Possibilité d'obtention du verrouillage des modes transverses d'un laser

R. Signore

► To cite this version:

R. Signore. Possibilité d'obtention du verrouillage des modes transverses d'un laser. Revue de Physique Appliquée, 1973, 8 (1), pp.33-48. 10.1051/rphysap:019730080103300 . jpa-00243652

HAL Id: jpa-00243652

<https://hal.science/jpa-00243652>

Submitted on 1 Jan 1973

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification
Physics abstracts
07.20

POSSIBILITÉ D'OBTENTION DU VERROUILLAGE DES MODES TRANSVERSES D'UN LASER

R. SIGNORE (*)

Ingénieur ENS Télécommunications Docteur ès Sciences

(Reçu le 30 juin 1972, révisé le 18 septembre 1972)

Résumé. — On étudie les conditions pour qu'un laser oscillant en multimodes transverses puisse émettre un spot lumineux gaussien pur décentré. On exprime les relations d'amplitude et de phase que doivent satisfaire les modes transverses et on examine ensuite les possibilités d'obtenir de telles relations et les moyens pratiques pour y parvenir.

Abstract. — Conditions for obtaining an off-centered pure gaussian beam from a laser oscillating with transverse multimodes are studied. The amplitude and phase relations to be met by the transverse modes are expressed and the possibilities of obtaining these relations and practical means to be carried out, are subsequently studied.

Sommaire. — L'auteur généralise la théorie du verrouillage des modes transverses d'un laser à une dimension transverse, au cas des lasers à deux dimensions et notamment aux structures de révolution.

Dans la première partie, l'auteur étudie les conditions théoriques pour que la superposition d'une infinité de modes transverses donne un spot lumineux gaussien décentré. Pour effectuer cette étude, on s'appuie sur des résultats classiques du problème de l'oscillateur harmonique à deux dimensions en mécanique quantique. On trouve que les énergies contenues dans des multiplicités d'indice r doivent satisfaire à une distribution de Poisson de l'indice r et qu'au sein d'une même multiplicité les énergies des modes qui la composent doivent satisfaire à une distribution binomiale. Lorsque ces conditions sont satisfaites, on donne l'expression du champ électrique global d'une multiplicité r . On introduit la notion de symétrie d'une multiplicité, en s'appuyant sur la théorie des groupes de symétrie.

Dans la deuxième partie, l'auteur étudie les possibilités d'obtenir le verrouillage transverse. La distribution de Poisson des énergies des multiplicités peut être obtenue approximativement avec des lasers dont la courbe de gain est gaussienne (par exemple les lasers à argon ionisé). La distribution binomiale au sein d'une même multiplicité ne peut être obtenue qu'en diaphragmant judicieusement le résonateur. La

nature du couplage entre les modes est étudiée à partir de la notion de symétrie introduite dans la première partie. On examine pour finir les conditions pratiques d'obtention du verrouillage transverse : modulation interne, absorption saturable et auto-verrouillage.

Introduction. — On sait que le verrouillage des modes longitudinaux d'un laser entraîne, pour le faisceau de lumière émis par ce laser, des propriétés remarquables [1].

En particulier, l'intensité lumineuse devient une fonction périodique du temps, la période étant égale à l'inverse de l'intervalle de fréquence qui sépare les modes longitudinaux qui interfèrent.

Si le verrouillage des modes longitudinaux modifie les propriétés temporelles du faisceau du laser, il n'en modifie pas cependant la distribution spatiale dans un plan de section droite, car les modes longitudinaux qui composent ce faisceau ont tous la même distribution spatiale.

Le principe du verrouillage de phase des modes d'oscillation d'un laser ne se limite pas, en principe, aux seuls modes longitudinaux, bien qu'en pratique, la plupart des études sur le verrouillage n'ait porté que sur ce type de modes. Toutefois, en 1968, D. H. Auston [2] a montré tout l'intérêt qu'il y aurait à verrouiller les modes transverses (et non plus longitudinaux) d'un laser.

Cet auteur a considéré un laser dont la section droite n'aurait qu'une dimension (l'autre dimension étant sinon nulle, du moins faible devant la première).

(*) BREVATOME, 25, rue de Ponthieu, 75008 Paris, avril 1972, revu en septembre 1972.

Dans ce cas, la distribution du champ électrique des différents modes transverses ne dépend que d'une variable transverse, ce qui simplifie à la fois la théorie et la réalisation pratique des moyens de verrouillage. D. H. Auston [3] a confirmé bientôt expérimentalement les prévisions de sa théorie et a montré que pour une relation de phase particulière entre les modes transverses, le spot lumineux émis par le laser va et vient périodiquement d'un bord à l'autre du résonateur.

Cette modification considérable de la distribution spatiale s'interprète par le fait que, à la différence du verrouillage longitudinal, les modes qui se combinent dans le verrouillage transverse ont chacun une distribution spatiale particulière. Ces distributions s'expriment analytiquement par les fonctions associées d'Hermite, produits d'une fonction gaussienne par des polynômes d'Hermite. Quant à la périodicité temporelle qui apparaît, elle est encore due, comme pour le verrouillage longitudinal, aux écarts réguliers de fréquence qui séparent les différents modes qui se combinent.

On se propose, dans cet article, de généraliser les résultats d'Auston à une structure transversale à deux dimensions, en particulier circulaire, qui correspond mieux que la structure à une dimension, à la géométrie des lasers habituels. Cette extension entraîne certaines difficultés théoriques et expérimentales, dues, en partie, au fait que dans une structure à deux dimensions transverses, les modes sont dégénérés : à la p -ième fréquence, on trouve $p + 1$ modes transverses spatialement différents.

Dans un premier chapitre, on établit des relations fondamentales qui expriment l'amplitude et la phase que doivent posséder les modes transverses pour que leur superposition donne un spot gaussien.

Dans un deuxième chapitre, on étudie les possibilités et les conditions d'obtention de ce type de verrouillage.

Notations. Conventions. — Les coordonnées cartésiennes dans le plan de section droite du résonateur du laser (Fig. 1) sont notées x et y , et les coordonnées polaires ρ et ψ . L'axe du résonateur est l'axe oz . Chaque mode d'oscillation est identifié, en coordonnées cartésiennes, par les trois indices q, m, n , q étant l'indice suivant oz , m suivant ox et n suivant oy .

FIG. 1. — Choix des axes de coordonnées.

La somme des indices transverses est notée $m + n = r$.

L'ensemble des modes transverses d'indices m et n tels que leur somme soit égale à r est appelé « multiplicité d'indice r » ; la dégénérescence de cette multiplicité est d'ordre $r + 1$, car les $r + 1$ modes ont même pulsation :

$$\omega_{q,m,n} = \omega_{q,o,o} + (m + n) \Omega$$

avec

$$\Omega = \frac{c}{L} \arccos \sqrt{\left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right)}$$

où L est la longueur du résonateur et R_1 et R_2 les rayons de courbure des miroirs.

Les fonctions orthonormées qui décrivent les distributions transverses sont notées :

$$U_m(x) = N_m H_m(\alpha x) \exp(-\frac{1}{2} \alpha^2 x^2)$$

$$U_n(y) = N_n H_n(\alpha y) \exp(-\frac{1}{2} \alpha^2 y^2)$$

$$U_{m,n}(x, y) = U_m(x) \cdot U_n(y)$$

où H_i est le polynôme d'Hermite d'ordre i et α une constante traduisant le diamètre du mode ; les N_i sont des coefficients de normalisation :

$$N_i = \left(\frac{\alpha}{\pi^{1/2} 2^i i!} \right)^{1/2}$$

et

$$N_{m,n} = N_m \cdot N_n.$$

On utilisera constamment le changement de variables $\xi = \alpha x$, $\eta = \alpha y$.

S'il n'y a pas d'ambiguïté possible, lorsqu'on considère les modes transverses associés à un mode fondamental (q, o, o) bien déterminé, on n'écrira pas l'indice q et on identifiera les différents modes transverses et les grandeurs correspondantes par les deux seuls indices (m, n) (ainsi $\omega_{m,n}$ signifie $\omega_{q,m,n}$).

FIG. 2. — Notations pour les indices des modes transverses.

Le champ électrique $E_{m,n}(x, y, t)$ d'un mode s'exprime par une fonction complexe à laquelle on ajoute la complexe conjuguée :

$$E_{m,n}(x, y, t) = A_{m,n} \cdot U_{m,n}(x, y) e^{j(\omega_{m,n} t + \phi_{m,n})} + \text{C. C.}$$

où $\varphi_{m,n}$ est un terme de phase, et $A_{m,n}$ l'amplitude du champ correspondant.

La dépendance en z s'obtient en multipliant l'expression précédente par :

$$\exp\left(j\omega_{o,o}\left(-\frac{z}{c}\right)\right).$$

La somme des champs d'une multiplicité d'indice r est notée R_r :

$$R_r = \sum_{\substack{m,n \\ m+n=r}} E_{m,n}.$$

Pour les sommations sur toutes les multiplicités, elles s'effectuent depuis $m = 0$ et $n = 0$ (elles comprennent donc le mode fondamental q, o, o , qui n'est qu'un cas particulier de mode transverse) jusqu'à l'infini.

Dans une même multiplicité, l'indice courant est noté s et varie de 0 à r .

