nulle ; c_{66} est un coefficient élastique ;

$$c^2 = \frac{c_{66}}{\rho}; \quad \rho \text{ masse volumique.}$$

Les pulsations propres sont alors :

$$\omega_n = n \frac{\pi c}{2b}, \quad (3)$$

et les modes propres :

$$\phi_n = \sin \frac{\omega_n}{c} x_2. \quad (4)$$

Remarquons que ce prémodèle est qualitativement satisfaisant mais non quantitativement. En effet, ses fréquences propres sont harmoniques alors que dans la réalité, elles ne le sont pas ; d'autre part, les modes propres ne sont pas exactement représentés par les ϕ_n car la pastille n'est pas plan-plan mais plan-convexe (l'épaisseur n'est pas constante). Cependant, nous sommes contraints de nous limiter à un modèle aussi simple afin d'être capables de mener à bien l'analyse non linéaire ultérieure. En outre, la formule (3) ne sera pas utilisée, nous prendrons les valeurs expérimentales des ω_n et enfin, nous introduirons ultérieurement un paramètre d'ajustement destiné à compenser l'approximation faite en prenant l'expression (4) pour les modes propres.

En régime amorti, non linéaire, forcé, le prémodèle devient :

$$\ddot{u} - c^2 u_{,22} = + \frac{r_{66}}{\rho} \dot{u}_{,22} + \gamma (u_{,2})^3 + F(x_2) \cos \omega t, \quad (5)$$

$$u_{,2}(\pm b) = 0.$$

$\frac{r_{66}}{\rho} \dot{u}_{,22}$ est le terme d'amortissement ; $F(x_2) \cos \omega t$ traduit l'excitation que crée le potentiel imposé aux électrodes par l'intermédiaire de l'effet piézoélectrique ; enfin, le terme $\gamma (u_{,2})^3$ est choisi pour traduire la non-linéarité, d'une part car c'est le terme prépondérant en cisaillement d'épaisseur [1], et d'autre part parce que sa nature cubique permettra de faire apparaître la combinaison (1) ; $\gamma = \frac{c_{6666}}{6\rho}$.

2.2 MODÈLE MODAL. — Maintenant, à partir de ce pré-modèle (5), nous allons construire le modèle définitif en utilisant la base des modes propres où le problème physique se trouvera bien traduit. Les modes propres (4) forment une base complète orthogonale dans $L^2(\Omega)$ (espace des fonctions de carré

intégrable sur $\Omega = (-b, +b)$, avec le produit scalaire :

$$[f, g] = \frac{1}{b} \int_{-b}^b f(x_2) g(x_2) dx_2.$$

On peut donc représenter toute fonction de $L^2(\Omega)$ et en particulier la fonction u sur cette base :

$$u(x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \sin \frac{\omega_n}{c} x_2. \quad (6)$$

En reportant (6) dans (5), on obtient une suite infinie d'équations différentielles ordinaires :

$$\ddot{\alpha}_n + \omega_n^2 \alpha_n = -\omega_n \frac{\dot{\alpha}_n}{Q_n} + \gamma G_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n \dots) + F_n \cos \omega t, \quad (7)$$

avec :

$$Q_n = \frac{\rho_c}{r_{66} \omega_n}; \quad \frac{\rho c^2}{r_{66} \omega_n}$$

$$F_n = \left[F(x_2), \sin \frac{\omega_n}{c} x_2 \right];$$

$$G_n = \left[\left(\sum \alpha_n \frac{\omega_n}{c} \cos \frac{\omega_n}{c} x_2 \right)^3, \sin \frac{\omega_n}{c} x_2 \right].$$

Or, du fait que les coefficients de qualité Q_n des différentes fréquences d'un résonateur à quartz sont très grands et donc, les bandes passantes très étroites, on peut affirmer que les seuls α_n non nuls, en fait les seuls qui émergent du bruit de fond, sont ceux pour lesquels le second membre de (7) contient un terme d'excitation à la pulsation ω_n .

