Sur la loi du rayonnement noir et la théorie des quanta. Remarques sur un travail de M. J. de Boissoudy

Edmond Bauer

SUR LA LOI DU RAYONNEMENT NOIR ET LA THÉORIE DES QUANTA. REMARQUES SUR UN TRAVAIL DE M. J. DE BOISSOUDY;

Par M. Edmond BAUER.

Il me semble nécessaire de discuter les bases d'un mémoire récent de M. J. de Boissoudy *sur une nouvelle forme de la loi du rayonnement noir et de l'hypothèse des quanta* [1].

I. — Rappelons d'abord le point de départ de M. de Boissoudy : soit un grand nombre de résonateurs identiques, de fréquence propre, formant un système conservatif. Supposons d'abord que leur mouvement obéisse à des équations de la forme hamiltonienne et que leur équilibre thermodynamique soit déterminé par la condition de probabilité maximum. Le rapport du nombre de ces résonateurs, dont l'énergie est comprise entre η et $\eta + d\eta$, à leur nombre total, est alors en moyenne :

$$\text{(1)} \qquad W d\eta = \frac{N}{RT} e^{-\frac{N\eta}{RT}} d\eta.$$

On peut appeler la fonction W *la densité la plus probable en énergie*.

Le résultat précédent est une conséquence rigoureuse des principes de la mécanique statistique [2].

(1) Voir ce volume, p. 385.

(2) La fonction W n'a la forme (1) que pour des systèmes oscillants, c'est-à-dire pour lesquels l'énergie est de la forme $\eta = \Sigma\alpha q^2 + \Sigma\beta p^2$, q et p représentant respectivement les coordonnées et les moments, les α étant différents de zéro. Dans le cas d'un gaz à une dimension, constitué par des points libres mobiles sur une droite, $\alpha = 0$. On verrait facilement que $W = \dfrac{e^{-\frac{N}{RT}\eta}}{\sqrt{\pi \frac{RT}{N} \eta}}$ et pour un gaz ordinaire, la loi de distribution de Maxwell donne $W = \dfrac{16\sqrt{\eta} e^{-\frac{N\eta}{RT}}}{\sqrt{\pi} \left(\frac{RT}{N}\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Mais, comme on le sait, l'application de ces principes aux résonateurs de Planck conduit à des résultats en contradiction avec l'expérience. La fonction W ne peut pas avoir la forme (1) et l'on est forcé de la supposer discontinue. Il est d'ailleurs naturel de réduire ces discontinuités au minimum. Cela posé, voici l'hypothèse de M. de Boissoudy.

L'énergie d'un résonateur est simplement assujettie à être plus grande que $h\nu$. Tous les résonateurs qui, d'après la loi de distribution (1) devraient posséder une énergie inférieure à $h\nu$ restent au repos ; les autres se comportent d'une façon normale et l'énergie se répartit entre eux suivant la formule (1).

En résumé :

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} W = \dfrac{N}{RT}\, e^{-\frac{N\eta}{RT}} & \text{pour} & \eta > h\nu, \\ W = 0 & \text{pour} & h\nu > \eta > 0, \\ W_0 = \displaystyle\int_0^{h\nu} \dfrac{N}{RT}\, e^{-\frac{N\eta}{RT}}\, d\eta = 1 - e^{-\frac{Nh\nu}{RT}}. & & \end{array}\right.$$

W_0 représente la fraction du nombre de résonateurs qui reste au repos.

De cette hypothèse, on déduit, par un calcul simple,

$$(3)\qquad \overline{E} = \frac{RT}{N}\left(1 + \frac{Nh\nu}{RT}\right) e^{-\frac{Nh\nu}{RT}}$$

où $\overline{E}$ représente l'énergie moyenne d'un résonateur, et

$$(4)\qquad F(\lambda, T) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5}\left(1 + \frac{R\lambda T}{Nch}\right) e^{-\frac{Nch}{R\lambda T}}$$

où $F(\lambda, T)\, d\lambda$ est la densité de l'énergie du rayonnement noir comprise entre λ et $\lambda + d\lambda$.

II. — Ce calcul est tout à fait rigoureux, mais voici le point sur lequel je veux attirer l'attention : *Quelles que soient les hypothèses que l'on puisse faire sur les équations du mouvement des résonateurs, la distribution* (2) *de l'énergie entre les résonateurs ne peut pas être considérée comme la distribution la plus probable, correspondant au maximum d'entropie.*

En d'autres termes, l'hypothèse de M. de Boissoudy est en contradiction, non seulement avec les équations de la mécanique et de l'électromagnétisme (à quoi nous commençons à nous habituer), mais encore avec les principes mêmes de la méthode statistique de Boltzmann, qui ont été appliqués par M. Planck, P. Ehrenfest [1] et H. Poincaré [2] à l'étude du rayonnement noir.

