Vérification de la théorie du mouvement brownien et détermination de la valeur de Ne pour l'ionisation des gaz

H. Fletcher

▶ **To cite this version:**

H. Fletcher. Vérification de la théorie du mouvement brownien et détermination de la valeur de Ne pour l'ionisation des gaz. Radium (Paris), 1911, 8 (7), pp.279-286. 10.1051/radium:0191100807027901 . jpa-00242481

HAL Id: jpa-00242481
https://hal.science/jpa-00242481

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Vérification de la théorie du mouvement brownien et détermination de la valeur de Ne pour l'ionisation des gaz[1]

Par H. FLETCHER

[Université de Chicago. — Laboratoire de physique.]

En 1905, Einstein[2] a établi une formule qui rend possible le calcul de la grandeur du déplacement dû au mouvement brownien. Perrin[3], Henri[4], Chaudesaignes[5] et d'autres physiciens ont obtenu avec de petites particules suspendues dans un liquide, des résultats qui donnent un bon accord entre les valeurs calculées et observées du déplacement. Broglie, en expérimentant sur de petites particules de fumée de tabac, suspendues dans l'air à la pression atmosphérique a obtenu un déplacement du même ordre de grandeur que celui qui résulte du calcul par la formule d'Einstein.

Dans ce mémoire, on présente une modification de cette formule et on donne une nouvelle méthode pour l'étude des mouvements browniens. Dans la première partie on déduit des formules qui donnent la distribution probable d'un grand nombre de valeurs observées :

1° Le déplacement d'une particule dû au mouvement brownien.

2° La durée actuelle de chute, sur une distance déterminée, d'une particule soumise à une force constante.

3° Le déplacement actuel dans un temps donné d'une particule soumise à une force constante.

Dans la seconde partie, on donne les résultats expérimentaux qui justifient les équations de la première partie, et qui rendent possible la détermination directe de Ne pour les gaz ionisés.

I. — *Considérations théoriques.*

1. Distribution des déplacements, successifs dans des intervalles de temps égaux, d'une petite particule soustraite à toute force extérieure excepté des chocs des molécules du gaz.

— Puisque le mouvement imprimé à la particule par les molécules du gaz est différent dans les différentes directions et varie avec le temps, son déplacement dans un temps donné doit changer continuellement de direction et de grandeur. Pour déterminer la probabilité P, pour qu'un déplacement entre x_1, et x_2 ait lieu dans un temps t, il faut faire une analyse analogue à celle suivie par Maxwell pour déterminer la distribution des vitesses des molécules. Si on fait les mêmes hypothèses et résout les opérations finales, on obtient :

$$P = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\alpha x^2} dx$$

et parmi N déplacements observés, le nombre n de ces déplacements qui doivent probablement avoir lieu entre x_1, et x_2 est donné par

$$n = N \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\alpha x^2} dx \qquad (1)$$

Dans cette expression α est une fonction indéterminée indépendante de x; on peut l'exprimer en fonction du carré moyen du déplacement, car

$$(x^2)_m^{(1)} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \qquad (2)$$

De considérations dynamiques, Einstein et plus tard Langevin ont déduit la formule

$$(x^2)_m = \frac{2}{9} \frac{Et}{\pi \mu a}$$

1 Manuscrit communiqué par M. A. Millikan.
2. *Ann. d. Phys.*, **17** (1905) 549.
3. *Le Radium*, **6** (1909) 353.
4. *C. R.*, **146** (1908) 1024; **147** (1908) 65.
5. *C. R.*, **147** (1908) 1044.
6. *Le Radium*, **6** (1909) 203.

1. L'indice m a été adopté dans cette note pour désigner une valeur moyenne.

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/radium:0191100807027901

dans laquelle t est l'intervalle de temps; E, l'énergie cinétique moyenne d'agitation d'une molécule gazeuse; μ, le coefficient de viscosité du gaz, et a le rayon de la particule. Pour l'établissement de cette formule, on a utilisé la formule de Stokes pour le mouvement d'une particule dans un fluide visqueux, à savoir :

$$F = 6\pi\mu a v$$

Des expériences récentes[1] ont montré que cette expression doit être modifiée quand on l'applique à une petite particule se mouvant dans un gaz. Cependant, pour le cas qui m'intéresse, il suffit seulement d'admettre la loi

$$F = Bv$$

où B est une constante qui dépend de la grandeur des particules et de la nature du gaz dans lequel elles se meuvent. On peut alors écrire la formule d'Einstein :

$$(x^2)_m = \frac{4}{3}\frac{E}{B}t \qquad (3)$$

Pour la commodité, substituons $\alpha = \frac{h}{t}$; il vient

$$h = \alpha t = \frac{3}{8}\frac{B}{E} \qquad (4)$$

Il est préférable pour faire la comparaison avec les valeurs expérimentales, d'avoir une expression pour la composante moyenne positive ou négative du déplacement le long d'une ligne. C'est ce qu'on obtient facilement en partant de (1), on a :

$$x_m = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\sqrt{\frac{Et}{B}}. \qquad (5)$$

2. **Effet du mouvement brownien sur une petite particule qui se meut sous l'influence d'une force extérieure constante.** — Supposons le déplacement actuel, divisé en deux déplacements partiels, l'un dû à la pesanteur, et l'autre au mouvement brownien. Le premier est simplement Vt où V est une constante qui représente le déplacement en une seconde ou la vitesse due à la pesanteur. Le second, en moyenne, est proportionnel à la racine carrée de t [voir la formule (5)]. Afin de traiter le problème mathématiquement, on supposera que chaque déplacement simple dû au mouvement brownien peut être représenté par

$$x = u\sqrt{t} \qquad (6)$$

u_1, déplacement en une seconde, étant indépendant de l'intervalle de temps, et variant dans les différentes valeurs observées du déplacement de telle façon qu'on ait pour x, une valeur représentée par (3). Cette hypothèse qui revient à remplacer le système irrégulier par un système plus régulier, présentant la même distribution et une valeur moyenne du déplacement, semble raisonnable et les résultats auxquels elle conduit peuvent être vérifiés par l'expérience.