Or, dans l'expérience, on a $\omega \sim \omega_{15}$, donc α_{15} est excité par le terme $F_{15} \cos \omega t$. Pour $n \neq 15$, le terme $F_n \cos \omega t$ a une influence nulle. Par contre, le terme G_n peut jouer le rôle d'excitation si il génère une combinaison de fréquence égale à ω_n . C'est justement ce qui se produit pour $n = 7$, G_7 faisant alors apparaître la pulsation $2\omega_{15} - \omega_{23}$ qui est sensiblement égale à ω_7 ; donc α_7 sera excité. On a la même situation pour α_{23} . Le système (7) se réduit à un système de trois équations différentielles du second ordre, faiblement non linéaires ($\gamma | G_n | < \omega_n^2 | \alpha_n |$) :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha}_7 + \omega_7^2 \alpha_7 &= -\frac{\omega_7}{Q_7} \dot{\alpha}_7 + \gamma G_7(\alpha_7, \alpha_{15}, \alpha_{23}), \\ \ddot{\alpha}_{15} + \omega_{15}^2 \alpha_{15} &= -\frac{\omega_{15}}{Q_{15}} \dot{\alpha}_{15} + \gamma G_{15}(\alpha_7, \alpha_{15}, \alpha_{23}) + F_{15} \cos \omega t, \\ \ddot{\alpha}_{23} + \omega_{23}^2 \alpha_{23} &= -\frac{\omega_{23}}{Q_{23}} \dot{\alpha}_{23} + \gamma G_{23}(\alpha_7, \alpha_{15}, \alpha_{13}). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(Pour les expressions détaillées des G_n voir [3].)

3. Résolution approchée. — 3.1 MÉTHODE DE LA MOYENNE. — Nous allons appliquer au système (8) la méthode de la moyenne résonnante [2]. Pour cela, on effectue d'abord un changement de variables qui remplace la vibration α_n par son amplitude a_n et sa phase φ_n :

$$\alpha_n(t) = a_n(t) \cos(\omega_n t + \varphi_n(t))$$

$$n = 7, 15, 23,$$

et du fait que nous avons remplacé une inconnue α_n par deux autres a_n et φ_n nous pouvons imposer une condition supplémentaire qui sera :

$$\dot{\alpha}_n(t) = -\omega_n a_n(t) \sin(\omega_n t + \varphi_n(t))$$

$$n = 7, 15, 23;$$

ceci afin de se ramener à un système de six équations différentielles du premier ordre :

$$\dot{z} = Z(z, t),$$

$$z = (a_7, \varphi_7, a_{15}, \varphi_{15}, a_{23}, \varphi_{23}). \quad (9)$$

$Z(z, .)$ est une fonction quasi périodique dont les quasi-périodes de base sont : $\left(\frac{2\pi}{\omega_7}, \frac{2\pi}{\omega_{15}}, \frac{2\pi}{\omega_{23}}, \frac{2\pi}{\omega} \right)$.

On va remplacer l'étude de (9) par celle d'un système plus simple :

$$\dot{z}^* = Z^*(z^*, t), \quad (10)$$

où Z^* est construit à partir de Z en ne retenant dans ce dernier que ses termes de *basse-fréquence*; c'est-à-dire les termes constants et les termes de fréquence

$$\frac{\delta}{2\pi}, \frac{\nu}{2\pi} \quad (\delta = \omega_7 + \omega_{23} - 2\omega_{15}; \nu = \omega - \omega_{15}),$$

qui sont effectivement basses devant les fréquences de base.

En passant de (9) à (10), on remplace z , a_n , φ_n , α_n par z^* , a_n^* , φ_n^* , $\alpha_n^* = a_n^*(t) \cos(\omega_n t + \varphi_n^*(t))$. On sait, [2], que $|\alpha_n(t) - \alpha_n^*(t)|$ reste *petit*, $\forall t \geq 0$.

