RECHERCHE D'UNE SOLUTION OPTIMALE DE COMPENSATION DE CHAMP MAGNÉTIQUE TERRESTRE A L'AIDE DE BOBINAGES SANS FER

Par F. DAUPHINE, R. MORAT, D. MUGNIER, R. CHÉRY et J. LAFOUCRIÈRE,

Institut de Physique Nucléaire, Université de Lyon, France.

(Reçu le 4 novembre 1968, révisé le 14 février 1969.)

Résumé. — Nous avons examiné théoriquement les diverses méthodes d'obtention d'un champ magnétique uniforme avec une précision donnée, en vue de compenser le champ magnétique terrestre dans un volume dont les trois dimensions sont du même ordre de grandeur.

Il apparaît nécessaire, pour juger et comparer ces différentes méthodes, de tenir compte de la composante résiduelle du champ qui apparaît dès que l'on se place hors du plan de symétrie. On peut alors caractériser chaque méthode par un coefficient d'efficacité, fonction de la précision obtenue sur l'homogénéité du champ.

Abstract. — We have examined theoretically the different methods of obtaining an uniform magnetic field of a given precision, in order to compensate the earth's magnetic field in a volume with three dimensions of the same order of magnitude.

It seems necessary, in order to judge and compare there different methods, to take into account the residual component of the field, which appears as seen outside the plane of symmetry. Each method can then be characterized by an efficiency coefficient which is a function of the precision of homogeneity obtained.

Introduction. — Le problème de la compensation du champ magnétique terrestre se pose dès qu'on aborde la construction de spectromètres à haute résolution. En ce qui nous concerne, il s'agit d'un appareil basé sur les propriétés des trajectoires trochoïdales [2].

De nombreuses publications ont déjà traité de ce problème; la précision obtenue étant très variable suivant les cas, en particulier suivant le domaine d'extension spatiale dans lequel elle est réalisée. Une simple bobine circulaire donne par exemple un champ uniforme en son centre, pourvu que son rayon soit suffisamment grand par rapport au domaine d'utilisation. M. E. Pittman et D. L. Waidehich [1] proposent un champ uniforme à 10^{-5} près dans un domaine sphérique du rayon égal à 0,26 % de celui de la bobine. Ces deux exemples montrent qu'il apparaît nécessaire de définir dans tous les cas, et tout particulièrement quand le volume à compenser possède trois dimensions du même ordre de grandeur, un coefficient d'efficacité spatiale du système, que nous désignerons par C_{es} et qui représente le rapport du volume utile au volume total d'encombrement pour une précision donnée.

Nous définirons en premier lieu les C_{es} pour les systèmes de compensation classique. Nous examinerons ensuite les champs produits par un ensemble de bobines

coaxiales et équidistantes, considéré comme une approximation d'une nappe de courants sphériques à densité constante sur l'axe. Nous montrerons enfin que les systèmes utilisant des combinaisons de 2, 4, 6 et 8 bobines circulaires de positions géométriques bien définies ou encore de 2, 3 ou 4 cadres carrés, permettent d'établir, en tenant compte des composantes non axiales en dehors du plan de symétrie, un système optimal.

I. Efficacité des systèmes de compensation à symétrie plane, sans symétrie de révolution axiale. — 1. CADRES RECTANGULAIRES. — Plusieurs auteurs utilisent des systèmes de cadres rectangulaires. Toutes leurs méthodes s'inspirent du même cas idéal d'un cylindre infiniment long à nappes de courant produisant un champ uniforme et orthogonal à son axe (*fig. 1*).

Si l'on place sur ce cylindre, de rayon a , n cadres, parallèles entre eux et à l'axe, en des positions définies par un angle $\theta_{o,k}$ tel que :

$$\theta_{o,k} = \frac{\pi}{2} - \frac{2k-1}{2n} \pi \quad \text{avec} \quad 1 \leq k \leq n$$

et si les courants qui les parcourent sont proportionnels à $\cos \theta_{o,k}$, M. W. Garrett [4] donne pour les compo-

TABLEAU I

NOMBRES DE CADRES —	C_{es} —	0,008 —	0,064 —
	p_1	10^{-4}	10^{-2}
3	p_2	$1,65 \times 10^{-4}$	10^{-2}
	$p = p_1 + 2p_2$	$4,3 \times 10^{-4}$	3×10^{-2}
	p_1	$1,96 \times 10^{-5}$	$3,2 \times 10^{-3}$
4	p_2	$2,64 \times 10^{-5}$	$1,6 \times 10^{-3}$
	$p = p_1 + 2p_2$	$7,24 \times 10^{-5}$	$6,4 \times 10^{-3}$

nous devons annuler n déterminants d'ordre $n + 1$ formés sur la matrice ($2n$ lignes, $n + 1$ colonnes) :

$$\begin{pmatrix} f''(0, p_1), \dots, f''(0, p_n) & f''(0, 0) \\ \vdots & \vdots \\ f^{4n}(0, p_1), \dots, f^{4n}(0, p_n) & f^{4n}(0, 0) \end{pmatrix}$$

exprimant ainsi que n équations du système (1') sont linéairement dépendantes des n autres. Nous disposons alors d'un système de n équations aux n variables $p_1, \dots, p_n$.

