Classification

Physics Abstracts

41.10D — 41.80 — 07.80

Expressions diverses du potentiel électrostatique et de ses dérivées pour des systèmes à symétrie de révolution composés de cylindres de même rayon et à charge d'espace nulle

C. Berger

Laboratoire de Physique Industrielle, I.N.S.A. de Lyon
69621 Villeurbanne, Cedex, France

M. Lambinet

I.N.S.A. de Lyon, 69621 Villeurbanne, Cedex, France

et M. Baril

Département de Physique et C.R.A.M., Université Laval, Québec, P. Qué, G1K 7P4, Canada

(Reçu le 26 avril 1979, révisé le 13 septembre 1979, accepté le 10 octobre 1979)

Résumé. — Le but de l'étude est l'obtention pour le potentiel et ses dérivées d'expressions aussi simples que possible mettant en évidence l'influence relative des divers paramètres géométriques et électriques qui décrivent le système.

Une démarche mathématique à partir de la théorie des fonctions de Green pour le cylindre de longueur infinie conduit à des formulations comportant encore des termes où apparaissent des fonctions de Green.

L'utilisation de l'approximation mathématique de la fonction de Green par une fonction d'un cosinus hyperbolique permet d'arriver ensuite à des expressions très facilement calculables.

Abstract. — The objective of the study is to obtain the simplest forms for the expression of the potential showing the influence of the various geometric and electric parameters which describe the system.

A mathematical treatment using Green function theory for infinite length cylinder result in type of formula including term showing Green function.

Mathematical approximation of Green function by hyperbolic cosine allow the transformation of the preceding functions in easily calculable expression.

1. Introduction. — De multiples travaux se rapportent aux systèmes composés de plusieurs cylindres de même axe de révolution et de même rayon. Ces optiques ont intrinsèquement leur importance ; mais par ailleurs on peut aussi ramener l'étude d'un système de révolution quelconque à celle d'un cylindre indéfini [1, 2].

En dehors des articles de fond [3, 4] auxquels nous nous référons par la suite dans le texte, ainsi que ceux de Grivet [5] et Verster [6], on rappelle ici les grandes lignes de quelques publications parmi les plus récentes en ce domaine.

Natali, Di Chiu et Kuyatt [7, 8, 9] décrivent le calcul du potentiel par la méthode des réseaux et celui des trajectoires, puis ils déterminent les propriétés optiques et les coefficients d'aberration d'une lentille bicylindrique.

A la même période, Read, Adams et Soto-Montiel [10, 11, 12, 13] publient de multiples données sur les lentilles composées de deux et trois cylindres, le champ est calculé par sommation numérique des contributions de petits cylindres.

Plus récemment Gallaï et Szilágyi [14] s'intéressent à la distribution de potentiel dans un système présentant des propriétés de périodicité. La mesure du potentiel en un nombre K de points entre les cylindres permet d'approcher le potentiel aux limites dans l'intervalle interélectrode par une fonction d'ordre $2K - 1$. Le potentiel est alors obtenu en un point quelconque par une sommation faisant intervenir les fonctions de Bessel.

Enfin tout dernièrement Bonjour [15, 16] donne les caractéristiques optiques et les coefficients d'aberration pour des lentilles à deux ou trois cylindres en

déterminant le champ à partir d'une méthode décrite par Bertram [17] utilisant l'expression de l'énergie potentielle avec une approximation du troisième ordre pour le potentiel aux limites.

En dehors de la méthode des réseaux dont on ne peut attendre qu'une précision limitée, toutes les méthodes proposées font appel à des sommations plus ou moins complexes. Ces modes de calcul nécessitent donc tous des temps de calcul assez longs. De plus il est impossible de déduire de ces formules la contribution individuelle exacte de chaque paramètre géométrique ou électrique. Toute entreprise d'amélioration de la qualité optique de ces systèmes s'avère donc une tâche difficilement réalisable en utilisant de tels processus.

Le but que nous nous sommes fixé ici est double. Il est de trouver des expressions analytiques plus simples pour le potentiel et de mettre en évidence l'influence de chacun des paramètres géométriques et électriques.

