Transferts de charges dans un milieu diélectrique. Etude de courants transitoires

R. Meaudre, G. Mesnard

► To cite this version:

R. Meaudre, G. Mesnard. Transferts de charges dans un milieu diélectrique. Etude de courants transitoires. *Revue de Physique Appliquée*, 1972, 7 (4), pp.213-217. 10.1051/rphysap:0197200704021300 . jpa-00243621

HAL Id: jpa-00243621

<https://hal.science/jpa-00243621>

Submitted on 1 Jan 1972

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

REVUE DE PHYSIQUE APPLIQUÉE

Supplément au « Journal de Physique »

Classification
Physics Abstracts
17.20

TRANSFERTS DE CHARGES DANS UN MILIEU DIÉLECTRIQUE. ÉTUDE DE COURANTS TRANSITOIRES

R. MEAUDRE et G. MESNARD

Laboratoire de Physique Electronique, Université Claude-Bernard de Lyon

(Reçu le 1^{er} mars 1972)

Résumé. — On a calculé l'expression du courant transitoire dans un milieu diélectrique possédant deux types de porteurs d'égale mobilité ou un seul type de porteurs mobiles. Les électrodes sont supposées bloquantes. Lors de l'application d'un échelon de tension de faible amplitude, l'évolution du courant est régie par une seule constante de temps, proportionnelle au temps de relaxation diélectrique et au rapport L/L_D (L longueur de l'échantillon, L_D longueur de Debye).

Abstract. — The transient current in a dielectric material containing two types of carriers with the same mobility or with only one type of mobile carrier is calculated. The material has two charge blocking electrodes. When a small step voltage is applied, the current behaviour is governed by only one time constant proportional to the dielectric relaxation time and to the ratio L/L_D (L sample length, L_D Debye length).

I. Introduction. — Les nombreux travaux ayant pour but d'expliquer les effets liés à l'existence de zones d'accumulation ou de déplétion de porteurs près des électrodes se classent en deux groupes. L'un concerne les solutions stationnaires indépendantes du temps (1 à 9), l'autre les solutions sinusoïdales lorsqu'un signal alternatif est appliqué à un échantillon semi-conducteur ou isolant (10 à 16). Les résultats théoriques obtenus sont intéressants dans la mesure où ils permettent par exemple de distinguer nettement les effets dus à des « dipôles » de ceux que donnent des porteurs mobiles tout le long de l'échantillon.

Il nous a semblé utile de caractériser davantage les effets dus à la charge d'espace, en cherchant les solutions qui régissent le comportement d'un échantillon contenant des porteurs mobiles, lorsqu'une tension extérieure $V(t)$ lui est appliquée.

II. Système d'équations étudié. — Dans un échantillon de longueur L , nous supposons qu'il existe initialement une répartition uniforme de N centres neutres par unité de volume. Sous l'effet de l'agitation thermique, certains centres neutres peuvent se dissocier et donner chacun un porteur de charge négative et un porteur de charge positive mobiles. Ces porteurs, en se recombinant, redonnent un centre neutre. Cette situation se rencontre couramment dans la pratique (dissociations et recombinaisons de lacunes et interstitiels dans les cristaux ioniques, d'atomes ou molécules étrangers dans ces mêmes cristaux ou dans des diélectriques liquides, ...). En l'absence de champ appliqué, la concentration des porteurs est C_0 . Soient, à un instant t donné, $n_c(x, t)$ la densité, des centres neutres non dissociés, $n(x, t)$ et $p(x, t)$ celles des 2 types de porteurs, $E(x, t)$ le champ électrique, on a les équations suivantes :

$$I \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} = k_1 n_c(x, t) - k_2 n(x, t) p(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left[n(x, t) \mu E(x, t) + D \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} \right] \quad (1) \\ \frac{\partial p}{\partial t} = k_1 n_c(x, t) - k_2 n(x, t) p(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x, t) \mu' E(x, t) - D' \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \right] \quad (2) \\ \frac{\partial n_c}{\partial t} = -k_1 n_c(x, t) + k_2 n(x, t) p(x, t) \quad (3) \\ \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon} [p(x, t) - n(x, t)] \quad (4) \\ V(t) = - \int_{-L/2}^{L/2} E(x, t) dx \quad (5) \end{array} \right.$$

