L'utilisation du concept de “ viriel ” pour comparer les systèmes isolés accumulant de l'énergie

C. Rioux

► To cite this version:

C. Rioux. L'utilisation du concept de “ viriel ” pour comparer les systèmes isolés accumulant de l'énergie. *Revue de Physique Appliquée*, 1976, 11 (5), pp.617-628. 10.1051/rphysap:01976001105061700 . jpa-00244097

HAL Id: jpa-00244097

<https://hal.science/jpa-00244097>

Submitted on 1 Jan 1976

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification
Physics Abstracts
 1.340

L'UTILISATION DU CONCEPT DE « VIRIEL » POUR COMPARER LES SYSTÈMES ISOLÉS ACCUMULANT DE L'ÉNERGIE

C. RIOUX

Laboratoire de Physique des plasmas, groupe électrotechnique et fusion contrôlée
 Université de Paris XI, 91405 Orsay, France

(Reçu le 5 janvier 1976, accepté le 14 avril 1976)

Résumé. — L'article effectue la comparaison générale des méthodes de stockage d'énergie à base de fluides comprimés, de masses en mouvement et de champs électromagnétiques. Il montre que l'emploi du concept de viriel permet de lier simplement dans tous les cas les énergies stockées à la masse des matériaux mécaniques qui supportent les efforts engendrés.

L'étude montre que les stockages mettant en jeu des gaz comprimés, des volants en rotation et des champs magnétiques sont parmi les plus intéressants. L'énergie accumulée est directement proportionnelle à la masse des matériaux mécaniques utilisés, les coefficients de proportionnalité étant voisins pour les meilleurs procédés. On montre aussi que la notion de viriel peut être étendue avec intérêt aux régimes impulsionnels.

Abstract. — In this article very different methods of energy storage are compared by the use of the viriel concept. It is shown that regardless of the storage mechanism used, for example, magnetic, kinetic or fluid compression, the energy stored can always be related to the mass of the mechanical support needed to retain the structure.

Compressed gases, magnetic coils and rotating fly wheels are shown to have the greatest possibilities as energy storage systems. The total energy that can be stored is directly proportional to the mass of mechanical structure and for the most efficient of the storage mechanisms the proportionality constants have very similar values.

The viriel concept used can also be extended to cover the realm of impulsional energy storage.

1. Introduction. — La notion de *Viriel de Clausius* est un concept ancien bien connu en théorie cinétique des gaz [1]. Son équation aux dimensions étant celle d'une énergie, il possède des connexions étroites avec cette dernière. A l'égal des concepts *énergie cinétique* et *quantité de mouvement*, il permet de dégager un certain nombre de propriétés mécaniques globales simples des systèmes physiques.

Bien que peu usité en mécanique générale, le *viriel* paraît indispensable pour obtenir des vues globales claires sur tous les systèmes destinés à accumuler de l'énergie, car il permet de relier de manière simple cette dernière aux efforts appliqués sur les structures. Aussi, le but du présent article est d'employer la notion de viriel pour étudier les propriétés générales de nombreux procédés de stockage d'énergie.

A cet effet, on rappellera tout d'abord la définition du viriel et ses propriétés fondamentales. On étudiera ensuite le viriel associé aux systèmes de forces créées par divers ensembles physiques : gaz comprimé dans une enceinte, masse matérielle isolée en mouvement, champ électromagnétique, matériaux soumis à des contraintes mécaniques. Enfin, on comparera les résultats

obtenus pour montrer que l'énergie accumulée par un des systèmes physiques ci-dessus ne dépend pratiquement pas de sa nature, mais seulement des propriétés mécaniques de l'enceinte matérielle supportant les efforts.

2. Définition et propriétés fondamentales. — Soit un système de forces F_i appliquées à un ensemble de points définis par leur position spatiale r^i . On appelle *viriel* du système de forces l'expression :

$$W = \sum_i F_i \cdot r^i. \quad (1)$$

A partir de (1), il est aisé de vérifier les propriétés ci-dessous :

— Si $\sum_i F_i = 0$, W ne dépend pas de l'origine des mesures (voir Fig. 1).

— Le viriel est une grandeur additive : le viriel de la somme de deux systèmes de forces est égal à la somme de leurs viriels respectifs.

— D'après la propriété ci-dessus, on ne change pas le viriel d'un système de forces en lui ajoutant deux

FIG. 1. — Systèmes de forces isolé, plan et équilibre, à viriel non nul

$$(\mathcal{W} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}^i).$$

forces égales et opposées appliquées au même point. Ou plus généralement encore, on ne change pas le viriel d'un système de forces en lui ajoutant un deuxième système à viriel nul.

3. Fluide enfermé dans un récipient. — Pour appliquer à un cas concret simple l'expression (1), nous allons maintenant considérer un système statique à forces réparties où

$$\int d\mathbf{F} = 0,$$

constitué par un gaz parfait homogène et au repos enfermé dans un récipient. Ce dernier engendre sur les parois une pression p , laquelle produit un viriel

$$\mathcal{W}_G = \int_{S(V)} d\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = \int_{S(V)} p d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r} = 3 pV \quad (2)$$

[$S(V)$ est la surface frontière du volume V du récipient, orientée de l'intérieur vers l'extérieur.]

Or, la pression est liée à la densité d'énergie w_G par la relation bien connue :

$$p = (\gamma - 1) w_G \quad (3)$$

(γ : coefficient polytropique).

Si $W_G = w_G V$ est l'énergie totale du gaz, on a :

$$\mathcal{W}_G = 3(\gamma - 1) W_G \quad (4)$$

(4) est une relation linéaire simple entre le viriel et l'énergie. Pour éviter l'éclatement du récipient, ce dernier devra avoir une structure mécanique suffisamment résistante. Supposons à cet effet que le récipient soit sphérique, d'épaisseur e fine par rapport à son rayon moyen r (voir Fig. 2). Si n_R est la contrainte mécanique de traction supposée homogène engendrée dans l'épaisseur, on a :

$$n_R = \frac{1}{2} \frac{r}{e} \cdot p. \quad (5)$$

FIG. 2. — Stockage d'un fluide dans une sphère (n_R contrainte de traction dans l'enceinte sur la surface S_R).

En appelant V_R le volume de la paroi, on tire des relations précédentes :

$$n_R V_R = \frac{1}{2} \mathcal{W}_G = \frac{3}{2} (\gamma - 1) W_G \leq R_E V_R \quad (6)$$

(où R_E est la limite élastique du matériau).

