Thermodiffusion et convection dans une cellule verticale

F. Akoum, C. Klapisz

► To cite this version:

F. Akoum, C. Klapisz. Thermodiffusion et convection dans une cellule verticale. *Revue de Physique Appliquée*, 1977, 12 (9), pp.1263-1271. 10.1051/rphysap:019770012090126300 . jpa-00244309

HAL Id: jpa-00244309

<https://hal.science/jpa-00244309>

Submitted on 1 Jan 1977

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification
Physics Abstracts
66.60

THERMODIFFUSION ET CONVECTION DANS UNE CELLULE VERTICALE

F. AKOUM et C. KLAPISZ

Laboratoire de Thermodynamique des Milieux Ioniques et Biologiques (*)
Tour 33-43 - E2, Université Paris VII, 2 place Jussieu, 75221 Paris Cedex 05, France

(Reçu le 13 décembre 1976, révisé le 23 mai 1977, accepté le 2 juin 1977)

Résumé. — On étudie l'effet de thermogravitation dans une colonne verticale rectangulaire de faible épaisseur par la méthode aux différences finies. Dans un modèle à deux dimensions et à l'état stationnaire on tient compte des effets de bord et on obtient le profil des vitesses et les variations de concentration en tout point de la colonne pour différents écarts de température et différentes valeurs du coefficient Soret positif.

Abstract. — We study the thermogravitational effect in a vertical rectangular cavity with the finite difference method. In a two-dimensional model and in the steady state we take into account the closed end of the cavity. The flow distribution and the concentration profiles are obtained for different temperature gradients and different values of the positive Soret coefficient.

1. Introduction. — Les colonnes de thermogravitation, introduites par Clusius et Dickel [1], sont utilisées pour séparer les constituants des mélanges gazeux ou liquides. Dans une telle cellule, dont la hauteur est très grande par rapport à l'épaisseur, les parois verticales sont maintenues à des températures différentes. Le gradient de température dans le liquide crée un gradient de densité qui provoque un mouvement de convection naturelle ascendant sur la paroi chaude de la cellule, descendant sur l'autre paroi. A l'état stationnaire dans le cas d'un mélange liquide binaire dont le coefficient Soret est positif la concentration en soluté est plus élevée dans le bas de la cellule que dans le haut.

La première théorie phénoménologique de la thermogravitation développée pour les mélanges gazeux par Furry, Jones et Onsager [2] a été étendue aux liquides en particulier par de Groot [3] puis par Tyrrell [4], qui discutent en détail une solution analytique des équations de la thermogravitation pour différents types de cellules. Ces auteurs considèrent un gradient horizontal constant de température et une vitesse de convection strictement verticale. Debye et Bueche [5] ont également étudié une solution analytique pour des solutions de polymères avec un modèle très simplifié.

Horne et Bearman [6, 7, 8] ont proposé pour l'état stationnaire une solution analytique des équations de la thermogravitation dans une colonne à géométrie cylindrique munie de réservoirs à ses extrémités ; en tenant compte des dépendances des propriétés thermodynamiques du fluide avec la température et la composition, ils ont clairement posé le problème des approximations nécessaires pour obtenir une théorie

satisfaisante de la thermogravitation. Les travaux de Korchinsky et Emery [9], corroborés par les résultats expérimentaux de Turner, Butler et Story [10] sur des mélanges de tétrachlorure de carbone et de cyclohexane, ont montré que *l'effet oublié* (dépendance de la densité du fluide avec la concentration) n'avait pas d'influence sur l'état stationnaire. Horne et Bearman [11] ont dû revoir leur première théorie qui surestimait la contribution de *l'effet oublié* et ils notent alors qu'une des sources d'erreur possible pourrait être la présence des réservoirs pour lesquels il n'y a pas de théorie satisfaisante. Beyerlein et Bearman [12] ont proposé d'éliminer, du moins formellement, les effets des réservoirs en extrapolant les valeurs calculées du coefficient de diffusion thermique pour une différence de température nulle.

