Influence de la résistance de l'air sur les projectiles en rotation

P. Appell

JOURNAL
DE PHYSIQUE
THÉORIQUE ET APPLIQUÉE.

INFLUENCE DE LA RÉSISTANCE DE L'AIR SUR LES PROJECTILES EN ROTATION ;

Par M. P. APPELL.

I. — M. Z. Carrière a étudié expérimentalement les trajectoires aériennes de balles sphériques, homogènes, légères, tournant autour d'un axe perpendiculaire au plan de la trajectoire du centre ; il a trouvé des formes de trajectoires diverses suivant le sens et la grandeur de cette rotation (1).

Lorsque la sphère ne tourne pas, l'hypothèse communément admise est que la résistance de l'air se traduit par une force R appliquée au centre, dirigée en sens contraire de la vitesse V du centre et fonction croissante de V (2). Dans ce cas, l'expérience de M. Carrière donne bien la forme classique de la trajectoire.

Mais quand la balle tourne autour d'un axe perpendiculaire au plan de la trajectoire, la forme de la trajectoire du centre peut changer de diverses façons. La raison de ces changements doit être cherchée surtout dans le frottement de l'air sur la surface de la balle ; ce frottement produit des actions élémentaires qui, transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité, ont une résultante dépendant du sens et de l'intensité de la rotation.

D'après les expériences de M. Zahm sur le frottement de l'air sur une surface plane rectangulaire de côtés a et l, la vitesse V de l'air par rapport à la surface étant parallèle à la dimension l du rectangle, la force totale du frottement sur une face est :

$$F = 0{,}000319 . a . l^{0,93} . V^{1,85} \qquad (m, k, s) \text{ (3)}.$$

(1) *J. de phys.*, t. V, p. 175.

(2) Voir, par exemple, *Précis de mécanique*, par APPELL et DAUTHEVILLE n° 157.

(3) A.-F. ZAHM, *Atmospheric friction with special reference to Aeronautic*, Université catholique d'Amérique 1904, voir *Résistance de l'air*, par G. EIFFEL, Dunod et Pinat, 1910, p. 205.

Mais les équations à tirer de cette loi, dans le problème actuel, même en supposant F proportionnel au produit al et au carré de V paraissent bien compliquées.

Je pense qu'on pourrait arriver à expliquer les formes trouvées par M. Carrière, en admettant, pour représenter l'effet global de la résistance et du frottement de l'air, l'hypothèse suivante :

Le mouvement du centre de gravité est le même que si ce point était sollicité par son poids mg et une force de résistance $R = mg\,\varphi\,(V)$, croissant avec la vitesse V du point, dirigée *non en sens contraire de la vitesse* V, mais faisant avec le vecteur opposé à V un angle aigu α, positif ou négatif suivant le sens de la rotation ω, nul avec ω, et variant avec ω. Cette hypothèse revient à dire que tout se passe comme si, la résistance R étant tangente à la trajectoire en sens contraire de V quand $\omega = 0$, la rotation ω faisait tourner R en sens contraire de ω, d'un angle aigu α fonction de ω, nul avec ω.

Sur une petite étendue de trajectoire, ω restant sensiblement constant, l'angle α le serait aussi.

II. — Écrivons les équations du mouvement dans cette hypothèse. Supposons un arc le long duquel ω et par suite α sont constants, appelons θ l'angle de V avec Ox, les axes étant ceux de M. Carrière.

Les équations du mouvement sont en prenant :

$$R = mg\varphi\,(V)$$
$$\frac{d\,(V\cos\theta)}{dt} = -\,g\varphi\,(V)\cos\,(\theta+\alpha)$$
$$\frac{d\,(V\sin\theta)}{dt} = -\,g\varphi\,(V)\sin\,(\theta+\alpha) + g,$$

d'où, entre V et θ, la relation (équation différentielle de l'hodographe) :

$$[\varphi\,(V)\sin\,(\theta+\alpha) - 1]\,d\,(V\cos\theta) - \varphi\,(V)\cos\,(\theta+\alpha)\,d(V\sin\theta) = 0,$$
$$[\varphi\,(V)\sin\alpha - \cos\theta]\,dV - V\,[\varphi\,(V)\cos\alpha - \sin\theta]\,d\theta = 0,$$