1. Analyse du problème. — 1.1 DESCRIPTION DES SYSTÈMES ÉTUDIÉS. — Les systèmes étudiés ici doivent avoir les deux caractéristiques suivantes :

- ne pas présenter de charges d'espace,
- être équivalents à un cylindre de révolution de longueur infinie avec répartition de révolution du potentiel connue en tout point.

Deux catégories de systèmes répondent à cette description.

Le premier type de systèmes est constitué d'un ensemble de cylindres de même axe et de même rayon, ceux des extrémités ayant des longueurs suffisamment grandes pour être supposés infinis. Un exemple en est donné à la figure 1.

Fig. 1. — Transformation d'un système de longueur infinie en un système de longueur finie.

[Transformation of an infinite length system into a finite length system.]

Dans les calculs, si cela est nécessaire, ces systèmes peuvent être considérés comme ayant des longueurs plus réduites en supprimant les portions situées au-delà de la distance maximale d'influence, évaluée à cinq fois le rayon du cylindre.

Le deuxième type de systèmes répondant à cette étude est représenté par la figure 2a. Il s'agit d'un ensemble de cylindres fermés par deux diaphragmes dont les plans sont supposés équipotentiels dans leur totalité.

Un décalage $-V_c$ du potentiel des électrodes crée en tout point le même décalage des potentiels mais les valeurs des dérivées sont inchangées. On peut donc étudier le système représenté sur la figure 2b.

Il peut être remplacé par le système équivalent de la figure 2c, compte tenu de l'antisymétrie par rapport au plan (P_1) .

Fig. 2. — Transformations successives du système représenté en (a) en vue d'une simplification de son étude.

[Successive transformation of the system shown in (a) to simplify its study.]

En supposant la distance $(P_1) - (P_2)$ supérieure à la distance maximale d'influence, il est possible de remplacer le système par celui de la figure 2d.

Un nouveau décalage des potentiels conduit au système de la figure 2e, équivalent pour la portion comprise entre (P_1) et (P_2) au système de la figure 2f.

Quelle que soit la distance $(P_1) - (P_2)$ moyennant un certain nombre de décalages de potentiel et de transformations dues à l'antisymétrie, un système de ce deuxième type peut toujours être ramené à un cylindre de longueur infinie avec une distribution de révolution des potentiels.

1.2 DÉCOMPOSITION EN SYSTÈMES ÉLÉMENTAIRES. — L'étude à réaliser est donc celle d'un cylindre de révolution de longueur infinie dont on connaît la réparti-

Fig. 3. — Exemple de répartition de potentiel le long d'un cylindre de révolution de longueur infinie.

[Example of potential distribution along a circular cylinder of infinite length.]

Fig. 4. — Système formé d'un cylindre indéfini.

[System made of a cylinder of infinite length.]

tion du potentiel. La figure 3 en présente un exemple particulier.

Du point de vue électrique ce système est équivalent à la superposition d'un certain nombre de cylindres de longueur infinie, de rayon identique à celui du système, chaque cylindre représentant la contribution d'une électrode ou d'un espacement.

Par exemple, le potentiel du cylindre associé à l'électrode AB est nul partout sauf sur l'emplacement AB où sa valeur est V_1 potentiel de l'électrode. Le potentiel du cylindre associé à l'espacement BC est nul partout sauf sur l'emplacement BC où il varie linéairement de V_1 à V_2 .

Pour l'évaluation de sa contribution, ce dernier type de cylindre est considéré comme la superposition de deux cylindres de longueur infinie où le potentiel est nul partout sauf entre B et C. Pour l'un, le potentiel entre B et C est constant et vaut $\frac{V_1 + V_2}{2}$, pour l'autre il varie linéairement de $-\frac{V_2 - V_1}{2}$ à $+\frac{V_2 - V_1}{2}$.

En conclusion l'étude des systèmes peut, compte tenu de l'emploi du théorème de superposition, être ramenée à celle des deux systèmes élémentaires décrits avec précision dans le paragraphe 1.3.2.