On en tire les valeurs de $p_1, p_2, \dots, p_n$, et de (1') on déduit $I_2/I_1, \dots, I_{n+1}/I_1$. Pratiquement, cette méthode générale devient vite assez délicate à cause de la complexité des dérivées de f . Ristori et Baudry ont traité le problème dans les cas de 3 cadres ($n = 2$, 2 inconnues p_1 et I_2/I_1) et de 4 cadres ($n = 3$ inconnues $p_1, p_2, I_2/I_1$). Les valeurs des paramètres qu'ils obtiennent permettent de calculer à l'ordinateur en tout point de l'espace les intensités des composantes H_x, H_y, H_z par l'application des formules générales données par C. Caverzasio où l'on fait $A = B$. Se fixant des C_{es} de 0,008 et 0,064 (soit respectivement 20 et 40 % de côté), nous avons calculé les précisions : $p_1 = \frac{\Delta H_z}{H_z}$ et $p_2 = \frac{H_x}{H_z}$ ou $\frac{H_y}{H_z}$, la précision totale étant estimée égale à : $p = p_1 + 2p_2$ (tableau I).

En définitive, nous verrons que ces systèmes ont une efficacité comparable au système à quatre bobines étudié plus loin et qu'ils sont les seuls éventuellement à retenir de cette première partie.

II. Systèmes à symétrie plane et de révolution axiale. — 1. RÉALISATION APPROCHÉE D'UNE NAPPE SPHÉRIQUE A DENSITÉ SUPERFICIELLE DE COURANT VARIABLE EN $\cos \theta$ (fig. 2 a). — On peut réaliser cette distribution en plaçant sur un support sphérique un système de spires très serrées à pas constant (mesuré sur Oz). Ce problème est classique [3] et l'on sait que théori-

FIG. 2 a. — Nappe de courant sphérique.

quement le champ à l'intérieur est uniforme et axial.

En pratique, nous avons espacé ces spires et considéré les trois cas : 9, 17 et 35 spires, calculant les composantes verticale H_z et horizontale $H_r(r, z)$:

2. CALCULS ET RÉSULTATS (fig. 2 b). — Posant :

$$\alpha_i = \frac{r}{\rho_i}$$

$$\beta_{1,i} = \frac{z + l_i}{\rho_i}; \quad \beta_{2,i} = \frac{|z - l_i|}{\rho_i}$$

$$\gamma_{1,i} = \frac{2\alpha_i}{1 + \alpha_i^2 + \beta_{1,i}^2}; \quad \gamma_{2,i} = \frac{2\alpha_i}{1 + \alpha_i^2 + \beta_{2,i}^2}$$

nous avons pour un système de n couples [2] :

$$H_z(r, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{I_i}{\rho_i} \left[\frac{g(\alpha_i, \beta_{1,i})}{\alpha_i} + \frac{g(\alpha_i, \beta_{2,i})}{\alpha_i} \right]$$

$$H_r(r, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{I_i}{\rho_i} \left[\frac{g'(\alpha_i, \beta_{1,i})}{\alpha_i} + \frac{g'(\alpha_i, \beta_{2,i})}{\alpha_i} \right]$$

FIG. 2 b. — Notations.

avec :

$$g(\alpha_i, \beta_i) = \frac{\alpha_i}{(1 + \alpha_i^2 + \beta_i^2)^{3/2}} \int_0^\pi \frac{1 - \alpha_i \cos \omega}{(1 - \gamma_i \cos \omega)^{3/2}} d\omega$$

$$g'(\alpha_i, \beta_i) = \frac{\alpha_i \beta_i}{(1 + \alpha_i^2 + \beta_i^2)^{3/2}} \int_0^\pi \frac{\cos \omega}{(1 - \gamma_i \cos \omega)^{3/2}} d\omega.$$

Si $H = I N_i / 3R$ désigne le champ axial théorique créé par un bobinage sphérique continu de rayon R , de N_i spires parcourues par le courant I [3], cette méthode est assez concordante (tableau II) ($I = 10$ A, $R = 0,2$ m).