L'exemple que nous venons de considérer montre qu'il existe un rapport simple entre l'énergie stockable dans le gaz et le volume de matériau employé, dont la qualité est exprimée par la limite élastique R_E . Des relations analogues seront obtenues plus loin pour le stockage d'autres formes d'énergie (par exemple magnétique ou électrostatique). Pour préciser cette question nous allons maintenant effectuer quelques études générales sur la dynamique d'un point en mouvement varié et sur les champs de force.

4. Point matériel en mouvement varié. — Considérons un point matériel de masse m , dont la position $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, variable dans le temps, est repérée par rapport à un référentiel R_0 fixe, d'origine O . Soit

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t)$$

la vitesse de ce point. A chaque instant de son mouvement varié, ce point exerce sur l'extérieur une force

$$\mathbf{F} = - m \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (7)$$

Cette force engendre un viriel

$$\mathcal{W}_c = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = - m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{r}. \quad (8)$$

Remarquons que ce viriel, qui ne correspond pas à une résultante nulle, dépend de l'observateur. Pour définir à nouveau une grandeur scalaire indépendante du référentiel, nous allons remplacer la somme spatiale nulle des forces introduites précédemment (par exemple avec le gaz parfait stocké dans son enceinte) par une sommation temporelle. Pour cela, nous introduirons la quantité :

$$A = A(t) = \int_0^t \mathcal{W}_c dt. \quad (9)$$

Par intégration par partie, nous pouvons écrire :

$$A = \int_0^T -m \frac{dv}{dt} \cdot r dt = - |mv \cdot r|_0^T + \int_0^T mv^2 dt \quad (10)$$

A s'exprime alors en fonction des seules variables r et v . Supposons maintenant que l'on désire *stocker* l'énergie de ce point matériel. Cela veut dire qu'à tout instant, on est capable de récupérer son énergie cinétique, c'est-à-dire qu'il existe un référentiel R_0 pour lequel v et r sont toujours bornés, même pour $t \rightarrow \infty$.

Dans ces conditions, le premier terme du deuxième membre de (10) reste borné pour $t \rightarrow \infty$. Au contraire, le deuxième membre croît indéfiniment ; il est proportionnel au temps et à l'énergie cinétique moyenne du point m selon l'expression :

$$\overline{w}_c = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T w_c dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{T} = 2 \overline{W}_c. \quad (11)$$

Rapportons maintenant A à un autre référentiel R'_0 non accéléré, où le point m est défini par :

$$r' = r + r_R + v_R t \quad (r_R \text{ et } v_R \text{ constants}).$$

Alors,

$$\frac{A'}{m} = \frac{A}{m} - v_R[r(T) - r(0)] - r_R[v(T) - v(0)] + v_R \cdot v(T) \cdot T. \quad (12)$$

— Si $v_R = 0$, R'_0 est fixe par rapport à R_0 . On obtient :

$$\frac{A'}{m} = \frac{A}{m} - r_R[v(T) - v(0)]. \quad (13)$$

Le 2^e terme du 2^e membre de (13) reste borné pour $T \rightarrow \infty$. Par suite, $\overline{w}'_c = \overline{w}_c$.

— Si $v_R \neq 0$, le 4^e terme du 2^e membre de (12) croît indéfiniment. Alors :

$$\overline{w}'_c = \overline{w}_c + v_R \cdot v(T).$$

Au cours du temps, $v(T)$ change fréquemment de signe ; il en résulte pour $\overline{w}'_c$ une valeur oscillante dont l'amplitude croît avec v_R . Toute notion de viriel moyen disparaît alors, ce qui est normal puisque l'énergie n'est pas confinée par rapport à R'_0 .

Par suite, nous voyons que lorsque l'énergie est confinée par rapport à un référentiel donné et dans ce cas seulement, le viriel moyen est bien défini ; pour une particule, il vaut deux fois l'énergie cinétique. Comme le viriel est une grandeur additive, (11) sera également valable pour toute assemblée de particules confinées ensemble.

A titre d'exemple, un gaz monoatomique dans une enceinte peut être considéré comme une telle assemblée, qui est confinée dans le volume du récipient à l'aide des forces qu'elle subit lors du choc sur les parois. Si le système est au repos, les efforts sur les parois et l'énergie cinétique stockée sont constants. D'autre part, les

efforts sur les particules supposées ponctuelles engendrent un viriel négligeable (sauf si les particules ont des dimensions non négligeables, d'où l'emploi habituel du viriel). Alors, la relation (11) est applicable à chaque instant ; elle détermine la pression moyenne du gaz sur la paroi sans effectuer d'hypothèses sur les lois du rebondissement des molécules. On obtient directement $p = \frac{2}{3} w_G$.

5. Stockage d'énergie dans le cas d'une particule relativiste. — Si nous étendons les expressions (8) et (11) au cas des vitesses voisines de la lumière (c), il faut remplacer m par son expression relativiste.

On a alors

$$\overline{w}_c = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Cette expression est très différente de l'énergie cinétique, qui vaut

$$W_c = \varepsilon - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right].$$

Pour comparer ces expressions, formons le rapport $\overline{w}_c/W_c$. On obtient :

$$\frac{\overline{w}_c}{W_c} = \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (14)$$

Il est tout à fait remarquable que $\overline{w}_c/W_c$ soit fonction de v^2/c^2 . La courbe de la figure 3 représente ce rapport. Pour $v/c \ll 1$ (particules classiques), $\overline{w}_c/W_c \rightarrow 2$. Au contraire si $v/c \rightarrow 1$, $\overline{w}_c/W_c \rightarrow 1$. D'où un résultat important : le stockage d'énergie est plus efficace avec des particules rapides qu'avec des particules lentes. D'autre part, tout champ de force réductible à un schéma particulaire simple donne toujours un viriel positif, c'est-à-dire que s'il est isolé, il a tendance

FIG. 3. — Variations du viriel d'une particule stockée en fonction de sa vitesse moyenne.

d'après (10) à occuper un volume toujours croissant. Un cas particulier où les particules ont une vitesse égale à c est représenté par les photons. Il faut donc s'attendre à obtenir pour un champ électromagnétique la relation $\mathcal{W}_{EM} = W_{EM}$. Nous allons maintenant examiner cette question.

6. Stockage d'énergie électromagnétique. — Usuellement, ce type d'énergie se présente sous trois formes : électrostatique, magnétique, électromagnétique proprement dite. Ici, le récipient est constitué par les diélectriques et conducteurs, lesquels supportent les efforts dus à l'énergie stockée. Les deux premières formes pouvant être étudiées dans le cadre des équations des états quasi stationnaires, la somme des efforts appliqués à chaque instant par le champ est nulle ; le viriel est lié directement à l'énergie à chaque instant. Au contraire, pour les ondes électromagnétiques, les problèmes seront du même genre que pour un point matériel isolé : seul pourra être défini un viriel lié à un référentiel et à l'énergie moyenne.