1. Conditions théoriques d'obtention du verrouillage transverse. — 1.1 CONDITIONS D'OBTENTION D'UN SPOT GAUSSIEN PUR PAR SUPERPOSITION DE MODES TRANSVERSES. — On peut envisager, *a priori*, s'il est possible que la superposition d'une famille de modes transverses donne naissance à une répartition particulière arbitraire du champ électrique dans un plan de section droite. C'est en général toujours possible car on sait que les fonctions d'Hermite associées — qui décrivent les distributions transverses des différents modes — constituent une suite complète de fonctions orthonormées, en lesquelles on peut toujours décomposer une fonction arbitraire des variables x et y . Néanmoins, dans le cas général, la fonction obtenue par la superposition de modes transverses subit des variations temporelles qui entraînent une déformation au cours du temps de l'allure du spot lumineux.

On se propose de chercher une combinaison particulière de modes qui conduise à un spot dont l'allure soit permanente, ce qui n'exclut pas d'ailleurs sa mobilité. Cette restriction est surtout dictée par des raisons d'ordre expérimental car un spot qui se déformerait constamment (en s'étalant par exemple) serait d'un emploi peu commode.

Le problème de l'obtention d'un spot lumineux de forme invariable, par la combinaison des différents modes transverses d'un même laser, est grandement simplifié, voire même résolu, si l'on remarque avec Auston et ainsi qu'il est connu [4] que les fonctions qui décrivent les variations spatiales et temporelles du champ électrique d'un mode ne sont autres que les fonctions propres qui, en mécanique quantique, servent à décrire les états d'un oscillateur harmonique. Cette coïncidence est bien entendu fortuite car il n'y a physiquement aucun lien entre les deux phénomènes. L'identité de formulation provient de l'analogie entre d'une part, l'équation de propagation des ondes

électromagnétiques qui sert de point de départ à l'établissement des formules décrivant les modes d'un laser [5], et d'autre part l'équation de Schrödinger, qui permet de trouver les fonctions propres de l'oscillateur harmonique.

On utilisera donc largement les résultats classiques de la théorie de l'oscillateur harmonique pour résoudre les quelques problèmes mathématiques qui se posent lorsqu'on veut étudier la superposition des modes transverses, et plus particulièrement les résultats donnés par L. I. Schiff [6]. C'est ainsi que le problème de formation d'un « paquet de modes » se confond avec celui de la formation du « paquet d'ondes » dont Schiff donne la solution ([6], p. 67) dans le cas de l'oscillateur harmonique à une dimension, la variable correspondante étant notée x (variable réduite $\xi = \alpha x$).

On en déduit aisément que :

— si les modes d'indice m ont une amplitude A_m qui vérifie la relation :

$$A_m = \frac{\xi_0^m \exp(-\frac{1}{4}\xi_0^2)}{(2^m m!)^{1/2}} \quad \text{avec} \quad \xi_0 = \alpha a$$

— et si les phases φ_m vérifient toutes à un instant t_1 , la relation $\varphi_m = 0$,

— alors la sommation de $m = 0$ à l'infini des fonctions $E_m(x)$ à l'instant t_1 engendre la fonction gaussienne décentrée en $x = a$:

$$\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/4}} e^{-\alpha^2(x-a)^2}.$$

Les variables x et y du plan de section droite étant indépendantes, les conditions que doivent satisfaire les amplitudes A_n et les phases φ_n s'écrivent de la même manière :

$$A_n = \frac{(\eta_0)^n \exp(-\frac{1}{4}\eta_0^2)}{(2^n n!)^{1/2}} \quad \text{avec} \quad \eta_0 = \alpha b$$

et à l'instant t_2 : $(\varphi_n)_{t=t_2} = 0$.

À l'instant t_2 , la sommation de $n = 0$ à l'infini des fonctions $E_n(y)$ engendre la fonction gaussienne décentrée en $y = b$

$$\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/4}} e^{-\alpha^2(y-b)^2}.$$

Pour obtenir l'évolution des paquets gaussiens à des instants $t \neq t_1$ (ou $t \neq t_2$) on calcule [6] les fonctions :

$$E(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m U_m(x) e^{-j(\omega_m t + \varphi_m)} + \text{C. C.}$$

et

$$E(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n U_n(y) e^{-j(\omega_n t + \varphi_n)} + \text{C. C.}$$

en remplaçant les coefficients A_m et A_n par les valeurs précédentes.

Les expressions obtenues permettent de calculer $|E(x, t)|^2$ et $|E(y, t)|^2$ qui représentent les évolutions des intensités lumineuses $I(x, t)$ et $I(y, t)$.

On trouve pour la variable x , et à partir de $t = t_1$:

$$I(x, t) = \frac{\alpha}{\pi^{1/2}} e^{-\alpha^2(x-a \cos \Omega t)^2} \quad (1)$$

et pour la variable y , et à partir de $t' = t_2$:

$$I(y, t') = \frac{\alpha}{\pi^{1/2}} e^{-\alpha^2(y-b \cos \Omega t')^2} . \quad (2)$$

Quant aux relations de phase sur φ_m et φ_n , on doit en toute généralité, considérer que les instants t_1 et t_2 ne sont pas nécessairement les mêmes. Fixons arbitrairement l'origine des temps à l'instant t_1 . La condition de nullité des phases φ_n n'est réalisée qu'à l'instant $t_2 - t_1 = \tau$, ce qui permet d'écrire :

$$n\Omega\tau + \varphi_n = 0$$

soit

$$\varphi_n = -n\Omega\tau = n\varphi$$

en désignant par φ la valeur $\Omega\tau$. Le terme de phase correspondant à la variable y et à l'indice n s'exprime donc simplement par

$$e^{jn(\Omega t + \varphi)}$$

alors que le terme de phase correspondant à la variable x et à l'indice m s'exprime par :

$$e^{jm(\Omega t)} .$$

Avec ces notations, les champs électriques des deux familles de modes s'expriment avec le même repère des temps ($t_1 = 0$, $t_2 = \tau$) par :

$$E_m(x, t) = A_m U_m(x) e^{j(\omega_q t)} e^{j(m\Omega t)} + C. C.$$

$$E_n(y, t) = A_n U_n(y) e^{j(\omega_q t)} e^{(jn\Omega t)} \cdot e^{jn\varphi} + C. C.$$

Il est commode alors d'inclure le terme de phase $e^{jn\varphi}$ dans le coefficient A_n , ce qui rend les deux expressions A_m et A_n symétriques :

$$A_n = \frac{\eta^n \exp(-\frac{1}{4} |\eta|^2)}{(2^n n!)^{1/2}} \quad \text{avec} \quad \eta = \eta_0 e^{jn\varphi} .$$

On voit alors aisément que la fonction du temps (2) est légèrement modifiée par l'introduction d'un terme de phase φ en :

$$I(y, t) = \frac{\alpha}{\pi^{1/2}} e^{-\alpha^2(y-b \cos (\Omega t + \varphi))^2} .$$

On passe maintenant du problème à une variable (x ou y) au problème à deux dimensions, en remarquant que toutes les fonctions qui décrivent, en coordonnées cartésiennes, les caractéristiques des champs associés à chaque mode, sont en réalité des produits

de deux fonctions respectivement des variables x et y qui sont indépendantes.

Il résulte de cette séparation des variables que les intégrations doubles en x et y , ou les sommations sur les indices m et n , qui constituent les différentes étapes du calcul, s'expriment par des produits d'intégrales simples ou de sommes simples.

On trouve alors aisément les conditions que doivent satisfaire les amplitudes $A_{m,n}$ et les phases $\varphi_{m,n}$ pour qu'on puisse former un paquet gaussien permanent.

Ces conditions sont :

$$A_{m,n} = \frac{\xi_0^m \eta_0^n \cdot \exp(-\frac{1}{4}(\xi_0^2 + |\eta|^2))}{(2^{m+n} \cdot m! n!)^{1/2}} \quad (3)$$

et,

$$\varphi_{m,n} = n\varphi \quad \text{à l'instant} \quad t = 0 . \quad (4)$$

L'intensité lumineuse dans le plan transverse est alors donnée par :

$$I(x, y, t) = \frac{\alpha^2}{\pi} e^{-\alpha^2 \{ [x-a \cos \Omega t]^2 + [y-b \cos (\Omega t + \varphi)]^2 \}} . \quad (5)$$

L'apparente dissymétrie de cette relation provient du rôle privilégié que l'on a fait jouer aux modes d'indice m . On aurait pu écrire la relation de phase (4) sous la forme symétrique :

$$\varphi_{m,n} = m\varphi_x + n\varphi_y$$

en précisant ensuite que l'origine des phases est prise à φ_x , ce qui revient à poser :

$$\varphi_x = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_y = \varphi .$$

L'intensité décrite par la relation 5 est celle d'un spot gaussien décentré en $x = a$ et $y = b$, de même diamètre α que celui des modes qui le compose, et animé d'un mouvement de rotation autour de l'origine, à la fréquence angulaire Ω , égale à l'écart de pulsation entre les différents modes transverses (Fig. 3).

Si $\varphi = 0$ (Fig. 3a), les deux oscillations élémentaires suivant ox et oy en lesquelles on peut décomposer ce mouvement sont en phase et le spot décrit une droite de pente b/a .

Si $\varphi \neq 0$, la trajectoire est une ellipse, qui dans le cas particulier où $\varphi = \pm \pi/2$ a ses axes confondus avec ox et oy (3b) et qui se réduit à un cercle si $a = b$ (3c).

Remarque. — La distribution obtenue par cette superposition a le même caractère que celui du mode fondamental ($q, 0, 0$) de même qu'en mécanique ondulatoire, le paquet d'ondes obtenu en combinant de la même manière les ondes élémentaires, correspond à une incertitude minimum, comme pour la fonction propre de l'état fondamental. En ce sens, on peut dire qu'on a obtenu un « paquet de modes minimum ».

La forme de ce paquet de modes est invariable au cours du temps, ce qui est bien la propriété recherchée.

FIG. 3. — Mouvement périodique du spot gaussien pur décentré.