Les travaux théoriques et expérimentaux plus récents portent soit sur la stabilité du mouvement convectif, par exemple Nicolaev et Tubin [13], soit sur les modifications à apporter aux colonnes pour améliorer l'effet de séparation : introduction d'un garnissage [14], de spirales [15], mise en rotation du cylindre intérieur [16]. Ils ne tiennent pas compte des effets de bords qui existent dans les colonnes fermées aux deux bouts, l'hypothèse simplificatrice des colonnes infinies étant très généralement utilisée. D'autre part de nombreux travaux ont été effectués sur la convection naturelle de liquides purs enfermés dans les cellules verticales [17].

Nous proposons ici une solution numérique pour les équations à l'état stationnaire d'un mélange liquide eau-chlorure de sodium, contenu dans une colonne de thermogravitation sans réservoir en introduisant des conditions aux limites pour des parois rigides et

(*) Equipe de Recherche Associée au C. N. R. S. ERA n° 370.

imperméables et en tenant compte de l'influence des effets des bords inférieur et supérieur de la colonne.

Des colonnes de thermogravitation ont déjà été utilisées [7] et [12], pour déterminer des coefficients Soret. La méthode de mesure qui consiste à prélever du liquide dans les réservoirs situés aux extrémités de la colonne, est, du point de vue expérimental, délicate à mettre en œuvre ; de plus les résultats obtenus posent le problème de leur interprétation théorique. Dans le cas présent, en isolant un volume de quelques cm^3 de liquide dans les parties haute et basse de la cellule, comme l'ont fait M. Weill, B. Dulieu et l'un d'entre nous (C. K.) [19] puis en mesurant par conductimétrie la différence de concentration moyenne, on peut en déduire la valeur du coefficient Soret : il faut pour cela comparer la différence mesurée à celle qui est obtenue théoriquement en fonction du coefficient Soret.

2. Formulation du problème. — Une solution binaire incompressible et diluée est placée dans une colonne rectangulaire fermée aux deux extrémités. Les parois verticales sont aux températures T_1 et T_2 ($T_1 < T_2$). Les parois horizontales sont isolantes et l'épaisseur de la colonne est faible par rapport à sa hauteur ($a \ll h$).

Nous nous plaçons ici dans le cas d'un modèle à deux dimensions (Fig. 1) en supposant que la vitesse du fluide n'a que deux composantes : l'une V_x suivant l'axe horizontal ox , l'autre V_z sur l'axe vertical oz . Nous étudions l'état stationnaire du système pour lequel les grandeurs telles que la température, la masse volumique, les vitesses sont indépendantes du temps ; de plus les coefficients phénoménologiques du fluide sont supposés constants.

Les composantes J_x et J_z du flux de matière du soluté s'écrivent

$$J_x = -\rho D \frac{\partial N}{\partial x} - \rho N D' \frac{\partial T}{\partial x} + \rho V_x N \quad (1)$$

$$J_z = -\rho D \frac{\partial N}{\partial z} - \rho N D' \frac{\partial T}{\partial z} + \rho V_z N \quad (2)$$

et l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

ρ est la masse volumique du fluide, N le titre massique du soluté à la température T . D et D' sont respectivement les coefficients de diffusion isotherme et de thermodiffusion. Rappelons qu'à l'état stationnaire, dans une cellule de thermodiffusion dont les parois horizontales, de dimensions grandes par rapport à l'épaisseur, sont maintenues à des températures différentes, la concentration en soluté est plus grande près de la paroi froide quand le coefficient Soret, D'/D , est positif. La valeur de ce coefficient s'obtient en écrivant qu'à l'état stationnaire le flux de matière J_z de l'équation (2) est nul en l'absence de convection ($V_z = 0$) et en utilisant les valeurs des gradients de température et de concentration obtenues expérimentalement.

FIG. 1. — Lignes de courant dans la cellule en coordonnées réduites.

[Streamlines in the cell in non-dimensional coordinates.]

En appliquant l'approximation de Boussinesq aux équations de Navier-Stokes, on obtient

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right\} \quad (4)$$

$$V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right\} - \frac{\rho}{\rho_0} g \quad (5)$$

ρ_0 est la masse volumique du fluide à la température de référence T_0 , p la pression au sein du fluide, ν sa viscosité cinématique et g l'accélération de la pesanteur ; l'équation de la chaleur se met sous la forme

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\} + \frac{\nu}{2 C_p} \left\{ \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right\}^2 \quad (6)$$

χ est la diffusivité thermique du fluide et C_p la chaleur spécifique à pression constante. Le deuxième terme du membre de droite de l'équation (6) représente l'énergie dissipée sous forme de chaleur par suite de frottements internes liés à la viscosité du fluide.