1.3 PRINCIPE DE CALCUL DU POTENTIEL ET DE SES DÉRIVÉES. — 1.3.1 *Fonction de Green pour un cylindre indéfini.* — Dans le cas d'un cylindre indéfini (Fig. 4) le potentiel en un point $M(z)$ de l'axe, s'exprime en fonction du potentiel des différents points $P(\zeta)$ de la surface du cylindre :

$$V(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\zeta) G(\zeta, z) d\zeta$$

$G(\zeta, z)$ étant la fonction de Green du cylindre indéfini pour le couple de points (P, M), soit :

$$G(\zeta, z) = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{J_1(m_i a)} \exp[-m_i |\zeta - z|] \right\}$$

où :

a est le rayon du cylindre,

m_i est racine de l'équation $J_0(m_i a) = 0$, J_0 étant la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0,

J_1 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1.

Lorsque $|\zeta - z|$ est petit, la convergence est très lente ; il est alors préférable d'utiliser l'expression suivante :

$$G(\zeta, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{I_0(ka)} \cos[k(\zeta - z)] dk$$

où : I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre 0.

1.3.2 Expressions du potentiel sur l'axe des deux systèmes élémentaires. — D'après le paragraphe 1.2, le problème revient à étudier les deux types suivants de répartition du potentiel sur un cylindre de longueur infinie.

Pour le premier système nommé *ÉLECTRODE* les conditions sur le cylindre sont :

$$V(\zeta) = 1 \quad \text{pour } \zeta \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$$

$$V(\zeta) = 0 \quad \text{pour } \zeta \notin \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right].$$

Le potentiel sur l'axe a a alors pour expression

$$V_e(z, L) = \int_{-L/2}^{+L/2} G(z - \zeta) d\zeta.$$

Pour le deuxième système nommé *INTERVALLE* les conditions sur le cylindre sont :

$$V(\zeta) = \frac{\zeta}{L} \quad \text{pour } \zeta \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$$

$$V(\zeta) = 0 \quad \text{pour } \zeta \notin \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right].$$

Le potentiel sur l'axe a a alors pour expression

$$V_i(z, L) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \zeta G(z - \zeta) d\zeta.$$

Le rayon du cylindre est choisi comme unité de longueur afin de simplifier les calculs.

2. Formulations proposées pour les deux systèmes élémentaires. — On désignera par G_n la dérivée n -ième de G (fonction d'une variable) ; G_0 désignant G

elle-même, la notation sera valable quel que soit n entier naturel.

2.1 CALCUL EXACT DES DÉRIVÉES PAR RAPPORT A z .

— 1^{er} cas : *ÉLECTRODE*.

$$V_e(z, L) = \int_{-L/2}^{+L/2} G(\zeta - z) d\zeta.$$

Le théorème de dérivation sous le signe somme donne

$$\frac{\partial V_e}{\partial z} = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\partial G(\zeta - z)}{\partial z} d\zeta$$

d'où

$$\frac{\partial V_e}{\partial z} = G\left(z + \frac{L}{2}\right) - G\left(z - \frac{L}{2}\right).$$

En dérivant encore $(n - 1)$ fois par rapport à z

$$\boxed{\frac{\partial^n V_e(z, L)}{\partial z^n} = G_{n-1}\left(z + \frac{L}{2}\right) - G_{n-1}\left(z - \frac{L}{2}\right)}.$$

2^e cas : *INTERVALLE*.

$$V_i(z, L) = \int_{-L/2}^{+L/2} \zeta G(\zeta - z) d\zeta.$$

La dérivation par rapport à z sous le signe somme et une intégration par partie conduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial z} = & -\frac{1}{L} [\zeta G(\zeta - z)]_{\zeta=-L/2}^{L/2} \\ & + \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} G(\zeta - z) d\zeta. \end{aligned}$$

La dernière intégrale n'est autre que V_e ; d'où compte tenu de la parité de G

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i(z, L)}{\partial z} = & \\ = & -\frac{1}{2} \left[G\left(z + \frac{L}{2}\right) + G\left(z - \frac{L}{2}\right) \right] + \frac{V_e(z, L)}{L}. \end{aligned}$$

En dérivant $(n - 1)$ fois par rapport à z

$$\boxed{\frac{\partial^n V_i(z, L)}{\partial z^n} = -\frac{1}{2} \left[G_{n-1}\left(z + \frac{L}{2}\right) + G_{n-1}\left(z - \frac{L}{2}\right) \right] + \frac{1}{L} \left[G_{n-2}\left(z + \frac{L}{2}\right) - G_{n-2}\left(z - \frac{L}{2}\right) \right]}.$$