- a) $\phi = 0$ le spot décrit une droite.
 b) $\phi = \pi/2$, $b \neq a$ le spot décrit une ellipse d'axes ox et oy .
 c) $\phi = \pi/2$, $b = a$ le spot décrit un cercle.

1.2 ETUDE DU SPECTRE D'AMPLITUDE. — 1.2.1 *Contribution des différents modes.* — La relation (3) donne l'amplitude que chaque mode transverse d'indices (m, n) doit posséder pour que, la condition de phase (4) étant supposée satisfaite, la composition de tous ces modes conduise à la formation du « paquet de modes minimum » dont l'intensité est donnée par la relation (5). La fonction $A_{m,n}$ des indices m et n représente donc le spectre d'amplitude des modes transverses, la fonction $\varphi_{m,n}$ représentant le spectre de phase.

La contribution de chaque mode dépend des coordonnées a et b qui représentent l'excentrement du spot. Si $a = b = 0$ seul le coefficient $A_{0,0}$ est différent de zéro et est égal à l'unité, car le spot obtenu n'est autre que celui qui correspond au mode fondamental.

Si a et b sont différents de zéro, tous les modes transverses participent à la formation du paquet excentré, mais à des degrés divers. Pour trouver les modes qui contribuent le plus à cette formation, il suffit de chercher les maxima relatifs de $A_{m,n}$ en fonction de m et n , pour a et b fixés. Pour cela, on suppose m et n grands et, compte tenu de la forme du coefficient $A_{m,n}$, il est commode d'utiliser la formule de Stirling en négligeant les termes constants devant les termes en m et n :

$$\log A_{m,n} = m(\log \xi_0 - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \log m + \frac{1}{2}) + n(\log \eta_0 - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \log n + \frac{1}{2})$$

$$\frac{\partial \log A_{m,n}}{\partial m} = 0 \quad \text{si} \quad \log m = \log \frac{\xi_0^2}{2}.$$

Soit

$$m = \frac{\xi_0^2}{2}.$$

De même, la dérivée partielle en n est nulle pour $n = \eta_0^2/2$.

Les contributions maximales sont donc celles des modes dont les indices sont proches des valeurs :

$$(m)_{\max} = \frac{1}{2} \xi_0^2 = M \quad (6)$$

$$(n)_{\max} = \frac{1}{2} \eta_0^2 = N. \quad (7)$$

Plus le spot est excentré, plus l'importance des modes d'indice élevé augmente, alors que l'importance du mode fondamental diminue exponentiellement.

1.2.2 *Contribution des différentes multiplicités.* — Le carré du module de $A_{m,n}$ représente la probabilité de trouver le mode (m, n) dans le paquet de modes, ou encore le nombre de photons de pulsation $\omega_{m,n}$, c'est-à-dire l'énergie de ce mode :

$$|A_{m,n}|^2 = \frac{\xi_0^{2m} \cdot \eta_0^{2n} \exp(-\frac{1}{2}(\xi_0^2 + \eta_0^2))}{2^m \cdot 2^n m! n!}$$

soit en utilisant les valeurs M et N des maxima de $A_{m,n}$ ((6) et (7))

$$|A_{m,n}|^2 = \frac{1}{m!} M^m e^{-M} \cdot \frac{1}{n!} N^n e^{-N}$$

ce qui est le produit de deux distributions de Poisson des indices m et n .

L'énergie W_r contenue dans la multiplicité d'indice r est au facteur $h\omega_r/2\pi$ près :

$$W_r = \sum_{s=0}^r A_{s,r-s}^2$$

$$W_r = \frac{e^{-(\xi_0^2 + \eta_0^2)}}{2^r} \sum_{s=0}^r \frac{(\xi_0^2)^{2s} (\eta_0^2)^{2(r-s)}}{s! (r-s)!}.$$

En utilisant la relation

$$\frac{1}{s! (r-s)!} = \frac{C_r^s}{r!}$$

on reconnaît dans la sommation sur s précédente le développement à $1/r!$ près de la r -ième puissance du binôme $\{\xi_0^2 + \eta_0^2\}$.

D'où le résultat simple donnant l'énergie totale W_r de la multiplicité d'indice r :

$$W_r = \frac{\exp(-\frac{1}{2} \{ \xi_0^2 + \eta_0^2 \})}{r!} \left[\frac{\xi_0^2 + \eta_0^2}{2} \right]^r$$

soit encore

$$W_r = \frac{e^{-(M+N)} (M+N)^r}{r!} \quad (8)$$

ce qui est encore une distribution de Poisson, mais de l'indice total $r = m + n$, et dont le maximum est obtenu pour r voisin de $M + N$; cette distribution est représentée sur la figure 4 pour $M + N = 10$.

FIG. 4. — Distribution de Poisson de l'énergie contenue dans les multiplicités d'indice r (cas particulier $M + N = 10$) (formule 8).

1.2.3 Spectre dans une multiplicité. — La répartition de Poisson à laquelle doivent satisfaire les énergies $W(r)$ n'est qu'une condition nécessaire à l'obtention d'un paquet de modes gaussien oscillant, car il faut s'assurer en plus, qu'au sein d'une multiplicité d'indice r , la distribution des amplitudes des $r + 1$ modes qui la composent satisfait à la relation (3).

Pour r donné, le carré de l'amplitude du mode d'indices $s, r - s$, peut se mettre sous la forme :

$$|A_{s,r-s}|^2 = \frac{M^s}{s!} e^{-M} \frac{N^{r-s}}{(r-s)!} e^{-N}$$

s variant de 0 à r .

Plaçons-nous dans le cas particulier d'une structure où le résonateur et le milieu amplificateur sont de révolution, ce qui sera presque toujours le cas dans la pratique. Par raison de symétrie, on prendra alors $a = b$, soit $\xi_0 = \eta_0$ et $M = N = P$.

La distribution d'énergie des modes transverses pour un indice r donné doit donc satisfaire la relation suivante :

$$|A_{s,r-s}|^2 = C_r^s \frac{P^r e^{-2P}}{r!} \quad (9)$$

ce qui représente une distribution binomiale par rapport à l'indice s .

Trois exemples de telles distributions sont représentés sur la figure 5 pour $r = 3, r = 6$ et $r = 7$.

La courbe de la figure 4 et celles de la figure 5 peuvent être considérées comme des sections de la surface $W(s, r - s)$ respectivement par des plans $s = \text{Cte}$ et $r = \text{Cte}$.

FIG. 5. — Distribution binomiale au sein d'une même multiplicité d'indice r pris comme paramètre (formule 9).

1.3 SOMMATION DANS UNE MULTIPLICITÉ — Lorsque les amplitudes A_{mn} des modes transverses satisfont à la relation (3) et les phases φ_{mn} à la relation (4), on a calculé dans le paragraphe précédent l'énergie W_r contenue dans une multiplicité d'indice r (8). On cherche maintenant l'expression analytique du champ électrique total de cette multiplicité. Pour trouver cette fonction, il faut calculer, pour r donné, l'expression :

$$R_r = \sum_{s=0}^r E_{s,r-s}$$

soit explicitement :

$$R(\xi, \eta) = \sum_{s=0}^r (A_{s,r-s} N_{s,r-s}) H_s(\xi) \times \exp(-\frac{1}{2} \xi^2) H_{r-s}(\eta) \exp(-\frac{1}{2} \eta^2).$$

Pour effectuer ce calcul, on se place encore dans la situation correspondant à une structure de révolution pour laquelle $\xi_0^2 = \eta_0^2 = \zeta_0^2$ et où le déphasage φ entre les modes en x et en y est égal à $\pi/2$ (mouvement circulaire du spot). Les coefficients du développement de R s'expriment alors par :

$$A_{s,r-s} \cdot N_{s,r-s} = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta_0^2\right) \times \frac{(\zeta_0)^r}{2^r} \cdot \frac{1}{s! (r-s)!} \exp\left(j(r-s) \frac{\pi}{2}\right).$$

La forme de ce terme est telle que le développement du polynôme en ξ et η fait apparaître tous les termes

du développement de $(\xi + i\eta)^r$ et pas d'autres. Si l'on pose $\xi = \alpha\rho \cos \psi$ et $\eta = \alpha\rho \sin \psi$, la sommation de toutes les fonctions propres prend l'expression :

$$R_r(\rho, \psi) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} (\xi_0)^r \cdot \frac{\exp(-\frac{1}{2} \xi_0^2)}{r!} \cdot \rho^r \times \\ \times \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} \rho^2\right) \{e^{ir\psi}\}. \quad (10)$$

Le champ électrique correspondant s'obtient en ajoutant le terme complexe conjugué. L'intensité lumineuse $I_r(\rho, \psi)$ est de la forme :

$$I_r(\rho) = K\rho^{2r} e^{-\alpha^2 \rho^2} \cdot \cos^2 r\psi. \quad (11)$$

Elle est représentée sur la figure 6 pour $r = 3$. Cette figure serait obtenue en sélectionnant, parmi tous

FIG. 6. — Intensité lumineuse théorique dans un plan de section droite pour la multiplicité d'indice 3.

les modes transverses verrouillés conformément à ce qui précède, ceux qui oscillent à la pulsation $\omega q + r\Omega$, par exemple au moyen d'un étalon Fabry-Pérot placé en transmission et sélectionnant cette unique pulsation.

L'intensité décrite par (11) présente une périodicité angulaire et les lobes de la rosace de la figure 6 ont une largeur qui est inversement proportionnelle à l'indice r , ou encore au nombre de modes participant au verrouillage.