Si on remplace dans (5) la valeur de x tirée de (6) et la valeur α tirée de (4) on obtient une expression pour la distribution des valeurs de n, à savoir :

$$n = N\sqrt{\frac{h}{\pi}}\int_{u_1}^{u_2} e^{-hu^2}\,du \qquad (7)$$

La moyenne des valeurs positives ou négatives de u est donnée par

$$u_m = \sqrt{\frac{1}{\pi h}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\sqrt{\frac{E}{B}} \qquad (8)$$

expression qui se ramène à (5) pour $t = 1$, comme cela devait être.

Si le déplacement total est représenté par b, on a :

$$b = Vt + u\sqrt{t} \qquad (9)$$

Pour avoir une expression de la distribution des déplacements totaux dans un temps déterminé, on considère dans (9) V et t comme des constantes et on change dans (7) u en b. On obtient pour le nombre des déplacements qui ont lieu entre b_1 et b_2

$$n = N\sqrt{\frac{h}{\pi t}}\int_{b_1}^{b_2} e^{-\frac{h}{t}(b-Vt)^2}db \qquad (10)$$

$$b_m = \sqrt{\frac{h}{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} be^{-\frac{h}{t}(b-Vt)^2}db = Vt \qquad (11)$$

Ce dernier résultat aurait pu être déduit directement de (9) puisque t est constant et la valeur moyenne de u est zéro.

De même, pour obtenir une expression de la répartition des temps de chute sur une distance déterminée, on considère V et b comme des constantes et on change la variable u en t; on obtient pour le nombre de temps de chute qui ont lieu entre t_1 et t_2.

$$n = -N\sqrt{\frac{h}{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} \frac{bt^{-\frac{3}{2}} + Vt^{-\frac{1}{2}}}{2} e^{-\frac{h}{t}(b-Vt)^2}dt \qquad (12)$$

ou en posant $tg = \frac{b}{V}$ et renversant les limites

$$n = \frac{NV}{2}\sqrt{\frac{h}{\pi}}\int_{t_2}^{t_1} (tg\, t^{-\frac{3}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})e^{-\frac{h}{t}(b-Vt)^2}dt.$$

En appliquant la méthode ci-dessus, on a :

$$t_m = \frac{1}{4hV^2} + \frac{b}{V}, \qquad (13)$$

ou en résolvant par rapport à V

$$V = \frac{b}{t_m}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{t_m}{hb^2}}\right) = V_m\left(1 + \frac{t_m}{4hb^2}\right). \qquad (14)$$

Ces formules montrent que tandis que la moyenne

1. Millikan, *Phys. Rev.*, avril 1911.

d'un grand nombre d'observations de distances de chute, pendant un temps déterminé est le déplacement actuel dû à la pesanteur, la moyenne d'un grand nombre de temps de chute à travers une distance déterminée est quelque peu différente du temps de chute dû à la pesanteur. La différence, si elle est petite, est inversement proportionnelle au carré de la distance déterminée.

Chacune des équations contenues dans ce paragraphe peut être appliquée à une particule soumise à l'influence de forces constantes autre que la gravité, comme par exemple une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme. Dans ce mémoire, V', t', t_m, t'_g, etc. remplaceront les notations employées ci-dessus lorsqu'elles se rapporteront à une particule chargée d'une seule charge élémentaire, soumise à l'influence combinée de la pesanteur et d'un champ électrique uniforme. De même V'', t'' etc... et V''', t''' etc... seront les notations relatives à une particule chargée de 2, 3 etc... charges élémentaires.

3. — **Effet du mouvement brownien sur la valeur apparente de la charge électrique portée par une particule en suspension dans un gaz.** — La méthode de mesure de e qui a été imaginée par le professeur Millikan[1] consiste à placer une particule chargée, isolée entre deux plateaux d'un condensateur et à observer sa vitesse V_1 sous l'influence de la pesanteur, puis la vitesse V'_1 quand le champ électrique agit. Si E est l'intensité du champ électrique en unités électrostatiques absolues, qui agit sur la particule de masse apparente m' et de densité σ, g, la constante de gravitation et ρ, la densité du gaz, les trois équations suivantes permettent d'exprimer la valeur de e en fonction de quantités mesurables.

$$\frac{Ee + m'g}{m'g} = \frac{V_1'}{V_1} \qquad (15)$$

$$6\pi\mu a k V_1 = m'g = B V_1 \qquad (16)$$

$$m' = \frac{4}{3}\pi(\sigma - \rho)a^3 \qquad (17)$$

En éliminant m' et a et résolvant par rapport à e on obtient :

$$e = 9\sqrt{2}\,\pi \sqrt{\frac{(\mu k)^3}{\sigma(v-\rho)}} \frac{V^{\frac{1}{2}}(V_1 - V_1')}{E} \qquad (18)$$

Les équations (15) et (16) ont été obtenues en supposant que Ee et $m'g$ sont les seules forces agissant sur la particule. Mais cela n'est jamais complètement exact et V_1 et V_1' ont des valeurs qui sont réparties conformément aux équations (10) ou (12) qui dépendent de la méthode employée pour déterminer les vitesses. Par conséquent, pour trouver une valeur invariable de e, on doit déterminer les vitesses V et V' et les subsistuer à la place des vitesses individuelles observées, V_1 et V'_1. La valeur ainsi obtenue doit représenter la charge actuelle portée par la particule, à la condition que la valeur de B donnée par (16) soit correcte.