Pour établir ce point, je suis obligé de rappeler quelques propositions connues.

Considérons un grand nombre de systèmes identiques, dont l'état est défini par les valeurs de n paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et des n moments correspondants $p_1, p_2, \ldots, p_n$. L'état de chacun de ces systèmes peut être représenté, à chaque instant, par un point dans l'espace à $2n$ dimensions. Ces points se déplacent suivant des trajectoires déterminées par les équations du mouvement de ces systèmes. Si ces équations sont celles de la mécanique, il y a équivalence, au point de vue des probabilités, entre deux éléments quelconques de l'espace à $2n$ dimensions (ou éléments d'extension en phase) à condition qu'ils aient même extension. En d'autres termes, la probabilité $d\mathrm{P}$, pour que l'un des systèmes se trouve à l'intérieur de l'extension en phase $d\tau$ est proportionnelle à $d\tau$, la valeur du coefficient constant de proportionnalité importe peu. On le pose, en général, égale à l'unité.

Si les équations du mouvement des systèmes ne sont pas celles de la mécanique, la proposition précédente n'est plus vraie. Mais, pour que la méthode statistique soit applicable, il faut pouvoir définir une fonction f, des coordonnées et des moments, qui soit un dernier multiplicateur des équations du mouvement des systèmes considérés et telle que :

$$d\mathrm{P} = f(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)\, d\tau \text{ [3]}.$$

Dans le cas où l'on ignore les équations du mouvement des systèmes, on peut chercher *a priori* une fonction f telle que la distribution la plus probable des systèmes entre les différents éléments d'extension en phase, donne pour les q et les p des valeurs moyennes qui concordent avec les valeurs observées expérimentalement.

Appliquons ceci aux résonateurs de Planck. Ce sont des systèmes

---

(1) P. EHRENFEST, *Ann. der Phys.*, t. XXXVI, p. 91 ; 1911.
(2) H. POINCARÉ, *Journ. de Phys.*, 5e série, t. II, p. 4 ; 1912.
(3) H. POINCARÉ, *Loc. cit.*, p. 7.

à un degré de liberté, $n = 1$. Comme les équations de la mécanique ne leur sont pas applicables, il n'est pas nécessaire de choisir, pour définir leur état, leur élongation et leur moment cinétique ; il est plus commode de prendre comme variables indépendantes leur énergie η et leur phase φ. Comme toutes les phases sont évidemment équivalentes, la probabilité pour que l'énergie d'un résonateur de fréquence ν soit comprise entre η et $\eta + d\eta$ ne dépendra que de la nature du résonateur, c'est-à-dire de ν, et de son énergie η.

On aura donc :

$$dP = f(\eta, \nu)\, d\eta\,;$$

ce sont les propriétés de cette fonction f qui ont été étudiées par Poincaré. Il la désigne par les lettres W ou w. Il ne faut pas la confondre avec la fonction qui a été représentée plus haut par la même lettre.

Considérons un grand nombre de résonateurs de fréquence ν, formant un système conservatif, dont l'énergie est donnée. Lorsque la distribution la plus probable est réalisée on a [1] :

$$W = \frac{f(\eta, \nu)\, e^{-\frac{N\eta}{RT}}}{\int_0^\infty f(\eta_1 \nu)\, e^{-\frac{N\eta}{RT}}\, d\eta}$$

On démontre, en appliquant la loi du déplacement de Wien, que la fonction f est de la forme $\gamma\left(\frac{\eta}{\nu}\right)$, l'expression de γ étant la même pour toute espèce de résonateurs [2].

On a donc:

$$W = \frac{\gamma\left(\frac{\eta}{\nu}\right) e^{-\frac{N\eta}{RT}}}{\int_0^\infty \gamma\left(\frac{\eta}{\nu}\right) e^{-\frac{N\eta}{RT}}\, d\eta}, \tag{5}$$

(1) Ehrenfest, *Loc. cit.*, p. 97; — Poincaré, *Loc. cit.* Cf. *Ann. Chim. et Phys.*, (8, xxviii, p. 262 à 268 ; 1913.