Lorsque l'on superpose toutes ces distributions $R_r(\rho, \psi)$, en faisant varier l'indice total r de 0 à l'infini, les champs interfèrent destructivement les uns avec les autres pour former un champ nul, sauf au voisinage immédiat de l'axe $\psi = 0$ où ces distributions sont en

phase. On le vérifie en effectuant la sommation de R_r sur toutes les valeurs de r :

$$\sum_r R_r(\rho, \psi) = \\ = \sum_r \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{(\exp(-\frac{1}{2} \xi_0^2)) (\exp(-\frac{1}{2} \xi^2)) \xi_0^r \xi^r e^{ir\psi}}{r!},$$

soit encore

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \left(\exp\left(-\frac{1}{2} \xi_0^2 - \frac{1}{2} \xi^2\right) \right) \sum_r \frac{(e^{\xi \xi_0} e^{j\psi})^r}{r!}$$

où l'on reconnaît le développement en série de $e^{\xi \xi_0} e^{j\psi}$. D'où

$$\sum_r R_r(\rho, \psi) = \\ = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \xi_0^2 + \xi \xi_0\right) \cdot \exp\left(j\psi - \frac{1}{2} \xi^2\right).$$

Le carré du module de cette expression donne l'intensité lumineuse du rayonnement correspondant :

$$I(\rho, \psi) = \frac{\alpha^2}{\pi} e^{-\{\xi^2 - 2\xi\xi_0 \cos \psi + \xi_0^2\}}$$

soit, rigoureusement sur l'axe des x :

$$I(\rho, 0) = \frac{\alpha^2}{\pi} e^{-(\xi - \xi_0)^2}$$

ce qui est bien la fonction gaussienne décentrée en $\xi = \xi_0 = \xi_0$ trouvée précédemment (formule (5) avec $y = b = t = 0$). Le long d'un cercle de rayon ξ_0 passant par le centre du paquet gaussien, l'intensité lumineuse varie comme :

$$I(\xi_0, \psi) = \frac{\alpha^2}{\pi} e^{-2\xi_0^2(1 - \cos \psi)}.$$

Pour $\psi = \pi/2$, l'intensité n'est plus que $\alpha^2/\pi e^{-2\xi_0^2}$ et pour $\psi = \pi$ cette intensité est encore plus faible : $\alpha^2/\pi e^{-4\xi_0^2}$. Cette réduction de l'intensité lumineuse lorsqu'on s'écarte de $\psi = 0$ est d'autant plus rapide que ξ_0^2 est grand, c'est-à-dire que le paquet de modes cohérents est excentré. Si ξ_0 était nul, on retrouverait l'invariance en ψ propre au mode gaussien fondamental.

Remarque. — Le problème de la sommation des modes transverses dans une même multiplicité correspond très exactement à celui de la sommation des modes fondamentaux dans le problème du verrouillage longitudinal, les variables espace et temps étant permutées. En effet, dans le premier problème, les modes que l'on superpose ont tous même fréquence, mais ont des distributions spatiales différentes ; le résultat de cette superposition est une rosace permanente mais à structure spatiale périodique, la largeur des lobes variant comme l'inverse du nombre de modes verrouillés. Inversement, dans le second problème,

les modes que l'on superpose ont tous une même distribution spatiale, mais ont des fréquences différentes ; le résultat de cette superposition est une figure stable dans un plan de section droite mais à structure temporelle périodique, la durée des impulsions variant comme l'inverse du nombre de modes verrouillés.

1.4 SYMÉTRIE D'UNE MULTIPLICITÉ. — 1.4.1 *Intérêt de cette notion.* — Si l'on désigne par $C(\rho, \psi, z, t)$ un terme de couplage entre les multiplicités d'indices r et r' décrites par les fonctions R_r et $R_{r'}$, l'étude des possibilités réelles de couplage entre ces deux multiplicités se ramène à l'examen de termes de la forme :

$$K = \int_v \overline{R_r} \cdot C \cdot R_{r'} dv$$

où l'intégration est prise sur toutes les variables ρ, ψ, z et t .

De façon plus explicite, l'intégrale K s'écrit :

$$K = \int \overline{R_r(\rho, \psi)} \exp\left(j(\omega_q + r\Omega)\left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \times \\ \times C(\rho, \psi, z, t) R_{r'}(\rho, \psi) \\ \times \exp\left(j(\omega_q + r'\Omega)\left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \rho d\rho d\psi dz dt. \quad (12)$$

Comme les variables ρ et ψ d'une part et z et t d'autre part sont indépendantes et se séparent, l'intégrale précédente se ramène à un produit de trois intégrales, la première portant sur les variables ρ et ψ , l'autre sur z et la dernière sur la variable temporelle. On étudiera dans le chapitre suivant les conditions nécessaires pour que ces intégrales ne soient pas nulles. On examine ici la première, celle qui porte sur les variables transversales et qui traduit la manière dont la fonction spatiale $C(\rho, \psi)$ transforme la fonction $R_r(\rho, \psi)$ pour venir « recouvrir » la fonction $R_{r'}(\rho, \psi)$.

Une des trois conditions nécessaires de couplage entre les multiplicités r et r' est donc la non-nullité de l'intégrale :

$$\Gamma = \int_{\sigma} \overline{R_r(\rho, \psi)} \cdot C(\rho, \psi) \cdot R_{r'}(\rho, \psi) d\sigma \quad (13)$$

étendue à toute la section droite de la structure.

L'esprit avec lequel on a considéré les fonctions décrivant les modes de résonance d'un laser comme formellement analogues à celles qui décrivent des états propres en mécanique quantique, prédispose à rapprocher l'expression de Γ de celle du moment de transition $\mathcal{M}$ que l'on rencontre lorsqu'on étudie les règles de sélection pour les transitions entre deux états ψ_i et ψ_j :

$$\mathcal{M} = \int_{\tau} \overline{\psi_i} M \psi_j d\tau \quad (13')$$

où M est, par exemple, le moment dipolaire électrique.

Or, on sait que dans ces problèmes d'étude des possibilités de transition entre deux états ψ_i et ψ_j il est judicieux d'utiliser des considérations de symétrie qui dispensent en général d'avoir à calculer explicitement l'intégrale (13'). C'est ce qu'on propose de faire ici par analogie pour l'étude du couplage des modes d'un laser.

1.4.2 *Symétrie de multiplicités.* — Comme en théorie des groupes de symétrie en vue de son application à la spectroscopie moléculaire, on étudie tout d'abord la symétrie des fonctions $R_r(\rho, \psi)$.

Considérons un résonateur formé par deux miroirs sphériques concaves, non identiques, placés de part et d'autre d'un milieu amplificateur. On suppose que l'ensemble a un axe de révolution oz , autour duquel toute rotation d'angle θ laisse la structure inchangée. On note cette opération $C_{\infty}(\theta)$. Tout plan passant par oz est un plan de symétrie. Cette opération est notée σ_v . Ces deux opérations, jointes à l'identité notée I , montrent que la structure a une symétrie la rattachant au groupe $C_{\infty v}$ [7]. La table des caractères de ce groupe de symétrie est donnée par le tableau I. Ces caractères indiquent comment peuvent se transformer des fonctions dans les opérations du groupe.

TABLEAU I

Table de caractères du groupe $C_{\infty v}$

I	$2 C_{\infty}$	σ_v	Type	R_r
1	1	1	Σ^+	R_0
1	1	-1	Σ^-	R_0
2	$2 \cos \theta$	0	Π	R_1
2	$2 \cos 2 \theta$	0	Δ	R_2
2	$2 \cos 3 \theta$	0	Φ	R_3
2	$2 \cos 4 \theta$	0	Γ	R_4

L'avant-dernière colonne indique les notations généralement utilisées en spectroscopie pour désigner les différents types possibles de symétrie.

Dans la dernière colonne, on a indiqué à quel type se rattachent les fonctions $R_r(\rho, \psi)$ décrivant une multiplicité d'indice r .

Ce rattachement s'effectue en remarquant qu'une rotation d'un angle θ des axes de coordonnées transforme la fonction $R_r(\rho, \psi)$ en $e^{jr\theta} R_r(\rho, \psi)$, et $\overline{R_r(\rho, \psi)}$ en $e^{-jr\theta} \overline{R_r(\rho, \psi)}$. La partie réelle de $R_r(\rho, \psi)$ est donc transformée en $2 \cos r\theta$, ce qui est l'un des caractères de la deuxième colonne du tableau.

Considérons maintenant un résonateur dont les deux miroirs sont identiques, ce qui est un cas particulier du précédent. Il est aisé de voir que cette structure appartient au groupe de symétrie $D_{\infty h}$, dont le groupe précédent $C_{\infty v}$ est un sous-groupe. Il existe deux fois plus de caractères que dans le groupe précé-

TABLEAU II
Table de caractères du groupe $D_{\infty h}$

I	$2 C_{\infty}$	$2 S_{\infty}$	σ_v	C_2	σ_h	i	Type	R_r
—	—	—	—	—	—	—	—	—
1	1	1	1	1	1	1	Σ_g^+	R_0
1	1	— 1	1	— 1	— 1	— 1	Σ^+	
1	1	1	— 1	— 1	1	1	Σ_g^-	
1	1	— 1	— 1	1	— 1	— 1	Σ_u^-	
2	$2 \cos \theta$	$- 2 \cos \theta$	0	0	— 2	2	Π_g	
2	$2 \cos \theta$	$2 \cos \theta$	0	0	2	— 2	Π_u	R_1
2	$2 \cos 2 \theta$	$2 \cos 2 \theta$	0	0	2	2	Δ_g	R_2
2	$2 \cos 2 \theta$	$- 2 \cos 2 \theta$	0	0	— 2	— 2	Δ_u	
2	$2 \cos 3 \theta$	$- 2 \cos 3 \theta$	0	0	— 2	2	Φ_g	
2	$2 \cos 3 \theta$	$2 \cos 3 \theta$	0	0	2	— 2	Φ_u	R_3
2	$2 \cos 4 \theta$	$2 \cos 4 \theta$	0	0	2	2	Γ_g	R_4

dent et l'on doit distinguer maintenant la parité des fonctions vis-à-vis de la symétrie i par rapport au centre de symétrie.