TABLEAU II

N_i	H (A/m)	$H_z(0, 0)$ (A/m)
—	—	—
9	150	145,8
17	283,3	289,8
35	574	580,1

L'efficacité de cette méthode se trouve résumée sur la figure 7. Elle arrive à supplanter les possibilités offertes par les systèmes discrets envisagés au paragraphe suivant, dans le cas de très grands C_{es} . Cependant, leur encombrement spatial ne permet pas de retenir ces systèmes si l'on désire un accès aisé du volume équichamp ainsi réalisé (ici le coefficient C_{es} est un rapport de volumes sphériques).

3. RECHERCHE ANALYTIQUE DE POSITIONS PRIVILÉGIÉES DE BOBINES CIRCULAIRES. — M. W. Garrett a développé une théorie générale des champs axiaux basée sur le développement du champ suivant les harmoniques sphériques et utilisant les dérivées successives par rapport à z (pour les régions de l'espace ne renfermant pas de courant) (fig. 2 c).

FIG. 2 c. — Couple de bobines circulaires. Notations.

Erratum : Au lieu de H_ρ , lire HP .

Pour deux bobines symétriques, nous avons :

$$H_z(r, \theta_M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{dz^n} H_z(z, 0) \right]_{z=0} r^n P_n(\cos \theta_M)$$

$$H_p(r, \theta_M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{d^n}{dz^n} H_z(z, 0) \right]_{z=0} r^n \sin \theta_M P'_n(\cos \theta_M).$$

En particulier, le champ sur l'axe s'écrit :

$$H_z(z, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$$

$$a_{2n} = \frac{NI}{R^{2n+1}} \cdot \sin^2 \theta P'_{2n+1}(\cos \theta)$$

les dérivées d'ordre impair étant nulles. De là, résultent les positions classiques suivantes :

1) *Bobines d'Helmholtz*, qui sont telles que le développement de H_z commence à l'ordre 4, soit $\cos \theta_1 = 1/\sqrt{5}$.

2) Les *doubles bobines d'Helmholtz* qui s'obtiennent en annulant a_4 , soit $\cos^2 \theta_{1,2} = 1/3 \pm 2/21 \sqrt{7}$. Elles sont cosphériques. Si l'on choisit les rapports d'ampères-tours, tels que :

$$\frac{(NI)_1}{(NI)_2} = \left| \frac{\sin^2 \theta_2 \cdot P'_3(\cos \theta_2)}{\sin^2 \theta_1 \cdot P'_3(\cos \theta_1)} \right|$$

a_2 et a_6 s'éliminent et on obtient un développement commençant à l'ordre 8.

M. E. Pittman et D. C. Waideich [1], utilisant les formules de la théorie de Garrett, partent d'un principe légèrement différent. Ils annulent a_2 et a_4 ou a_2 , a_4 et a_6 et minimisent a_6 ou a_8 respectivement, ce qui leur permet d'envisager éventuellement des bobines non cosphériques. Ils généralisent leur méthode pour des systèmes à 6 ou 8 bobines, où le premier terme non nul est d'ordre 12 ou 16.

Reprenant les paramètres géométriques et électriques ainsi déterminés (tableau III), nous obtenons alors, en appliquant les formules que nous avons

données au paragraphe 2, les intensités H_z et H_r calculées en tous points de l'espace. Les résultats montrent que le rapport H_r/H_z pour les cas de 4, 6 ou 8 bobines retenus est de l'ordre de 10^{-6} , donc la composante H_r n'interviendra pas pour perturber les compensations des deux autres composantes H_x et H_y .

Les figures 3, 4 et 5 montrent que les courbes d'équiprécision dH_z/H_z sont très régulières et que les volumes utiles sont alors sphériques. Il en résulte que les C_{es} sont très facilement calculables pour une précision donnée (fig. 6) et atteignent finalement les meilleurs résultats pour des précisions de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-5} (fig. 7). Elles montrent en outre que dans tous les autres

FIG. 3. — Valeurs de dH_z/H_z pour 4 bobines.

FIG. 4. — Valeurs de dH_z/H_z pour 6 bobines.

FIG. 5. — Valeurs de dH_z/H_z pour 8 bobines.

FIG. 6.

Efficacités comparées des systèmes de bobines.

cas l'erreur $\Delta H_z/H_z$ est du même ordre que la perturbation apportée par la composante radiale H_r/H_z . Ce fait négligé par tous les précédents auteurs est pourtant d'une grande importance si l'on compense le champ terrestre dans les trois directions.

