Classification
Physics Abstracts
02.60 — 02.70 — 03.50

Les équations de Maxwell en électrotechnique et leur résolution numérique par une méthode d'éléments finis

A. Foggia

Laboratoire d'électrotechnique
Ecole Centrale de Lyon, France

et J. C. Sabonnadière

Laboratoire d'électrotechnique
Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique et de Génie Physique de Grenoble, France

(Reçu le 11 mai 1978, révisé le 20 octobre 1978, accepté le 27 octobre 1978)

Résumé. — Dans cet article, les auteurs exposent une méthode de résolution numérique des équations de Maxwell à des dispositifs électrotechniques. La résolution est effectuée en utilisant une méthode d'éléments finis qui tient compte des courants de Foucault dans des matériaux conducteurs et magnétiques.

Abstract. — In this paper, the authors present a numerical method to solve Maxwell's equations in electromechanical devices. The resolution is performed with a finite element method that takes into account eddy currents in conducting and magnetic materials.

1. **Introduction.** — Les équations de Maxwell, qui régissent l'ensemble des phénomènes électromagnétiques, ont toujours fait l'objet de recherches approfondies en vue de leur résolution. Les solutions sont en effet nécessaires pour le calcul et le dimensionnement de dispositifs aussi divers que des antennes ou des machines électriques car de la répartition du champ électromagnétique dans l'espace dépendent les performances de ces dispositifs.

Dans le domaine du calcul des machines électriques, les équations de Maxwell ont été intégrées de manière très simplifiée et bien souvent empirique. Avec l'apparition des ordinateurs et les progrès accomplis en analyse numérique, il était tentant de résoudre numériquement ces équations.

Les premiers essais de résolution numérique des équations de Maxwell en électrotechnique ont été faits par une équipe de chercheurs de l'Université du Colorado [1] qui, à partir d'un schéma aux différences finies, ont calculé la répartition de l'induction magnétique dans les machines électriques. Plus récemment, Silvester à l'Université Mc Gill [2] et Rafinejad à Grenoble [3] ont montré comment adapter aux problèmes elliptiques de l'électrotechnique la méthode des éléments finis utilisée par les mécaniciens [4]. Cette méthode présente, par rapport à la méthode des différences finies, l'avantage de bien s'adapter aux

domaines compliqués des machines électriques ; ce qui se traduit en pratique par un gain appréciable aussi bien en temps de calcul qu'en taille mémoire.

Cette dernière méthode présentait néanmoins l'inconvénient de ne pas tenir compte des courants de Foucault qui cependant jouent un rôle prépondérant dans certaines machines telles que le moteur linéaire et dans les fours à induction. C'est pour pallier cet inconvénient que nous avons développé une méthode de résolution des équations de Maxwell dans un milieu saturé et conducteur [5], [6], [7].

Cette méthode utilise une projection de Ritz-Galerkin associée à un découpage du domaine en éléments finis triangulaires. Les équations aux dérivées partielles se transforment en un système d'équations différentielles dont la résolution, par une méthode implicite, permet de connaître à chaque instant, la répartition de l'induction dans l'espace. Le programme de calcul mis au point permet la résolution de problèmes bidimensionnels plans et tridimensionnels à symétrie de révolution.

Après la présentation de la méthode, nous montrons son application dans deux cas particuliers : un four à induction linéaire pour le réchauffage de produits longs de section rectangulaire et un four à induction pour le réchauffage de produits cylindriques. Ces deux exemples montreront la facilité d'utilisation

de la méthode et son adaptation possible à d'autres équations de type parabolique telles que celles rencontrées dans l'étude de la diffusion.

2. Formulation du problème. — 2.1 EQUATIONS DU POTENTIEL VECTEUR. — Les équations de Maxwell dans leur généralité traduisent les interactions entre les grandeurs magnétiques $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$ et électriques $\mathbf{E}$ et $\mathbf{D}$. En introduisant les caractéristiques σ et μ du milieu, et en appelant $\mathbf{J}$ la densité de courant, ces relations s'écrivent :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (4)$$

Chacune de ces équations traduit les propriétés physiques des grandeurs électromagnétiques. C'est ainsi que (1) caractérise la conservation du flux, (2) le théorème d'Ampère, (3) la loi de Lentz et (4) la loi d'Ohm. Dans ces expressions, on suppose que le courant de conduction est prépondérant vis-à-vis du courant de déplacement, hypothèse largement vérifiée dans le domaine des courants forts.

A ces équations, il convient d'ajouter l'expression de la loi de Lorentz lorsque le repère lié au dispositif étudié se déplace à la vitesse $\mathbf{V}$ par rapport au repère fixe. Le champ électrique $\mathbf{E}'$ vu par le repère mobile est alors relié au champ $\mathbf{E}$ du repère fixe par la relation :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}. \quad (5)$$

Dans un grand nombre de cas pratiques, on est amené à introduire le potentiel vecteur $\mathbf{A}$.