La table des caractères et les types de symétries du groupe $D_{\infty h}$ sont donnés dans le tableau II. Pour l'inversion i , + 1 signifie pair et se note g , et — 1 signifie impair et se note u .

On a indiqué également à quel type de symétrie se rattachent les fonctions $R_r(\rho, \psi)$ pour les différentes valeurs de r . L'appartenance aux types Σ, Π, Δ etc... s'établit comme précédemment en envisageant une rotation d'un angle θ autour de l'axe de révolution. La parité se détermine ensuite à l'examen du comportement de la fonction $R_r(\rho, \psi)$ lorsqu'on effectue l'opération de symétrie par rapport au centre de symétrie. La dépendance en ρ de la fonction $R_r(\rho, \psi)$ s'exprimant par le terme :

$$\rho^r \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} \rho^2\right)$$

on voit immédiatement en changeant ρ en $-\rho$ que la parité de R_r est la même que celle de r , car l'exponentielle est invariante dans cette transformation. On en déduit ainsi les types complets de symétrie de la fonction R_r .

A titre d'exemple, la fonction $R_3(\rho, \psi)$ dont le carré du module a été représenté sur la figure 7, est une fonction de type Φ_u . Le caractère impair de cette fonction provient du fait qu'elle est formée à partir de fonctions impaires $U_{m,n} = U_m \cdot U_n$ où les indices m et n sont toujours de parités différentes (0-3, 1-2, 2-1, 3-0). Chaque fonction $U_{m,n}$ a donc le caractère $g.u$ ou $u.g$ soit, dans tous les cas, un caractère impair.

FIG. 7. — Intensité lumineuse dans un plan de section droite pour deux modes transverses appartenant à une même multiplicité d'indice 6 : mode (6,0) en haut ; mode (3,3) en bas.

Dans une opération de rotation, chaque fonction propre $U_{m,n}$ se transforme en une combinaison linéaire des fonctions propres qui appartiennent à la même multiplicité, de sorte qu'il est difficile de définir la symétrie des fonctions $U_{m,n}$. L'intérêt d'avoir exprimé analytiquement la somme de ces fonctions dans une

TABLEAU III
Symétrie des produits

	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_{r-4}	R_{r-3}	R_{r-2}	R_{r-1}	R_r
R_0	Σ_g^+									
R_1	Π_u	Σ_g^+								
R_2	Δ_g	Π_u	Σ_g^+							
R_3	Φ_u	Δ_g	Π_u	Σ_g^+						
R_4	Γ_g	Φ_u	Δ_g	Π_u	Σ_g^+					
R_{r-4}						Σ_g^+				
R_{r-3}						Π_u	Σ_g^+			
R_{r-2}						Δ_g	Π_u	Σ_g^+		
R_{r-1}						Φ_u	Δ_g	Π_u	Σ_g^+	
R_r						Γ_g	Φ_u	Δ_g	Π_u	Σ_g^+

même multiplicité (§ 1.3, formule (10)) apparaît clairement ici, car ces fonctions globales R_r se rattachent, elles, de façon simple à un type de symétrie.

1.4.3 *Symétrie du produit de deux multiplicités.* — A partir du tableau II et des caractères qu'il contient, on obtient facilement le type de symétrie d'un produit de deux fonctions R en effectuant le produit des caractères.

Considérons par exemple les fonctions R_2 et R_1 . Le produit des caractères relatifs aux opérations C_∞ et S_∞ est de la forme $\cos \theta \cdot \cos 2\theta$ qui fait apparaître des termes en $\cos \theta$ et $\cos 3\theta$ correspondant à des symétries de type Π et Φ . Les fonctions R_3 et R_2 font apparaître de la même manière une fonction de type $\Pi + \chi$, etc... Le type Π est commun à tous ces produits. De même, les produits de deux en deux font toujours apparaître une fonction de type Δ , ceux de trois en trois, le type Φ , etc... Le caractère pair ou impair se détermine aisément de sorte qu'on peut dresser une table de multiplication à deux entrées donnant, dans chaque case, le type de symétrie de la fonction produit (Tableau III). Ce tableau est naturellement symétrique, et la diagonale principale, qui correspond au carré d'une fonction, contient le type totalement symétrique Σ_g^+ .

Remarque. — On constate que le produit de deux fonctions appartenant au sous-groupe des fonctions R appartient à ce sous-groupe (exemple $R_3 \cdot R_1 = R_2$).

2. Possibilités d'obtention du verrouillage transverse. — Dans le chapitre précédent, on a établi quelques relations théoriques nécessaires pour que le verrouillage des modes transverses conduise à un spot gaussien pur, décentré et animé d'un mouvement de rotation. Dans ce chapitre, on examine les consé-

quences pratiques de ces relations et les possibilités de les satisfaire.

2.1 SPECTRE D'ÉNERGIE. — Le spectre théorique de l'énergie des multiplicités d'indice r est donné par la relation (8) dont les variations sont représentées par la courbe de la figure 4. Dans quelle mesure un laser peut-il conduire à une telle distribution ?

Pour r grand, la distribution de Poisson (8) tend vers une distribution gaussienne, qui peut être assimilée à la courbe de gain du milieu amplificateur d'un laser à gaz (par exemple à argon ionisé) dont la raie utilisée est étalée par effet Doppler (*). Le choix $M + N = 10$ dans le cas de la figure 4 entraîne qu'au moins 20 modes transverses doivent être présents dans le profil obtenu. Si l'on adopte comme largeur de raie à la base, la valeur 5 000 MHz, l'écartement entre modes transverses doit être de 250 MHz. L'écartement entre modes longitudinaux doit être d'au moins 5 000 MHz, ce qui correspond à une cavité de longueur au plus égale à $L = 3$ cm, ce qui est peu, mais envisageable. L'écartement entre modes transverses de 250 MHz sera obtenu par exemple pour un couple de miroirs de 10 m de rayon de courbure écartés de 3 cm.

2.2 RÉPARTITION AU SEIN D'UNE MÊME MULTIPLICITÉ. — Si le spectre théorique s'accorde assez bien avec les données expérimentales, et si un laser peut être conçu pour que les multiplicités de modes transverses aient les énergies requises, cette condition n'est pas suffisante, car il faut en plus, qu'à l'intérieur d'une multiplicité d'indice r , les différents modes qui la composent

(*) Pour les ordres de grandeur des largeurs de raies dans le laser à argon ionisé, voir par exemple [8].

aient des énergies qui se répartissent suivant la distribution binomiale (9) représentée par les courbes de la figure 5.

Pour que cette distribution soit respectée, il faut que les modes transverses de fortes ou faibles valeurs de s soient défavorisés par rapport à ceux dont l'indice s a une valeur moyenne. Par exemple, pour $r = 6$ (Fig. 5) les modes d'indices (0,6) et (6,0) doivent être défavorisés par rapport au mode (3,3). Cette sélection transverse est possible car la répartition spatiale de l'intensité des modes extrêmes (0,6 et 6,0) est très différente de celle du mode d'indices moyens (3,3), comme le montre la figure 7. Sur cette figure, on a représenté les variations de l'intensité lumineuse des modes (6,0) et (3,3) qui appartiennent à la même multiplicité d'indice $r = 6$. Le mode (6,0) est très allongé sur l'axe des x (le mode 0,6 le serait sur l'axe des y) alors que le mode (3,3) est « ramassé » autour du centre.

2.2.1 Influence d'un gain spatialement inhomogène. — On pourrait penser discriminer ces deux types de modes en utilisant un milieu amplificateur inhomogène tel que le gain soit plus fort au centre du dispositif (là où se trouvent ramassés les modes d'indices moyens) qu'à la périphérie (là où l'on ne trouve plus que des modes extrêmes). Considérons par exemple un milieu amplificateur dont le gain est une fonction décroissante de la distance au centre, et pour simplifier les calculs prenons comme expression de gain :

$$G = G_0 e^{-\beta^2(x^2+y^2)} \quad (14)$$

où le coefficient β traduit l'étalement de la gaussienne. Cette fonction ne représente pas une situation invraisemblable, car dans la pratique des lasers à gaz par exemple, l'excitation est souvent plus intense dans l'axe de la décharge qu'au voisinage des parois. On peut comparer l'effet de ce gain sur les différents modes transverses en calculant l'intégrale :

$$J_{m,n}^\infty = \int \int_{-\infty}^{\infty} U_{m,n}^2 \cdot G_0 e^{-\beta^2(x^2+y^2)} dx dy$$

soit finalement un produit de deux intégrales simples de la forme :

$$I_m^\infty = N_m^2 \int_{-\infty}^{\infty} H_m^2(\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2} e^{-\beta^2 x^2} dx$$

soit

$$I_m^\infty = \frac{N_m^2}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} H_m^2(\xi) e^{-a^2 \xi^2} d\xi$$

avec

$$a^2 = 1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

Cette intégrale se calcule en utilisant la fonction génératrice des polynômes d'Hermite :

$$e^{-t^2+2t\xi} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(\xi)}{m!}. \quad (15)$$

On calcule alors l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t^2+4t\xi} \cdot e^{-a^2 \xi^2} d\xi$$

dont la valeur est :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(s^2\left(\frac{4}{a^2} - 2\right)\right),$$

et dont le développement en série permet de trouver le coefficient de t^{2m} . On identifie ce coefficient avec celui apparaissant dans la sommation (15) sur m et on trouve :

$$I_m^\infty = \frac{N_m^2}{\alpha} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} m! \left(\frac{4}{a^2} - 2\right)^m.$$

La fonction $J_{m,n}^\infty$ des deux indices m et n est donc égale à :

$$J_{m,n}^\infty = I_m^\infty \cdot I_n^\infty = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\right)^{m+n}.$$

Cette fonction ne dépend que de la somme des indices m et n et non de leurs valeurs particulières. On ne peut donc pas discriminer les modes transverses avec un milieu amplificateur dont le gain varie comme la fonction G de (14).