Nous avons choisi d'étudier le cas du système I car nous connaissons les solutions analytiques stationnaires dans les deux cas limites :

$$V \ll \frac{kT}{e} \quad \text{et} \quad V \gg 2 M^2 \frac{N}{C_0} \frac{kT}{e},$$

avec

$$M = \frac{L}{2 L_D}, \quad \text{où} \quad L_D = \sqrt{\frac{\varepsilon D}{2 C_0 e \mu}}.$$

Les solutions sont obtenues dans l'hypothèse du blocage total des porteurs aux électrodes ; cette hypothèse sera conservée dans l'analyse des régimes transitoires. Lors de l'application d'une tension continue constante, les solutions dépendant du temps doivent conduire à ces résultats lorsque $t \rightarrow \infty$. Inversement, étudiant le retour à l'équilibre thermodynamique après suppression d'une tension extérieure, nous connaissons l'état initial.

III. Analyse du système. Essai de séparation des variables. — La démarche la plus naturelle consiste à chercher si la méthode de séparation des variables permet de résoudre le problème.

1) Solutions de la forme

$$n(x, t) = n_0(x) n(t), \quad p(x, t) = p_0(x) p(t), \\ E(x, t) = E_0(x) E(t).$$

L'hypothèse du blocage total aux électrodes entraîne $n(t) = 0$ ou

$$E(t) = - \frac{D n'_0 \left(\frac{L}{2} \right)}{\mu n_0 \left(\frac{L}{2} \right) E_0 \left(\frac{L}{2} \right)} = \text{Cte}.$$

Ces solutions ne permettent pas de décrire l'évolution ; les solutions du type 1) sont donc incompatibles avec l'hypothèse du blocage des porteurs aux électrodes.

2) Solutions de la forme :

$$n(x, t) = C_0 + n_0(x) n(t), \quad p(x, t) = C_0 + p_0(x) p(t), \\ E(x, t) = E_0(x) E(t).$$

La solution stationnaire correspondant à $V \ll kT/e$ est connue et de la forme [8]

$$n(x, \infty) = C_0 + n(x, V) = C_0 + n_0(x) n(\infty), \\ p(x, \infty) = C_0 + p(x, V) = C_0 + p_0(x) p(\infty), \\ E(x, \infty) = E(x, V);$$

nous cherchons des solutions dépendant du temps qui aient une forme analogue. A l'instant zéro on applique une faible tension continue ; lorsque $t \rightarrow \infty$ on doit retrouver la solution stationnaire.

La condition $J_n(L/2, t) = 0$ conduit à :

$$E(t) = \frac{D n'_0 \left(\frac{L}{2} \right)}{\mu \left[C_0 + n_0 \left(\frac{L}{2} \right) n(t) \right] E_0 \left(\frac{L}{2} \right)}.$$

A priori cette condition peut être satisfaite.

En exprimant $E(t)$ à l'aide de l'équation de Poisson et en écrivant que la dérivée de $E(t)$ par rapport à x est nulle, on obtient successivement :

$$E(t) = \frac{E(\infty) [p_0(x) p(t) - n_0(x) n(t)]}{p_0(x) p(\infty) - n_0(x) n(\infty)}, \quad (6)$$

$$[n(t) p(\infty) - p(t) n(\infty)] \left[n_0 \frac{dp_0}{dx} - p_0 \frac{dn_0}{dx} \right] = 0. \quad (7)$$