Il faut également écrire l'équation d'état du fluide

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0) + \gamma(N - N_0)] \quad (7)$$

où α est le coefficient d'expansion thermique et γ le coefficient de dilatation

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{N_0} > 0, \quad \gamma = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial N} \right)_{T_0} > 0$$

et le titre massique moyen N_0

$$\frac{1}{ah} \int \int N \, dx \, dz = N_0. \quad (8)$$

Ce système d'équations, à l'état stationnaire, peut se présenter d'une manière plus simple : en éliminant la pression, compte tenu de l'incompressibilité du fluide, on introduit la fonction courant ψ telle que

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad V_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9)$$

la vorticité $\varphi = \Delta \psi$ et les grandeurs sans dimensions

$$x^* = \frac{x}{a}, \quad z^* = \frac{z}{a} \quad (0 < x^* < 1, 0 < z^* < K) \quad (10)$$

$$V_x^* = \frac{a}{\nu} V_x, \quad V_z^* = \frac{a}{\nu} V_z, \quad T^* = \frac{1}{\delta T} (T - T_1), \quad N^* = \frac{N}{N_0}$$

où δT est la différence de température imposée à la colonne de thermogravitation ($\delta T = T_2 - T_1$).

En omettant les étoiles pour alléger l'écriture, il vient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \Delta \varphi - G \frac{\partial T}{\partial x} + R \frac{\partial N}{\partial x} \quad (11)$$

$$P \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} = \Delta T + C \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\}^2 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Delta N + \sigma N \Delta T + (\sigma - \alpha \delta T) \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right\} + \\ + S_c \alpha \delta T N \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} \right\} + \gamma \left\{ \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ - N \sigma \alpha \delta T \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right\} - S_c \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial z} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\int \int N \, dx \, dz = K \quad (14)$$

G , R , P et S_c sont respectivement les nombres de Grashof, Rayleigh de thermodiffusion, Prandtl et Schmidt ; σ est ici le produit par δT du coefficient Soret du mélange. Le coefficient K est le facteur de forme de la colonne de thermogravitation

$$G = \frac{g \alpha a^3 \delta T}{\nu^2}; \quad R = \frac{g \gamma a^3 N_0}{\nu^2};$$

$$P = \frac{\nu}{\chi}; \quad S_c = \frac{\nu}{D}; \quad \sigma = \frac{D'}{D} \delta T; \quad K = \frac{h}{a};$$

C est une constante telle que

$$C = \frac{\nu^3}{2 C_p a^2 \chi \delta T}.$$

L'équation (13) a été écrite en ne négligeant que les termes en γN devant l'unité, tenant compte du fait que γ est de l'ordre de 10^{-2} et N petit devant 1, tout en conservant les autres termes où apparaît γ .

Au système (11)-(14), il faut associer les conditions aux limites pour des surfaces rigides et imperméables : les composantes de la vitesse sont nulles aux bords et il est commode d'imposer à ψ une valeur nulle aux bords ; les températures des parois latérales sont imposées ; les composantes verticales des flux de chaleur et de matière sont nulles aux parois horizontales ; la composante horizontale du flux de matière est nulle aux parois verticales. Le tableau I résume ces conditions.