Considérons tout d'abord les cas les plus simples : les champs électrostatique et magnétique dans le vide. Les efforts mécaniques engendrés par ces champs sont bien définis à l'aide du tenseur des contraintes de Maxwell [2, 3]. A tout élément de surface orientée ds , on associe une force df , qui peut s'exprimer vectoriellement pour les deux champs par les formes :

$$dF_E = \epsilon_0 \left[\frac{E^2}{2} ds - (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) \mathbf{E} \right] \quad (15)$$

$$dF_H = \mu_0 \left[\frac{H^2}{2} ds - (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}) \mathbf{H} \right]. \quad (16)$$

Ces efforts engendrent sur les conducteurs et diélectriques un certain viriel. Pour l'évaluer, nous allons utiliser l'identité vectorielle :

$$\begin{aligned} \int_{s(V)} \frac{\alpha^2}{2} (d\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\alpha} \cdot d\mathbf{s}) (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}) &\equiv \\ &\equiv \int_V \left[\frac{1}{2} \alpha^2 - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \text{div } \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} \wedge \text{rot } \boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{r} \right] dV \end{aligned} \quad (17)$$

(où $s(V)$ est la surface frontière fermée du volume V).

Dans le cas d'un champ électrostatique engendré par une densité de charge σ , on a dans le vide :

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

En identifiant $\boldsymbol{\alpha}$ et $\mathbf{E}$ dans (17), on tire :

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{s(V)} \epsilon_0 \left[\frac{E^2}{2} ds - (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) \mathbf{E} \right] \cdot \mathbf{r}}_{\text{viriel des efforts sur la surface frontière } s(V)} &\equiv \underbrace{\int_V \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV}_{\text{énergie dans le volume } V} - \\ &- \underbrace{\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} \sigma dV}_{\text{viriel des efforts de volume appliqués aux charges situées dans } V} \end{aligned} \quad (18)$$

Lorsqu'un système de charges électriques est isolé, on peut choisir pour $s(V)$ une surface tendant vers l'infini. La décroissance d'un champ électrostatique à l'infini étant au moins aussi rapide que $1/r^2$, le premier membre de l'équation (18) tend vers zéro. Alors, (18) peut s'écrire :

$$\int_{V_\infty} \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV = \int_{V_\infty} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} dV \quad (19)$$

(19) montre que pour un système isolé, le viriel des efforts appliqués par le champ aux matériaux est égal à l'énergie du champ.

Pour un champ magnétique engendré par la densité de courant $\mathbf{j}$, on a par ailleurs en l'absence de matériaux électriques :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad \text{et} \quad \text{div } \mathbf{H} = 0.$$

En identifiant $\boldsymbol{\alpha}$ et $\mathbf{H}$, on obtient une expression très voisine de (18) :

$$\begin{aligned} \int_{s(V)} \mu_0 \left[\frac{H^2}{2} ds - (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}) \mathbf{H} \right] \cdot \mathbf{r} &\equiv \int_V \mu_0 \frac{H^2}{2} dV - \\ &- \int_V (\mathbf{j} \wedge \mu_0 \mathbf{H}) \cdot \mathbf{r} dV. \end{aligned} \quad (20)$$

Pour un système isolé :

$$\int_{V_\infty} \frac{\mu_0}{2} H^2 dV = \int_{V_\infty} (\mu_0 \mathbf{j} \wedge \mathbf{H}) \cdot \mathbf{r} dV. \quad (21)$$

Les propriétés du champ magnétique sont semblables à celles du champ électrostatique.

Lorsque les phénomènes sont assez rapides pour donner lieu à l'existence d'ondes électromagnétiques, il y a apparition de phénomènes d'inertie. Pour les déterminer, on peut utiliser la nouvelle identité :

$$\begin{aligned} \int_{s(V)} \frac{\alpha^2}{2} ds - (\boldsymbol{\alpha} \cdot d\mathbf{s}) \boldsymbol{\alpha} &\equiv \\ &\equiv \int_V [\boldsymbol{\alpha} \wedge \text{rot } \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} \text{ div } \boldsymbol{\alpha}] dV. \end{aligned} \quad (22)$$

En remplaçant successivement $\boldsymbol{\alpha}$ par $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ et en additionnant, on peut écrire dans le vide :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} &+ \epsilon_0 \left[\frac{E^2}{2} ds - (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) \mathbf{E} \right] \\ &+ \mu_0 \left[\frac{H^2}{2} ds - (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}) \mathbf{H} \right] \end{aligned} \right\} &\equiv \\ &\equiv \int_V \left\{ \begin{aligned} &\mu_0 \mathbf{H} \wedge \text{rot } \mathbf{H} \\ &+ \epsilon_0 [\mathbf{E} \wedge \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{E}] \end{aligned} \right\} dV. \end{aligned} \quad (23)$$

Si le système est rayonnant, le 1^{er} membre est non nul en général même lorsque $s(V)$ croît indéfiniment. Au contraire, si le système ne rayonne pas, le

1^{er} membre est nul. D'après les équations de Maxwell, on a alors :

$$\underbrace{\int_{V_\infty} (\mu_0 \mathbf{j} \wedge \mathbf{H} + \sigma \mathbf{E}) dV}_{\text{force totale appliquée aux diélectriques et conducteurs}} + \underbrace{\int_{V_\infty} \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) dV}_{\text{termes d'inertie du champ électromagnétique}} = 0. \quad (24)$$

On voit sur (24) que même si le système ne rayonne pas, la somme des forces appliquées à chaque instant aux matériaux a une résultante non nulle ; le viriel instantané n'est plus indépendant du référentiel. On retrouve des propriétés semblables à celles d'un ensemble de particules isolées, ce qui nous incite à définir un viriel moyen en intégrant les efforts sur des surfaces tridimensionnelles de l'espace-temps.

Notons cependant que les efforts définis en (15) et (16) n'étant pas des invariants relativistes, on est amené à les remplacer par des impulsions-énergie. Dans ces conditions, appelons (dS, dV) l'ensemble des 4 composantes d'un élément de surface tridimensionnel ⁽¹⁾, l'impulsion énergie $(d\mathbf{P}, d\mathcal{E})$ appliquée à chaque instant par le champ électromagnétique vaut, toujours d'après le tenseur des contraintes de Maxwell écrit en langage vectoriel :

$$\left\{ \begin{aligned} d\mathbf{P} &= \mu_0 \left[\frac{H^2}{2} dS - (\mathbf{H} dS) \mathbf{H} \right] + \\ &+ \varepsilon_0 \left[\frac{E^2}{2} dS - (\mathbf{E} dS) \mathbf{E} \right] + \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} dV \end{aligned} \right. \quad (25)$$

$$d\mathcal{E} = \left(\mu_0 \frac{H^2}{2} + \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} \right) dV + (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) \cdot dS. \quad (26)$$

(1) En coordonnées cartésiennes $(dS, dV) = (dy dz dt, dx dz dt, dx dy dt, dx dy dz)$.