C'est le cas par exemple que l'on rencontre lors de l'étude d'une machine que l'on peut supposer infiniment longue dans une direction. La figure 1 représente un moteur linéaire que l'on a supposé infiniment long suivant la direction Oz perpendiculaire au plan de la figure.

Fig. 1. — Représentation bidimensionnelle d'un moteur linéaire.
[Bidimensional representation of a linear induction motor.]

Le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ est relié à l'induction $\mathbf{B}$ par la relation :

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (6)$$

et satisfait à la condition :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \varphi \quad (7)$$

où φ représente un potentiel scalaire, nul dans un grand nombre de cas. En introduisant $\mathbf{A}$ dans les expressions précédentes, et en tenant compte de

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (8)$$

il vient :

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = \sigma \left(- \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{rot} (\mathbf{V} \wedge \mathbf{A}) \right) + \mathbf{J}_{\text{ex}}, \quad (9)$$

où $\mathbf{J}_{\text{ex}}$ représente la densité de courant imposée par la source.

Dans le cas pratique qui nous concerne où le problème est bidimensionnel, le potentiel vecteur n'a qu'une seule composante dirigée suivant l'axe Oz.

Désignons par A cette composante.

L'équation (9) devient alors une équation aux dérivées partielles de la seule composante $A(x, y, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = - \mathbf{J}_{\text{ex}} + \sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} - \mathbf{V} \frac{\partial A}{\partial x} \right) \quad (10)$$

en supposant $\mathbf{V}$ dirigé suivant l'axe Ox et $\mathbf{J}_{\text{ex}}$ suivant l'axe Oz.

Cette équation, du type parabolique, est non linéaire à cause de la saturation du milieu : la perméabilité μ est fonction de l'induction magnétique. La résolution de cette équation nécessite alors la mise en œuvre d'une méthode numérique appropriée qui tienne compte de la forme relativement compliquée du domaine de résolution.

3. Equation du champ magnétique. — En combinant les équations (1) à (5), et en conservant $\mathbf{H}$ comme inconnue, on obtient :

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{H}) = \sigma \left(- \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{H}) \right). \quad (11)$$

Fig. 2. — Section droite d'une bobine infiniment longue.
[Cross-section of an infinitely long coil.]

Il est un cas d'application qui présente un grand intérêt pratique c'est celui d'une bobine à noyau infiniment longue ; la section du noyau pouvant être quelconque. La figure 2 représente une coupe de la bobine.

La symétrie du dispositif impose alors au champ magnétique de ne posséder qu'une seule composante, celle dirigée suivant l'axe de la bobine. Soit H cette composante.

L'équation (11), appliquée à la fonction scalaire H , s'écrit :

$$\Delta H = \sigma \frac{\partial}{\partial t} (\mu H). \quad (12)$$

De même que précédemment, on obtient une équation parabolique non linéaire.

4. Dispositifs à symétrie de révolution. — Parmi les problèmes que l'on rencontre dans la pratique il en est un qui concerne des dispositifs possédant la symétrie de révolution. C'est par exemple le cas de fours de traitements thermiques de pièces de révolution.

Fig. 3. — Définition des coordonnées semi-polaires.

[Definition of semi polar coordinates.]

Afin de résoudre les équations de Maxwell dans une telle configuration, il convient d'exprimer l'équation du potentiel vecteur en coordonnées polaires. La figure 3 représente la définition des coordonnées polaires du point M ; l'axe Oz étant l'axe de révolution.

Le potentiel vecteur $\mathbf{A}$, qui est défini par les 3 composantes A_r, A, A_z , ne possède plus dans ce cas particulier que la seule composante A qui ne dépend alors que des seules variables géométriques r, z et du temps t .

Le problème, tridimensionnel sur les variables d'espace au départ, se ramène ainsi à un problème plan. L'équation du potentiel vecteur étant :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu \cdot r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right) = -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} + J_{ex}. \quad (13)$$

Le domaine de résolution est défini par l'intersection d'un plan passant par l'axe Oz et par le dispositif lui-même. L'équation (13) suppose qu'il n'y a pas de mouvement.

5. Mise des équations sous forme variationnelle. — Afin de présenter d'une manière uniforme, la méthode de résolution, nous ne considérerons que les équations du potentiel vecteur en géométrie bidimensionnelle et en axisymétrie.

5.1 REPRÉSENTATION BIDIMENSIONNELLE. — L'équation à résoudre est l'équation (14)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J + \sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} - V \frac{\partial A}{\partial x} \right) \quad (14)$$

dans laquelle

$$\mu = f \left(\sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2} \right) \quad (15)$$

et dont le domaine de résolution Ω de frontière Γ est représenté à la figure 4.