TABLEAU I

Conditions aux limites

[Boundary conditions]

$x = 0 \text{ et } 1$	$z = 0 \text{ et } K$
$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$	$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$
$\varphi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$	$\varphi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$
$T(0) = 0$	$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$
$T(1) = 1$	
$\sigma N \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial N}{\partial z} = 0$

3. **Résolution numérique.** — La méthode des différences finies a été utilisée pour trouver une solution du système (11)-(14) compte tenu des conditions aux limites sur ψ , φ , T et N . Les longueurs a et h sont divisées en $N_x - 1$ et $N_z - 1$ segments égaux. Les intervalles sont $DX = 1/(N_x - 1)$ et $DZ = K/(N_z - 1)$. En utilisant les indices i et j ($1 \leq i \leq N_x$ et $1 \leq j \leq N_z$) le système (11)-(13) s'écrit

$$\begin{aligned} & \frac{(\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1})}{2 DX} \frac{(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})}{2 DZ} - \frac{(\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j})}{2 DZ} \times \\ & \times \frac{(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})}{2 DX} - \frac{(\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j})}{DX^2} \\ & - \frac{(\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1})}{DX^2} + G \frac{(T_{i,j+1} - T_{i,j-1})}{2 DX} - R \frac{(N_{i,j+1} - N_{i,j-1})}{2 DX} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{DX^2} + \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{DZ^2} + \\ & + C \left\{ \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{DZ^2} - \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{DX^2} \right\}^2 \\ & \times P \left\{ \frac{(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})}{2 DZ} \frac{(T_{i,j+1} - T_{i,j-1})}{2 DX} - \frac{(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})}{2 DX} \frac{(T_{i+1,j} - T_{i-1,j})}{2 DZ} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \sigma N_{i,j} \left\{ \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{DX^2} + \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{DZ^2} \right\} + \\ & + \frac{N_{i,j+1} - 2N_{i,j} + N_{i,j-1}}{DX^2} + \frac{N_{i+1,j} - 2N_{i,j} + N_{i-1,j}}{DZ^2} \\ & + S_c \alpha \delta T N_{i,j} \left\{ \frac{(T_{i,j+1} - T_{i,j-1})}{2 DX} \frac{(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})}{2 DZ} - \frac{(T_{i+1,j} - T_{i-1,j})}{2 DZ} \right. \\ & \times \frac{(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})}{2 DX} \left. \right\} - S_c \left\{ \frac{(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})}{2 DZ} \frac{(N_{i,j+1} - N_{i,j-1})}{2 DX} \right. \\ & - \frac{(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})}{2 DX} \frac{(N_{i+1,j} - N_{i-1,j})}{2 DZ} \left. \right\} - (\alpha \delta T - \sigma) \left\{ \frac{(N_{i,j+1} - N_{i,j-1})}{2 DX} \right. \\ & \times \frac{(T_{i,j+1} - T_{i,j-1})}{2 DX} + \frac{(N_{i+1,j} - N_{i-1,j})}{2 DZ} \frac{(T_{i+1,j} - T_{i-1,j})}{2 DZ} \left. \right\} \\ & + \gamma \left\{ \frac{(N_{i,j+1} - N_{i,j-1})^2}{4 DX^2} + \frac{(N_{i+1,j} - N_{i-1,j})^2}{4 DZ^2} \right\} - \alpha \sigma \delta T N_{i,j} \\ & \times \left\{ \frac{(T_{i,j+1} - T_{i,j-1})^2}{4 DX^2} + \frac{(T_{i+1,j} - T_{i-1,j})^2}{4 DZ^2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

et la relation entre ψ et φ :

$$\varphi_{i,j} = \frac{(\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1})}{DX^2} + \frac{(\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j})}{DZ^2}. \quad (18)$$

D'autre part, le tableau II résume, en notation discrète les conditions aux limites.

TABLEAU II

Conditions aux limites en notation discrète

[Boundary conditions in the finite difference formulation]

$j = 1 \text{ et } N_x$	$i = 1 \text{ et } N_z$
$\varphi_{i,1} = \frac{2\psi_{i,2}}{DX^2}$	$\varphi_{1,j} = \frac{2\psi_{2,i}}{DZ^2}$
$\varphi_{i,N_x} = \frac{2\psi_{i,N_x-1}}{DX^2}$	$\varphi_{N_z,j} = \frac{2\psi_{N_z-1,i}}{DZ^2}$
$T_{i,1} = 0$	$T_{1,j} = \frac{4}{3}T_{2,j} - \frac{1}{3}T_{3,j}$
$T_{i,N_x} = 1$	$T_{N_z,j} = \frac{4}{3}T_{N_z-1,j} - \frac{1}{3}T_{N_z-2,j}$
$N_{i,1} - N_{i,2} = \sigma N_{i,1}(T_{i,2} - T_{i,1})$	$N_{1,j} = \frac{4}{3}N_{2,j} - \frac{1}{3}N_{3,j}$
$N_{i,N_x} - N_{i,N_x-1} = \sigma N_{i,N_x}(T_{i,N_x-1} - T_{i,N_x})$	$N_{N_z,j} = \frac{4}{3}N_{N_z-1,j} - \frac{1}{3}N_{N_z-2,j}$