Ce résultat, à première vue surprenant, tient au fait qu'on a supposé le milieu infiniment étendu dans le plan de section droite, ce qui entraîne que les bornes d'intégration de $I_{m,n}^\infty$ sont infinies. Si les modes « ramassés » sont effectivement favorisés autour du centre par une distribution du gain telle que celle qui est décrite par (14), ou par tout autre équivalente, les modes à grande étendue compensent cette situation dans les zones éloignées du centre, là où les modes ramassés n'ont plus qu'une intensité faible ; l'action du milieu amplificateur est alors globalement la même sur tous les modes.

2.2.2 Influence d'un diaphragme. — La discrimination ne peut s'effectuer qu'en diaphragmant convenablement le résonateur, comme on peut s'en rendre compte qualitativement en examinant à nouveau la figure 7. Sur cette figure, on a tracé un cercle de rayon d , qui peut simuler la position de la paroi interne d'un tube à décharge (dans le cas d'un milieu amplificateur gazeux) ou la périphérie d'un barreau actif (milieu solide ou liquide). L'amplification du rayonnement stimulé ne peut s'effectuer qu'à l'intérieur de ce cercle et les pertes subies par un mode sont fonction de sa présence à l'extérieur. On voit immédiatement que l'existence de cette discontinuité entraîne une discrimination entre les différents modes transverses : les modes extrêmes (par exemple le mode 0,6), subissent des pertes importantes et l'étendue spatiale dans laquelle s'effectue l'amplification est réduite ; par contre pour un mode d'indices moyens tel que le mode (3,3), les pertes sont plus faibles et ce mode utilise mieux le milieu amplificateur.

L'expression mathématique de cette discrimination serait obtenue en comparant, pour différents couples de valeurs de m et n , le résultat de l'intégration :

$$J_{m,n}^d = \iint_{-d}^d U_{m,n}^2 G(x, y) dx dy. \quad (16)$$

En supposant, pour simplifier, que le gain est uniforme à l'intérieur du cercle de rayon d , l'expression de $J_{m,n}^d$ est :

$$J_{m,n}^d = I_m^d \cdot I_n^d$$

avec

$$I_m^d = \frac{N_m^2}{\alpha} \int_{-d}^d H_m^2(\xi) e^{-\xi^2} d\xi \quad (17)$$

qui ne peut être calculé que numériquement. Néanmoins, il est clair que si d est suffisamment grand $J_{m,n}^d$ sera d'autant plus proche de l'unité que le mode (m, n) sera mieux circonscrit par le cercle de rayon d , car l'intégrale (16) n'est autre que celle (aux bornes près) qui permet de calculer la norme. Il serait d'ailleurs illusoire de calculer rigoureusement l'intégrale (16), car l'expression de l'intensité lumineuse d'un mode d'oscillation d'un laser en fonction des pertes subies par ce mode sur les parois est très complexe et ne se réduit pas au simple calcul de la surface du mode comprise à l'extérieur du tube amplificateur.

On peut donc conclure que la courbe décrivant la distribution de l'intensité des modes transverses appartenant à une même multiplicité et pour un laser convenablement diaphragmé, peut prendre l'allure d'une courbe en cloche qui se rapproche de celle imposée par la théorie.

Pour un diaphragme donné, les modes d'indice r faible ne seront pratiquement pas diaphragmés et la discrimination sera faible ; pour r grand, la discrimination est plus grande car les modes extrêmes ont des indices élevés et la sélectivité augmente ; ces propriétés sont en accord avec celles que requiert l'obtention du verrouillage transverse et qui sont illustrées sur la figure 5, où l'on voit bien que les variations d'énergie sont d'autant plus rapides que l'indice r est grand.

2.3 FORMES DU COUPLAGE. — En supposant que les deux distributions spectrales soient respectées, il convient encore que la fonction de couplage C satisfasse à certaines conditions qu'on étudie maintenant.

Les conditions de couplage entre deux multiplicités d'indices r et r' s'expriment par la non-nullité de l'intégrale K (12) du paragraphe 1.4.1. L'intégrale K se sépare en un produit de trois intégrales $K = \Gamma \cdot \psi \cdot A$, avec

$$\Gamma = \int_{\sigma} \overline{R}_r(\rho, \psi) C(\rho, \psi) R_{r'}(\rho, \psi) d\sigma \quad (13)$$

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_q + r\Omega)t} C(t) e^{j(\omega_q + r'\Omega)t} dt \quad (18)$$

$$A = \int_{-L/2}^{L/2} \exp\left(+j(\omega_q + r\Omega)\frac{z}{c}\right) \times \\ \times C(z) \exp\left(-j(\omega_q + r'\Omega)\frac{z}{c}\right) dz. \quad (19)$$

Les deux dernières intégrales sont différentes de zéro pour des conditions simples à déterminer :

2.3.1 Conditions sur $C(t)$. — L'intégrale ψ se met sous la forme

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(r'-r)\Omega t} C(t) dt$$

qui n'est différente de zéro que si l'intégrande est symétrique, ce qui implique que $C(t)$ soit de la forme :

$$e^{-j(r'-r)\Omega t} \cdot C'(t),$$

la fonction $C'(t)$ étant symétrique en t , par exemple constante. C'est la condition bien connue qui permet, à partir de la multiplicité r , d'atteindre la multiplicité r' en choisissant comme pulsation de modulation $(r' - r)\Omega$ qui est l'intervalle de pulsation entre les multiplicités r et r' . On désigne, dans la suite, par ordre de couplage l'écart $r' - r$.

2.3.2 Condition sur $C(z)$. — Cette condition traduit le recouvrement des fonctions le long de l'axe du résonateur. L'intégrale (19) s'écrit aussi :

$$A = \int_{-L/2}^{L/2} \exp\left(j(r - r')\frac{\Omega z}{c}\right) C(z) dz.$$

Le couplage entre modes est réalisé commodément par des dispositifs localisés dans le résonateur, correspondant à une fonction C qui est indépendante de la variable z . On peut donc étudier l'intégrale A' déduite de A en faisant $C(z) = 1$ et dont la valeur est :

$$A' = \frac{2c}{(r' - r)\Omega} \sin\left\{\frac{(r' - r)\Omega L}{2c}\right\}. \quad (20)$$

Cette fonction de $(r' - r)$ s'annule périodiquement de sorte que le couplage est impossible entre multiplicités telles que :

$$\frac{(r' - r)\Omega L}{2c} = k\pi \quad (k \text{ entier}).$$

Considérons par exemple un résonateur confocal pour lequel $L = R$ et $\Omega = c\pi/2L$. La condition d'annulation précédente s'écrit aisément :

$$r' - r = 4k.$$

Dans ce cas donc, tous les couplages sont possibles sauf ceux impliquant des multiplicités d'indices qui diffèrent de 4 unités.

Pour un résonateur dont la courbure R des miroirs est très supérieure à la longueur L , comme celui qui

est envisagé dans le paragraphe 2.1 ($L = 3$ cm, $R = 10$ m), on a pour Ω une expression de la forme :

$$\Omega = \frac{c\pi}{L 2 N}$$

où $N \gg 1$, non nécessairement entier. Dans ce cas, le couplage est exclu entre multiplicités dont les indices diffèrent de :

$$r' - r = 4 Nk \gg 4 k$$

ce qui suppose N entier.

Si l'on couple chaque mode avec ses voisins immédiats ($r' - r = 1$) A' n'est jamais nul quel que soit le résonateur. Cette condition est donc peu restrictive dans la pratique.

2.3.3 Règles de symétrie pour $C(\rho, \psi)$. — Pour que l'intégrale définie Γ (13) soit différente de zéro, il faut que la fonction sous le signe somme soit entièrement symétrique. Comme cette fonction est un produit, il suffit d'effectuer le produit des symétries des trois fonctions R_r , C et $R_{r'}$. Or, le tableau III du paragraphe 1.4.3 donne la symétrie du produit $R_r \cdot R_{r'}$. La condition de non-nullité de Γ est donc que le coefficient de couplage $C(\rho, \psi)$ ait même symétrie que $R_r \cdot R_{r'}$.

Le tableau IV résume les différents cas possibles en fonction de l'ordre de couplage. On a également indiqué dans l'avant-dernière colonne de ce tableau des exemples de fonctions $C(\rho, \psi)$ qui conviennent. La fonction du temps $C(t)$ dépend de l'ordre de couplage (2.3.1).

TABLEAU IV

Ordre du couplage	Symétrie de C	Exemple de fonction $C(\rho, \psi)$	Fonction $C(t)$
1	Π_u	$\rho \cdot e^{j\psi}$	$e^{-j\Omega t}$
2	Δ_g	$\rho^2 e^{2j\psi}$	$e^{-j2\Omega t}$
3	Φ_u	$\rho^3 e^{3j\psi}$	$e^{-j3\Omega t}$
p	χ_{pu}	$\rho^p e^{pj\psi}$	$e^{-jp\Omega t}$

Examinons quelques conséquences de ce résultat, en particulier pour les couplages d'ordres les plus bas.