Si on résout (15) et (16) par rapport à B, on a :

$$B = \frac{Ee}{V + V'} \qquad (19)$$

ou en substituant cette valeur dans (7) et (8) et se souvenant que $E = \frac{3}{2}\frac{RT}{N}$, il vient :

$$h = \frac{1}{4}\frac{Ne}{RT}\frac{E}{V+V'} \qquad (20)$$

et

$$u_m = 2\sqrt{\frac{RT}{\pi Ne}}\sqrt{\frac{V+V'}{E}} \qquad (21)$$

Dans ces expressions, R, T et N ont la signification habituelle. Puisque Ne est connu d'une façon très précise, *il est possible de comparer la distribution et la valeur moyenne du déplacement brownien en une seconde, sans connaître la densité de la goutte, la viscosité ou la pression du gaz, ou la loi du mouvement d'une sphère dans un milieu visqueux.* La seule hypothèse faite est que la vitesse d'un mouvement constant est proportionnel à la force agissante, hypothèse qui est pleinement justifiée expérimentalement à la fois ici et ailleurs[1].

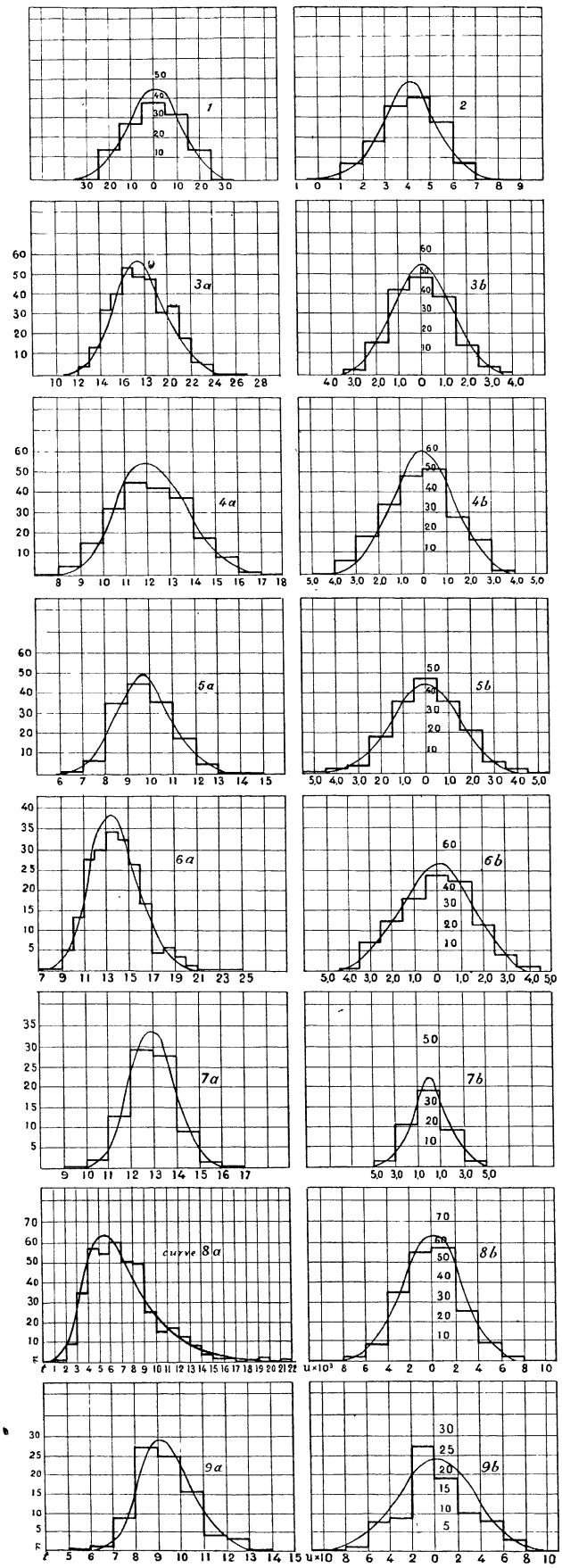
II. — *Applications expérimentales.*

On a donné ailleurs[2] une description détaillée de l'appareil employé. Brièvement, il consiste dans les deux mêmes plateaux de condensateur, utilisés par Millikan[2] dans son travail sur la valeur de e, entre lesquels une petite gouttelette d'huile chargée électriquement est maintenue suspendue dans l'air sous des pressions variant entre 2 cm. et 76 cm. de mercure. Quand les plateaux sont mis en court-circuit la goutte tombe sous l'influence de la pesanteur, et quand on établit entre les plateaux un champ électrostatique uniforme, elle s'élève, tombe plus vite, ou tombe moins vite, suivant la direction et l'intensité de ce champ. Ainsi on peut examiner le mouvement de la goutte en variant l'intensité du champ. De cette façon, de petites gouttes qui ont montré un mouvement brownien intense ont été soumises à l'observation pendant plus de 5 heures, temps pendant lequel on a pris pour la même goutte 411 durées de chutes ou de déplacements.