Conclusion. — Le tableau III donne tous les paramètres géométriques et électriques des systèmes utilisés. La figure 7 donnant le C_{es} en fonction de la précision recherchée résume tous les résultats trouvés pour ces systèmes. Son examen permet de dégager un certain nombre de conclusions intéressantes.

FIG. 7. — Comparaison des différentes méthodes.

TABLEAU III

CADRES CARRÉS			SIMULATION DE LA SPHERE DE MAXWELL			COUPLES DE BOBINES COSPHÉRIQUES			
	3 CADRES	4 CADRES	9 BOBINES	17 BOBINES	35 BOBINES	2 COUPLES	3 COUPLES	4 COUPLES	
p_1	0,8211	0,2562	Courants tous égaux Espace constant des bobines sur l'axe Oz			0,2852315	0,209299	0,165275	$\cos \theta_1$
p_2	0,0	1,01098				0,7650533	0,5917002	0,477925	$\cos \theta_2$
I_2/I_1	0,5128	2,3612				0,6821109	0,8270469	0,738774	$\cos \theta_3$
								0,919534	$\cos \theta_4$
								0,891626	I_2/I_1
								0,686604	I_3/I_1
								0,406992	I_4/I_1

FIG. 8. — Cadres. Notations.

FIG. 9. — Bobines circulaires. Notations.

Les systèmes déterminés par la méthode de Pittman et Waidelich à 3 et 4 couples de bobines donnent les plus grandes précisions avec les meilleurs C_{es} . On constate en effet que les courbes sont situées dans la partie supérieure gauche du graphique.

Les systèmes simulant la sphère à nappes de courant donnent des précisions 10 à 100 fois plus faibles, mais également avec de grands C_{es} . De plus, nous constatons que les pentes des courbes de précision sont beaucoup plus fortes; en d'autres termes, un accroissement important du C_{es} affecte moins la précision que dans le cas des autres systèmes, et l'on peut penser qu'à la limite, pour des C_{es} très importants, ces systèmes puissent être les plus efficaces. De plus, ils ont un avantage qui n'apparaît pas sur la figure : ils nécessitent un positionnement beaucoup moins précis que les autres. Nous avons en effet répété les calculs pour le système à 4 couples de bobines, en faisant varier légèrement ses paramètres géométriques; on constate que la précision sur l'homogénéité du champ tombe rapidement. Nous estimons en conséquence qu'une précision d'environ 5×10^{-4} serait nécessaire pour la mise en place dans ce cas.

Les systèmes de cadres carrés possèdent des courbes de précision à pentes très faibles, il ne faut donc pas

les utiliser pour de grands C_{es} . L'absence de symétrie de révolution supprime rapidement toute précision quand on s'approche des cadres.

En ce qui concerne un spectromètre β à trajectoires trochoïdales, on sait que le pouvoir de résolution théorique est défini par $dB\rho/B\rho$, $B\rho$ étant caractéristique d'une particule d'énergie donnée. A cela, il faut ajouter l'imprécision $d(B_z.r)/B_z.r$ sur la réalisation de la topographie en r^{-1} dans le plan de symétrie qui est de l'ordre de 7×10^{-5} dans notre cas [1], ainsi que l'imprécision sur la compensation du champ magnétique terrestre. Le champ en r^{-1} pouvant prendre des valeurs minimales du même ordre que celles du champ terrestre, il est nécessaire de compenser ce dernier avec une précision de l'ordre de 10^{-4} .

Le choix d'un système de compensation à 4 couples de bobines circulaires cosphériques, par composante, semble s'imposer grâce à son efficacité pour ces précisions, mais il pose divers problèmes pour la mise en place, qui exige une précision de 5×10^{-4} .

La solution des cadres carrés, difficile pourtant à concilier avec la forme du bâtiment déjà construit, pourrait être à retenir grâce à leur forme géométrique simple, malgré leur bien plus faible efficacité (fig. 7).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] PITTMAN (M. E.) et WAIDELICH (D. L.), Three and four coil systems for homogeneous magnetic fields, 1963.
- [2] MUGNIER (D.), Thèse Doctorat ès sciences physiques, Lyon, 1968.
- [3] DURAND (A.), Électrostatique et magnétostatique, 1953, p. 505.
- [4] GARRETT (M. W.), *J. Appl. Phys.*, 1951, **22**, 1091.
- [5] LYDDANE (R. L.) et RUARK (A. E.), *Rev. of Scient. Inst.*, 1939, **10**, 253.
- [6] HAYNES (S. K.) et WEDDING (J. W.), *Rev. of Scient. Inst.*, 1951, **22**, 97.
- [7] CAVERZASIO (C.), Thèse 3^e cycle, Lyon.
- [8] RISTORI (C.), Rapport C.E.A., R. 3247.