Lorsque $dS = 0$, l'élément de surface se réduit à $(0, dV)$; dV représente l'élément de volume usuel, orienté dans le temps. Alors,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dV} = + \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \quad (27)$$

et

$$\frac{d\mathcal{E}}{dV} = \frac{1}{2} (\mu_0 H^2 + \varepsilon_0 E^2) \quad (28)$$

(avec $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$).

Le terme $d\mathbf{P}/dV$ représente l'impulsion d'un élément de volume de champ, dont on retrouve la dérivée temporelle dans (24). Lorsque $dV = 0$, l'élément de surface $(dS, 0)$ est orienté dans l'espace. Il peut être considéré comme le produit de l'élément de surface usuel à deux dimensions ds par l'élément de temps dt : $dS = ds \cdot dt$. Dans ce dernier cas, (25) s'écrit encore :

$$\left\{ \begin{aligned} d\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \mu_0 \left[\frac{H^2}{2} ds - (\mathbf{H} \cdot ds) \mathbf{H} \right] + \\ &+ \varepsilon_0 \left[\frac{E^2}{2} ds - (\mathbf{E} \cdot ds) \mathbf{E} \right] \end{aligned} \right. \quad (29)$$

$$d\mathcal{F} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) \cdot ds \quad (30)$$

($d\mathcal{F} = d\mathcal{E}/dt$ est la puissance électrique au travers de la surface ds).

A partir des relations (25) et (26), dont la signification physique usuelle est représentée en (27), (28), (29), (30), on peut établir pour le champ électromagnétique une expression semblable à (9). Pour cela, de manière analogue aux relations (18) et (20), on va sommer le viriel de l'impulsion-énergie sur la surface frontière limite $S(\mathcal{V})$ à 3 dimensions d'un volume $\mathcal{V}$ à quatre dimensions de l'espace-temps. A cet effet, on peut utiliser l'identité :

$$\begin{aligned} \iiint_{S(\mathcal{V})} \left[\mu_0 \left[\frac{H^2}{2} dS - (\mathbf{H} dS) \mathbf{H} \right] + \varepsilon_0 \left[\frac{E^2}{2} dS - (\mathbf{E} dS) \mathbf{E} \right] + \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} dV \right] \cdot \mathbf{r} &= \\ &\equiv \iiint_{\mathcal{V}} \left\{ [\mu_0 (\mathbf{H} \wedge \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{ div } \mathbf{H}) + \varepsilon_0 (\mathbf{E} \wedge \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{E})] \cdot \mathbf{r} \right\} d\mathcal{V} \\ &\quad + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2. \end{aligned} \quad (31)$$

On peut expliciter (31) en utilisant les équations de Maxwell et en prenant pour volume $\mathcal{V}$ la forme *cylindrique* de la figure 4, laquelle représente les trajectoires spatio-temporelles des points d'une enceinte fixe. (31) devient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{s(V)} \left\{ \mu_0 \left[\frac{H^2}{2} ds - (\mathbf{H} ds) \mathbf{H} \right] + \varepsilon_0 \left[\frac{E^2}{2} ds - (\mathbf{E} ds) \mathbf{E} \right] \right\} \cdot \mathbf{r} dt + \left| \int_V \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) \cdot \mathbf{r} dV \right|_0^T &= \\ = - \int_0^T \int_V [\mu_0 \mathbf{j} \wedge \mathbf{H} + \sigma \mathbf{E}] \cdot \mathbf{r} dV dt + \int_0^T \int_V \frac{1}{2} (\mu_0 H^2 + \varepsilon_0 E^2) dV dt. \end{aligned} \quad (32)$$

Si nous prenons une surface $s(V)$ tendant vers l'infini et si le système ne rayonne pas, le 1^{er} terme du 1^{er} membre de (32) est nul. D'autre part, le 1^{er} terme du 2^e membre représente l'intégrale dans le temps du viriel des efforts. Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\int_0^T \left[\int_{V_\infty} (\mu_0 \mathbf{j} \wedge \mathbf{H} + \sigma \mathbf{E}) \mathbf{r} dV \right] dt = - \left| \int_{V_\infty} \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) \mathbf{r} dV \right|_0^T + \int_0^T \left[\int_{V_\infty} \frac{1}{2} (\mu_0 H^2 + \varepsilon_0 E^2) dV \right] dt. \quad (33)$$

L'expression (33) est à comparer avec l'expression (10) transposée à une assemblée de particules, qui serait :

$$\int_0^T \left[\sum_i - m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \mathbf{r} \right] dt = - \left| \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_i \right|_0^T + \int_0^T \sum_i m_i v_i^2 dt. \quad (10')$$

La grande similitude des expressions (33) et (10') apparaît immédiatement par simple comparaison. Toujours dans le cas d'un système non rayonnant, le 1^{er} terme du 2^e membre de (33) reste borné lorsque $T \rightarrow \infty$. Dans ces conditions, on obtient :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{V_\infty} (\mu_0 \mathbf{j} \wedge \mathbf{H} + \sigma \mathbf{E}) \mathbf{r} dV dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{V_\infty} \frac{1}{2} (\mu_0 H^2 + \varepsilon_0 E^2) dV dt. \quad (34)$$

FIG. 4. — Trajectoires spatiotemporelles des points matériels d'une surface $s(V)$ fixe.

si $\overline{\mathcal{W}_{EM}}$ et $\overline{W_{EM}}$ sont respectivement le viriel moyen des efforts et l'énergie électromagnétique moyenne, on a :

$$\overline{\mathcal{W}_{EM}} = \overline{W_{EM}}. \quad (35)$$

A partir de (35), on peut immédiatement déduire la pression de radiation d'un gaz homogène de photons sans effectuer aucune hypothèse sur la loi de réflexion : on obtient $p = \frac{1}{3} \overline{w_{EM}}$ (où $\overline{w_{EM}}$ est la densité locale d'énergie des radiations).

6. Viriel d'un fluide en mouvement. — Pour déterminer les éléments du viriel d'un champ électromagnétique quelconque, nous avons effectué un traitement relativiste dans un espace à 4 dimensions. Afin d'homogénéiser l'étude, nous pouvons procéder de même pour la mécanique des fluides, en nous bornant cependant à un fluide non visqueux et sans conductivité thermique (grands volumes).