1. — **Comparaison des valeurs calculées et**

1. *Millikan* (*R.-A.*). — Obtention d'un ion isolé, mesure précise de sa charge [*Le Radium*, 7 (1910) 345].

1. *Phys. Rev.*, août 1911.
2. *Phys. Rev.*, avril 1911.



des valeurs observées. — Pour observer directement la composante le long d'une direction, on faisait Xe égal et opposé à mg de façon qu'en moyenne la goutte ne se déplaçait ni vers le haut ni vers le bas.

La distance verticale de la goutte à partir d'une ligne de comparaison vue dans l'oculaire était notée toutes les 10 secondes. La différence de deux lectures consécutives donnait alors le déplacement brownien. Le tableau I donne les résultats obtenus pour une goutte d'huile. Dans la première partie on a les nombres qui déterminent V et V' ; dans la seconde les déplacements sont disposés, non pas dans l'ordre dans lequel ils étaient observés, mais suivant leur grandeur. Dans la dernière partie « n obs. » désigne le nombre de ces déplacements qui ont lieu entre x_1 et x_2 et « n calc. » la valeur de n obtenue d'après (1). La courbe 1 représente graphiquement la comparaison entre « n obs. » et « n calc. ». La courbe régulière est obtenue en portant en ordonnnées les valeurs de $N\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\alpha x^2}$ et en abscisses x, tandis que la courbe irrégulière est obtenue d'après les valeurs calculées de n de la partie III du tableau I. Les abscisses sont exprimées en fonction des divisions de l'échelle de l'oculaire. Les aires $abcd$, $a'b'c'd'$; $defg$, $d'e'f'g'$ etc... doivent être égales.

Pour observer le déplacement produit pendant un temps déterminé, quand une force extérieure agit, on obligeait la gouttelette à se déplacer lentement contre la pesanteur, et on prenait son déplacement dans des intervalles successifs de 10 secondes. Le tableau II contient les résultats disposés d'une manière exactement semblable à celle du tableau I, « n calc. » provenant de (12) et u de (9), La courbe 2 représente graphiquement la comparaison.

La plupart des nombres ont été obtenus en mesurant le temps de chute sur une distance déterminée, parce que cette méthode est susceptible de donner une plus grande précision que celle qu'on obtient avec l'une ou l'autre des autres méthodes.

Pour les gouttes n° 3, 4, 5, 6, 7 et 9 on prenait la variation dans le temps de chute sous l'action de la pesanteur seule; mais pour la goutte n° 8, la vitesse était diminuée en superposant un champ électrique au champ de gravitation. Les tableaux III et IV donnent les résultats pour les gouttes n° 4 et n° 8 respectivement.

Par exemple dans le tableau III, 1re partie, t est le temps de chute sur 0,522 cm, en l'ab-

Tableau I. Goutte n° 1.

Température = 25° C. Pression = 2,12 cm.

t pour 0,522 cm.		t' pour 0,522 cm.		
40,6	39,4	14,1	13,9	V = 0,01311
40,5	38,6	13,9	14,2	V' = 0,05725
40,3	41,0	13,6	13,9	Volts = 534,5
39,0	39,0	14,0	14,0	$h = 4{,}05 \times 10^4$
39,2	40,7	14,4	14,2	

X . 0,00746 cm pour des intervalles de 10 secondes.

+2,39	+1,35	+0,82	+0,37	−0,08	−0,37	−0,82	−1,57
2,09	1,27	0,75	0,37	0,15	0,37	0,82	1,57
2,02	1,27	0,75	0,30	0,15	0,37	0,97	1,67
1,87	1,27	0,75	0,15	0,15	0,45	0,97	1,72
1,80	1,20	0,75	0,15	0,22	0,45	0,97	1,80
1,74	1,20	0,75	0,15	0,22	0,52	0,97	1,80
1,72	1,20	0,75	0,08	0,22	0,60	0,97	1,87
1,65	1,05	0,67	0,08	0,22	0,60	1,12	1,87
1,65	0,97	0,67	0,08	0,30	0,67	1,20	1,87
1,65	0,90	0,60	0,00	0,30	0,67	1,20	1,94
1,65	0,90	0,52	0,00	0,30	0,75	1,20	2,09
1,50	0,90	0,52	0,00	0,30	0,75	1,22	2,32
1,50	0,10	0,52	0,00	0,30	0,75	1,27	−2,46
1,50	0,90	0,52	0,00	0,30	0,75	1,27	
1,50	0,90	0,52	0,00	0,30	0,82	1,35	
1,42	0,82	0,37	0,00	0,37	0,82	1,42	

x_m obs. = 8,95 . 10^{-5} cm. x_m calc. = 8.76 . 10^{-5}.

$X_1 \times 0{,}00746$	$X_2 \times 0{,}00746$	n calc.	n obs.
+2,5	+1,5	9,6	13
+1,5	+0,5	29,7	31
+0,5	−0,5	43,4	38
−0,5	−1,5	29,6	27
−1,5	−2,5	9,6	13

Tableau II. Goutte n° 2.