A titre d'exemple, montrons comment on a obtenu la relation entre $T_{1,j}$, $T_{2,j}$, $T_{3,j}$ dans le tableau on a exprimé l'annulation du flux de chaleur sur la paroi inférieure $z = 0$ ($i = 1$) soit

$$\left\{ \frac{\partial T}{\partial z} \right\}_{1,j} = 0 \simeq \left\{ \frac{\partial T}{\partial z} \right\}_{2,j} - \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\}_{2,j} DZ \quad (19)$$

$$\frac{T_{3,j} - T_{1,j}}{2 DZ} - \frac{T_{1,j} - 2 T_{2,j} + T_{3,j}}{DZ^2} DZ = 0. \quad (20)$$

Il reste alors

$$T_{1,j} = \frac{4}{3} T_{2,j} - \frac{1}{3} T_{3,j}. \quad (21)$$

L'intégration du système aux différences finies, compte tenu des conditions aux limites, a été effectuée en prenant $N_x = 33$ et $N_z = 65$, par itérations successives. Dans le cas où les valeurs de ψ , φ , T et N calculées à la n -ième itération conduisent à une instabilité, nous avons utilisé une procédure de sous-relaxation [18] qui consiste à pondérer les valeurs calculées par des coefficients compris entre 0 et 1. Nous avons utilisé comme fonction test le nombre de Nusselt qui permet de comparer la transmission de la chaleur en présence de convection à celle qui a lieu en absence de convec-

tion. La valeur moyenne du nombre de Nusselt calculée sur une surface à x constant doit être indépendant de x . C'est le critère que nous avons retenu pour arrêter nos calculs.

5. Résultats. — Les calculs ont été effectués sur l'ordinateur CDC 6600 de l'IN2P3 ; le temps moyen nécessaire pour une itération est de l'ordre de une seconde. Le nombre d'itérations, y compris la procédure de sous-relaxation est de l'ordre de 200 à 500, variable suivant le choix plus ou moins heureux des valeurs de départ. On a choisi une solution à 0,1 mole/litre de chlorure de sodium dans l'eau pour laquelle le coefficient Soret est positif, et une cellule de

1 mm d'épaisseur et de 40 cm de hauteur. Dans ce cas les valeurs numériques utilisées sont :

$$\begin{aligned} P &= 7 \quad \alpha = 2,5 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ \gamma &= 18,2 \times 10^{-3} \text{ l/mole} \quad g = 981 \text{ cm/s}^2 \\ \chi &= 14,5 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s} \quad \nu = 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s} \\ D &= 1,4 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s} \quad D'/D = 2,3 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}. \end{aligned}$$

A l'aide de ces valeurs on obtient

le nombre de Grashof $G = 2,5 \delta T$ et

le Rayleigh thermodiffusion $R = 39$.

Pour les nombres de Rayleigh utilisés ici, $Ra = GP$, qui sont inférieurs ou égaux à 175, il n'y a qu'une seule cellule de convection : la figure 1 représente quelques lignes de courant, $\varphi = \text{constante}$, pour $\delta T = 10^\circ\text{C}$.

Nous n'avons pas tracé le réseau d'isothermes qui ne sont pas affectées par la convection et restent des plans ; c'est dire que le terme correctif de l'équation (6) qui représente l'énergie dissipée par frottements internes ne modifie pas de façon sensible le profil de température dans la colonne. Par contre, et c'est la raison pour laquelle nous avons conservé ce terme dans les calculs, une variation même très petite du gradient horizontal de température peut modifier le profil des vitesses, ce qui est le cas quand les deux derniers termes de l'équation (11) sont du même ordre de grandeur.