A cet effet, considérons un fluide, caractérisé en chaque point de l'espace par :

— un quadrivecteur vitesse d'univers

$$\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

— une densité de masse locale $\overline{\omega}$,
— une pression locale $p = p(\overline{\omega}, T)$.

Avec ces notations, les équations relativistes de la mécanique des fluides, induites directement des équations de la dynamique et de continuité, s'écrivent :

$$\overline{\omega} \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = - \nabla p - \frac{dp}{dt} \cdot \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \mathbf{f} \quad (36)$$

$$\text{div} \frac{\overline{\omega} \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\omega}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0 \quad (37)$$

$$p = p(\overline{\omega}, T)$$

où :

$$\left| \frac{d}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \right|$$

$\mathbf{f}$: densité locale des forces appliquées par le fluide à l'extérieur.

A partir de ces expressions et en procédant de manière analogue à celle que nous avons utilisée pour le champ électromagnétique, nous pouvons lier le viriel moyen à la pression et aux mouvements du fluide.

Le calcul étant assez long à exposer, nous nous bornerons à donner le résultat. On obtient :

$$\overline{\mathcal{W}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_V \left[\left(\overline{\omega} + \frac{p}{c^2} \right) \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + 3p \right] dV dt. \quad (39)$$

Pour $p \ll \bar{\omega} c^2$ (cas usuel), on a :

$$\bar{\mathcal{W}} \neq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_V \left[\frac{\bar{\omega} v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + 3p \right] dV dt. \quad (40)$$

En posant

$$p_c = \frac{1}{3} \frac{\bar{\omega} v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

pression cinétique, on voit que :

$$\bar{\mathcal{W}} = \int_V 3(\bar{p}_c + \bar{p}) dV = \bar{\mathcal{W}}_c + \bar{\mathcal{W}}_p. \quad (41)$$

La pression due aux mouvements (ou turbulences) s'ajoute à la pression statique locale : leurs effets globaux sont indiscernables.

7. Viriel d'un matériau mécanique. — Nous venons de déterminer le viriel des efforts produits par une assemblée de particules, un fluide, ou par un champ électromagnétique. Nous avons constaté que dans tous les cas le viriel est positif, c'est-à-dire que ces types de stockage tendent à faire *exploser* l'énergie emmagasinée. Pour éviter ce phénomène, il faut placer autour de l'énergie stockée une enceinte mécaniquement résistante qui devra contenir le viriel correspondant. Nous avons étudié cette question dans un cas particulier au paragraphe 3 ; proposons-nous d'en généraliser les résultats.

A cet effet, considérons un bloc de matériau en équilibre soumis à des contraintes mécaniques, sur lequel nous définissons un système de coordonnées curvilignes tangent localement aux directions propres du tenseur des contraintes (voir Fig. 5). Par la pensée,

FIG. 5.

décomposons maintenant le bloc en parallélépipèdes élémentaires dont les arêtes sont portées par le système de coordonnées (voir Fig. 6). Dans ces conditions, les efforts appliqués à chaque parallélépipède sont normaux à ses faces. Pour évaluer le viriel des efforts appliqués sur l'extérieur, nous décomposons la surface totale du parallélépipède en trois groupes de faces

FIG. 6.

opposées. Les deux faces normales à Ox ont une surface égale à $dy dz$, les contraintes leur appliquant deux forces égales et opposées de module $F_x = n_x dy dz$. Comme la distance des deux faces vaut dx , le viriel appliqué à ces faces est $d\mathcal{W}_x = n_x dV$. Par un raisonnement analogue sur les autres groupes de faces, le viriel total appliqué à l'extérieur par le volume élémentaire vaut

$$\begin{aligned} d\mathcal{W}_n &= (n_x + n_y + n_z) dV \\ &= n_T dV \end{aligned} \quad (36)$$

$n_T = n_x + n_y + n_z$ représente la trace du tenseur des contraintes du matériau ; c'est un invariant dans tous les systèmes de coordonnées.

Comme le viriel est une grandeur additive, le viriel des efforts appliqués par le bloc sur l'extérieur est égal à la somme des viriels élémentaires (les forces internes d'interaction des blocs entre eux ont un viriel global nul car ce dernier est constitué par un ensemble de paires de forces égales et opposées appliquées au même point). Par suite, le viriel total dû au bloc vaut :

$$\mathcal{W}_n = \int_V n_T dV \quad (37)$$

($n_T > 0$ si les contraintes sont principalement de compression). Nous noterons que contrairement au cas des particules libres, des fluides et du champ électromagnétique, le viriel $\mathcal{W}_n$ peut avoir un signe quelconque, donc négatif : c'est pour cette propriété que les matériaux sont utilisés. Pour un matériau donné, il est donc essentiel de connaître ses conditions de rupture à la traction sous les efforts.

Grosso-modo, on peut distinguer deux types de matériaux : les matériaux isotropes, bien représentés par les métaux, et les matériaux unidirectionnels composites à base de fibres (verre, carbone, etc.) noyées dans une matrice isotrope. Les matériaux uni-

directionnels travaillent seulement en traction simple. Si l'on appelle R_E leur limite élastique, ils satisfont à la condition : $n_T < R_E$. Pour les matériaux isotropes, la situation est plus complexe. Divers critères de résistance sont utilisés qui, bien que de formulation différente, donnent des résultats voisins en accord avec l'expérience. Le plus simple et le plus utilisé est le critère de Tresca dit du *cisaillement maximum* : si $n_x > n_y > n_z$, il faut que $|n_x - n_z| \leq R_E$ quel que soit n_y . Deux autres critères sont également employés, qui consistent à borner l'énergie maximale de déformation ou l'énergie de distorsion. Ils entraînent alors respectivement :

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 2\mu(n_x n_y + n_y n_z + n_z n_x) \leq R_E^2$$

(où μ est le coefficient de Poisson égal à 0,3 pour les aciers courants)

$$(n_x - n_y)^2 + (n_y - n_z)^2 + (n_z - n_x)^2 \leq 2 R_E^2.$$

Pour les expérimentations les plus courantes, une des contraintes au moins est nulle.

En ce qui concerne le viriel maximum admissible tous ces critères entraînent le même résultat pratique : le viriel des efforts par unité de volume que peut soutenir un matériau est $\mathcal{W} \lesssim 2 R_E$. A partir de ces résultats, nous allons maintenant étudier l'équilibre global d'un système.