Température = 21° C. Pression = 2,08 cm.

t pour 0,522 cm.		t'' pour 0,522 cm.		
28,8	26,0	17,0	17,1	V = 0,01933
27,1	26,3	19,4	16,1	V'' = 0,00305
26,0	27,0	16,2		V+V' = 0,01118
27,5	27,6	17,5		Volts = 107,5
				$h = 5{,}91 \quad 10^4$

b . 0,00746 pour des intervalles de 10 secondes.

1,4	2,5	3,0	3,4	3,8	4,2	4,5	5,0	5,2	5,7
1,5	2,5	3,1	3,4	3,8	4,2	4,5	5,0	5,2	5,9
1,5	2,5	3,1	3,4	4,0	4,2	4,5	5,0	5,3	5,9
1,7	2,6	3,1	3,5	4 0	4,3	4,6	5,0	5,3	6,1
1,8	2,7	3,1	3,5	4,0	4,3	4,6	5,0	5,3	6,2
1,9	2,8	3,2	3,6	4,0	4,3	4,6	5,0	5,4	6,2
1,9	2,8	3,2	3,6	4,0	4,3	4,6	5,1	5,4	6,2
2,0	2,8	3,2	3,6	4,0	4,4	4,7	5,1	5,4	6,3
2,1	2,9	3,2	3,7	4,1	4,4	4,7	5,2	5,4	6,4
2,1	3,0	3,2	3,7	4,2	4,5	4,7	5,2	5,5	
2,1	3,0	3,2	3,7	4,2	4,5	4,8	5,2	5,5	
2,2	3,0	3,3	3,7	4,2	4,5	4,9	5,2	5,5	
2,3	3,0	3,3	3,8	4,2	4,5	4,9	5 2	5,5	
2,5	3,0	3,3	3,8	4,2	4,5	5,0	5,2	5,5	

u_m obs. = 2,565 × 10^{-3} u_m calc. = 2,32 × 10^{-3}

$b_1 + 0{,}00746$	$b_2 + 0{.}00746$	n calc.	n obs.
$-\infty$	0	0,00	0,0
0	1	0,88	0,0
1	2	5,56	7,5
2	3	20,04	18,5
3	4	38,80	35,0
4	5	39,40	39,5
5	6	22,40	27,5
6	7	6,65	8,0
7	$+\infty$	1,32	0,0

sence de champ électrique entre les plateaux; t', t'', t''', t^{IV} t^V et t^{VI} sont les temps mis par des gouttelettes chargées respectivement de 1, 2, 3, 4, 5 et 6 charges élémentaires, pour s'élever de 0,522 cm sous l'action du champ électrostatique. On voit d'après les valeurs placées dans la dernière colonne, que :

$$V + V' = \frac{1}{2}(V + V'') = \frac{1}{3}(V + V''') = \frac{1}{4}(V + V^{IV}) =$$

$$\frac{1}{5}(V + V^{V}) = \frac{1}{6}(V + V^{VI})$$

comme le veut la théorie. Par conséquent, les valeurs $\frac{1}{2}(V+V')$, $\frac{1}{3}(V+V''')$ etc... ont été employées pour déterminer avec plus de précision la valeur de V+V'. Dans la dernière colonne on donne la valeur de V tirée de (19).

Dans la deuxième partie on a représenté les temps successifs de chute sur 0,0373 cm. A la fin on a donné les valeurs moyennes obtenues à partir de ces temps de chute. V est obtenu par (13) et « u_m calc. » par (21). La théorie prévoit que la composante moyenne du déplacement en une seconde le long d'une direction doit être $1{,}057 \times 10^{-3}$ et le déplacement observé a été $1{,}061 \times 10^{-3}$. Dans la partie III on a comparé la distribution calculée et observée des valeurs de t et de u. Les courbes 4 *a* et 4 *b* montrent graphiquement cette comparaison.

Il faut remarquer que la goutte n° 8 présentait des variations de temps de chute compris entre 2 et 25 secondes, la vitesse moyenne étant 10 0/0 plus faible que la vitesse actuelle due à une force extérieure constante. Dans ce cas plutôt extrême, il y a très bon accord entre les valeurs calculées et les valeurs observées.

Les tableaux relatifs aux cinq autres gouttes ont été omis, mais les courbes montrent la comparaison des distributions observées et calculées, et les valeurs moyennes sont données dans le tableau V.

Pour les gouttes d'huile en suspension dans l'air à la pression atmosphérique, Millikan a montré qu'on

Tableau III. — Goutte n° 4.

Température 21° C. — Pression 14.5.

Ire Partie. t		$b = 0{,}522$ cm. t'	t''	t'''	Volts = 485.5.
160	175.6	73.5	29.7	18.4	V = 0.00307
158	176.4	71.0	28 5	18.9	V' = 0.00742
158.9	168.0	72.8	29.1	18.8	V'' = 0.01754
167.0	170.0	71.0	29.0	t IV	V = 0.0279
161.5	182.8	68.0		13.5	V = 0.0587
166.2	175.2	70.0		t VI	V = 0.0607
170.0	164.4	70.4		8.6	V + V' moyen
166	178.0	68.7			= 0.01041.
187	169.2	70.2			$h = 28 \times 10^4$.
178		67.4			

IIe Partie. Valeurs de t. $b = 0.0373$.