La figure 2 représente le profil de la composante verticale de la vitesse à différentes hauteurs : à mi-hauteur

FIG. 2. — Composantes V_z de la vitesse à différentes hauteurs.
[Vertical velocity distribution at different heights.]

la courbe obtenue pour $V_z(x)$ est conforme à celle qui est obtenue analytiquement par de Groot (3) ; par contre, quand on se rapproche des extrémités haut et bas de la cellule sur lesquelles les vitesses doivent s'annuler, l'amplitude de $V_z(x)$ devient fonction de z et les valeurs de x pour lesquelles V_z est maximum

sont déplacées vers les parois de la colonne. Pour apprécier sur quelle distance les effets des bouts de la colonne sont sensibles, nous avons tracé (Fig. 3) en fonction de z la valeur absolue du maximum de V_z : celle-ci passe de zéro, condition aux limites imposée,

FIG. 3. — Amplitude maximum de V_z .
[Maximum amplitude of V_z .]

à sa valeur maximum sur une distance de 2,5 cm pour la colonne étudiée ici, et ceci indépendamment de la différence de température appliquée aux parois. Cette distance de 2,5 cm est aussi celle sur laquelle la composante horizontale de la vitesse, dont l'amplitude maximum est environ cent fois plus petite que celle de V_z , est divisée par mille.

Les effets des extrémités sont aussi repérables sur la distribution du titre massique N : les figures 4a, b et c montrent d'une part que les courbes $N(x)$ n'ont pas la même allure aux deux extrémités de la colonne, d'autre part que le gradient horizontal $\partial N/\partial x$ dépend de x et de l'altitude z . La dépendance de $\partial N/\partial x$ avec x peut être attribuée au fait que le gradient horizontal de température n'est pas strictement constant. En particulier sur les parois verticales, l'annulation de la composante horizontale du flux de matière implique que le gradient horizontal du titre massique est proportionnel au gradient de température. Quant à la dépendance en z , elle est due au fait que la vitesse verticale est elle-même dépendante de z . Nous remarquons de plus, que les profils sont différents suivant l'écart de température appliqué aux parois de la colonne. Le procédé de calcul utilisé ici ne permet pas de donner de lois générales de variation de $\partial N/\partial x$ avec z et de $N(x, z)$ avec δT mais, à l'inverse, les solutions analytiques ne tiennent pas

FIG. 4 a, b, c. — Titre massique à différentes hauteurs pour $\Delta T = 5, 8, 10^\circ\text{C}$.
 [Concentration at different heights for $\Delta T = 5, 8, 10^\circ\text{C}$.]

compte de la dissymétrie rencontrée ici entre le haut et le bas de la cellule qui apparaît aussi dans le tracé de $N(x = \frac{1}{2}, z)$ pour différents δT (Fig. 5).

FIG. 5. — Titre massique pour différents écarts de température.

[Concentration for several temperature differences.]

La figure 6 montre que le rapport

$$N(x = \frac{1}{2}, z = 0)/N(x = \frac{1}{2}, z = K)$$

varie exponentiellement avec δT alors qu'à l'état stationnaire de non-équilibre Debye et Bueche [5] montrent que le rapport des concentrations en haut et en bas de la colonne est indépendant du gradient

FIG. 6. — Rapport des titres massiques en haut et en bas de la cellule pour $x = \frac{1}{2}$ en fonction des écarts de température

$(D'/D = 2,3 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})$.

[Concentration ratio at the top and the bottom of the cell for $x = \frac{1}{2}$ as a function of temperature differences

$(D'/D = 2.3 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})$.]

de température imposé. Cette divergence nous semble provenir du fait que notre calcul nous permet de tenir compte explicitement des conditions aux limites en haut et en bas de la cellule alors que Debye et Bueche négligent la variation de la vitesse de convection avec l'altitude.

Nous avons, par ailleurs, utilisé notre programme numérique pour obtenir à δT constant, la variation du rapport des titres massiques en bas et en haut de la colonne, en fonction du coefficient Soret : la figure 7

FIG. 7. — Rapport des titres massiques en haut et en bas de la cellule pour $x = \frac{1}{2}$ en fonction du coefficient Soret.