La relation

$$n_0 \frac{dp_0}{dx} - p_0 \frac{dn_0}{dx} = 0 \quad (8)$$

est satisfaite au premier ordre, compte tenu de la solution stationnaire ; les conditions

$$J_n \left(\pm \frac{L}{2}, t \right) = J_p \left(\pm \frac{L}{2}, t \right) = 0$$

entraînent, avec la même approximation,

$$n(t) n'_0 \left(\frac{L}{2} \right) = - p(t) p'_0 \left(\frac{L}{2} \right).$$

D'autre part, la solution stationnaire donne

$$n(\infty) n'_0 \left(\frac{L}{2} \right) = - p(\infty) p'_0 \left(\frac{L}{2} \right),$$

d'où

$$\frac{n(t)}{n(\infty)} = \frac{p(t)}{p(\infty)} = \frac{E(t)}{E(\infty)},$$

en tenant compte aussi de l'éq. (6).

La densité de courant J_n s'écrit, toujours avec la même approximation,

$$J_n(x, t) = \left[\mu C_0 E_0(x) \frac{E(\infty)}{n(\infty)} + D n'_0(x) \right] n(t),$$

ce qui est nul (car la quantité entre crochets représente $J_n(x, \infty)/n(\infty)$ qui est nulle).

La méthode de séparation des variables est donc incompatible avec le blocage total aux électrodes, dans l'approximation du premier ordre.

Il en est de même au second ordre en V . En effet on peut montrer [17] que la relation (8) n'est plus satisfaite par la solution stationnaire. La solution de l'éq. (7) est alors : $n(t) p(\infty) = p(t) n(\infty)$.

La relation (6) et les conditions

$$J_n\left(\pm \frac{L}{2}, t\right) = J_p\left(\pm \frac{L}{2}, t\right) = 0,$$

quel que soit t , entraînent $n(t) = n(\infty)$ et $p(t) = p(\infty)$, solution à rejeter.

IV. Solution de la forme $n(x, t) = C_0 + N(x, t)$, $p(x, t) = C_0 + P(x, t)$, $E = E(x, t)$. — On se bornera au cas où $P(x, t)$ et $N(x, t)$ sont petits devant C_0 (faible tension appliquée). Les deux premières équations du système (I) s'écrivent :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = k_1 n_c - k_2 np + \mu(C_0 + N) \frac{\partial E}{\partial x} + D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \mu E \frac{\partial N}{\partial x} \quad (9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = k_1 n_c - k_2 np - \mu'(C_0 + P) \frac{\partial E}{\partial x} + D' \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \mu' E \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (10)$$

Les densités de courant sont, au 1^{er} ordre :

$$J_n = C_0 e \mu E + e D \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$J_p = C_0 e \mu' E - e D' \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Nous traiterons seulement le cas $\mu = \mu'$, particulièrement intéressant d'un point de vue mathématique. La densité de courant en tout point de l'échantillon s'écrit alors

$$J(x, t) = 2 C_0 e \mu E + e D \frac{\partial (N - P)}{\partial x}.$$

Le courant mesuré est

$$J(t) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} J(x, t) dx = \frac{2 C_0 e \mu}{L} \times \int_{-L/2}^{L/2} E(x, t) dx + \frac{e D}{L} [N - P]_{-L/2}^{L/2}. \quad (11)$$

L'intégrale $-\int_{-L/2}^{L/2} E(x, t) dx$ est égale à la tension appliquée ; c'est donc une donnée du problème. Pour obtenir $J(t)$ il suffit donc de connaître $N(x, t) - P(x, t)$ aux deux extrémités de l'échantillon.

Les éq. (9) et (10) entraînent :

$$\frac{\partial}{\partial t} (P - N) = \frac{-2 C_0 e \mu}{\varepsilon} (P - N) + D \frac{\partial^2 (P - N)}{\partial x^2} - \mu E \frac{\partial (P + N)}{\partial x}, \quad (12)$$

en négligeant $\mu(\partial E / \partial x) (N + P)$, quantité du 2^e ordre.