8.6	10.0	10.6	11.0	11.6	12.0	12.4	13 0	13.2	13.6	14.6
8.8	10.0	10.6	11.2	11.6	12.0	12.4	13.0	13.2	13.8	14.8
9.0	10.0	10.8	11.2	11.6	12.0	12.4	13.0	13.2	13.8	14.8
9.0	10.0	10.8	11.2	11.6	12.0	12.4	13.0	13.2	13 8	15.0
9.0	10.0	10.8	11.2	11.7	12.0	12.4	13.0	13.2	14.0	15.0
9.0	10.2	10.8	11.2	11.7	12.0	12.4	13.0	13.2	14 0	15 0
9 2	10.2	10.8	11.2	11.7	12.0	12.5	13.0	13.2	14.0	15.0
9.4	10.2	10.8	11.2	11.8	12.0	12.5	13.0	13.4	14.0	15.0
9.4	10.4	11.0	11.2	11.8	12.0	12.6	13 0	13.4	14.0	15.0
9.4	10 4	11.0	11.2	11.8	12.0	12.6	13.0	13.4	14 0	15.2
9.4	10.4	11.0	11.2	11.8	12.0	12 7	13.0	13.4	14.2	15.2
9.5	10 4	11 0	11 2	11.8	12.1	12.8	13.0	13.4	14.2	15 2
9.5	10.4	11.0	11.4	12.0	12.1	12.8	13.0	13.4	14.2	15.4
9.6	10.4	11.0	11.4	12.0	12.2	12 8	13.0	13.4	14.4	16 0
9.8	10.4	11.0	11.4	12.0	12.2	12.8	13.0	13.4	14.5	
9.8	10.4	11.0	11.4	12 0	12.2	12.8	13.0	13.4	14.5	
10.0	10.5	11 0	11.5	12 0	12.2	13.0	13.2	13.5	14.6	
10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.2	13.0	13.2	13.5	14.6	
10.0	10.6	11.0	11.5	12.0	12 2	13.0	13.2	13.6	14.6	

$t_m = 12.12$ $V_m = 0.00308$ $V = 0.00310 = 202$
u_m obs. $= 1.061 \times 10^{-3}$ u_m calc. $= 1.057 \times 10^{-3}$.

IIIe Partie. Distribution de t. t_1	t_2	n obs.	n calc.	Distribution de u. u_1	u_2	n obs.	n calc.
00	8	0	0	$+\infty$	+ 4.0	0	0.24
8	9	4.0	1.4	+ 4.0	+ 3.0	6	2.1
9	10	16.0	10 5	+ 3.0	+ 2.0	18	11.8
10	11	32.0	31.4	+ 2.0	+ 1.0	34	32.2
11	12	44.5	50.7	+ 1.0	0.0	48	55 5
12	13	42.0	50.7	0.0	— 1.0	51	55.5
13	14	37.5	33.9	— 1.0	— 2.0	28	32.2
14	15	18.0	16.2	— 2.0	— 3.0	16	11.8
15	16	7.5	6.3	— 3.0	— 4.0	1	2.1
16	17	1.0	1.6	— 4 0	$-\infty$	0	0.24
17	18	0.5	0.1				

peut modifier la loi de Stokes de la façon suivante :

$$F = 6\pi\mu a v \left(1 + \frac{7{,}7 \times 10^{-6}}{a}\right)^{-1}$$

ou

$$B = 6\pi\mu a \left(1 + \frac{7{,}7}{a} \times 10^{-6}\right)^{-1}$$

On a fait à cette pression 341 observations sur une seule goutte d'huile; 151 valeurs de t pour $b = 0{,}00744$; 155 valeurs pour $b = 2 \times 0{,}00744$ et 34 valeurs pour $b = 5 \times 0{,}00744$. La comparaison entre les distributions observées et calculées pour ces trois cas est représentée sur les courbes 10 a, 10 b et 10 c. Les valeurs observées de u_m étaient $0{,}792 \times 10^{-3}$, $0{,}846 \times 10^{-3}$ et $0{,}725 \times 10^{-3}$. La fig. 2 (en bas) montre la comparaison de 341 valeurs de u observées et calculées; les deux courbes irrégulières représentent deux groupements différents des mêmes valeurs de u.

Si dans l'équation ci-dessus, F égale $\frac{4}{3}\pi\sigma a^3 g$, v est la vitesse due à la pesanteur et par suite a et B

Tableau IV. — Goutte n° 8.

Température 20° C. — Pression 2.98.

Ire Partie. t		$b = 0{,}522$ cm. t''	t'''	Volts = 162.7
43.5	49.0	32.5	17.5	V = 0.01112
47.5	49.8	32.0	18.0	V'' = 0.01592
43 4	49.0	32.6	18.5	V = 0.02888
45.1	45.0	33.2	18.0	V + V' moyen
45.1	47.6	33.2	18.4	= 0.01346
47.4	47.2	33.4		$h = 7.52 \times 10^4$
47.4	48.6	33 4		
47.4	48.4			