2.2 EXPRESSIONS NE FAISANT PLUS INTERVENIR LES FONCTIONS DE GREEN. — 2.2.1 Approche analytique

de la fonction $G(z)$. — Dans le cas d'un système formé de deux cylindres de très grande longueur, juxtaposés avec un espacement négligeable, comme le montre la figure 5, le potentiel V sur l'axe est bien décrit par

$$V \simeq \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_2 - V_1}{2} \text{th } \omega z_0.$$

V_1 est le potentiel du 1^{er} cylindre (à l'intérieur duquel se meuvent les particules),

V_2 le potentiel du deuxième cylindre ;

z_0 l'abscisse du point de potentiel V , repérée par rapport à la séparation des deux cylindres :

ω une constante.

Fig. 5. — Cylindres juxtaposés avec espacement négligeable.

[Two neighbouring cylinders with negligible spacing in between.]

La dérivée première du potentiel a pour expression :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{V_2 - V_1}{2} \cdot \frac{\omega}{\text{ch}^2 \omega z_0}.$$

L'utilisation des formules exactes du 2.2 pour le calcul de la dérivée première conduit à

$$\frac{\partial V}{\partial z} = (V_2 - V_1) G(z_0).$$

La comparaison des deux expressions de $\partial V/\partial z$ donne

$$G(z) \simeq \frac{1}{2} \frac{\omega}{\text{ch}^2 \omega z}.$$

De cette dernière formule, on en déduit

$$\omega = 2 G(0) = 1,326 \, 19$$

valeur en accord avec celle donnée par Verster [6] soit $\omega = 1,326 \, 23$, légèrement différente de la valeur 1,318 habituellement utilisée.

2.2.2 Utilisation de l'expression de G . — Dans les développements proposés au 2.1, $G(z)$ et ses dérivées peuvent être remplacées par des fonctions plus simples à calculer.

Mais cette expression de G va être particulièrement intéressante dans les formules exactes du 2.1.

1^{er} cas : *ÉLECTRODE*.

La formule

$$\frac{\partial V_e(z, L)}{\partial z} = G\left(z + \frac{L}{2}\right) - G\left(z - \frac{L}{2}\right)$$

devient

$$\frac{\partial V_e(z, L)}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\omega}{\operatorname{ch}^2 \omega \left(z + \frac{L}{2} \right)} - \frac{\omega}{\operatorname{ch}^2 \omega \left(z - \frac{L}{2} \right)} \right]$$

Par intégration, on obtient le potentiel

$$V_e(z, L) \simeq \frac{1}{2} \left[\operatorname{th} \omega \left(z + \frac{L}{2} \right) - \operatorname{th} \omega \left(z - \frac{L}{2} \right) \right] + \text{Cte.}$$

Le potentiel étant nul à l'infini, la constante est nulle.

$$V_e(z, L) \simeq \frac{1}{2} \left[\operatorname{th} \omega \left(z + \frac{L}{2} \right) - \operatorname{th} \omega \left(z - \frac{L}{2} \right) \right]$$

2^e cas : *INTERVALLE*.

On part de :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i(z, L)}{\partial z} &= \\ &= -\frac{1}{2} \left[G \left(z + \frac{L}{2} \right) + G \left(z - \frac{L}{2} \right) \right] + \frac{V_e(z, L)}{L} \end{aligned}$$

et l'on remplace les fonctions par leurs expressions en fonction des lignes hyperboliques

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i(z, L)}{\partial z} &\simeq -\frac{1}{4} \left[\frac{\omega}{\operatorname{ch}^2 \omega \left(z + \frac{L}{2} \right)} + \frac{\omega}{\operatorname{ch}^2 \omega \left(z - \frac{L}{2} \right)} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2L} \left[\operatorname{th} \omega \left(z + \frac{L}{2} \right) - \operatorname{th} \omega \left(z - \frac{L}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

en intégrant par rapport à z , on a

$$\begin{aligned} V_i(z, L) &\simeq -\frac{1}{4} \left[\operatorname{th} \omega \left(z + \frac{L}{2} \right) + \operatorname{th} \omega \left(z - \frac{L}{2} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2L\omega} \ln \frac{\operatorname{ch} \omega \left(z + \frac{L}{2} \right)}{\operatorname{ch} \omega \left(z - \frac{L}{2} \right)} + \text{Cte.} \end{aligned}$$