Le terme $\mu E (\partial (P + N) / \partial x)$ peut aussi être négligé dans l'approximation des faibles tensions appliquées. En effet à partir des éq. (9), (10) et (3), on obtint :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{L/2} (n + p + 2 n_c) dx = D \left[\frac{\partial (N + P)}{\partial x} \right]_0^{L/2} - \frac{\mu \varepsilon}{2 e} \left[\frac{\partial (E^2)}{\partial x} \right]_0^{L/2}.$$

La symétrie du problème entraîne

$$\left[\frac{\partial (P + N)}{\partial x} \right]_{x=0} = 0$$

ainsi que $[\partial E / \partial x]_{x=0} = 0$. D'autre part

$$\int_{-L/2}^{L/2} (n + p + 2 n_c) dx$$

est constant à cause de l'hypothèse du blocage des porteurs ; il en est de même de $\int_0^{L/2} (n + p + 2 n_c) dx$ du fait de la symétrie du problème. Par suite :

$$\left[\frac{\partial (N + P)}{\partial x} \right]_{x=L/2} = \frac{\mu \varepsilon}{2 e D} \left[\frac{\partial (E^2)}{\partial x} \right]_{x=L/2},$$

quantité du second ordre. Il paraît normal d'après la nature physique du problème d'admettre que $\partial (N + P) / \partial x$ est du deuxième ordre quel que soit x .

L'éq. (12) se réduit finalement à

$$\frac{\partial}{\partial t} (P - N) = - \frac{2 C_0 e \mu}{\varepsilon} (P - N) + D \frac{\partial^2 (P - N)}{\partial x^2}. \quad (13)$$

RÉSOLUTION DE L'ÉQ. (13) À L'AIDE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE. — Posons : $P - N = y(x, t)$, $\theta = 2 \mu C_0 e / \varepsilon$ et soient $Y(x, p)$ et $\delta(x, p)$ les transformées de Laplace de $y(x, t)$ et $E(x, t)$.

L'équation se transforme en

$$pY(p) - y(x, 0) = - \theta Y + D \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}. \quad (14)$$

On se propose d'étudier la réponse de l'échantillon lorsqu'on lui applique l'instant $t = 0$ une tension constante V à partir de l'équilibre. A $t = 0$, $y(x, 0) = 0$ (neutralité en tout point de l'échantillon). Les conditions de blocage total du courant aux électrodes entraînent :

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=\pm L/2} = 2 C_0 \frac{\mu}{D} E \left(\pm \frac{L}{2} \right) \quad \forall t. \quad (15)$$

Compte tenu de la neutralité de l'échantillon la solution de (14) s'écrit

$$Y(p) = B(p) \operatorname{sh} x \left(\frac{p + \theta}{D} \right)^{1/2}. \quad (16)$$

On calcule ensuite le champ électrique à partir de l'équation de Poisson

$$\frac{\varepsilon}{e} \varepsilon(x, p) = B \left(\frac{p + \theta}{D} \right)^{-1/2} \operatorname{ch} \left(\frac{p + \theta}{D} \right)^{1/2} + K(p). \quad (17)$$

D'après l'éq. (5),

$$\int_{-L/2}^{L/2} \varepsilon(x, p) dx = -\frac{V}{p}. \quad (18)$$

Les relations (15), (16), (17) permettent de calculer K , de (17) et (18) on déduit B et finalement l'éq. (11) permet d'obtenir :

$$J(p) = \frac{-\frac{\varepsilon V}{L} \left[\frac{L}{2} \left(\frac{p + \theta}{D} \right)^{1/2} \coth \frac{L}{2} \left(\frac{p + \theta}{D} \right)^{1/2} - 1 \right]}{1 + \frac{Lp}{2\theta} \left(\frac{p + \theta}{D} \right)^{1/2} \coth \frac{L}{2} \left(\frac{p + \theta}{D} \right)^{1/2}}.$$