8. Constitution globale d'un système stockant continuellement de l'énergie. — Considérons un système recélant de l'énergie sous l'une des formes que nous venons d'examiner et comportant un matériau mécanique. Si le système est confiné dans une région fixe bornée de l'espace et ne rayonne pas, il applique à l'extérieur un viriel moyen

$$\overline{\mathcal{W}} = \overline{\mathcal{W}}_c + \overline{\mathcal{W}}_{EM} + \overline{\mathcal{W}}_p + \overline{\mathcal{W}}_n. \quad (37)$$

Si de plus le système est isolé, les forces appliquées sur l'extérieur sont nulles. Alors,

$$\overline{\mathcal{W}}_c + \overline{\mathcal{W}}_{EM} + \overline{\mathcal{W}}_p + \overline{\mathcal{W}}_n = 0. \quad (38)$$

Or, $\overline{\mathcal{W}}_c$, $\overline{\mathcal{W}}_{EM}$ et $\overline{\mathcal{W}}_p$ étant tous positifs, nous devons avoir :

$$\overline{\mathcal{W}}_n < 0. \quad (39)$$

Par suite, l'utilisation de matériaux mécaniques travaillant en traction est indispensable pour stocker de l'énergie sous au moins l'une des formes étudiées ci-dessus.

Grosso-modo, l'énergie stockée est égale au produit de la résistance mécanique par le volume des matériaux. Cependant, quelques facteurs correctifs de l'ordre de 2 interviennent souvent dans l'expression précise de cette égalité.

A titre d'exemple, un champ magnétique stocke mieux de l'énergie qu'un gaz monoatomique car pour une même énergie son viriel est inférieur. Cependant, nous montrerons que les bobines les plus pratiques

(solénoïdes) donnent une mauvaise répartition des efforts, ce qui accroît beaucoup la masse effective des matériaux mécaniques. De même, si un matériau homogène est employé dans une structure, il faudra si possible le faire travailler en traction conjointement selon deux directions (la trace n_T du tenseur des contraintes prend alors une valeur double par rapport à la traction unidirectionnelle).

Comme les performances précises dépendront finalement de chaque cas, nous allons nous borner à examiner trois applications typiques.

8.1 STOCKAGE PERMANENT D'UN FLUIDE COMPRIMÉ HOMOGÈNE. — Un exemple très simple, où l'on stocke un gaz parfait dans une sphère en métal, est rapporté au paragraphe 3. Si le gaz est monoatomique, toute l'énergie est stockée sous forme cinétique. Alors, $\gamma = 5/3$ et $\mathcal{W}_c = 2 \mathcal{W}_e$ à chaque instant. Dans un tel stockage, le matériau mécanique subit une contrainte bidirectionnelle ; on a : $n_T = 2 n_R$ (où n_R est la contrainte de traction linéaire du matériau). Par suite, $\mathcal{W}_G = \mathcal{W}_c = n_R V_R$.

Lorsque l'on augmente l'atomicité du gaz, une fraction de l'énergie stockée passe sous les formes rotation-vibration. Or, les efforts sur les parois ne dépendent que de l'énergie de translation. Par suite, les degrés de liberté supérieurs à 3 ne produisent aucun viriel. On explique cette propriété en remarquant que les efforts mécaniques engendrés par la rotation ou les vibrations sont supportés par les liaisons chimiques. Tant que la température reste assez basse, ces liaisons chimiques jouent elles-mêmes le rôle d'un matériau mécanique qui serait fractionné en une multitude d'éléments à l'échelle de la molécule : on a alors un viriel des forces intérieures non nul. Quand la température s'accroît, le nombre de degrés de liberté s'élève tout d'abord par augmentation du nombre de vibrations excitables (ce phénomène est courant dans les molécules à plusieurs atomes, telle que CO_2). Alors, la capacité de stockage s'accroît aussi et l'on obtient $\mathcal{W}_G \gg n_R V_R$. Cette propriété se traduit physiquement par une diminution de la valeur de γ . Enfin, si la température s'élève trop, les liaisons chimiques mécaniquement résistantes se brisent à leur tour : l'énergie stockée s'applique à nouveau aux parois, ce qui fait progressivement remonter γ à la valeur 5/3 et

$$\mathcal{W}_G \rightarrow n_R V_R = \frac{1}{2} n_T V_R. \quad (40)$$

En conclusion, le stockage d'un fluide comprimé peut être intéressant sous la forme d'un gaz où γ est aussi proche de 1 que possible, ce qui est obtenu en général à l'aide de molécules assez complexes et assez chaudes. Le stockage et la récupération d'une telle énergie sont assez aisés (par compresseur et turbine), mais s'effectuent avec un rendement global médiocre.

8.2 STOCKAGE D'ÉNERGIE DANS UN VOLANT EN ROTATION. — Dans ce procédé de stockage très courant, ce sont les forces d'inertie de rotation qui engen-

drent les efforts. Le problème majeur consiste à trouver une structure telle que les matériaux mécaniques travaillent en traction homogène bidimensionnelle s'ils sont isotropes et en traction homogène unidimensionnelle s'ils sont fibrés. Dès que l'on s'écarte de ces solutions idéales, les performances baissent.

Pour les matériaux isotropes, la forme idéale de rotor bien connue [4] est représentée sur la figure 7 ; le rotor étant supposé de faible épaisseur, cette dernière dépend de r selon l'expression :

$$e = e(r) = e_0 \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) \quad (41)$$

(r_0 : constante définissant la forme du disque).

FIG. 7. — Forme d'un rotor pour un bon stockage cinétique avec matériau isotrope.

Alors,

$$W_c = \frac{1}{2} n_T V_R \leq R_E V_R. \quad (42)$$

On peut exprimer les performances d'une forme pratique par un coefficient $\lambda_c \leq 1$ [4] tel que :

$$W_c \leq R_E V_R \lambda_c. \quad (43)$$

A titre d'exemple, la forme idéale tronquée pour $r \gg r_0$ permet d'atteindre $\lambda_c = 0,9$. Pour un disque plein, les régions du centre sont soumises à des contraintes excessives : $\lambda_c = 0,6$. Il est bien connu aussi que si l'on perce au centre d'un disque plein un trou même très petit, la contrainte locale est encore doublée, d'où une chute de λ_c à la valeur 0,3. Par suite, un bon stockage d'énergie avec un matériau isotrope doit s'effectuer à l'aide d'un disque renflé au centre et non percé.

Si le matériau est anisotrope et susceptible de ne travailler que sur une seule direction, la forme idéale est constituée par un cylindre de faible épaisseur ou par un assemblage de tels cylindres (avec matériaux élastiques intercalaires pour bien répartir les contraintes au cours de la rotation, ainsi qu'il est indiqué sur la figure 8). Alors, $\lambda_c = 0,5$. Au point de vue pratique, on peut s'approcher assez facilement dans ce cas de la valeur $\lambda_c = 0,5$ si le procédé de sustentation du cylindre tournant est bien étudié.