2.3.3.1 COUPLAGE D'ORDRE 1. — La fonction de couplage $C(\rho, \psi)$ est de la forme $\rho e^{j\psi}$ qui s'écrit en coordonnées cartésiennes $x + jy$. Il est intéressant d'expliciter l'intégrale Γ en fonction des variables x et y pour faire apparaître les détails du couplage entre les différents modes qui constituent les multiplicités r et $r' = r \pm 1$.

$$\Gamma_{(x,y)} = \int_{\sigma} \left[\sum_s A_{s,r-s} U_{s,r-s}(x, y) \right] \cdot (x + jy) \times \\ \times \left[\sum_{s'} A_{s',r'-s'} U_{s',r'-s'}(x, y) \right] d\sigma.$$

Le calcul de cette intégrale fait apparaître une somme de termes de la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_s(x) \cdot U_{s'}(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_{r-s}(y) U_{r'-s'}(y) dy + \\ + j \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_s(x) U_{s'}(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}_{r-s}(y) U_{r'-s'}(y) dy.$$

Etant donné les relations connues ([6] p. 65)

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_n(x) \cdot U_m(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 & \text{si } m = n+1 \\ \frac{1}{\alpha} \left(\frac{n}{2} \right)^{1/2} & \text{si } m = n-1 \\ 0 & \text{si } m \neq n \pm 1 \end{cases}$$

on voit que la partie réelle de $\Gamma(x, y)$ n'est différente de zéro que si $s = s' \pm 1$. Le couplage s'effectue alors suivant la coordonnée x . La partie imaginaire n'est différente de zéro que si $s' = s$ et le couplage a lieu suivant y .

On a schématisé ces différents cas de couplage sur la figure 8 où les modes d'indices (m, n) sont représentés

FIG. 8. — Lignes de couplage entre modes pour un verrouillage d'ordre 1.

par des points dont les coordonnées, dans un système d'axes portant les valeurs s et $r - s$, sont m et n . Les lignes de couplage en tirets relient les modes pour lesquels $\Delta m = \pm 1$ et $\Delta n = 0$ (couplage en x) et pour lesquels $\Delta n = \pm 1$, $\Delta m = 0$ (couplage en y). Les modes situés sur une droite de pente -1 appartiennent à une même multiplicité d'ordre r donnée sur un axe auxiliaire.

2.3.3.2 COUPLAGE D'ORDRE 2. — La fonction spatiale de couplage peut être choisie de la forme $\rho^2 e^{2j\psi}$ (tableau IV) et les modes sont couplés de deux en deux.

Le terme temporel serait de la forme $e^{-j2\Omega t}$.

Le développement en coordonnées cartésiennes de la fonction Γ conduit à des termes de la forme :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_m(x) x^2 U_{m'}(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_n(y) U_{n'}(y) dy + \\ & + 2j \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_m(x) x U_{m'}(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_n(y) y U_{n'}(y) dy \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_m(x) U_{m'}(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_n(y) y^2 U_{n'}(y) dy \end{aligned}$$

ce qui conduit aux trois possibilités de couplage :

$$\begin{aligned} \Delta m &= \pm 2 \text{ et } \Delta n = 0 \\ \Delta m &= \pm 1 \text{ et } \Delta n = \pm 1 \\ \Delta m &= 0 \text{ et } \Delta n = \pm 2 \end{aligned}$$

qui sont symboliquement représentées sur la figure 9, par les trois familles de droites en traits discontinus

FIG. 9. — Lignes de couplage entre modes pour un verrouillage d'ordre 2. Les lignes ne relient que des modes de même symbole.

qui relient les modes de deux en deux. Les modes d'une multiplicité paire sont représentés symboliquement par un point, ceux d'une multiplicité impaire par une croix. Les lignes de couplage ne relient que des modes de même symbole.

2.3.3.3 COUPLAGE MULTIPLE D'ORDRE p . — On généraliserait aisément ces résultats à un couplage de p en p , le terme temporel serait de la forme $e^{-jp\Omega t}$, le

terme spatial $\rho^p e^{jp\psi}$, ce qui conduirait aux $p + 1$ possibilités de couplage :

$$\begin{aligned} |\Delta m| &= p \text{ et } \Delta n = 0 \\ |\Delta m| &= p - 1 \text{ et } \Delta n = 1 \\ |\Delta m| &= 0 \text{ et } \Delta n = p \end{aligned}$$

sauf peut-être si p est égal à $4Nk$ pour certains résonateurs (condition sur $C(z)$ du § 2.3.2).

2.4 CONDITIONS PRATIQUES D'OBTENTION DU VERROUILLAGE TRANSVERSE. — On examine sommairement dans quelles conditions les techniques classiques du verrouillage longitudinal s'adaptent au verrouillage transverse.

2.4.1 *Modulation interne*. — Cette technique utilise soit une modulation des pertes de la cavité — provoquant une modulation d'amplitude des modes — soit une modulation de phase — provoquant une modulation de la fréquence des modes.

Si l'on veut adapter cette technique au verrouillage transverse d'ordre p , la pulsation de la modulation doit être égale à l'écartement entre p modes soit $p\Omega$.

Une condition supplémentaire apparaît qui concerne la symétrie transversale du modulateur (§ 2.3.3).

Dans le cas où la modulation est effectuée par le biais d'un cristal électro-optique, le signal électrique appliqué sur le cristal doit avoir la symétrie correspondant à l'ordre de couplage désiré et qui figure dans le tableau IV. Par exemple, pour un couplage d'ordre 2, la modulation d'amplitude doit affecter chaque mode d'un terme en $e^{2j\psi} \times$ fonction paire de ρ . L'indice du cristal électro-optique doit donc varier suivant une loi de la forme $n = n_0(\rho) \cos 2\psi$, où $n_0(\rho)$ est une fonction paire de ρ , par exemple une constante, ou ρ^2 .

Cette condition n'apparaît pas dans le verrouillage longitudinal car tous les modes longitudinaux ont même symétrie : Σ_g^+ et le couplage s'effectue avec une fonction $C(\rho, \psi)$ totalement symétrique, obtenue pratiquement en appliquant sur le cristal un champ électrique uniforme.

Si l'on effectue la modulation en faisant vibrer un miroir à la pulsation $p\Omega$, il faut en plus, que cette oscillation ait la symétrie spatiale requise. Par exemple, pour un verrouillage simple entre modes transverses adjacents, le miroir ne doit pas se déplacer parallèlement à lui-même, comme en verrouillage longitudinal, mais osciller suivant un mouvement de rotulage correspondant au terme $e^{j\psi}$.

2.4.2 *Absorption saturable*. — Le verrouillage transverse semble compatible avec la technique utilisant des matériaux à absorption saturable et l'on peut interpréter ce phénomène de la manière suivante :

Les interférences entre modes transverses adjacents d'un laser provoquent des modulations d'amplitude dans le faisceau à la pulsation Ω et avec la symétrie : $R_r \cdot R_{r\pm 1} = \Pi_u$. Chaque multiplicité R_r oscille donc à la pulsation relative $r\Omega$, simultanément avec une bande latérale provenant des modes voisins R_{r-1} et R_{r+1} . A cause de la symétrie Π_u de la modulation,

cette bande latérale a une symétrie $\Pi_u \{R_{r+1}\}$ c'est-à-dire celle de R_r d'après le tableau III. Il en résulte que le couplage entre la multiplicité R_r et la bande latérale est possible et qu'un début de verrouillage s'effectue. Il apparaît donc au début de l'oscillation du laser, une structure de faisceau modulée spatialement, qui laisse entrevoir un début de formation d'un paquet gaussien décentré. Lorsque cette distribution spatialement inhomogène traverse l'absorbant saturable, les fluctuations d'intensité sont accentuées par la non-linéarité de l'absorbant : le centre du paquet gaussien, plus intense, est moins absorbé que les zones périphériques. Ce phénomène accentue donc la modulation spatiale, fait croître les bandes latérales et provoque le verrouillage total. L'absorbant saturable est alors traversé par le paquet gaussien décentré et animé du mouvement périodique décrit dans le premier chapitre. La zone où l'absorption est saturée est entraînée par le mouvement du spot dans le même mouvement périodique. Cela suppose naturellement que le temps de désexcitation de l'absorbant est notablement plus court que la période de révolution du spot, qui est $2\pi/\Omega$, ce qui équivaut, en verrouillage longitudinal, à la même condition par rapport au temps de transit $2L/c$ dans la cavité. Si l'on reprend l'exemple de la figure 4 pour lequel $\Omega/2\pi = 250$ MHz, il lui correspond une période de révolution de 4 ns, qui représente la limite supérieure permise pour le temps de désexcitation des niveaux supérieurs de l'absorbant saturable.

2.4.3 Autoverrouillage. — Dans certaines conditions (voir les réf. [2], [3], [4], [5] de [9]) un laser est susceptible de s'autoverrouiller longitudinalement par le biais de phénomènes non linéaires d'ordre au moins 3. Désignons par ω_1 , ω_2 et ω_3 les pulsations de trois multiplicités transverses successives décrites par les fonctions R_1 , R_2 , R_3 .

A un terme non linéaire de la forme $kR_2^2 R_3$ correspondent des signaux de pulsations ω_3 , $2\omega_2 + \omega_3$ et $2\omega_2 - \omega_3$. Quelle est la symétrie spatiale de ces signaux ? R_2^2 est totalement symétrique ; $kR_2^2 R_3$ a donc la symétrie de R_3 . Le signal à la pulsation ω_3 peut donc interférer avec la multiplicité R_3 .