qui donne V en fonction de θ. Cette équation pour $\alpha = 0$ se réduit à l'équation classique. Il y aurait intérêt à chercher les cas d'intégrabilité généralisant ceux que Legendre, Siacci et d'autres auteurs, notamment M. Drach, ont donnés, et de la mettre sous une forme normale analogue à celle que j'ai indiquée autrefois dans un article de l' *Archiv der mathematik und Physik*, 3e série, t. V, p. 177.

Je ne m'occupe pas ici de ces questions qui ont un intérêt purement mathématique.

III. — Je voudrais d'abord montrer que l'hypothèse en question rend compte des formes rectilignes de l'arc de certaines trajectoires signalées par M. Carrière (*fig.* 4 de son article).

Supposons en effet la trajectoire AB rectiligne et faisant un angle θ avec Ox. Soit M une position du mobile, V sa vitesse; décomposons la résistance R en deux, une R_1 verticale, l'autre R_2 suivant AB.

On devra avoir :

$$R_1 = mg.$$

La vitesse V est alors telle que :

$$m\frac{dV}{dt} = -R_2.$$

D'autre part :

$$\frac{R_1}{\sin\alpha} = \frac{R_2}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta - \alpha\right)} = \frac{R_2}{\cos(\theta + \alpha)}.$$

Les angles α et θ étant constants, R_1 étant constant et égal à mg, R_2 est constant, R également, V aussi car R est fonction de V, donc $R_2 = 0$. Alors :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta, \qquad R_1 = R.$$

Le mouvement est donc rectiligne et uniforme et la droite fait avec Ox l'angle θ égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$, α étant l'angle correspondant à la valeur donnée à ω.

IV. — Voici quelques indications sur le cas de R proportionnel à V, ce qui est sensiblement exact pour de faibles valeurs de V : on est alors en présence d'un cas d'intégrabilité.

Supposons :

$$R = mg\frac{V}{\lambda},$$

λ étant la valeur de V pour laquelle $\mathrm{R} = mg$. Les équations du mouvement sont alors :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{\lambda} \mathrm{V} \cos(\theta + \alpha)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{\lambda} \mathrm{V} \sin(\theta + \alpha) + g,$$

α étant une constante positive ou négative. On peut toujours choisir les unités de façon que $\lambda = g = 1$; on a donc en développant :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} \cos \alpha + \frac{dy}{dt} \sin \alpha,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} \sin \alpha - \frac{dy}{dt} \cos \alpha + 1.$$

Une première intégration donne en supposant que pour $t = 0$:

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right) = u_0, \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right) = v_0$$

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \cos \alpha + y \sin \alpha + u_0 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \sin \alpha - y \cos \alpha + t + v_0 \end{cases}$$

Soit i l'unité complexe, on en déduit :

$$\frac{d(x + yi)}{dt} = -xe^{i\alpha} - iye^{i\alpha} + it + u_0 + iv_0$$

$$(2) \qquad \frac{d(x + yi)}{dt} + (x + yi)\, e^{i\alpha} = it + u_0 + iv_0,$$

d'où, en intégrant :

$$x + yi = \mathrm{C}e^{-te^{i\alpha}} + (it + u_0 + iv_0)\, e^{-i\alpha} - ie^{-2i\alpha}.$$

La constante C se détermine en écrivant que pour $t = 0$, x et y sont nuls :

$$\mathrm{C} = ie^{-2i\alpha} - (u_0 + iv_0)\, e^{-i\alpha},$$

d'où :

$$(3) \quad x + yi = e^{-i\alpha}(ie^{-i\alpha} - u_0 - iv_0)\, e^{-te^{i\alpha}} + (it + u_0 + iv_0)\, e^{-i\alpha} - ie^{-2i\alpha}.$$

En égalant les parties réelles et les parties imaginaires on obtient x et y. Comme α est aigu, $e^{-te^{i\alpha}}$ tend vers zéro quand t augmente indéfiniment et le mouvement tend à devenir rectiligne et uniforme : les valeurs asymptotiques de x et y sont :

$$x = u_0 \cos\alpha + (t + v_0)\sin\alpha - \sin 2\alpha,$$
$$y = -u_0 \sin\alpha + (t + v_0)\cos\alpha - \cos 2\alpha\,;$$

le point tend donc à décrire avec la vitesse 1 une droite de coefficient angulaire cotang α.