Finalement, l'accumulation d'énergie par volant en rotation est un procédé de stockage simple aux performances convenables quoique nettement inférieures à celles d'un fluide comprimé. Cependant, l'introduction

FIG. 8. — Forme d'un rotor pour un bon stockage cinétique avec un matériau unidirectionnel (traction simple).

et la récupération de l'énergie sont assez aisés par voie électrique et peuvent donner lieu à un bon rendement global.

8.3 STOCKAGE ÉLECTROMAGNÉTIQUE. — Nous ne considérerons pas ici le stockage sous forme d'ondes électromagnétiques, car il présente de gros problèmes pratiques. En ce qui concerne le champ électrostatique, un accumulateur idéal est constitué par une sphère chargée isolée (voir Fig. 9). La forme du tenseur des contraintes (15) montre que la sphère mécanique chargée est soumise à une contrainte de traction bidimensionnelle. Si elle est suffisamment fine pour que la contrainte mécanique en son intérieur soit homogène, on a :

$$W = n_T V_R = W_E. \quad (44)$$

FIG. 9.

L'expression (44) est à rapprocher de (42) : la sphère électrisée est au moins deux fois plus efficace qu'un volant. Remarquons cependant que le schéma de la figure 9 suppose que le champ s'éloigne à l'infini. S'il est arrêté par une sphère extérieure, l'efficacité est moins grande, car la sphère extérieure est soumise à des efforts de compression (voir Fig. 10).

FIG. 10.

Posons

$$W_E = \lambda_E n_T V_R. \quad (45)$$

Si l'on suppose que les matériaux utilisés sont *symétriques* (c'est-à-dire aussi résistants en compression qu'en traction), on a :

$$\lambda_E = 1 - \frac{2}{1 + \frac{r_e}{r_i}}. \quad (44)$$

En pratique, λ_E peut atteindre assez facilement de valeurs de 0,8 ou même 0,9.

Par suite, le stockage électrostatique est un excellent procédé en ce qui concerne le viriel qu'il engendre. Malheureusement, les champs électriques nécessaires sont toujours très élevés dès que l'on désire une densité volumique d'énergie suffisante ; excepté en régime transitoire court (inférieur par exemple à 10^{-6} s), ce procédé n'est guère utilisable en pratique. Aussi, nous n'allons plus considérer maintenant que le stockage magnétique.

A cet effet, considérons une bobine en forme de solénoïde long représentée sur la figure 11. Lorsqu'elle est parcourue par un courant, deux types de forces apparaissent : des efforts radiaux tendant à faire éclater le solénoïde et des forces axiales tendant à l'impliquer. Si on appelle respectivement $\mathcal{W}_e$ et $\mathcal{W}_i$ les viriels associés aux forces explosives et implisives, on montre que

$$\mathcal{W}_e = -2 \mathcal{W}_i = 2 W_M. \quad (45)$$

FIG. 11.

Si l'on suppose encore les matériaux *symétriques*, leur volume est proportionnel à la somme des modules des viriels. Alors, en posant $W_M = \lambda_M n_T V_R$, nous obtenons pour un solénoïde long $\lambda_M = \frac{1}{3}$. Par suite, un solénoïde long est un mauvais procédé de stockage d'énergie au point de vue des efforts engendrés. Pour l'améliorer, voire le rendre *parfait* ($\lambda_M = 1$), il faut trouver une structure où tous les efforts pourront être réduits à des contraintes de traction pure. On y parvient en superposant deux circuits magnétiques très fins indépendants comme représenté sur la figure 12. Le

FIG. 12.

premier est un solénoïde très long où les courants sont tous purement azimutaux. Le second est un circuit en forme de tore à section rectangulaire où les courants sont tous axiaux ou radiaux.

Si l'on appelle H_e et H_i les valeurs maximales des champs azimutal et axial, la condition aux efforts *tous de traction* (voir figure) est :

$$H_e^2 \text{Log} \frac{r_1}{r_0} > H_i^2 > H_e^2. \quad (46)$$

Dans ce cas, on a alors $\lambda_M = 1$.

Une autre manière de faire tendre λ_M vers 1 consiste à employer comme circuit un fil cylindrique en forme d'anneau de très grand diamètre. Si R et r sont respectivement le grand et le petit rayon de l'anneau avec $R \gg r$,

$$\lambda_M \rightarrow - \frac{1 - \text{Log} \frac{R}{r}}{1 + \text{Log} \frac{R}{r}}. \quad (47)$$

Finalement, il est possible de trouver des structures de bobines magnétiques où $\lambda_M \rightarrow 1$. Mais ces structures sont toujours assez complexes de réalisation. Le solénoïde long, procédé le plus simple et le moins coûteux en ce qui concerne la masse de bobinage, est malheureusement le plus mauvais en ce qui concerne les efforts mécaniques engendrés.

8.4 COMPARAISON DES DIFFÉRENTS PROCÉDÉS. —

Cette comparaison est résumée sur la figure 13 pour les trois procédés les plus efficaces à fortes énergies (gaz, volant, bobine magnétique). Il nous montre que pour chacun de ces procédés, le choix des structures et des matériaux n'est pas indifférent. Si l'on prend chaque fois les structures les plus performantes (gaz poly-

FIG. 13.

atomiques, disque renflé à matériau isotrope ou anneau à efforts unidirectionnels, montage magnétique mixte), l'efficacité du stockage est croissante selon la suite volant, bobine, gaz. Cependant, la facilité de mise en œuvre et surtout le rendement global suit l'ordre inverse. Dans ces conditions, les trois procédés ne paraissent pas s'exclure ; ils ont chacun leur propre domaine d'application. Notons que si le stockage d'énergie fluide peut être illimité dans le temps, il en est pratiquement de même pour de très grandes énergies avec les volants en rotation et les bobines supraconductrices. Enfin, si l'on désire stocker des énergies extrêmement élevées mettant en jeu un viriel énorme, on peut utiliser les cavités de la couche terrestre : dans ce cas, le stockage de gaz sous pression paraît s'imposer naturellement, mais il faut remarquer que le stockage par des bobines supraconductrices très grandes ne serait pas à exclure (montage *mixte* ou équivalent).

La figure 13 résume finalement les possibilités de stockage d'énergie pour tous les systèmes macroscopiques de particules et ou de champs électromagnétiques ; l'étude comparative à base de viriel a donc un caractère universel.