CALCUL DE LA DENSITÉ DE COURANT $J(t)$. — On trouve au numérateur de $J(p)$ une expression que l'on rencontre dans la théorie des circuits ; on sait qu'il possède un nombre infini de pôles et de zéros réels [19] ; le dénominateur a une forme analogue, et on peut écrire

$$J(p) = -\frac{\alpha \frac{\Pi_j(p - z_j)}{\Pi_i(p - p_i)}}{1 + \beta \frac{p}{\theta} \frac{\Pi_j(p - z_j)}{\Pi_i(p - p_i)}} = \frac{\alpha \Pi_j(p - z_j)}{\Pi_i(p - p_i) + \beta \frac{p}{\theta} \Pi_j(p - z_j)}, \quad (20)$$

α et β étant des constantes et les p_i les pôles communs du numérateur et du dénominateur. L'expression (20) montre que $J(p)$ a un pôle de plus que le numérateur seul et ce pôle est nécessairement réel. On va rechercher ces pôles. Ils sont visiblement négatifs :

a) $|p| < \theta$.

Il existe un pôle pour $M^2 = (L/2 L_D)^2 > 3$, dès que $M \gtrsim 10$ ce pôle est pratiquement

$$p = -\frac{\theta}{M} = -\theta \frac{2 L_D}{L}.$$

b) $|p| > \theta$.

Lorsque $M^2 > 3$, on obtient

$$p \sim -\theta \left[1 + (2k + 1) \frac{\pi^2}{4 M^2} \right] \quad (k = 1, 2, \dots),$$

avec une approximation meilleure que 10^{-2} dès que $M \gtrsim 10$.

Lorsque $M^2 < 3$, il existe un pôle supplémentaire compris entre

$$-\theta \text{ et } -\theta \left[1 + \frac{9 \pi^2}{4 M^2} \right].$$

Quel que soit M on trouve donc un pôle de plus que pour le numérateur seul. Le cas le plus usuel correspond à M élevé ; dans ces conditions le pôle dominant est $p = -\theta/M$; il conduit à

$$J(t) = 2 C_0 e \mu \frac{V}{L} \exp \left(-\frac{4 \mu C_0 e}{\varepsilon} \frac{L_D}{L} t \right).$$

On montre facilement que les courants correspondants aux autres pôles ont des valeurs initiales et des constantes de temps respectivement au moins M^2 et M fois plus petites que celles du courant précédent ; ils sont donc négligeables.

Le retour à l'équilibre après suppression de la tension appliquée s'étudie de la même manière. Il suffit d'introduire comme conditions initiales dans (14) les solutions stationnaires connues ; on obtient au signe près la même expression du courant.

Le cas où les porteurs d'un seul signe sont mobiles se traite de façon identique. En introduisant

$$L_D = \left(\frac{\varepsilon D}{C_0 e \mu} \right)^{1/2},$$

C_0 étant la concentration des porteurs mobiles à l'équilibre, on obtient :

$$J(t) = \frac{C_0 e \mu V}{L} \exp \left[-\sqrt{2} \frac{C_0 e \mu}{\varepsilon} \frac{L_D}{L} t \right],$$

lorsque les centres neutres sont faiblement ionisés ($C_0 \ll n_c$), et

$$J(t) = \frac{C_0 e \mu V}{L} \exp \left[-2 \frac{C_0 e \mu}{\varepsilon} \frac{L_D}{L} t \right]$$

dans le cas $C_0 \gg n_c$. ($C_0 e \mu L_D / \varepsilon L \ll K_1 + K_2 C_0$)

Les formules précédentes s'interprètent très simplement en remarquant que tout se passe comme si la capacité de charge d'espace (proportionnelle à ε/L_D) se chargeait ou se déchargeait dans la résistance de l'échantillon. On constate que le temps de réponse diélectrique est multiplié par le rapport L/L_D qui peut être très grand.

La valeur de $C_0 e \mu$ peut être obtenue à partir de $J(0)$ et, lorsqu'on connaît ε , la constante de temps permet de calculer L_D , donc C_0 et μ .