En écrivant que $V = 0$ pour $z = 0$, on en déduit

$$\begin{aligned} V_i(z, L) &\simeq -\frac{1}{4} \left[\operatorname{th} \omega \left(z + \frac{L}{2} \right) + \operatorname{th} \omega \left(z - \frac{L}{2} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2L\omega} \ln \frac{\operatorname{ch} \omega \left(z + \frac{L}{2} \right)}{\operatorname{ch} \omega \left(z - \frac{L}{2} \right)} \end{aligned}$$

Tableau I. — Comparaison des valeurs de la fonction de Green et de ses dérivées obtenues par la formule normale et par la formule approchée.

[Comparison of the values of Green function and their derivatives obtained by normal and approximative formulas.]

	z	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
F. normale		0,663 095	0,0	- 2,494 77	0,0	40,397 7	0,0
F. approchée (*)	0,00	0,663 096	0,0	- 2,332 49	0,0	32,818 7	0,0
		0,659 175	0,0	- 2,291 35	0,0	31,859 8	0,0
F.N.	0,25	0,591 242	- 0,529 320	- 1,441 62	6,955 54	7,252 72	- 183,700
F.A.		0,595 233	- 0,505 071	- 1,450 94	6,015 54	10,206 06	- 141,620
F.N.	0,50	0,431 853	- 0,678 969	0,138 389	4,606 26	- 18,408 0	- 12,176 1
F.A.		0,439 707	- 0,676 928	0,016 492	4,711 51	- 14,699 6	- 31,726 0
F. normale		0,275 490	- 0,546 577	0,754 188	0,666 116	- 10,792 7	45,998 7
F. approchée (*)	0,75	0,280 761	- 0,565 467	0,720 720	1,075 01	- 11,547 4	36,870 9
		0,281 601	- 0,561 947	0,703 215	1,100 17	- 11,368 3	35,356 1
F.N.	1,00	0,162 742	- 0,358 402	0,690 923	- 0,806 500	- 2,067 15	21,530 4
F.A.		0,163 140	- 0,375 729	0,724 160	- 0,692 324	- 3,158 98	24,704 8
F.N.	1,50	0,051 516	- 0,121 618	0,280 107	- 0,606 743	1,101 75	- 0,776 305
F.A.		0,047 826	- 0,122 191	0,300 059	- 0,673 632	1,178 97	- 0,212 728
F.N.	2,00	0,015 653	- 0,037 497	0,089 369	- 0,210 493	0,481 939	- 1,026 47
F.A.		0,013 047	- 0,034 263	0,089 076	- 0,226 815	0,552 311	- 1,210 07
F.N.	2,50	0,004 714	- 0,011 328	0,027 191	- 0,065 107	0,155 013	- 0,364 198
F.A.		0,003 489	- 0,009 230	0,024 352	- 0,063 908	0,165 904	- 0,421 044
F.N.	3,00	0,001 417	- 0,003 407	0,008 192	- 0,019 668	0,047 231	- 0,113 037
F.A.		0,000 928	- 0,002 460	0,006 515	- 0,017 233	0,045 452	- 0,119 198

(*) Sur les lignes marquées d'un astérisque, la valeur prise pour ω est 1,318 35 ; partout ailleurs les calculs ont été faits avec $\omega = 1,326 19$.

2.2.3 *Limite de validité de ces expressions.* — A. El-Kareh et J. El-Kareh présentent une étude chiffrée des erreurs introduites par le remplacement de

$$\int_0^{\infty} \sin kz \cdot \frac{1}{J_0(ik)} dk \quad \text{par} \quad \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \omega z.$$

L'erreur relative est en général bien inférieure à 1 %, sa valeur maximale est évaluée à 0,85 % pour $z = 1$. On peut donc attendre une précision très acceptable des valeurs du potentiel calculées par les formules approchées proposées.