9. Extension de l'emploi du viriel aux régimes impulsions [6]. — Dans les précédents paragraphes, nous avons étudié les propriétés des stockages permanents d'énergie. Cependant, les expressions des paragraphes 4, 6 et 7 permettent aussi d'étudier les régimes transitoires à partir de l'impulsion de viriel, qui est conservative dans certaines conditions. Nous allons utiliser cette notion pour donner quelques propriétés globales du stockage impulsif d'énergie.

A cet effet, considérons une énergie stockée transitoirement à l'intérieur d'un récipient et appliquant à chaque instant à ce dernier une densité de force $\mathbf{f}_R$. Après l'impulsion, nous supposons que la quantité de mouvement et le moment cinétique sont demeurés invariants, soit :

$$\left\{ \int_0^T \int_{V_R} \mathbf{f}_R dV dt = 0 \right. \quad (48)$$

$$\left\{ \int_0^T \int_{V_R} \mathbf{r}_R \wedge \mathbf{r} dV dt = 0 \right. \quad (49)$$

(T : durée de l'impulsion).

Si l'impulsion est très courte, le récipient aura une position quasi invariante au cours de l'impulsion, mais la vitesse de ses différents points aura varié de manière plus sensible. Si ρ est la densité locale du récipient et $\mathbf{v}_D$ la prise de vitesse au cours de l'impulsion ($\mathbf{v}_D = 0$ initialement) on a après l'impulsion :

$$\rho \mathbf{v}_D \neq \int_0^T \mathbf{f}_R dt. \quad (50)$$

Si nous supposons que le récipient est élastique et que les efforts sont raisonnablement répartis, ce qui impose en pratique une enveloppe assez fine, l'énergie

liée à la vitesse $\mathbf{v}_D$ devra être absorbée localement par la dilatation du matériau.

Si w_D est le travail de déformation par unité de volume, on aura :

$$\frac{1}{2} \rho v_D^2 = w_D. \quad (51)$$

La loi de Hooke permet de lier w_D à la contrainte n :

$$w_D = \frac{1}{2} \frac{n^2}{E} \quad (52)$$

(où E est le module d'élasticité).

De (51) et (52), on tire

$$v_D = \frac{n}{\sqrt{\rho E}} = \frac{n}{\rho C} \quad (53)$$

(où C est la vitesse du son dans le matériau).

La vitesse maximale admissible étant déterminée, proposons-nous de la lier à l'impulsion totale de viriel

$$A = \int_0^T \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{r} dV dt. \quad (54)$$

A partir de (50), (54) peut s'écrire :

$$A = \int_V \rho \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{r} dV \quad (55)$$

$$\begin{aligned} &= \int_V \rho v_D r \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{v}_D \wedge \mathbf{r})^2}{(\mathbf{v}_D \cdot \mathbf{r})^2}} \cdot dV \\ &= \int \frac{nr}{C} \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{v}_D \wedge \mathbf{r})^2}{(\mathbf{v}_D \cdot \mathbf{r})^2}} \cdot dV. \end{aligned} \quad (56)$$

Pour un système bien construit, les relations (49) et (50) permettent en général d'atteindre la condition

$$\mathbf{v}_D \wedge \mathbf{r} \equiv 0.$$

Alors, (56) s'écrit :

$$A = \int_V \frac{nr}{C} dV. \quad (57)$$

L'expression fondamentale (57) montre que l'impulsion de viriel est grosso-modo égale au produit du viriel appliqué à l'enceinte par le temps de propagation du son dans cette enceinte.

(57) a été établie pour un système élastique ; si l'impulsion de viriel est trop élevée, elle est ensuite assez facilement absorbée par déformation permanente. Dans ce cas, on peut écrire l'énergie absorbée sous la forme :

$$w_D \neq n_R \chi, \quad (58)$$

où n_R est la contrainte de rupture et χ un coefficient dépendant fortement du matériau et de la vitesse de déformation. A titre d'exemple : $\chi = 0,1$ pour un acier très dur, $\chi = 0,3$ à $0,5$ pour un métal mou, $\chi = 4$ ou 5 pour un métal mou en déformation très rapide (1 km/s).

A partir de (58), on tire :

$$A_R = \int_V \sqrt{2 \rho n_R \chi} r dV. \quad (59)$$

Dans les cas usuels où l'enceinte est constituée par un matériau s'allongeant bien à la rupture, $A_R \gg A$. Il en résulte que si une enceinte fine est conçue pour résister à des impulsions de viriel successives en restant dans le domaine des déformations élastiques, elle est capable d'absorber en déformation permanente des viriels très supérieurs : les enceintes fines destinées à supporter des impulsions de viriel courtes répétées en régime élastique présentent une grande sécurité.

On voit finalement qu'en régime impulsionnel, une enceinte est caractérisée essentiellement par l'impulsion de viriel qu'elle est capable de tenir ; cette impulsion produit des déplacements plus ou moins importants qui doivent être absorbés par déformation.

10. Conclusion. — Les études que nous avons effectuées portent sur les procédés de stockage d'énergie à base cinétique (y compris les gaz) et électromagnétique.

Nous n'avons pas abordé les dispositifs mettant en jeu des forces atomiques ou nucléaires, ni la gravitation qui est le seul champ à grande portée de nature *implosive*. Dans tous les cas considérés ici, la nature *explosive* des énergies stockées impose de les maintenir par un système mécanique produisant un système de forces opposées. Le concept de viriel est alors un intermédiaire permettant de lier simplement la quantité d'énergie à la masse des matériaux mécaniques qui subit les efforts engendrés. A un facteur numérique près petit (variant par exemple entre 0,5 et 2), toutes les formes usuelles de stockage d'énergie donnent sur les structures des efforts équivalents. Pour des systèmes bien conçus, les formes les plus intéressantes sont le stockage par gaz comprimé, par volant en rotation et par bobine magnétique. Enfin, l'emploi du viriel peut également donner des indications intéressantes sur les propriétés des systèmes impulsionnels.

Remerciements. — Je remercie M. Lucidarme pour les discussions que nous avons eues en ce qui concerne la résistance mécanique des matériaux et M^{me} Rioux-Damidaou pour sa critique du manuscrit.

Bibliographie

- [1] ROCARD, Y., *Thermodynamique* (Masson et Cie, Paris) 1952.
- [2] HEITLER, W., *The quantum theory of radiation* (Clarendon Press, Oxford) 1960.
- [3] RIOUX, C., R. G. E. n° 5 (1970).
- [4] TIMOSHENKO et GOODIER, *Théorie de l'élasticité*. Librairie polytechnique Béranger, Paris (1961).
- [5] ROBSON A. E. *et al.*, First Conf. on Energy Storage Compression and Switching, Torino Italy (1974).
- [6] RIOUX, C., Rapport interne LP 120 (1970).