Nos résultats complètent ceux de Jaffé et Le May [18] qui ont obtenu l'expression du courant transitoire sous la forme d'une série infinie lorsque la tension appliquée est grande ($V > 8 kT/e$). Ces auteurs admettent que le champ électrique à l'intérieur de l'échantillon reste uniforme. Lorsqu'ils comparent leur théorie à certains résultats expérimentaux obtenus sur des cristaux, Jaffé et Le May constatent que le rapport μ/D est compris entre 10^{-3} et $10^{-4} e/kT$, ce qui conduit à supposer que leur calcul ne s'applique qu'à une faible épaisseur de l'échantillon. Les formules précédentes, bien que relatives à des tensions faibles, s'appliquent beaucoup mieux.

Conclusion. — Nous avons étudié les courants transitoires dans un milieu où deux types de porteurs de signes différents sont créés à partir de centres neutres. On a envisagé les deux cas où les deux types de porteurs ou un seul sont mobiles. Ces conditions se rencontrent couramment dans les isolants avec des ions mobiles ; le cas d'électrons mobiles en présence de centres neutres et ionisés est inclus.

Nous avons montré que, lors de la recherche de solutions dépendant du temps, la méthode de séparation des variables est incompatible avec l'hypothèse

de blocage des porteurs aux électrodes. A l'aide de la transformation de Laplace, nous avons calculé la réponse d'un échantillon lors de l'application ou de la suppression d'un échelon de tension de faible amplitude ($V \lesssim kT/e$). Dans l'hypothèse d'une répartition uniforme des porteurs à l'équilibre, l'évolution du courant transitoire est régie par une seule constante de temps dès que L/L_D est supérieur à dix ; la connaissance de cette constante de temps et du courant initial permet de déterminer la concentration et la mobilité des porteurs.

Bibliographie

- [1] MACDONALD (J. R.), *J. Chem. Phys.*, 1954, **22**, 1317.
- [2] SKINNER (S. M.), *JAP*, 1955, **26**, 509.
- [3] MACDONALD (J. R.), *J. Chem. Phys.*, 1958, **29**, 1346.
- [4] PROCTOR (T. M.) et SUTTON (P. M.), *J. Chem. Phys.*, 1959, **30**, 212.
- [5] MACDONALD (J. R.), *J. Chem. Phys.*, 1959, **30**, 806.
- [6] SUTTON (P. M.), *J. of Ame. Ceramic Soc.*, 1964, **47**, 219.
- [7] HEIMAN (F. P.) et WARFIELD (G.), *JAP*, 1965, **36**, 3206.
- [8] HUCK (J.) et MAITROT (M.), *J. Phys. Appl.*, 1965, **26**, 229.
- [9] HUCK (J.) et MAITROT (M.), *J. Physique*, 1966, **27**, 422.
- [10] JAFFÉ (G.), *Annls der Phys.*, 1933, **16**, 217.
- [11] CHANG (H. C.) et JAFFÉ (G.), *J. Chem. Phys.*, 1952, **20**, 1071.
- [12] JAFFÉ (G.), *Phys. Rev.*, 1952, **85**, 354.
- [13] MACDONALD (J. R.), *Phys. Rev.*, 1953, **92**, 4.
- [14] FRIAUF (R. J.), *J. Chem. Phys.*, 1954, **22**, 1329.
- [15] MEAUDRE (R.) et MESNARD (G.), *Revue Phys. Appl.*, 1968, **3**, 257.
- [16] STERN (F.) et WEAVER (C.), *J. Phys. C.*, 1970, **3**, 1736.
- [17] MEAUDRE (R.), Proposé à la *Revue Phys. Appl.*
- [18] JAFFÉ (G.) et LE MAY (C. Z.), *J. Chem. Phys.*, 1953, **21**, 920.
- [19] Cf., par exemple, MOTOROLA, *Analysis and Design of Integrated Circuits*, McGraw-Hill, New-York, p. 71.