(2) Ehrenfest, *Loc. cit.*, p. 99; ou plutôt $f = Q(\nu)\, \gamma\, \frac{\eta}{\nu}$, mais le facteur Q, constant pour chaque espèce de résonateurs, n'intervient pas dans les résultats. Sa valeur n'importe donc nullement.

et l'énergie moyenne d'un résonateur sera, en posant $\frac{\eta}{\nu} = q$,

$$(6) \qquad \overline{\mathrm{E}} = \int_0^\infty \eta \mathrm{W} d\eta = \frac{\nu \int_0^\infty q e^{-\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{RT}} q\nu} \gamma(q)\, dq}{\int_0^\infty e^{-\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{RT}} q\nu} \gamma(q)\, dq}.$$

C'est évidemment sur la fonction γ que doivent porter les hypothèses et non sur la fonction W qui en dérive. Faisons donc sur γ les mêmes hypothèses que M. de Boissoudy a faites sur W, savoir :

$$(7) \qquad \begin{cases} 1^\circ \quad \gamma = 1 \quad \text{pour} \quad q > h \\ \text{(les résonateurs se comportent d'une façon normale pour } n > h\nu) \\ 2^\circ \quad \gamma = 0 \quad \text{pour} \quad h > q > 0 \\ 3^\circ \quad \gamma_0 = \lim_{q_0 = 0} \int_0^{q_0} \gamma dq = \mathrm{A}_0 \quad \text{pour} \quad q = 0 \end{cases}$$

A_0 ne peut être qu'une constante, puisque γ n'est fonction que de q. Supposons que toutes les probabilités, qui seraient réparties entre $q = 0$ et $q = h$, si les résonateurs se comportaient d'une façon normale, soient concentrées au point $q = 0$.

On a alors :

$$\mathrm{A}_0 = \int_0^h dq = h;$$

si l'on porte dans (6) la fonction γ ainsi déterminée, il vient :

$$(8) \qquad \overline{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{N}} \frac{1 + \frac{\mathrm{N}h\nu}{\mathrm{RT}}}{1 + \frac{\mathrm{N}h\nu}{\mathrm{RT}} e^{\frac{\mathrm{N}h\nu}{\mathrm{RT}}}}$$

et comme $\mathrm{F}(\lambda, \mathrm{T}) = \frac{8\pi}{\lambda^4} \overline{\mathrm{E}}$, on obtient :

$$(9) \qquad \mathrm{F}(\lambda\mathrm{T}) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1 + \frac{\mathrm{R}\lambda\mathrm{T}}{\mathrm{N}ch}}{1 + e^{\frac{\mathrm{N}ch}{\mathrm{R}\lambda\mathrm{T}}}}.$$

Les équations (8) et (9) sont essentiellement différentes de (3) et (4) ; $\mathrm{F}(\lambda\mathrm{T})$ ne possède plus la propriété de tendre vers la loi de Wien

$\frac{C}{\lambda^5} e^{-\frac{Nch}{R\lambda T}}$ lorsque λT tend vers zéro ; elle tend vers une formule proposée autrefois par Lord Rayleigh $\frac{CT}{\lambda^4} e^{-\frac{Nch}{R\lambda T}}$, qui est contraire aux expériences de Rubens et Kurlbaum. Les hypothèses (7) et les calculs qui suivent se trouvent déjà dans le mémoire cité de M. Ehrenfest [1].

III. — En somme, il me semble incorrect de raisonner directement sur la fonction W dans laquelle intervient déjà l'idée d'une répartition donnée des résonateurs entre les divers domaines d'extension en phase, au lieu de faire porter les hypothèses sur les fonctions f ou γ, qui représentent la probabilité élémentaire et qui sont en relation immédiate avec les équations du mouvement.

On peut néanmoins essayer de justifier après coups les hypothèses faites sur W en cherchant à quelle fonction γ elles correspondent, mais si l'on fait ce calcul, on voit aisément que la théorie de M. de Boissoudy conduit à faire sur γ des hypothèses inadmissibles.

En effet, on a d'après (5) :

$$\gamma\left(\frac{\eta}{\nu}\right) = W(\eta)\, e^{\frac{N\eta}{RT}} \int_0^\infty \gamma\left(\frac{\eta}{\nu}\right) e^{-\frac{N\eta}{RT}} d\eta.$$

En particulier, on a, à la limite, pour $\frac{\eta}{\nu} = o$:

$$\gamma_0 = \frac{W_0}{\nu} \int_0^\infty \gamma\left(\frac{\eta}{\nu}\right) e^{-\frac{N\eta}{RT}} d\eta.$$

En divisant membre à membre les deux équations précédentes on a :

$$\frac{\gamma\left(\frac{\eta}{\nu}\right)}{\gamma_0} = \nu\, \frac{W(\eta)\, e^{-\frac{N\eta}{RT}}}{W_0}. \tag{10}$$

Dans l'hypothèse de M. de Boissoudy, $W(\eta) = \frac{N}{RT} e^{-\frac{N}{RT}}$ pour $\eta > h\nu$ et $W_0 = 1 - e^{-\frac{Nh\nu}{RT}}$.

---

(1) *Loc. cit.*, § 11, p. 105 et p. 110 F.

En remplaçant dans (10), on obtient

$$\frac{\gamma\left(\frac{\eta}{\nu}\right)}{\gamma(o)} = \frac{\frac{N\nu}{RT}}{1 - e^{-\frac{Nh\nu}{RT}}},$$

pour $\frac{\eta}{\nu} > h$.