On démontrerait de la même manière qu'un terme $kR_2^2 R_1$ agit sur R_1 , par l'intermédiaire du signal à la pulsation ω_1 , etc...

Cependant, le terme non linéaire de la forme $kR_1 R_2 R_3$ est entièrement symétrique car le produit $R_1 R_3$ a la symétrie de R_2 (remarque du § 1.4.3). Or, aucune des multiplicités n'est entièrement symétrique (sauf exceptionnellement celle correspondant au mode fondamental R_0). L'autoverrouillage ne peut donc pas s'effectuer par l'intermédiaire d'un terme de cette forme.

Ainsi, à l'exception d'un seul, les termes non linéaires d'ordre 3 sont susceptibles de coupler les modes transverses les uns aux autres. L'autoverrouillage transverse est donc, *a priori*, possible.

2.5 MÉTHODES DE DÉTECTION DE LA PRÉSENCE D'UN VERROUILLAGE TRANSVERSE. — Observé sur un écran transversal, un faisceau de laser à modes transverses verrouillés, apparaît, à l'œil, sous la forme d'une couronne elliptique ou circulaire (suivant les cas de la figure 3). Néanmoins, cet aspect ne prouve pas à lui seul le verrouillage transverse, car on peut obtenir des faisceaux en couronne sans que cela implique un verrouillage (par exemple si le laser oscille suivant le mode en $\rho e^{-\rho^2}$ dit « doughnut-mode »). Pour détecter rigoureusement la présence d'un verrouillage transverse, il faut utiliser des méthodes plus fines, en particulier celles qui sont utilisées pour détecter le verrouillage longitudinal, mais en les transposant.

2.5.1 Détecteur rapide. — L'utilisation d'un détecteur rapide est une méthode simple de mise en œuvre. Le détecteur doit être associé à un diaphragme transverse ayant la forme d'un écran percé d'une mince fente radiale, cet écran occultant le faisceau, sauf, lorsque une fois par période la position du spot coïncide avec celle de la fente. Le détecteur placé derrière la fente reçoit la lumière du laser périodiquement à la pulsation Ω .

2.5.2 Fluorescence à deux photons. — La technique utilisant la fluorescence excitée par deux photons est également transposable. On sait qu'en verrouillage longitudinal, cette technique est basée sur la formation d'une zone de recouvrement de deux impulsions lumineuses successives ; dans cette zone, la densité de photons est en moyenne double de celle des zones adjacentes et un corps soigneusement choisi traversé par le faisceau y fluoresce plus qu'ailleurs. Cette technique se transpose de la manière suivante :

La section droite d'un faisceau de laser à modes transverses verrouillés a été représentée sur la figure 3. Le faisceau lumineux global s'obtient en tenant compte d'une vitesse de phase de propagation en espace libre c , ce qui donne le faisceau hélicoïdal progressif représenté sur la figure 10.

FIG. 10. — Le faisceau de laser à modes transverses couplés est une hélice progressive de pas $2\pi c/\Omega$.

Le pas de cette hélice est $\lambda = \frac{2\pi}{\Omega} \times c$. Dans l'application numérique précédente, où $\Omega/2\pi = 250$ MHz, le pas de l'hélice serait de 1,20 m. Si un tel faisceau hélicoïdal frappe un miroir, l'hélice réfléchie coupe toujours l'hélice incidence dans des plans transverses situés à des distances multiples de $\lambda/2$ en avant du

miroir. Si l'on fait traverser au faisceau de laser une cuve contenant un liquide fluorescent approprié, les zones de fluorescence se situeront donc dans des plans éloignés de multiples de 60 cm du miroir.

2.5.3 Sélection spectrale. — Un autre moyen de détection et d'étude, simple à mettre en œuvre et spécifique au verrouillage transverse, consiste à extraire du faisceau total émis par le laser à modes verrouillés, une des multiplicités qu'il contient. Pour cela, il suffit d'utiliser un interféromètre du type Pérot-Fabry ou confocal, dont un des miroirs est monté sur un support piézoélectrique. L'intervalle entre les fréquences transmises doit être supérieur à l'encombrement spectral du faisceau de laser à étudier ; dans l'exemple considéré plus haut, cet intervalle était d'environ 5 000 MHz, ce qui correspond à un intervalle entre miroirs de l'interféromètre de l'ordre de 3 cm. Dans ces conditions, le faisceau incident qui a l'allure de l'hélice de la figure 10, mais qui, à l'œil, apparaît comme un faisceau en couronne — frappe l'interféromètre, est réfléchi par celui-ci, à l'exception de la multiplicité d'indice r dont la fréquence correspond à la fenêtre de transmission et qui traverse l'interféromètre. Le faisceau émergeant a donc une forme en rosace à $2r$ branches. Lorsqu'on fait balayer à l'interféromètre la plage de fréquence occupée par les différents modes transverses, on aperçoit successivement toutes les multiplicités, et leur identification est immédiate car il suffit de compter le nombre de branches de la rosace filtrée.

Cette expérience se rapproche, quant aux résultats, de celle de Rigrod [10], dans laquelle on fait apparaître les modes à périodicité angulaire, au moyen de fils rectilignes placés dans la cavité du laser. On peut en effet considérer que la rosace de la figure 6 est le diagramme de rayonnement du mode TEM_{03} , si les indices 0 et 3 se réfèrent aux fonctions de Laguerre, qui sont un autre moyen d'exprimer analytiquement les distributions d'intensité des modes. On sait en particulier qu'on peut exprimer le champ électrique à la surface d'un miroir par la fonction :

$$E_p^q(\rho, \psi) = E_0 \rho^q L_p^q(\rho^2) e^{-\rho^2} \cos q\psi$$

où L_p^q désigne le polynôme de Laguerre d'ordre p et d'indice q . Pour $p = 0$, le polynôme de Laguerre se réduit à une constante : $L_0^q = q!$ de sorte que l'expression précédente, pour $p = 0$, n'est autre, à une

constante près, que celle qui décrit la multiplicité d'ordre $r = q$ (formule 10).

Ce dispositif, en plus de l'aspect spectaculaire des figures qu'il permet d'obtenir, autorise la mesure des puissances contenues dans chacune des multiplicités et la comparaison avec la distribution de Poisson théorique.

3. Conclusion. — On a établi dans cet article quelques résultats théoriques qui éclairent le phénomène du verrouillage des modes transverses d'un laser. Malgré l'apparente complexité des fonctions qui décrivent les distributions de ces modes, on a montré que l'utilisation de résultats connus en théorie de l'oscillateur harmonique simplifie les calculs. De même on a introduit des notions de symétrie qui dispensent d'un certain nombre de développements fastidieux. En plus de ces simplifications appréciables, ces analogies entre deux domaines distincts de la physique (l'un macroscopique, l'autre microscopique), peuvent apporter aux spécialistes de l'un des domaines une aide pour appréhender l'autre.

On pourrait naturellement envisager le couplage des modes transverses d'un laser de bien d'autres manières. En particulier, on a utilisé exclusivement les fonctions d'Hermite associées comme fonctions propres, car la symétrie du problème posé s'y prêtait, mais si l'on voulait étudier des situations à symétrie de révolution, il serait plus judicieux d'employer d'autres fonctions propres, comme celles de Laguerre associées, qui utilisent les coordonnées polaires ; on obtiendrait alors des modes en couronne ou en disques fluctuants.

Les lasers à modes transverses verrouillés, selon les principes décrits dans cet article, émettent un spot gaussien pur qui rassemble toute l'énergie émise par les différents modes transverses et qui est animé d'un mouvement de rotation extrêmement rapide autour du centre du dispositif (de l'ordre de 10^8 tr/s). L'allure du faisceau lumineux émis est tout à fait exceptionnelle puisque c'est celle d'une hélice progressive dont le pas est court (de l'ordre du mètre). De telles propriétés peuvent avoir des applications en opto-électronique, en informatique, en télévision, etc... Néanmoins, compte tenu des conditions nombreuses et délicates à remplir pour obtenir ce phénomène, il serait prématuré d'émettre ici un avis sur la « faisabilité » de tels systèmes. La technique du verrouillage transverse est certainement au moins aussi délicate à mettre en œuvre que celle du verrouillage longitudinal.

Bibliographie

- [1] SMITH L. W., « Mode-Locking of Lasers ». *Proceed of the IEEE*, vol. 58, n° 9, p. 1342, Sept. 1970.
- [2] AUSTON D. H., « Transverse mode locking » *IEEE J. Quantum Electron.*, p. 420, June 1968.
- [3] AUSTON D. H., « Forced and spontaneous Phase Locking of the Transverse Modes of a He-Ne Laser ». *IEEE J. Quantum Electron.*, p. 471, July 1968.
- [4] SCULLY M. O., « Coherence-a sticky subject », *Appl. Opt.*, 9 (1970), 2414.
- [5] KOGELNIK H. and LI T., « Lasers beam and resonator ». *Proceedings of the IEEE*, p. 1316, Oct. 1966.
- [6] SCHIFF L. I., *Quantum mechanics* chap. IV. New York, Mc Graw-Hill, 1955.
- [7] HERZBERG G., « Molecular spectra and molecular structure », Tome II, D. Van Nostrand Cy.
- [8] SIGNORE R. et SALLEZ C., « Récents développements du laser à Argon ionisé ». *Revue technique Thomson, CSF*, vol. 2, n° 2, juin 1970, p. 309.
- [9] SIGNORE R. et BECRELLE J., Étude de l'autoverrouillage des modes d'un laser à hélium-néon. *Revue technique Thomson, CSF*, vol. 2, n° 4, déc. 1970.
- [10] RIGROD W. W., « Isolation of axi-symmetrical optical resonator modes », *Appl. Phys. Lett.* 2 (1963) 51.