[Concentration ratio at the top and at the bottom of the cell for $x = \frac{1}{2}$ as a function of the Soret coefficient.]

montre que cette variation est linéaire pour $\delta T = 5^\circ\text{C}$ alors qu'elle ne l'est plus quand l'écart de température augmente. Ces courbes obtenues en introduisant des valeurs arbitraires du coefficient Soret, dans l'équation (17) peuvent être utilisées comme courbes d'étalonnage pour déduire la valeur du coefficient Soret quand on connaît en particulier par des mesures expérimentales la valeur du rapport des titres massiques en haut et en bas de la colonne.

5. Conclusion. — La méthode aux différences finies a été utilisée pour connaître à l'état stationnaire les profils des vitesses, température et titre massique dans une cellule de thermogravitation fermée à ses deux extrémités, sans réservoir. Du point de vue théorique, ce calcul permet de ne pas utiliser d'hypothèses simplificatrices telles que celle d'une colonne infinie ou d'une vitesse de convection verticale ne dépendant que de x ;

les conditions aux limites en haut et en bas sont précisées et on évite ainsi les difficultés rencontrées du fait de la présence des réservoirs. Les effets des bouts de la colonne se manifestent par une dissymétrie entre le haut et le bas des distributions de titre massique $N(x, z)$ obtenues pour différentes valeurs du gradient de température imposé.

Par ailleurs, il paraît commode d'utiliser une cellule de thermogravitation pour mesurer le coefficient Soret puisque la différence de concentration entre le bas et le haut de la cellule est de 50 % environ, pour $\delta T = 10^\circ\text{C}$, alors que dans les appareils de thermodiffusion classiques elle est de 1 %. Un appareil dans lequel on sépare le liquide en deux parties à l'aide d'une lame horizontale [19] est à l'étude. Le calcul présenté ici permet alors d'avoir une courbe d'étalonnage de la différence de concentration moyenne en fonction du coefficient Soret.

Bibliographie

- [1] CLUSIUS, K. et DICKEL, G., *Naturwiss.* **26** (1938) 546.
- [2] FURRY, W. H., CLARCK JONES, R. et ONSAGER, L., *Phys. Rev.* **55** (1939) 1083.
- [3] de GROOT, S. R., *L'effet Soret* (North Holland, Amsterdam), 1945.
- [4] TYRRELL, H. J. V., *Diffusion and Heat Flow in Liquids* (Butterworths, Londres), 1961.
- [5] DEBYE, P. et BUECHE, A. M., *High Polymer Physics* (Robinson, Brooklin), 1948 p. 497.
- [6] HORNE, F. H. et BEARMAN, R. J., *J. Chem. Phys.* **37** (1962) 2842.
- [7] HORNE, F. H. and BEARMAN, R. J., *J. Chem. Phys.* **37** (1962) 2857.
- [8] HORNE, F. H. and BEARMAN, R. J., *J. Chem. Phys.* **46** (1967) 4128.
- [9] KORCHINSKY, W. J., and EMERY, A. H., *A. I. Ch. E. J.* **13** (1967) 224.
- [10] TURNER, J. C. R., BUTLER, B. D., and STORY, M. J., *Trans Faraday Soc.* **63** (1967) 1906.
- [11] HORNE, F. H. and BEARMAN, R. J., *J. Chem. Phys.* **49** (1968) 2457.
- [12] BEYERLEIN and BEARMAN, *J. Chem. Phys.* **49** (1968) 5023.
- [13] NIKOLAEV, B. I. et TUBIN, A. A., *P. M. M.* **35** (1971) 248.
- [14] SANCHEZ, V., Thèse, Toulouse (1975).
- [15] YEH, H. M. et WARD, H. C., *Chem. Eng. Sci.* **26** (1971) 937.
- [16] YEH, H. M. et CHENG, S. M., *Chem. Eng. Sci.* **28** (1973) 1803.
- [17] OSTRACH, S., *Advance in Heat Transfer* (Acad. Press) 1972, vol. 8.
- [18] VARGA, R. S., *Matrix Iterative Analysis* (Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey), 1962.
- [19] WEILL, M. E., DULIEU, B., KLAPISZ, C., *J. Chim. Phys.* **4** (1976).