IIe Partie. Valeurs de t'. $b = 0.01492$. Volts = 162.7

2.0	3 8	4.4	4.9	5.4	6.0	6.5	7.1	7.8	8.3	9 0	10.2	12.6
2.4	3.8	4.4	5.0	5.5	6 0	6.5	7.1	7.8	8.4	9.0	10.3	12.8
2 6	3.8	4.4	5.0	5.5	6.0	6.6	7.1	7.8	8.4	9.0	10.3	12.8
2.8	3.8	4.4	5.0	5.6	6.0	6.6	7.2	7.9	8.4	9.0	10.3	13.0
2.8	3.8	4.4	5.0	5.6	6.0	6.6	7.2	8.0	8.4	9 0	10.8	13.0
2.9	3.8	4.4	5.0	5.6	6.0	6.6	7.3	8.0	8.4	9.1	10.8	13.0
3.0	3.8	4.4	5.0	5.6	6.1	6.6	7.4	8.0	8.4	9.2	11.0	13.2
3.0	4.0	4.4	5.0	5.7	6.1	6.6	7.4	8.0	8.4	9.2	11.0	13.2
3.0	4.0	4.4	5.0	5.7	6.1	6.7	7.4	8.0	8.4	9.2	11 0	13.4
3.0	4.0	4 4	5.0	5.7	6.2	6.7	7.4	8.0	8.4	9 2	11.0	13.6
3.0	4.0	4.4	5.0	5.7	6.2	6.8	7.4	8.0	8.4	9.3	11.1	13.7
3.0	4.0	4.4	5.1	5.8	6.2	6 8	7.4	8.0	8.4	9.4	11.2	13.8
3.2	4.0	4.5	5.1	5.8	6.2	6.8	7.4	8.0	8.4	9.4	11.3	14.0
3.2	4.0	4.5	5.1	5.8	6.2	6.8	7.5	8.0	8.5	9.4	11.4	14.0
3.2	4.0	4.5	5.1	5 8	6.2	6.8	7.5	8.0	8.6	9.4	11.4	14.5
3 2	4.0	4.5	5.1	5 8	6.2	6.8	7.5	8.0	8.6	9 5	11.4	14.6
3.2	4.0	4.5	5.2	5.8	6.2	6.8	7.5	8.0	8.6	9.6	11.6	14.8
3.3	4.0	4.5	5.2	5.8	6.2	6.8	7.6	8 0	8.6	9.6	11.6	15 1
3.3	4.0	4.5	5.2	5.9	6.3	6.8	7.6	8.0	8.6	9.6	11.7	15.1
3.4	4.0	4.6	5.2	5.9	6.3	6.9	7.6	8.0	8.6	9.8	11.7	15.2
3.4	4.1	4 6	5.2	5.9	6 3	7.0	7.6	8.0	8.8	9.8	11.8	16.6
3.4	4.1	4.6	5.2	6.0	6.4	7.0	7.6	8 1	8.8	9.8	11.8	16.6
3.4	4.2	4.6	5.2	6.0	6.4	7.0	7.6	8.1	8.8	10.0	12.0	18.4
3.5	4.2	4.6	5.3	6.0	6.4	7.0	7.6	8.2	8.8	10.0	12.0	19.4
3.5	4.2	4.6	5.4	6.0	6.4	7 0	7.7	8.2	9.0	10.0	12.0	20.0
3.6	4.2	4.7	5.4	6.0	6.4	7.0	7.7	8.2	9.0	10.0	12.2	21.8
3.6	4.2	4.8	5.4	6.0	6.4	7.0	7.7	8.2	9.0	10.0	12.2	25.0
3.6	4.2	4.8	5 4	6.0	6.4	7.0	7.8	8.2	9.0	10.1	12.4	
3.7	4.2	4.8	5.4	6.0	6.4	7.0	7 8	8.2	9.0	10.2	12.4	
3.7	4.2	4.8	5.4	6.0	6 4	7 0	7.8	8.2	9.0	10.2	12.4	
3.7	4 3	4.8	5.4	6.0	6.4	7.0	7.8	8.2	9.0	10 2	12.4	
3.8	4.3	4.8	5.4	6.0	6.4	7.0	7.8	8.2	9.0	10.2	12.4	

$t_m = 7.29$ $V'_m = 0.00205$ $V' = 0.00226$ $n = 411$
u_m obs. $= 1.95 \times 10^{-3}$ u_m calc. $= 2.05 \times 10^{-3}$

Tableau IV (*Suite*).

IIIe Partie. Distribution de l'.				Distribution de u.			
l'_1	l'_2	n obs.	n calc.	u_1	u_2	n obs.	n calc.
00	2	0.5	0.9	+ 8	+ 6	2	3.7
2	3	9.0	13 4	6	4	17	20.5
3	4	35.0	38.1	4	2	70	65.2
4	5	57.5	57.7	2	0	108	115.2
5	6	55.5	60.8	0	— 2	113	115.2
6	7	60.5	56.1	— 2	4	53	65 2
7	8	50.5	47.5	4	6	18	20.5
8	9	50.0	36.8	6	8	5	3.7
9	10	26.0	28.4				
10	11	15.5	21.3				
11	12	17.0	14.4				
12	13	12.5	10.7				
13	14	8.5	7.5				
14	15	4.0	5.5				
15	20	6.5	9.4				
20	∞	2.0	2.1				