Ce rapport, *qui ne devrait dépendre que de* η *et de* ν, *est ici fonction de la température.* En d'autres termes, l'hypothèse (2) fait intervenir, dans la définition des probabilités, la notion de température, qui s'introduit seulement comme conséquence de l'emploi des probabilités. N'y a-t-il pas un cercle vicieux dans ce mode de définition?

Une erreur analogue serait de croire que la probabilité de tirer d'un jeu complet une carte déterminée peut dépendre du nombre de fois que cette carte a déjà été tirée.

Par conséquent, si l'on donne à W la forme (2), on est forcé de faire sur la fonction γ des hypothèses qui semblent peu raisonnables. Mais la distribution W de l'énergie entre les résonateurs n'est pas déterminée lorsqu'on se donne *a priori* leur énergie moyenne $\overline{E}$ et la densité de l'énergie F (λ, T). On pourrait imaginer une infinité de fonctions différentes W (η, ν, T) qui conduisent toutes aux valeurs (3) et (4) pour $\overline{E}$ et F (λ, T). Cependant, comme l'a démontré H. Poincaré [1] il n'y a qu'une seule fonction $\gamma\left(\frac{\eta}{\nu}\right)$ qui corresponde à une valeur donnée de l'énergie moyenne des résonateurs ; à cette fonction Y correspond également une seule distribution W qui soit une « distribution la plus probable ».

Une méthode de calcul indiquée par H. Poincaré [1] permet de trouver la fonction $\gamma\left(\frac{\eta}{\nu}\right)$ qui correspond à la valeur (3) de l'énergie moyenne des résonateurs. Les calculs sont très compliqués ; mais on peut démontrer aisément que cette fonction possède, non seulement les discontinuités qui permettent de retrouver la formule de Planck, mais encore des singularités nouvelles.

IV. — En résumé, l'hypothèse que les résonateurs possèdent un certain seuil d'excitation, qu'ils restent au repos jusqu'au moment où

(1) H. Poincaré, *Loc. cit.*, p. 23.

ils ont absorbé brusquement une énergie finie, n'est pas nouvelle. Elle a été exprimée d'une façon précise par M. Ehrenfest, en 1912. Ses conséquences semblent d'ailleurs en contradiction avec l'expérience.

Si l'on accepte la forme que lui a donnée M. de Boissoudy, il faut renoncer, non seulement aux équations de l'électromagnétisme, mais encore aux principes de la méthode statistique.

Quant à la formule (4), qui représente d'après M. de Boissoudy la la loi du rayonnement noir, elle a été proposée dès 1909 par MM. Edmond Bauer et Marcel Moulin [1], comme loi purement empirique tendant, d'une part, vers la formule de Wien pour les petites valeurs du produit λT, et, d'autre part, vers celle de Rayleigh-Jeans pour les valeurs élevées de ce produit. On a choisi cette formule, à cette époque, car elle donnait pour le nombre d'Avogadro N, un nombre concordant avec le résultat des expériences de M. Jean Perrin, à condition d'admettre pour la constante de la loi de Stefan une valeur voisine de celle qu'avait obtenue M. Fery [2], $\sigma = 6{,}3\ 10^{-12}$. Il ne faut donc pas la rejeter si cette dernière valeur est exacte.

Mais nous avons actuellement de fortes raisons de penser que la valeur réelle de cette constante est notablement plus faible. D'abord, aucun expérimentateur n'a pu retrouver de nombre supérieur à $5{,}9\ 10^{-12}$.

Pour ce qui concerne l'application de la théorie de M. de Boissoudy aux chaleurs spécifiques, je n'ai que deux observations à faire :

1° La courbe (*fig.* 1, p. 394), qui doit représenter la variation des chaleurs atomiques des solides en fonction de la température, présente un maximum qui n'a jamais été décelé par l'expérience. D'ailleurs, comme le fait remarquer M. de Boissoudy, ce maximum 6,5 est notablement supérieur aux chaleurs atomiques *à volume constant* telles qu'elles sont données par l'expérience.

2° M. Debye [4] a déduit récemment des formules de Planck et Einstein, une loi des chaleurs spécifiques des solides qui est en parfait accord avec l'expérience et qui a, en même temps, une significa-

---

(1) E. Bauer et M. Moulin, *Procès-verbaux des séances de la Société de Phys.*, p. 81* ; 1909.

(2) Fery et Drecq, voir ce volume, p. 380.

(3) E. Bauer, *Procès-verbaux des séances de la Soc. de Phys.* — Séance du 18 avril 1913.

(4) P. Debye, *Ann. der Phys.*, t. XXXIX, 1913, p. 789.

tion théorique tout à fait précise. C'est là, à mon avis, l'argument le plus fort que l'on puisse apporter en faveur de la théorie de Planck.