2. Régime synchronisé. — Parmi toutes les solutions de (10), il faut retenir celle qui correspond à l'expérience; c'est-à-dire celle pour laquelle les α_n^* sont périodiques; donc telle que les amplitudes soient constantes $a_n^* = a_{n,0}^*$ et les phases fonctions linéaires du temps :

$$\varphi_n^*(t) = \Delta \omega_n t + \varphi_{n,0}^*.$$

En reportant cette solution dans le système (10), on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= K A_{15}^2 A_{23} \sin h - \frac{A_7}{Q_7}, \\
\Delta\omega_7 &= K\omega_7 \left[\lambda(3 A_7^2 + 4 A_{15}^2 + 4 A_{23}^2) + \frac{A_{23}}{A_7} \cos h \right], \\
0 &= K A_7 A_{15}^2 \sin h - \frac{A_{23}}{Q_{23}}, \\
\Delta\omega_{23} &= K\omega_{23} \left[\lambda(4 A_7^2 + 4 A_{15}^2 + 3 A_{23}^2) + \frac{A_7}{A_{23}} \cos h \right], \\
0 &= 2 K A_7 A_{15} A_{23} \sin h - \frac{A_{15}}{Q_{15}} + \frac{F_{15}}{2 \omega_{15}} \sin v, \\
\Delta\omega_{15} &= K\omega_{15} [(4 A_7^2 + 4 A_{23}^2 + 3 A_{15}^2) + 2 A_7 A_{23} \cos h] + \frac{F_{15}}{2 A_{15}} \cos v,
\end{aligned} \tag{11}$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned}
A_n &= a_{n,0}^* \omega_n^2; \\
K &= \frac{3}{32 c^4}; \\
h &= \delta t + \varphi_7^* + \varphi_{23}^* - 2 \varphi_{15}^*; \\
v &= -\nu t + \varphi_{15}^*;
\end{aligned}$$

— h traduit le désaccord de phase entre les trois oscillateurs virtuels en fonction du désaccord de fréquence δ .

— v est le désaccord de phase entre la fréquence d'excitation et celle de l'oscillateur virtuel vibrant à la fréquence f_{15} .

— λ est le coefficient d'ajustement dont nous avons parlé précédemment. Il traduit l'effet du rayon de courbure de la pastille dans le modèle théorique plan-plan.

Pour que cette solution existe, il faut que h et v soient des constantes, ce qui donne les deux relations :

$$\left. \begin{aligned} \Delta\omega_7 + \Delta\omega_{23} - 2 \Delta\omega_{15} &= -\delta, \\ \Delta\omega_{15} &= \nu. \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

3. Courbe amplitude-fréquence. — Nous avons donc 8 équations ((11) + (12)) à huit inconnues. Par éliminations successives, nous aboutissons à une équation reliant l'amplitude A_{15} à la variable fréquentielle ν (cf. [3]) :

$$H_1 \nu^2 + 2 H_2 \nu + H_3 = 0,$$

$$H_i = H_i(A_{15}^2, \mu, \lambda), \quad \mu = \pm 1$$

(introduit en posant $\cos h = \mu(1 - \sin^2 h)^{1/2}$). On a donc :

$$\nu = -\frac{H_2}{H_1} + \varepsilon \frac{(H_2^2 - H_1 H_3)^{1/2}}{H_1}, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{13}$$

Ainsi, pour une valeur de A_{15} , il y a possibilité de quatre valeurs de ν . Reste à déterminer le coeffi-

Fig. 4. — Courbe de résonance théorique $A_{15}^2 = f(\nu)$.

[Theoretical resonance $A_{15}^2 = f(\nu)$.]

cient λ pour que le modèle rende bien compte de la réalité. Pour cela, nous étudions analytiquement la

courbe *squelette* $\nu = -\frac{H_2}{H_1}$ pour les grandes valeurs de A_{15} . Il s'agit de deux droites (Fig. 4) dont les pentes seront opposées si le coefficient λ est dans une certaine plage de valeurs. Ceci signifie que le modèle n'est bien adapté que pour ces valeurs de λ . Nous pouvons ensuite construire numériquement, à partir de (13), la courbe A_{15}^2 fonction de ν ; puis la courbe :

$$a^2 = a_7^{*2} + a_{15}^{*2} + a_{23}^{*2}, \quad \text{fonction de } \nu.$$

4. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux. — Les courbes des figures 5a et 5b montrent que la courbe $a^2 = a_7^{*2} + a_{15}^{*2} + a_{23}^{*2}$ est très voisine de la courbe $a_7^{*2}(\nu)$ et que l'amplitude du mode 15 est faible devant celle du mode 7. Ce qui est vérifié par l'enregistrement expérimental (cf. Fig. 6) où les topographies faites en divers points de la courbe de résonance montrent une vibration dominante possédant 7 nœuds.