Par ailleurs, le tableau I permet la comparaison des valeurs de la fonction de Green et de ses dérivées calculées par l'expression normale à celles obtenues par l'expression approchée. De plus pour $z = 0$ et $z = 0,75$ les valeurs approchées ont également été évaluées en prenant $\omega = 1,318\,35$, pour montrer que l'approximation avec $\omega = 1,326\,19$ est en général meilleure.

Pour G et ses trois premières dérivées G_1, G_2, G_3 même si l'erreur relative devient parfois importante, l'erreur vraie reste toujours faible car cela se produit pour des valeurs quasi négligeables des fonctions. Ces conclusions coïncident avec celles des El-Kareh, déduites de la comparaison des deux fonctions citées plus haut.

Au fur et à mesure de la dérivation des fonctions G , l'approximation devient de moins en moins valable,

si bien que pour G_4 et G_5 les formules proposées ne fournissent qu'un ordre de grandeur.

La connaissance des dérivées du potentiel sur l'axe est intéressante pour évaluer les composantes du champ hors de l'axe au moyen de développements limités. Afin de tester ces formules approximatives, nous les avons appliquées à plusieurs systèmes comprenant de multiples électrodes. La comparaison des valeurs approchées aux valeurs rigoureuses montre que l'utilisation de ces formules approchées est tout à fait acceptable pour le calcul des dérivées du potentiel jusqu'à l'ordre 4 y compris. Au-delà de cet ordre, les erreurs par addition deviennent vite trop importantes pour envisager l'emploi de l'approximation.

3. Conclusion. — Le premier type de formules permet le calcul exact des dérivées du potentiel sur l'axe. Après mise en fichier des fonctions de Green, on accède très rapidement à la connaissance du champ en tout point hors de l'axe. Ces formules mettent en évidence l'influence des paramètres géométriques.

Les expressions approchées ne faisant intervenir que des fonctions hyperboliques sont utilisables pour le calcul du potentiel sur l'axe et de ses quatre premières dérivées. Le potentiel et le champ sont donc facilement calculables de cette manière en des points pas trop éloignés de l'axe où les deux premiers termes des développements limités suffisent pour décrire les composantes du champ.

Bibliographie

- [1] BERGER, C., BABOUT, M., *C.R. Hebd. Séan. Acad. Sci. B* **275** (1972) 333.
- [2] BERGER, C., BERNARD, R., *J. Microsc.* **20** (1974) 115-126.
- [3] DURAND, E., *Electrostatique*, tome II et III (Editions Masson et Cie) 1966.
- [4] EL-KAREH, A. B., EL-KAREH, J. C. J., *Electron Beams, Lenses and Optics* **1** (Academic Press, New York) 1970.
- [5] GRIVET, P., *Electron Optics* (Pergamon, Londres) 1965.
- [6] VERSTER, J. L., *Philips Res. Rep.* **18** (1963) 465.
- [7] NATALI, S., DI CHIO, D., KUYATT, C. E., *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **76A** (1972) 27-35.
- [8] NATALI, S., DI CHIO, D., KUYATT, C. E., *Rev. Sci. Instrum.* **43** **1** (1972) 80-83.
- [9] NATALI, S., DI CHIO, D., KUYATT, C. E., *Rev. Sci. Instrum.* **43** **1** (1972) 84-87.
- [10] READ, F. H., ADAMS, A., SOTO-MONTIEL, J. R., *J. Phys. E* **4** (1971) 625-632.
- [11] ADAMS, A., READ, F. H., *J. Phys. E* **5** (1972) 150-155.
- [12] ADAMS, A., READ, F. H., *J. Phys. E* **5** (1972) 156-160.
- [13] READ, F. H. et HARTING, E., *Electrostatic Lenses* (Elsevier, Amsterdam) 1976, 45-63.
- [14] GALLAI, S., SZILÁGYI, M., *Period. Polytech. Electr. Eng.* **21-3** (1977) 243-247.
- [15] BONJOUR, P., *Revue Phys. Appl.* **14** (1979) 533-540.
- [16] BONJOUR, P., *Revue Phys. Appl.* **14** (1979) 715-728.
- [17] BERTRAM, S., *J. Appl. Phys.* **13** (1942) 496-502.
- [18] WANBERG, B., SKÖLLERMO, A., *J. Electron Spectrosc. Relat. Phenom.* **10** (1977) 45.