Fig. 4. — Domaine de résolution.

[Resolution domain.]

Désignons par $v(x, y)$ une fonction dérivable définie dans Ω et qui s'annule sur Γ . Appelons U l'ensemble des fonctions $v(x, y)$ ainsi définies.

Si $A'(x, y, t)$ représente une approximation de la fonction $A(x, y, t)$, l'équation (14) admet un résidu $R(x, y, t)$ défini par :

$$R(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A'}{\partial y} \right) + J - \sigma \left(\frac{\partial A'}{\partial t} - V \frac{\partial A'}{\partial x} \right). \quad (16)$$

Nous dirons que $A'(x, y, t)$ est solution de l'équation (14) si la valeur pondérée du résidu $R(x, y, t)$ dans tout le domaine est nulle à chaque instant quelle

que soit la fonction de pondération $v(x, y)$ de l'ensemble U défini précédemment.

$$\int_{\Omega} v(x, y) \cdot R(x, y, t) dx dy = 0 \quad (17)$$

$$\forall v(x, y) \in U.$$

Il est donc équivalent de résoudre l'équation (17) que l'équation (14).

5.2 DISCRÉTISATION DU DOMAINE ET CHOIX DES FONCTIONS DE FORME. — Le domaine de résolution est découpé en éléments triangulaires. Soit h l'un de ces éléments tel qu'il est représenté à la figure 5.

Fig. 5. — Représentation d'un élément triangulaire.

[Representation of a triangular element.]

Désignons par $A_h(x, y, t)$ le potentiel vecteur à l'intérieur de cet élément. A_h est à la fois fonction des variables d'espace x, y et du temps t . On peut admettre que A_h est une combinaison linéaire des potentiels vecteurs A_j aux sommets du triangle h et écrire :

$$A_h(x, y, t) = \sum_{j=1}^3 \xi_j(x, y) \cdot A_j(t). \quad (18)$$

On sépare ainsi les variables d'espace, de la variable temps.

En écrivant l'équation à résoudre sous la forme (17), les fonctions $\xi_j(x, y)$ doivent assurer la continuité du potentiel vecteur d'un élément à l'autre. Parmi l'ensemble des fonctions $\xi_j(x, y)$ qui satisfont cette condition [8], il nous a semblé intéressant d'utiliser des fonctions du premier ordre en x et y :

$$\xi_j(x, y) = a_j + b_j x + c_j y. \quad (19)$$

Les fonctions $\xi_j(x, y)$ constituent les coordonnées d'aires du triangle h et sont définies par le système suivant :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Le calcul des coefficients a_j, b_j, c_j est alors immédiat.

L'induction $\mathbf{B}$ dans l'élément h admet comme composante :

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A}{\partial y} = \sum_{j=1}^3 c_j A_j \\ B_y &= -\frac{\partial A}{\partial x} = -\sum_{j=1}^3 b_j A_j. \end{aligned} \quad (21)$$

L'induction B est alors constante dans chaque élément ; il en est de même de la perméabilité μ .

En prenant comme fonctions de pondération, les coordonnées d'aires, l'équation (17) s'écrit au nœud i de l'élément h sous la forme :

$$\frac{1}{\mu} \sum_j \int (b_i b_j + c_i c_j) \cdot dx dy + \sum_j \sigma \frac{dA_j}{dt} \times \int \xi_i \xi_j dx dy = J_{ex} \int \xi_i dx dy. \quad (22)$$

Les intégrales qui apparaissent dans cette expression se calculent toutes analytiquement.

Après avoir écrit l'équation (22) pour tous les nœuds et pour tous les éléments, on obtient un système d'équations différentielles de la forme :

$$M \cdot \frac{dA}{dt} + NA = S \quad (23)$$

qu'il faut intégrer.

Afin d'éviter tout problème de stabilité, nous avons choisi un schéma implicite de résolution qui présente l'avantage d'être inconditionnellement stable [9]. En appelant Δt le pas de temps, nous calculons le potentiel vecteur à l'instant $n+1$ en fonction du potentiel vecteur A^n suivant l'algorithme :

$$A^{n+1} = \left(\frac{M}{\Delta t} + N^{n+1} \right)^{-1} (S + N^{n+1} A^n). \quad (24)$$

5.3 REPRÉSENTATION AXISYMETRIQUE. — La représentation axisymétrique ne présente pas de différence fondamentale avec la représentation bidimensionnelle. Les fonctions de pondérations doivent assurer la continuité du potentiel vecteur d'un élément à l'autre.