peuvent être déterminés et ont pour valeur

$$[\sigma = 0{,}904 \text{ et } \mu = 0{,}000181]$$

$$a = 31{,}9 \times 10^{-6} \text{ et } B = 8{,}8 \times 10^{-8}$$

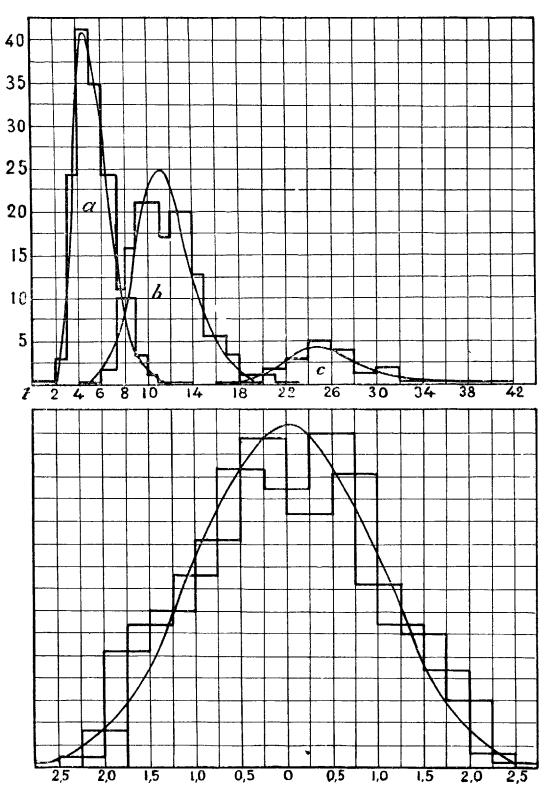


Fig. 2.

En substituant la moyenne des 3 valeurs de u_m et les valeurs de a et B dans (9) on obtient :

$$E = 6{,}40 \times 10^{-14}$$

et puisque

$$E = \frac{3}{2}\frac{RT}{N}$$

on a

$$[T = 296 \text{ et } R = 82{,}9 \times 10^{6}]$$

$$N = 57{,}5 \times 10^{22}$$

On voit ainsi que la théorie du mouvement brownien telle qu'elle est développée dans la partie I explique complètement la variation des déplacements observés et les temps de chute, et fournit des moyens très précis pour déterminer les grandeurs moléculaires.

Détermination de la valeur de Ne pour l'ionisation gazeuse. — Le travail de Townsend et de Franck et Nestfall[1] sur la mobilité et les coefficients de diffusion est le seul qui ait justifié l'hypothèse que la valeur de Ne pour les ions gazeux est la même que dans l'électrolyse. Le fait que les distributions théoriques et observées et les valeurs moyennes absolues du déplacement, concordent, prouve que cette hypothèse est correcte. Pour montrer l'étroitesse de cet accord, (21) a été résolue par rapport à $\sqrt{Ne}$ et le tableau V donne le résultat obtenu pour chaque goutte.

Tableau V.

Goutte N°	$u_m \times 10^5$	T	VV'	Volts	$\sqrt{Ne} \times 10^{-7}$	n
1	2.83	294	0.05036	334.5	1.68	125
2	2.365	294	0.01118	107.5	1.67	136
3	0.990	293	0.1110	637	1.645	321
4	1.061	294	0.01041	483.5	1.695	202
5	1.162	293	0.00868	318	1.73	171
6	1.256	293	0.0237	838	1.65	200
7	1.278	293	0.0201	628	1 66	84
8	1.950	293	0.133	162.7	1.785	411
9	2.43	293	0.0580	353	1.65	85

Si on attribue aux résultats des coefficients proportionnels aux nombres des observations mentionnés dans la dernière colonne du tableau ci-dessus, *on obtient pour la valeur moyenne ainsi calculée, qui représente la moyenne de* 1735 *valeurs de u*

$$\sqrt{Ne} = 1{,}698 \times 10^{7}$$

ou

$$Ne = 2{,}88 \times 10^{14}$$

La valeur de Ne obtenue en déposant de l'argent sous l'influence d'un courant électrique et exprimée en unités électrostatiques est

$$2{,}896 \times 10^{14}$$

1. Pour la discussion de leurs résultats voir Millikan et Fletcher, *Phil. Mag.*, juin 1910.

Si on substitue maintenant la valeur de N obtenue au paragraphe 4, dans la valeur de Ne on a[1] :

$$e = 5{,}01 \times 10^{-10}$$

qui est à moins de 2 pour 100 la valeur obtenue par Millikan. Il faut remarquer que à la fois N *et* Ne *et par conséquent e sont déterminés par la méthode ci-dessus exposée, en partant des mêmes séries d'expériences et non pas en utilisant des types d'expériences entièrement différents comme jusqu'ici cela a toujours été le cas, et c'est une preuve directe que la valeur de la charge élémentaire sur une goutte d'huile qui a reçu un ion par choc venant de l'air, est la même que la charge de l'ion argent dans l'électrolyse.*

1. Ceci montre qu'il n'y a pas de désaccord dans les valeurs de *e* obtenues par la méthode de Millikan et la méthode du mouvement brownien, comme cela semblait être le cas d'après les observations de Perrin pour le mouvement brownien dans les liquides.

Conclusions.

On a montré que l'agitation continuelle d'une petite particule suspendue dans un gaz, connue sous le nom de mouvement brownien, est entièrement expliquée par la théorie cinétique des gaz, à la fois qualitativement et quantitativement et que la valeur de Ne obtenue pour les ions gazeux est la même que celle de l'électrolyse.

Pour ce travail, je suis très reconnaissant envers le professeur R. A. Millikan qui m'a aidé pour poser les données sur lesquelles il repose, et sous la direction duquel j'ai exécuté ce travail, et aussi envers le professeur A. C. Sunn pour l'aide qu'il m'a apportée et ses bienveillantes critiques concernant la première partie de ce mémoire.

[Manuscrit reçu le 20 mai 1911.]