Les composantes de la vitesse sont obtenues en différentiant (3). On a ainsi :

$$\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt} = (u_0 + iv_0 - ie^{-i\alpha})\, e^{-te^{i\alpha}} + ie^{-i\alpha}.$$

Quant t augmente indéfiniment, $\frac{dx}{dt}$ tend vers $\sin\alpha$ et $\frac{dy}{dt}$ vers $\cos\alpha$.

Écrivant séparément les valeurs de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ on a :

$$\frac{dx}{dt} = e^{-t\cos\alpha}\left[(u_0 - \sin\alpha)\cos(t\sin\alpha) + (v_0 - \cos\alpha)\sin(t\sin\alpha)\right] + \sin\alpha,$$
$$\frac{dy}{dt} = e^{-t\cos\alpha}\left[(v_0 - \cos\alpha)\cos(t\sin\alpha) - (u_0 - \sin\alpha)\sin(t\sin\alpha)\right] + \cos\alpha,$$

L'une ou l'autre ne peuvent s'annuler qu'un nombre fini de fois.

Par exemple, pour représenter graphiquement les valeurs de t qui annulent $u = \frac{dx}{dt}$, on construira la courbe :

$$s = e^{-t\cos\alpha}\left[(u_0 - \sin\alpha)\cos(t\sin\alpha) + (v_0 - \cos\alpha)\sin(t\sin\alpha)\right],$$

qui est une sinusoïde amortie dont les ondulations ont pour base $t = \frac{2\pi}{\sin\alpha}$ et on la coupera par la sécante :

$$s = -\sin\alpha,$$

qui, à cause de l'amortissement, coupera en zéro, un, deux, ..., en général, un nombre fini de points.

Si u_0 et v_0 sont égaux à $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, le mouvement est rectiligne et uniforme.

V. *Points d'inflexion.* — Reprenons le cas général où $R = mg\varphi$ (V). Écrivons qu'en un point M, la somme des projections des forces mg et R, sur la normale MN, est $\frac{mV^2}{\rho}$. Nous avons, en appelant comme plus haut, θ l'angle de la tangente V avec Ox, α l'angle du vecteur opposé à R avec V :

$$mg \cos \theta - R \sin \alpha = \frac{mV^2}{\rho}$$

$$\cos \theta - \varphi (V) \sin \alpha = \frac{V^2}{g\rho}.$$

S'il y a inflexion $\rho = \infty$, et :

$$\cos \theta - \varphi (V) \sin \alpha = 0.$$

Quand θ est aigu, comme dans la *fig.* 5 du mémoire de M. Carrière, ceci ne peut arriver que pour $\alpha > 0$. Dans le cas où R est proportionnel à V, $R = mg \frac{V}{\lambda}$, on a :

$$\cos \theta - \frac{V}{\lambda} \sin \alpha = 0,$$

ou en multipliant par V et remarquant que $V \cos \theta = \frac{dx}{dt}$,

$$\lambda \frac{dx}{dt} - \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] \sin \alpha = 0,$$

équation qui, d'après les valeurs ci-dessus de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, donne les valeurs de t correspondant aux inflexions.

ROLE DE LA LUMIÈRE ULTRA-VIOLETTE DANS LES RÉACTIONS CHIMIQUES (1) ;

Par M. Daniel BERTHELOT.

La chaleur, l'électricité, la lumière sont sans doute les trois agents physiques qui jouent le plus grand rôle dans le monde inanimé comme dans le monde vivant. Le rôle de la chaleur a été le premier approfondi scientifiquement, et utilisé industriellement. L'étude de

(1) Communication faite à la Société française de Physique : séance du 1er mars 1912.