Fig. 5a. — Amplitude totale (a^2) et amplitude du partiel a_{15}^{*2} .
[Total amplitude (a^2) and 15th overtone's amplitude a_{15}^{*2} .]

Fig. 5b. — Amplitude totale (a^2) et amplitude du partiel a_7^{*2} .
[Total amplitude (a^2) and 15th overtone's amplitude a_7^{*2} .]

Fig. 6. — Courbe de résonance mécanique expérimentale avec relevés topographiques.
[Measured mechanical resonance curve with topographs.]

Fig. 7a. — Courbe théorique.
[Theoretical curve.]

Fig. 7b. — Courbe expérimentale.
[Experimental curve.]

Fig. 7. — Evolution de la courbe de résonance en fonction du niveau d'excitation.

[Dependence of the resonance curve with excitation level.]

Cette figure appelle quelques commentaires :

— Dans le sens des fréquences croissantes, nous avons effectué une topographie à 13 800 960 Hz, on y distingue encore la présence de 16 ventres (ou 15 nœuds) mais on s'aperçoit qu'il y a apparition de traits plus lumineux qui annoncent 8 ventres (ou 7 nœuds). La topographie à 13 801 180 Hz a été faite entre les deux résonances et là, le mode 7 est dominant. Puis la topographie à 13 801 400 Hz sur le deuxième pic montre la présence des deux modes superposés.

— Dans le sens des fréquences décroissantes, la topographie à 13 801 375 Hz a été réalisée juste avant le second pic : 16 surintensités qui indiquent la

présence du mode 15 seul. Puis la topographie à 13 800 797 Hz sur le premier pic montre encore la présence dominante du mode 7.

Nous avons aussi étudié l'évolution de la courbe a^2 en fonction du terme d'excitation F_{15} et nous l'avons comparée à la courbe expérimentale (Fig. 7).

Les courbes réelles ont été tracées décalées afin de ne pas surcharger les relevés. Là encore (compte tenu des échelles), nous obtenons une bonne similitude des tracés.

Remarque. — Au cours de nos observations, nous avons noté que ce phénomène était sensible aux

variations de température et que lorsque la température s'élevait, il fallait augmenter le niveau d'excitation de plus en plus pour obtenir cette résonance non linéaire. Ceci est dû au fait que les fréquences propres du quartz sont modifiées par les écarts de température, mais pas toutes dans les mêmes proportions, ce qui entraîne alors une modification du désaccord de fréquence δ et lorsque ce désaccord croît, le phénomène disparaît.

5. Conclusion. — Ainsi, ce phénomène apparemment nouveau de couplage de trois fréquences propres a-t-il pu être complètement interprété. De tels couplages pourront se produire chaque fois que dans le spectre d'un résonateur de haute qualité, une combinaison à coefficients entiers de trois (ou plusieurs) fréquences est voisine de zéro. Ceci ouvre des possibilités pour la division non fractionnaire des fréquences.

Bibliographie

- [1] GAGNEPAIN, J. J., « Mécanismes non linéaires dans les résonateurs à quartz ». Thèse d'Etat, Faculté des Sciences, Besançon, 1972.
 - [2] BALBI, J. H., « Méthode de la moyenne généralisée ». Thèse d'Etat n° 118, Université de Besançon, 1977.
 - [3] DULMET, M., « Quelques phénomènes linéaires et non linéaires dans les résonateurs à quartz ». Thèse Docteur-Ingénieur, Université de Besançon, 1980.
 - [4] THIRARD, A., « Etudes topographiques des vibrations de cisaillement d'épaisseur de résonateurs à quartz ». Thèse Docteur-Ingénieur. Université de Besançon, 1980.
-