Parmi les fonctions possibles, nous avons utilisé des fonctions du premier ordre en r et z définies comme précédemment par :

$$\xi_j(r, z) = a_j + b_j r + c_j z. \quad (25)$$

Le potentiel vecteur à l'intérieur d'un élément triangulaire s'exprime sous la forme :

$$A_h(r, z, t) = \sum_{j=1}^3 \xi_j(r, z) \cdot A_j(t). \quad (26)$$

En utilisant un processus analogue au cas bidimensionnel, on aboutit à un système d'équations différentielles :

$$M \cdot \frac{dA}{dt} + NA = S \quad (27)$$

dont la résolution utilise un schéma implicite.

6. Applications au calcul de fours à induction. —

6.1 FOUR LINÉAIRE. — Le premier exemple d'application de la méthode que nous avons développée concerne l'étude d'un four de réchauffage de produits longs de section rectangulaire. Pour calculer la répartition de l'induction dans l'espace, nous avons supposé que les inducteurs sont infiniment longs. La figure 6 représente le domaine de résolution que nous avons utilisé.

Fig. 6. — Schéma du four linéaire.

[Representation of the linear furnace.]

Dans la configuration représentée à la figure 6, nous avons calculé le potentiel vecteur en chaque point du domaine en supposant la brame au-dessus du point de Curie. La figure 7 montre les lignes d'induction à différents instants. A partir de ce calcul, on peut connaître tous les éléments nécessaires au dimensionnement des inducteurs.

Fig. 7. — Champ magnétique à deux instants différents.

[Magnetic field distribution at two different instants.]

6.2 FOUR CYLINDRIQUE. — La figure 8 représente le schéma de principe d'un four cylindrique. En supposant que le pas de l'hélice de la bobine d'excitation est faible vis-à-vis de la section du noyau, on se trouve dans le cadre des hypothèses des systèmes à symétrie de révolution.

On peut alors appliquer la méthode décrite précédemment.

La figure 9 représente la répartition des lignes d'induction à différents instants.

7. Conclusion. — La résolution des équations de Maxwell en électrotechnique nécessite des méthodes numériques de plus en plus élaborées pour l'obtention des grandeurs électromagnétiques qui régissent le fonctionnement des dispositifs à courants forts.

Fig. 8. — Schéma d'un four cylindrique.

[Representation of a cylindrical furnace.]

Fig. 9. — Champ magnétique à différents instants.

[Magnetic field distribution at different instants.]

La méthode numérique de résolution présentée dans cet article permet d'obtenir ces grandeurs en des temps de calcul raisonnables et avec une précision compatible avec les mesures physiques. Cette méthode, qui est une adaptation de la méthode des éléments finis, permet la prise en compte des courants de Foucault qui se développent dans des milieux conducteurs et magnétiques. Elle constitue de ce fait une amélioration considérable par rapport aux méthodes précédemment développées.

Bien que conçu à l'origine pour la résolution de problèmes électriques, l'algorithme mis au point permet de résoudre d'autres problèmes de type parabolique tels que l'équation de la chaleur, et d'une manière générale les problèmes de diffusion.

Bibliographie

- [1] TRUTT, F. C., ERDELYI, E. A. and JACKSON, R. F., The non-linear potential equation and its numerical solution for highly saturated electrical machines. *IEEE Trans. Aerosp.* **1** (1963) 430-440.
 - [2] SILVESTER, P., CHARI, M. V. K., Finite element solution of saturable magnetic field problems. *IEEE Trans. Power Appar. Syst.* **PAS 89** (1970) 1642-1651.
 - [3] RAFINEJAD, P., Adaptation de la méthode des éléments finis à la modélisation des systèmes électromécaniques de conversion d'énergie. Thèse d'Etat ès-Sciences Physiques, Grenoble (1977).
 - [4] ZIENKIEWICZ, O. C., *The finite element method in engineering science* (McGraw Hill) 1971.
 - [5] FOGGIA, A., SABONNADIÈRE, J. C., SILVESTER, P., Finite element solution of saturated travelling magnetic field problems. *IEEE Trans. Power Appar. Syst.* **PAS 94** (1975) 866-871.
 - [6] FOGGIA, A., Contribution à l'étude de l'induction magnétique dans les convertisseurs électromécaniques linéaires. Thèse d'Etat ès-Sciences Physiques. Lyon (1974).
 - [7] FOGGIA, A., Finite element analysis of a single sided linear induction motor. International Conference on numerical methods in electrical and magnetic field problems. S. Margherita Ligure (Italie) 1976.
 - [8] SILVESTER, P., High order polynomial triangular finite elements for potentiel problems. *Int. J. Eng. Sci.* **7** (1976) 849-861.
 - [9] FORSYTHE and WASOW, Finite difference methods for partial differential equations (John Wiley and Sons).
-